Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники
(ТУСУР)

Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников

Высшая математика

Дифференциальное исчисление

Учебное пособие

Томск 2019

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
М 123

Рецензенты:

Старенченко В. А., доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Томского государственного архитектурно-строительного университета;

Ивлев Е. Т., кандидат физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Томского политехнического университета.

Магазинников Л. И.
М 123 Высшая математика. Дифференциальное исчисление : учебное пособие / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников. — Томск, 2019. — 92 с.

ISBN 978-5-4332-0114-9

Пособие содержит теоретический материал и примеры решения задач по следующим разделам математики: введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных. Приведены задачи для самостоятельной работы с указанием ответов.

Для студентов высших технических учебных заведений, а также для студентов, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-4332-0114-9

Оглавление

Предисловие

“Дифференциальное исчисление” — один из важнейших разделов математического анализа, в котором в самом общем виде изучается понятие функций. Функции являются инструментом изучения переменных величин. Под величиной понимается всё то, что можно измерить и выразить числом.

С развитием науки появились переменные величины в экономике, лингвистике, психологии, демографии и других дисциплинах, которые, казалось бы далеки от математики. После этого стало возможным применять математические методы и в этих дисциплинах. Один и тот же процесс характеризуют очень многие переменные величины. Возникает проблема изучения их взаимосвязи, выяснения как изменение одной из них влияет на поведение других. Решение этой проблемы и привело к появлению учения о функциях, в котором изучаются с самой общей точки зрения всевозможные связи между переменными величинами.

Некоторые процессы характеризуются всего двумя переменными величинами. При этом возникают функции от одного аргумента, довольно подробно изучаемые в курсе математики средней школы. Первое знакомство с понятием функции в вузе происходит в курсе линейной алгебры, в котором изучаются так называемые линейные функции различных классов:

1) линейные формы — линейные функции n аргументов вида $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, $(a_i = \text{const})$;

2) линейные операторы, в которых каждому n-мерному вектору сопоставляется m-мерный вектор, каждая координата которого является линейной формой;

3) билинейные формы — частный случай функции двух аргументов.

При изучении линейных операторов, а также билинейных и квадратичных форм широко используется матричный аппарат. В разделе “Введение в математический анализ” происходит дальнейшее более глубокое изучение функций на основе понятия предела. Современная теория пределов использует топологический подход, заключающийся в том, что на множествах строится каким-либо образом система окрестностей. Это позволяет дать определение предела в самом общем виде, объединяя многие частные случаи. С использованием понятия предела подробно изучается наиболее важный для приложений класс непрерывных функций.

Основная идея дифференциального исчисления — это линеаризация функции, т.е. представление её приближённо вблизи заданной точки в виде линейной функции. Поэтому предпочтительнее в качестве исходного взять понятие дифференцируемой функции и дифференциала. При этом производная матрица появляется при введении понятия дифференциала сразу для функций всех видов $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$ при различных значениях n и m. Это позволяет сделать изложение дифференциального исчисления компактным и более полно отражающим его основные идеи.

Лишь в простейших случаях функция может быть задана в виде формулы, параметрически или неявно. Функция может быть задана некоторым интегралом, в виде суммы ряда, дифференциальным уравнением и другими способами. Эти способы изучаются в других разделах математического анализа.

Весь материал разбит на четыре раздела. В первом из них изучаются первоначальные сведения о функциях, проводится их классификация как по размерности, так и по свойствам. Для построения теории пределов сначала дано понятие окрестностей точки на прямой, плоскости и в пространстве произвольной размерности. Изучаются типы окрестностей и формы их задания в виде неравенств для всевозможных случаев. Далее приводятся традиционные сведения из теории пределов и непрерывности.

Второй раздел посвящён дифференциальному исчислению функций одной и многих переменных. Основной задачей дифференциального исчисления является изучение широкого класса функций путём выделения линейной её части. Поэтому в качестве первоначальных понятий в этом разделе взяты дифференцируемые функции и дифференциал функций одной и многих переменных, а затем даны определения производных.

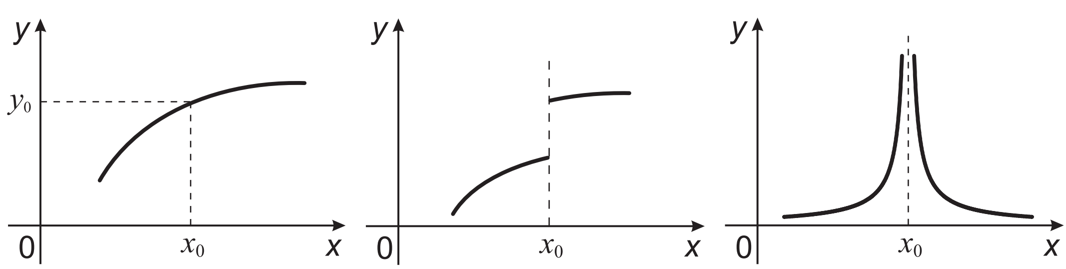
В третьем разделе содержатся методические указания, в которых подробно разобраны способы решения типовых задач по дифференциальному исчислению с целью оказать помощь студентам в выполнении контрольной работы, помещённые в четвёртом разделе.

Предусмотрена возможность автоматизированного самоконтроля при наличии устройства “Символ” или его компьютерного аналога, разработанного в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Введение

Для математического описания многих явлений природы потребовалось ввести понятие переменной величины. Например, движение материальной точки можно охарактеризовать двумя переменными величинами: временем t и длиной пути S, пройденного точкой за время t. Величины t и S между собой взаимосвязаны. Каждому значению переменной t ставится в соответствие единственное значение переменной S. Принято говорить, что переменная S является функцией переменной величины t. Кратко записывают: $S = f(t)$. В математике не учитывают конкретное содержание переменных величин и изучают функции в общем виде: $y = f(x)$. Величину x называют независимой переменной или аргументом, а величину y — зависимой переменной или функцией от x. Для каждой теоретической и прикладной науки характерны свои классы функций. Например, при изучении процессов в экономике появляется целый ряд функций: производственная функция, функция потребления, функция полезности и многие другие. В теории вероятностей наиболее важными являются функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей. В математическом анализе изучают функции с общей точки зрения, не связывая их с конкретным содержанием. Поэтому выводы, получаемые в математике, применимы во всех областях, где возникает необходимость в использовании понятия функции.

Пусть имеем произвольную функцию $y = f(x)$. Допустим, что некоторое значение $x = x_0$ по какой-то причине является наиболее важным. Возникает задача: охарактеризовать поведение функции, если x будет приближаться к значению x_0. Например, имеем функцию $y = (1+x)^{1/x}$. Представляет интерес поведение величины y, если x неограниченно приближается к нулю. Доказано, что в этом случае y приближается к числу Эйлера $e = 2{,}71828\ldots$ — одной из мировых констант. Это число встречается во многих задачах и служит основанием для введения новых функций: $y = e^x$; $y = \log_e x = \ln x$ — натуральный логарифм; $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус; $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус; $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} y}$ — гиперболический тангенс; $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} y}$ — гиперболический котангенс и других, значительно расширяющих класс элементарных функций, изучаемых в средней школе. Гиперболические функции находят применение при построении неевклидовых геометрий подобно тригонометрическим функциям в евклидовой геометрии.



а) *б*) *в*)

Допустим, что процесс характеризуется функцией $y = \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}$. Каково поведение величины y, если x приближается к единице? Такие задачи в математике решают с помощью понятия предела функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0. Пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. В зависимости от поведения функции при приближении к точке x_0 все функции можно разбить на два класса — непрерывные в точке x_0 и имеющие разрыв в этой точке. На рисунке *а*) изображен график непрерывной функции, а на рисунках *б*) и *в*) — разрывных.

Для непрерывных функций отыскание предела особых трудностей не представляет. Например, в случае $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)$ интуиция подсказывает, что этот предел равен 10, хотя мы пока еще не знаем точное определение предела. Приведенные ранее функции $y=(1+x)^{1/x}$ и $y=\dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}$ относятся к классу разрывных функций в точках $x_0=0$ и $x_0=1$ соответственно.

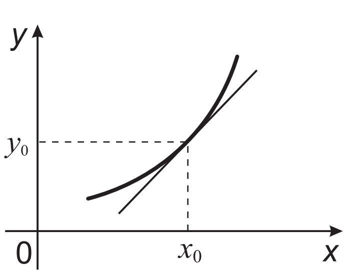
Понятие предела является одним из основных в курсе математического анализа. С его помощью вводятся многие другие понятия: производной, определенного интеграла, числового и функционального рядов и т.д.

Еще одной характеристикой поведения функции $y=f(x)$ в точке x_0 является скорость изменения величины y при изменении величины x. Например, если x — количество внесенных удобрений, а y — урожайность, то важно знать, как изменение количества внесенных удобрений повлияет на урожайность. Для характеристики скорости поступим следующим образом. Зафиксируем как-либо аргумент x, положив $x=x_0$, и дадим ему приращение Δx. В результате величина y также получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Ясно, что скорость возрастания величины y тем выше, чем больше Δy. В зависимости от характера изменения величины Δy при изменении Δx все непрерывные функции делятся на два класса — дифференцируемые и недифференцируемые. Для дифференцируемых функций приращение Δy можно представить в виде суммы двух слагаемых:

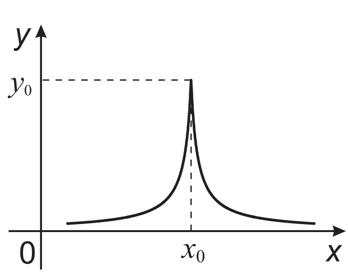
$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где A — константа, а второе слагаемое, т.е. функция $\alpha(\Delta x)$, стремится к нулю быстрее величины Δx.

Первое слагаемое пропорционально Δx. При малых Δx приближенно можно положить $\Delta y\approx A\Delta x$. При этом функцию $y=f(x)$ вблизи точки x_0 мы заменяем приближенно очень простой линейной функцией $\varphi(x)=Ax$. Константа A равна пределу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует производная $f'(x_0)$. В этом случае график функции $y=f(x)$ имеет в точке x_0 касательную прямую. Если же функция в точке x_0 не дифференцируема, то касательной нет. На рисунке *г*) изображен график дифференцируемой в точке x_0 функции, а на рисунке *д*) — недифференцируемой.



г)



д)

Можем записать $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$. Первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ обозначают dy и называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Дифференциал функции — это часть приращения функции, пропорциональная величине Δx. Заменяя приращение функции дифференциалом, мы трудновычисляемую величину Δy заменяем приближенно дифференциалом, который находится очень просто при умении находить $f'(x_0)$, а это не так уж сложно.

Понятия производной и дифференциала служат инструментом для дальнейшего глубокого изучения функций, что является основной задачей дифференциального исчисления — одного из разделов математического анализа.

1 Введение в математический анализ

1.1 Множества. Операции над множествами

Для сокращения записей мы будем часто использовать следующие символы (кванторы).

Квантор общности $\forall$. Запись $\forall x$ означает: всякий (любой) x.

Квантор существования $\exists$. Запись $\exists x$ означает: существует x.

Понятие множества является первичным и определению не подлежит, его лишь можно пояснить примерами. Множество считается заданным, если имеется правило, позволяющее установить относительно любого объекта, является ли он элементом этого множества или нет. Множество можно задать либо перечислением всех его элементов, либо указанием свойства, которым обладают элементы этого множества и не обладают объекты, не являющиеся его элементами. Множества будем обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D, X, Y и т.д. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\oslash$. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A. Если a не принадлежит A, то пишут $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$.

Говорят, что множество A входит в B (пишут $A \subset B$), если для $\forall a \in A \to a \in B$. В этом случае A называют подмножеством B.

Множества A и B называются равными $(A = B)$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Над множествами определим следующие операции.

Объединением или суммой множеств A и B (обозначают $A \cup B$, $A + B$) называют множество C, состоящее из всех элементов множеств A и B, не содержащее никаких других элементов.

Очевидно, $A \cup A = A$. Операция объединения коммутативна: $A \cup B = B \cup A$ и ассоциативна $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Пересечением множеств A и B называется множество C (обозначают $C = A \cap B$ или $C = A \cdot B$), состоящее лишь из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и A, и B. Операция пересечения множеств обладает свойствами:

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad A \cap A = A.$$

Операции пересечения и объединения множеств связаны распределительным законом $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, содержащее все те и только те элементы множества A, которые не являются элементами множества B.

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$, элементами которого являются всевозможные пары (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Аналогично можно определить прямое произведение любого числа множеств.

Пример. Пусть $A = \{1,3,4,8\}$, $B = \{1,2,4,5,7,8,9\}$. Тогда

$$C = A + B = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}, \; A \cap B = \{1,4,8\}, \; A \setminus B = \{3\}.$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

1.1.1 Даны два множества чисел $A = \{1,3,7,9\}$ и $B = \{2,3,4,7,8,9\}$. Найдите множество $A \cup B$.

1.1.2 Даны два множества чисел $A = \{2,4,5,7,9\}$ и $B = \{1,2,3,4,5,8\}$. Найдите множество $A \cap B$.

1.1.3 Даны два множества чисел $A=\{1,3,6,7,8\}$ и $B=\{2,3,7,9\}$. Найдите множество $A\setminus B$.

1.1.4 Даны три множества $A=\{1,4,6,7\}$, $B=\{2,4,7,8\}$, $C=\{1,5,8,9\}$. Найдите множество $D=A\cap(B\cup C)$.

1.2 Числовые множества. Границы числовых множеств

1.2.1 Множества действительных чисел

Действительным числом называется любая десятичная дробь. Множество всех действительных чисел будем обозначать R. Подмножествами R являются:

N — множество натуральных чисел $1,2,\ldots$;

Z — множество всех целых чисел (это десятичные дроби, все десятичные знаки которых равны нулю);

Q — множество рациональных чисел — множество всех периодических десятичных дробей. Любое рациональное число r можно представить как отношение двух целых чисел $r=\dfrac{m}{n}$, $n\neq 0$.

На множестве действительных чисел введены операции сложения, умножения и деления. Свойства этих операций изучены в средней школе.

Геометрически действительные числа можно изображать точками числовой оси. Доказано, что между множеством всех действительных чисел и всеми точками числовой оси можно установить взаимно однозначное соответствие при выбранной единице масштаба.

Напомним понятие модуля действительного числа. Модуль действительного числа a обозначается $|a|$ и определяется равенством

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a>0,\\ 0, & \text{если } a=0,\\ -a, & \text{если } a<0. \end{cases}$$

Модуль числа обладает следующими свойствами: $|a|\geq a$, $|a+b|\leq|a|+|b|$, $|ab|=|a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$, $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$.

Наиболее часто мы будем использовать следующие типы числовых множеств.

Множество X чисел, удовлетворяющих неравенству $a\leq x\leq b$, называется отрезком (сегментом), обозначается $[a,b]$, $a<x<b$ — интервалом (a,b), $a\leq x<b$ — полуинтервалом $[a,b)$.

Число $c\in R$ называется верхней границей множества $A\subset R$, если для всякого $a\in A$ выполнено неравенство $a\leq c$. Множество, имеющее верхнюю границу, называется ограниченным сверху.

Аналогично определяется нижняя граница и ограниченность снизу.

Наименьшая из всех верхних границ множества A называется точной верхней границей и обозначается $\sup A$ (супремум A). Наибольшая из нижних границ множества A называется точной нижней границей и обозначается $\inf A$ (инфимум A).

Отметим без доказательства следующее свойство множества действительных чисел, называемое свойством непрерывности.

Каждое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Кроме того, множество действительных чисел обладает свойством плотности, которое выражается в том, что между любыми двумя неравными действительными числами расположены другие действительные числа, как рациональные, так и нерациональные.

Для обозначения неограниченных числовых множеств множество действительных чисел дополним символами $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Если множество A не ограничено сверху, то полагают $\sup A = +\infty$, если оно не ограничено снизу, то полагают $\inf A = -\infty$. Символ ∞ используют для обозначения неограниченности множества A и сверху, и снизу. С символами $+\infty$, $-\infty$, ∞ нельзя обращаться, как с числами. Операции над ними определены соотношениями:

$$\alpha + (\pm\infty) = \pm\infty, \ \forall\alpha \in R;$$
$$\alpha - (\pm\infty) = \mp\infty, \ \forall\alpha \in R;$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$
$$\alpha \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \text{ если } \alpha > 0;$$
$$\alpha \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \text{ если } \alpha < 0;$$
$$(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty;$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty;$$
$$\infty \cdot \infty = \infty;$$
$$\frac{\alpha}{\infty} = \frac{\alpha}{\pm\infty} = 0, \ \forall\alpha \in R.$$

Операции $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ не определены.

С помощью символов $\pm\infty$ обозначают неограниченные множества:

$$[a, +\infty) = \{x \in R, x \geq a\};$$
$$(a, +\infty) = \{x \in R, x > a\};$$
$$(-\infty, a] = \{x \in R, x \leq a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in R, x < a\};$$
$$(-\infty, +\infty) = R.$$

Заметим, что неравенство $|x| > b$ определяет множество X, являющееся объединением двух множеств $(-\infty, -b) \cup (b, +\infty)$.

Решите самостоятельно.

1.2.1 Найдите корни уравнения $|x - 3| = 5$.

1.2.2 Найдите корни уравнения $|x + 2| + |x - 4| = 10$.

1.2.3 Пусть X — множество всех решений неравенства $|x + 4| \leq 7$. Укажите $\inf X$ и $\sup X$.

1.2.4 Пусть X — множество всех решений неравенства $|x + 5| < 8$. Укажите граничные точки множества X.

1.2.5 Пусть X_1 — множество всех решений неравенства $|x - 2| \geq 10$, а X_2 — множество всех решений неравенства $|x - 5| \geq 3$. Какие из этих множеств неограничены?

1.2.2 Множества комплексных чисел

Начнём с примера.

Найдём корни уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Дискриминант его отрицателен. Следовательно, как известно из школьного курса алгебры, это уравнение не имеет действительных решений, то есть не найдется ни одного действительного числа, которое в результате подстановки его вместо переменной x обратило бы левую часть уравнения в нуль. Если все же найти корни уравнения по известным правилам, то получим:

$$x_1 = 1 + 2\sqrt{-1}; \quad x_2 = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения x_1 и x_2 также являются корнями заданного уравнения. Для этого достаточно подставить их вместо x и выполнить необходимые преобразования. Проверим, например, первый корень:

$$\left(1 + 2\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1 + 2\sqrt{-1}\right) + 5 = 1 + 4\sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} + 5 = 0.$$

Тот же результат получится, если вместо x подставить второй корень.

Какое бы мы ни взяли квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом, всегда будут получаться корни в виде

$$x_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad x_2 = a - b\sqrt{-1},$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Итальянский математик, философ и врач Джероламо Кардано в 1545 г. предложил выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$ считать числами новой природы и производить действия над ними по правилам обычной алгебры. Он называл их "чисто отрицательными", "софистически отрицательными", не видел им применения и считал их бесполезными, поскольку по его представлениям они не годились ни для каких измерений. В 1637 г. французский математик и философ Р. Декарт ввел для них специальное название: мнимые числа. В 1777 г. Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа (мнимая единица), то есть по Эйлеру $i = \sqrt{-1}$. Благодаря немецкому математику К. Гауссу (1777 – 1855) символ i вошел во всеобщее употребление в математической среде. И с тех пор мнимые числа, получившие в дальнейшем название комплексных, стали записывать в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа. Это алгебраическая форма записи комплексного числа.

Следует отметить, что название "мнимые числа" не очень удачно, так как слово "мнимый" обозначает "воображаемый, кажущийся". Применительно к комплексным числам такое толкование слова "мнимый" может вызвать сомнение в их существовании. На самом же деле комплексные числа являются не менее реальными, чем действительные. Однако термин "мнимые числа" прижился, давно используется в математической литературе, и нам ничего не остается, как принять к сведению, что слово "мнимый" в математике обозначает квадратный корень из отрицательного числа, а не "воображаемый, кажущийся". Число a называется *действительной частью* комплексного числа $c = a + bi$ и обозначается $\operatorname{Re} c$. Число b называется *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} c$. Для комплексных чисел приняты следующие равенства:

$$a + 0 \cdot i = a; \quad 0 + b \cdot i = b \cdot i; \quad 1 \cdot i = i; \quad (-1) \cdot i = -i; \quad i \cdot i = i^2 = -1.$$

Два комплексных числа $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то числа называются неравными. Выражения $c_1 \geq c_2$ и $c_1 \leq c_2$ не имеют смысла, то есть множество комплексных чисел не является упорядоченным.

Если числа c_1 и c_2 отличаются только знаком мнимой части, то они называются комплексно-сопряженными. Например, $3+5i$ и $3-5i$. Заметим, что в результате решения квадратного уравнения с действительными коэффициентами, дискриминант которого является отрицательным, всегда получаются комплексно-сопряженные числа. Если c — комплексное число, то соответствующее комплексно-сопряженное число обозначается символом $\bar{c}$ или c^*. Сложение и вычитание комплексных чисел определено следующими равенствами:

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \quad c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Пример 1. Если $c_1 = 3 + 6i$ и $c_2 = 6 + 4i$, то $c_1 + c_2 = 9 + 10i$.

Умножение комплексных чисел выполняется по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой i^2 числом -1:

$$c_1 c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)i.$$

Пример 2. Найти произведение комплексных чисел из предыдущего примера.

$$c_1 c_2 = (3+6i)(6+4i) = 18 + 12i + 36i - 24 = -6 + 48i.$$

Если сомножителями являются комплексно-сопряженные числа, то их произведение всегда является действительным числом. Для доказательства этого найдем произведение чисел $c = a + bi$ и $\bar{c} = a - bi$:

$$c\bar{c} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2.$$

Чтобы найти частное комплексных чисел c_1 и c_2, достаточно найти комплексно-сопряженное число $\bar{c}_2$ (для знаменателя), умножить числитель и знаменатель на $\bar{c}_2$ и выделить действительную и мнимую части.

Пример 3. Найти c_1/c_2, где $c_1 = -2 + 5i$, $c_2 = 4 + 6i$.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2+5i}{4+6i} = \frac{(-2+5i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{-8+12i+20i+30}{16+36} = \frac{22+32i}{52} = \frac{11}{26} + \frac{8}{13}i.$$

Комплексные числа могут иметь не только аналитическое представление, но и геометрическое. Действительные числа изображаются точками на числовой оси. Но комплексные числа состоят из двух частей, поэтому для их изображения необходимо две оси, тогда комплексные числа будут изображаться точками на плоскости. Впервые эта идея появилась более 200 лет назад в трудах датчанина Г. Весселя, француза Ж. Аргана и немецкого математика К. Гаусса.

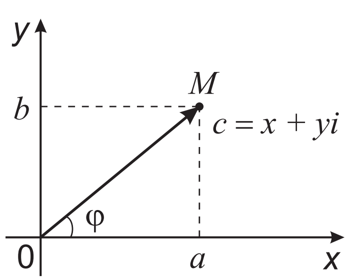


Рис. 1.1

На рис. 1.1 буквой x обозначена действительная ось. На ней указываются значения действительной части комплексного числа. Ось y называется мнимой. На ней отмечаются значения мнимой части комплексного числа. Очевидно, что между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Плоскость, где изображаются комплексные числа, называют комплексной плоскостью.

Если $b = 0$, то $c = a + 0i = a$. Это также комплексное число, но поскольку его мнимая часть равна нулю, то оно одновременно является и действительным числом. Отсюда следует, что множество действительных чисел представляет собой подмножество множества комплексных чисел, то есть действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Если $a = 0$, то $c = 0 + bi = bi$. Это чисто мнимое число.

Если $a = b = 0$, то $c = 0$. Число «0» также является комплексным числом.

Комплексно-сопряженные числа $c = a + {} + bi$ и изображаются на плоскости точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 1.2).

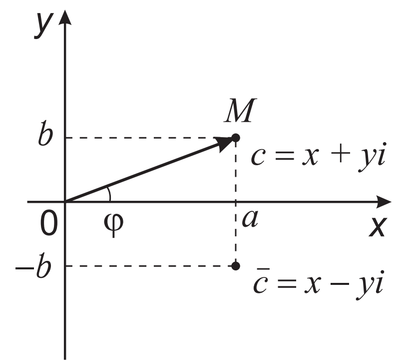


Рис. 1.2

Действительное число $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем или абсолютной величиной комплексного числа c. Величина $|c|$ равна расстоянию от начала координат до точки, изображающей комплексное число: $|\mathbf{OM}| = |c|$.

Кроме алгебраической, применяются и другие формы записи комплексных чисел: тригонометрическая и показательная.

Пусть $c \neq 0$. Угол φ между осью Ox и вектором $\mathbf{OM}$ (рис. 1.2) называют аргументом комплексного числа c и обозначают $\varphi = \operatorname{Arg} c$. Его величина определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение аргумента, находящееся в промежутке $(-\pi; \pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg c$, то есть $-\pi < \arg c \leq \pi$.

Введём обозначение $|c| = r$. Непосредственно из рис. 1.2 и правил тригонометрии следует, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то есть $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эту форму комплексного числа называют тригонометрической.

Показательная форма комплексного числа имеет вид $c = re^{i\varphi}$. Таким образом, комплексное число c можно записывать в трех видах:

$$c = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Формула, связывающая показательную и тригонометрическую формы комплексного числа, найдена Л. Эйлером. Она имеет вид

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Пример 4. Записать число $c = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной формах.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, то $\varphi = \pi/3$, а $|c| = \sqrt{1+3} = 2$, следовательно,

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 2e^{i\pi/3}.$$

При умножении и делении двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно применять следующую теорему.

Теорема. При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы суммируются. При делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, то есть если

$$c_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad c_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то произведение и частное этих чисел имеют вид соответственно:

$$c_1c_2 = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right],$$

$$c_1/c_2 = (r_1/r_2)\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Из первой части теоремы следует правило возведения комплексного числа в целую положительную степень:

$$c^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула справедлива не только для натуральных n, но и для дробей вида $n = 1/m$ (m — натуральное число), что соответствует операции извлечения корня степени m из комплексного числа. Пусть дано некоторое комплексное число c. Для нахождения его корня w m-й степени можно пользоваться следующей формулой:

$$w = \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{m} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{m}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1$. При $k \geq m$ значения аргумента будут повторяться. Это говорит о том, что аргумент может принимать только m различных значений.

Пример 5. Найти все значения $w = \sqrt[4]{-16}$.

Под знаком корня записано комплексное число $c = -16+0i$. На комплексной плоскости соответствующая точка M расположена слева от нуля на оси Ox со значением -16. Очевидно, что аргумент, то есть угол между осью Ox и вектором OM, равен π. Модуль числа $c = -16+0i$ равен 16. На основе этих сведений запишем число c в тригонометрической форме:

$$c = -16+0i = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Возведём его в степень $1/4$, то есть извлечём корень четвёртой степени:

$$w = \sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0,1,2,3$. В зависимости от значения k получаем четыре комплексных числа w_0, w_1, w_2, w_3, каждое из которых является результатом извлечения корня четвёртой степени из числа -16:

$$\begin{aligned}
&\text{если } k=0, \text{ то } w_0 = 2\left[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right] = \sqrt{2}+i\sqrt{2};\\
&\text{если } k=1, \text{ то } w_1 = 2\left[\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right] = -\sqrt{2}+i\sqrt{2};\\
&\text{если } k=2, \text{ то } w_2 = 2\left[\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)\right] = -\sqrt{2}-i\sqrt{2};\\
&\text{если } k=3, \text{ то } w_3 = 2\left[\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)\right] = \sqrt{2}-i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

При дальнейшем увеличении числа k новых корней не получим. Например, если $k = 4$, то

$$w = 2\left[\cos(9\pi/4)+i\sin(9\pi/4)\right] = 2\left[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right] = \sqrt{2}+i\sqrt{2} = w_0.$$

Найденные решения можно проверить. Возведем в четвертую степень, например, комплексное число w_0. Сначала возводим в квадрат:

$$\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^2 = 2+4i-2 = 4i.$$

Результат снова возводим в квадрат: $(4i)^2 = -16$. Получилось подкоренное выражение заданного числа $\sqrt{-16}$, следовательно, решение $w_0 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$ является верным.

Если комплексное число записано в алгебраической форме, то при возведении его в целую положительную степень можно пользоваться известными из школьного курса математики правилами возведения в степень многочленов, например:

$$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi,\ \ (a+bi)^3 = \left(a^3-3ab^2\right)+\left(3a^2b-b^3\right)i$$

и т.д. При этом тождественные преобразования выражений, содержащих число i, выполняются с учётом следующих соотношений:

$$i^{4m}=1,\ i^{4m+1}=i,\ i^{4m+2}=-1,\ i^{4m+3}=-i.$$

Пример 6. Записать в алгебраической форме число $c=\dfrac{i^{82}+3i^{37}}{i^{44}-2i^{51}}$.

Так как $i^{82}=i^{4\cdot 20+2}=-1,\ \ i^{37}=i^{4\cdot 9+1}=i,\ \ i^{44}=i^{4\cdot 11}=1,\ \ i^{51}=i^{4\cdot 12+3}=-i$, то

$$c=\frac{i^{82}+3i^{37}}{i^{44}-2i^{51}}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{1+4}=\frac{(-1+6)+(3+2)}{5}=1+i.$$

Операции умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корня над комплексными числами, представленными в показательной форме, выполняются значительно проще по сравнению с тригонометрическими формами записи. Пусть

$$c_1=r_1e^{i\varphi}\ \text{и}\ c_2=r_2e^{i\psi},$$

тогда произведение и частное этих чисел находятся следующим образом:

$$c_1c_2=r_1r_2e^{i(\varphi+\psi)}\ \ \text{и}\ \ c_1/c_2=(r_1/r_2)e^{i(\varphi-\psi)}.$$

Для возведения в натуральную степень n используется формула: $\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}$.

Формула для нахождения всех значений корня натуральной степени n имеет вид

$$w=\sqrt[n]{re^{i}}=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},$$

где $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$.

Решите самостоятельно.

1.2.6 Найдите произведение $(2-3i)(-3+4i)$.

1.2.7 Число $w=\dfrac{2+4i}{-1+3i}$ запишите в алгебраической форме.

1.2.8 Найдите модуль числа $w=\dfrac{2+4i}{-1+3i}$.

1.2.9 Найдите главное значение аргумента числа $z=\dfrac{-4+4i}{1+i}$.

1.2.10 Число $w=(1+i)^3$ запишите в тригонометрической форме.

1.2.11 Является ли число $2^{0,1}\cdot\left(\cos\dfrac{9\pi}{20}+i\sin\dfrac{9\pi}{20}\right)$ одним из значений $\sqrt[5]{1+i}$?

1.2.12 Укажите, при извлечении корня какой степени и из какого числа получается выражение $w=2\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right)$.

На базе комплексных чисел в настоящее время построен один из красивейших разделов современной математики — теория функций комплексного переменного.

О комплексных числах существует обширная литература. В данном подразделе эта тема лишь слегка затронута: приведены начальные сведения о комплексных числах и об основных операциях над ними. Более подробные сведения о комплексных числах и вообще о функциях комплексного переменного можно найти, например, в учебном пособии [12].

Кроме числовых множеств, мы будем в нашем курсе также использовать множества векторов (точек) из евклидова пространства R_n, в котором выбрана некоторая декартова система координат. Элементы из R_n можно задать в виде упорядоченной совокупности n действительных чисел $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и трактовать их либо как точки x с координатами $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$, либо как векторы $\mathbf{x} = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$, причём $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + \ldots + (\alpha^n)^2}$. Например, множество $\{(x,y) \subset R_2, x^2+y^2 < r^2\}$ определяет все точки, лежащие внутри окружности $x^2+y^2 = r^2$, а множество $\{(x,y,z) \subset R_3, x^2+y^2+z^2 < r^2\}$ есть множество точек шара с центром в начале координат радиусом r, множество $\{(x,y,z) \subset R_3, a < x < b,\ c < y < d,\ e < z < f\}$ определяет параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям.

1.3 Функции или отображения

1.3.1 Понятие функции

Пусть даны два множества X и Y. Говорят, что задано отображение множества X во множество Y, или, что то же самое, задана функция на X со значениями в Y, если всякому $x \in X$ по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$. Пишут $f : X \to Y,\ x \xrightarrow{f} y$. Элемент $y = f(x)$ называют образом элемента x при отображении f. Элемент x также называют аргументом функции $f(x)$. Множество X называется *областью определения функции* f, множество $\tilde{Y} \subseteq Y$ всех тех y, которым соответствует хотя бы одно значение x, называется *областью значений функции* f.

Замечание. Если в определении функции $f : X \to Y$ каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то такая функция называется однозначной или однолистной. В математике изучают и многозначные отображения, когда каждому элементу x может соответствовать несколько значений y (и даже бесконечно много). Мы в нашем курсе будем изучать лишь однозначные функции.

1.3.2 Частные классы отображений

В зависимости от строения множеств X и Y можно рассмотреть четыре класса отображений.

Класс 1. $X \subseteq R, Y \subseteq R : y = f(x)$ — числовая функция одного числового аргумента, например $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$ и др. Такие функции изучались в средней школе.

Класс 2. $X \subseteq R_n, Y \subseteq R :$ если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — числовая функция векторного аргумента или числовая функция многих скалярных переменных, например $y = x_1^2 + \sin(x_1 + x_2)$.

Класс 3. $X \subseteq R, Y \subseteq R_n$ — $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R_n$ — вектор-функция одной переменной, ставящая в соответствие каждому действительному числу x из X вектор $y = f(x)$ из R_n, т.е. каждая координата вектора $f(x)$ есть скалярная функция скалярного аргумента x:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]^T.$$

Функции класса 3 широко используются в физике для описания движения материальной точки M, координаты которой являются функциями времени $(x(t), y(t), z(t))$, что можно записать в виде $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Класс 4. $X \subset R_n, Y \subset R_m$ — вектор-функция векторного аргумента. Полагая $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, получим

$$f(x) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \\ \vdots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \end{bmatrix}.$$

Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в классах 3 и 4 называются координатными функциями. Как видим, изучение функций класса 3 и 4 сводится к изучению скалярных функций одного или многих переменных.

Для полного описания функции $y = f(x)$ надо указать область определения X, область значений Y и правило f, по которому каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие значение $y \in Y$. В случае если правило f задано формулой, то множества X и Y явно не указывают, понимая под ними множества, определяемые соответствующей формулой. При этом иногда множество X называют естественной областью определения, а Y — естественной областью значений.

Если X и Y множества комплексных чисел, то каждому числу $z = x + iy$ из множества X ставится в соответствие комплексное число $w = u + iv$ из множества W. Имеем функцию $w = f(z)$ — комплекснозначную функцию комплексного переменного. Можем записать:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функцию $u(x, y)$ называют *действительной частью* функции $f(z)$ и обозначают $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, а функцию $v(x, y)$ — *мнимой частью* и обозначают $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Как видим, задание функции комплексного переменного сводится к заданию двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ действительных аргументов x и y, отображающих некоторую область D из R_2 в область Δ также из R_2. Имеем частный случай функций класса 4 при $n = m = 2$.

Пример 1. Укажите естественные области определения и значений функций: $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Для функции $f_1(x)$ областью определения X является отрезок $[-1, 1]$, а для функции $f_2(x)$ — круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Областью значений Y и для $f_1(x)$ и для $f_2(x)$ является отрезок $[0, 1]$.

Множество точек $(x, f(x))$ называется графиком функции $f(x)$. В случае скалярной функции одного скалярного аргумента графиком функции $f(x)$ является некоторая кривая, а в случае скалярной функции двух скалярных аргументов графиком $f(x)$ является некоторая поверхность. Например, графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя часть сферы с центром в начале координат радиусом $r = 1$.

Наглядную характеристику функций двух переменных $f(x, y)$ можно дать с помощью линий уровня, которые описываются уравнениями $f(x, y) = \text{const}$.

Охарактеризуем некоторые подклассы функций класса 1, т.е. скалярных функций скалярного аргумента: $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$.

Определение 1. Функция f называется монотонно возрастающей или неубывающей на множестве X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из X, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, и называется строго монотонно возрастающей, если из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.

Аналогично определяются монотонно убывающие и строго монотонно убывающие функции.

Например, функция $y = x^2$ на участке $(-\infty, 0)$ строго монотонно убывает, а на участке $(0, +\infty)$ строго монотонно возрастает.

Определение 2. Функция f называется ограниченной, если множество её значений $\tilde{Y} = \{f(x), x \in X\}$ ограничено. Если при этом $\sup\{f(x)\} \in \{f(x)\}$, то его называют наибольшим значением функции $f(x)$ на множестве X. Если $\inf\{f(x)\} \subset \{f(x)\}$, то его называют наименьшим значением функции f на множестве X.

Определение 3. Функция f называется чётной, если область её определения X симметрична относительно точки $x = 0$ и для всех $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) = f(x)$, и называется нечётной, если $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси OY, а нечётной — относительно начала координат. Например, функция $f(x) = \sin x$ нечётна, а функция $f(x) = \cos x$ чётна.

Определение 4. Функция $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что $\forall x \in X$ выполняется $x + T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее положительное T, удовлетворяющее этому условию, называется наименьшим периодом функции (или просто периодом).

1.3.3 Основные элементарные функции

Среди отображений $f : x \subseteq R \to Y \subseteq R$ выделяют класс основных элементарных функций, к которым относятся следующие:

1) степенная функция x^λ, где $\lambda \in R$. В общем случае её область определения $X = (0, +\infty)$. При некоторых значениях λ область определения может быть шире, например, при $\lambda = n \in N$, функция x^n определена на всей числовой оси;

2) показательная функция a^x, $a > 0$, $a \neq 1$. Её область определения — вся числовая ось. При $a > 1$ показательная функция строго монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ строго монотонно убывает;

3) логарифмическая функция $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения — $(0, +\infty)$, область значений — вся числовая ось;

4) тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены на всей числовой оси, область их значений есть отрезок $[-1, 1]$. Функция $\operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, а $\operatorname{ctg} x$ — при $x \neq k\pi$, где k — любое целое;

5) обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Областью определения функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ является отрезок $[-1, 1]$, областью значений первой является отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, а второй — $[0, \pi]$. Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой оси. Областью значений первой является промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а второй — $(0, \pi)$;

6) часто используются функции $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус, где e — некоторое число, с которым

мы познакомимся позже. Применяются также гиперболический тангенс $\mathrm{th}\,x = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$ и гиперболический котангенс $\mathrm{cth}\,x = \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$.

Предлагается самостоятельно построить графики основных элементарных функций, используя учебники для средней школы.

1.3.4 Суперпозиция (композиция) отображений. Сложная и обратная функции

Определение. Пусть

$$\Phi : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_m,\ \Psi : Y_1 \subseteq R_m \to Z \subseteq R_k \text{ и } Y \subseteq Y_1.$$

Отображение $f : X \subseteq R_n \to Z \subseteq R_k$ называется *суперпозицией* (*композицией*) отображений Ψ и Φ и обозначается $f = \Psi \circ \Phi$, если для всякого x из X имеет место соотношение $f(x) = (\Psi \circ \Phi)x = \Psi(\Phi(x))$.

$$\begin{tikzcd}
x \in R_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "f = \Psi \circ \Phi"'] & y \in R_m \arrow[r, "\Psi"] & z \in R_k
\end{tikzcd}$$

Переменную $y = \Phi(x)$ часто называют *промежуточной переменной* или *промежуточным аргументом*.

Рассматривают суперпозиции трёх, четырёх и более отображений. Например, функция $y = \cos^3(\lg x)$ является суперпозицией функций $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = \lg x$.

Пусть задана функция $y = f(x)$, $(x, y \in R)$ с областью определения X и областью изменения $\{f(x)\} = Y$, т.е. задано отображение X на Y. Возьмём каждое $y \in Y$ и сопоставим ему то (те) значение x, для которого $y = f(x)$. Таким образом, мы построили отображение $x = g(y)$ множества Y на X, называемое обратным по отношению к исходному. Обозначают $g(y) = f^{-1}(y)$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Области определения и изменения прямой и обратной функций меняются ролями. Обратная функция может оказаться и многозначной.

Если у обратной функции независимую переменную обозначать, как обычно, через x, то получим, что графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ в случае $f : X \subset R \to Y \subset R$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Для функции $y = x^3$ на $[2, 4]$ обратной будет $y = \sqrt[3]{x}$ на $[8, 64]$. Отображения

$$10^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty) \ \text{ и } \ \lg x : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

являются обратными.

Решите самостоятельно.

1.3.1 Даны следующие функции

$$1)\ f_1(x,y) = \sin(x^2 + y^2); \qquad 2)\ f_2(x,y) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix};$$

$$3)\ f_3(x,y) = \begin{bmatrix} \cos(x - y) \\ \sin(x + y) \end{bmatrix}; \quad 4)\ f_4(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}(x + \sqrt{y}) \\ \mathrm{ctg}(x^2 + y^2) \end{bmatrix}.$$

Укажите номера функций, которые отображают некоторое множество X из R_2 во множество Y из R_2.

1.3.2 Докажите, что функция $f(x) = x^2 - 6x + 19$ ограничена снизу. Укажите её наименьшее значение.

1.3.3 Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{32}{\sqrt{x^2 - 4x + 68}}$ ограничена сверху. Найдите её наибольшее значение.

1.3.4 Докажите, что функция $f(x) = 12\sin x + 5\cos x$ ограничена сверху и снизу. Найдите её наименьшее и наибольшее значение.

1.3.5 Даны следующие элементарные функции:

1) $f_1(x) = 5 - 3x^6 + \sin^4 x$; 2) $f_2(x) = \sqrt{2 + 3x + 4x^2} - \sqrt{2 - 3x + 4x^2}$;

3) $f_3(x) = x\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$; 4) $f_4(x) = \sin x + \cos x$;

5) $f_5(x) = \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1}$; 6) $f_6(x) = 3x^3 + x + 5$.

Укажите номера функций: нечётных, чётных и общего вида.

1.3.6 Функцию вида $f(x) = Ax + B$ называют линейной (A и B — константы). Найдите коэффициенты A и B, если известно, что $f(9) = -99$, а $f(18) = -108$.

1.3.7 Вычислите значение функции $f(x)$ в точке $x = 2$, если известно, что $f(x + 5) = x^2 - 2x + 4$.

1.3.8 Даны две функции $f_1(x) = \dfrac{6x + 6}{5x + 7}$ и $f_2(x) = \dfrac{3x + 5}{4x + 1}$, называемые дробно-линейными. Докажите, что функция $f(x) = f_1[f_2(x)]$ также дробно-линейная, т. е. имеет вид $f(x) = \dfrac{Ax + B}{Cx + D}$. Найдите значение констант A и D.

1.3.9 Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$; б) $f(x) = \sqrt{(2 - x)(x - 13)}$;

в) $f(x) = \arcsin\dfrac{x - 4}{5}$; г) $f(x) = \arcsin\dfrac{15}{x - 11}$;

д) $f(x) = \arcsin\dfrac{x - 18}{x + 24}$; е) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 40} + \arcsin\dfrac{x}{6}$.

1.4 Системы окрестностей в R и R_n

Предельный переход — одна из важнейших операций математического анализа. Для изучения предела необходимо ввести понятие окрестности точки. К его изучению мы и приступаем.

Определение. Окрестностью точки x_0 из R назовём любой интервал (a, b), содержащий эту точку.

Окрестность точки x_0 будем обозначать $U(x_0)$ или $U_{\delta_1,\delta_2}(x_0)$:

$U(x_0) = (a, b) = \{x \in R,\ a < x < b,\ a < x_0 < b\}$;

$U_{\delta_1,\delta_2}(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) = \{x \in R,\ x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\}$.

Рассмотрим частные виды окрестностей: $U_\delta(x_0)$ — симметричная окрестность точки x_0 радиусом $\delta > 0$,

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in R,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \in R,\ |x - x_0| < \delta\};$$

$\dot{U}(x_0)$ — проколотая окрестность — окрестность $U(x_0)$, из которой удалена точка x_0, $\dot{U}(x_0) = \{x \in R,\ a < x < b,\ x \neq x_0\}$;

$\dot{U}_\delta(x_0)$ — симметричная проколотая окрестность:

$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x \in R,\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$.

Подчеркнём, что в любой окрестности содержится симметричная окрестность.

Определение. Окрестностью бесконечно удалённой точки ∞ в R (обозначается $U(\infty)$) называется внешность некоторого отрезка, т.е. множество точек, не принадлежащих этому отрезку. Симметричной окрестностью точки ∞ называется внешность симметричного относительно нуля отрезка.

Множество $U_{M_1,M_2}(\infty) = \{(x \in R; x < M_1) \cup (x \in R; x > M_2)\}$ является окрестностью точки ∞, а множество $U_M(\infty) = \{(x \in R; |x| > M)\}$ — симметричной окрестностью этой точки.

В пространстве R_n можно рассмотреть окрестности точки $x^0(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0)$ двух видов: шары и параллелепипеды. В случае симметричных окрестностей они задаются соотношениями:

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R_n : |x - x_0| < \delta\} \text{ или}$$

$$U_\delta(x^0) = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n : \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i^0)^2 < \delta^2 \right\},$$

$$\Pi_\delta(x^0) = \{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n : |\xi_i - \xi_i^0| < \delta,\ i = \overline{1,n}\}.$$

При $n = 2$ шаровая окрестность совпадает с открытым кругом, а параллелепипедальная — с открытым прямоугольником.

Окрестностью бесконечно удалённой точки в R_n (обозначается $U(\infty)$) называется внешность шара с центром в начале координат либо внешность n-мерного куба, симметричного относительно начала координат.

Записью $U_M(\infty)$ обозначают множество $\{\forall x, x \in R_n : |x| > M\}$ и называют M-окрестностью точки ∞.

Определение. Точка M_0 называется *предельной точкой* (*точкой сгущения*) множества X, если в любой её окрестности есть хотя бы одна отличная от M_0 точка множества X.

Определение. Точка $M_0 \in X$ называется *внутренней точкой* множества X, если она входит в множество X вместе с некоторой окрестностью.

Определение. Точка M_0 называется *граничной точкой* множества X, если в любой её окрестности есть точки, как принадлежащие X, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества X называется его границей. Множество X называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки, и открытым, если граничные точки ему не принадлежат.

Например, множество $[1,2]$ замкнуто, а $(1,2)$ открыто.

Для введения понятия *односторонних пределов* используются односторонние окрестности. Они определяются следующим образом:

1) правосторонняя окрестность точки x_0 есть множество

$U_\delta^+(x_0) = \{x \in R : x_0 < x < x_0 + \delta\}$;

2) левосторонняя окрестность точки x_0 есть множество

$U_\delta^-(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0\}$;

3) в качестве окрестностей точек $+\infty$ и $-\infty$ принимаются множества

$U_M(+\infty) = \{x \in R : x > M\}$; $U_M(-\infty) = \{x \in R : x < M\}$.

Мы построили системы окрестностей в R и R_n. На множестве X из R (R_n) систему окрестностей введём как сужение систем окрестностей в R или R_n на множество X, т.е. под окрестностью предельной точки x_0 множества $X \subset R$ (или $X \subset R_n$) будем понимать $U(x_0) \cap X$, где $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 в R или R_n.

Решите самостоятельно.

1.4.1 Даны интервалы:

1) $(-2,5)$; 2) $(-3,1)$; 3) $(1,4)$; 4) $(1,2)$; 5) $(-1,3)$.

Укажите номера тех из них, которые являются несимметричной окрестностью точки $x_0 = 2$.

1.4.2 Запишите в виде интервалов следующие окрестности точки x_0:

1) $U_\delta(x_0)$; 2) $U_\delta^+(x_0)$; 3) $U_\delta^-(x_0)$.

1.4.3 Укажите координаты точки M_0 для которой неравенство

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 < \delta^2$$

определяет шаровую окрестность этой точки.

1.4.4 Укажите координаты точки M_0, для которой система неравенств

$$\begin{cases} |x-4| < \delta_1, \\ |y+3| < \delta_2, \\ |z-5| < \delta_3 \end{cases}$$

определяет несимметричную её параллелепипедальную окрестность.

1.5 Предел функции

1.5.1 Понятие предела функции

Приступаем к изучению предела — одного из основных понятий математического анализа.

Будем считать, что $X \subseteq R_n$, $Y \subseteq R_m$ и $f : X \to Y$, а точку $x_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^n)$ полагать предельной для множества X. Предполагается, что в R_n и R_m, а потому и на множествах X и Y, построены какие-либо системы окрестностей.

Определение 1. Точка $A \in R_m$ называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0 ($x \to x_0$), если для всякой окрестности $U(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{V}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всякой точки x, принадлежащей $\dot{V}(x_0)$, имеет место включение $f(x) \in U(A)$. Пишут $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Используя логические символы, определение предела можно записать следующим образом:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) : \forall U(A)\ \exists \dot{V}(x_0) : \left(\left(\forall x, x \in \dot{V}(x_0) \right) \to f(x) \in U(A) \right).$$

Часто вместо произвольных окрестностей в определении 1 используют симметричные окрестности $U_\varepsilon(A)$ при любых $\varepsilon > 0$ и $\dot{V}_\delta(x_0)$ точек $A \in R_m$ и $x_0 \in R_n$.

Определение 2. Точка $A \in R_m$ называется пределом функции f при $x \to x_0$, если для всякой симметричной окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки $A \in R_m$ существует проколотая симметричная окрестность $\dot{V}_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $\forall x \in \dot{V}_\delta(x_0)$ имеет место $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ или $\{f(\dot{V}_\delta(x_0)\} \subseteq U_\varepsilon(A)\}$.

Совершенно аналогично определяется понятие предела при $x \to \infty$. Для этого в определениях 1 и 2 вместо $\dot{V}(x_0)$ и $\dot{V}_\delta(x_0)$ нужно взять окрестности $V(\infty)$ и $V_\delta(\infty)$.

Иногда удобнее задавать окрестности точек в виде неравенств.

Определение 3. Точка A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ ($A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A : \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4. Говорят, что предел функции f при $x \to x_0$ равен бесконечности ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$), если для всякого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty : \forall M > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in \dot{V}_\delta(x_0) \to |f(x)| > M.$$

Теорема 1. Если функция имеет предел, то этот предел единственный.

Доказательство. Предположим, что при $x \to x_0$ существуют два предела

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A_1, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A_2, \tag{1.2}$$

причём $A_1 \neq A_2$. По определению неравенство (1.1) означает

$$\forall U(A_1)\ \exists\dot{V}_1(x_0) : \left(\left(\forall x : x \in \dot{V}_1(x_0)\right) \to f(x) \in U(A_1)\right). \tag{1.3}$$

Аналогично (1.2) означает

$$\forall U(A_2)\ \exists\dot{V}_2(x_0) : \left(\left(\forall x : x \in \dot{V}_2(x_0)\right) \to f(x) \in U(A_2)\right). \tag{1.4}$$

Так как $A_1 \neq A_2$, то можно взять окрестности $U(A_1)$ и $U(A_2)$ непересекающимися. Тогда $\forall x : x \in \dot{V}_1(x_0) \cap \dot{V}_2(x_0)$ должно иметь место (1.3) и (1.4) одновременно, т.е. $f(x) \in U(A_1)$ и $f(x) \in U(A_2)$, что невозможно.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Позже будет доказано, что $|\sin x| < |x|$. Поэтому, чтобы выполнялось неравенство $|\sin x - 0| < \varepsilon$, достаточно взять $|x| < \varepsilon$, т.е. выбрать $\delta \leq \varepsilon$. Для любой окрестности $U_\varepsilon(0)$ мы нашли окрестность $V_\delta(0)$ такую, что, если $x \in V_\delta(0)$, то $f(x) \in U_\varepsilon(0)$. Из определения 2 следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Пример 2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Имеем:

$$|1 - \cos x| = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2}.$$

Неравенство $|1 - \cos x| < \varepsilon$ будет заведомо выполнено для всех x, удовлетворяющих неравенству $\left|\dfrac{x^2}{2}\right| < \varepsilon$, т.е. для $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Следовательно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \leq \sqrt{2\varepsilon}$ так, что при $|x - 0| < \delta$ выполнено $|1 - \cos x| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \log_a(1 + x) = 0$. Для определённости будем считать, что $a > 1$. Из неравенства $|\log_a(1 + x) - 0| < \varepsilon$ тогда следует

$$a^{-\varepsilon} < 1 + x < a^{\varepsilon} \quad \text{или} \quad a^{-\varepsilon} - 1 < x < a^{\varepsilon} - 1.$$

Последнее неравенство определяет окрестность $V(0)$, так как $a^{-\varepsilon} - 1 < 0$, а $a^{\varepsilon} - 1 > 0$. Таким образом, для всякого x из $(a^{-\varepsilon} - 1, a^{\varepsilon} - 1)$ справедливо неравенство $|\log_a(1 + x)| < \varepsilon$, означающее, что $\lim\limits_{x\to 0} \log_a(1 + x) = 0$.

Пример 4. Докажите самостоятельно, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Пример 5. Исходя из определения предела, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}\neq 2$.

Решение: а) докажем, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$. По определению предела мы должны доказать, что для любой заданной окрестности $U_\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\varepsilon>0$ (рис. 1.3) существует окрестность $\dot V(2)$ такая, что если $x\in\dot V(2)$, то $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, т.е. $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}\right)$, что равносильно следующим двум неравенствам:

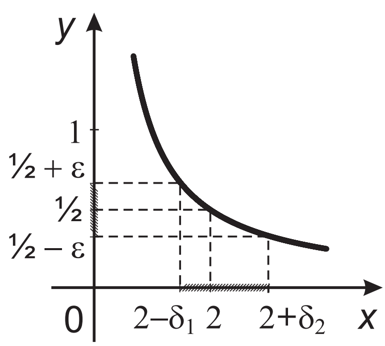


Рис. 1.3

$$-\varepsilon<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<+\varepsilon \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Так как при достаточно малом ε все части этого неравенства положительны, то

$$\frac{2}{1+2\varepsilon}<x<\frac{2}{1-2\varepsilon}.$$

Очевидно, $\dfrac{2}{1+2\varepsilon}<2$, $\dfrac{2}{1-2\varepsilon}>2$, следовательно, множество

$$\left(\frac{2}{1+2\varepsilon},\frac{2}{1-2\varepsilon}\right)$$

является окрестностью точки $x_0=2$ (несимметричной). Существование требуемой окрестности $\dot V(2)$ доказано. Можно для наглядности эту окрестность записать в виде $\left(2-\dfrac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon},2+\dfrac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right)$ и считать

$$\dot V(2)=\dot V_{\delta_1,\delta_2}(2),\text{ где } \delta_1=\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon},\ \delta_2=\frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon};$$

б) докажем, что $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$. По определению мы должны доказать, что для любой $U_\varepsilon(0)$ окрестности точки $y=0$ существует окрестность $V(+\infty)$ элемента $+\infty$ такая, что если $x\in V(+\infty)$, то $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ или $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Так как $x\to+\infty$, то можно считать, что $x>0$, поэтому знак модуля можно опустить и записать $\dfrac{1}{x}<\varepsilon$ или $x>\dfrac{1}{\varepsilon}=M$. Множество $x>M$ есть $V_M(+\infty)$, согласно определению окрестности элемента $+\infty$. Существование окрестности $V(+\infty)$, удовлетворяющей соответствующим условиям, доказано. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Доказательство равенств $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ предоставляем читателю. Подчеркнём, что равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ равносильно двум равенствам: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$;

в) докажем равенство $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Нужно доказать, что для любой окрестности $U_M(+\infty)$ (рис. 1.4) существует правая полуокрестность $V_\delta^+(0)$ $(0<x<\delta)$ такая, что если $x\in V_\delta^+(0)$, то $\dfrac{1}{x}\in U_M(+\infty)$. Последнее означает, что $\dfrac{1}{x}>M$. Так как $x>0$, $M>0$, то $0<x<\dfrac{1}{M}$. Если положить $\delta=\dfrac{1}{M}$, то требуемая окрестность $V_\delta^+(0)$ найдена и равенство $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}=0$ доказано. Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ (предлагаем проделать это самостоятельно);

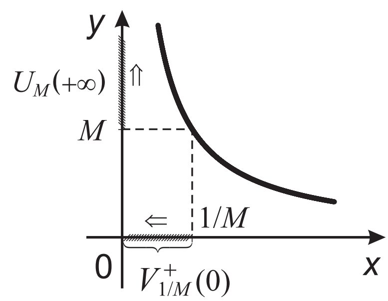


Рис. 1.4

г) докажем, что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}\neq2$. Предположим противное, т.е. что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}$ равен двум. Это означало бы: для любой окрестности $U_\varepsilon(2)$ существует окрестность $\dot{V}(1)$ такая, что если $x\in\dot{V}(1)$, то $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon(2)$, т.е. $\left|\dfrac{1}{x}-2\right|<\varepsilon$, или $2-\varepsilon<\dfrac{1}{x}<\varepsilon+2$. Так как все части неравенства можно считать положительными, то $\dfrac{1}{2+\varepsilon}<x<\dfrac{1}{2-\varepsilon}$. Только для этих значений x выполняется $\left|\dfrac{1}{x}-2\right|<\varepsilon$. Но точка $x=1$ в найденную окрестность $\left(\dfrac{1}{2+\varepsilon},\dfrac{1}{2-\varepsilon}\right)$ при малом ε не входит, т.е. данное множество не является окрестностью точки 1. Таким образом, требуемая окрестность $\dot{V}(1)$ не существует, а потому $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}$ не может равняться двум.

1.5.2 Последовательность и её предел

Последовательностью называется функция натурального аргумента $y(n)=y_n$. Если y_n — действительные числа, то последовательность называется *числовой*. Числа $y_1,y_2,\ldots$ называют членами последовательности. Если $y_n\in R_k$, то имеем *векторную последовательность*.

Задание векторной последовательности $y_n\in R_k$ равносильно заданию k числовых последовательностей, так как $y_n = \{y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^k\}$. Числовые последовательности $\{y_n^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ называют *координатными последовательностями*. Если члены последовательности $\{z_n\}$ — комплексные числа, $z_n = x_n + iy_n$, то имеем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел, что равносильно заданию двух векторных последовательностей при $k = 2$.

Примеры последовательностей.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Здесь $y_n = \frac{1}{n}$ — общий член последовательности.

Последовательность $0, 1, 0, 1, \ldots$ можно задать формулами:

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{при чётном } n, \\ 0 & \text{при нечётном } n \end{cases} \quad \text{или} \quad y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

Кратко последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ будем записывать $\{y_n\}$.

Сформулируем определение предела последовательности. Поскольку множество N натуральных чисел имеет единственную предельную точку $+\infty$, то для функции $y(n)$ имеет смысл рассматривать только случай $n \to +\infty$. Обычно при этом знак “+” опускают.

Определение 1. Вектор (точка) $A \in R_k$ называется *пределом векторной последовательности* $\{y_n\}$, если для любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ существует окрестность $V_N(+\infty)$, зависящая от выбора окрестности $U_\varepsilon(A)$, такая, что для всех $n \in V_N(+\infty)$ выполняется включение $y_n \in U_\varepsilon(A)$.

Заметим, что условие $n \in V_N(+\infty)$ означает, что $n > N$.

Для числовых последовательностей определение 1 легко переформулировать на языке неравенств.

Определение 2. Число A называют *пределом числовой последовательности* $\{y_n\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|y_n - A| < \varepsilon$.

Обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ и говорят, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к A.

. . . .

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, так как $\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ при всех $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ для $\forall \varepsilon > 0$.

Пример 2. Последовательность $0, 1, 0, 1, \ldots$ предела не имеет, так как при $\varepsilon < \frac{1}{4}$ нет точки, в ε-окрестности которой находились бы точки 0 и 1 одновременно.

Пример 3. Пусть $y_n = \left(\frac{n+4}{n+1}, \frac{2n+6}{n+1}\right) \in R_2$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (1, 2) \in R_2$.

Действительно, $$|y_n - A| = \sqrt{\left(\frac{n+4}{n+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{2n+6}{n+1} - 2\right)^2} = \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$ при $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$.

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $\{y_n\} = \{y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^k\}$ точек (векторов) пространства R_k сходилась к точке (вектору) $A = (A^1, A^2, \ldots, A^k)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая координатная последовательность $\{y_n^i\}$ сходилась и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^i = A^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. Это значит, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \left((\forall n : n > N) \to |y_n - A| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{k}(A^i - y_n^i)^2} < \varepsilon\right).$$

Но последнее неравенство возможно лишь тогда, когда $|A^i - y_n^i| < \varepsilon$ при $\forall n > N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^i = A^i$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^i = A^i$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_i : (\forall n : n > N_i) \to |y_n^i - A^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}},\ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Из чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k$ выберем наибольшее и обозначим его через N. Тогда при $n > N$ неравенства $|y_n^i - A^i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ будут выполняться при всех значениях i одновременно. Поэтому при $n > N$ получим $|y_n - A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(A^i - y_n^i)^2} < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ имеет предел, равный $x + iy$ тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \to y$.

Теорема 2. Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность действительных чисел имеет предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Тогда по свойству непрерывности множества действительных чисел множество $\{y_n\}$ имеет конечную точную верхнюю границу A. Если $\varepsilon > 0$ произвольно, то найдётся член последовательности y_N такой, что $y_N > A - \varepsilon$. Если это было бы не так, то число A не было бы точной верхней границей множества $\{y_n\}$. Так как последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает, то при всех $n > N$ будем иметь $A - \varepsilon < y_n < A < A + \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует и равен A.

Теорема 3. Если даны три последовательности действительных чисел u_n, v_n, w_n, удовлетворяющие условию $u_n \le w_n \le v_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$.

1.5.3 Определение предела функции на языке последовательностей

Основываясь на понятии предела последовательностей, можно сформулировать определение предела функции на языке последовательностей (определение Гейне), в отличие от определения на языке окрестностей (определение Коши), данного ранее.

Определение 1. Говорят, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для всякой последовательности точек $\{x_n\}$ $(x_n \ne x_0)$ из области определения функции, сходящейся к x_0 $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0)$, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции имеет пределом точку A.

Можно доказать, что определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует. Выберем две последовательности:

$$x_n = n\pi \text{ и } y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

$$\text{но } \lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.$$

Таким образом, по определению Гейне предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.

1.5.4 Односторонние пределы

Пусть $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ — функция одного переменного. В этом случае можно рассматривать односторонние пределы, используя односторонние окрестности.

Определение 1. Точка A называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0 слева (обозначают $A = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$), если для всякой окрестности $U(A)$ точки A существует левосторонняя окрестность $V^-(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V^-(x_0)$ справедливо включение $f(x) \in U(A)$.

Аналогично определяется предел справа и обозначается $A = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Определение 2. Точка A называется пределом функции f при $x \to +\infty$ ($A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела при $x \to -\infty$ предлагается сформулировать самостоятельно.

Между пределами и односторонними пределами существует связь, выражаемая теоремой.

Теорема 1. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, также равные A, и наоборот, если существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, оба равные A, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Пример 1. Непосредственно из определения функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ следует, что $\lim\limits_{x\to0+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to0-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \le 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Тогда $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to2-0}(x-1) = 1$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to2+0}(x+1) = 3$.

1.5.5 Теоремы о пределах

Будем рассматривать лишь скалярнозначные функции.

Теорема 1. Всякая функция, имеющая при $x \to x_0$ конечный предел, ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и A — конечно. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\dot{V}(x_0)$ такая, что, при $\forall x \in \dot{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или, что то же самое, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Это и означает, что $f(x)$ ограничена в $\dot{V}(x_0)$.

Теорема 2. Пусть $f,\Phi : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \Phi(x) = B$ (A и B — конечны). Тогда существуют

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\Phi(x)),\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\Phi(x),\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\Phi(x)},\ \Phi(x)\neq 0$$

и при этом а) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+\Phi(x)) = A+B$, б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\Phi(x) = A\cdot B$, в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\Phi(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B\neq 0$.

Докажем лишь а). Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\dot{V}_1(x_0):\ \left(\forall x : x\in\dot{V}_1(x_0)\right)\to|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x) = B$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\dot{V}_2(x_0):\ \left(\forall x : x\in\dot{V}_2(x_0)\right)\to|\Phi(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Положим $\dot{V}(x_0) = \dot{V}_1(x_0)\cap\dot{V}_2(x_0)$. Тогда для всякого $x\in\dot{V}(x_0)$ одновременно выполнены неравенства (1.5) и (1.6) и, следовательно, неравенство

$$|f(x)+\Phi(x)-(A+B)| = |f(x)-A+\Phi(x)-B| \le |f(x)-A|+|\Phi(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение а) теоремы.

Теорему 2 можно использовать при практическом вычислении пределов.

Пример 1. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+2}{1-2n-2n^2}$. Поделив числитель и знаменатель на n^2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n+2/n^2}{1/n^2-2/n-2} = -\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2} = 1$ по теореме о пределе суммы. По этой же теореме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}-2\right) = -2\neq 0$. По теореме о пределе частного данный предел равен $-\dfrac{1}{2}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} =$ (при $x\neq 1$) $=$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x) = A$ и в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$f(x)\le\Psi(x)\le\Phi(x), \tag{1.7}$$

тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\Psi(x)$ существует и равен A.

Доказательство. Из определения предела и неравенства (1.7) следует, что $\forall\varepsilon>0$ существует окрестность $\dot{V}(x_0)$ такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство

$$A-\varepsilon < f(x)\le\Psi(x)\le\Phi(x) < A+\varepsilon \text{ или } A-\varepsilon<\Psi(x)<A+\varepsilon,$$

что и означает существование $\lim\limits_{x\to x_0}\Psi(x)$ и равенство его A.

Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \le b$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $A \le b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $A > b$ $(A < c)$, то $\exists U_\delta(x_0)$, в которой $f(x) > b$ $(f(x) < c)$.

Доказательство. Из определения предела следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \dot{V}(x_0)$ такая, что при $\forall x : x \in \dot{V}(x_0)$ выполняется $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Предположим, что $A > b$, и положим $\varepsilon = A - b > 0$. Тогда получим $f(x) > b$, что противоречит условию первой части теоремы.

Вторую часть теоремы предлагаем доказать самостоятельно.

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство

$$f(x) \le \Phi(x) \tag{1.8}$$

и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \Phi(x) = B$, то $A \le B$.

Справедливость теоремы 5 следует из теорем 2 и 4.

1.5 Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+n+1}{n^2-3n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\sqrt[4]{n+16}+14\sqrt[4]{n+5}}{\sqrt[4]{n-10}+2\sqrt[4]{n+3}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-7n-3}-\sqrt{n^2-5n+13}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{19x^2+17x-3}{7-15x-x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}{13\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^3}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{16x-3}-\sqrt{x+10}}{\sqrt{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$.

1.6 Непрерывность функции в точке

1.6.1 Основные понятия и теоремы

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если f определена в этой точке и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Вспоминая определение предела функции на языке окрестностей, определение непрерывности можно дать в следующем виде.

Определение 2. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если f определена в этой точке и для всякой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V(x_0)$ имеет место включение $f(x) \in U(f(x_0))$.

Определение 2 можно записать на языке неравенств.

Определение 3. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Величину $\Delta x = x - x_0$ называют приращением аргумента, а $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ — приращением функции при переходе из точки x_0 в точку x.

Определение 3 можно записать на языке приращений.

Определение 4. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и из условия $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta f \to 0$.

Используя понятие односторонних пределов для $f : X \subset R \to Y \subset R$, можно ввести понятия односторонней непрерывности — непрерывности справа и непрерывности слева в точке x_0. Предлагаем читателю сформулировать эти определения самостоятельно.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в этой точке.

Теорема 2. Если функции f и $\Phi :\ X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ непрерывны в точке x_0, то функции $f+\Phi$, $f \cdot \Phi$ и $\dfrac{f}{\Phi}$ $(\Phi(x_0) \neq 0)$ также непрерывны в точке x_0.

Справедливость теоремы следует из определения непрерывности и теорем о пределе суммы, произведения, частного.

Теорема 3. Для того чтобы функция $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_k$ была непрерывна в точке $x_0(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0)$, необходимо и достаточно, чтобы все её координатные функции были непрерывны в x_0.

Справедливость теоремы следует из определения непрерывности, определения предела на языке Гейне и теоремы о пределе векторной последовательности.

Следствие. Функция $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Пример 1. Функция $f(x) = a^x$ непрерывна на всей числовой оси. Пусть x_0 — произвольная точка. Тогда $f(x_0) = a^{x_0}$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$. Тогда $a^{x_0} - \varepsilon < a^x < a^{x_0} + \varepsilon$, или, что то же самое,

$$\log_a(a^{x_0} - \varepsilon) < x < \log_a(a^{x_0} + \varepsilon) \quad a > 1,$$

$$\log_a(a^{x_0} + \varepsilon) < x < \log_a(a^{x_0} - \varepsilon) \quad 0 < a < 1.$$

Найденные интервалы являются окрестностями точки x_0. Последнее и означает непрерывность функции a^x в точке x_0 при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{если } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Проверим непрерывность в начале координат. Пусть $y = kx$. Тогда при $x \to 0$ и $y \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 k}{x^2(1+k^2)} = \dfrac{k}{1+k^2}$. Видим, что предел зависит от способа приближения к началу координат. По определению Гейне, предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует, а потому функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0;0)$.

Теорема 4. Пусть $f : X \to Y$, $\Phi : Y \to Z$ и пусть функция f непрерывна в точке x_0, Φ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда их суперпозиция (сложная функция) $(\Phi \circ f) = \Phi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть $W(\Phi(y))$ — произвольная окрестность точки $\Phi(y_0) = \Phi(f(x_0))$. По определению непрерывности для неё существует окрестность $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ такая, что для всех $y \in U(y_0) = U(f(x_0))$ выполнено включение $\Phi(y) \in W(\Phi(y_0))$. Далее, для окрестности $U(y_0) = U(f(x_0))$ существует, в силу непрерывности функции f, окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in V(x_0)$ выполнено включение $f(x) \in U(y_0)$, а следовательно, и включение $\Phi(f(x)) \in W(\Phi(f(x_0)))$, что и означает непрерывность сложной функции.

Из теоремы 4 следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi[f(x)] = \Phi[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]$.

Отметим без доказательства некоторые свойства непрерывных функций.

Теорема 5. Все элементарные функции (см. п. 1.3.3) действительного переменного непрерывны в области определения.

Теорема 6. Пусть скалярная функция f скалярного переменного задана на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то для всякого числа C, лежащего между A и B, существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = C$.

Теорема 6 легко обобщается и для функций $f : X \subseteq R_n \to Y \subset R$.

Теорема 7. Если функция $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ непрерывна в замкнутой области X и в точках $x_1, x_2 \in X$ принимает значения $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$, $A \neq B$, то для всякого C, заключённого между A и B, существует точка $x_3 \in X$ такая, что $f(x_3) = C$.

Теорема 8. (Первая теорема Вейерштрасса.) Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном в R_n множестве X функция $f : X \subset R_n \to Y \subset R$ ограничена на этом множестве.

Теорема 9. (Вторая теорема Вейерштрасса.) Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном множестве в R_n функция $f : X \subset R_n \to Y \subset R$ принимает на нём наибольшее и наименьшее значения.

Замечание. Для непрерывных функций имеет место соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, означающее, что в этом случае операции f и предельного перехода перестановочны. Это свойство часто используется при отыскании пределов.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \log_a \left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Так как функция $\log_a x$ непрерывна, то

$$\lim_{x \to 1} \log_a \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = \log_a \lim_{x \to 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \log_a 1 = 0.$$

1.6.2 Классификация точек разрыва

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Определение 2. Точка x_0 называется изолированной точкой разрыва функции $f : X \to Y$, если существует окрестность точки x_0, в которой нет других точек разрыва функции f.

В общем случае точки разрыва могут заполнять некоторую поверхность или кривую. Например, у функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$ точками разрыва являются точки прямой $x = y$. Мы будем изучать лишь изолированные точки разрыва для $f : X \subset R \to Y \subset R$. Их классификация основывается на нарушении равенства

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \tag{1.9}$$

а также на изучении случаев, когда один или несколько элементов этого равенства не существуют.

Возможны следующие ситуации.

1. Оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют, конечны и равны между собой, но либо функция не определена в точке x_0, либо $f(x_0)$ не равна общему значению односторонних пределов, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Такой разрыв называется устранимым, так как его можно “устранить”, доопределив или переопределив функцию f в точке x_0, положив

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

2. Оба односторонних предела существуют, конечны, но не равны между собой:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Такой разрыв называют разрывом первого рода или разрывом типа “скачок”.

3. Все остальные нарушения соотношения (1.9), т.е. когда один или оба односторонних предела не существуют, один или оба односторонних предела равны бесконечности, относят к разрывам второго рода.

Функция $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x\to x_0-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 2. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to x_0-0} \sin\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существуют.

Пример 3. Функция $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв, так как $\lim\limits_{x\to x_0-0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to x_0+0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, что следует из неравенства $-|x| \le x\sin\dfrac{1}{x} \le |x|$.

Решите самостоятельно.

1.6.1 Дана функция $f(x) = \begin{cases} Ax^2+4, & \text{если } -3 \le x < 1; \\ 2x+6, & \text{если } 1 \le x < 3. \end{cases}$

Укажите значение константы A, при котором данная функция непрерывна в точке $x_0 = 1$.

1.6.2 Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2+5x-14}{x^2-x-2}$, которая в точке $x_0 = 2$ не определена. Доопределите функцию $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ таким образом, чтобы получилась непрерывная в точке $x_0 = 2$ функция.

1.6.3 Даны следующие функции:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+1)}, & \text{если } x \neq 3; \\ 0, & \text{если } x = 3; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+1)}, & \text{если } x \neq 3; \\ 2, & \text{если } x = 3; \end{cases}$$

$$f_3(x)=\frac{(x^2+1)}{(x-3)};\qquad f_4(x)=\frac{|x-3|}{(x-3)(x+2)};$$

$$f_5(x)=\sin(x-3);\quad f_6(x)=\begin{cases}5x+4, \text{ если } -4\le x\le 3;\\ 4x+7, \text{ если } 3<x\le 10.\end{cases}$$

Укажите номера тех из них, которые являются непрерывными в точке $x_0=3$.

1.6.4 Даны следующие функции:

$$f_1(x)=\sin\frac{1}{x-4};\qquad f_2(x)=\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)};$$

$$f_3(x)=\frac{|x-4|}{|x-4|(x+2)};\quad f_4(x)=\frac{\sin x}{x-4};$$

$$f_5(x)=\begin{cases}2x+4, \text{ если } -2\le x\le 4,\\ 3x+1, \text{ если } 4\le x\le 10;\end{cases}$$

$$f_6(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-4)(x+8)}{(x-4)(x+2)}, \text{ если } x\ne 4;\\ \qquad 6, \text{ если } x=4.\end{cases}$$

Укажите номера функций, для которых точка $x_0=4$ является: а) устранимой; б) первого рода; в) второго рода.

1.7 Замечательные пределы

1.7.1 Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Это соотношение называют первым замечательным пределом. Предварительно докажем неравенство

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x, \tag{1.10}$$

при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

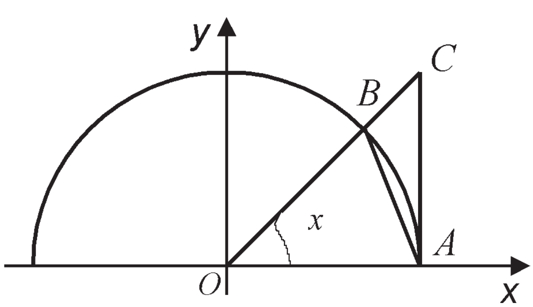


Рис. 1.5

С этой целью в круге радиусом R рассмотрим треугольники OAB, OAC и сектор OBA (рис. 1.5). Пусть S_1 — площадь треугольника OAB, S_2 — сектора OAB и S_3 — треугольника OAC. Очевидно, $S_1<S_2<S_3$. Если x — радианная мера угла AOB, то

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x. \tag{1.11}$$

Отсюда и следует неравенство (1.10). Разделив все части неравенства (1.11) на $\sin x>0$ и сократив на $\dfrac{1}{2}R^2$, получим $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, или

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \tag{1.12}$$

$\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. По теореме 3 из подраздела 1.5.5 и из (1.12) следует, что $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Так как $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$, то и $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha x}{\alpha x} \cdot \alpha = \alpha.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x/2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x/2}{4(x/2)^2} = \dfrac{1}{2}.$

1.7.1 Найдите самостоятельно следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 3(x-2)}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5} (64-x^2)\dfrac{\sin(x-5)}{x^2+3x-40}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x^2-4)}{x^2+3x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sqrt{x+16}-4}$.

1.7.2 Второй замечательный предел и его следствия

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, имеет конечный предел. При этом воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}b^n. \tag{1.13}$$

По формуле (1.13), полагая $a = 1$, $b = \dfrac{1}{n}$, находим

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \\ + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}. \tag{1.14}$$

Запишем это выражение в виде:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \\ + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{1.15}$$

Аналогично можно получить:

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+ \\ +\dots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \tag{1.16}$$

Сравнивая (1.14) и (1.16), видим, что $x_n<x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Так как $\dfrac{1}{k!}<\dfrac{1}{2^{k-1}}$ при $k>2$, то

$$x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdot+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}},$$

т.е. $x_n<3$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме 2 из подраздела 1.5.2, она имеет предел. Этот предел обозначим e. Число e трансцендентно, причём $2<e<3$ ($e\approx 2{,}7182818285$).

Используя определение предела на языке последовательностей, нетрудно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Если в пределе $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ сделать замену $y=-x$, то легко получить, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{1.17}$$

Предел (1.17) называют вторым замечательным пределом.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^6.$$

Подчеркнём, что во втором замечательном пределе раскрывается неопределённость вида 1^∞.

Число e часто принимается в качестве основания логарифмов. Логарифм числа x по основанию e называют *натуральным логарифмом* и обозначают $\ln x$, т.е. $\ln x=$ $=\log_e x$.

1.7.2 Следующие пределы найдите самостоятельно. В ответ запишите значение $\ln A$.

а) $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; б) $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n+4}\right)^{9n}$;

в) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-4}\right)^{3(x-4)}$; г) $A=\lim\limits_{x\to-4}\left(1+\dfrac{x+4}{x}\right)^{\frac{8}{x+4}}$;

д) $A=\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x-1}{2x+2}\right)^{\frac{-8}{x+3}}$; е) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-4x+4}{4x^2-2x-5}\right)^{2x-11}$.

Опираясь на непрерывность элементарных функций и второй замечательный предел, докажем, что

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, 1, а. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, 2, а. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

Доказательство.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$. Перестановка предела и логарифма справедлива в силу непрерывности логарифмической функции.

2. Положим $a^x-1=y$, $x=\log_a(1+y)$. Так как при $x\to 0$ и $y\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

3. Положим $y=(1+x)^\mu-1$. Заметим, что если $x\to 0$, то $y\to 0$. Очевидно соотношение $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$. Поэтому

$$\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $x\to 0$, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\dfrac{x}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\right]}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)}{x-2}.$$

Обозначим $y=x-2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{\dfrac{y}{2}\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^x}{e^{\operatorname{tg}x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{3x}-1)}{\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}x}\operatorname{tg}x\cdot 3x}\cdot 3x=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{e^x}{\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{3}{\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}}=3,\ \text{так как}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}=1,\quad \lim_{x\to 0}e^x=1.$$

1.7.3 Найдите самостоятельно:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8x)}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{(3-4x)}{3+5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-10x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 6x}-1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}10x}-1}{\sin 2x}$.

1.8 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

1.8.1 Теоремы о свойствах бесконечно малых функций

В пределах этого подраздела, если не оговорено противное, будем все рассматриваемые функции считать скалярнозначными.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 (при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Определение 2. Функция y называется бесконечно большой в точке x_0 (при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=\infty,-\infty,+\infty$.

Пример 1. Функция $\alpha(x)=\sin x$ бесконечно малая при $x_0=k\pi$, а функция $\alpha(x)=$ $=\cos x$ бесконечно малая при $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Пример 2. Функция $y(x)=e^x$ бесконечно большая в $+\infty$ и бесконечно малая в $-\infty$; функция $y(x)=\dfrac{x-3}{x-4}$ бесконечно малая при $x_0=3$ и бесконечно большая при $x_0=4$.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Теорема 1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций в точке x_0 есть функция бесконечно малая в x_0.

Справедливость теоремы следует из теоремы о пределе суммы функций.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ в x_0 на функцию $f(x)$, ограниченную в окрестности x_0, есть бесконечно малая функция в x_0.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x\in U(x_0)$ выполнено неравенство $|f(x)|<M$ $(M\neq\infty)$, то для всех $x\in U(x_0)$ справедливо неравенство $-|\alpha(x)|M\leq\alpha(x)f(x)\leq|\alpha(x)|M$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}|\alpha(x)|M=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(-|\alpha(x)|M)=0$, то и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot f(x)=0$ по теореме 3 из подраздела 1.5.5, т.е. функция $\alpha\cdot f$ бесконечно малая в точке x_0.

Пример 3. Функция $\beta(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x=0$, так как функция $\alpha(x)=x$ бесконечно малая, а $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ограничена в окрестности точки $x_0=0$.

Теорема 3. Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке x_0, то функция $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая в x_0, и наоборот, если $\beta(x)$ — бесконечно большая в точке x_0, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая в точке x_0.

Теорему предлагается доказать самостоятельно.

1.8.2 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Определение 1. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x = x_0$ называются сравнимыми, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Определение 2. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x = x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Если $C \neq 0$, $C \neq \infty$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x = x_0$ называются бесконечно малыми одного порядка малости.

Если $C = 0$, то говорят, что бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x = x_0$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Если $C = \infty$, то бесконечно малая $\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$.

Если $C = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x = x_0$. Пишут в этом случае $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Определение 3. Говорят, что бесконечно малая функция $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x = x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C$, $C \neq 0$, $C \neq \infty$.

При этом бесконечно малую $C[\beta(x)]^k$, эквивалентную $\alpha(x)$, называют главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$.

Обычно в роли эталонной бесконечно малой в точке x_0 принимают функцию $\beta(x) = x - x_0$.

Пример 1. Найти порядок малости бесконечно малой функции $\alpha(x) = 1 - \cos x$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = x$ при $x = 0$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 2, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } k = 2, \\ \infty & \text{при } k > 2. \end{cases}$

Таким образом, порядок малости $k = 2$, а главной частью является величина $\gamma(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

Пример 2. Докажите самостоятельно, что бесконечно малая $\alpha(x) = e^{\sin x} - 1$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = x$ имеет первый порядок малости.

Совершенно аналогично производят сравнение бесконечно больших функций $u(x)$ и $v(x)$ при $x = x_0$, исходя из предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)} = C.$$

Предлагается соответствующие определения сформулировать самостоятельно.

1.8.1 Найдите порядок малости бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

а) $\alpha(x) = \sin^3(x-4)$, $\beta(x) = x-4$, $x \to 4$;

б) $\alpha(x) = \ln\left[1+\operatorname{tg}^2(x+2)\right] \cdot \arcsin^3(x+2)$, $\beta(x) = x+2$, $x \to -2$;

в) $\alpha(x) = \dfrac{x^3+5}{x^{10}+4}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \to \infty$;

г) $\alpha(x) = (x-9)^4 + \sin^5(x-9)$, $\beta(x) = x-9$, $x \to 9$;

д) $\alpha(x) = \left(e^{x-2}-1\right)^3 \cdot \left(\ln\dfrac{x+2}{4}\right)^5$, $\beta(x) = x-2$, $x \to 2$.

1.8.3 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Свойство 1. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x = x_0$, то и $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Действительно, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$.

Свойство 2. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Доказательство. Можем записать:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ т.е. } \alpha(x) \sim \gamma(x).$$

Свойство 3. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждая из них.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x = x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0,$$

т.е. $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$.

Если $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Можем записать:

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, т.е. $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Свойство 4. Сумма конечного числа бесконечно малых при $x = x_0$ эквивалентна слагаемому, имеющему наименьший порядок малости относительно всех других слагаемых.

Действительно, если в сумме $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)$ бесконечно малых в точке x_0 бесконечно малая $\alpha_1(x)$ имеет наименьший порядок малости по сравнению со всеми другими слагаемыми, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\ldots+\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \ldots + \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}\right) = 1,$$

т.е. $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x) \sim \alpha_1(x)$.

При изучении замечательных пределов мы показали, что

$$\sin x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x,\ \frac{(1-x)^\mu - 1}{\mu x} \sim x \ \text{ при } x \to 0.$$

Свойство 5. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x = x_0$ и существует $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, равный A, то и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

так как $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1$, поскольку $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$.

Последнее свойство часто используется при отыскании пределов отношений. Например, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$, так как $e^{x^2} - 1 \sim x^2$, $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \to 0$.

На основании первого замечательного предела и следствий из второго можем составить следующую таблицу эквивалентных бесконечно малых. Через $\alpha(x)$ обозначена бесконечно малая при $x \to x_0$ или $x \to \infty, \pm\infty$:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim (\log_a e)\alpha(x)$; 6) $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$;
8) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$; 9) $[1+\alpha(x)]^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha(x)$;
10) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$; 11) $1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\alpha^2(x)$.

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции легко обобщается на случай векторных функций векторного или скалярного аргумента, а именно: функция $\alpha(x) : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_k$ называется бесконечно малой при $x = x_0$, если все её координатные функции $\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\alpha_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, … $\alpha_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются бесконечно малыми, или, другими словами, если функция

$$|\alpha(x)| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}$$

является бесконечно малой при $x = x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Сравнение бесконечно малых векторных функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ производят, сравнивая их модули $|\alpha(x)|$ и $|\beta(x)|$, являющиеся скалярнозначными функциями.

Функция $\alpha(x) : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_k$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если хотя бы одна из её координатных функций $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ является бесконечно большой в этой точке. В этом случае функция

$$|\alpha(x)| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}$$

также бесконечно большая.

Заметим, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то из определения предела следует, что функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$. Верно и обратное утверждение. Таким образом, в этом случае $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

1.8.2 Используя операцию замены бесконечно малых функций эквивалентными, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{\ln(1+x^2+10x+24)}{x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,4(x+1)+6\arcsin^2(x+1)-5(x+1)^3}{\sin(x+1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4\,[1-\cos3(x-2)]^2}{\mathrm{tg}^4(x-2)}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4\,[\sin4(x+2)]^2}{\sqrt[5]{1+(x+2)^2}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to-10}\dfrac{e^{x^2+3x-70}-1}{x+10}$.

Вопросы к разделу 1

1 Опишите понятие множества. Приведите примеры множеств. Какие способы задания множеств знаете?

2 Дайте определение операций объединения (суммы), пересечения (произведения) и разности множеств. Укажите свойства этих операций. Понятие универсального множества. Операция отрицания множества.

3 Дайте определение действительного числа. Какие действительные числа называются рациональными, иррациональными? Запишите в виде неравенств множества действительных чисел $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b). Дайте определение модуля действительного числа. Его свойства.

4 Дайте определение верхней и нижней, точной верхней и точной нижней границ множества действительных чисел, ограниченных и неограниченных множеств.

5 В чём заключается свойства непрерывности, плотности и упорядоченности множества действительных чисел?

6 Символы ∞, $-\infty$, $+\infty$. Операции с этими символами. Запишите в виде неравенств множества $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,+\infty)$.

7 Понятие комплексного числа. Как вводятся операции сложения и умножения комплексных чисел? Изображение комплексных чисел на плоскости. Сопряжённые комплексные числа. Деление комплексных чисел.

8 Дайте определения модуля и аргумента, главного значения аргумента комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

9 Сформулируйте теоремы об умножении и делении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

10 Показательная форма записи комплексного числа.

11 Операция извлечения корня n-й степени из комплексного числа.

12 Понятие функции $f:\ X\subset R_n\longrightarrow Y\subset R_m$. Области значений и области определения. Охарактеризуйте частные классы функций при различных значениях m и n. Понятие графика функции.

13 Дайте определения и приведите примеры следующих числовых классов функций $f:\ X\subset R\longrightarrow Y\subset R$:

а) монотонно убывающей (возрастающей), строго монотонно убывающей (возрастающей) функции;

б) чётной, нечётной и общего вида функции;

в) ограниченной сверху (снизу), ограниченной функции;

г) неограниченной сверху (снизу) функции;

д) периодической функции.

14 Опишите класс основных элементарных функций, их области определения и значений. Постройте графики каждой из основных элементарных функций.

15 Дайте определения обратной функции и сложной функции (композиции функций).

16 Укажите виды окрестностей точки на прямой, их обозначения и записи в виде неравенств.

17 Понятие односторонних окрестностей для точки x_0, их обозначения и запись в виде неравенств. Окрестности символов $-\infty$, $+\infty$, ∞ на прямой, их обозначения и запись в виде неравенств.

18 Понятие шаровых и параллелепипедальных окрестностей на плоскости и в пространстве.

19 Понятия предельной, ограниченной и внутренней точек множества. Понятие границы множества. Открытые и замкнутые множества.

20 Дайте определение на языке окрестностей и неравенств понятия

$$\lim_{x\to x_0,\ x_0-0,\ x_0+0,\ -\infty,\ +\infty,\infty} = A,\ -\infty,\ +\infty,\ \infty.$$

21 Дайте определения числовой и векторной последовательностей. Приведите примеры. Виды числовых последовательностей.

22 Дайте определение предела числовой и векторной последовательностей. Дайте определение предела функции на языке последовательностей.

23 Сформулируйте и докажите теоремы о существовании предела векторной последовательности, о пределе монотонной ограниченной последовательности, о единственности предела, об ограниченности функции, имеющей конечный предел.

24 Сформулируйте теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

25 Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенствах.

26 Сформулируйте теоремы о связи понятий $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

27 Дайте различные определения непрерывности функции в точке x_0. Понятие непрерывности справа и слева для функции $f:\ X\subset R\longrightarrow Y\subset R$.

28 Сформулируйте теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и сложной функции.

29 Сформулируйте теоремы о свойствах непрерывных функций на замкнутом множестве.

30 Запишите первый и второй замечательные пределы и их следствия.

31 Понятие точек разрыва функции. Классификация разрывов функции $f:\ X\subset R\longrightarrow Y\subset R$.

32 Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функций в точке x_0. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

33 Дайте определения порядка малости бесконечно малой функции $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ и понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

34 Приведите свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Понятие главной части бесконечно малой функции.

35 Опишите процесс применения эквивалентных бесконечно малых функций для отыскания пределов.

36 Как определяют понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций в случае $f:\ X\subset R^n\longrightarrow Y\subset R^m$?

2 Дифференциальное исчисление

Самыми простыми и наиболее полно изученными в математике являются линейные отображения. Возникает идея приближённой замены произвольного отображения линейным, хотя бы вблизи некоторой точки (линеаризация отображения). Выяснением, для какого класса отображений возможна линеаризация, и изучением строения полученных при этом линейных операторов занимаются в части математического анализа, называемой дифференциальным исчислением.

2.1 Дифференцируемые отображения

Определение 1. Пусть $X \subset R_n$ — открытое множество и $f : X \subset R_n \to Y \subset R_k$. Функция f называется дифференцируемой в точке $x = x_0 \in X$, если существует линейный оператор $A : R_n \to R_k$ такой, что приращение $f(x) - f(x_0)$ функции f можно представить в виде

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0) \tag{2.1}$$

для всех x из X, где вектор-функция $\alpha(x - x_0)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $|(x - x_0)|$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|\alpha(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$. Если приращение аргумента $x - x_0$ обозначим Δx, а приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, то выражение (2.1) можно переписать в виде

$$\Delta f(x_0) = A(\Delta x) + \alpha(\Delta x). \tag{2.2}$$

Так как $A : R_n \to R_k$ — линейный оператор, то существует матрица A размера $(k \times n)$ такая, что $A(\Delta x) = A \cdot \Delta x$. Теперь (2.2) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x). \tag{2.3}$$

В соотношении (2.3) подчёркнуто, что матрица A зависит от выбора точки x_0.

Определение 2. Матрица A в соотношении $\Delta f(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)$ называется производной или матрицей Якоби и обозначается $f'(x_0)$, $\nabla f(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Слагаемое $A(x_0)\Delta x$ обозначается df и называется дифференциалом функции f в точке x_0.

Теперь равенство (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f'(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \\ \text{или}\quad \Delta f(x_0) &= df(x_0) + \alpha(x_0, \Delta x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Как следует из (2.4), производная матрица определяет линейный оператор, а дифференциал является значением этого линейного оператора в точке $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

Рассмотрим пример. Дана функция $f(x) = x^2 : R \to R$. Покажем, что эта функция дифференцируема в любой точке $x = x_0$. Действительно,

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2 = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0{}^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Сравнивая соотношение $\Delta f = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ с равенством (2.4), видим, что в нашем случае $A\Delta f = 2x_0 \cdot \Delta x$, $\alpha(\Delta x) = (\Delta x)^2$, причём порядок малости $\alpha(\Delta x)$ выше, чем Δx. Отсюда следует, что функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в точке x_0 и $A = f'(x_0) = 2x_0$, $df = 2x_0 \cdot \Delta x$.

Теорема 1. Всякая дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Действительно, из равенства (2.3) следует, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta f \to 0$, а это и означает непрерывность функции f. Обратное утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции не следует её дифференцируемость. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

2.2 Строение производной матрицы

Приступаем к нахождению элементов функциональной матрицы $f'(x_0)$ для произвольной дифференцируемой функции f. Процесс отыскания производной матрицы называют дифференцированием функции.

Рассмотрим четыре возможных случая.

Случай 1. Пусть $n = 1$, $k = 1$, т.е. имеем отображение $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$. Матрица $f'(x_0)$ имеет размер (1×1) и состоит из одного числа b. Поэтому

$$f(x) - f(x_0) = b \cdot (x - x_0) + \alpha(x - x_0).$$

Разделим последнее равенство на $x - x_0$ и перейдём к пределу при $x \to x_0$. Получим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x - x_0)}{(x - x_0)}$. Так как функция f предполагается дифференцируемой, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0$, и мы получаем

$$b = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

Число, определяемое пределом в выражении (2.5), называется производной функции одной переменной в точке x_0. Эта производная была изучена в средней школе.

Таким образом, для скалярной функции одной переменной производная матрица состоит из одного элемента и равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента.

Таблица производных:

1) $(c)' = 0$, $c = \mathrm{const}$; 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$;

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 4) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$;

5) $(\sin x)' = \cos x$; 6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 8) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$; 10) $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;

11) $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; 12) $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

13) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 14) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

15) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 16) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Проверим справедливость первых пяти формул.

$$(x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(использовано третье следствие из второго замечательного предела).

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}x} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

$\Bigg($использовано следствие из второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} =$ $= \log_a e\Bigg)$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\ln a$$

$\Bigg($использован предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a\Bigg)$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Аналогично можно показать, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Случай 2. Пусть n произвольно, а $k=1$, т.е. имеем $f: X\subseteq R_n\to Y\subseteq R$ — скалярную функцию n переменных, $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Матрица оператора $A: R_n\to R$ состоит из одной строки. Поэтому $f'(x) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Найдём координату a_1 вектора $f'(x)$. Положим $\Delta x_1\neq 0$, $\Delta x_2=\Delta x_3=\ldots=\Delta x_n=0$.
Тогда соотношение (2.4) в п. 2.1 можно записать в виде:

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a_1\Delta x_1+a_2\cdot 0+\cdots+a_n\cdot 0+\alpha(\Delta x_1).$$

Разделив на Δx_1 обе части этого равенства, перейдём к пределу при $\Delta x_1\to 0$ (учтём при этом, что $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x_1)}{\Delta x_1}=0$), получим

$$a_1 = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\Delta x_1}. \qquad (2.6)$$

Предел (2.6) называется частной производной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ по переменной x_1 и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Как видим, чтобы найти частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, нужно зафиксировать все переменные, кроме первой, и взять производную по первой переменной. Аналогично рассуждая, можно найти

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, a_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Матрица $f'(x)$ принимает вид $f'(x) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$.

Например, найдём производную матрицу для функции $f(x,y) = xy^2 - y^3$. Находим $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 3y^2$. Поэтому $f'(x,y) = [y^2,\ 2xy - 3y^2]$.

Случай 3. Пусть $n = 1$, а k произвольно, т.е. $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R_k$. Имеем вектор-функцию скалярного аргумента

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix}.$$

Матрица линейного оператора $A : R \to R_k$ состоит из одного столбца. Можно доказать, что в этом случае

$$f'(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_k'(x) \end{bmatrix}.$$

Строгое обоснование опустим.

Вектор-функцию одного скалярного аргумента со значениями в R_3 можно задать в виде $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Тогда $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$.

Случай 4. Пусть n и k произвольны, т.е. $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_k$. Из рассмотренных случаев 2 и 3 следует, что

$$f'(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

2.3 Некоторые свойства производных

В этом разделе будем рассматривать скалярные функции скалярного аргумента и предполагать их дифференцируемыми, а потому непрерывными.

Теорема 1. Если функции u и v имеют конечные производные, то и функции $u + v$, $u \cdot v$ и $\dfrac{u}{v}$ также имеют конечные производные и при этом:

1) $(u + v)' = u' + v'$,

2) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$,

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$.

Докажем, например, второе соотношение.

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'v+v'u.$$

Первое и третье соотношения предлагается доказать самостоятельно.

Применяя третье соотношение, находим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Очевидно, что $(c)' = 0$, где $c = \mathrm{const}$.

Из второго соотношения теоремы 1 следует, что $(cu)' = cu'$.

2.2.1 Найдите производные от заданных функций $y = y(x)$ и вычислите их значения $y'(x_0)$ в указанной точке x_0:

а) $y(x) = 5x^5 + 8x^{-1} + 6x^{-7}$, $x_0 = 1$;   б) $y(x) = 35\sqrt[35]{x^{73}} + 20\sqrt[5]{x^9}$, $x_0 = 1$;

в) $y(x) = e^x \cdot \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;   г) $y(x) = 2\sqrt{2}\cos x \cdot \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

д) $y(x) = \dfrac{5x+3}{2x+1}$, $x_0 = 0$;   е) $y(x) = \dfrac{16(2\sin x + 3e^x)}{4\cos x + \ln(1+x)}$, $x_0 = 0$.

Теорема 2. (Производная от обратной функции.) Пусть $X \subseteq R_n$, $Y \subseteq R_n$, $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$ обратное к f отображение. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и существует $\left(f'(x_0)\right)^{-1}$, то функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и имеет место формула:

$$[f^{-1}(y_0)]' = [f'(x_0)]^{-1}. \tag{2.7}$$

Теорему примем без доказательства.

В случае $n = 1$, т.е. для скалярной функции одного скалярного аргумента, формула (2.7) принимает вид

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{2.8}$$

Применяя формулу (2.8), найдём:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

так как, если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$;

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2};$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем $\sqrt{1-x^2}$ в последних двух соотношениях поставлен знак “+”, так как $\cos y > 0$ при $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin y > 0$ при $0 < y < \pi$.

Теорема 3 (производная от композиции отображений).
Если $\Phi : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_k$, $f : Y \subseteq R_k \to Z \subseteq R_m$ и функция Φ дифференцируема в точке x, а функция f дифференцируема в точке $\Phi(x)$, то композиция отображений $f \circ \Phi : X \subseteq R_n \to Z \subseteq R_m$ дифференцируема в точке x и $(f \circ \Phi)' = (f' \circ \Phi)\Phi'$, или, что то же самое,

$$[f[\Phi(x)]]' = f'[\Phi(x)] \cdot \Phi'(x), \tag{2.9}$$

т.е. производная матрица суперпозиции отображений равна произведению производных матриц исходных функций, вычисленных в соответствующих точках.

Замечание. Если обозначить матрицы $f' = A$, $\Phi' = B$, $(f \circ \Phi)' = C$, то $C = A \cdot B$.

Теорему 3 примем также без доказательства.

Рассмотрим частные случаи формулы (2.9), наиболее часто встречающиеся на практике.

Случай 1. Если $n = k = m = 1$, то соотношение (2.9) является правилом дифференцирования сложной функции одного аргумента, известного из курса средней школы.

Например, $(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x(-\sin x)$, $\left(e^{\sin^2 5x}\right)' = e^{\sin^2 5x} 2\sin 5x \cos 5x \cdot 5$, $(\operatorname{tg} \ln x)' = \dfrac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Часто встречаются степенно-показательные функции, т.е. функции вида $f(x) = u(x)^{v(x)}$. Для отыскания производных от них рекомендуется воспользоваться либо основным логарифмическим тождеством $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$, либо предварительно функцию прологарифмировать. Например,

$$[(\sin x)^{\cos x}]' = \left[e^{\cos x \ln \sin x}\right]' = e^{\cos x \ln \sin x}\left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x}\cos x\right).$$

2.2.2 Найдите производные от заданных функций $y = y(x)$ и вычислите их значения $y'(x_0)$ в указанной точке x_0:

а) $y(x) = \left(-6x^3 + 6x^2 + 2x - 1\right)^5$, $x_0 = 1$;

б) $y(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot 2^{\sin 4x + 3\cos 5x}$, $x_0 = 0$;

в) $y(x) = \ln(5x^2 - 5x + 1)$, $x_0 = 1$;

г) $y(x) = \arcsin(\cos 6x) + \arccos \sin 9x + 4\sin^2 9x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{36}$;

д) $y(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 5x) - (3 + x - 3x^2)^7$, $x_0 = 1$;

е) $y(x) = e^{3x^2 + 4x + 1}$, $x_0 = -1$;

ж) $y(x) = 7\ln \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$, $x_0 = \sqrt{2}$;

з) $y(x) = 7\operatorname{tg}^2 x - 5x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Случай 2. Пусть $n = 1$, k произвольно, $m = 1$. Для суперпозиции отображений, приведённой на схеме (рис. 2.1), имеем, что $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ есть скалярная функция k переменных. $\Phi = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x))^T$, Φ — вектор-функция одного скалярного аргумента. $(f \circ \Phi)(x) = f(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x))$ — скалярная функция скалярного аргумента.

$$\begin{tikzcd} x \subseteq R \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f \circ \Phi"'] & y \subseteq R_k \arrow[d, "f"] \\ & z \subseteq R \end{tikzcd}$$

Рис. 2.1

В нашем случае

$$A = f'(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_k}\right],$$

$$B = \Phi'(x) = \left[\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_k}{dx}\right]^T$$

(см. случаи 2 и 3, рассмотренные в разделе 2.3).

$$C = (f \circ \Phi)'(x) = \frac{df}{dx} = A \cdot B = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_k}\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_k}{dx} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx}.$$

Мы получили формулу:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx}, \tag{2.10}$$

где $f = f[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)]$.

$$\begin{tikzcd} x \subseteq R_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f \circ \Phi"'] & y \subseteq R_k \arrow[d, "f"] \\ & z \subseteq R \end{tikzcd}$$

Рис. 2.2

Пример. Для функции $f(y_1, y_2)$ найти $\dfrac{df}{dt}$, если $y_1 = \sin t$, $y_2 = \cos t$.

По формуле (2.10) находим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\cos t - \frac{\partial f}{\partial y_2}\sin t.$$

Случай 3. Пусть n и k произвольны, $m = 1$. Для суперпозиции отображений, приведённой на рис. 2.2, имеем $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ — скалярная функция k переменных.

$\Phi(x) = [y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^T$ — вектор-функция векторного аргумента.

$(f \circ \Phi)(x) = f[y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ — скалярная функция векторного аргумента. В рассматриваемом случае

$$A = f'(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_k}\right],$$

$$B = \Phi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

(См. случаи 2 и 4 в разделе 2.3.)

$$C=(f\circ\Phi)'(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]=$$

$$=A\cdot B=\left[\frac{\partial f}{\partial y_1},\frac{\partial f}{\partial y_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial y_k}\right]\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_1},\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}&=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_n}.\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

Пример. Дана функция $z=f(u,v)$, $u=x^2y$, $v=y^2x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

По формуле (2.11) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}2xy+\frac{\partial f}{\partial v}y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}x^2+\frac{\partial f}{\partial v}2yx.$$

2.3 Для функции $f(x,y)$ найдите указанную частную производную вычислите её в точке $M_0(x_0,y_0)$ при заданных значениях x_0, y_0:

а) $f(x,y)=8x^3+4y^4+3x^5y^6$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1,1)$;

б) $f(x,y)=6\sqrt{x^2+8y^2}-15\sqrt{2x^2+7y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1,1)$;

в) $f(x,y)=35\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+40\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1,2)$;

г) $f(x,y)=8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x^2+y^3\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1,1)$;

д) $f(x,y)=5\ln(x^2+y^3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(2,1)$;

е) $f(x,y)=5\ln(x^2+y^3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(2,1)$;

ж) $f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\arcsin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-4x+6y\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(0,0)$;

з) $f(x,y)=e^{-4(x^2-1)-9(y^3-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1,1)$;

и) $f(x,y)=\operatorname{tg}^3\left(4x+5y+\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(0,0)$.

2.4 Производная по направлению

Пусть даны $f(M)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — скалярная функция векторного аргумента и ненулевой вектор **a**. Зафиксируем некоторую точку M_0. Предел

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\pm|\mathbf{M_0M}|},\quad (\mathbf{M_0M}\|\mathbf{a}),$$

если он существует и конечен, называется производной от функции $f(M)$ в направлении вектора **a** в точке M_0 и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial a}$, при этом выбираем знак “+”, если $\mathbf{M_0M}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, знак “−”, если $\mathbf{M_0M}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$.

Найдём выражение для $\dfrac{\partial f}{\partial a}$, ограничиваясь случаем $n=3$, $f(M)=f(x,y,z)$. Вектор **a** запишем в виде: $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$, где $\mathbf{a}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ — орт вектора **a**, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ — его направляющие косинусы. Пусть точка M_0 имеет координаты (x_0,y_0,z_0), а M — (x,y,z). Так как $\mathbf{M_0M}\|\mathbf{a}_0$, то $\mathbf{M_0M}=t\mathbf{a}_0$, поэтому $x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\cos\beta$, $z=z_0+t\cos\gamma$, $|\mathbf{M_0M}|=|t|$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\pm|t|}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}=\frac{df}{dt}.$$

По формуле (2.10) находим:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\frac{dz}{dt}.$$

Так как $\dfrac{dx}{dt}=\cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos\beta$, $\dfrac{dz}{dt}=\cos\gamma$, то

$$\frac{\partial f}{\partial a}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{2.12}$$

Введём вектор $\operatorname{grad} f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, называемый градиентом функции f в точке M_0. Тогда формулу (2.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a}=(\mathbf{a}_0,\operatorname{grad} f). \tag{2.13}$$

Заметим, что $\left|\dfrac{\partial f}{\partial a}\right|$ определяет скорость изменения функции $f(x,y,z)$ в направлении вектора **a**. Из формулы (2.13) следует, что величина $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ наибольшая, если $\mathbf{a}\parallel\operatorname{grad} f$.

Пример. Найдите $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ в точке $M_0(1,-1,2)$, если $f(x,y,z)=x^2-3x+y^2-2y+z^2+z$ и $\mathbf{a}(2,2,1)$.

Находим орт вектора **a**: $\mathbf{a}_0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{\mathbf{a}}{3}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-3,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z+1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=-1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=-4,\ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)=5.$$

По формуле (2.12) получаем $\dfrac{\partial f}{\partial a}(M_0)=-1\cdot\dfrac{2}{3}-4\cdot\dfrac{2}{3}+5\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{5}{3}.$

2.4.1 Найдите $\operatorname{grad} f$ функции $f(x,y,z)=x^2+y^2z^3$ в точке $M_0(3,2,1)$.

2.4.2 Найдите $|\operatorname{grad} f|$ функции $f(x,y,z)=y^2+x^2z^3$ в точке $M_0(2,3,1)$.

2.4.3 Найдите производную $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ в направлении вектора $\mathbf{a}=\{2;-2;1\}$ функции $f(x,y,z)=3x^2y^3z^2$ в точке $M_0(2,1,1)$.

2.5 Производные высших порядков

Вначале рассмотрим скалярную функцию одной переменной $f: X\subseteq R\to Y\subseteq R$. Пусть для всякого x из X существует производная $f'(x)$ функции $f(x)$. Производная $f'(x)$ является новой функцией от x. Поэтому можно говорить о производной от $f'(x)$. Определим вторую производную $f''(x)$ как производную от первой производной, т.е. $f''(x)=[f'(x)]'$. Аналогично

$$f'''(x)=[f''(x)]',\ldots,\ f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'.$$

Пример 1. Найдите $f^{(n)}(x)$, если $f(x)=e^{ax+b}$.

$$f'(x)=ae^{ax+b},\ f''(x)=a^2e^{ax+b},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=a^ne^{ax+b}.$$

Пример 2. $f(x)=\sin x$. Найдите $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),\ldots,\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

Пример 3. Докажите, что $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{(n+1)}}.$

Для отыскания производных высших порядков от произведения двух функций иногда полезна формула Лейбница. Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ имеют производные до порядка n включительно. Тогда

$$[U(x)\cdot V(x)]^{(n)}=\textstyle\sum_{k=0}^{n}C_n^kV^{(k)}(x)U^{(n-k)}(x),\ \text{где}\ \ C_n^0=1,$$

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]}{k!}\ -\ \text{число сочетаний из } n \text{ по } k.$$

Для вектор-функции одного аргумента полагаем:

$$\begin{bmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{bmatrix}^{(n)}=\begin{bmatrix} f_1^{(n)}(x)\\ f_2^{(n)}(x)\\ \vdots\\ f_k^{(n)}(x)\end{bmatrix}.$$

2.5.1 Найдите производную указанного порядка от функции $y = y(x)$ и вычислите её значение в точке x_0:

а) $y(x) = 2\cos^2 2x - 5\sin^2 2x,\ \ y''',\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{8}$;

б) $y(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x + 1,\ \ y''',\ \ x_0 = 1$;

в) $y(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + \cos 4x,\ \ y'',\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{12}$;

г) $y(x) = 5e^{2x} + 3e^x + \cos 2x,\ \ y^{(IV)},\ \ x_0 = 0$.

Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Мы ввели уже частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$. Эти частные производные сами являются функциями от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поэтому можно говорить о частных производных от них. Их называют частными производными второго порядка и обозначают $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots n)$.

Можем получить следующие частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Аналогично вводятся частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \text{ и т.д.}$$

и более высоких порядков.

Частные производные, в которые входит дифференцирование по различным переменным, называются смешанными, например:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2, \partial x_1, \partial x_3}, \ldots$$

Теорема. Смешанные частные производные любого порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, непрерывные в окрестности некоторой точки, равны в этой точке между собой.

Пример 4. Найти $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, если $f(x, y, z) = x^{yz}$.

Решение. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yz(yz-1)x^{yz-2}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = zx^{yz}\ln x, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z^2 x^{yz} \ln^2 x,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{yz-1} z(1 + yz\ln x).$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ найдите самостоятельно.

Рассмотрим более подробно частные производные высших порядков от сложной функции для функций двух переменных.

Пусть $f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ — дифференцируемые функции. Тогда по формуле (2.10) имеем $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

Считая, что функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dy}{dt}$ также дифференцируемы, находим:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Мы здесь предположили, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Пусть теперь имеем сложную функцию $f(x,y) = f[x(u,v),y(u,v)]$.

Считая функции $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемыми, по формуле (2.11) можно найти

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 x}\frac{\partial y}{\partial u},$$

то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ предлагаем записать самостоятельно в качестве упражнения.

2.5.2 Найдите указанные частные производные от функции $u = f(x,y,z)$ и вычислите её значение в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

а) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{yz^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $M_0(4,1,-2)$;

б) $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x^2 + 2y^3 + 3z^2\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $M_0(0,0,0)$;

в) $f(x,y,z) = xy^4z^2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, $M_0(2,-1,2)$;

г) $f(x,y,z) = \frac{y^2}{x^2z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $M_0(-2,-1,2)$.

2.6 Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование

Определить функцию $y = f(x)$ можно с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T. \tag{2.14}$$

При этом сопоставляются друг с другом те значения x и y, которые получаются из соотношения (2.14) при одном и том же значении аргумента t. Говорят, что возникающая при этом функция $y = y(x)$ задана параметрически с помощью соотношений (2.14).

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы достаточное число раз и $\varphi'(t) \neq 0$. Предположим, что удалось найти обратную к $\varphi(t)$ функцию $x^{-1} = t(x)$. Тогда $y(x) = \psi[t(x)]$ — сложная функция и $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Таким образом, производная функции, заданной параметрически, находится по формуле:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases} \tag{2.15}$$

Для отыскания второй производной y''_{xx} воспользуемся соотношениями (2.15) ещё раз $\begin{cases} y''_{xx} = \left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \dfrac{1}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$

Вычислив производную дроби $\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t$, получим $\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}, \\ x = x(t). \end{cases}$

Аналогично могут быть получены выражения для третьей, четвёртой и последующих производных функции, заданной параметрически.

Пример. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t, \\ y = \dfrac{1}{3}\sin^3 t. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-\cos^2 t\sin t} = -3\operatorname{tg} t, \\ x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{-3\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot 3}{-\cos^2 t\sin t} = \dfrac{9}{\cos^4 t\sin t}, \\ x = \dfrac{1}{9}\cos^3 t. \end{cases}$$

2.6 Найдите y''_{xx} от функции, заданной параметрически, и вычислите её значение при $t = t_0$:

а) $\begin{cases} y = 64(t^4 - 9t), \\ x = t^3 + t, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

б) $\begin{cases} y = 6\operatorname{arctg} t - 9t, \\ x = \ln(1+t^2) + t, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

в) $\begin{cases} y = 5\sqrt{t^2-1} - 9\arcsin t, \\ x = \arccos\dfrac{1}{t}, \end{cases} \quad t > 2,\ t_0 = \sqrt{2};$

г) $\begin{cases} y = 8(5t^3 - 5t^2 - 7t), \\ x = \dfrac{1}{4}t^4 + t, \end{cases} \quad t_0 = 1.$

2.7 Функции, заданные неявно, и их дифференцирование

Соответствие между x и y может быть задано с помощью уравнения

$$F(x,y)=0 \tag{2.16}$$

следующим образом: с каждым значением $x=x_0$ сопоставляется то значение y_0, которое получается решением уравнения $F(x_0,y)=0$, т.е. то, которое обращает уравнение $F(x_0,y)=0$ в тождество. Таким образом, с помощью соотношения (2.16) можно задать функцию $y(x)$ такую, что $F(x,y(x))\equiv 0$. Говорят, что функция $y(x)$ задана неявно с помощью уравнения (2.16). В тех случаях, когда уравнение $F(x,y)=0$ удаётся разрешить относительно y, мы найдём явное задание функции.

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ задаёт неявно y как функцию от x. $F(x,y(x))$ — сложная функция переменной x, а $F(x,y(x))\equiv 0$ — тождество. Дифференцируя обе части этого тождества по x, применяя формулу (2.10), получаем: $\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dx}+$ $+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$. Отсюда, полагая, что $F'_y\neq 0$, находим

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{2.17}$$

Используя соотношение (2.17), легко найти y''_{xx} (предполагая её существование):

$$y''_{xx}=-\left[\frac{F'_x}{F'_y}\right]'_x=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}y'_x)F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}y'_x)F'_x}{(F'_y)^2}.$$

Полагая $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ и считая, что $F''_{xy}=F''_{yx}$, после упрощения получим

$$y''_{xx}=\frac{2F''_{xy}F'_xF'_y-F''_{xx}(F'_y)^2-F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}.$$

Аналогично можно получить выражения для третьей производной, четвёртой и т.д.

2.7.1 Функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Найдите производную y'_x и вычислите её значение в указанной точке $x=x_0$:

а) $F(x,y)=x^3y-3x^2y^2-y^3+6x+1=0,\ \ x_0=0,\ y(0)=1;$

б) $F(x,y)=5x^2+5\ln y-4y-16=0,\ \ x_0=2,\ y(2)=1;$

в) $F(x,y)=y^4-2x^3-8x^2y^2+5x+11y-7,\ \ x_0=1,\ y(1)=1.$

Пусть уравнение $\Phi(x,y,z)=0$ определяет неявно функцию $z=z(x,y)$ в некоторой области. Тогда имеем сложную функцию $\Phi[x,y,z(x,y)]$ двух переменных x и y и тождество $\Phi[x,y,z(x,y)]\equiv 0$. Дифференцируя это тождество по x, применяя формулы (2.11), получаем $\Phi'_x(x,y,z)+\Phi'_z z'_x=0$. Предположим, что $\Phi'_z\neq 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}}. \tag{2.18}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}. \tag{2.19}$$

Для отыскания частных производных z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} нужно продифференцировать дроби (2.18) и (2.19), используя формулы (2.11) и выражения z'_x и z'_y в (2.18) и (2.19). Подробные выкладки предлагаем выполнить читателю в виде упражнения.

2.7.2 Функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и вычислите их значения в указанной точке:

а) $F(x,y,z) = xyz + \cos xyz - 8 - \cos 8 = 0$, $M_0(1,2,4)$ (x, y, z измеряются в радианах, $xyz \neq \dfrac{\pi}{2}$).

б) $F(x,y,z) = 6x - 3y - 3z - e^{-(6x-3y-3z)} + 1 = 0$, $M_0(1,1,1)$.

2.8 Геометрический и механический смысл производной

Пусть функция $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ дифференцируема. Построим её график (рис. 2.3) и проведём секущую, соединяющую точки $M_0(x, f(x))$ и $M(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Предельное положение секущей M_0M, когда точка M стремится к точке M_0 по кривой, называется касательной к кривой в точке M_0. Тангенс угла φ наклона секущей к оси OX (рис. 2.3) равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

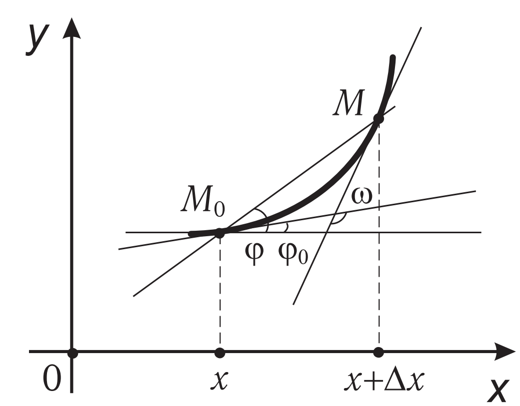


Рис. 2.3

Если устремим $\Delta x \to 0$, то секущая займёт положение касательной к графику функции f в точке x. Но

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, геометрический смысл производной функции f в точке x заключается в том, что $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона к оси OX касательной к графику функции в точке x.

Если в каждой точке графика функции провести касательную, то эта касательная при перемещении точки касания по кривой будет вращаться. Введём понятие средней кривизны кривой на участке M_0M, как отношение угла ω между касательными в точках M_0 и M к длине дуги σ участка кривой M_0M.

Кривизной графика функции в точке M_0 называют число k, определяемое равенством $k=\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\omega}{\sigma}$. Если график функции $f(x)$ задан параметрически в виде $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ то можно доказать, что

$$k=\frac{x'_t y''_{tt}-y'_t x''_{tt}}{[(x'_t)^2+(y'_t)^2]^{3/2}}. \tag{2.20}$$

При явном задании функции в виде $y=f(x)$ формула (2.20) принимает вид

$$k=\frac{f''_{xx}}{[1+(f'_x)^2]^{3/2}}.$$

Пример 1. Найти кривизну гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ в точке $x=2$.

Решение. $f'=-\dfrac{4}{x^2}$; $f'(2)=-1$; $f''=\dfrac{8}{x^3}$; $f''(2)=1$;
$k=\dfrac{1}{(1+1)^{3/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Найти кривизну линии, заданной параметрически $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3, \end{cases}$ в точке $t_0=1$.

Решение. Находим $x'_t=6t$, $y'_t=3-3t^2$, $x'_t(1)=6$, $y'_t(1)=0$, $x''_t=6$, $y''_t=-6t$, $x'_t(1)=6$, $y''_t(1)=-6$. По формуле (2.20) получаем $k=\dfrac{-6\cdot 6}{(6^2)^{3/2}}=-\dfrac{1}{6}$.

Заметим, что кривизна прямой линии $y=kx+b$ равна нулю, а кривизна окружности радиусом R в каждой точке постоянна и равна $\dfrac{1}{R}$.

Пусть $s=f(t)$ — величина пути, пройденного точкой к моменту времени t. Тогда отношение $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ есть средняя скорость движения точки на участке Δt, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$ определяет мгновенную скорость движения точки в момент времени t. Величина $f''(t)$ есть ускорение движения точки.

2.9 Уравнение касательной к кривой. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

В разделе 2.8 мы показали, что $f'(x_0)=k$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке x_0. Поэтому для функции, заданной в явной форме, уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.21}$$

В случае неявного задания функции $y(x)$ уравнением $F(x,y)=0$ уравнение (2.21) принимает вид $y-y_0=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$, или

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Для параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, $t \in (t_1, t_2)$ при $t = t_0$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $y'_x(t_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$. Поэтому уравнение касательной можно записать в виде $y - y_0 = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}(x - x_0)$, или

$$\frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)}.$$

В случае пространственной кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{2.22}$$

уравнение касательной при $t = t_0$ можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}.$$

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется нормалью к кривой.

При задании кривой неявно уравнением $F(x, y) = 0$ уравнение нормали в точке (x_0, y_0) можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Пусть теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет неявно функцию $z = z(x, y)$, графиком которой является некоторая поверхность S, и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка поверхности S, т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Плоскость Π, проходящая через точку M_0 и содержащая касательные ко всем кривым, проходящим через M_0 и лежащим на поверхности S, если она существует, называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0.

Если кривая $\mathcal{L}$ задана параметрически уравнениями (2.22) и лежит на поверхности $F(x, y, z) = 0$, то имеем относительно t тождество $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество по t (в предположении, что $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $F(x, y, z)$ — дифференцируемые функции), по формуле (2.10) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{2.23}$$

Обозначим $\mathbf{N} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$, $\mathbf{r} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$. Тогда (2.23) можно переписать в виде равенства $(\mathbf{N}, \mathbf{r}) = 0$, которое означает, что вектор $\mathbf{N}$ ортогонален направляющему вектору $\mathbf{r}$ касательной к любой дифференцируемой кривой $\mathcal{L}$, лежащей на поверхности S и проходящей через точку M_0, т.е. он является вектором нормали к искомой касательной плоскости Π.

Таким образом, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно записать в виде

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Если поверхность S задана явно уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид
$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$
Прямая, перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, называется нормалью к поверхности в точке M_0.

Уравнение нормали к поверхности $F(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ можно записать в виде
$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Пример 1. Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y=2x^2+4$ в точке $M(2,12)$.

Решение. Находим $y'=4x$, $y'(2)=8$. Поэтому уравнение касательной будет иметь вид $y-12=8(x-2)$, или $8x-y-4=0$, а уравнение нормали $x+8y-98=0$.

Пример 2. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1$ в точке $M(1,1,2)$.

Решение. Так как $\dfrac{\partial F}{\partial x}=x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{z}{8}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)=1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)=\dfrac{1}{4}$, то уравнение касательной плоскости может быть записано в виде $(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)+\dfrac{1}{4}(z-2)=0$, или $4x+2y+z-8=0$, а $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ — уравнение нормали.

2.9.1 Запишите уравнение касательной к графику функции $y(x)=6x^2-5x+1$ в точке $x_0=2$.

2.9.2 Запишите уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$, заданной параметрически
$$\begin{aligned}x&=t^3+t^2+2,\\ y&=-t^3+8t^2-8t+5\end{aligned}$$
в точке $t_0=-1$.

2.9.3 Запишите уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением
$$F(x,y)=9x^3-5y^3-10xy-97x-7y+154=0$$
в точке $M_0(2,1)$.

2.9.4 Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением
$$z=7x^2-4y^2+8xy+14x-8y+62$$
в точке $M_0(-3,2,3)$. Найдите длину отрезка, отсекаемого касательной плоскостью от оси Oz.

2.9.5 Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением
$$3x^2-4y^2+5z^2+17xy-6yz-xz+23x+4y+4z+34=0$$
в точке $M_0(2,-2,0)$. Найдите длину отрезка, отсекаемого касательной плоскостью от оси Oz.

2.10 Дифференциал функции

Рассмотрим дифференциал $f'(x)\Delta x$ более подробно. Обычно дифференциал в точке x обозначают $df(x)$. Чтобы подчеркнуть зависимость дифференциала от Δx, будем писать $df(x,\Delta x)$. По определению $df(x,\Delta x) = f'(x)\Delta x$, $\Delta x \in R_n$, т. е. дифференциал является результатом действия линейного оператора с матрицей $f'(x)$ на вектор Δx. Если $f'(x) \neq 0$, то дифференциал можно определить как линейную составляющую приращения функции, вызванного приращением аргумента Δx.

При этом будем считать, что приращение Δx не зависит от x, т. е. в рассматриваемом процессе Δx полагать константой относительно x. Положим $dx = \Delta x$. Тогда

$$df(x) = df(x,dx) = f'(x)dx. \tag{2.24}$$

Рассмотрим (2.24) для функций разного числа аргументов.

Случай 1. $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ — скалярная функция одного скалярного аргумента $y = f(x)$. В этом случае $f'(x)$ состоит из одного элемента и совпадает с производной $f'(x)$ и $df(x) = f'(x)dx$.

2.10.1 Найдите дифференциал данной функции $f(x)$ одного аргумента и вычислите его значение при указанных x_0 и Δx:

а) $f(x) = (9x^5 + 5x^3 - 15)^{10}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$;

б) $f(x) = 2\cos^2 x - 4\sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = 0{,}01$;

в) $f(x) = 5\,\mathrm{tg}^2 x - 7\,\mathrm{ctg}^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = 0{,}01$;

г) $f(x) = 40(\mathrm{arctg}\,2x + \mathrm{arcctg}\,x) + 8x^3$, $x_0 = 0{,}50$, $\Delta x = 0{,}01$.

Случай 2. $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ — скалярная функция векторного аргумента $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Теперь $f'(x) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$, $dx = \Delta x = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)^T$ и, следовательно,

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right][dx_1, dx_2, \ldots, dx_n]^T,$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Случай 3. $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_m$ — векторная функция векторного аргумента.

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

В этом случае

$$df = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}dx_2 + \cdot + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{bmatrix}.$$

Случай 4. $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R_m$ — векторная функция скалярного аргумента.

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \quad df = \begin{bmatrix} f_1'(x)dx \\ f_2'(x)dx \\ \vdots \\ f_m'(x)dx \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Если $f(x) = x^2\cos^3 5x$, то

$$df = f'(x)dx = (2x\cos^3 5x - 15x^2\cos^2 5x\sin 5x)dx.$$

Пример 2. Если $f(x,y,z) = x^3\cos y + z^2$, то $df = 3x^2\cos y dx - x^3\sin y dy + 2zdz$.

Рассмотрим сложную функцию $(f \circ \Phi)x = f[\Phi(x)]$. По правилу дифференцирования сложной функции $(f \circ \Phi)'(x) = (f' \circ \Phi)\Phi'(x)$. Умножив обе части этого равенства на dx, получим

$$(f \circ \Phi)'(x)dx = (f' \circ \Phi)(x)\Phi'(x)dx = f'(\Phi(x))\Phi'(x)dx = f'(\Phi(x))d\Phi(x),$$

т.е. $(f \circ \Phi)'(x)dx = f'[\Phi(x)]d\Phi(x)$.

Свойство, заключённое в последнем соотношении, состоящее в том, что для зависимой и независимой переменных дифференциал функции записывается одинаково, называется свойством инвариантности первого дифференциала. Это свойство широко используется при замене переменных в интегральном исчислении: если $df = f'(x)dx$, то и $df = f'(u)du$, какая бы ни была дифференцируемая функция $u(x)$, например $du^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}du$, $d\ln u = \dfrac{du}{u}$ и т.д.

По определению дифференцируемости

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)dx + \alpha(x_0, dx),$$

где $\alpha(x_0, dx)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем dx. Тогда в близкой к x_0 точке $x_0 + dx$ имеем

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + \alpha(x_0, dx).$$

Отбрасывая слагаемое $\alpha(x_0, dx)$, как имеющее порядок малости относительно dx выше первого, получаем $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$ с ошибкой, равной $\alpha(x_0, dx)$.

Пример 3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Решение. Возьмём $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $dx = -0{,}03$.

Так как $f'(x) = (\operatorname{arctg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $f'(1) = 0{,}5$.

Учитывая, что $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 = \operatorname{arctg} 1 + 0{,}5(-0{,}03) = \frac{\pi}{4} - 0{,}015 \approx \frac{3{,}142}{4} - 0{,}015 \approx$$
$$\approx 0{,}786 - 0{,}015 = 0{,}771.$$

2.10.2 Найдите дифференциал данной функции $f(x,y)$ двух аргументов и вычислите его значение с точностью до 0,01 при заданных x_0, y_0, Δx, Δy:

а) $f(x,y) = 5\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$;

б) $f(x,y) = x^2y - y^2x$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}03$;

в) $f(x,y) = 3\arcsin\dfrac{x}{y}$, $x_0 = 4$, $y_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}04$;

г) $f(x,y) = \dfrac{25(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}04$.

2.11 Дифференциалы высших порядков

Как мы видели, df является функцией от x. Поэтому можно говорить о $d(df)$.

Дифференциалом второго порядка (обозначается $d^2 f$) называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е. $d^2 f = d(df)$.

По индукции положим $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Получим формулы для вычисления дифференциалов высших порядков.

Случай 1. $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ — функция одной переменной, тогда

$$d^2 f = d(df) = d(f')dx + f'd(dx) = (f''_{xx}dx)dx + f'_x d^2x = f''_{xx}(dx)^2 + f'_x d^2x.$$

Возможны два варианта:

а) x — независимая переменная, тогда dx не зависит от x, поэтому $d^2x = d(dx) = 0$ и, следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} d^2 f = f''(dx)^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ d^n f = f^{(n)}(dx)^n; \end{array}\right\} \tag{2.25}$$

б) x — есть функция независимой переменной $t : x = x(t)$, тогда $d^2x = x''_{tt}(dt)^2$ и, следовательно,

$$d^2 f = f''(dx)^2 + f'x''_{tt}(dt)^2 = f''_{xx}(x'_t dt)^2 + f'_x x''_{tt}(dt)^2. \tag{2.26}$$

Сравнивая выражения (2.25) и (2.26) для $d^2 f$, заключаем, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы записи.

2.11.1 Найдите дифференциал $d^2 f$ от функции $f(x)$ при заданных значениях x_0 и Δx:

а) $f(x) = 8\sqrt{3+x^2}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$;

б) $f(x) = 9\ln(1+x)$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}3$;

в) $f(x) = e^{-6x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}2$.

Случай 2. $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ — скалярная функция многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdot + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}d(dx_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_j\right)dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i, \quad \text{т.е.}$$

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i.$$

Если x_i — независимые переменные, то $d^2x_i = 0$ и

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j dx_i. \tag{2.27}$$

Видим, что $d^2 f$ является квадратичной формой относительно $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

В частности, для функции двух независимых переменных $f(x,y)$:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(dy)^2.$$

Символически соотношение (2.27) можно записать в виде

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f.$$

В случае дифференциала $d^m f$, если x_i — независимые переменные, то

$$d^mf = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f.$$

Пример 1. Найти d^2f, если $f(x,y) = 2x^2y^3 + \sin xy$, где x и y — независимые переменные.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + y\cos xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + x\cos xy,\quad \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = 4y^3 - y^2\sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 12x^2y - x^2\sin xy,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 12xy^2 + \cos xy - xy\sin xy.$$

Поэтому

$$d^2f = (4y^3 - y^2\sin xy)(dx)^2 + 2(12xy^2 + \cos xy - xy\sin xy)dxdy +$$
$$+(12x^2y - x^2\sin xy)(dy)^2.$$

Решите самостоятельно.

2.11.2 Найдите дифференциал d^2f от функции $f(x,y)$ при заданных значениях x_0, y_0, Δx, Δy:

а) $f(x,y) = x^2y^3$, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$;

б) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta x = 0{,}01$;

в) $f(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}\,xy$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta x = 0{,}3$.

2.12 Формула Тейлора

Если f — скалярная функция одной или многих переменных, имеющая непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно, то её приращение в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx, можно представить в виде

$$\Delta f(x,x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + R_{n+1}(x,x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(x_0)}{k!} + R_{n+1}(x,x_0). \tag{2.28}$$

Соотношение (2.28) называется формулой Тейлора для функции f в точке x_0. Величина $R_{n+1}(x,x_0)$ называется остаточным членом. Можно доказать, что R_{n+1} имеет порядок малости относительно Δx выше n.

Справедливость формулы (2.28) будет доказана при изучении рядов Тейлора.

Если $f(x)$ — скалярная функция одного скалярного аргумента, то $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$, где $dx = \Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, и формулу (2.28) можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x,x_0).$$

В этом случае остаточный член $R_{n+1}(x,x_0)$ может быть найден по формуле $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где c — некоторая точка, лежащая между x и x_0. Такую форму записи остаточного члена называют формой Лагранжа. При $x_0 = 0$ формула Тейлора носит название формулы Маклорена.

Для скалярной функции двух переменных формула (2.28) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^n \times \\ &\times f(x_0,y_0) + R_{n+1}(x,y,x_0,y_0). \end{aligned}$$

Важнейшими разложениями по формуле Маклорена являются:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k + R_{n+1}(x).$$

Эти разложения легко получить, используя соответствующие производные n-го порядка:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Формула Тейлора широко применяется в приближенных вычислениях.

2.12.1 Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = 32\sqrt{x}$, если $x_0 = 1$, $n = 4$.

2.12.2 Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = \ln(1+x)$, если $x_0 = -0{,}5$, $n = 5$.

2.12.3 Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = 7!\sin x$, если $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 7$.

2.13 Основные теоремы дифференциального исчисления

В этом разделе, за исключением теоремы 7, изучаются скалярные функции одного аргумента.

Теорема 1. Пусть функция f имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) > f(x_0)$ для $\forall x \in U^+(x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in U^-(x_0)$. Если $f'(x_0) < 0$, то в соответствующих полуокрестностях выполнены противоположные неравенства.

Доказательство. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

и если $f'(x_0) > 0$, то по теореме 4 из п. 1.5.5 существует окрестность $U(x_0)$ такая, что

$$\forall x : x \in U(x_0) \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

откуда и следует справедливость теоремы.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется точкой наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ в области X, если для всех $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Теорема 2 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a,b) и в точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значения. Тогда, если существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Действительно, если предположить, что $f'(c) \neq 0$, например $f'(c) > 0$, то из теоремы 1 следует справедливость неравенств $f(x) < f(c)$ для всех x из $U^-(x_0)$ и $f(x) > f(c)$ для всех x из $U^+(x_0)$. Это противоречит тому, что $f(c)$ — наибольшее значение.

Теорема 3 (Ролля). Если:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует конечная производная $f'(x)$ на (a,b);

3) $f(a) = f(b)$,

то существует такая точка c, $a < c < b$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она принимает на $[a,b]$ свои наибольшее M и наименьшее m значения.

1. $M = m$. Тогда $f(x) = M$ для всех $x \in [a,b]$ и $f'(x) = 0$ на (a,b). В качестве c можно взять любую точку из (a,b).

2. $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то одно из этих значений достигается во внутренней точке c. По теореме 2 в этой точке $f'(c) = 0$.

Теорема 4 (Лагранжа). Если:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует конечная производная $f'(x)$ на (a,b),

то найдется такая точка c, $a < c < b$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{2.29}$$

Доказательство. Функция $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому существует такая точка c, $a < c < b$, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда и следует (2.29).

Если положить $x = a$, $b = x + \Delta x$, то формулу (2.29) можно записать в виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x -$$

формула Лагранжа о конечных приращениях. Так как точка c лежит между x и $x + \Delta x$, то можно положить $c = x + \Theta\Delta x$, где $0 \le \Theta \le 1$.

Теорема 5 (Коши). Если:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a, b]$;

2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$,

то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Из теоремы Ролля и условия 3 данной теоремы следует, что $g(b) \neq g(a)$. Формулу (2.30) можно получить применением теоремы Ролля к функции $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$.

Необходимым условием дифференцируемости функции является существование производной матрицы. Остановимся теперь на достаточных условиях дифференцируемости.

Теорема 6. Если функция $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$, то функция f дифференцируема в этой точке.

По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, поэтому величина $\beta(x_0, \Delta x) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$ является бесконечно малой, следовательно, величина $\beta(x_0, \Delta x)\Delta x$ имеет порядок малости выше, чем Δx. Находим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \beta(x_0, \Delta x)\Delta x,$$

т.е. функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Для функций двух и более аргументов существования производной матрицы в точке недостаточно для дифференцируемости функции. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Если функция $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R$ имеет в точке ξ_0 конечную производную и эта производная непрерывна в точке ξ_0, то функция f дифференцируема в этой точке.

Доказательство проведём для функций двух переменных. Пусть $\xi_0 = (x_0, y_0)$. По условию теоремы функция $f'(\xi) = f'(x, y) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right]$ непрерывна, следовательно, непрерывны частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x_0,y_0). Рассмотрим приращение функции $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$. Применяя к каждой из разностей теорему Лагранжа, получаем

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_2\Delta y)\Delta y,$$

где $0 \le \Theta_1 \le 1$; $0 \le \Theta_2 \le 1$. В силу непрерывности частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_2\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \alpha_2(\Delta y),$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые величины при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Теперь можем записать:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y.$$

Так как величина $\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ имеет порядок малости относительно $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ выше первого, что нетрудно показать, то это и означает дифференцируемость функции f в точке ξ_0.

2.13.1 На отрезке $[-1,1]$ заданы следующие функции:

1) $f_1(x) = x^2$; 2) $f_2(x) = 5x+2$;

3) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ 4) $f_4(x) = \sin \pi x$;

5) $f_5(x) = |x|$.

Для каких из этих функций выполнены все условия теоремы Ролля?

2.13.2 Запишите формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^2+4x+2$ на отрезке $[-1,1]$. Найдите значение константы c, фигурирующей в записанной формуле.

2.13.3 Дана функция $f(x) = x^2+4x+2$ на отрезке $[-1,3]$. Пользуясь теоремой Лагранжа, найдите координаты точки $M_0(x_0,y_0)$, в которой касательная к графику данной функции параллельна хорде, соединяющей конечные точки этого графика.

2.14 Правило Лопиталя

При отыскании пределов часто не удаётся применить теоремы о пределе суммы, произведения, частного, степени, так как возникают неопределённости типа $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, $\infty-\infty$. Все виды неопределённостей путём алгебраических преобразований или логарифмирования удаётся свести к неопределённости $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 1 (Лопиталя). Если:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на (a,b);

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) всюду на (a,b) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x)\neq 0$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, также равный k:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Доказательство. Положим $f(a)=g(a)=0$, тогда функции f и g непрерывны на $[a,x]$, $a<x<b$ и удовлетворяют на $[a,x]$ условиям теоремы 5 (Коши). Поэтому $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где $a<c<x$. Так как при $x\to a$ и $c\to a$, то теорема доказана.

Теорема 1 верна и при $x\to\infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену $y=\dfrac{1}{x}$, $x=\dfrac{1}{y}$.

Теорема 2 (Лопиталя). Если:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на (a,b);

2) $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\infty$;

3) всюду на (a,b) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x)\neq 0$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, тоже равный k.

Доказательство теоремы опустим.

При раскрытии неопределённостей иногда теоремы 1 и 2 приходится применять несколько раз, так как предел $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ опять может привести к неопределённости.

Рассмотрим кратко другие неопределённости. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Возникает неопределённость $0\cdot\infty$. Можем записать $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, и мы придём к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$.

Если нужно найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то, записав $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$, получим неопределённость $\dfrac{0}{0}$.

Неопределённости 0^0, 1^∞, ∞^0 сводятся к $0\cdot\infty$ путём логарифмирования выражения $\phi(x)=f(x)^{g(x)}$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$. Все условия теоремы 1 здесь выполнены.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\operatorname{tg}x}$.

Решение. Имеем неопределённость 0^0. Логарифмируя выражение $y=x^{\operatorname{tg}x}$, получаем $\ln y=\operatorname{tg}x\ln x=\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}$.

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x\left(-(\operatorname{tg}x)^{-2}\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{-(\operatorname{tg}x)^2\cos^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}\sin x=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}y=1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\operatorname{tg}x}=1$.

2.14 Пользуясь правилом Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^3+4x^2-36x-144}{x^2+9x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{204(x^3+12x^2+12x-80)}{x^3+x^2-76x+140}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{2(x+3)}-e^{8(x+3)}}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(x-\sin x)}{x-\operatorname{tg}x}$.

2.15 Условия постоянства функции. Условия монотонности функции

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) и имеет внутри него конечную производную. Для того чтобы $f(x)$ была в X постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)=0$ внутри X.

Необходимость условия очевидна: из $f(x)=\mathrm{const}$ следует $f'(x)=0$.

Достаточность. Пусть $f'(x)=0$ внутри X. Фиксируем любую точку $x_0\in X$ и возьмём любую другую точку $x\in X$. К $f(x)$ и промежутку $[x_0,x]$ или $[x,x_0]$ применим теорему Лагранжа (все её условия выполнены) $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Так как $f'(c)=0$, то $f(x)=f(x_0)=\mathrm{const}$.

Пример 1. Доказать, что $\operatorname{arctg}x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Находим

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

По теореме 1 $f(x)=\operatorname{arctg}x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=c$. Так как $f(0)=0$, то $c=0$. Равенство доказано.

Теорема 2. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет конечную производную на (a,b). Для того чтобы функция $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Необходимость. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает и $\Delta x > 0$. Так как $f(x+\Delta x) \geq f(x)$, то

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0. \tag{2.31}$$

Неравенство (2.31) верно и при $\Delta x < 0$. В этом случае числитель и знаменатель отрицательны. Переходя к пределу в неравенстве (2.31), получаем $f'(x) \geq 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b). Возьмём две произвольные точки x_1 и x_2 из (a,b), $x_2 > x_1$. По теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$. Так как $f'(c) \geq 0$, $x_2 > x_1$, то $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$, т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$. Теорема доказана.

Пример 2. Найти участки монотонности функции $f(x) = 2x^3-3x^2-12x+5$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси. Находим

$$f'(x) = 6x^2-6x-12 = 6(x-2)(x+1).$$

Видим, что $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1,2)$. Следовательно, по теореме 2 функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ и убывает на $(-1,2)$.

2.15.1 Найдите область, в которой функция $f(x) = x^3+3x^2-9x+3$ монотонно убывает.

2.15.2 Найдите область, в которой функция $f(x) = 6-12x-9x^2-2x^3$ монотонно возрастает.

2.16 Экстремумы

2.16.1 Необходимые условия экстремума

В этом разделе рассматриваются скалярнозначные функции одной и многих переменных.

Определение 1. Говорят, что точка x_0 есть точка минимума (максимума) функции f, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$). Если для всех $x \in U(x_0)$ выполнено строгое неравенство $f(x_0) < f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$), то точка x_0 называется точкой строгого минимума (максимума).

Определение 2. Точка x_0 называется точкой экстремума функции f, если она является точкой максимума или минимума.

Теорема 1. Если точка x_0 — точка экстремума функции f и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть вначале f — скалярная функция одного аргумента. Так как точка x_0 — точка наибольшего или наименьшего значения в некоторой окрестности $U(x_0)$, то по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Пусть теперь f скалярная функция многих переменных, т.е. $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $x_0 = (x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n})$. Фиксируя все переменные, кроме x_i, из только что доказанного получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n,$$

т.е. $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right] = 0$. Для дифференцируемой функции обращение в нуль производной приводит к обращению в нуль дифференциала

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)dx_i = 0.$$

Определение 3. Точка x_0, в которой производная обращается в нуль, называется стационарной точкой функции f.

Из теоремы 2 следует, что точки, в которых может достигаться экстремум, являются либо её стационарными точками, либо в них производная не существует. Такие точки будем называть подозрительными на экстремум.

2.16.2 Достаточные условия экстремума

Для скалярной функции одной переменной достаточные условия экстремума формулируются с помощью первой производной или на основе высших производных.

Достаточные условия на основе первой производной. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой её окрестности и точка x_0 является подозрительной на экстремум для этой функции. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$:

1) меняет знак с “+” на “−”, то в точке x_0 — максимум;

2) меняет знак с “−” на “+”, то в точке x_0 — минимум;

3) не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.

Достаточные условия экстремума на основе второй и высших производных.

Пусть x_0 — стационарная точка и существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда, используя формулу Тейлора, можем записать:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_3(x_0, \Delta x),$$

где величина $R_3(x_0, \Delta x)$ имеет порядок малости относительно Δx выше второго. Поэтому знак Δf определяется первым слагаемым. Видим, что при $f''(x_0) > 0$, $f(x) > f(x_0)$ и в точке x_0 — минимум, при $f''(x_0) < 0$, $f(x) < f(x_0)$ и в точке x_0 — максимум.

Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x_0, \Delta x),$$

где величина $R_{n+1}(x_0, \Delta x)$ относительно Δx имеет порядок малости выше n, т.е. знак Δf определяется первым слагаемым. При n чётном и $f^{(n)}(x_0) > 0$ в точке x_0 — минимум, при n чётном и $f^{(n)}(x_0) < 0$ в точке x_0 — максимум. Если же n нечётно, то в точке x_0 экстремума нет.

2.16.1 Найдите точки x_1 и x_2, в которых функция $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ принимает максимум или минимум.

2.16.2 Найдите, в какой точке x_0 функция $f(x) = x^3e^{-x}$ достигает максимума.

2.16.3 Укажите число точек экстремума, которые имеет функция
$f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 3x^2$.

Достаточные условия экстремума для скалярной функции многих переменных $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — стационарная точка, т.е. $df = 0$. По формуле Тейлора можем записать

$$\Delta f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \frac{1}{2!} d^2 f + R_3(x_0, \Delta x).$$

Знак Δf определяется знаком $d^2 f$, являющимся квадратичной формой относительно $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Для анализа величины $d^2 f$ нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из линейной алгебры.

Определение 1. Квадратичная форма

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \ a_{ik} = a_{ki} \qquad (*)$$

называется невырожденной, если её матрица невырождена.

Определение 2. Невырожденная квадратичная форма называется положительно определённой, если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и называется отрицательно определённой, если для $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет место $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$.

Квадратичная форма называется неопределённой, если для одних x величина $Q(x) > 0$, а для других — $Q(x) < 0$.

Определение 3. Миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ называются главными.

Теорема (критерий Сильвестра). Невырожденная квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы больше нуля, и является отрицательно определённой, если знаки главных миноров чередуются, начиная с отрицательного.

Подчеркнём, что в нашем случае в выражении $(*)$ $a_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$.

Пусть дана скалярная функция двух переменных $z = f(x, y)$ и (x_0, y_0) её стационарная точка. Тогда

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f + R_3(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(dy)^2\right] + R_3.$$

Знак Δf полностью определяется знаком квадратичной формы

$$d^2 f = f''_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2.$$

Если $d^2 f$ положительно определена, т.е. если, согласно критерию Сильвестра,

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0, \ \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то в точке (x_0,y_0) — минимум. Если же $d^2 f$ отрицательно определённая квадратичная форма, т.е. если

$$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то в точке (x_0,y_0) — максимум. Если же для одних значений dx, dy величина $d^2 f > 0$, а для других $d^2 f < 0$, то экстремума нет.

Если окажется $d^2 f = 0$, то для исследования нужно привлекать дифференциалы более высокого порядка.

Пример 1. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение. Так как функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси, то подозрительными на экстремум являются лишь стационарные точки. Найдём их. Для этого решим уравнение:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 0.$$
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Так как $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, то при переходе через точку $x_1 = 1$ производная $f'(x)$ меняет знак по схеме "+" на "−", в точке $x_1 = 1$ функция имеет максимум, а при переходе через точку $x_2 = 3$ производная $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+", следовательно, в точке $x_2 = 3$ минимум. Можно было воспользоваться второй производной: $f''(x) = 6x - 12$. Так как $f''(1) = -6 < 0$, то в точке $x_1 = 1$ максимум, $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$, то в точке $x_2 = 3$ минимум.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Решение.

Стационарные точки находим из условия $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6 - 2x - y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y = 0, \end{cases}$

решая эту систему, находим координаты единственной стационарной точки $M_0(4,-2)$. Так как $f''_{xx}(4,-2) = -2 < 0$, $f''_{yy}(4,-2) = -2$, $f''_{xy}(4,-2) = -1$, то

$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, и в точке $(4,-2)$ имеем максимум.

2.16.3 Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения скалярной функции $f(x)$ одной или многих переменных, заданной в замкнутой области X. Точки, в которых достигаются эти значения, могут быть как внутренними множества X, так и граничными. Алгоритм для их отыскания следующий:

1) находим все подозрительные на экстремум точки, лежащие внутри X, и вычисляем значения функции в этих точках;

2) задав границы области X в виде системы равенств, находим подозрительные на экстремум точки, лежащие на границе. Вычисляем значения функции в этих точках;

3) из всех значений функции, найденных в пп. 1 и 2, находим наименьшее и наибольшее, которые и будут наименьшим и наибольшим значениями функции в области X.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-2,1]$.

Решение. Так как функция f дифференцируема на всей числовой оси, то подозрительные на экстремум точки совпадают со стационарными точками, которые находим из условия

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)\colon\ x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1.$$

Точки $x_1=0$ и $x_2=-1$ являются внутренними для отрезка $[-2,1]$. Находим

$$f(0)=3,\ f(-1)=1-2+3=2.$$

Находим значения функции в граничных точках отрезка

$$x_4=-2 \text{ и } x_5=1,\ f(-2)=16-8+3=11,\ f(1)=2.$$

Сравнивая найденные значения, видим, что наибольшее значение достигается в точке $x=-2$ и равно 11, а наименьшее — в точках $x=\pm 1$ и равно 2.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2y(2-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Находим стационарные точки из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy(2-x-y)-x^2y=xy(4-3x-2y)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2(2-x-y)-x^2y=x^2(2-x-2y)=0. \end{cases}$$

Решением её являются точки $M_1(0,y)$, y — любое, $M_2(2,0)$, $M_3\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. Из этих точек только M_3 является внутренней,

$$f(M_3)=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

На участках границы $x=0$ и $y=0$ $f(0,y)=f(x,0)=0$. Исследуем поведение функции на участке границы $y=6-x$, $0\le x\le 6$. На границе функция $f(x,y)$ превращается в функцию одной переменной

$$\Phi(x)=f(x,6-x)=x^2(6-x)(2-x-6+x)=4x^2(x-6)=4x^3-24x^2.$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0,6]$. Имеем $\Phi'(x)=12x^2-48x=12x(x-4)=0$, отсюда $x_1=0$, $x_2=4$. Находим $\Phi(0)=0$, $\Phi(4)=-128$, $\Phi(6)=0$. Сравнивая все найденные значения функции, видим, что наименьшее значение, равное -128, достигается в точке $(4,2)$, а наибольшее, равное $\dfrac{1}{4}$, достигается в точке $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2.16.4 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+9x^2-24x-6$ на отрезке $[-1,1]$.

2.16.5 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+9x-2$ на отрезке $[0,4]$.

2.16.6 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x-6$ на отрезке $[-3,0]$.

2.17 Выпуклость вверх и вниз графика функции

В этом разделе изучаются функции $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$ – скалярные функции одного скалярного аргумента.

Определение 1. График функции $f(x)$, определённой и непрерывной на промежутке X, называется выпуклым вниз (вверх), если все точки любой дуги графика лежат ниже (выше) хорды, соединяющей её концы.

Уравнение прямой A_1A_2 (рис. 2.4) запишем в виде

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

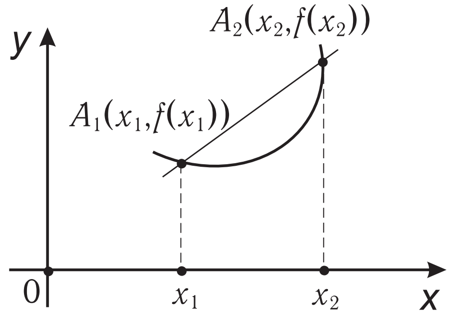


Рис. 2.4

Таким образом, график функции $f(x)$ является выпуклым вниз, если

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad (2.32)$$

и выпуклым вверх, если

$$f(x) \ge \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена, непрерывна на $[a,b]$ и имеет конечную производную на (a,b), то для того, чтобы график функции $f(x)$ был выпуклым вниз (вверх), необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ на (a,b) возрастала (убывала).

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз. Неравенство (2.32) можно переписать в виде

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad (x_1 < x < x_2),$$

из которого после предельных переходов $x \to x_1$ и $x \to x_2$ получим $f'(x_1) \le f'(x_2)$, т.е. $f'(x)$ возрастает.

Достаточность. Предположим, что производная $f'(x)$ возрастает. Докажем, что тогда справедливо неравенство (2.32), или, что то же самое, неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ где } x_1 < x < x_2.$$

Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Так как производная возрастает, то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, т.е. $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Неравенство (2.32) доказано.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$ и существует вторая производная $f''(x)$ на (a,b). Тогда для выпуклости вниз (вверх) графика функции необходимо и достаточно, чтобы было $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) на (a,b).

Справедливость теоремы следует из условия монотонности функции $f'(x)$.

Определение 2. Точка x_0 перехода от выпуклости вниз к выпуклости вверх или наоборот называется точкой перегиба графика функции, непрерывной в x_0.

Из определения и теоремы 2 следует, что если x_0 — точка перегиба и существует вторая производная, то $f''(x_0) = 0$, причём вторая производная при переходе через x_0 меняет знак.

Пример. Найти промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз, а также точки перегиба для графика функции $f(x) = 3x^2 - x^3$.

Решение. Данная функция имеет вторую производную на всей числовой оси. Находим

$$f'(x) = 6x - 3x^2,\ f''(x) = 6 - 6x = 6(1-x).$$

При $x \in (-\infty, 1)$ имеем $f''(x) > 0$, следовательно, на $(-\infty, 1)$ график функции является выпуклым вниз. На промежутке $(1, +\infty)$ график функции выпуклый вверх, так как $f''(x) < 0$. Точка $x = 1$ является точкой перегиба, поскольку при переходе через неё вторая производная меняет знак.

2.17.1 Найдите множество, на котором график функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ является выпуклым вниз.

2.17.2 Найдите множество, на котором график функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ является выпуклым вверх.

2.17.3 Найдите координаты (x_0, y_0) точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 3$.

2.18 Асимптоты графика функции

При построении графиков функции полезно иметь представление о его поведении, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат.

Определение. Прямая $\mathcal{L}$ называется асимптотой графика функции $f(x)$, если при стремлении точки графика к бесконечности расстояние между точкой графика функции $f(x)$ и прямой $\mathcal{L}$ стремится к нулю.

Все асимптоты делят на два класса: вертикальные — задаются уравнением $x = x_0$, и наклонные — задаются уравнением $y = kx + b$.

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой. В этом случае точка x_0 является точкой разрыва второго рода для $f(x)$.

Пусть прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота и $\rho(x)$ — расстояние между соответствующими точками прямой $y = kx + b$ и графика функции $f(x)$ (рис. 2.5).

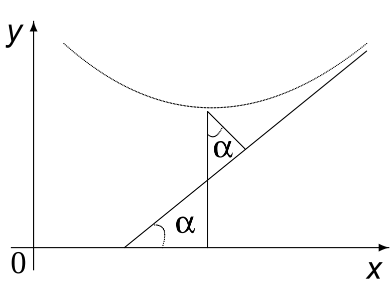


Рис. 2.5

Тогда

$$\frac{\rho(x)}{\cos\alpha} = f(x) - (kx+b),$$

а так как $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x) = 0$, то отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0. \tag{2.33}$$

Из (2.33) получаем:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{2.34}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]. \tag{2.35}$$

Соотношения (2.34) и (2.35) нужно рассматривать отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как функция может иметь две разные асимптоты при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, не иметь одной из них или обеих. При этом асимптоту при $x \to +\infty$ называют правой, а при $x \to -\infty$ называют левой. Если пределы при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ совпадают, то асимптота называется двусторонней.

Пример. Пусть $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$. Эта функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому вертикальных асимптот нет. Проверим существование наклонных асимптот. Имеем:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1.$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[x - 2\,\mathrm{arctg}\,x - x] = \lim_{x\to+\infty}(-2\,\mathrm{arctg}\,x) = -\pi,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}[x - 2\,\mathrm{arctg}\,x - x] = \lim_{x\to-\infty}(-2\,\mathrm{arctg}\,x) = \pi.$$

Таким образом, функция $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ имеет асимптоту $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$ и асимптоту $y = x + \pi$ при $x \to -\infty$.

2.18.1 Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \dfrac{4x^2+4}{x+5}$. Уравнение асимптоты запишите в виде $y = kx + b$.

2.18.2 Найдите уравнение горизонтальной асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 4}{x^2 + 5x + 1}$. Уравнение асимптоты запишите в виде $y = a_0$.

2.18.3 Найдите уравнение вертикальной асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 8}$. Уравнение асимптоты запишите в виде $y = b$.

2.19 Общая схема исследования функции и построения графиков

Можно предложить следующий план действий.

1 Найти область определения и область значений функции.

2 Определить, является ли функция четной или нечетной или является функцией общего вида.

3 Выяснить, является ли функция периодической или непериодической.

4 Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и охарактеризовать их, указать вертикальные асимптоты.

5 Найти наклонные асимптоты.

6 Найти производную функции и определить участки монотонности функции, найти точки экстремума.

7 Найти вторую производную, охарактеризовать точки экстремума, если это не сделано с помощью первой производной, указать участки выпуклости вверх и вниз графика функции и точки перегиба.

8 Вычислить значения функции в характерных точках.

9 По полученным данным построить график функции.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ и постройте график.

Решение.

1 Область определения функции $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Область значений функции $(-\infty,+\infty)$.

2 Так как $f(-x)=-f(-x)$, то функция $f(x)$ нечётна.

3 Функция непериодическая.

4 Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x=\pm 2$, где она терпит разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to\pm 2}\dfrac{x^3}{4-x^2}=\infty$. Прямые $x=2$ и $x=-2$ — двусторонние вертикальные асимптоты.

5 Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$. Нами показано, что

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(4-x^2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x-x^3}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{4-x^2}+x\right]=\frac{4x}{4-x^2}=0.$$

Итак, прямая $y=-x$ — наклонная асимптота.

6 Находим

$$f'(x)=\frac{3x^2(4-x^2)+2x\cdot x^3}{(4-x^2)^2}=\frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}.$$

Видим, что точки $x=0$ и $\pm\sqrt{12}=\pm 3{,}46$ — критические. Из неравенства $x^2(12-x^2)<0$, $x\neq\pm 2$ следует, что при $x\in(-\infty,-\sqrt{12})$ и $x\in(\sqrt{12},+\infty)$ функция $f(x)$ убывает, а из неравенства $x^2(12-x^2)>0$, $x\neq\pm 2$ получаем, что на промежутках $(-\sqrt{12},-2)$, $(-2,2)$ и $(2,\sqrt{12})$ функция возрастает. Отсюда следует, что в точке $x=-\sqrt{12}$ функция имеет минимум, равный

$$f(-\sqrt{12})=\frac{-3{,}46^3}{4-12}\cong\frac{41{,}42}{8}\cong 5{,}18,$$

а в точке $x=+\sqrt{12}$ — максимум, равный $-5{,}18$.

7 Находим

$$f''(x)=\left[\frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2}\right]'=\frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$$

(промежуточные вычисления предлагаем проделать самостоятельно). Видим, что $f''(x)>0$ на промежутках $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$. На этих промежутках функция выпукла вниз. На промежутках $(-2,0)$ и $(2,+\infty)$ имеем $f''(x)<0$, следовательно, функция выпукла вверх. В точке $x=0$ функция непрерывна, и при переходе через неё функция меняет направление выпуклости. Поэтому $x=0$ является точкой перегиба.

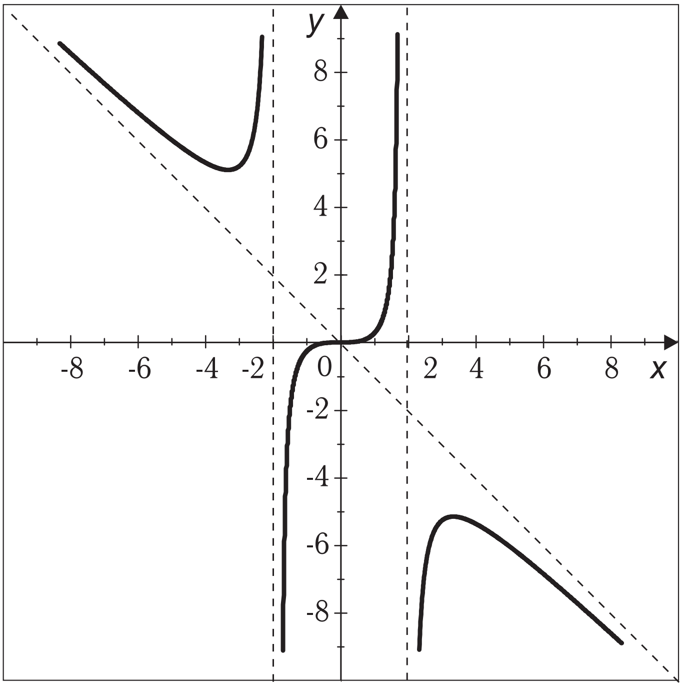


Рис. 2.6

Для удобства построения графика полученные данные, а также значения функции в некоторых точках занесём в таблицы.

x	-4	$-3{,}46$	$-2{,}5$	-1	0	1	$2{,}5$	$3{,}46$	4
y	5,33	5,18	6,94	$-0{,}33$	0	0,33	$-6{,}94$	$-5{,}18$	$-5{,}33$
		min			п*			max	

* — перегиб.

x	$(-\infty;-3{,}46)$	$(-3{,}46;-2)$	$(-2,2)$	$(2;3{,}46)$	$(-3{,}46;+\infty)$
y	убывает	возрастает			убывает

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
y	выпукла вниз	выпукла вверх	выпукла вниз	выпукла вверх

Асимптоты $x=2$, $x=-2$ и $y=-x$.

На основании этих данных строим график функции, показанный на рис. 2.6. Рекомендуется построить сначала асимптоты.

Пример 2. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ и постройте график.

Решение.

1 Функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=2$, т.е. её область определения $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. Область значений — вся числовая ось $(-\infty,+\infty)$. На луче $(-\infty,2)$ она отрицательна, а на луче $(2,+\infty)$ — положительна.

2 Функция $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ общего вида, не является ни четной, ни нечетной.

3 Данная функция непериодическая.

4 Функция $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ непрерывна всюду, как отношение многочленов, кроме точки $x=2$, в которой знаменатель обращается в нуль. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^3-8}=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^3-8}=+\infty$, то точка $x=2$ — точка разрыва второго рода. Прямая $x=2$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

5 Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x(x^3-8)}=1,\; b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-8}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^3-8}=0,$$

следовательно, прямая $y=x$ — наклонная двусторонняя асимптота.

6 Находим производную y':

$$y'=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2x^4}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}=$$
$$=\frac{x^3(x-2\sqrt[3]{4})(x^2+2\sqrt[3]{4}x+4\sqrt[3]{16})}{(x^3-8)^2}.$$

Так как знаменатель положителен всюду в $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, то знак производной совпадает со знаком числителя.

Сомножитель $x^2+2\sqrt[3]{4}x+4\sqrt[3]{16}>0$ при любых x, поэтому производная обращается в нуль только в точках $x_1=0$ и $x_2=2\sqrt[3]{4}\approx 2\cdot 1{,}59=3{,}18$. На участке $(-\infty,0)$ производная положительна, следовательно, функция возрастает, а на участке $(0,2)$ производная отрицательна, следовательно, функция убывает. В точке $x=0$ имеем максимум, равный нулю. Если $x\in(2,2\sqrt[3]{4})$, то $y'<0$, следовательно, функция убывает, а если $x\in(2\sqrt[3]{4},+\infty)$, то $y'>0$ и функция возрастает, следовательно, в точке $x=2\sqrt[3]{4}\approx 3{,}18$ имеем минимум, приближенно равный $y_{\min}\cong\dfrac{(3{,}18)^4}{(3{,}18)^3-8}\approx 4{,}23$.

7 Находим $y''(x)$:

$$y''(x)=\frac{6x^5-96x^2}{(x^3-8)^2}-\frac{(x^6-32x^3)2\cdot 3x^2}{(x^3-8)^3}=$$
$$=\frac{(6x^5-96x^2)(x^3-8)-6x^2(x^6-32x^3)}{(x^3-8)^3}=\frac{48x^2(x^3+16)}{(x^3-8)^3}.$$

Вторая производная меняет знак при переходе через точки $x_2=2$ и $x_1=-\sqrt[3]{16}=-2{,}52$. На луче $(-\infty,-2\sqrt[3]{2})$ справедливо $y''>0$, следовательно, график функции выпуклый вниз, на участке $(-2\sqrt[3]{2},2)$ имеем $y''<0$, следовательно, график функции выпуклый вверх. Отсюда следует, что точка $x_1=-\sqrt[3]{16}\approx-2{,}52$ является точкой перегиба. На луче $(2,+\infty)$ имеем $y''>0$, и график функции выпуклый вниз.

Для удобства построения графика полученные данные, а также значения функции в некоторых точках можно занести в таблицы.

x	-3	$-2\sqrt[3]{2}$	0	$1{,}5$	$2\sqrt[3]{4}$	$2{,}5$	4
y	$-2{,}31$	$-1{,}66$	0	$-1{,}09$	$4{,}23$	$5{,}12$	$4{,}57$
		перегиб	max		min		

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 2\sqrt[3]{4})$	$(2\sqrt[3]{4}, +\infty)$
y	возрастает	убывает	убывает	возрастает

x	$(-\infty, -2\sqrt[3]{2})$	$(-2\sqrt[3]{2}, 2)$	$(2, +\infty)$
y	выпукла вниз	выпукла вверх	выпукла вниз

Асимптоты $x = 2$ и $y = x$. На основании этих данных строим график функции, изображённый на рис. 2.7. Рекомендуется построить сначала асимптоты.

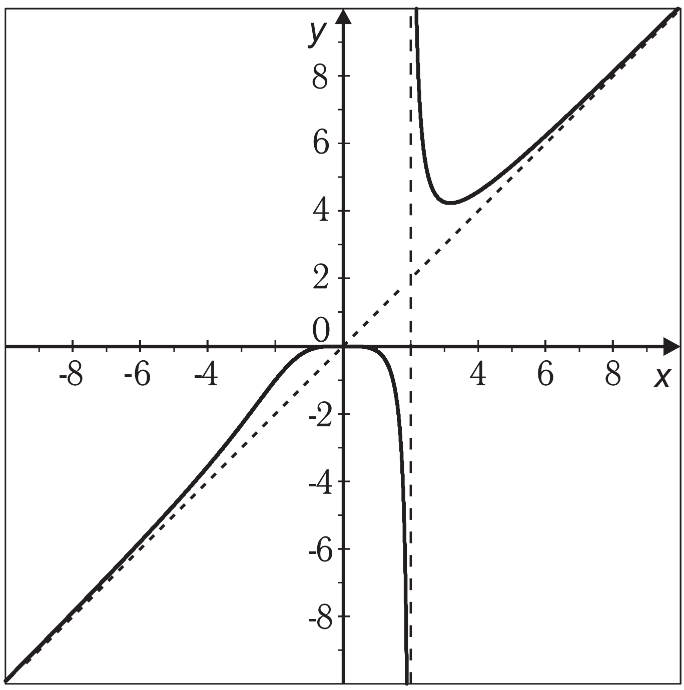


Рис. 2.7

Вопросы к разделу 2

1 Определение дифференцируемой функции. Понятие производной матрицы и дифференциала.

2 Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости функции.

3 Строение производной матрицы в случаях $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R$, $f : X \subseteq R_n \to \to Y \subseteq R$, $f : X \subseteq R \to Y \subseteq R_n$, $f : X \subseteq R_n \to Y \subseteq R_n$. Понятие частных производных.

4 Вывод формул производных основных элементарных функций.

5 Правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции.

6 Запишите формулы дифференцирования функций вида

$$u = f[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)],$$

$$u = f[x_1(t_1,t_2,\ldots,t_k), x_2(t_1,t_2,\ldots,t_k), \ldots, x_n(t_1,t_2,\ldots,t_k)].$$

7 Правило дифференцирования обратных функций.

8 Понятие производной по направлению. Вывод формулы для её вычисления. Понятие градиента.

9 Понятие производных высших порядков от функции $f : X \subset R \to Y \subset R$. Понятие частных производных высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных.

10 Поясните параметрический способ задания функции. Правило дифференцирования параметрически заданных функций.

11 Поясните неявный способ задания функции $f : X \subset R \to Y \subset R$ и $f : X \subset R_2 \to Y \subset R$. Правила их дифференцирования.

12 Геометрический и механический смысл производных. Запишите уравнение касательной к кривой при различных способах её задания.

13 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

14 Как записывается общий вид дифференциала для функций $f : X \subset R \to Y \subset R$, $f : X \subset R_n \to Y \subset R$, $f : X \subset R \to Y \subset R_n$, $f : X \subset R_n \to Y \subset R_m$.

15 В чём заключается свойство инвариантности формы записи первого дифференциала?

16 Как определяются дифференциалы $d^2 f$, $d^3 f$, $\ldots$, $d^n f$ для функции $f : X \subset R \to Y \subset R$, когда x — независимое переменное.

17 Запишите $d^2 f$ для функции $f : X \subset R \to Y \subset R$ если $x = x(t)$.

18 Запишите выражение $d^2 f$ и $d^3 f$ для функции $z = f(x,y)$, x и y — независимые переменные.

19 Запишите формулу Тейлора порядка n для функций $f(x)$ и $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в дифференциальной форме.

20 Запишите формулу Тейлора порядка n для функции $y = f(x)$, используя в её записи производные и частные производные для функции $z = f(x,y)$.

21 Запишите формулу Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$.

22 Теорема о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, если $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$.

23 Теорема Ферма об обращении в нуль производной в точке наибольшего (наименьшего) значения.

24 Теорема Ролля (об обращении производной в нуль).

25 Теорема Лагранжа (об отношении $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

26 Теорема Коши (об отношении $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$).

27 Сформулируйте правило Лопиталя о раскрытии неопределённостей $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

28 Как раскрыть неопределённости $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0?

29 Дайте определение точек экстремума для функций $y=f(x)$ и $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

30 Сформулируйте необходимые условия экстремума для функции $y=f(x)$ и $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

31 Достаточные условия экстремума для функции $y=f(x)$, связанные с поведением $f'(x_0)$ и с производными высших порядков.

32 Достаточные условия экстремума для функции $z=f(x,y)$.

33 Дайте определение выпуклости вверх и вниз графика функции. Необходимые и достаточные условия выпуклости вверх и вниз, связанные с $f''(x)$.

34 Понятие точки перегиба графика функции. Правило отыскания точек перегиба.

35 Понятие асимптот графика функции. Правила отыскания вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.

36 Опишите общую схему исследования функции и построения графиков.

Заключение

Мы кратко познакомились с отдельными разделами дифференциального исчисления. Желающим более глубоко изучить этот раздел следует обратиться к литературным источникам, указанным в списке литературы. Наиболее обстоятельно темы “Введение в анализ” и “Дифференциальное исчисление” изложены в первом томе Г. М. Фихтенгольца [19]. Изложение традиционно. Сначала изучаются функции одного переменного, а затем многих аргументов. Все теоретические построения сопровождаются многочисленными примерами с подробным разбором их решения и при этом часто даётся новый подход и к теоретическим вопросам. Особенно глубоко изучается теория неявно заданных функций, исследование функций на минимум и максимум, что является хорошим введением в курс “Теория оптимальных процессов”.

Современное изложение математического анализа содержится в книге В. А. Зорича [8]. В этой работе теория функций одной и многих переменных объединены и излагаются одновременно. Следует отметить высокий научный уровень изложения.

Очень популярно и в то же время на достаточно высоком научном уровне можно найти ещё один способ построения основ математического анализа в книге А. Д. Мышкиса [17].

Имеется многочисленная литература, посвящённая практике решения задач по математическому анализу. Можно использовать пособия [7, 9, 14, 16] и многие другие.

Литература

[1] Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г.С. Бараненков [и др.] Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2004. – 495 с.

[2] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – СПб., Изд-во "Профессия", 2001. – 432 с.

[3] Сборник задач по математике / В. А. Болгов [и др.] — М. : Наука, 1984. — 464 с.

[4] Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский — М. : Наука, 1984. — 432 с.

[5] Власов В. Г. Конспект лекций по высшей математике / В. Г. Власов — М. : АЙРИС, 1996. — 288 с.

[6] Дифференциальное исчисление / А. А. Ельцов [и др.] — Томск : Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. — 228 с.

[7] Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. — СПб : Лань, 2010. — 464 с.

[8] Зорич В. А. Математический анализ, т.1 / В. А. Зорич. — М.: Наука, 1981, — 544 с.

[9] Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных / И.А. Каплан. – Харьков: "Вища школа", 1972. – 368 с.

[10] Куваев М. Р. Методика преподавания математики в вузе / М. Р. Куваев — Томск : Томский государственный университет, 1990. — 390 с.

[11] Магазинников Л. И. Высшая математика I / Л.И. Магазинников — Томск : Томская государственная академия систем управления и радиоэлектроники, 1998. — 192 с.

[12] Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. / Л. И. Магазинников. — Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 1998. — 204 с.

[13] Магазинников Л. И. Математика для гуманитарных, экологических и экономико-юридических специальностей: учебное пособие. — Ч. 1 / Л. И. Магазинников, Ю. П. Шевелёв. — Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. — 260 с.

[14] Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И.А. Марон. – СПб: Лань, 2008. – 400 с.

[15] Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: учебное пособие. / М. И. Каченовский [и др.] — М. : Наука, 1988. — Ч. 2. — 272 с.

[16] Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных / В. Ф. Бутузов [и др.] — М. : Высшая школа, 1988. — 288 с.

[17] Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. — СПб : Лань, 2009. — 688 с.

[18] Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин — М. : Педагогика, 1989. — 352 с.

[19] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. – СПб: Лань, 2016. – 608 с.

Ответы

1.1.1 $\{1,2,3,4,7,8,9\}$.
1.1.2 $\{2,4,5\}$.
1.1.3 $\{1,6,8\}$.
1.1.4 $\{1,4,7\}$.

1.2.1 $-2;\ 8$.
1.2.2 $-4;\ 6$.
1.2.3 $-11;\ 3$.
1.2.4 $-13;\ 3$.
1.2.5 X_1 и X_2.

1.3.1 $3;\ 4$.
1.3.2 10.
1.3.3 4.
1.3.4 $-13;\ 13$.
1.3.5 $2,\ 5;\ 1,\ 3;\ 4,\ 6$.
1.3.6 $-1;\ -90$.
1.3.7 19.
1.3.8 $-42;\ -32$.
1.3.9 а) $(-\infty,2]\cup[5,+\infty)$; б) $[2,13]$;
в) $[-1,9]$;
г) $(-\infty,-4]\cup[26,+\infty)$;
д) $[-3,+\infty)$; е) $[-6,-4]$.

1.4.1 $(-2,5)$; $(1,4)$; $(-1;3)$.
1.4.2 1) $U_\delta(x_0):(x_0-\delta;x_0+\delta)$;
2) $U_\delta^+(x_0):(x_0;x_0+\delta)$;
3) $U_\delta^-(x_0):(x_0-\delta;x_0)$.
1.4.3 $M_0(-2,3,-4)$.
1.4.4 $M_0(4,-3,5)$.

1.5 а) 4; б) 6; в) -1; г) -19;
д) 5; е) 3; ж) 2.

1.6.1 4.
1.6.2 3.
1.6.3 2; 5; 6.
1.6.4 Для f_1 и f_3 — устранимый;
для f_5 и f_6 — первого рода;
для f_1 и f_4 — второго рода.

1.7.1 а) 5; б) 3; в) 3; г) 4; д) 16.
1.7.2 а) 2; б) 3; в) 6; г) -2;
д) -2; е) -1.
1.7.3 а) 4; б) -3; в) 14; г) 4;
д) 3; е) 6; ж) 5.

1.8.1 а) 3; б) 5; в) 7; г) 4; д) 8.
1.8.2 а) -2; б) 12; в) 81; г) 80;
д) -17.

2.2.1 а) -25; б) 109; в) 1; г) -8;
д) -1; е) 17.
2.2.2 а) -20; б) 32; в) 5; г) -15;
д) -13; е) -2; ж) -12; з) -1.

2.3.1 а) 39; б) -19; в) -30; г) 24;
д) 4; е) 6; ж) -8; з) 30.

2.4.1 $\operatorname{grad} f=(6;4;12)$.
2.4.2 18.
2.4.3 -8.

2.5.1 а) 212; б) 48; в) 4; г) 99.
2.5.2 а) -6; б) 4; в) -96; г) 12.

2.6 а) 78; б) 6; в) 20; г) 46.

2.7.1 а) 2; б) -20; в) -17.
2.7.2 а) -4, -2; б) 2, 1.

2.9.1 $y=19x-23$.
2.9.2 $y=-27x+76$.
2.9.3 $y=-42x+85$.
2.9.4 63.
2.9.5 14.

2.10.1 а) -6; б) $-0{,}06$;
в) 0,48; г) 0,54.
2.10.2 а) 0,11; б) $-0{,}36$;
в) $-0{,}03$; г) $-0{,}16$.
2.11.1 а) 0,12; б) $-0{,}09$; в) 1,44.
2.11.2 а) 7,36; б) 0,54; в) $-0{,}26$.
2.12.1 $32\sqrt{x}=$
$=32+16(x-1)-4(x-1)^2+$
$+2(x-1)^3-\dfrac{5}{4}(x-1)^4+R_5$.
2.12.2 $\ln(1+x)=-\ln 2+2(x+0{,}5)-$
$-2(x+0{,}5^2)-\dfrac{8}{3}(x+0{,}5)^3+$
$+4(x+0{,}5)^4-\dfrac{32}{5}(x+0{,}5)^5+R_6$.
2.12.3 $7!\sin x=7!-\dfrac{7!}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+$
$+\dfrac{7!}{4!}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)^4-7\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^6+R_7$.

2.13.1 1; 4.
2.13.2 0.
2.13.3 $M_0(1,7)$.

2.14 а) -8; б) 72; в) -6; г) -1.
2.15.1 $(1,2)$.
2.15.2 $(-2,-1)$.

2.16.1 1; -3.
2.16.2 3.
2.16.3 3.
2.16.4 -19; 25.
2.16.5 -2; 50.
2.16.6 -34; -6.

2.17.1 $(-1,+\infty)$.
2.17.2 $(-\infty,1)$.
2.17.3 $(-2,5)$.

2.18.1 $y=4x-20$.
2.18.2 $y=6$.
2.18.3 $y=2$.

Предметный указатель