

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра радиотехнических систем (РТС)



## **ТЕХНОЛОГИЯ OFDM**

Учебно-методическое пособие  
для лекционных и практических занятий,  
курсового проектирования,  
самостоятельной работы  
студентов радиотехнических специальностей

Разработчик:  
заведующий кафедрой РТС,  
профессор Мелихов С.В.

Томск - 2019

**Мелихов С.В.**

**ТЕНОЛОГИЯ OFDM:** Учебно-методическое пособие для лекционных и практических занятий, курсового проектирования, самостоятельной работы студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2019. – 23 с.

Описан многостанционный доступ на основе технологии OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов), широко используемый в многоканальных системах беспроводной связи.

Обсуждены достоинства и недостатки OFDM-технологии.

Рассмотрены особенности формирования низкочастотного (НЧ) OFDM-символа с применением обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) к цифровому потоку с любым числом уровней, а также принцип формирования «пилотных гармоник» и «неиспользуемых гармоник» в составе НЧ OFDM-символа.

Рассмотрены особенность квадратурного модулятора передатчика, формирующего однополосный OFDM-радиосигнал на основе НЧ OFDM-символа, а также особенность OFDM-демодулятора приемного устройства.

Учебно-методическое пособие предназначено для лекционных и практических занятий, курсового проектирования, самостоятельной работы студентов радиотехнических специальностей.

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| 1. Принцип формирования OFDM-радиосигнала .....   | 4  |
| 2. Ортогональность колебаний несущих частот OFDM-радиосигнала.<br>Ширина полосы частот OFDM-радиосигнала .....              | 6  |
| 3. Устойчивость технологии OFDM к многолучевому распространению<br>радиоволн .....  | 7  |
| 4. Структурная схема формирователя OFDM-радиосигнала<br>с использованием ОДПФ .....   | 11 |
| 5. Осциллограмма НЧ OFDM-символа. Циклический префикс. Пик-фактор<br>OFDM-символа .....                                     | 12 |
| 6. Использование ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа<br>на основе простой двухуровневой цифровой последовательности ..... | 14 |
| 7. Использование ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа на<br>основе комплексных цифровых последовательностей .....          | 18 |
| 8. Формирование НЧ OFDM-символов с «пилотными гармониками»<br>и с «неиспользуемыми гармониками» .....                       | 19 |
| 9. Квадратурная модуляция с получением однополосного<br>OFDM-радиосигнала .....   | 20 |
| 10. OFDM-демодулятор .....  | 21 |
| Список использованных источников .....  | 23 |

## 1. Принцип формирования OFDM-радиосигнала

Многостанционный доступ на основе мультиплексирования с ортогональным частотным разделением каналов или технология OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) широко используется в настоящее время в различных системах беспроводной связи.

На рис. 1 изображена структурная схема OFDM-формирователя, иллюстрирующая принцип получения OFDM-радиосигнала.

OFDM-формирователь содержит демультимплексор (ДМПЛ) цифрового потока,  $N$  канальных BPSK-модуляторов,  $N$  генераторов несущих частот (ГНЧ), суммирующее устройство (СУ).

Исходный цифровой поток  $M_k$  со скоростью следования битов  $R_b$  делится в ДМПЛ на низкоскоростные канальные цифровые потоки  $M_{ki}$  ( $i = 0, 2, 3, \dots, (N-1)$ ) со скоростями  $R_b / N$ .

Каждый низкоскоростной канальный поток осуществляет манипуляцию своей несущей  $f_{нq}$  ( $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) в своем канальном модуляторе  $KM_i$ .

В суммирующем устройстве (СУ) происходит сложение канальных радиосигналов с разными несущими частотами ( $f_{н0}, f_{н1}, \dots, f_{н(N-1)}$ ) и образуется высокочастотный OFDM-сигнал (OFDM-радиосигнал).

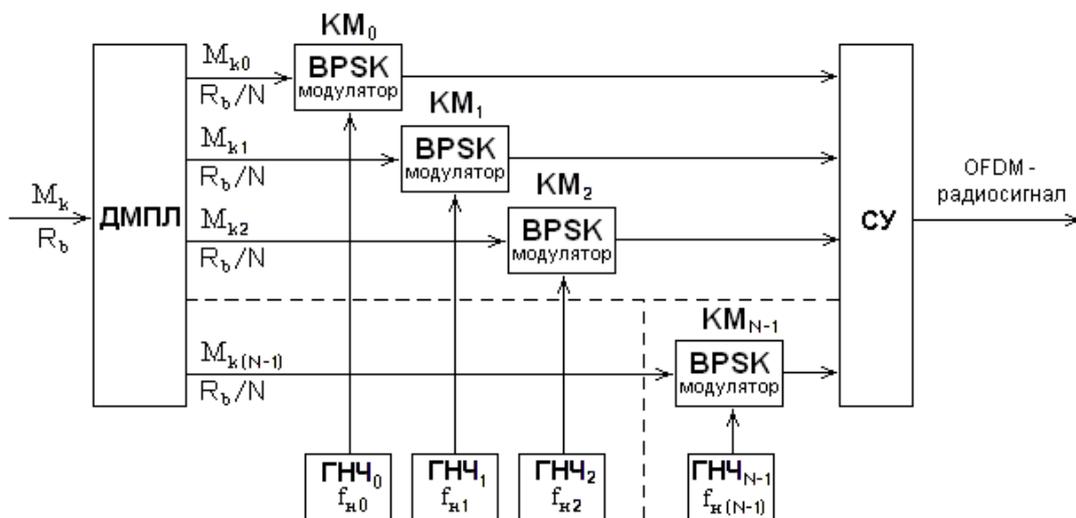


Рис. 1. Структурная схема OFDM-формирователя, иллюстрирующая принцип получения OFDM-радиосигнала

Получение высокочастотных OFDM-символов (OFDM-радиосимволов) с использованием канальных BPSK-модуляторов изображено на рис. 2. За каждый промежуток времени  $T$ , соответствующий  $N$  битам цифрового потока  $M_k$  (рис. 2,а), формируется один OFDM-радиосимвол с распределением  $N$  битов потока  $M_k$  на  $N$  несущих частот (рис. 2,б).

OFDM-радиосимвол передается в течение промежутка времени  $T_S = T$  и состоит из двух временных частей –  $T_G$  и  $T_U$  (см. рис. 2,б):

$$T_S = T_G + T_U \quad (1)$$

Временная часть  $T_G$  называется защитным интервалом OFDM-радиосимвола и при приеме не используется.

Временная часть  $T_U$  называется полезной (рабочей) частью OFDM-радиосимвола и обрабатывается в приемнике.

Длительность защитного интервала  $T_G$  может быть разной, но

$$T_{G\text{макс}} = T_U / 4. \quad (2)$$

Полезные части соседних OFDM-радиосимволов разделены защитным интервалом  $T_G$ .

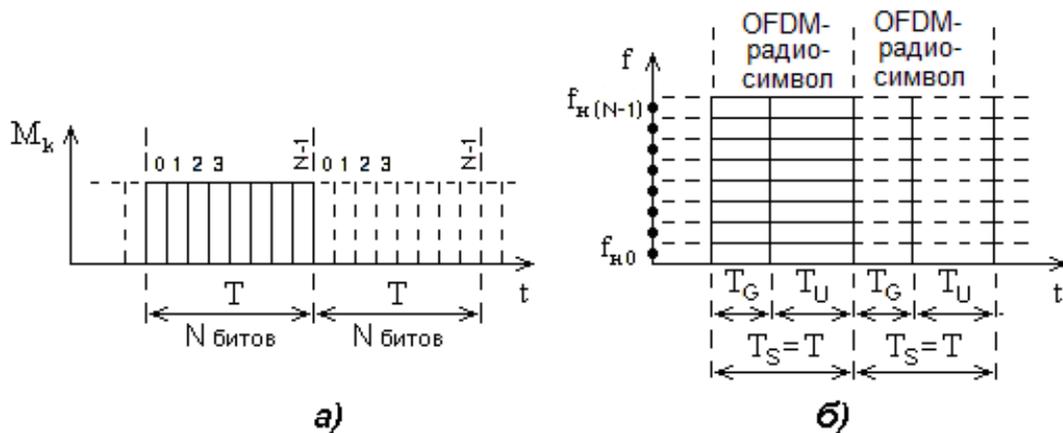


Рис. 2. К пояснению принципа формирования OFDM-радиосимволов при использовании в низкоскоростных каналах BPSK-модуляторов

Если вместо канальных BPSK-модуляторов (см. рис. 1) использовать или QPSK-модуляторы, или 16-QAM-модуляторы, или 64-QAM-модуляторы, или 256-QAM-модуляторы, то на  $N$  несущих частот можно распределить соответственно  $2N$ ,  $4N$ ,  $6N$ ,  $8N$  битов и получить увеличение скорости передачи цифрового потока соответственно в 2, 4, 6, 8 раз при той же ширине полосы частот радиоканала.

Количество несущих в различных системах связи, работающих с использованием технологии OFDM, зависит от их режимов работы и может быть разным. Например для системы мобильной связи 4-го поколения LTE (Long-Term Evolution) число несущих может быть равно 128, 256, 512, 1024, 2048.

В технологии OFDM из-за наличия в радиосигнале множества несущих частот ( $f_{H0}, f_{H1}, \dots, f_{H(N-1)}$ ) их еще называют «поднесущими частотами».

Однако структурная схема, изображенная на рис. 1 и содержащая  $N$  ГНЧ частот и  $N$  КМ, лишь иллюстрирует принцип получения OFDM-радиосигнала и в настоящее время на практике не используется.

В современных OFDM-формирователях генерация многих несущих OFDM-радиосигнала базируется на *обратном дискретном преобразовании Фурье* (ОДПФ, IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform), применяемом к символам цифрового потока в промежутки времени  $T$ . При использовании ОДПФ сначала формируются низкочастотные (НЧ) OFDM-символы на основе гармоник с частотами  $F_{H0}, F_{H1}, \dots, F_{H(N-1)}$ . Затем НЧ OFDM-символы переносятся в радиодиапазон с образованием OFDM-радиосимволов, состоящих из суммы ортогональных колебаний на несущих (поднесущих) частотах  $f_{H0}, f_{H1}, \dots, f_{H(N-1)}$ . При этом необходимость большого количества ГЧ и КМ в OFDM-формирователе отпадает.

Особенности формирователя OFDM-радиосигнала с использованием ОДПФ рассмотрены в разделах 2 - 8.

## 2. Ортогональность колебаний несущих частот OFDM-радиосигнала.

### Ширина полосы частот OFDM-радиосигнала

Для исключения взаимовлияния каналов с разными несущими частотами разность несущих ( $\Delta f_H = f_{Hq} - f_{H(q-1)}$ ) выбирается таким, чтобы *колебания на несущих частотах были ортогональными*.

Известно, что ортогональность двух колебаний разных частот имеет место в том случае, если интеграл от их произведения на временном интервале, равном длительности передачи символа, равен нулю. На основе этого *условие ортогональности колебаний несущих*  $f_{H0}, f_{H1}, \dots, f_{H(N-1)}$  (*проще – условие ортогональности несущих*) выполняется, если на интервале  $T_U$  укладываются целое число периодов разностных частот (см. выражения (21)):

$$f_{Hq} - f_{H(q-1)} = \Delta f_H = 1/T_U. \quad (3)$$

На рис. 3,а изображен спектр одного узкополосного канального радиосигнала на одной несущей (с шириной полосы частот по первому лепестку  $\Delta f_1 = 2/T_U$ ), а на рис. 3,б – спектр OFDM-радиосигнала, у которого на частоте каждой несущей спектральные компоненты всех остальных несущих проходят через ноль. Это исключает взаимное влияние каналов разных несущих друг на друга, хотя их соседние боковые полосы перекрываются.

Общая полоса частот OFDM-радиосигнала, состоящего из  $N$  узкополосных радиосигналов (см. рис. 3,б):

$$\Delta f_N \approx \frac{N}{T_U} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{T_G + T_U}{T_U}\right), \quad (4)$$

где  $\tau$  – *длительность бита* при использовании двухуровневых канальных модуляторов (BPSK-модуляторов, см. рис. 1) или *длительность символа* при использовании многоуровневых канальных модуляторов (QPSK-модуляторов, M-QAM-модуляторов).

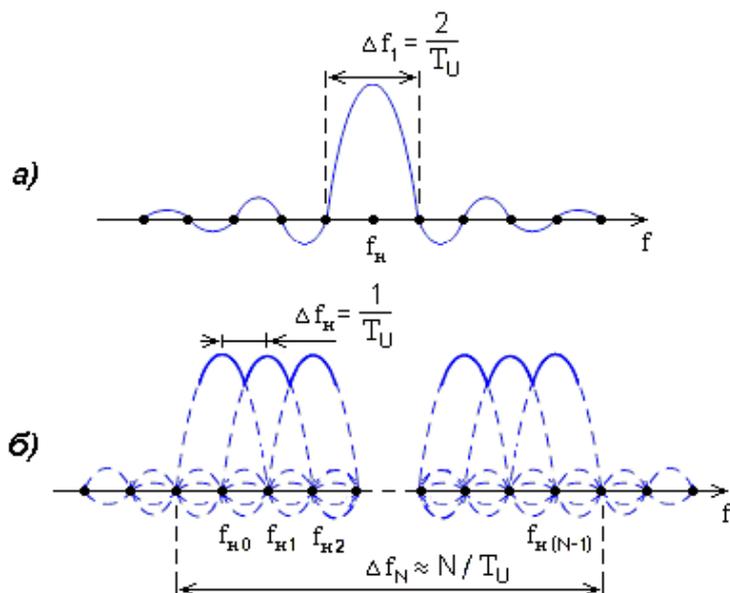


Рис. 3. Спектр узкополосного канального радиосигнала на одной несущей (а); спектр OFDM-радиосигнала на ортогональных несущих частотах с перекрывающимися соседними боковыми полосами (б)

Поскольку для радиосигналов с BPSK, QPSK, и M-QAM полоса частот  $\Delta f = 2/\tau$  (при параметре сглаживания  $\alpha = 1$ ), то в сравнении с этими видами модуляции *эффективность использования радиоспектра OFDM*:

$$\Theta = \frac{\Delta f}{\Delta f_N} = \frac{2T_U}{T_G + T_U} = \frac{2}{1 + T_G/T_U}. \quad (5)$$

При  $T_G \ll T_U$   $\Theta \approx 2$ . Однако, при увеличении длительности защитного интервала отношение  $T_G/T_U$  возрастает, и эффективность использования радиоспектра при OFDM уменьшается. Например, при  $T_G/T_U = 0,25$   $\Theta \approx 1,6$ .

### 3. Устойчивость технологии OFDM к многолучевому распространению радиоволн

Использование технологии OFDM обеспечивает высокую устойчивость систем мобильной связи к помехам из-за многолучевого распространения радиоволн, что особенно важно для городских районов с многоэтажной застройкой.

Как известно, многолучевое распространение радиоволн приводит к образованию «эхо-радиоволн» («эхо-сигналов»), т.е. радиоволн, отраженных от каких-либо препятствий и имеющих разные времена прихода в точку приема.

*Эхо-радиоволны приводят к трем отрицательным эффектам.*

*Первый отрицательный эффект – существенные замирания радиосигнала в точке приема из-за интерференции основной радиоволны и эхо-радиоволн.*

*Существенные замирания радиосигнала могут привести к невозможности приема переданной информации.*

Эффект существенных замираний радиосигнала особо ярко проявляется при движении (перемещении) приемника относительно передатчика. В этом случае изменение уровня результирующего радиосигнала в точке приема характеризуется глубокими замираниями, достигающими 40 дБ. Однако глубоким замираниям подвержены не все, а некоторые (селективные) области частот (рис. 4). Из-за этого при использовании технологии OFDM при приеме может произойти лишь частичная потеря битов исходного цифрового потока  $M_k$ , переданных на этих несущих частотах. Восстановление частично потерянных битов (частично потерянной информации) при приеме возможно при использовании в исходном цифровом потоке  $M_k$  избыточных битов помехоустойчивого кодирования.

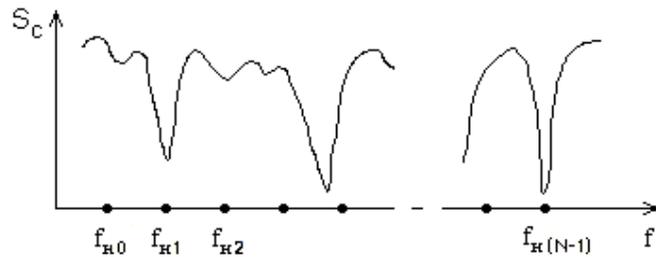


Рис. 4. Изменение уровня сигнала в точке приема от частоты, приводящее к селективным замираниям нескольких несущих частот

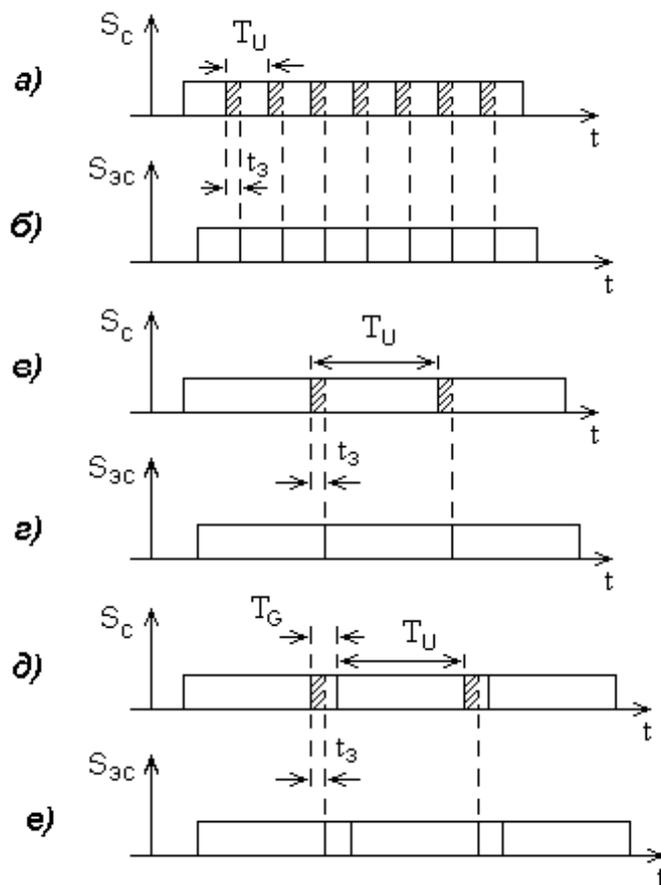


Рис. 5. Межсимвольная интерференция менее опасна при увеличении длительности символа и тем более при наличии защитного интервала

*Второй отрицательный эффект из-за эхо-радиоволн – межсимвольная интерференция цифрового сигнала (ISI – Inter Symbol Interference).*

Если из антенны на вход приемника поступает полезный сигнал  $S_c$  и, например, один эхо-сигнал  $S_{эс}$ , задержанный по времени на  $t_3$  (рис. 5,а,б), то при времени задержки равным или больше половины длительности следующего символа, происходит резкий рост цифровых ошибок.

При технологии OFDM длительность передачи полезной части OFDM-символа оказывается в  $z$  раз больше, чем длительность бита исходного потока  $M_k$ , где

$$z = \frac{T_U}{(T_S / N)} = \frac{N T_U}{(T_G + T_U)}. \quad (6)$$

*Большая длительность полезной части OFDM-символа обеспечивает хорошую защиту от межсимвольной интерференции – пораженной во времени может оказаться только малая доля полезной части OFDM-символа (рис. 5,в,г).*

*Более того, наличие защитного интервала в OFDM-символе практически устраняет вероятность возникновения межсимвольной интерференции (рис. 5,д,е).*

*Третий отрицательный эффект из-за эхо-радиоволн – скачки фазы и амплитуды принимаемого высокочастотного радиосигнала, которые могут привести к сбою работы приемного оборудования.*

Известно, что сумма двух или нескольких колебаний с одной частотой, но разными амплитудами и фазами, является колебанием той же частоты с некоторой амплитудой и фазой. В зависимости от фазы складываемых колебаний суммарная амплитуда уменьшается или увеличивается.

На рис. 6 изображены осциллограммы колебаний высокой частоты (ВЧ) на входе приемника:

- от основной радиоволны с единичной амплитудой, приходящей в антенну приемника в нулевой момент времени ( $t = 0$ );
- от эхо-радиоволны с амплитудой 0,5, приходящей в антенну приемника с задержкой на время  $t_3$  (изображенная на рисунке задержка на время  $t_3$  эквивалентна сдвигу эхо-радиоволны по фазе на  $150^\circ$  относительно основной радиоволны);
- результирующего колебания, образованного в соответствии с принципом суперпозиции суммой колебаний основной радиоволны и эхо-радиоволны.

*Видно, что в момент прихода в антенну приемника эхо-радиоволны (в момент времени  $t_3$ ) результирующее колебание имеет скачок фазы и скачок амплитуды.*

Очевидно, что скачки фазы и амплитуды результирующего колебания на входе приемника будут многократными при приходе в антенну приемника многих эхо-радиоволн с различными временами задержки.

*При технологии OFDM защитный интервал, длительность которого превышает время задержки эхо-радиоволн, позволяет устранить отрицательное влияние скачков фазы и амплитуды принимаемого радиосигнала.*

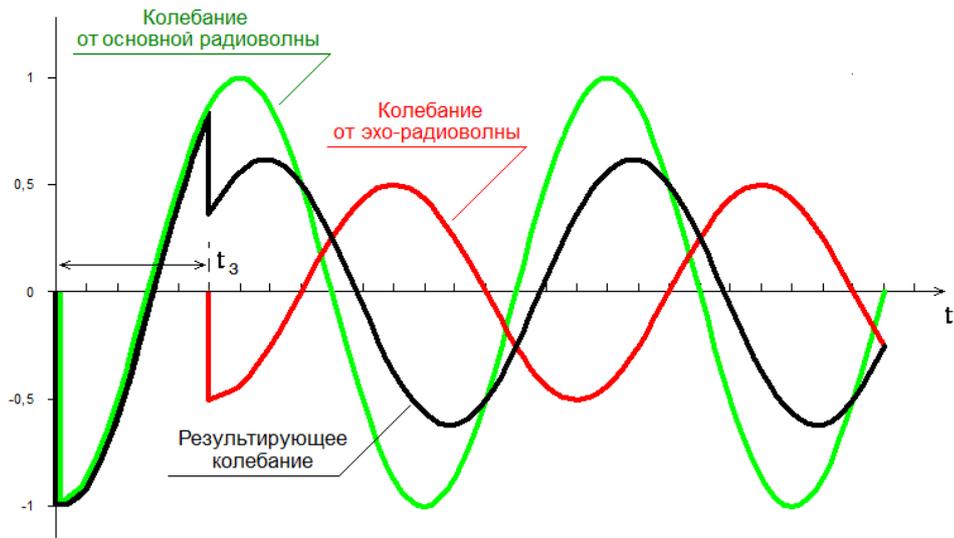


Рис. 6. Осциллограммы колебаний ВЧ на входе приемника:  
от основной радиоволны (зеленый цвет);  
от эхо-радиоволны (красный цвет);  
от суммы основной радиоволны и эхо-радиоволны (черный цвет)

Наличие защитного интервала в OFDM-символах позволяет использовать передатчики OFDM-систем для работы в *одночастотной синхронной сети* (например при организации синхронного цифрового телевидения DVB-T – Digital Video Broadcasting-Terrestrial), когда в приемнике (ПР) мешающим сигналом для текущего ( $j$ -того) OFDM-символа передатчика  $\Pi_1$  является сигнал предыдущего ( $i$ -того) OFDM-символа от соседнего передатчика  $\Pi_2$  (рис. 7).

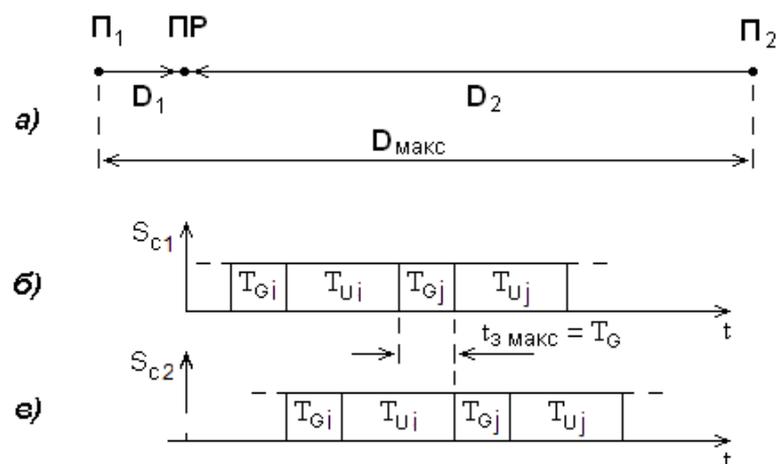


Рис. 7. Два одночастотных синхронных передатчика ( $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ )  
на расстоянии  $D$  друг от друга (а);  
сигнал  $S_{c1}$  в ПР от передатчика  $\Pi_1$  (б);  
сигнал  $S_{c2}$  в ПР от соседнего передатчика  $\Pi_2$   
с максимально возможной задержкой  $t_{3 \text{ макс}} = T_G$  относительно сигнала  $S_{c1}$  (в)

Если разница в запаздывании принимаемых сигналов от двух передатчиков ( $t_3$ ) не превышает длительности защитного интервала ( $T_G$ ), то сигнал от соседнего передатчика не будет оказывать мешающего действия (см. рис. 7,б,в).

Чем больше защитный интервал в OFDM-символе, тем большее расстояние  $D_{\text{макс}}$  возможно между передатчиками, передающими синхронные (одинаковые) OFDM-символы.

Максимальное расстояние между передатчиками одночастотной синхронной сети можно выразить с использованием рис. 7,а при условии  $D_1 \ll D_2$  следующим образом:

$$D_{\text{макс}} = c t_{\text{макс}} = c T_G, \quad (7)$$

где  $c$  – скорость света.

#### 4. Структурная схема формирователя OFDM-радиосигнала с использованием ОДПФ

На рис. 8 изображена структурная схема формирователя OFDM-радиосигнала с блоком ОДПФ, используемая в современных системах радиосвязи.

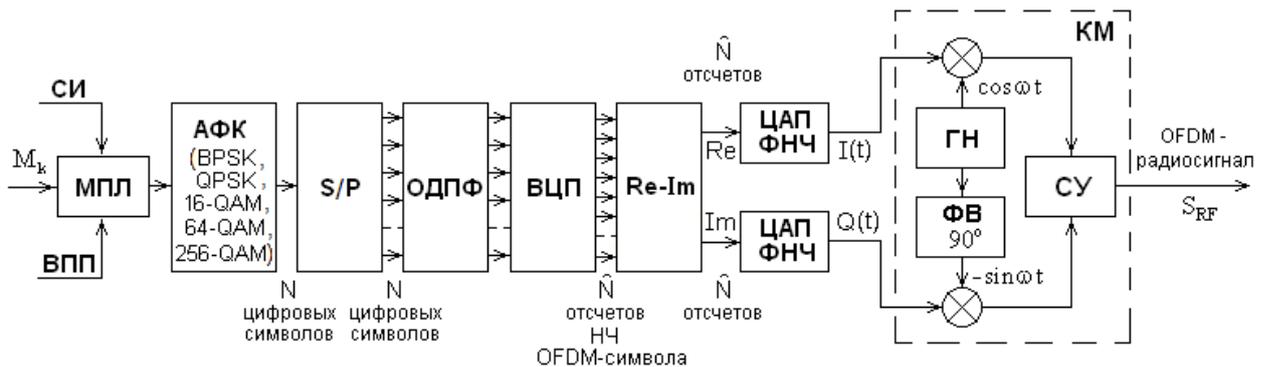


Рис. 8. Структурная схема формирователя OFDM-радиосигнала с блоком ОДПФ.

Количество символов и отсчетов ( $N$ ,  $\hat{N}$ ) соответствует интервалу времени  $T = T_S = (T_G + T_U)$

OFDM-формирователь содержит: мультиплексор (МПЛ); амплитудно-фазовый кодер (АФК); преобразователь последовательного цифрового потока в параллельный (S/P – Sequent/Parallel); блок, осуществляющий быстрое обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ); блок, осуществляющий *вставку циклического префикса* (ВЦП); два цифро-аналоговых преобразователя (ЦАП) на основе фильтров нижних частот (ФНЧ); квадратурный модулятор (КМ).

При помощи МПЛ в цифровой поток включаются символы *служебной информации* (СИ) и символы *вставки пилотных поднесущих* (ВПП).

Блок АФК может формировать символьные последовательности с числом уровней:  $M = 2^1 = 2$ ;  $M = 2^2 = 4$ ;  $M = 2^4 = 16$ ;  $M = 2^6 = 64$ ;  $M = 2^8 = 256$ . При этом считается, что амплитудно-фазовое кодирование цифровой последовательности блоком АФК эквивалентно соответственно BPSK ( $M = 2$ ), QPSK ( $M = 4$ ), 16-QAM ( $M = 16$ ), 64-QAM ( $M = 64$ ), 256-QAM ( $M = 256$ ).

В блоке S/P за каждый интервал времени  $T$  запоминается  $N$  символов цифровой последовательности для процедуры ОДПФ.

Блок ОДПФ на каждом интервале времени  $T$  осуществляет быстрое обратное дискретное преобразование Фурье от  $N$ -символьной цифровой последовательности с образованием  $N$  комплексных дискретных отсчетов низкочастотного (НЧ) OFDM-символа.

Для вставки циклического префикса в НЧ OFDM-символ в блоке ВЦП за интервал времени  $T$  осуществляется запись  $N$  комплексных дискретных отсчетов, а в следующий интервал времени  $T$  – их ускоренное считывание в специфическом порядке с образованием большего числа отсчетов:  $\hat{N} = N(T_G + T_U) / T_U$  (см. (14)).

Блок Re-Im выделяет действительные (Re) и мнимые (Im) составляющие дискретных отсчетов, полученных после ВЦП.

Блоки ЦАП за каждый интервал времени  $T$  преобразуют  $\hat{N}$  Re-составляющих и  $\hat{N}$  Im-составляющих дискретных отсчетов в непрерывные аналоговые сигналы  $I(t)$  и  $Q(t)$ .

За интервал времени  $T$  сигнал  $I(t)$  является низкочастотным I-OFDM-символом, а сигнал  $Q(t)$  – низкочастотным Q-OFDM-символом. I-OFDM и Q-OFDM символы состоят соответственно из косинусоидальных и синусоидальных ортогональных гармоник с частотами

$$F_{n0}, F_{n1}, \dots, F_{nq}, \dots, F_{n(N-1)}.$$

В КМ осуществляется перенос спектров низкочастотных I-Q-OFDM символов в область высоких частот с образованием однополосного OFDM-радиосигнала с ортогональными несущими частотами

$$f_{n0}, f_{n1}, \dots, f_{nq}, \dots, f_{n(N-1)}.$$

## 5. Осциллограмма НЧ OFDM-символа.

### Циклический префикс. Пик-фактор OFDM-символа

Для иллюстрации формирования защитного интервала при помощи циклического префикса (prefix – приставка) рассмотрим в пределах временного интервала  $T_S$  осциллограмму полезной части простейшего НЧ OFDM-символа, состоящего из суммы всего лишь трех ортогональных гармонических косинусоидальных колебаний с нулевой начальной фазой, одинаковыми амплитудами и частотами (рис. 9):

$$F_{n1}, F_{n2} = 2F_{n1}, F_{n3} = 3F_{n1}.$$

Для формирования в НЧ OFDM-символе защитного интервала длительностью  $T_G$  используют процедуру, которую называют «вставка циклического префикса» (ВЦП).

Процедура ВЦП заключается в том, что копия конца полезной части OFDM-символа вставляется перед его полезной частью (см. рис. 36, где  $T_G = T_U / 4$ ). Длительность циклического префикса, а, следовательно, и защитного интервала может быть разной (см. (2)).

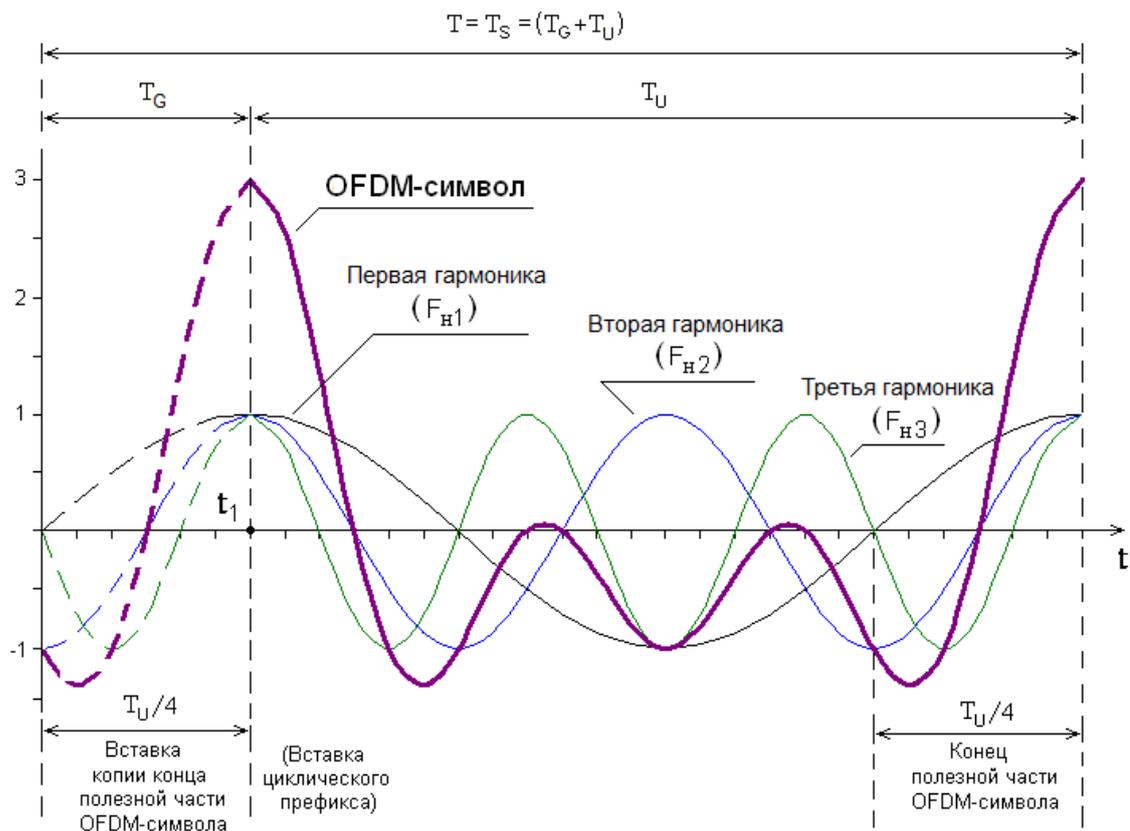


Рис. 9. Осциллограмма НЧ OFDM-символа, состоящего из суммы трех ортогональных гармонических колебаний. Префикс (защитный интервал) имеет длительность  $T_G = T_U / 4$

Префикс называют *циклическим*, поскольку его добавление производится для всех формируемых в передатчике OFDM-символов.

Из осциллограммы рис. 9 видно, что префикс позволяет в момент времени  $t_1$ , соответствующий границе защитного интервала и полезной части OFDM-символа, получить *непрерывный (без скачка) сигнал*. При этом обеспечивается *стабильная работа приемной аппаратуры*.

Из осциллограммы также видно, что OFDM-символ имеет непостоянную амплитуду и большое значение пик-фактора (Peak to Average Power Ratio – PAPR), определяемого как отношение максимальной (пиковой) мгновенной мощности радиосигнала к его средней мощности.

Наибольший пик-фактор OFDM-символа соответствует моменту времени, когда мгновенные значения амплитуд всех несущих максимальны:

$$\text{PAPR}_{\text{макс}} [\text{дБ}] = 10 \lg N. \quad (8)$$

Среднеквадратический пик-фактор OFDM-символа:

$$\text{PAPR} [\text{дБ}] \approx (1/2) \text{PAPR}_{\text{макс}} [\text{дБ}] = (1/2) 10 \lg N. \quad (9)$$

Большой PAPR является недостатком OFDM-сигнала, поскольку требует использования в передатчике и приемнике *линейных усилителей, работающих в режиме «А» и имеющих малый КПД*.

## 6. Использование ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа на основе простой двухуровневой цифровой последовательности

Известно, что *прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ, DFT – Discrete Fourier Transform)* и *обратные дискретные преобразования Фурье (ОДПФ, IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform)* связывают комплексные амплитуды гармоник сигнала  $\dot{C}_q$  ( $\dot{C}_0, \dot{C}_1, \dot{C}_2, \dots, \dot{C}_{m-1}$ ) в частотной области (на частотах  $F_{H0}, F_{H1}, \dots, F_{H(N-1)}$ ) и комплексные дискретные отсчеты сигнала  $\dot{X}_m$  ( $\dot{X}_0, \dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_{m-1}$ ) во временной области (на интервале времени  $T=1/F_{H1}$ ) следующими выражениями:

$$\dot{C}_q = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{m=0}^{N-1} \dot{X}_m e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} q \right) m}; \quad (10)$$

$$\dot{X}_m = \sum_{q=0}^{N-1} \dot{C}_q e^{j \left( \frac{2\pi}{N} m \right) q}, \quad (11)$$

где  $N$  – число отсчетов дискретного сигнала во временной области и число гармоник этого дискретного сигнала в частотной области.

Чтобы понять смысл использования ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа, сначала сделаем ПДПФ для дискретного сигнала, представленного для *упрощения рассмотрения действительными отсчетами* ( $N=8$ ) на временном интервале  $T$  (рис. 10,а):

$$X_0=2, X_1=0, X_2=-2, X_3=0, X_4=2, X_5=0, X_6=-2, X_7=0.$$

Используя (70), получим *действительные амплитуды* гармоник:

$$C_0 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 0 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 0 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 0 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 0 \right) 6} + 0 \right) = 0;$$

$$C_1 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 1 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 1 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 1 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 1 \right) 6} + 0 \right) = 0;$$

$$C_2 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 2 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 2 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 2 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 2 \right) 6} + 0 \right) = 1;$$

$$C_3 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 3 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 3 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 3 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 3 \right) 6} + 0 \right) = 0;$$

$$C_4 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 4 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 4 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 4 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 4 \right) 6} + 0 \right) = 0;$$

$$C_5 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 5 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 5 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 5 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 5 \right) 6} + 0 \right) = 0;$$

$$C_6 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 6 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 6 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 6 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 6 \right) 6} + 0 \right) = 1;$$

$$C_7 = \left( \frac{1}{8} \right) \left( 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 7 \right) 0} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 7 \right) 2} + 0 + 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 7 \right) 4} + 0 - 2 e^{-j \left( \frac{\pi}{4} 7 \right) 6} + 0 \right) = 0.$$

Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что *дискретный сигнал, характеризуемый во временной области отсчетами  $X_0, X_1, \dots, X_7$*  (см. рис. 10,а), *представляется в частотной области* (см. рис. 10,б) *двумя ортогональными гармониками с нулевыми начальными фазами, одинаковыми амплитудами*

$$C_2 = 1, \quad C_6 = 1$$

*и частотами*

$$\hat{F}_{H2} = 2/T, \quad \hat{F}_{H6} = 6/T.$$

Колебания этих гармоник во временной области изображены зеленым и красным цветом на рис. 10,а.

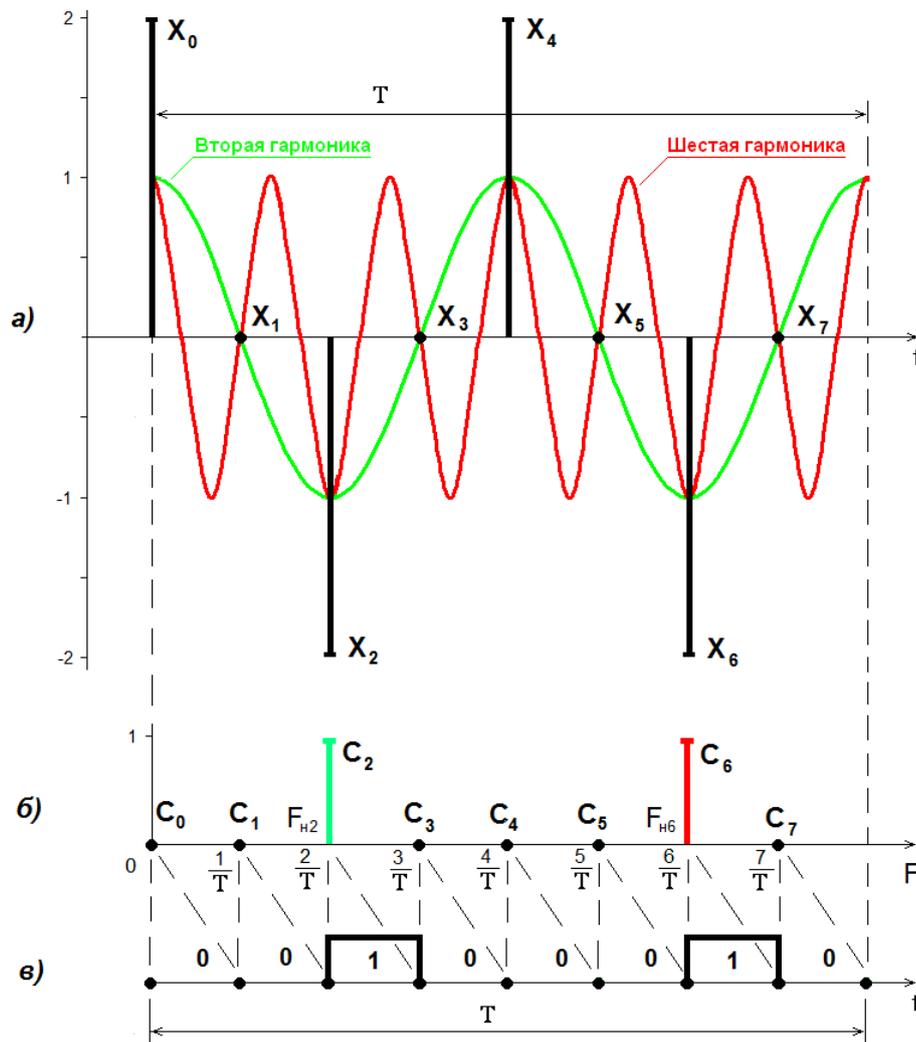


Рис. 10. Дискретный сигнал на временном интервале  $T$  и соответствующие ему гармонические колебания (а); представление дискретного сигнала в частотной области (б); символическая последовательность (0 0 1 0 0 0 1 0) на временном интервале  $T$  (в), дающая при обратном преобразовании Фурье дискретные отсчеты  $X_0, \dots, X_7$

Убедимся, что в соответствии с (11) ОДПФ от 8-ми спектральных составляющих в частотной области ( $C_0, C_1, \dots, C_7$ ) дает исходный дискретный сигнал во временной области ( $X_0, X_1, \dots, X_7$ ):

$$\begin{aligned} X_0 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}0\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}0\right)6} + 0 \right) = 2; \\ X_1 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}1\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}1\right)6} + 0 \right) = 0; \\ X_2 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}2\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}2\right)6} + 0 \right) = -2; \\ X_3 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}3\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}3\right)6} + 0 \right) = 0; \\ X_4 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}4\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}4\right)6} + 0 \right) = 2; \\ X_5 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}5\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}5\right)6} + 0 \right) = 0; \\ X_6 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}6\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}6\right)6} + 0 \right) = -2; \\ X_7 &= \left( 0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}7\right)1} + 0+0+0+0+0+1e^{j\left(\frac{\pi}{4}7\right)6} + 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь использование ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа с распределением  $N$ -символьной двухуровневой (бинарной) последовательности на  $N$  ортогональных гармоник с частотами  $\hat{F}_{n0}, \hat{F}_{n1}, \dots, \hat{F}_{n(N-1)}$ .

Для этого изменим рис. 10,б следующим образом:

- вместо частотной оси изобразим ось времени с интервалом  $T$ ;
- вместо двух спектральных составляющих изобразим 8-ми символьную двухуровневую (бинарную) последовательность с двумя единичными символами:

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0. \quad (12)$$

Очевидно, что, применяя на временном интервале  $T$  к этой последовательности ОДПФ, получим дискретные отсчеты, вычисленные выше:

$$X_0, X_1, \dots, X_7.$$

Если в течение временного интервала  $T$  дискретный сигнал, характеризуемый действительными отсчетами  $X_0, X_1, \dots, X_7$ , пропустить через идеальный (с единичным коэффициентом передачи) фильтр нижних частот (ФНЧ), то произойдет его цифро-аналоговое преобразование (ЦАП) в непрерывное колебание  $X(t)$ , которое изображено черным цветом на рис. 11. Сложная форма этого колебания определяется суммой двух

равноамплитудных косинусоидальных гармоник (2-й и 6-й) с частотами  $\hat{F}_{H2} = 2/T$ ,  $\hat{F}_{H6} = 6/T$  и нулевыми начальными фазами:

$$X(t) = C_2 \cos[2(2\pi/T)t] + C_6 \cos[6(2\pi/T)t] = 1 \cdot \cos(\hat{\Omega}_{H2}t) + 1 \cdot \cos(\hat{\Omega}_{H6}t). \quad (13)$$

где  $C_2 = C_6 = 1$ ;  $\hat{\Omega}_{H2} = 2\pi\hat{F}_{H2} = 2(2\pi/T)$ ;  $\hat{\Omega}_{H6} = 2\pi\hat{F}_{H6} = 6(2\pi/T)$ .

Заметим, что только единичные символы двухуровневой цифровой последовательности (12), а это 3-й и 7-й символы, порождают равноамплитудные гармоники с нулевой начальной фазой в НЧ OFDM-символе – 2-ю и 6-ю. Нулевые символы, а это – 1-й, 2-й, 4-й, 5-й, 6-й, 8-й, не вызывают возникновения 0-й (нулевой или постоянной составляющей отсчетов), 1-й, 3-й, 4-й, 5-й, 7-й гармоник. Очевидно, что этот результат – следствие ОДПФ, однозначно связывающего параметры сигнала во временной и частотной областях.

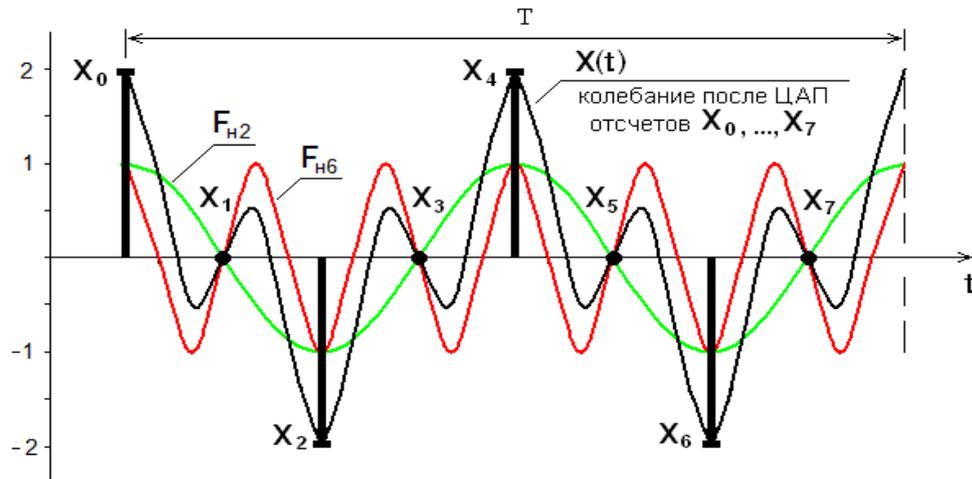


Рис. 11. ЦАП дискретного сигнала ( $X_0, X_1, \dots, X_7$ ) на временном интервале  $T$  с образованием аналогового колебания  $X(t)$ , соответствующего полезной части OFDM-символа

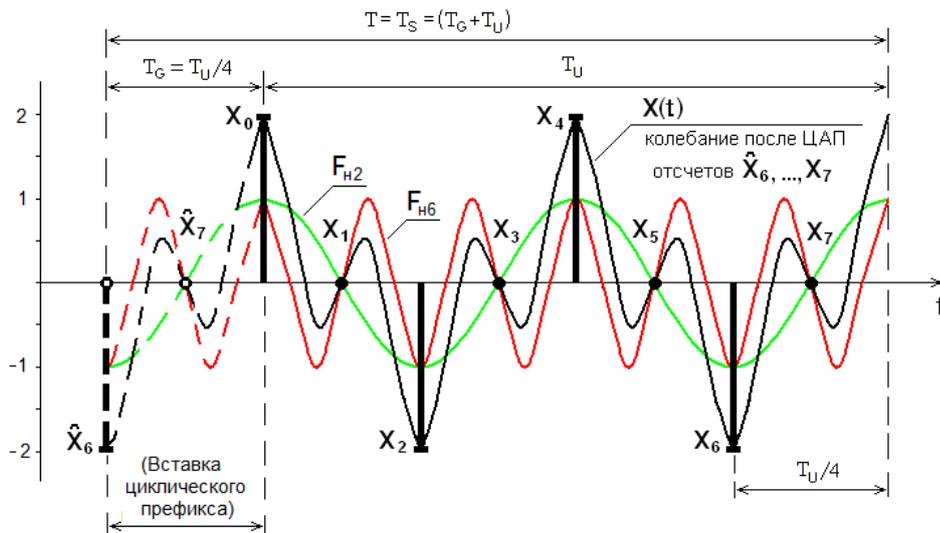


Рис. 12. Добавление двух отсчетов ( $\hat{X}_6, \hat{X}_7$ )

для вставки в OFDM-символ циклического префикса длительностью  $T_s/4$

Для окончательного получения НЧ OFDM-символа необходимо формирование защитного интервала путем «вставки циклического префикса» перед полезной частью символа (см. рис. 9).

Процедура вставки циклического префикса (ВЦП) иллюстрируется осциллограммами, изображенными на рис. 12: перед процедурой ЦАП копии последних отсчетов полезной части OFDM-символа ( $\widehat{X}_6$  и  $\widehat{X}_7$ ) вставляются перед отсчетами  $X_0, X_1, \dots, X_7$ .

Для этого вычисленные с использованием ОДПФ на интервале времени  $T$  отсчеты  $X_0, X_1, \dots, X_7$  сохраняются в буферной памяти блока ВЦП (см. рис. 8), а в следующий интервал времени  $T$  считываются из памяти в таком порядке:

$$\widehat{X}_6, \widehat{X}_7, X_0, X_1, \dots, X_7. \quad (14)$$

Очевидно, что при этом частота считывания отсчетов ( $F_{\text{сч}}$ ) должна быть больше частоты следования символов цифрового потока ( $F_{\text{сим}}$ )

$$F_{\text{сч}} = F_{\text{сим}}(T_G + T_U) / T_U, \quad (15)$$

а число отсчетов на интервале времени  $T$  увеличивается и становится равным

$$\widehat{N} = N(T_G + T_U) / T_U. \quad (16)$$

В результате ЦАП отсчетов, соответствующих (74) и распределенных на интервале времени  $T = T_S = (T_G + T_U)$ , образуется аналоговый НЧ OFDM-символ  $X(t)$ , изображенный на рис. 12 кривой черного цвета.

## 7. Использование ОДПФ для формирования НЧ OFDM-символа на основе комплексных цифровых последовательностей

В аппаратуре, используемой на практике, все операции (АФК, S/P, ОДПФ, ВЦП, АЦП, см. рис. 8) производятся над комплексными символами и отсчетами.

При этом 2 уровня АФК-BPSK, соответствующие битам «1»–«0», представляются комплексными цифровыми символами (с разностью фаз  $180^\circ$ ):

$$\langle 1 e^{j45^\circ} \rangle - \langle 1 e^{j225^\circ} \rangle; \quad (17)$$

4 уровня АФК-QPSK, соответствующие комбинациям из 2 бит («11»–«01»–«00»–«10»), представляются комплексными цифровыми символами:

$$\langle 1 e^{j45^\circ} \rangle - \langle 1 e^{j135^\circ} \rangle - \langle 1 e^{j225^\circ} \rangle - \langle 1 e^{j315^\circ} \rangle; \quad (18)$$

$M$  уровней АФК-M-QAM, соответствующие комбинациям из  $n$  битов ( $n = \log_2 M$ ), представляются комплексными цифровыми символами:

$$|S_k| e^{j\varphi_k}. \quad (19)$$

Учитывая особенности рассмотренных операций ОДПФ, ВЦП и АЦП, можно сформулировать следующие свойства, присущие структурной схеме рис. 8 при формировании НЧ OFDM-символа на основе комплексных цифровых символов после АФК.

1. Каждому цифровому символу на временном интервале  $T$  соответствует своя гармоника в НЧ OFDM-символе, причем после ОДПФ цифровым символам с номерами  $(0, 1, 2, \dots, N-1)$  соответствуют ортогональные гармоники с частотами:

$$F_{H0} = 0; \hat{F}_{H1} = \frac{1}{T}; \hat{F}_{H2} = \frac{2}{T}; \dots; \hat{F}_{H(N-1)} = \frac{(N-1)}{T}. \quad (20)$$

2. Амплитуды гармоник НЧ OFDM-символа равны амплитудам соответствующих цифровых символов после АФК.

3. Начальные фазы гармоник НЧ OFDM-символа равны фазам соответствующих цифровых символов после АФК.

4. После вставки циклического префикса, определяющего защитный интервал, частоты гармоник НЧ OFDM-символа увеличиваются в  $[(T_G + T_U) / T_U]$  раз:

$$F_{H1} = \left(\frac{1}{T}\right) \frac{(T_G + T_U)}{T_U} = \frac{1}{T_U}; F_{H2} = \left(\frac{2}{T}\right) \frac{(T_G + T_U)}{T_U} = \frac{2}{T_U}; \dots; F_{H(N-1)} = \left(\frac{N-1}{T}\right) \frac{(T_G + T_U)}{T_U} = \frac{(N-1)}{T_U}. \quad (21)$$

## 8. Формирование НЧ OFDM-символов с «пилотными гармониками» и с «неиспользуемыми гармониками»

Используя сформулированные выше свойства, формируют НЧ OFDM-символы с «пилотными гармониками» и НЧ OFDM-символы с «неиспользуемыми гармониками».

«Пилотные гармоники» имеют одинаковые амплитуды, одинаковые начальные фазы и равномерное распределение в спектре НЧ OFDM-символа (рис. 13).

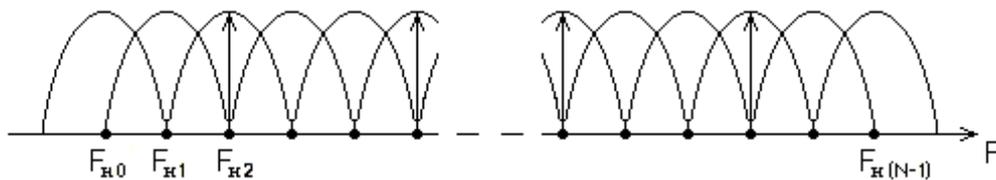


Рис. 13. Пилотные гармоники в спектре НЧ OFDM-символа (помечены стрелками).

На практике пилотные гармоники располагают гораздо реже

В квадратурном модуляторе (КМ, см. рис. 8) НЧ OFDM-символы с «пилотными гармониками» преобразуются в OFDM-радиосимволы с «пилотными поднесущими». Поэтому на рис. 8 операция введения в цифровой поток при помощи мультиплексора (МПЛ) специальных символов для формирования НЧ OFDM-символа с «пилотными гармониками» названа «вставкой пилотных поднесущих» (ВПП).

OFDM-радиосимволы с пилотными поднесущими при приеме используют для оценки состояния канала связи.

«Неиспользуемые гармоники» вводятся в спектр НЧ OFDM-символов для получения промежутка (зазора) между частотными полосами соседних каналов.

Например, в наземном цифровом телевидении для ОДПФ используются массивы размером  $N = 2 \cdot 1024 = 2048$  или  $N = 8 \cdot 1024 = 8192$ , а число задействованных гармоник в НЧ OFDM-символах соответственно равно 1705 и 6817.

## 9. Квадратурная модуляция с получением однополосного OFDM-радиосигнала

Блоки ЦАП (см. рис. 8) за каждый интервал времени  $T$  преобразуют Re-составляющие и Im-составляющие комплексных дискретных отсчетов НЧ OFDM-символа ( $\dot{X}_m$ , см. (70)) в непрерывные аналоговые сигналы  $I(t)$  и  $Q(t)$ , состоящие из косинусоидальных и синусоидальных гармоник с частотами  $\Omega_{nq} = 2\pi F_{nq}$  и комплексной амплитудой  $\dot{C}_q = C_q e^{j\varphi_q}$ :

$$\begin{aligned} I(t) + jQ(t) &= \dot{X}(t) = \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} \dot{C}_q e^{j\Omega_{nq}t} = \sum_{q=0}^{N-1} C_q e^{j\varphi_q} e^{j\Omega_{nq}t} = \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} C_q \left[ \cos(\Omega_{nq}t + \varphi_q) + j\sin(\Omega_{nq}t + \varphi_q) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

Откуда следует:

$$I(t) = \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos(\Omega_{nq}t + \varphi_q); \quad (23)$$

$$Q(t) = \sum_{q=0}^{N-1} C_q \sin(\Omega_{nq}t + \varphi_q). \quad (24)$$

На выходе квадратурного модулятора (КМ) образуется OFDM-радиосигнал  $S_{RF}$ :

$$\begin{aligned} S_{RF} &= I(t)\cos\omega t - Q(t)\sin\omega t = \\ &= \left[ \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos(\Omega_{nq}t + \varphi_q) \right] \cos\omega t - \left[ \sum_{q=0}^{N-1} C_q \sin(\Omega_{nq}t + \varphi_q) \right] \sin\omega t = \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{q=0}^{N-1} C_q \left\{ \cos[(\omega - \Omega_{nq})t - \varphi_q] + \cos[(\omega + \Omega_{nq})t + \varphi_q] \right\} - \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{q=0}^{N-1} C_q \left\{ \cos[(\omega - \Omega_{nq})t - \varphi_q] - \cos[(\omega + \Omega_{nq})t + \varphi_q] \right\} = \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos[(\omega + \Omega_{nq})t + \varphi_q] = \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos[2\pi(f + F_{nq})t + \varphi_q] = \\ &= \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos(2\pi f_{nq}t + \varphi_q), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $f_{nq} = (f + F_{nq})$ , т.е.  $f_{n0} = (f + F_{n0}) = f$ ,  $f_{n1} = (f + F_{n1})$ ,  $f_{n2} = (f + F_{n2})$ , ...,  $f_{n(N-1)} = (f + F_{n(N-1)})$ .

Как следует из (25), OFDM-радиосигнал является однополосным, т.е. имеет только верхнюю боковую полосу относительно высокочастотной несущей  $f$ .

Спектр радиосигнала  $S_{RF}$  изображен на рис. 3, где  $f_{n0} = (f + F_{n0}) = f$ .

## 10. OFDM-демодулятор

На рис. 14 изображена структурная схема OFDM-демодулятора.

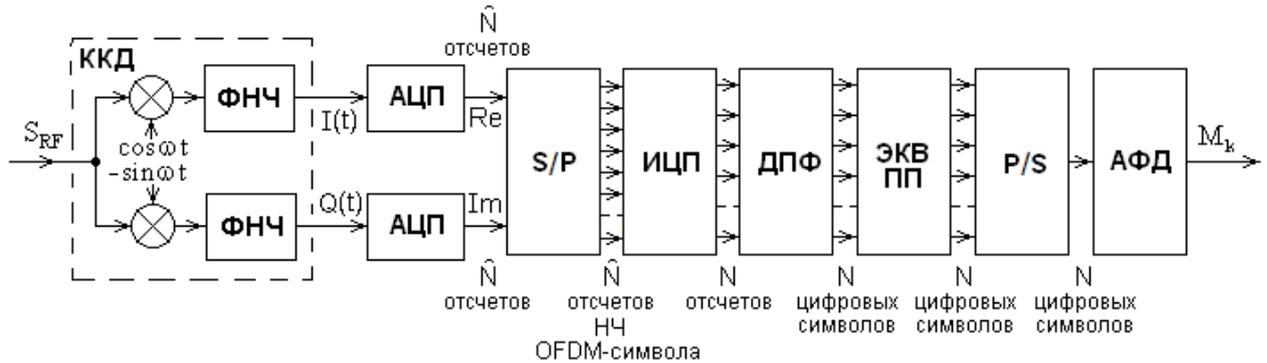


Рис. 14. Структурная схема OFDM-демодулятора.

Количество отсчетов и символов ( $\hat{N}$ ,  $N$ ) соответствует интервалу времени  $T = T_S = (T_G + T_U)$

OFDM-демодулятор содержит:

- ККД – когерентный квадратурный детектор;
- АЦП – аналого-цифровые преобразователи синфазного и квадратурного каналов;
- S/P (Sequent/Parallel) – преобразователь последовательных дискретных отсчетов действительной (Re) и мнимой (Im) составляющих НЧ OFDM-символа в параллельный массив комплексных отсчетов;
- ИЦП – блок, осуществляющий изъятие циклического префикса из массива комплексных отсчетов НЧ OFDM-символа;
- ДПФ – блок, осуществляющий быстрое прямое дискретное преобразование Фурье;
- ЭКВ ПП – эквалайзер по пилотным поднесущим;
- P/S (Parallel/Sequent) – преобразователь массива комплексных цифровых символов НЧ OFDM-символа из параллельного в последовательный; АФД – амплитудно-фазовый декодер.

Выходные напряжения ККД с учетом фильтрующих свойств ФНЧ соответствуют Re-составляющим и Im-составляющим аналоговых сигналов  $I(t)$  и  $Q(t)$ , характеризующихся выражениями (83) и (84):

$$U_I = S_{RF} [\cos \omega t] = \left[ \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos [(\omega + \Omega_{nq})t + \varphi_q] \right] [\cos \omega t] \sim \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos (\Omega_{nq}t + \varphi_q) = I(t); \quad (86)$$

$$U_Q = S_{RF} [-\sin \omega t] = \left[ \sum_{q=0}^{N-1} C_q \cos [(\omega + \Omega_{nq})t + \varphi_q] \right] [-\sin \omega t] \sim \sum_{q=0}^{N-1} C_q \sin (\Omega_{nq}t + \varphi_q) = Q(t). \quad (87)$$

После АЦП сигналов  $I(t)$  и  $Q(t)$  в блоке S/P за каждый интервал времени  $T$  запоминается  $\hat{N}$  комплексных отсчетов НЧ OFDM-символа.

Блок ИЦП за каждый интервал времени  $T$  считывает из блока S/P только  $N$  комплексных отсчетов, соответствующих полезной части НЧ OFDM-символа.

В блоке ДПФ происходит быстрое прямое дискретное преобразование Фурье с получением  $N$  цифровых символов за каждый интервал времени  $T$ .

В блоке ЭКВ ПП с помощью производится выравнивание частотной и фазовой характеристик канала связи для устранения искажений амплитуд и фаз цифровых символов.

Блок P/S преобразовывает массив комплексных цифровых символов из параллельного в последовательный.

Блок АФД осуществляет амплитудно-фазовое декодирование комплексных цифровых символов с образованием битового потока  $M_k$ .

**Список использованных источников**

1. Шлома А.М., Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Технология OFDM: Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая Линия - Телеком, 2015. – 360 с.
2. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Цифровые видеоинформационные системы: Теория и практика. – М.: Техносфера, 2012. – 1008 с. – (Мир цифровой обработки). – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233462>.
3. Дэйв Уиппл. Концепции ортогонального частотного разделения каналов (OFDM). (Режим доступа: [www.russianelectronics.ru/developer-r/review/2187/doc/50176/](http://www.russianelectronics.ru/developer-r/review/2187/doc/50176/)).
4. Галустов Г.Г., Мелешкин С.Н. Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением сигналов: Учебное пособие. – Таганрог: Технологический институт Южного федерального университета, 2012. – 80 с.
5. Зубарев Ю.Б., Кривошеев М.И., Красносельский И.Н. Цифровое телевидение. – М.: Научно-исследовательский институт радио (НИИР), 2001. – 568 с.
6. Мелихов С.В. Методы манипуляции цифровой радиосвязи. [Электронный ресурс]: Учебное пособие для лекционных и практических занятий, курсового проектирования, самостоятельной работы студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2017. – 64 с. (Режим доступа: <http://edu.tusur.ru/publications/7028>).