Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Дополнительные главы математики
Курс практических занятий
(Семестр 4)
Учебное пособие

для специальности 09.03.01

Томск
ТУСУР
2019

Электронное учебное пособие составлено по материалам практических занятий, проведённых на ФСУ в группах 437-1,2,3 весной 2019 года.

Охвачены следующие темы. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл и преобразование Фурье. Преобразование Лапласа.

Оглавление по темам

ГЛАВА 1. Интегралы, зависящие от параметра

1.1. Вычисление интегралов, зависящих от параметра

Задача 1. Вычислить А). $I(y)=\int\limits_0^1 xy^2dx$. Б) $I(y)=\int\limits_y^{y^2} xy^2dx$.

Решение.

А). $I(y)=\int\limits_0^1 xy^2dx = \left.\dfrac{x^2}{2}y^2\right|_0^1$, формула Ньютона-Лейбница

применяется здесь по переменной x, получим $\dfrac{1}{2}y^2-0 = \dfrac{y^2}{2}$.

Б) $I(y)=\int\limits_y^{y^2} xy^2dx = \left.\dfrac{x^2}{2}y^2\right|_y^{y^2} = \dfrac{(y^2)^2}{2}y^2-\dfrac{y^2}{2}y^2 = \dfrac{y^6-y^4}{2}$.

Ответ. А) $\dfrac{y^2}{2}$. Б) $\dfrac{y^6-y^4}{2}$.

Задача 2. Вычислить $I(y)=\int\limits_0^1 xe^{x^2y^2}dx$.

Решение. В данном случае вовсе не требуется интегрирование по частям, ведь в степени экспоненты 2-я степень от x, а другом множителе есть 1-я степень $\Rightarrow$ можно подвести под знак дифференциала.

$$I(y)=\int\limits_0^1 xe^{x^2y^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2y^2}2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{y^2x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{y^2t}dt$$

Обратите внимание, что при замене $t = x^2$ интервал $(0,1)$ не меняется, хотя для какого-нибудь другого интервала границы бы изменились.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2 t}dt = \frac{1}{2y^2}e^{y^2 t}\Big|_0^1 = \frac{e^{y^2}-1}{2y^2}.$$

Ответ. $\dfrac{e^{y^2}-1}{2y^2}$.

Задача 3. Вычислить $\int_0^1 x^y \ln^3 x dx$.

Решение. Интегрирование по частям здесь не упрощает интеграл. Но может помочь дифференцирование или интегрирование по параметру. Заметим, что $(x^y)'_y = x^y \ln x$ (производная по y здесь считается, как от показательной, а не степенной функции). Тогда $(x^y)''_{yy} = x^y \ln^2 x$, $(x^y)'''_{yyy} = x^y \ln^3 x$. Таким образом, внутри того интеграла, который нам надо найти, 3-я производная по параметру от x^y. Тогда то, что нам надо найти, можно обозначить так: $I'''(y) = \int_0^1 x^y \ln^3 x dx$. Можно воспользоваться формулой Лейбница для случая постоянных границ и сначала найти $I(y) = \int_0^1 x^y dx$, а затем полученный результат продифференцировать 3 раза по y.

$I(y)=\int\limits_0^1 x^y dx \ = \ \left.\dfrac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1 \ = \ \dfrac{1}{y+1}$ здесь интегрируется по переменной x, т.е. действия как со степенной, а не показательной функцией.

$$I(y)=\frac{1}{y+1} \ \Rightarrow \ I'(y)=\frac{-1}{(y+1)^2} \ \Rightarrow \ I''(y)=\frac{2}{(y+1)^3} \ \Rightarrow$$

$$I'''(y)=\frac{-6}{(y+1)^4}.$$

Ответ. $\dfrac{-6}{(y+1)^4}$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_0^1 \dfrac{y^b-y^a}{\ln y}dy$ при $b>a>0$.

Решение. Воспользуемся переходом к двойному интегралу и сменой порядка интегрирования в нём. Заметим, что выражение внутри интеграла напоминает результат применения формулы Ньютона-Лейбница в границах от a до b. Его можно переписать в виде:

$$\int\limits_0^1 \frac{y^b-y^a}{\ln y}dy \ = \ \int\limits_0^1 \left(\left.\frac{y^x}{\ln y}\right|_a^b \right) dy$$

Теперь надо установить, первообразная от какой функции там присутствует. Заметим, что $(y^x)'_x = y^x \ln y$ (производная по x в данном случае, как от показательной функции). А первообразная тогда имеет вид $\dfrac{y^x}{\ln y}$. Значит, $\int\limits_0^1 \left(\left.\dfrac{y^x}{\ln y}\right|_a^b \right) dy \ = \ \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b y^x dx \right) dy$.

Теперь получили двойной интеграл по прямоугольной области. Сменим порядок интегрирования, чтобы во внутреннем интеграле было действие по переменной y. Это удобнее в данном случае тем, что в таком случае сначала действие происходит с данной функцией как со степенной, а не показательной.

$$\int_0^1\left(\int_a^b y^x dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_0^1 y^x dy\right)dx = \int_a^b\left(\left.\frac{y^x}{x+1}\right|_0^1\right)dx = \int_a^b \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|\Big|_a^b =$$

$$\ln|b+1| - \ln|a+1| = \ln\left|\frac{b+1}{a+1}\right| = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$ (учитывая $b > a > 0$).

Ответ. $\ln\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)$.

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx$.

Решение. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx = \left.\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\right|_{-1}^{1} = \arcsin\left(\frac{1}{y}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{y}\right)$, что

из-за нечётности арксинуса приводит к $2\arcsin\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

Область определения этой функции: $y \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

Ответ. $2\arcsin\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

Задача 6. Вычислить $I(y)=\int\limits_{y}^{2y} xydx$. Вычислить производную $I'(y)$ двумя способами: без формулы Лейбница и по формуле Лейбница.

Решение. $I(y)=\int\limits_{y}^{2y} xydx = \left.\frac{x^2 y}{2}\right|_{y}^{2y} = \frac{(2y)^2 y}{2}-\frac{y^2 y}{2} = \frac{3y^3}{2}$.

$$I'(y)=\left(\frac{3y^3}{2}\right)' = \frac{9y^2}{2}.$$

$$I'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx + b'(y)f(b(y),y)-a'(y)f(a(y),y)$$

$$= \int\limits_{y}^{2y}(xy)'_y\,dx+2\cdot(2y)\cdot y-1\cdot y\cdot y = \int\limits_{y}^{2y} xdx+4y^2-y^2 = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y}^{2y}+3y^2 =$$

$\frac{4y^2-y^2}{2}+3y^2 = \frac{3y^2}{2}+\frac{6}{2}y^2 = \frac{9y^2}{2}$. Результаты совпадают.

Замечание. Во многих случаях можно обойтись без формулы Лейбница, однако она всё же бывает очень необходима в тех случаях, когда сам исходный интеграл чрезвычайно сложный, а интеграл с производной по параметру оказывается проще.

Ответ. $I(y)=\frac{3y^3}{2}$, $I'(y)=\frac{9y^2}{2}$.

Задача 7. Вычислить $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx$.

Решение. Способ 1. Без вычетов.

$$I(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{y}arctg\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}.$$

При $y>0$:

$$\frac{1}{y}arctg\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{y}\big(arctg(+\infty)-arctg(-\infty)\big) = \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{y}.$$

При $y<0$:

$$\frac{1}{y}arctg\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{y}\big(arctg(-\infty)-arctg(+\infty)\big) = \frac{1}{y}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{y}.$$

При $y<0$ значения тоже больше нуля, то есть график в 1-й и 2-й четверти,а не в 1-й и 3-й как гипербола. Можно записать эту функцию таким образом: $I(y)=\dfrac{\pi}{|y|}$.

Способ 2. С помощью вычетов.

$I(y)=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx$. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+y^2}=$

$\dfrac{1}{(z+iy)(z-iy)}$. При $y>0$ один полюс 1-го порядка в верхней полуплоскости, это $z=iy$. При $y<0$ наоборот, $z=-iy$.

При $y>0$:

$$I(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx = 2\pi\ i\cdot\operatorname*{Res}_{z=iy}\frac{1}{(z+iy)(z-iy)} =$$

$$2\pi\ i\cdot\frac{1}{z+iy}\bigg|_{z=iy} = 2\pi\ i\cdot\frac{1}{2iy} = \frac{\pi}{y}.$$

Аналогично, При $y<0$ получилось бы $-\dfrac{\pi}{y}$.

Ответ. $I(y)=\dfrac{\pi}{|y|}$.

Задача 8. Вычислить $I(y)=\int\limits_0^{\infty} ye^{-yx}dx$.

Решение. Здесь не нужно интегрирование по частям, так как зависимость от x только в одном, а не в двух множителях.

$$I(y)=\int\limits_0^{\infty} ye^{-yx}dx = y\left(\frac{-1}{y}\right)e^{-yx}\bigg|_0^{\infty} = -e^{-yx}\Big|_0^{\infty} = -(e^{-\infty}-e^{0}) = -(0-1) = 1.$$

Но это получается только при $y>0$. В другом случае, вместо $e^{-\infty}$ там было бы $e^{+\infty}$. Область сходимости $y\in(0,+\infty)$.

Ответ. $I(y)\equiv 1$, существует при $y>0$.

Задача 9. Вычислить $I(y)=\int\limits_0^{\infty} xe^{-yx}dx$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь нужно интегрирование по частям.

$u = x$	$v = -\frac{1}{y}e^{-yx}$
$u' = 1$	$v' = e^{-yx}$

$I(y) = \int\limits_0^\infty xe^{-yx}dx = -\frac{x}{y}e^{-yx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{y}\int\limits_0^\infty e^{-yx}dx$. Первое слагаемое при $y > 0$

содержит $e^{-\infty}$ и в итоге равно 0. Остаётся только 2-е.

$$(0-0) - \frac{1}{y^2}e^{-yx}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{y^2}(0-1) = \frac{1}{y^2}.$$

Ответ. $I(y) = \frac{1}{y^2}$, существует при $y > 0$.

Задача 10. Вычислить $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+y^2)}dx$ при $y > 0$.

Решение. Если мы не будем применять вычеты, то придётся разложить на простейшие дроби, т.е. найти A, B, C, D из выражения:

$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+y^2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+y^2}$, где после приведения к общему знаменателю получится система из 4 уравнений на 4 неизвестных.

С помощью вычетов здесь решение более короткое.

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+y^2)} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+iy)(z-iy)}$, из 4 особых точек две в верхней полуплоскости.

$$I(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+y^2)}dx\ =\ 2\pi\ i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=iy} f(z)\right).$$

При $y>0$:

$$2\pi\ i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=iy} f(z)\right)\ =$$

$$2\pi\ i\left(\left.\frac{1}{(z+i)(z^2+y^2)}\right|_{z=i}+\left.\frac{1}{(z^2+1)(z+iy)}\right|_{z=iy}\right)\ =$$

$$\left(\frac{2\pi\ i}{2i(-1+y^2)}+\frac{2\pi\ i}{(-y^2+1)2iy}\right)=\left(\frac{\pi}{y^2-1}+\frac{\pi}{(1-y^2)y}\right)\ =$$

$$\frac{\pi}{y^2-1}\left(1-\frac{1}{y}\right)\ =\ \frac{\pi}{y^2-1}\frac{y-1}{y}\ =\ \frac{\pi}{y+1}\frac{1}{y}\ =\ \frac{\pi}{y(y+1)}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{y(y+1)}$.

Задача 11. Вычислить $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}dx$.

Решение. Найдём решение с помощью вычетов.

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+yz+y^2}$, Дискриминант знаменателя: $D=y^2-4\cdot 1\cdot y^2\ =$

$-3y^2$. Корни знаменателя: $z=\dfrac{-y\pm\sqrt{3}yi}{2}$. Тогда верно разложение:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+yz+y^2} = \frac{1}{\left(z-\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}\right)\left(z-\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}\right)}.$$

Если $y>0$, то в верхней полуплоскости корень $\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}$.

Интеграл равен $2\pi\ i\cdot \operatorname*{Res}_{\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}} f(z) = 2\pi\ i\cdot \left.\frac{1}{\left(z-\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}} =$

$$2\pi\ i\cdot\frac{1}{\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}-\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}} = 2\pi\ i\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}yi}{2}} = 2\pi\ i\cdot\frac{1}{\sqrt{3}yi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}y}.$$

При $y<0$, в верхней полуплоскости корень $\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}$. Тогда

$$2\pi\ i\cdot \left.\frac{1}{\left(z-\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}\right)}\right|_{z=\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}} = 2\pi\ i\cdot\frac{1}{\frac{-y-\sqrt{3}yi}{2}-\frac{-y+\sqrt{3}yi}{2}} =$$

$2\pi\ i\cdot\frac{1}{-\sqrt{3}yi} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}y}$. Когда перед y знак минус, он сам отрицателен, т.е. всё выражение снова положительно. Оба случая вместе можно записать в виде $I(y)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}|y|}$. **Ответ.** $I(y)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}|y|}$.

1.2. Формула Лейбница и её применение.

Задача 12. Вычислить $I(y)=\int\limits_{y^2}^{y} x^2y^2dx$, найти $I'(y)$ без формулы Лейбница и по ней, сравнить результаты.

Решение. $I(y)=\int\limits_{y^2}^{y} x^2y^2dx = \left.\dfrac{x^3y^2}{3}\right|_{y^2}^{y} = \dfrac{y^5-y^8}{3}$.

1) Без формулы Лейбница $\left(\dfrac{y^5-y^8}{3}\right)' = \dfrac{5y^4-8y^7}{3}$.

2) По формуле Лейбница.

$$\int\limits_{y^2}^{y}(x^2y^2)'_y\,dx + 1\cdot y^2\cdot y^2 - 2y\cdot\left(y^2\right)^2\cdot y^2 =$$

$$\int\limits_{y^2}^{y}2x^2ydx + y^4-2y^7 = \left.\frac{2x^3y}{3}\right|_{y^2}^{y} + y^4-2y^7 =$$

$$\frac{2y^3y}{3}-\frac{2(y^2)^3y}{3}+y^4-2y^7 = \frac{2}{3}y^4-\frac{2}{3}y^7+y^4-2y^7 = \frac{5}{3}y^4-\frac{8}{3}y^7.$$

Ответ. $I(y)=\dfrac{y^5-y^8}{3}$, $I'(y)=\dfrac{5y^4-8y^7}{3}$.

В связи с малым количеством времени на лекциях в этом семестре (одна лекция раз в 2 недели) некоторые полезные факты, следующие из теории, будем выводить здесь.

Задача 13 (теор). С помощью гамма-и бета-функции доказать равенство: $\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Решение. Бета-функция: $B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$. Сделаем в ней замену: $x = \sin^2 \varphi$. Тогда $1 - x = \cos^2 \varphi$, $dx = 2\sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$.

При этом, чтобы $x \in [0,1]$, надо чтобы $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2s-2}\varphi \cos^{2t-2}\varphi \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi =$$

$2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2s-1}\varphi \cos^{2t-1}\varphi \, d\varphi$. При $s = t = \frac{1}{2}$ это составляет

$2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^0\varphi \cos^0\varphi \, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} 1 d\varphi = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$. Итак, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Так как гамма- и бета- функции взаимосвязаны по формуле

$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, то $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Тогда $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Теперь вспомним вид гамма-функции: $\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$, и сделаем замену $x=z^2$. Тогда $dx=2zdz$,

$\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty z^{2s-2}e^{-z^2}\,2zdz \;=\; 2\int\limits_0^\infty z^{2s-1}e^{-z^2}\,dz$. Тогда получается, что:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \;=\; 2\int\limits_0^\infty z^0 e^{-z^2}\,dz \;\Rightarrow\; \int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ответ. $\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Бывают ситуации, когда в интеграле не один параметр и одна переменная интегрирования, а несколько параметров или переменных. Собственно говоря, мы и так это уже видели на примере бета-функции, зависящей от двух параметров s,t. Сейчас рассмотрим подобные ситуации подробнее, а также увидим аналог формулы Лейбница.

Задача 14. А. Вычислить $I(z)=\iint\limits_D x^2yzdxdy$, где D квадрат: $\{x,y\in[0,1]\}$.

Задача 14. Б. Вычислить $I(y,z)=\int\limits_0^1 x^2yzdx$.

Решение.

А. $I(z)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 x^2yzdy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\left.\frac{x^2y^2z}{2}\right|_0^1\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2z}{2}dx = \left.\frac{x^3z}{6}\right|_0^1 = \frac{z}{6}$.

Заметим, чтоздесь верен аналог формулы Лейбница: с одной стороны,

$\left(\frac{z}{6}\right)' = \frac{1}{6}$, с другой, $I'(z)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 (x^2yz)'_z\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 x^2ydy\right)dx =$

$\int\limits_0^1\left(\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_0^1\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$.

Б. $I(y,z)=\int\limits_0^1 x^2yzdx = \left.\frac{x^3yz}{3}\right|_0^1 = \frac{yz}{3}$.

Заметим, что и здесь верен аналог формулы Лейбница для случая постоянных границ, но только с частными производными.

$\left(\frac{yz}{3}\right)'_y = \frac{z}{3}$, что совпадает с результатом $I'_y(y,z)=\int\limits_0^1 (x^2yz)'_y\,dx =$

$\int\limits_0^1 x^2zdx = \left.\frac{x^3z}{3}\right|_0^1 = \frac{z}{3}$.

$\left(\frac{yz}{3}\right)'_z = \frac{y}{3}$, что совпадает с результатом $I'_z(y,z)=\int\limits_0^1 (x^2yz)'_z\,dx =$

$\int\limits_0^1 x^2ydx = \left.\frac{x^3y}{3}\right|_0^1 = \frac{y}{3}$.

Ответ. $I(z)=\frac{z}{6}$, $I(y,z)=\frac{yz}{3}$.

Задача 15. Вычислить $I(y)=\int\limits_0^{y^2}(2x+y\cos x)dx$, найти $I'(y)$ без формулы Лейбница и по ней, сравнить результаты.

Решение. $I(y)=\int\limits_0^{y^2}(2x+y\cos x)dx \;=\; x^2\Big|_0^{y^2}+y\sin x\Big|_0^{y^2} \;=\; y^4+y\sin(y^2)$.

1) $I'(y)=\left(y^4+y\sin(y^2)\right)' \;=\; 4y^3+\sin(y^2)+y\cos(y^2)2y \;=$

$4y^3+\sin(y^2)+2y^2\cos(y^2)$.

2) $I'(y)=\int\limits_0^{y^2}(2x+y\cos x)'_y\,dx+2y\cdot(2y^2+y\cos(y^2)) \;=$

$\int\limits_0^{y^2}\cos x dx+4y^3+2y^2\cos(y^2) \;=\; \sin x\Big|_0^{y^2}+4y^3+2y^2\cos(y^2) \;=$

$4y^3+\sin(y^2)+2y^2\cos(y^2)$.

Ответ. $I(y)=y^4+y\sin(y^2)$, $I'(y)=4y^3+\sin(y^2)+2y^2\cos(y^2)$.

ГЛАВА 2. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

2.1. Вычисление интеграла Фурье и преобразования Фурье

Задача 16. Вычислить $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ (преобразование Фурье) для функции, заданной следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \\ e^{-x} & ,x>0 \end{cases}.$$

Решение.

Так как на левой полуоси функция - тождественный 0, то

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx =$$

$$-\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+i\omega)x}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x}e^{-i\omega x}\Big|_0^{\infty} =$$

$-\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\Big|_0^{\infty}$. При $x\to\infty$ здесь произведение бесконечно-малой e^{-x} на ограниченную по модулю функцию $\cos\omega x - i\sin\omega x$, а такое произведение является бесконечно-малой.

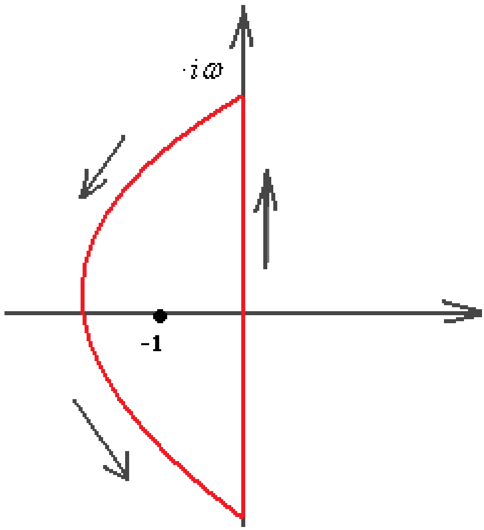
Поэтому $-\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+i\omega)x}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0-1) = \frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ответ. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}$.

Задача 17. Обратное преобразование Фурье для $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}$.

Решение. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}e^{i\omega x}d\omega=$

$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\omega}e^{i\omega x}d\omega$. Найдём с помощью вычетов, ведь здесь интеграл по всей оси ω. Особая точка находится из таких соображений. Корень знаменателя $1+i\omega$ равен: $i\omega=-1 \Rightarrow \omega=-\frac{1}{i}=i$, соответствует полюсу 1-го порядка. Здесь можно заметить, что везде в функции выражение $i\omega$, которое можно обозначить в качестве новой переменной z. При этом движение $i\omega$ происходит по вертикальной оси, а особая точка - слева от неё (см. чертёж).



Но если $z = i\omega$ то $dz = id\omega$ т.е. $d\omega = \dfrac{dz}{i}$.

Тогда $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{1+i\omega}e^{i\omega x}d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\dfrac{1}{1+z}e^{zx}\dfrac{1}{i}dz = \dfrac{1}{2\pi}2\pi\ i\operatorname*{Res}_{z=-1}\dfrac{1}{i}\dfrac{e^{zx}}{1+z} =$

$\operatorname*{Res}_{z=-1}\dfrac{e^{zx}}{1+z} = e^{-x}$. Обратите внимание, что это совпало с исходной функцией из задачи 16 в тех точках, где она отлична от 0.

Ответ. e^{-x}.

Более того, даже если бы мы вычислили преобразование Фурье от $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le A \\ e^{-x} & , x > A \end{cases}$ при любой граничной точке A, и получили бы

$$-\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+i\omega)x}\Big|_A^{\infty} = -\frac{1}{1+i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0-e^{-(1+i\omega)A}) =$$

$\dfrac{1}{1+i\omega}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1+i\omega)A}$, и затем искали обратное преобразование, то всё равно получили бы то же самое:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\omega}e^{-(1+i\omega)A}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{1+z}e^{-(1+z)A}e^{zx}\frac{1}{i}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi}2\pi\ i\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{1}{i}\frac{e^{-(1+z)A}e^{zx}}{1+z} = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{e^{-(1+z)A}e^{zx}}{1+z} = e^{-x}.$$

В следующей серии задач мы повторим комплексный ряд Фурье, а также будем находить преобразование Фурье для тех же самых функций, чтобы сравнить.

Задача 18. Представить в виде комплексного ряда Фурье функцию: $f(x) \equiv 1$ на интервале $(-1,1)$.

Решение. Вспомним формулы:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ где } c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\; c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx.$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx = 1.\; c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-in\pi x}dx = -\frac{1}{2in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{2in\pi} =$$

$\frac{1}{n\pi}\frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i} = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0$. Итак, $c_n = 0$, ряд состоит лишь из одной константы. **Ответ.** 1.

Задача 19. Найти преобразование Фурье от функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (-1,1) \\ 0, x \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Решение. $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx =$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{i\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\omega}\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

В отличие от 18-А, здесь не $\sin(n\pi)$, а $\sin(\omega)$ для произвольного действительного числа ω, и он не равен 0.

Задача 19-Б. Представить эту же функцию интегралом Фурье.

Решение. Если мы нашли преобразование Фурье, то нетрудно записать интеграл Фурье следующим образом: подставить найденное преобразование Фурье в формулу $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega.$$

Замечание. Это интеграл Фурье в комплексной форме. А можно ещё преобразовать экспоненту по формуле Эйлера и свести к интегралу Фурье в действительной форме:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)d\omega+i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\sin(\omega x)d\omega$$

Но функция $\frac{\sin\omega}{\omega}$ чётна по ω (отношение двух нечётных), тогда нечётная функция по ω за счёт $\sin(\omega x)$ во 2-м слагаемом, и оно = 0. А в 1-м чётная, сводится к удвоенному интегралу по полуоси.

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)d\omega \Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)d\omega.$$

Задача 20. Представить в виде комплексного ряда Фурье функцию:

$f(x) = x$ на интервале $(-1,1)$.

Решение. Найдём коэффициенты. $c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = \frac{1}{2}\left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^{1} \right) = 0.$

$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x e^{-in\pi x} dx$ нужно интегрирование «по частям».

$u = x$	$v = \frac{1}{-in\pi} e^{-in\pi x}$
$u' = 1$	$v' = e^{-in\pi x}$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2}\left(\left. \frac{x}{-in\pi} e^{-in\pi x} \right|_{-1}^{1} + \frac{1}{in\pi}\int_{-1}^{1} e^{-in\pi x} dx \right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-in\pi} - (-1)e^{in\pi}}{-in\pi} + \left. \frac{1}{-i^2 n^2 \pi^2} e^{-in\pi x} \right|_{-1}^{1} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{-in\pi} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2\pi^2} \right)$$

1-е слагаемое можно преобразовать к cos, 2-е к sin.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2} \frac{2}{-in\pi} - \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i} \frac{2i}{n^2\pi^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(n\pi)\frac{2}{-in\pi} - \sin(n\pi)\frac{2i}{n^2\pi^2} \right) = \frac{1}{2}\left(\cos(n\pi)\frac{2}{-in\pi} - 0 \right) =$$

$\cos(n\pi)\frac{i}{n\pi} = \frac{i(-1)^n}{n\pi}$. Тогда ряд: $f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi x}$.

Ответ. $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{i(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi x}$.

Задача 21. Найти преобразование Фурье от функции:

$$f(x)=\begin{cases} x\,,\, x\in(-1{,}1)\\ 0\,,\, x\notin(-1{,}1)\end{cases}.$$

Решение. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}xe^{-i\omega x}dx$

здесь тоже, как и в прошлом примере, нужно интегрирование по частям, но в конце получится слагаемое с $\sin\omega$, и оно не исчезает, в отличие от $\sin(n\pi)$.

$u=x$	$v=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}$
$u'=1$	$v'=e^{-i\omega x}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}xe^{-i\omega x}dx\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{x}{-i\omega}e^{-i\omega x}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{i\omega}\int\limits_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\omega}-(-1)e^{i\omega}}{-i\omega}+\left.\frac{1}{-i^2\omega^2}e^{-i\omega x}\right|_{-1}^{1}\right)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{-i\omega}+\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{\omega^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{-i\omega}-\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{\omega^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}\frac{2}{-i\omega}-\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}\frac{2i}{\omega^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{-i\omega} \cos\omega - \frac{2i}{\omega^2} \sin\omega \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2i}{\omega} \cos\omega - \frac{2i}{\omega^2} \sin\omega \right) =$$

$$\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right).$$

Ответ. $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right).$

Задача 21-Б. Представить эту же функцию интегралом Фурье.

Решение. Используя найденное в прошлом пункте преобразование Фурье и формулу $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right) e^{i\omega x} d\omega \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right) e^{i\omega x} d\omega .$$

Ответ. $f(x) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2} \right) e^{i\omega x} d\omega .$

В лекции было доказано (свойство 5): если для непрерывной функции $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ то $\varPhi\left[f'(x) \right] = i\omega F(\omega)$. Но если функция задана только на конечном интервале, то слагаемое, которое исчезало в 0 в том случае, не исчезает.

Задача 22. Доказать формулу:

$$\Phi\left[f'(x)\right]=i\omega F(\omega)+\frac{f(b)e^{-i\omega b}-f(a)e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}$$

для функции: $f(x)=\begin{cases} f(x), x\in(a,b) \\ 0 \quad , x\notin(a,b)\end{cases}$

Решение.

$\Phi\left[f'(x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b f'(x)e^{-i\omega x}dx$. Интегрирование по частям:

$u=e^{-i\omega x}$	$v=f(x)$
$u'=-i\omega\, e^{-i\omega x}$	$v'=f'(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f'(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x)e^{-i\omega x}\Big|_a^b+i\omega\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left((f(b)e^{-i\omega b}-f(a)e^{-i\omega a})+i\omega\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$\omega F(\omega)+\frac{f(b)e^{-i\omega b}-f(a)e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ответ. $\Phi\left[f'(x)\right]=i\omega F(\omega)+\dfrac{f(b)e^{-i\omega b}-f(a)e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}$

Существует понятие свёртки функций, определяемое следующим

образом: $f*g=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$.

Задача 23. Доказать, что если рассматривать преобразование Фурье свёртки без коэффициента $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (обозначим Φ_1, F_1 соответственно), то оно равно произведению аналогичных преобразований двух исходных функций: $\Phi_1[f * g] = F_1(\omega)G_1(\omega)$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau\right)e^{-i\omega x}dx$. Это двойной интеграл. Мы можем изменить порядок интегрирования. Причём здесь не надо пересчитывать границы, ведь оба интеграла по всей оси.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)e^{-i\omega x}dx\right)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-\tau)e^{-i\omega x}dx\right)d\tau .$$

Вынесли $f(\tau)$ во внешний интеграл, как величину, не зависящую от переменной x. Здесь во внутреннем интеграле можно применить свойство 3 - сдвиг по аргументу: $\Phi_1[g(x-a)] = e^{-i\omega a}G_1(\omega)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(e^{-i\omega\tau}G_1(\omega)\right)d\tau = G_1(\omega)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = G_1(\omega)F_1(\omega) .$$

Замечание. $\Phi[f * g] = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)$, если рассматривать исходное определение с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Задача 24. Доказать свойства:

$$\Phi[f(x)\cos\lambda x] = \frac{1}{2}[F(\omega-\lambda)+F(\omega+\lambda)]$$

$$\Phi[f(x)\sin\lambda x] = \frac{1}{2i}[F(\omega-\lambda)-F(\omega+\lambda)]$$

Решение. $\Phi[f(x)\cos\lambda x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)e^{-i\omega x}dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x}}{2}e^{-i\omega x}dx =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}e^{-i\omega x}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}e^{-i\omega x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\lambda)x}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+\lambda)x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}[F(\omega-\lambda)+F(\omega+\lambda)].$$

Аналогично, $\Phi[f(x)\sin\lambda x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)e^{-i\omega x}dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}}{2i}e^{-i\omega x}dx =$$

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}e^{-i\omega x}dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}e^{-i\omega x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\lambda)x}dx-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+\lambda)x}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2i}[F(\omega-\lambda)-F(\omega+\lambda)].$$

Задача 25. Дана функция $f(x)=\begin{cases}1\,, x\in(0,1)\\ 0\,, x\notin(0,1)\end{cases}$.

1) Найти её преобразование Фурье

2) Представить эту функцию в виде интеграла Фурье.

Решение. Найдём преобразование Фурье. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-i\omega x}dx=$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-1}{-i\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}$$

Представим в виде интеграла Фурье.

Используя формулу $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$, получим:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}\right)e^{i\omega x}d\omega.$$

Ответ. $F(\omega)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}$, $f(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-i\omega}-1}{\omega}\right)e^{i\omega x}d\omega$.

Заметим, что полученное преобразование Фурье можно преобразовать так, чтобы устранить экспоненту в мнимой степени:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}-1}{-i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(\cos\omega - i\sin\omega)-1}{-i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+i\frac{-1+\cos\omega}{\omega}\right).$$

При этом, можно было изначально вычислять с помощью синуса и косинуса, и получилось бы то же самое:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right|_0^1 + i\left.\frac{\cos(\omega x)}{\omega}\right|_0^1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+i\frac{\cos\omega-1}{\omega}\right).$$

Задача 26. Дана функция $f(x) = e^{-|x|}$.

1) Найти её преобразование Фурье

2) Представить эту функцию в виде интеграла Фурье.

Решение. Здесь на каждой полуоси можно записать функцию без модуля, и найти сумму двух интегралов.

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ e^{x}, x \le 0 \end{cases}$$

Преобразование Фурье: $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{x}e^{-i\omega x}dx+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}e^{-i\omega x}dx\right)=$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(1-i\omega)x}dx+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(1+i\omega)x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{(1-i\omega)x}}{1-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-0}{1-i\omega}-\frac{0-1}{1+i\omega}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1+i\omega)+(1-i\omega)}{(1-i\omega)(1+i\omega)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{(1+\omega^2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Интеграл Фурье: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega$$

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\omega^2}$, $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega$.

2.2. Синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье

Задача 27. Найти синус-преобразование Фурье F_S для функции $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$, заданной на $(0,\infty)$.

Решение. По определению, надо найти $F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\sin(\omega x)dx\right)$.

Для интегрирования по частям удобнее, чтобы было 2 множителя, а не 3. Здесь можно добиться упрощения выражения, если применить дифференцирование по параметру ω.

$$F_s'(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x}\sin(\omega x)\right)'_\omega dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} x\cos(\omega x)dx\right) =$$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)dx\right)$ это действие устраняет деление на x. Теперь это

- обычный циклический интеграл. Обозначим $I = \int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)dx$.

Коэффициент пока не будем записывать, добавим его перед самым ответом. Проинтегрируем по частям в 2 шага.

$u = e^{-x}$	$v = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
$u' = -e^{-x}$	$v' = \cos(\omega x)$

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)dx = \left.\frac{e^{-x}}{\omega}\sin(\omega x)\right|_0^\infty + \frac{1}{\omega}\int_0^\infty e^{-x}\sin(\omega x)dx =$$

$(0-0) + \frac{1}{\omega}\int_0^\infty e^{-x}\sin(\omega x)dx$. 2-й шаг:

$u = e^{-x}$	$v = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)$
$u' = -e^{-x}$	$v' = \sin(\omega x)$

$$I = 0 + \frac{1}{\omega}\int_0^\infty e^{-x}\sin(\omega x)dx \; = \; \frac{1}{\omega}\left(-\frac{e^{-x}}{\omega}\cos(\omega x)\Big|_0^\infty - \frac{1}{\omega}\int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)dx \right) =$$

$\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}I\right)$. Итак, $I = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}I\right) = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}I \;\Rightarrow$

$$I = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}I \;\Rightarrow\; \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)I = \frac{1}{\omega^2} \;\Rightarrow\; \frac{\omega^2+1}{\omega^2}I = \frac{1}{\omega^2} \;\Rightarrow\; (\omega^2+1)I = 1$$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{\omega^2+1}$. Тогда $F_s'(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+1} \;\Rightarrow\; F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}arctg(\omega)$.

Ответ. $F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}arctg(\omega)$.

Задача 28. Найти косинус-преобразование Фурье F_C для функции

$f(x) = \frac{1}{x^2+25}$.

Решение. Заметим, что функция чётная, то есть, можно распространить с полуоси на всю ось:

$$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2+25}\cos(\omega x)dx\right) \; = \; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^2+25}dx\right) =$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^2+25}dx\right)$ и видим, что косинус- преобразование Фурье чётной функции совпало с обычным преобразованием Фурье, что, кстати, и следует из теории.

Интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{x^2+25}dx\right)$ можно найти с помощью вычетов в верхней полуплоскости. Там один из двух полюсов, а именно, $5i$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{x^2+25}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\, i\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{e^{i\omega z}}{(z+5i)(z-5i)}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\, i\left.\frac{e^{i\omega z}}{z+5i}\right|_{z=5i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\, i\frac{e^{-5\omega}}{10i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\frac{e^{-5\omega}}{5}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\frac{e^{-5\omega}}{5} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-5\omega}}{5}.$$

Ответ. $F_C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-5\omega}}{5}$.

Задача 29. Найти синус-преобразование Фурье F_S для функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+25}.$$

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь функция нечётная.

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+25}\sin(\omega x)dx\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+25}\sin(\omega x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(\omega x)}{x^2+25}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Im}\left(2\pi\, i\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{ze^{i\omega z}}{(z+5i)(z-5i)}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Im}\left(2\pi\, i\left.\frac{ze^{i\omega z}}{z+5i}\right|_{z=5i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Im}\left(2\pi\, i\frac{5ie^{-5\omega}}{10i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Im}\left(\pi\, ie^{-5\omega}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi e^{-5\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-5\omega}.$$

Ответ. $F_s(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-5\omega}$.

Задача 30. Найти косинус-преобразование Фурье F_C для функции

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь будет полюс не 1-го, а 2-го порядка.

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{(x^2+1)^2}dx\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{(x^2+1)^2}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{(x^2+1)^2}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{i\omega z}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\left.\left(\frac{e^{i\omega z}}{(z+i)^2}\right)'\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\ \left.\frac{i\omega e^{i\omega z}(z+i)^2-2(z+i)e^{i\omega z}}{(z+i)^4}\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\ \frac{i\omega e^{-\omega}(2i)^2-2(2i)e^{-\omega}}{(2i)^4}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\ \frac{-4i\omega e^{-\omega}-4ie^{-\omega}}{16i^4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\ i\frac{-4i}{16}(\omega e^{-\omega}+e^{-\omega})\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi\frac{1}{4}e^{-\omega}(\omega+1)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4}e^{-\omega}(\omega+1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}e^{-\omega}(\omega+1)$$

Ответ. $F_C(\omega)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}e^{-\omega}(1+\omega)$.

Задача 31. Найти синус-преобразование Фурье F_S для функции

$f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

Решение. $F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\sin(\omega x)dx\right)=$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}\sin(\omega x)dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(\omega x)}{(x^2+1)^2}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\,\mathop{\mathrm{Re}s}_{z=i}\frac{ze^{i\omega z}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\left.\left(\frac{ze^{i\omega z}}{(z+i)^2}\right)'\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\left.\frac{(e^{i\omega z}+zi\omega e^{i\omega z})(z+i)^2-2(z+i)ze^{i\omega z}}{(z+i)^4}\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\frac{(e^{-\omega}-\omega e^{-\omega})(2i)^2-2(2i)ie^{-\omega}}{2^4 i^4}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\frac{(e^{-\omega}-\omega e^{-\omega})(-4)+4e^{-\omega}}{16}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi\, i\frac{-4e^{-\omega}(1-\omega)+4e^{-\omega}}{16}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi\frac{-e^{-\omega}(1-\omega)+e^{-\omega}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\omega e^{-\omega} - e^{-\omega} + e^{-\omega}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\omega e^{-\omega}.$$

Ответ. $F_s(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\omega e^{-\omega}$.

Задача 32. Найти косинус-преобразование Фурье F_C для функции

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Решение. $F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\cos(\omega x)dx\right) =$

$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\cos(\omega x)dx\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\cos(\omega x)dx\right)$, далее с помощью вычетов.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}e^{i\omega z}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left.\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}e^{i\omega z}\right)'\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left.\left(\frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)z^2}{(z+i)^4}e^{i\omega z} + \frac{z^2 i\omega}{(z+i)^2}e^{i\omega z}\right)\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left(\frac{2i(-4) - 2(2i)(-1)}{2^4 i^4}e^{-\omega} + \frac{(-1)i\omega}{2^2 i^2}e^{-\omega}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left(\frac{-8i+4i}{16}e^{-\omega}+\frac{i\omega}{4}e^{-\omega}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ ie^{-\omega}\left(\frac{-i}{4}+\frac{i\omega}{4}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ e^{-\omega}\left(\frac{1}{4}-\frac{\omega}{4}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega}\,\frac{1}{4}(1-\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-\omega)e^{-\omega}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-\omega)e^{-\omega}$.

Задача 33. Найти косинус-преобразование Фурье F_C для функции

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}.$$

Решение. Здесь полюс $z=i$ порядка 3, так что с решение будет помощью 2-й производной.

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\cos(\omega x)dx\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\cos(\omega x)dx\right) =$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\cos(\omega x)dx\right)$, далее с помощью вычетов.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}e^{i\omega z}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2!}2\pi\ i\left.\left(\frac{1}{(z+i)^3}e^{i\omega z}\right)''\right|_{z=i}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ i\left(\frac{-3}{(z+i)^4}e^{i\omega z}+\frac{i\omega}{(z+i)^3}e^{i\omega z}\right)'\Bigg|_{z=i}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ i\left(\frac{12}{(z+i)^5}e^{i\omega z}+\frac{-3i\omega}{(z+i)^4}e^{i\omega z}+\frac{-3i\omega}{(z+i)^4}e^{i\omega z}+\frac{i^2\omega^2}{(z+i)^3}e^{i\omega z}\right)\Bigg|_{z=i}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ i\left(\frac{12}{(z+i)^5}e^{i\omega z}+\frac{-6i\omega}{(z+i)^4}e^{i\omega z}+\frac{-\omega^2}{(z+i)^3}e^{i\omega z}\right)\Bigg|_{z=i}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ i\left(\frac{12}{2^5 i^5}e^{-\omega}+\frac{-6i\omega}{2^4 i^4}e^{-\omega}+\frac{-\omega^2}{2^3 i^3}e^{-\omega}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ ie^{-\omega}\left(\frac{12}{32i}+\frac{-6i\omega}{16}+\frac{-\omega^2}{-8i}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(\pi\ ie^{-\omega}\left(\frac{12}{32i}+\frac{6\omega}{16i}+\frac{\omega^2}{8i}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\omega}\left(\frac{12}{32}+\frac{6\omega}{16}+\frac{\omega^2}{8}\right)\right)=$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega}\,\frac{12+12\omega+4\omega^2}{32}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{3+3\omega+\omega^2}{8}e^{-\omega}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{3+3\omega+\omega^2}{8}e^{-\omega}$.

Задача 34. Найти преобразование Фурье от функции:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in[-a,a]\\0, x\notin[-a,a]\end{cases}$$

Решение. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-i\omega x}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}\right) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}}{-i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}}{2i}\frac{1}{\omega} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sin(a\omega)\frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$.

Задача 35. Найти преобразование Фурье от функции:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, x \in [-\pi, \pi] \\ \quad 0 \quad , x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Решение. Здесь мы можем не считать интегралы заново, а воспользоваться предыдущим примером и свойством

$$\Phi\big(f(x)\cos\lambda x\big) = \frac{1}{2}\big(F(\omega-\lambda)+F(\omega+\lambda)\big).$$

В качестве базовой части можно считать $f(x)=1$, и она домножена на $\cos(1x)$, то есть $\lambda = 1$. При $a=\pi$, в прошлой задаче ответ бы выглядел так: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\pi\omega)}{\omega}$. Тогда $\frac{1}{2}\big(F(\omega-\lambda)+F(\omega+\lambda)\big) =$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\pi(\omega-1))}{\omega-1}+\frac{\sin(\pi(\omega+1))}{\omega+1}\right)$. Далее воспользуемся формулами синуса суммы и разности: $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\pi\omega)\cos(\pi)-\cos(\pi\omega)\sin(\pi)}{\omega-1}+\frac{\sin(\pi\omega)\cos(\pi)-\cos(\pi\omega)\sin(\pi)}{\omega+1}\right)$$

учтём, что $\sin(\pi)=0$, $\cos(\pi)=-1$, получится

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-\sin(\pi\omega)}{\omega-1}+\frac{-\sin(\pi\omega)}{\omega+1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\sin(\pi\omega))\left(\frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\omega+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\sin(\pi\omega))\left(\frac{(\omega+1)+(\omega-1)}{(\omega-1)(\omega+1)}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\sin(\pi\omega))\frac{2\omega}{\omega^2-1} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\pi\omega)\frac{\omega}{1-\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}$

Задача 36. Найти косинус-преобразование Фурье F_C для функции

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0 & ,x\in[1,\infty)\end{cases}$$

Решение. $F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^1(1-x)\cos(\omega x)dx\right)$, здесь нужно

интегрирование по частям.

$u=1-x$	$v=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
$u'=-1$	$v'=\cos(\omega x)$

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1-x}{\omega}\sin(\omega x)\Big|_0^1+\frac{1}{\omega}\int_0^1\sin(\omega x)dx\right)=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left((0-0)-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega x)\Big|_0^1\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\cos(\omega)-1}{\omega^2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}$.

Задача 37. Найти преобразование Фурье от функции:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$$

Решение. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^2 e^{-3x}e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^2 e^{-(3+i\omega)x}dx\right)=$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-(3+i\omega)}e^{-(3+i\omega)x}\Big|_0^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-2(3+i\omega)}-1}{-(3+i\omega)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-2(3+i\omega)}}{3+i\omega}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-6}e^{-2i\omega}}{3+i\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-6}(\cos(2\omega)-i\sin(2\omega))}{3+i\omega}.$$

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-6}(\cos(2\omega)-i\sin(2\omega))}{3+i\omega}$.

ГЛАВА 3. Преобразование Лапласа (операционное исчисление).

3.1. Нахождение оригинала и изображения.

Задача 38. Найти преобразование Лапласа $L(e^{at})$.

Решение. $F(p) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^\infty$

далее обратите внимание на область существования $\mathrm{Re}(p) > a$, иначе на верхнем пределе получалось бы $e^{+\infty}$.

$$\frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^\infty = \frac{e^{-\infty} - e^0}{a-p} = \frac{0-1}{a-p} = \frac{1}{p-a}.$$

Ответ. $L(e^{at}) = \frac{1}{p-a}$.

Задача 39. Найти обратное преобразование Лапласа для $F(p) = \frac{1}{p-a}$.

Решение. Здесь единственный полюс $p = a$.

$$\operatorname*{Res}_{p=a} \frac{e^{pt}}{p-a} = \lim_{p \to a} \left(e^{pt}\right) = e^{pt}\Big|_{p=a} = e^{at}.$$

Ответ. $\eta(t) \cdot e^{at}$.

Задача 40. Найти преобразование Лапласа $L(te^t)$

Решение. $F(p) = \int_0^\infty te^t e^{-pt} dt = \int_0^\infty te^{(1-p)t} dt$. Далее «по частям»:

$u = t$	$v = \frac{1}{1-p} e^{(1-p)t}$
$u' = 1$	$v' = e^{(1-p)t}$

$$\int_0^\infty t e^{(1-p)t} dt = \frac{t}{1-p} e^{(1-p)t} \Big|_0^\infty - \frac{1}{1-p} \int_0^\infty e^{(1-p)t} dt = 0 + \frac{1}{p-1} \int_0^\infty e^{(1-p)t} dt =$$

$$\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{1-p} e^{(1-p)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{0-1}{1-p} = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Ответ. $L(te^t) = \frac{1}{(p-1)^2}$.

Задача 41. Найти обратное преобразование Лапласа, $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$.

Решение. Здесь единственный полюс $p = 1$, он 2-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=1} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} = \lim_{p \to 1} \left(e^{pt}\right)_p' = te^{pt}\Big|_{p=1} = te^t.$$

Производная именно по переменной p, а не t, потому что полюс $p = 1$ а не $t = 1$. В конце домножаем на функцию Хевисайда.

Ответ. $\eta(t) \cdot te^t$.

Задача 42. Найти преобразование Лапласа для $f(x) = \begin{cases} 1, t \in (2,3) \\ 0, t \in (2,3) \end{cases}$

Решение. $F(p) = \int_2^3 e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} e^{-pt}\Big|_2^3 = \frac{e^{-3p} - e^{-2p}}{-p} = \frac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p}$.

Ответ. $\dfrac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p}$.

Задача 43. Найти преобразование Лапласа для $f(x) = \begin{cases} 0, t \in (0,a) \\ 1, t \in (a,\infty) \end{cases}$.

Решение. $F(p) = \int\limits_a^\infty e^{-pt}dt = \dfrac{1}{-p} e^{-pt}\Big|_a^\infty = \dfrac{0 - e^{-pa}}{-p} = \dfrac{1}{p} e^{-pa}$.

Ответ. $\dfrac{1}{p} e^{-pa}$

Задача 44. Найти преобразование Лапласа для $f(x) = \begin{cases} -1, t \in (0,1) \\ t-2, t \in (1,3) \\ 1, t \in (1,\infty) \end{cases}$.

Решение. $F(p) = \int\limits_0^1 (-1)e^{-pt}dt + \int\limits_1^3 (t-2)e^{-pt}dt + \int\limits_3^\infty e^{-pt}dt$, здесь во 2-м слагаемом интегрирование по частям

$u = t-2$	$v = \dfrac{1}{-p} e^{-pt}$
$u' = 1$	$v' = e^{-pt}$

. $F(p) = \dfrac{-1}{-p} e^{-pt}\Big|_0^1 + \left(\dfrac{t-2}{-p} e^{-pt}\Big|_1^3 + \dfrac{1}{p}\int\limits_1^3 e^{-pt}dt \right) + \dfrac{1}{-p} e^{-pt}\Big|_3^\infty =$

$$\frac{e^{-p}-1}{p}+\left(-\frac{1}{p}e^{-3p}-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^3\right)-\frac{0-e^{-3p}}{p}=$$

$$\frac{e^{-p}}{p}-\frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-3p}-e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p}$$

здесь далее взаимоуничтожаются $\pm\frac{e^{-3p}}{p}$ и $\pm\frac{e^{-p}}{p}$, остаётся

$$F(p)=-\frac{1}{p}-\frac{e^{-3p}-e^{-p}}{p^2}=-\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}-e^{-3p}}{p^2}.$$

Ответ. $-\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}-e^{-3p}}{p^2}$.

Задача 45. Найти преобразование Лапласа для $f(t)=\begin{cases}t^2, t\in(0,1)\\ 1, t\in(1,\infty)\end{cases}$

Решение. $F(p)=\int\limits_0^1 t^2e^{-pt}dt+\int\limits_1^\infty e^{-pt}dt$, здесь в первом слагаемом интегрирование по частям в 2 шага.

$u=t^2$	$v=\frac{1}{-p}e^{-pt}$
$u'=2t$	$v'=e^{-pt}$

$$F(p)=\left(\frac{t^2}{-p}e^{-pt}\Big|_0^1+\frac{2}{p}\int\limits_0^1 te^{-pt}dt\right)+\frac{1}{-p}e^{-pt}\Big|_1^\infty$$

В оставшемся интеграле также «по частям»:

$u_2 = t$	$v_2 = \dfrac{1}{-p}e^{-pt}$
$u_2' = 1$	$v_2' = e^{-pt}$

Тогда получаем следующее:

$$F(p) = \left(\frac{t^2}{-p}e^{-pt}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{p}\left(\frac{t}{-p}e^{-pt}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt \right)\right) + \frac{1}{-p}e^{-pt}\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$\left(\frac{e^{-p}}{-p} + \frac{2}{p}\left(\frac{e^{-p}}{-p} + \frac{1}{-p^2}e^{-pt}\Bigg|_0^1 \right)\right) + \frac{0 - e^{-p}}{-p} =$$

$$-\frac{e^{-p}}{p} - \frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2(e^{-p}-1)}{p^3} + \frac{e^{-p}}{p} = -\frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2(e^{-p}-1)}{p^3}.$$

Ответ. $-\dfrac{2e^{-p}}{p^2} - \dfrac{2}{p^3}(e^{-p}-1)$

Задача 46. Найти преобразование Лапласа для $f(t) = \cos^2 t$.

Решение. $F(p) = \int\limits_0^{\infty} \cos^2 t \cdot e^{-pt}dt$. По формуле понижения степени, сначала преобразуем квадрат косинуса.

$$F(p) = \int_0^{\infty} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-pt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \cos 2t \cdot e^{-pt}dt =$$

$\dfrac{1}{2}L(1) + \dfrac{1}{2}L(\cos 2t)$, далее можно воспользоваться готовыми формулами, выведенными в лекциях: $L(1) = \dfrac{1}{p}$, $L(\cos at) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$, в данном случае $a=2$. Получаем (исходя из линейности преобразования), что:

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(p^2+4)+p^2}{p(p^2+4)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2p^2+4}{p(p^2+4)} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Ответ. $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

Задача 47. Найти обратное преобразование Фурье для

$$F(p)=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Решение. $\sum \operatorname{Res}\dfrac{(p^2+2)e^{pt}}{p(p^2+4)} = \sum \operatorname{Res}\dfrac{(p^2+2)e^{pt}}{p(p+2i)(p-2i)}$ нужно вычислить по 3 особым точкам: 0, $2i$, $-2i$.

$$\sum \operatorname{Res}\frac{(p^2+2)e^{pt}}{p(p+2i)(p-2i)} =$$

$$\left.\frac{(p^2+2)e^{pt}}{p^2+4}\right|_{p=0} + \left.\frac{(p^2+2)e^{pt}}{p(p+2i)}\right|_{p=2i} + \left.\frac{(p^2+2)e^{pt}}{p(p-2i)}\right|_{p=-2i} =$$

$$\frac{2}{4}+\frac{(-4+2)e^{2it}}{2i(4i)}+\frac{(-4+2)e^{-2it}}{(-2i)(-4i)} = \frac{1}{2}+\frac{-2e^{2it}}{-8}+\frac{-2e^{-2it}}{-8} =$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \cos^2 t.$$

Также домножим на функцию $\eta(t)$, чтобы обнулить на левой полуоси.

Ответ. $f(t)=\eta(t)\cdot\cos^2 t$.

Задача 48. Найти преобразование Лапласа для $f(t)=e^{5t}\sin 7t$.

Решение. $F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{5t}\sin 7t\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty}\sin 7t\cdot e^{(5-p)t}dt$, далее можно рассматривать как циклический интеграл, но это нерационально, лучше представить sin через экспоненты.

$$\int\limits_0^{\infty}\sin 7t\cdot e^{(5-p)t}dt = \int\limits_0^{\infty}\frac{e^{7it}-e^{-7it}}{2i}\cdot e^{(5-p)t}dt =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{(5-p+7i)t}dt-\int\limits_0^{\infty} e^{(5-p-7i)t}dt\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{5-p+7i}e^{(5-p+7i)t}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{5-p-7i}e^{(5-p-7i)t}\Big|_0^{\infty}\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{0-1}{5-p+7i}-\frac{0-1}{5-p-7i}\right)=\frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{5-p+7i}-\frac{1}{5-p-7i}\right)=$$

$$\frac{-1}{2i}\frac{(5-p-7i)-(5-p+7i)}{(5-p+7i)(5-p-7i)}=\frac{-1}{2i}\frac{-14i}{(5-p)^2+49}=\frac{7}{(5-p)^2+49}=$$

$$\frac{7}{(p-5)^2+49}.$$

Заметим, что по теореме смещения, если $L(\sin at) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$ при

$a = 7$ является $\dfrac{7}{p^2 + 49}$, то домножение на e^{5t} приведёт к функции

$F(p-5)$, то есть в данном случае $\dfrac{7}{(p-5)^2 + 49}$, что и совпадает с

полученной функцией.

Ответ. $\dfrac{7}{(p-5)^2 + 49}$.

Задача 49. Найти обратное преобразование Лапласа для

$$F(p) = \frac{7}{(p-5)^2 + 49} \ .$$

Решение. $F(p) = \dfrac{7}{(p-5)^2 + 49} \ = \dfrac{7}{p^2 - 10p + 74}$. Найдём полюсы.

$D = 100 - 4 \cdot 74 = 100 - 296 = -196$, $p = \dfrac{10 \pm 14i}{2} = 5 \pm 7i$.

$F(p)e^{pt} = \dfrac{7e^{pt}}{(p-(5+7i))(p-(5-7i))}$, затем найдём сумму вычетов в

двух особых точках.

$$\left.\frac{7e^{pt}}{p-(5-7i)}\right|_{p=5+7i}+\left.\frac{7e^{pt}}{p-(5+7i)}\right|_{p=5-7i} =$$

$$\frac{7e^{(5+7i)t}}{(5+7i)-(5-7i)}+\frac{7e^{(5-7i)t}}{(5-7i)-(5+7i)} = \frac{7e^{5t}e^{7it}}{14i}+\frac{7e^{5t}e^{-7it}}{-14i} =$$

$$e^{5t}\,\frac{e^{7it}-e^{-7it}}{2i} = e^{5t}\sin 7t\,.$$

Ответ. $\eta(t)\cdot e^{5t}\sin 7t$.

Задача 50. Найти преобразование Лапласа $L(ch(at))$.

Решение. По свойству линейности, $L(ch(at)) = L\left(\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right) =$

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{at}e^{-pt}+e^{-at}e^{-pt}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{(a-p)t}dt+\int_0^\infty e^{-(a+p)t}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\Big|_0^\infty+\frac{1}{-(a+p)}e^{(a+p)t}\Big|_0^\infty\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0-1}{a-p}+\frac{0-1}{-(a+p)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(p+a)+(p-a)}{(p-a)(p+a)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2-a^2} = \frac{p}{p^2-a^2}\,.$$

Ответ. $L(ch(at)) = \dfrac{p}{p^2-a^2}$.

Замечание. Для обычного (не гиперболического) косинуса ранее мы получали результат $\frac{p}{p^2+a^2}$. Для гиперболического - в знаменателе разность, а не сумма квадратов.

Задача 51.

Найти обратное преобразование Лапласа: $F(p)=\frac{p}{p^2-a^2}$.

Решение. Чтобы ещё раз повторить метод нахождения обратного преобразования с помощью вычетов , вычислим обратное преобразование от $F(p)=\frac{p}{p^2-a^2}$, и убедимся, что при этом получим $ch(at)$.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{pe^{pt}}{p^2-a^2} = \operatorname*{Res}_{p=a} \frac{pe^{pt}}{(p+a)(p-a)} + \operatorname*{Res}_{p=-a} \frac{pe^{pt}}{(p+a)(p-a)} =$$

$$\left.\frac{pe^{pt}}{p+a}\right|_{p=a} + \left.\frac{pe^{pt}}{p-a}\right|_{p=-a} = \frac{ae^{at}}{2a} + \frac{-ae^{-at}}{-2a} = \frac{e^{at}}{2} + \frac{e^{-at}}{2} = ch(at).$$

Ответ. $ch(at)\cdot\eta(t)$.

Аналогично, можно решить задачу для гиперболического синуса. Меняется лишь знак между двумя слагаемыми.

Задача 52. Найти преобразование Лапласа $L(sh(at))$.

Решение. $L(sh(at)) = L\left(\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \int\limits_0^\infty\left(\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)e^{-pt}dt =$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left(e^{at}e^{-pt}-e^{-at}e^{-pt}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty e^{(a-p)t}dt-\int\limits_0^\infty e^{-(a+p)t}dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\Big|_0^\infty-\frac{1}{-(a+p)}e^{(a+p)t}\Big|_0^\infty\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0-1}{a-p}-\frac{0-1}{-(a+p)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(p+a)-(p-a)}{(p-a)(p+a)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2a}{p^2-a^2} = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

Ответ. $L(sh(at)) = \dfrac{a}{p^2-a^2}$

Задача 53.

Найти обратное преобразование Лапласа от $F(p)=\dfrac{a}{p^2-a^2}$

Решение.

$$\sum \operatorname{Res} s\frac{ae^{pt}}{p^2-a^2} = \operatorname*{Res}_{p=a} s\frac{ae^{pt}}{(p+a)(p-a)}+\operatorname*{Res}_{p=-a} s\frac{ae^{pt}}{(p+a)(p-a)} =$$

$$\left.\frac{ae^{pt}}{p+a}\right|_{p=a}+\left.\frac{ae^{pt}}{p-a}\right|_{p=-a} = \frac{ae^{at}}{2a}+\frac{ae^{-at}}{-2a} = \frac{e^{at}}{2}-\frac{e^{-at}}{2} = sh(at).$$

Ответ. $sh(at)\cdot\eta(t)$.

Задача 54. Найти преобразование Лапласа $L(t^2e^{5t})$.

Решение. Наиболее рационально здесь не вычислять интегралы по определению, а воспользоваться свойствами.

Есть 2 способа.

1) По свойству 4 (теорема смещения)

2) По свойству 7 (дифференцирование изображения).

Способ 1. Зная, что $L(t^2) = \dfrac{2}{p^3}$, и свойство $L(e^{at}f(t)) = F(p-a)$,

получим $L(t^2e^{5t}) = \dfrac{2}{(p-5)^3}$.

Способ 2. Зная, что $L(e^{5t}) = \dfrac{1}{p-5}$, и свойство $F''(p) = L(t^2 \cdot f(t))$,

получим $L(t^2e^{5t}) = \left(\dfrac{1}{p-5}\right)'' = \left(\dfrac{-1}{(p-5)^2}\right)' = \dfrac{2}{(p-5)^3}$.

Ответ. $F(p) = \dfrac{2}{(p-5)^3}$.

Задача 55. Найти обратное преобразование Лапласа для

$F(p) = \dfrac{2}{(p-5)^3}$.

Решение. $\operatorname*{Res}_{p=5} \dfrac{2e^{pt}}{(p-5)^3} = \dfrac{1}{2!}\left(2e^{pt}\right)_p''\Big|_{p=5} = t^2e^{pt}\Big|_{p=5} = t^2e^{5t}$.

Ответ. $t^2e^{5t} \cdot \eta(t)$.

Задача 56. Найти обратное преобразование Лапласа для функции

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)} .$$

Решение. $\sum \operatorname{Re} s \dfrac{e^{pt}}{p^2(p+3)} = \operatorname*{Re}_{p=0} s \dfrac{e^{pt}}{p^2(p+3)} + \operatorname*{Re}_{p=-3} s \dfrac{e^{pt}}{p^2(p+3)}$

Один из полюсов 2-го порядка, другой 1-го порядка.

$$\left.\left(\frac{e^{pt}}{p+3}\right)'\right|_{p=0} + \left.\frac{e^{pt}}{p^2}\right|_{p=-3} = \left.\frac{te^{pt}(p+3) - e^{pt}}{(p+3)^2}\right|_{p=0} + \frac{e^{-3t}}{9} = \frac{3t-1}{9} + \frac{e^{-3t}}{9} .$$

Ответ. $\dfrac{3t-1}{9} + \dfrac{e^{-3t}}{9} \cdot \eta(t)$.

Задача 57. Дано: $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Найти обратное

преобразование Лапласа.

Решение. **Способ 1.** С помощью суммы вычетов.

$$\sum \operatorname{Re} s \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \left(\operatorname*{Re}_{p=1} s + \operatorname*{Re}_{p=2} s + \operatorname*{Re}_{p=3} s \right) =$$

$$\left.\frac{pe^{pt}}{(p-2)(p-3)}\right|_{p=1} + \left.\frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-3)}\right|_{p=2} + \left.\frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)}\right|_{p=3} =$$

$$\frac{e^t}{(-1)(-2)} + \frac{2e^{2t}}{1(-1)} + \frac{3e^{3t}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t} .$$

Способ 2. С помощью разложения на простейшие дроби.

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$$, приводим к общему знаменателю,

$$\frac{A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

откуда следует

$$A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-1)(p-2) = p \quad \Rightarrow$$

$$A(p^2-5p+6) + B(p^2-4p+3) + C(p^2-3p+2) = p \quad \Rightarrow$$

$$(A+B+C)p^2 + (-5A-4B-3C)p + (6A+3B+2C) = 0p^2 + 1p + 0$$

Отсюда получается система линейных уравнений на A, B, C:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=1 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}$$

Решим её методом Гаусса, преобразую расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Система преобразована к виду: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B+2C=1 \\ 2C=3 \end{cases}$

Отсюда $C=\frac{3}{2}$, $B=-2$, $A=\frac{1}{2}$. Тогда обратное преобразование надо найти для функции $\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-2\frac{1}{p-2}+\frac{3}{2}\frac{1}{p-3}$. Зная при этом, что `$\frac{1}{p-a}=L(e^{at})$, с помощью линейности получим $\frac{1}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{3}{2}e^{3t}$.

Ответ. $\frac{1}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{3}{2}e^{3t}\cdot\eta(t)$.

Задача 58. Дано: $F(p)=\frac{p^2+3}{p^4-1}$. Найти обратное преобразование Лапласа.

Решение. $F(p)=\frac{p^2+3}{p^4-1}=\frac{p^2+3}{(p^2-1)(p^2+1)}=\frac{p^2+3}{(p+1)(p-1)(p+i)(p-i)}$

Здесь 4 полюса 1-го порядка, ± 1 и $\pm i$.

$$\sum \operatorname{Re}s\frac{(p^2+3)e^{pt}}{(p+1)(p-1)(p+i)(p-i)}=$$

$$\left.\frac{(p^2+3)e^{pt}}{(p+1)(p^2+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{(p^2+3)e^{pt}}{(p-1)(p^2+1)}\right|_{p=-1}+$$

$$\left.\frac{(p^2+3)e^{pt}}{(p^2-1)(p+i)}\right|_{p=i}+\left.\frac{(p^2+3)e^{pt}}{(p^2-1)(p-i)}\right|_{p=-i}=$$

$$\frac{4e^t}{2\cdot 2}+\frac{4e^{-t}}{(-2)\cdot 2}+\frac{2e^{it}}{(-2)(2i)}+\frac{2e^{-it}}{(-2)(-2i)} = e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{-2i}+\frac{e^{-it}}{2i} =$$

$$e^t-e^{-t} -\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = 2\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\sin t = 2sht-\sin t\,.$$

Ответ. $2sht-\sin t\cdot\eta(t)$..

Задача 59. Дано: $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^2(p+2)}$. Найти обратное преобразование Лапласа.

Решение. $\sum \operatorname{Re}s\dfrac{pe^{pt}}{(p-1)^2(p+2)} =$

$$\operatorname*{Re}_{p=1}s\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}+\operatorname*{Re}_{p=-2}s\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}$$

Здесь полюсы 2-го и 1-го порядка, далее.

$$\left.\left(\frac{p}{p+2}e^{pt}\right)'\right|_{p=1}+\left.\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right|_{p=-2} =$$

$$\left.\left(\frac{(p+2)-p}{(p+2)^2}e^{pt}+\frac{p}{p+2}te^{pt}\right)\right|_{p=1}+\frac{-2e^{-2t}}{9} = \frac{2}{9}e^t+\frac{1}{3}te^t+\frac{-2e^{-2t}}{9}\,.$$

Ответ. $\dfrac{2}{9}e^t+\dfrac{1}{3}te^t-\dfrac{2}{9}e^{-2t}\cdot\eta(t)$.

Задача 60. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-2p+5}$, найти обратное преобразование Лапласа.

Решение. Способ 1. С помощью вычетов. Найдём корни знаменателя.

$D=4-4\cdot 5=-16$. $p=\dfrac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$.

$$F(p)=\frac{1}{p^2-2p+5}=\frac{1}{(p-(1+2i))(p-(1-2i))}, \text{ тогда}$$

$$\sum \operatorname{Res} \frac{e^{pt}}{(p-(1+2i))(p-(1-2i))}=\left.\frac{e^{pt}}{p-(1-2i)}\right|_{p=1+2i}+\left.\frac{e^{pt}}{p-(1+2i)}\right|_{p=1-2i}$$

$$=\frac{e^{(1+2i)t}}{4i}+\frac{e^{(1-2i)t}}{-4i}=\frac{e^t e^{2it}}{4i}-\frac{e^t e^{-2it}}{4i}=\frac{1}{2}e^t\,\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}=\frac{1}{2}e^t\sin 2t .$$

Способ 2. Выделить полный квадрат и сгруппировать таким образом:

$F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2+2^2}$, затетим, что здесь можно применить формулу

$L(\sin(at))=\dfrac{a}{p^2+a^2}$, но не хватает 2 в числителе, поэтому домножим и поделим. $F(p)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(p-1)^2+2^2}$, кроме того, сдвиг на 1 означает, что в оригинале есть умножение на e^t . Получается в итоге $\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$.

Ответ. $\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t\cdot\eta(t)$.

Задача 61. $F(p)=\dfrac{p^3+p^2+2p+2}{p^3(p^2+2p+2)}$, найти оригинал.

Решение. Разложим на простейшие дроби.

$\dfrac{p^3+p^2+2p+2}{p^3(p^2+2p+2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p^3}+\dfrac{Dp+E}{p^2+2p+2}$, после приведения к общему знаменателю, числитель будет иметь вид:

$$Ap^2(p^2+2p+2)+Bp(p^2+2p+2)+C(p^2+2p+2)+p^3(Dp+E)\ =$$

$$Ap^4+2Ap^3+2Ap^2+Bp^3+2Bp^2+2Bp+Cp^2+2Cp+2C+Dp^4+Ep^3\ =$$

$$(A+D)p^4+(2A+B+E)p^3+(2A+2B+C)p^2+(2B+2C)p+2C\ .$$

Приравняем к исходному числителю, где $0p^4+1p^3+1p^2+2p+2$.

Система уравнений: $\begin{cases} A+D=0 \\ 2A+B+E=1 \\ 2A+2B+C=1 \\ 2B+2C=2 \\ C=2 \end{cases}$

Из последнего сразу $C=1$, из предпоследнего $B=0$, из 3-го $A=0$.

Тогда из 1-го $D=0$, и тогда из 2-го $E=1$. Итак, $\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2+2p+2}$.

Далее преобразуем, $\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{(p+1)^2+1}$. В 1-м слагаемом можно найти вычет в 0: $\operatorname*{Res}_{p=0} \dfrac{e^{pt}}{p^3}\ =\ \dfrac{1}{2!}\left(e^{pt}\right)_p''\Big|_{p=0}\ =\ \dfrac{1}{2}t^2e^{pt}\Big|_{p=0}\ =\ \dfrac{1}{2}t^2$.

во втором по теореме смещения и известной формуле для синуса,

$\frac{1}{(p+1)^2+1}$ является преобразованием от $e^{-t}\sin t$.

Ответ. $e^{-t}\sin t + \frac{t^2}{2}\cdot\eta(t)$.

Задача 62. Найти преобразование Лапласа для функции:

$$f(t)=\begin{cases}2t+3 \text{ если } t\in(0,1)\\ 0 \quad \text{если } t\in(1,\infty)\end{cases}$$

Решение. $\int_0^1 (2t+3)e^{-pt}dt$ вычисляем «по частям».

$u=2t+3$	$v=\frac{1}{-p}e^{-pt}$
$u'=2$	$v'=e^{-pt}$

$$\int_0^1 (2t+3)e^{-pt}dt = \frac{2t+3}{-p}e^{-pt}\Big|_0^1 + \frac{2}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt = \frac{2t+3}{-p}e^{-pt}\Big|_0^1 - \frac{2}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{5e^{-p}-3e^0}{-p} - \frac{2}{p^2}(e^{-p}-e^0) = \frac{3-5e^{-p}}{p} + \frac{2}{p^2}(1-e^{-p})$$

Ответ. $\frac{3-5e^{-p}}{p} + \frac{2}{p^2}(1-e^{-p})$.

Задача 63. Найти преобразование Лапласа для функции:

$f(t)=te^{2t}\sin t$

Решение. Можем воспользоваться набором свойств, доказанных в лекциях, тогда можно даже обойтись без вычисления интегралов.

1) Известно, что $L(\sin at) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$, при $a = 1$: $L(\sin t) = \dfrac{1}{p^2 + 1}$.

2) Можно воспользоваться свойством $L(f(t)e^{at}) = F(p-a)$, чтобы найти $L(e^{2t}\sin t)$.

$$L(\sin t) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow L(e^{2t}\sin t) = \frac{1}{(p-2)^2+1} = \frac{1}{p^2-4p+5}.$$

3) Теперь наращивается 3-й множитель: в качестве базовой части пусть будет $L(e^{2t}\sin t)$, вспомним свойство: $F'(p) = L(-t\cdot f(t))$.

В нашем случае, это означает, что $L(t\cdot f(t)) = -F'(p)$, то есть

$$L(te^{2t}\sin t) = -\left(\frac{1}{p^2-4p+5}\right)' = -\frac{0-(2p-4)}{(p^2-4p+5)^2} = \frac{2p-4}{(p^2-4p+5)^2}.$$

Ответ. $\dfrac{2p-4}{(p^2-4p+5)^2}$

Задача 64. Найти преобразование Лапласа для функции:

$$f(t) = \int_0^t u\sin u\,du$$

Решение. Здесь функция $f(t)$ - это первообразная от $t\sin t$. Но вычислять её не требуется, ведь существует свойство:

Если $h(t)$ есть первообразная от $f(t)$, то $L(h(t)) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Сначала мы должны узнать преобразование Лапласа от $t\sin t$, а затем перейти к первообразной, поделив на p.

$$L(\sin t)=\frac{1}{p^2+1}\ \Rightarrow\ L(t\sin t)=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'=-\frac{0-2p}{(p^2+1)^2}=\frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

Тогда преобразование от её первообразной: $\frac{1}{p}\frac{2p}{p^2+1}=\frac{2}{(p^2+1)^2}$.

Ответ. $\frac{2}{(p^2+1)^2}$.

Задача 65. Найти обратное преобразование от $F(p)=\frac{p+6}{p^2+8p+25}$.

Решение.

Способ 1. С помощью свойств и известных функций.

Выделим полный квадрат. $F(p)=\frac{p+6}{p^2+8p+25}=\frac{p+6}{(p+4)^2+3^2}$.

Если бы в числителе было $p+4$, то можно было бы использовать формулу

$L(\cos at)=\frac{p}{p^2+a^2}$, а учитывая свойство смещения, это значит:

$L(e^{-4t}\cos at)=\frac{p+4}{(p+4)^2+a^2}$. Разобьём на 2 слагаемых.

$$\frac{p+6}{(p+4)^2+3^2}=\frac{p+4}{(p+4)^2+3^2}+\frac{2}{(p+4)^2+3^2}.$$

Обратное преобразование от 1-го это $e^{-4t}\cos 3t$.

Во втором, если бы в числителе было 3, то как раз было бы

$L(e^{-4t}\sin at) = \dfrac{a}{(p+4)^2 + a^2}$. Там не 3, но мы домножим и поделим,

чтобы было.

Итак, $\dfrac{p+4}{(p+4)^2+3^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{3}{(p+4)^2+3^2}$ является преобразованием

Лапласа от $f(t) = e^{-4t}\cos 3t + \dfrac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t$.

Способ 2. С помощью вычетов. Этот способ лучше тем, что не нужно догадываться, к какой форме привести функцию для использования свойств. Просто ищем 2 корня знаменателя, и вычисляем вычеты в этих двух полюсах.

$D = 64 - 4\cdot 25 = -36$, корни $p = \dfrac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$.

$$\sum \operatorname{Re}s \frac{(p+6)e^{pt}}{p^2+8p+25} = \sum \operatorname{Re}s \frac{(p+6)e^{pt}}{(p-(-4+3i))(p-(-4-3i))} =$$

$$\left.\frac{(p+6)e^{pt}}{p-(-4-3i)}\right|_{p=-4+3i} + \left.\frac{(p+6)e^{pt}}{p-(-4+3i)}\right|_{p=-4-3i} =$$

$$\frac{(2+3i)e^{-4t}e^{3it}}{6i} + \frac{(2-3i)e^{-4t}e^{-3it}}{-6i} =$$

$$\frac{2e^{-4t}e^{3it}}{6i} - \frac{2e^{-4t}e^{-3it}}{6i} + \frac{3ie^{-4t}e^{3it}}{6i} + \frac{-3ie^{-4t}e^{-3it}}{-6i} =$$

$$e^{-4t}\left(\frac{e^{3it}}{3i}-\frac{e^{-3it}}{3i}+\frac{e^{3it}}{2}+\frac{e^{-3it}}{2}\right) = e^{-4t}\left(\frac{2}{3}\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right)+e^{-4t}\left(\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}\right) =$$

$\frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t+e^{-4t}\cos 3t$. Получили то же самое.

Ответ. $f(t)=e^{-4t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t\cdot\eta(t)$.

Задача 66. Найти обратное преобразование Лапласа от

$$F(p)=\frac{1}{(p-2)^2(p-3)} .$$

Решение. $\sum \operatorname{Res} s\,\frac{e^{pt}}{(p-2)^2(p-3)} =$

$\operatorname*{Res}_{p=3} s\,\frac{e^{pt}}{(p-2)^2(p-3)}+\operatorname*{Res}_{p=2} s\,\frac{e^{pt}}{(p-2)^2(p-3)}$. Полюс $p=3$ первого порядка, а $p=2$ - 2-го порядка, там нужно сначала найти производную по p.

$$\left.\frac{e^{pt}}{(p-2)^2}\right|_{p=3}+\left.\left(\frac{e^{pt}}{p-3}\right)_p'\right|_{p=2} = \frac{e^{3t}}{1}+\left.\frac{te^{pt}(p-3)-e^{pt}}{(p-3)^2}\right|_{p=2} =$$

$$\frac{e^{3t}}{1}+\frac{-2te^{2t}-e^{2t}}{(-1)^2} = e^{3t}-te^{2t}-e^{2t} .$$

Ответ. $e^{3t}-te^{2t}-e^{2t}$.

3.2. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

Задача 67. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение $x'' - 3x' + 2x = 0$ с условиями Коши: $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$.

Решение. Раньше, во 2 семестре, мы сначала находили сначала общее решение, затем частное. Напомним данный метод. Характеристическое уравнение:

$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2) = 0$, корни 1 и 2, общее решение

$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Далее, при этом $x'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$,

тогда из условий Коши получается система:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \quad , \quad x(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 2$$

$$x'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \quad , \quad x'(0) = 3 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 3.$$

Вычитая одно из другого, получим $C_2 = 1$, затем $C_1 = 1$.

Частное решение $x(t) = e^t + e^{2t}$.

Теперь рассмотрим способ с помощью преобразования Лапласа.

Преобразуем правую и левую часть, зная из теории, как преобразуется производная:

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0).$$

$$L(f''(t)) = p\big(pF(p) - f(0)\big) - f'(0)$$

В данном случае, $L(x(t))$ будет обозначаться $X(p)$.

Дифференциальное уравнение превратится в алгебраическое.

$$L(x'' - 3x' + 2x) = L(0) \Rightarrow$$

$$p\big(pX(p)-x(0)\big)-x'(0)\ -3(pX(p)-x(0))+2X(p)=0\ \Rightarrow$$

$$p\big(pX(p)-2\big)-3-3(pX(p)-2)+2X(p)=0\ \Rightarrow$$

$$\left(p^2-3p+2\right)X(p)-2p-3+6=0\ \Rightarrow$$

$$\left(p^2-3p+2\right)X(p)=2p-3\ \Rightarrow\ X(p)=\frac{2p-3}{p^2-3p+2}.$$

Обратите внимание, что характеристическое уравнение само получилось слева, как множитель при $X(p)$. Итак, мы получили преобразование Лапласа от искомой функции. А теперь найдём обратное преобразование Лапласа.

$$X(p)=\frac{2p-3}{p^2-3p+2}=\frac{2p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$\sum \operatorname{Res}\frac{(2p-3)e^{pt}}{(p-1)(p-2)}=\left.\frac{(2p-3)e^{pt}}{p-2}\right|_{p=1}+\left.\frac{(2p-3)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=2}=e^t+e^{2t}.$$

Причём, условия Коши мы здесь учитываем автоматически, сразу получая частное решение без общего. Умножать на функцию Хевисайда здесь не нужно, т.к. общее решение существует в том числе и на левой полуоси, а оригинал здесь играл лишь вспомогательную роль.

Ответ. $x(t)=e^t+e^{2t}$.

Задача 68. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $x''-3x'+2x=e^{3t}$ с условиями Коши $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

Решение. Сначала вспомним метод решения неоднородных уравнений (по виду правой части) из 2 семестра.

Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$, корни 1 и 2, общее решение однородного $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Правая часть $b(t) = e^{3t}$. Но корня 3 нет среди харакреристических, т.е. не нужно домножать дополнительно ни на какую степенную, а частное решение неоднородного искать в виде $x(t) = Ae^{3t} \Rightarrow$

$x'(t) = 3Ae^{3t}$, $x''(t) = 9Ae^{3t}$.

Подставляя в дифференциальное уравнение, получим

$9Ae^{3t} - 3 \cdot 3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = e^{3t}$, откуда $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$.

Сумма решений однородного и неоднородного, т.е. общее решение:

$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$. Далее надо определить константы из условий Коши.

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t} \ , \quad x(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + \frac{3}{2} e^{3t} \ , \ x'(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 + 2C_2 + \frac{3}{2} = 0$$

Это приводит к системе уравнений, из которой следует $C_2 + 1 = 0$ (если из 2-го вычесть 1-е уравнение), $C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$.

Итак, ответ: $x(t) = \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}$.

Решим то же самое методом преобразования Лапласа.

$$p\big(pX(p)-x(0)\big)-x'(0)\ -3(pX(p)-x(0))+2X(p)=\frac{1}{p-3}$$, но

учитывая тот факт, что все условия коши здесь нулевые, получим:

$$\left(p^2-3p+2\right)X(p)=\frac{1}{p-3}\quad\Rightarrow\quad X(p)=\frac{1}{\left(p^2-3p+2\right)(p-3)}\ \Rightarrow$$

$X(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Ищем обратное преобразование:

$$\sum \operatorname{Re}s\frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-3)}=$$

$$\left.\frac{e^{pt}}{(p-2)(p-3)}\right|_{p=1}+\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)(p-3)}\right|_{p=2}+\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)}\right|_{p=3}=$$

$$\frac{e^{t}}{(-1)(-2)}+\frac{e^{2t}}{1(-1)}+\frac{e^{3t}}{2}=\frac{e^{t}}{2}-e^{2t}+\frac{e^{3t}}{2}.$$

Ответ. $x(t)=\dfrac{e^{t}}{2}-e^{2t}+\dfrac{e^{3t}}{2}$.

Задача 69. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $x''-3x'+2x=e^{t}$ с условиями Коши $x(0)=0, x'(0)=0$.

Решение. Как и в прошлой задаче, получается

$$\left(p^2-3p+2\right)X(p)=\frac{1}{p-1}\quad\Rightarrow\quad X(p)=\frac{1}{\left(p^2-3p+2\right)(p-1)}\ \Rightarrow$$

$X(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)}$ отличие в том, что здесь возникает полюс кратности больше 1.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)} = \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right|_{p=2} + \left.\left(\frac{e^{pt}}{p-2}\right)'\right|_{p=1} =$$

$$\frac{e^{2t}}{1}+\left.\frac{te^{pt}(p-2)-e^{pt}}{(p-2)^2}\right|_{p=1} = e^{2t}+\frac{te^{t}(-1)-e^{t}}{1} = e^{2t}-e^{t}-te^{t}.$$

Ответ. $x(t)=e^{2t}-e^{t}-te^{t}$.

Задача 70. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $x''+x=\cos t$ с условиями Коши $x(0)=2, x'(0)=1$.

Решение. $p\big(pX(p)-x(0)\big)-x'(0)+X(p)=\dfrac{p}{p^2+1} \quad\Rightarrow$

$$p\big(pX(p)-2\big)-1+X(p)=\frac{p}{p^2+1} \quad\Rightarrow\quad (p^2+1)X(p)=\frac{p}{p^2+1}+2p+1$$

$X(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}+\dfrac{2p+1}{p^2+1}$. Обратное преобразование Лапласа можно найти отдельно для каждого слагаемого (вследствие линейности).

Для 1-го: $\operatorname*{Res}_{p=i} \dfrac{pe^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2}+\operatorname*{Res}_{p=-i} \dfrac{pe^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2} =$

$$\left.\left(\frac{p}{(p+i)^2}e^{pt}\right)'\right|_{p=i}+\left.\left(\frac{p}{(p-i)^2}e^{pt}\right)'\right|_{p=-i} =$$

$$\left(\frac{1(p+i)^2-2(p+i)p}{(p+i)^4}e^{pt}+\frac{p}{(p+i)^2}te^{pt}\right)\Bigg|_{p=i}+$$

$$\left(\frac{1(p-i)^2-2(p-i)p}{(p-i)^4}e^{pt}+\frac{p}{(p-i)^2}te^{pt}\right)\Bigg|_{p=-i}=$$

$$\left(\frac{(2i)^2-2(2i)i}{(2i)^4}e^{it}+\frac{i}{(2i)^2}te^{it}\right)+\left(\frac{(-2i)^2-2(-2i)(-i)}{(-2i)^4}e^{-it}+\frac{-i}{(-2i)^2}te^{-it}\right)=$$

$$\left(\frac{-4+4}{(2i)^4}e^{it}+\frac{i}{-4}te^{it}\right)+\left(\frac{(-4)+4}{(-2i)^4}e^{-it}+\frac{-i}{-4}te^{-it}\right)=$$

$$-\frac{i}{4}te^{it}+\frac{i}{4}te^{-it}=\ \frac{1}{4i}te^{it}-\frac{1}{4i}te^{-it}=\ \frac{t}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\ =\ \frac{t}{2}\sin t\,.$$

Для 2-го: $\operatorname*{Res}\limits_{p=i} s\,\dfrac{(2p+1)e^{pt}}{(p+i)(p-i)}+\operatorname*{Res}\limits_{p=-i} s\,\dfrac{(2p+1)e^{pt}}{(p+i)(p-i)}\ =$

$$\frac{(2p+1)e^{pt}}{p+i}\Bigg|_{p=i}+\frac{(2p+1)e^{pt}}{p-i}\Bigg|_{p=-i}=\ \frac{(2i+1)e^{it}}{2i}+\frac{(-2i+1)e^{-it}}{-2i}\ =$$

$$\frac{2ie^{it}}{2i}+\frac{-2ie^{-it}}{-2i}+\frac{e^{it}}{2i}+\frac{e^{-it}}{-2i}\ =\ 2\left(\frac{e^{it}}{2}+\frac{e^{-it}}{2}\right)+\left(\frac{e^{it}}{2i}-\frac{e^{-it}}{2i}\right)\ =\ 2\cos t+\sin t\,.$$

Ответ. $x(t)=2\cos t+\sin t+\dfrac{t}{2}\sin t\,.$

Задача 71. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $x''+2x'+2x=10e^{2t}$ с условиями Коши $x(0)=0\,, x'(0)=0\,.$

Решение. Преобразуем левую и правую часть.

$$p\big(pX(p)-x(0)\big)-x'(0)+2\big(pX(p)-x(0)\big)+2X(p)=\frac{10}{p-2}\ \Rightarrow$$

$$\left(p^2+2p+2\right)X(p)=\frac{10}{p-2}\ \Rightarrow X(p)=\frac{10}{\left(p^2+2p+2\right)(p-2)}\ .$$

Первый множитель знаменателя не имеет действительных корней.

$D=4-8=-4$, корни $p=\dfrac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

$$X(p)=\frac{10}{(p-(-1+i))(p-(-1-i))(p-2)}$$

Найдём обратное преобразование с помощью суммы вычетов.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{10e^{pt}}{\left(p^2+2p+2\right)(p-2)}=$$

$$\left.\frac{10e^{pt}}{p^2+2p+2}\right|_{p=2}+\left.\frac{10e^{pt}}{(p-(-1-i))(p-2)}\right|_{p=-1+i}+\left.\frac{10e^{pt}}{(p-(-1+i))(p-2)}\right|_{p=-1-i}=$$

$$\frac{10e^{2t}}{10}+\frac{10e^{-t}e^{it}}{2i(-3+i)}+\frac{10e^{-t}e^{-it}}{(-2i)(-3-i)}=$$

$$e^{2t}+\frac{(-3-i)10e^{-t}e^{it}}{2i(-3-i)(-3+i)}-\frac{(-3+i)10e^{-t}e^{-it}}{2i(-3-i)(-3+i)}=$$

$$e^{2t}+\frac{(-3-i)10e^{-t}e^{it}}{2i\cdot 10}-\frac{(-3+i)10e^{-t}e^{-it}}{2i\cdot 10}=$$

$$e^{2t}+e^{-t}\left(\frac{-3e^{it}}{2i}-\frac{-3e^{-it}}{2i}+\frac{-ie^{it}}{2i}-\frac{ie^{-it}}{2i}\right)=$$

$$e^{2t}+e^{-t}\left(-3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)=e^{2t}-e^{-t}\left(3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)=$$

$e^{2t}-e^{-t}\left(3\sin t+\cos t\right)$. **Ответ.** $e^{2t}-e^{-t}\left(3\sin t+\cos t\right)$.

Задача 72. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3 порядка $x''' - x'' = e^t$ с условиями Коши $x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0$.

Решение. Так как условия Коши нулевые, то сразу запишем

$$\left(p^3 - p^2\right)X(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow X(p) = \frac{1}{(p^3 - p^2)(p-1)} = \frac{1}{p^2(p-1)^2}.$$

Обратное преобразование: $\sum \operatorname{Res} \frac{e^{pt}}{p^2(p-1)^2} =$

$$\left.\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right)'\right|_{p=0} + \left.\left(\frac{e^{pt}}{p^2}\right)'\right|_{p=1} =$$

$$\left.\frac{te^{pt}(p-1)^2 - 2(p-1)e^{pt}}{(p-1)^4}\right|_{p=0} + \left.\frac{te^{pt}p^2 - 2pe^{pt}}{p^4}\right|_{p=1} = \frac{t-2(-1)}{1} + \frac{te^t - 2e^t}{1}$$

$= t + 2 + te^t - 2e^t$. **Ответ.** $x(t) = t + 2 + te^t - 2e^t$.

Задача 73. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $x'' + x = e^{-3t}$ с условиями Коши $x(0) = 3, x'(0) = -1$.

Решение. $p\left(pX(p) - x(0)\right) - x'(0) + X(p) = \dfrac{1}{p+3} \Rightarrow$

$$p\left(pX(p) - 3\right) + 1 + X(p) = \frac{1}{p+3} \Rightarrow \left(p^2 + 1\right)X(p) - 3p + 1 = \frac{1}{p+3} \Rightarrow$$

$$\left(p^2+1\right)X(p)=\frac{1}{p+3}+3p-1 \Rightarrow X(p)=\frac{1}{(p+3)(p^2+1)}+\frac{3p-1}{p^2+1}\ .$$

Обратное преобразование можно найти для каждого слагаемого по отдельности, и затем сложить результаты.

Для 1-го: $\sum \operatorname{Re} s \dfrac{e^{pt}}{(p+3)(p+i)(p-i)}=$

$$\left.\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right|_{p=-3}+\left.\frac{e^{pt}}{(p+3)(p+i)}\right|_{p=i}+\left.\frac{e^{pt}}{(p+3)(p-i)}\right|_{p=-i}=$$

$$\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{e^{it}}{(3+i)2i}+\frac{e^{-it}}{(3-i)(-2i)}=$$

$$\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{(3-i)e^{it}}{(3+i)(3-i)2i}-\frac{(3+i)e^{-it}}{(3+i)(3-i)2i}=\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{(3-i)e^{it}}{10\cdot 2i}-\frac{(3+i)e^{-it}}{10\cdot 2i}=$$

$$\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{3e^{it}}{10\cdot 2i}-\frac{3e^{-it}}{10\cdot 2i}+\frac{-ie^{it}}{10\cdot 2i}-\frac{ie^{-it}}{10\cdot 2i}=\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{3}{10}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}-\frac{1}{10}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

$$=\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{3}{10}\sin t-\frac{1}{10}\cos t\ .$$

Для 2-го: $\sum \operatorname{Re} s \dfrac{(3p-1)e^{pt}}{(p+i)(p-i)}=\left.\dfrac{(3p-1)e^{pt}}{p+i}\right|_{p=i}+\left.\dfrac{(3p-1)e^{pt}}{p-i}\right|_{p=-i}=$

$$\frac{(-1+3i)e^{it}}{2i}+\frac{(-1-3i)e^{-it}}{-2i}=\frac{-e^{it}}{2i}+\frac{-e^{-it}}{-2i}+\frac{3ie^{it}}{2i}+\frac{-3ie^{-it}}{-2i}=$$

$$-\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}+3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=-\sin t+3\cos t\ .$$

В сумме, $\frac{e^{-3t}}{10}+\frac{3}{10}\sin t-\frac{1}{10}\cos t-\sin t+3\cos t=$

$\frac{1}{10}e^{-3t}-\frac{7}{10}\sin t+\frac{29}{10}\cos t$.

Ответ. $x(t)=\frac{1}{10}e^{-3t}-\frac{7}{10}\sin t+\frac{29}{10}\cos t$.

Задача 74. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y''-10y'+9y=0$ с условиями Коши $y(0)=-1, y'(0)=7$.

Решение. Найдём преобразование Лапласа левой и правой части.

$$p(pY(p)-y(0))-y'(0)-10(pY(p)-y(0))+9Y(p)=0 \Rightarrow$$

$$p(pY(p)+1)-7-10(pY(p)+1)+9Y(p)=0 \Rightarrow$$

$$\left(p^2-10p+9\right)Y(p)+p-7-10=0 \Rightarrow \left(p^2-10p+9\right)Y(p)=17-p \Rightarrow$$

$Y(p)=\frac{17-p}{p^2-10p+9}=\frac{17-p}{(p-1)(p-9)}$. Обратное преобразование:

$\sum \operatorname{Res} \frac{(17-p)e^{pt}}{(p-1)(p-9)}$ это суммы вычетов в полюсах $p=1$ и $p=9$.

$$\left.\frac{(17-p)e^{pt}}{p-9}\right|_{p=1}+\left.\frac{(17-p)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=9}=\frac{16e^{pt}}{-8}+\frac{8e^{pt}}{8}=-2e^t+e^{9t}.$$

Ответ. $y=e^{9t}-2e^t$.

Задача 75. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ с условиями Коши $y(0) = 4, y'(0) = 3, y''(0) = 5$.

Решение.

$$p\big(p(pY(p) - y(0)) - y'(0)\big) - y''(0) - 3\big(p(pY(p) - y(0)) - y'(0)\big) + 2(pY(p) - y(0)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p\big(p(pY(p) - 4) - 3\big) - 5 - 3\big(p(pY(p) - 4) - 3\big) + 2(pY(p) - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$(p^3 - 3p^2 + 2p)Y(p) - 4p^2 - 3p - 5 + 12p + 9 - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$(p^3 - 3p^2 + 2p)Y(p) = 4p^2 - 9p + 4 \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{4p^2 - 9p + 4}{p^3 - 3p^2 + 2p} = \frac{4p^2 - 9p + 4}{p(p^2 - 3p + 2)} = \frac{4p^2 - 9p + 4}{p(p-1)(p-2)} \Rightarrow$$

обратное преобразование: $\sum \operatorname{Re} s \dfrac{(4p^2 - 9p + 4)e^{pt}}{p(p-1)(p-2)} =$

$$\left.\frac{(4p^2 - 9p + 4)e^{pt}}{(p-1)(p-2)}\right|_{p=0} + \left.\frac{(4p^2 - 9p + 4)e^{pt}}{p(p-2)}\right|_{p=1} + \left.\frac{(4p^2 - 9p + 4)e^{pt}}{p(p-1)}\right|_{p=2} =$$

$$\frac{4}{(-1)(-2)} + \frac{4 - 9 + 4}{1(-1)}e^t + \frac{16 - 18 + 4}{2}e^{2t} = 2 + e^t + e^{2t}.$$

Ответ. $y = 2 + e^t + e^{2t}$.

Задача 76. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 9y = 0$ с условиями Коши $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Решение. $p(pY(p) - y(0)) - y'(0) - 9Y(p) = 0 \Rightarrow$

$p(pY(p)-2)-9Y(p)=0 \Rightarrow (p^2-9)Y(p)=2p \Rightarrow$

$Y(p)=\dfrac{2p}{(p+3)(p-3)}$. Обратное преобразование:

$$\sum \operatorname{Re}s\frac{2pe^{pt}}{(p+3)(p-3)} = \left.\frac{2pe^{pt}}{p+3}\right|_{p=3} + \left.\frac{2pe^{pt}}{p-3}\right|_{p=-3} = \frac{6e^{3t}}{6}+\frac{-6e^{pt}}{-6} =$$

$e^{3t}+e^{-3t}$. **Ответ.** $y=e^{3t}+e^{-3t}$.

Задача 76-Б. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y''-9y=e^t$ с условиями Коши $y(0)=0, y'(0)=0$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь есть функция в правой части, но нулевые условия Коши. Посмотрим, как это отразится на решении. $p(pY(p)-y(0))-y'(0)-9Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \Rightarrow$

$$(p^2-9)Y(p)=\frac{1}{p-1} \Rightarrow \quad Y(p)=\frac{1}{(p-1)(p+3)(p-3)} \Rightarrow$$

$$\sum \operatorname{Re}s\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+3)(p-3)} =$$

$$\left.\frac{e^{pt}}{p^2-9}\right|_{p=1} + \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+3)}\right|_{p=3} + \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)(p-3)}\right|_{p=-3} =$$

$$\frac{e^t}{-8}+\frac{e^{3t}}{2\cdot 6}+\frac{e^{-3t}}{(-4)(-6)} = -\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{12}e^{3t}+\frac{1}{24}e^{-3t}.$$

Ответ. $y=-\dfrac{1}{8}e^t+\dfrac{1}{12}e^{3t}+\dfrac{1}{24}e^{-3t}$.

Задача 77. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$ с условиями Коши $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

Решение. $p(pY(p) - y(0)) - y'(0) - 2(pY(p) - y(0)) + Y(p) = 0 \Rightarrow$

$p(pY(p) - 2) + 1 - 2(pY(p) - 2) + Y(p) = 0 \Rightarrow$

$(p^2 - 2p + 1)Y(p) - 2p + 1 + 4 = 0 \Rightarrow$

$$(p^2 - 2p + 1)Y(p) = 2p - 5 \Rightarrow Y(p) = \frac{2p-5}{p^2 - 2p + 1} = \frac{2p-5}{(p-1)^2}.$$

Здесь всего один полюс, но он 2-го порядка.

$\operatorname*{Res}_{p=1} \dfrac{(2p-5)e^{pt}}{(p-1)^2} = \left.\left((2p-5)e^{pt}\right)'\right|_{p=1}$ (причём производная подразумевается по переменной p).

$$\left.\left(2e^{pt} + (2p-5)te^{pt}\right)\right|_{p=1} = 2e^t - 3te^t.$$

Ответ. $y = 2e^t - 3te^t$.

Задача 78. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 4y = e^{3t}$ с условиями Коши $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение. $p(pY(p) - y(0)) - y'(0) - 5(pY(p) - y(0)) + 4Y(p) = \dfrac{1}{p-3}$

$$\Rightarrow p(pY(p) - 1) - 2 - 5(pY(p) - 1) + 4Y(p) = \frac{1}{p-3} \Rightarrow$$

$$(p^2 - 5p + 4)Y(p) - p - 2 + 5 = \frac{1}{p-3} \Rightarrow$$

$$(p^2-5p+4)Y(p)=\frac{1}{p-3}+p-3\ \Rightarrow$$

$Y(p)=\dfrac{1}{(p-3)(p^2-5p+4)}+\dfrac{p-3}{(p^2-5p+4)}$. Дальше можно сделать разными способами: как найти обратное преобразование для каждого слагаемого отдельно, так и объединить их сначала в одну дробь.

$$Y(p)=\frac{1+(p-3)^2}{(p-3)(p^2-5p+4)}=\frac{p^2-6p+10}{(p-3)(p-1)(p-4)}.$$

$$\sum \operatorname{Re}s\,\frac{(p^2-6p+10)e^{pt}}{(p-3)(p-1)(p-4)}=$$

$$\left.\frac{(p^2-6p+10)e^{pt}}{(p-1)(p-4)}\right|_{p=3}+\left.\frac{(p^2-6p+10)e^{pt}}{(p-3)(p-4)}\right|_{p=1}+\left.\frac{(p^2-6p+10)e^{pt}}{(p-3)(p-1)}\right|_{p=4}=$$

$$\frac{(9-18+10)e^{3t}}{2(-1)}+\frac{(1-6+10)e^{t}}{(-2)(-3)}+\frac{(16-24+10)e^{4t}}{3}=-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{5}{6}e^{t}+\frac{2}{3}e^{4t}.$$

Ответ. $y(t)=-\dfrac{1}{2}e^{3t}+\dfrac{5}{6}e^{t}+\dfrac{2}{3}e^{4t}$.

Задача 79. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$ с помощью преобразования Лапласа.

Решение. До сих пор мы находили методом преобразования Лапласа только частное решение. Логично поставить вопрос: а можно ли найти общее решение? Чтобы найти общее решение, зададим не конкретные числа, а произвольные параметры для условий Коши: $y(0) = a, y'(0) = b$.

После преобразования правой и левой части:

$$p(pY(p) - y(0)) - y'(0) - Y(p) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p(pY(p) - a) - b - Y(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p^2 - 1)Y(p) - pa - b = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(p^2 - 1)Y(p) = pa + b \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{pa + b}{p^2 - 1} = \frac{pa + b}{(p+1)(p-1)}.$$

Ищем обратное преобразование Лапласа.

$$\sum \operatorname{Res} \frac{(pa+b)e^{pt}}{(p+1)(p-1)} = \left.\frac{(pa+b)e^{pt}}{p+1}\right|_{p=1} + \left.\frac{(pa+b)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=-1} =$$

$$\frac{(a+b)e^t}{2} + \frac{(-a+b)e^{-t}}{-2} = \frac{a+b}{2}e^t + \frac{a-b}{2}e^{-t}$$, что можно записать в виде

$$C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \text{где } \frac{a+b}{2} = C_1, \ \frac{a-b}{2} = C_2.$$

Ответ. $C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Задача 80. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -6x + 4y \end{cases}, \text{ условия Коши: } \begin{pmatrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Преобразуем левую и правую часть.

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) + Y(p) \\ pY(p) - y(0) = -6X(p) + 4Y(p) \end{cases}$$

учитывая условия Коши, $\begin{cases} pX(p)-2=-X(p)+Y(p) \\ pY(p)-5=-6X(p)+4Y(p) \end{cases}.$

От системы дифференциальных уравнений мы перешли к системе алгебраических уравнений.

Из 1-го выразим $Y(p)$ через $X(p)$:

$Y(p)=pX(p)-2+X(p) = Y(p)=(p+1)X(p)-2$,

и подставим во 2-е:

$$p\big((p+1)X(p)-2\big)-5=-6X(p)+4\big((p+1)X(p)-2\big)$$

Приведём подобные,

$$(p^2+p)X(p)-2p-5=-6X(p)+(4p+4)X(p)-8 \Rightarrow$$

$$(p^2+p)X(p)+6X(p)-(4p+4)X(p)=2p-3 \Rightarrow$$

$$(p^2-3p+2)X(p)=2p-3 \Rightarrow X(p)=\frac{2p-3}{p^2-3p+2} = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)}.$$

Теперь вспомним о том, что $Y(p)=(p+1)X(p)-2$, и выразим $Y(p)$.

$$Y(p)=\frac{(p+1)(2p-3)}{(p-1)(p-2)}-2 = \frac{(p+1)(2p-3)}{(p-1)(p-2)}-\frac{2(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)}=$$

$$\frac{(2p^2-p-3)-2(p^2-3p+2)}{(p-1)(p-2)} = \frac{5p-7}{(p-1)(p-2)}.$$

Итак, $X(p)=\dfrac{2p-3}{(p-1)(p-2)}$, $Y(p)=\dfrac{5p-7}{(p-1)(p-2)}$.

Теперь наддём их обратные преобразования Лапласа.

$$x(t)=\sum \operatorname{Re} s\frac{(2p-3)e^{pt}}{(p-1)(p-2)} = \left.\frac{(2p-3)e^{pt}}{p-2}\right|_{p=1} + \left.\frac{(2p-3)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=2} =$$

$$\frac{(-1)e^t}{-1}+\frac{1e^{2t}}{1} = e^t+e^{2t}.$$

$$y(t)=\sum \operatorname{Re}s\frac{(5p-7)e^{pt}}{(p-1)(p-2)} = \left.\frac{(5p-7)e^{pt}}{p-2}\right|_{p=1}+\left.\frac{(5p-7)e^{pt}}{p-1}\right|_{p=2} =$$

$$\frac{(-2)e^t}{-1}+\frac{3e^{2t}}{1} = 2e^t+3e^{2t}.$$

$x(t)=e^t+e^{2t}$, $y(t)=2e^t+3e^{2t}$, что можно записать также в векторной форме: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{2t}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{2t}$.

3.3. Решение интегральных уравнений уравнений с помощью преобразования Лапласа.

Вспомним определение свёртки: $f*g=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$,

и её основное свойство: $L(f*g)=F(p)G(p)$.

Задача 81. Найти свёртку $t*e^t$.

Решение. Существует 2 способа: 1) по определению 2) с помощью основногосвойства, т.е. через обратное преобразование Лапласа. Сравним применение обоих способов.

Способ 1. $\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau = t\int_0^t e^{\tau}d\tau - \int_0^t \tau\ e^{\tau}d\tau$, во 2-м применим интегрирование по частям.

$u=\tau$	$v=e^{\tau}$
$u'=1$	$v'=e^{\tau}$

$$t\cdot e^{\tau}\Big|_0^t - \left(\tau\ e^{\tau}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau}d\tau\right) = t\cdot e^{\tau}\Big|_0^t - \left(\tau\ e^{\tau}\Big|_0^t - e^{\tau}\Big|_0^t\right) =$$

$$t\cdot e^t - t - \left((t\cdot e^t - 0) - (e^t - 1)\right) = -t - \left(-e^t + 1\right) = e^t - t - 1.$$

Способ 2. $L(t * e^t) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{p-1}$, затем найдём обратное преобразование Лапласа. $\sum \mathrm{Re}\,s \frac{e^{pt}}{p^2(p-1)} = \left.\frac{e^{pt}}{p^2}\right|_{p=1} + \left.\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)'\right|_{p=0} =$

$$e^t + \left.\frac{te^{pt}(p-1) - e^{pt}}{(p-1)^2}\right|_{p=0} = e^t + \frac{-t-1}{(-1)^2} = e^t - t - 1.$$

Ответ. $t * e^t = e^t - t - 1$.

Задача 82. Найти свёртку $\sin t * \cos t$.

Решение. Способ 1. $\int_0^t \sin(t-\tau)\cos(\tau)d\tau =$

$$\int_0^t \left(\sin(t)\cos(\tau) - \cos(t)\sin(\tau)\right)\cos(\tau)d\tau =$$

$$\sin(t)\int_0^t \cos^2(\tau)d\tau - \cos(t)\int_0^t \sin(\tau)\cos(\tau)d\tau \; .$$

В 1-м применим формулу понижения степени, во 2-м подведение под знак дифференциала.

$$\sin(t)\int_0^t \frac{1+\cos(2\tau)}{2}d\tau - \cos(t)\int_0^t \sin(\tau)d(\sin(\tau)) =$$

$$\sin(t)\left(\frac{\tau}{2}\bigg|_0^t + \frac{\sin(2\tau)}{4}\bigg|_0^t\right) - \cos(t)\frac{\sin^2(\tau)}{2}\bigg|_0^t =$$

$$\frac{t}{2}\sin t + \sin t\frac{\sin(2t)}{4} - \cos(t)\frac{\sin^2(t)}{2} =$$

$\frac{t}{2}\sin t + \sin t\frac{2\sin t\cos t}{4} - \cos t\frac{\sin t\sin t}{2}$, можно заметить, что 2 последних слагаемых сокращаются, и ответ $\frac{t}{2}\sin t$.

Способ 2. $L(\sin t * \cos t) = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$.

Далее ищем обратное преобразование Лапласа.

$\sum \operatorname{Re}s\frac{pe^{pt}}{(p^2+1)^2} = \sum \operatorname{Re}s\frac{pe^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2}$ (2 полюса 2-го порядка)

$$\left(\frac{p}{(p+i)^2}e^{pt}\right)'\Bigg|_{p=i} + \left(\frac{p}{(p-i)^2}e^{pt}\right)'\Bigg|_{p=-i} =$$

$$\left(\frac{(p+i)^2 - 2(p+i)p}{(p+i)^4}e^{pt} + \frac{p}{(p+i)^2}te^{pt}\right)\Bigg|_{p=i} +$$

$$\left(\frac{(p-i)^2-2(p-i)p}{(p-i)^4}e^{pt}+\frac{p}{(p-i)^2}te^{pt}\right)\Bigg|_{p=-i} =$$

$$\left(\frac{(2i)^2-2(2i)i}{(2i)^4}e^{it}+\frac{i}{(2i)^2}te^{it}\right)+\left(\frac{(-2i)^2-2(-2i)(-i)}{(-2i)^4}e^{-it}+\frac{-i}{(-2i)^2}te^{-it}\right)=$$

$$\left(\frac{-4+4}{16}e^{it}+\frac{i}{-4}te^{it}\right)+\left(\frac{-4+4}{16}e^{-it}+\frac{-i}{-4}te^{-it}\right)=$$

$$\left(0+\frac{i}{-4}te^{it}\right)+\left(0+\frac{i}{4}te^{-it}\right)= \quad \frac{1}{4i}te^{it}-\frac{1}{4i}te^{-it}= \quad \frac{t}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = \frac{t}{2}\sin t\,.$$

Ответ. $\sin t * \cos t = \dfrac{t}{2}\sin t$.

Задача 83. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=e^t+\int_0^t \sin(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\,.$$

Решение. Заметим, что в интеграле одна функция зависит от τ, другая от $t-\tau$. То есть, это свёртка двух оригиналов. Тогда преобразование Лапласа переводит его в произведение, а само интегральное уравнение становится алгебраическим,а не интегральным. Преобразуем левую и правую часть:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2+1}\Phi(p) \quad \Rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{p^2+1}\right)\Phi(p)=\frac{1}{p-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{p^2+1}\Phi(p)=\frac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p-1)},$$ далее ищем обратное преобразование Лапласа.

$$\varphi(t)=\sum \operatorname{Res}\frac{(p^2+1)e^{pt}}{p^2(p-1)} = \left.\frac{(p^2+1)e^{pt}}{p^2}\right|_{p=1} + \left.\left(\frac{p^2+1}{p-1}e^{pt}\right)'\right|_{p=0} =$$

$$2e^t + \left.\left(\frac{2p(p-1)-(p^2+1)}{(p-1)^2}e^{pt}+\frac{p^2+1}{p-1}te^{pt}\right)\right|_{p=0} =$$

$$2e^t + \left(\frac{0-1}{1}e^0+\frac{1}{-1}te^0\right) = 2e^t + \left(-1-t\right) = 2e^t - t - 1.$$

Ответ. $\varphi(t)=2e^t-t-1$.

Задача 84. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\cos t+\int_0^t \sin(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$$

Решение. Преобразуем левую и правую часть.

$$\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\Phi(p) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{p^2+1}\right)\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{p^2+1}\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow p^2\Phi(p)=p \Rightarrow$$

$\Phi(p)=\dfrac{1}{p}$, обратное преобразование: $\operatorname*{Res}_{p=0}\dfrac{e^{pt}}{p} = \left.e^{pt}\right|_{p=0} = e^0 = 1.$

Ответ. $\varphi(t)\equiv 1$.

Примечание. Проверка. $1=\cos t+\int\limits_0^t \sin(\tau)d\tau \iff 1=\cos t-\cos(\tau)\Big|_0^t \iff$

$1=\cos t-(\cos t-1) \iff 1 = 1.$

Задача 85. Решить интегральное уравнение $\varphi(t)=t+\int\limits_0^t e^{\tau}\cdot\varphi(t-\tau)d\tau$.

Решение. Преобразуем левую и правую часть.

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p-1}\Phi(p) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\Phi(p)=\frac{1}{p^2} \Rightarrow$$

$\frac{p-2}{p-1}\Phi(p)=\frac{1}{p^2} \Rightarrow \Phi(p)=\frac{p-1}{p^2(p-2)}$, далее обратное

преобразование Лапласа, $\sum \operatorname{Re} s\,\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2(p-2)} =$

$$\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2}\right|_{p=2}+\left.\left(\frac{p-1}{p-2}e^{pt}\right)'\right|_{p=0} =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}+\left.\left(\frac{(p-2)-(p-1)}{(p-2)^2}e^{pt}+\frac{p-1}{p-2}te^{pt}\right)\right|_{p=0} = \frac{e^{2t}}{4}+\left.\left(\frac{-1}{(p-2)^2}+\frac{-1}{-2}t\right)\right|_{p=0}$$

$$= \frac{e^{2t}}{4}+\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}t\right) = \frac{e^{2t}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}.$$

Ответ. $\varphi(t)=\frac{e^{2t}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}$.

Задача 86. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \sin t - \int_0^t \tau \cdot \varphi(t-\tau)d\tau .$$

Решение. После преобразования Лапласа левой и правой части, получается: $\Phi(p) = \dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{1}{p^2}\Phi(p)$, далее переносим в левую часть всё, что содержит функцию $\Phi(p)$ $\Rightarrow$ $\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)\Phi(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ $\Rightarrow$

$$\frac{p^2+1}{p^2}\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \;\Rightarrow\; \Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Теперь ищем обратное преобразование Лапласа.

$$\sum \operatorname{Re} s \frac{p^2 e^{pt}}{(p^2+1)^2} = \sum \operatorname{Re} s \frac{p^2 e^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2} \quad \text{(оба полюса 2 порядка)}$$

$$\left.\left(\frac{p^2}{(p+i)^2}e^{pt}\right)'\right|_{p=i} + \left.\left(\frac{p^2}{(p-i)^2}e^{pt}\right)'\right|_{p=-i} =$$

$$\left.\left(\frac{2p(p+i)^2 - 2(p+i)p^2}{(p+i)^4}e^{pt} + \frac{p^2}{(p+i)^2}te^{pt}\right)\right|_{p=i} +$$

$$\left.\left(\frac{2p(p-i)^2 - 2(p-i)p^2}{(p-i)^4}e^{pt} + \frac{p^2}{(p-i)^2}te^{pt}\right)\right|_{p=-i} =$$

$$\left(\frac{2i(-4)-2(2i)(-1)}{16}e^{it}+\frac{-1}{-4}te^{it}\right)+$$

$$\left(\frac{2(-i)(-4)-2(-2i)(-1)}{16}e^{-it}+\frac{-1}{-4}te^{-it}\right)=$$

$$\left(\frac{-8i+4i}{16}e^{it}+\frac{1}{4}te^{it}\right)+\left(\frac{8i-4i}{16}e^{-it}+\frac{1}{4}te^{-it}\right)=$$

$$\frac{-i}{4}e^{it}+\frac{i}{4}e^{-it}+\frac{te^{it}+te^{-it}}{4}=\frac{1}{4i}e^{it}-\frac{1}{4i}e^{-it}+\frac{t}{2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}+\frac{t}{2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{2}\sin t+\frac{t}{2}\cos t\,.$$

Ответ. $\varphi(t)=\frac{1}{2}\sin t+\frac{t}{2}\cos t$.

Задача 87. Решить интегральное уравнение $\varphi(t)=1+\int\limits_0^t \tau\cdot\varphi(t-\tau)d\tau$.

Решение. $\Phi(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\Phi(p)\;\Rightarrow\;\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\Phi(p)=\frac{1}{p}\;\Rightarrow$

$\frac{p^2-1}{p^2}\Phi(p)=\frac{1}{p}\;\Rightarrow\;\Phi(p)=\frac{p}{p^2-1}$, обратное преобразование:

$$\sum \operatorname{Res}\frac{pe^{pt}}{(p+1)(p-1)}=\left.\frac{pe^{pt}}{p+1}\right|_{p=1}+\left.\frac{pe^{pt}}{p-1}\right|_{p=-1}=\frac{e^t}{2}+\frac{-1e^{-t}}{-2}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,.$$

Ответ. $\varphi(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=ch(t)$.

Задача 88. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^t - \int\limits_0^t sh(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau .$$

Решение. $\Phi(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p^2-1}\Phi(p) \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{p^2-1}\right)\Phi(p) = \dfrac{1}{p-1} \Rightarrow$

$$\frac{p^2}{p^2-1}\Phi(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{p^2-1}{p^2(p-1)} = \frac{p+1}{p^2}.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{(p+1)e^{pt}}{p^2} = \left((p+1)e^{pt}\right)'\Big|_{p=0} = \left(e^{pt} + (p+1)te^{pt}\right)\Big|_{p=0} =$$

$$e^0 + te^0 = 1+t.$$

Ответ. $\varphi(t) = 1+t$.

Задача 89. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^{2t} + \int\limits_0^t e^{3\tau}\varphi(t-\tau)d\tau .$$

Решение. $\Phi(p) = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{1}{p-3}\Phi(p) \Rightarrow \left(1-\dfrac{1}{p-3}\right)\Phi(p) = \dfrac{1}{p-2} \Rightarrow$

$$\frac{p-4}{p-3}\Phi(p) = \frac{1}{p-2} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{p-3}{(p-2)(p-4)}.$$

$$\sum \operatorname{Res} \frac{(p-3)e^{pt}}{(p-2)(p-4)} = \frac{(p-3)e^{pt}}{p-4}\Bigg|_{p=2} + \frac{(p-3)e^{pt}}{p-2}\Bigg|_{p=4} =$$

$$\frac{(-1)e^{2t}}{-2}+\frac{1e^{4t}}{2} = \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{4t}.$$

Ответ. $\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{4t}$.

Задача 90. Решить интегральное уравнение $\varphi(t)=t^2+\int\limits_0^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Решение. $\Phi(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}\Phi(p) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\Phi(p)=\frac{2}{p^3} \Rightarrow$

$$\frac{p^2-1}{p^2}\Phi(p)=\frac{2}{p^3} \Rightarrow \Phi(p)=\frac{2p^2}{p^3(p^2-1)} = \frac{2}{p(p^2-1)}.$$

$$\sum \operatorname{Re} s\frac{2e^{pt}}{p(p+1)(p-1)} = \left.\frac{2e^{pt}}{p^2-1}\right|_{p=0}+\left.\frac{2e^{pt}}{p(p+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{2e^{pt}}{p(p-1)}\right|_{p=-1} =$$

$$\frac{2}{-1}+\frac{2e^t}{2}+\frac{2e^{-t}}{(-1)(-2)} = -2+e^t+e^{-t}.$$

Ответ. $\varphi(t) = -2+e^t+e^{-t}$.

Литература

1. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258

2. А.П.Ерохина, Л.Н. Байбакова. Высшая математика III в упражнениях с задачами и решениями.