Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика
Курс практических занятий
Семестр 3
Учебное пособие

для специальности
09.03.01 « информатика и вычислительная техника»

Томск
ТУСУР
2019

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группах 437-1,2,3 осенью 2018 года. Даны с подробным разбором задачи, которые решались на каждом практическим занятии. Пособие может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий. Применяется сквозная нумерация задач по всему семестру.

.

Оглавление

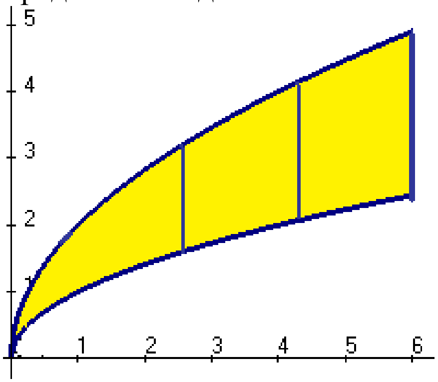
Таблица соответствия дат и задач

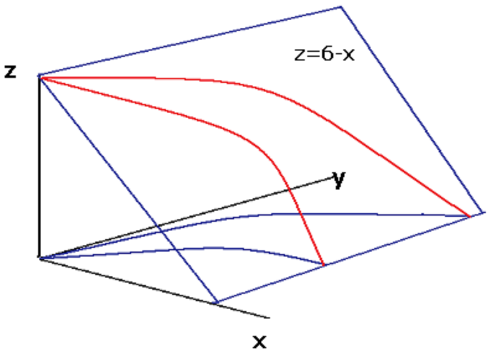
	437-1		437-2		437-3	
	дата	задачи	дата	задачи	дата	задачи
Практика 1	6.09	1 - 6	3.09	1 - 5	3.09	1 - 5
Практика 2	13.09	7 - 12	10.09	6 - 12	10.09	6 - 12
Практика 3	20.09	13 - 18	17.09	13 - 17	17.09	13 - 17
Практика 4	27.09	19 - 23	24.09	18 - 25	24.09	18 - 25
Практика 5	4.10	24 - 40	1.10	26 - 40	1.10	26 - 40
Практика 6	11.10	41 - 52	8.10	41 - 52	8.10	41 - 52
Практика 7	18.10	53 - 62	15.10	53 - 62	15.10	53 - 62
Практика 8	25.10	63 - 68	22.10	63 - 68	22.10	63 - 68
Практика 9	29.10	69 - 73	29.10	69 - 73	29.10	69 - 73
Практика 10	12.11	74 - 89	12.11	74 - 89	12.11	74 - 89
Практика 11	19.11	90 - 97	19.22	90 - 97	19.22	90 - 97
Практика 12	26.11	98 - 104	26.22	98 - 104	26.22	98 - 104
Практика 13	3.12	105 - 109	3.12	105 - 109	3.12	105 - 109
Практика 14	10.12	110 - 115	10.12	110 - 115	10.12	110 - 115
Практика 15	17.12	116 - 118	17.12	116 - 118	17.12	116 - 118
Практика 16	24.12	контр.	24.12	контр.	24.12	контр.

Практика № 1.
Цилиндрические и сферические координаты

Задача 1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $\{y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, z=0, z=6-x\}$.

Решение. Построим плоский чертёж (вид сверху) рассматривая только те уравнения, которые не содержат z. Это позволит записать внешние интегралы по dx, dy. Третий, внутренний, который по z, в пределах от 0 до $6-x$.





$$V=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy\int_0^{6-x}dz=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy\left(z\Big|_0^{6-x}\right)=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=$$

$$\int_0^6 dx\left((6-x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\right)=\int_0^6(6-x)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)dx=\int_0^6(6-x)\sqrt{x}dx=$$

$$\int_0^6\left(6\sqrt{x}-\sqrt{x}^3\right)dx=\int_0^6\left(6x^{1/2}-x^{3/2}\right)dx=\left(6\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^6=$$

$$4\sqrt{6}^3-\frac{2}{5}\sqrt{6}^5=\left(4\sqrt{6}^2-\frac{2}{5}\sqrt{6}^4\right)\sqrt{6}=\left(24-\frac{2}{5}36\right)\sqrt{6}=\frac{120-72}{5}\sqrt{6}=$$

$\frac{48}{5}\sqrt{6}$. **Ответ.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}$.

Вспомним строение систем цилиндрических и сферических координат в пространстве и их определители Якоби.

Цилиндрические. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $I = \rho$.

Сферические. $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$. $I = \rho^2\sin\theta$.

Задача 2. Вычислить тройной интеграл с помощью сферических координат: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$

Решение. Чтобы перейти к новым координатам, рассмотрим, по какому трёхмерному телу ведётся интегрирование. Уравнение линии, которой достигает точка по y, имеет вид $y = \sqrt{1-x^2}$, что сводится к $x^2 + y^2 = 1$, то есть это окружность радиуса 1. Таким образом, при $x \in [0,1]$ движемся вверх по y до окружности, то есть основание фигуры это четверть круга. Теперь рассмотрим, до куда точка движется по z, в условии указано, что z от 0 до $\sqrt{1-x^2-y^2}$. Но уравнение $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ сводится к $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, т.е. это сфера радиуса 1. Таким образом, область интегрирования это 1/8 шара единичного радиуса в первом октанте, т.е. в той части пространства, где $x, y, z > 0$.

Пределы интегрирования таковы: $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\rho \in [0,1]$.
Пересчитаем подынтегральную функцию, чтобы выразить её через ρ, φ, θ. В данном случае видим корень из суммы квадратов всех координат, поэтому сразу можно заметить, что по теореме Пифагора $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$. Кроме того, умножим на определитель Якоби сферических координат, то есть $\rho^2\sin\theta$.

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\ \rho^2 \sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho^3 \sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

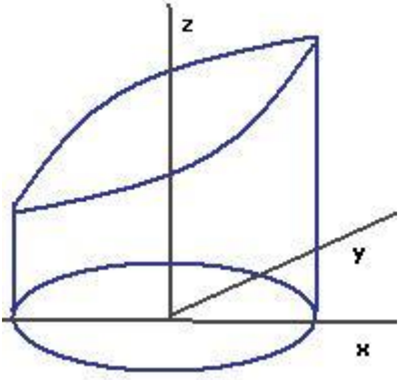
$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\sin\theta \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1\right)d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\ d\theta\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left((-\cos\theta\ )\Big|_0^{\pi/2}\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}1d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{8}$.

Задача 3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $\{x^2+y^2=1,\ \ z=0,\ \ z=x+2\}$.

Решение. Основание фигуры - круг радиуса 1.



Тогда диапазоны изменения двух переменных: $\varphi\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,1]$, т.е. интеграл будет иметь вид $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_?^? \rho\ dz$, где нам осталось выяснить только диапазон изменения высоты в зависимости от положения точки в основании. В интеграле учтены при этом определитель Якоби ρ и тождественная функция 1 (так как вычисляем объём). Далее, $z \in [0, x+2]$, однако при этом надо выразить x через ρ, φ, ведь во внешних интегралах зависимость именно от этих переменных. Тогда $z \in [0, 2 + \rho\cos\varphi]$.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{2+\rho\cos\varphi} \rho\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho\, z\Big|_0^{2+\rho\cos\varphi} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho(2+\rho\cos\varphi) \right) d\rho$$

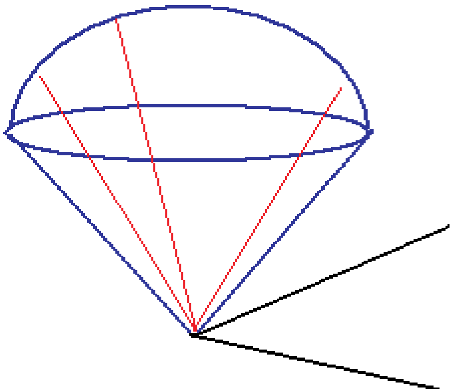
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho + \rho^2 \cos\varphi \right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 + \frac{1}{3}\rho^3 \cos\varphi \right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{3}\cos\varphi \right) d\varphi = \varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\sin\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = (2\pi - 0) + (0 - 0) = 2\pi .$$

Ответ. 2π.

Задача 4. Найти объём тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и сферой радиуса $\sqrt{2}$, с помощью цилиндрических координат.

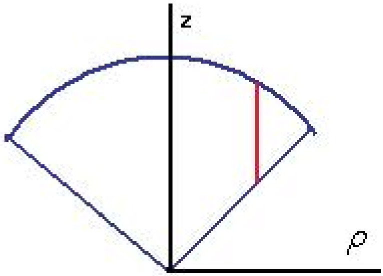
Решение. Чертёж:



Это тело вращения с осью Oz. Проекцией на горизонтальную плоскость является круг радиуса 1. Тогда диапазоны изменения двух переменных очевидно таковы (как было для круга в полярных координатах): $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0,1]$. Таким образом, нам остаётся только узнать диапазон изменения высоты в зависимости от расстояния до оси, то есть в зависимости от ρ.

Построим сечение вертикальной плоскостью (вид сбоку).

По горизонтали - условная ось ρ, так как тело вращения и поэтому неважно, в какую сторону двигаться от оси, диапазон изменения высот ведёт себя одинаково на одном и том же расстоянии от оси вне зависимости от угла φ.



Красным показана эта линия. Она проходит от прямой $z = \rho$ до окружности радиуса $\sqrt{2}$, которую можно задать в виде $z = \sqrt{2-\rho^2}$.

Таким образом, надо вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\rho\ z\Big|_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}\right)d\rho\right)d\varphi =$$

$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho\right)d\varphi$. Здесь далее можно рассматривать не как вложенные интегралы, а как произведение, т.к. интегрируя по ρ мы получим константу, и всё равно в итоге будет интеграл типа $\int\limits_0^{2\pi}Cd\varphi =$ $2\pi C$. Поэтому сразу запишем в виде $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho$, далее

$$2\pi\int_0^1 \rho\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho\right)d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho\left(\sqrt{2-\rho^2}\right)d\rho - 2\pi\int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$-\pi\int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2}\right)(-2\rho)d\rho - 2\pi\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\pi\int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2}\right)d(2-\rho^2) - \frac{2\pi}{3} =$$

$$-\pi\frac{2}{3}\sqrt{2-\rho^2}^{\,3}\Bigg|_0^1 - \frac{2\pi}{3} = -\pi\frac{2}{3}\left(1-\sqrt{2}^{\,3}\right) - \frac{2\pi}{3} = \pi\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) - \frac{2\pi}{3} =$$

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ. $\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 5. С помощью тройного интеграла вычислить объём 4-мерного шара, заданного уравнением $x^2+y^2+z^2+w^2 \le R^2$.

Решение. Выразим четвёртую координату через первые три: $w = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$. Область определения D явной функции - обычный 3-мерный шар радиуса R, а именно $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Для нахождения указанного объёма нужно вычислить интеграл: $\iiint\limits_D 2\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$ (аналогично тому, как для вычисления объёма трёхмерного шара вычисляли бы $\iint\limits_S 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, где S - круг радиуса R). Вычисление тройного интеграла по D может быть выполнено с использованием сферических координат в трёхмерном пространстве.

$$\iiint\limits_D 2\sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta \sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

Интграл по ρ вычисляется с помощью тригонометрической подстановки $\rho = R\sin t$. $2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{R} \rho^2 \sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho =$

$$2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t} \;\; R\cos t dt =$$

$$2\cdot 2\pi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} R^4 \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \;\; \cos t dt =$$

$$8\pi R^4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 8\pi R^4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$2\pi R^4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 2\pi R^4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt =$$

$$2\pi R^4 \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dt - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos 4t}{2} dt \right) = 2\pi R^4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 4t}{8} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2}\pi^2 R^4 .$$

Ответ. $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$.

Задача 6. Вычислить тройной интеграл по 1/8 части шара в 1-м октанте от функции $f(x,y,z) = xy^2$.

Решение. Строение части шара такое же как в задаче 2. А вот в функции надо будет выразить всё через ρ, φ, θ по формулам сферических координат.

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{1} (\rho\sin\theta\cos\varphi)(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 \rho^2 \sin\theta \, d\rho =$$

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^5 \sin^4\theta \sin^2\varphi \cos\varphi \; d\rho$$ далее, мы видим, что все множители зависят только от различных переменных, поэтому можно вынести их в соответствующий интеграл и считать не как вложенные действия, а как произведение.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi \; d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \; d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho$$. Здесь в первом интеграле - подведение под знак дифференциала, во втором двукратно применим формулу понижения степени, а в третьем всё очевидно, там только степенная функция.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \; d(\sin\varphi) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \cdot \frac{1}{6}\rho^6 \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)^2 d\theta \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{72}\int_0^{\pi/2} \left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$\frac{1}{72}\left(\theta\Big|_0^{\pi/2} - \sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\sin 4\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{72}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + 0\right) =$$

$$\frac{1}{72}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{288}.$$ **Ответ**. $\frac{3\pi}{288}$.

Практика № 2.
Криволинейные интегралы 1 рода
Задача 7. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода по окружности радиуса 1, на которой задана скалярная функция $F(x,y)=x^2$.
Физический смысл. Можно представить таким образом: на проволоку, выполненную в виде окружности, напыляют какие-то частицы (тогда плотность вполне может даже обращаться в 0 в некоторых точках, ведь это плотность не самой проволоки, а напылённого вещества).
Решение. Вспомним основные формулы из лекций, для параметрически или явно заданной кривой в плоскости.

(1) $$\int_L F\cdot dl=\int_a^b F(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

(2) $$\int_L F\cdot dl=\int_a^b F(x,f(x))\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Решим эту задачу двумя способами, и увидим, что бывают ситуации, когда оба способа вполне применимы и уровню по сложности почти одинаковы.
Способ 1. Зададим окружность параметрически и воспользуемся первой формулой. $\{x=\cos t, y=\sin t\}$ - параметрически заданное движение по окружности радиуса 1, где $t\in[0,2\pi]$.
При этом $\{x'=-\sin t, y'=\cos t\}$. $F(x,y)=x^2=\cos^2 t$.
Тогда $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$

$$\frac{1}{2}\left(t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\big((2\pi-0)+(0-0)\big) = \pi.$$

Способ 2. Зададим окружность явно и воспользуемся первой формулой. В данном случае $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, из-за симметрии фигуры можно вычислить для верхней полуокружности и удвоить.

$F(x,y)=x^2$, не зависит от y, поэтому в ней не нужно пересчитывать y через x. А в общем случае надо ещё и $F(x,y(x))$ - выразить только через x. При этом $x\in[-1{,}1]$.

$f(x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $2\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=$

$$2\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx =$$

$2\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Далее воспользуемся заменой (известной из 2-го семестра), с целью устранить корень. $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\,dt$, при этом, чтобы не появлялся знак модуля, лучше даже свести всё к 1-й четверти, для этого можно воспользоваться тем фактом, что функция чётная, и записать интеграл так: $2\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Если $x\in[0{,}1]$ то соответственно $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$$4\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = 4\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,dt = 4\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$4\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2\left(t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)\right) = \pi.$$

Ответ. π.

Задача 8. Вычислить массу проволоки, выполненной в виде графика $y=f(x)=\ln x$, плотность которой $F(x,y)=x^2$, где $x\in[1,\sqrt{2}]$.

Решение. Здесь кривая задана явно, так что надо решать по формуле $\int\limits_{L}F\cdot dl=\int\limits_{a}^{b}F(x,f(x))\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Очевидно, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{x^2+1}\ dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}\ 2xdx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}\ d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}^3\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Задача 9. Найти криволинейный интеграл 1-го рода по винтовой линии (спирали) в пространстве, заданной параметрически: $\{x=\cos t, y=\sin t, z=t\}$, рассматривая 1 виток, т.е. $t\in[0,2\pi]$, если скалярная функция $F(x,y,z)=2z-x^2-y^2$.

Решение. Нужно воспользоваться формулой для 3-мерного случая:

$$\int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Вычислим производные: $\{x'=-\sin t, y'=\cos t, z'=1\}$.

В функции F нужно все переменные полностью выразить через t.

Получаем: $\int_0^{2\pi}\left(2t-\cos^2 t-\sin^2 t\right)\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}\,dt =$

$$\int_0^{2\pi}\left(2t-1\right)\cdot\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left(t^2\Big|_0^{2\pi} - t\Big|_0^{2\pi}\right) = \sqrt{2}\left(4\pi^2-2\pi\right).$$

Ответ. $\sqrt{2}\left(4\pi^2-2\pi\right)$.

Поверхностные интегралы 1 рода

Формула из теории: $\int\limits_S F \cdot dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\,dxdy$.

Задача 10. Найти поверхностный интеграл 1-го рода от скалярной функции $F(x,y,z)=xyz$ по треугольнику с вершинами (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1).

Решение. Во-первых, нужно получить явное уравнение плоскости, в которой расположен треугольник. Пусть $z = kx+my+c$. Подставим точку (0,0,1), получим $c=1$.

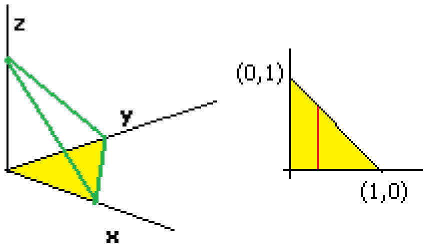
Подставим (1,0,0), получим $0=k+0+1$, откуда $k=-1$.

Подставим (0,1,0), получим $0=0+m+1$, откуда $m=-1$.

Итак, уравнение плоскости: $z = f(x,y)=1-x-y$.

Тогда $f_x' = -1$, $f_y' = -1$.

$\iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\,dxdy = \iint\limits_D xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy$, где D - проекция исходного треугольника на плоскость, т.е. треугольник с вершинами (0,0), (1,0) и (0,1) в плоскости, ограниченный сверху линией $y=1-x$.



Расстановка пределов в таком двойном интеграле была подробно изучена в прошлом семестре:

$$\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} xy(1-x-y)dy = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(x(1-x)y-xy^2\right)dy =$$

$$\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\left(x(1-x)\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} - x\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x}\right) =$$

$\sqrt{3}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x(1-x)^3\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1 x(1-x)^3\,dx$. Далее, чтобы уменьшить количество арифметических действий при раскрытии скобок, можно сделать замену

$t=1-x$, при этом получим $\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_1^0(1-t)t^3(-dt) = \frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1(1-t)t^3dt =$

$\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1\left(t^3-t^4\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{120}$.   **Ответ.** $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

Задача 10. Найти поверхностный интеграл 1-го рода от скалярной функции $F(x,y,z)=x-y+3z$ по полусфере радиуса 3 в верхней полуплоскости.

Решение. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=9$, тогда явное уравнение данной полусферы $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, соответственно

$$f'_x=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\,,\quad f'_y=\frac{-2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\,.$$

$$\iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dxdy =$$

$$\iint\limits_D\left(x-y+3\sqrt{9-x^2-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2-y^2}+\frac{y^2}{9-x^2-y^2}}\,dxdy =$$

$\iint\limits_D\left(x-y+3\sqrt{9-x^2-y^2}\right)\sqrt{\frac{9}{9-x^2-y^2}}\,dxdy$, где D - проекция этой полусферы на плоскость Oxy т.е. круг радиуса 3: $x^2+y^2\le 9$.

Разобьём на 2 слагаемых, причём во 2-м корни сокращаются:

$3\iint\limits_D \frac{x-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy+9\iint\limits_D dxdy$. В первом перейдём к полярным координатам, а во втором интеграл от 1, т.е. это просто площадь круга.

$$3\iint\limits_D \frac{x-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy+9\iint\limits_D dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho \frac{\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\sqrt{9-\rho^2}}d\rho+9\pi 3^2$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi\int\limits_0^3 \frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}}d\rho+81\pi =$$

$$= 3\left(\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right)\int\limits_0^3 \frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}}d\rho+81\pi = 0+81\pi = 81\pi .$$

интеграл по φ получается 0, поэтому в первом слагаемом интеграл по ρ вычислять уже не нужно.

Ответ. 81π.

Криволинейные интегралы 2 рода

Задача 12.

Найти работу векторного поля $\overline{F} = (x-z, y, y-z)$ по перемещению точки по винтовой линии (спирали), заданной уравнениями $\{x = a\cos t, y = a\sin t, z = t\}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Требуется вычислить такой интеграл:

$$\int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))\cdot x'(t)+Q(x(t), y(t), z(t))\cdot y'(t)+R(x(t), y(t), z(t))\cdot z'(t)\right)dt$$

или его краткий вид: $\int\limits_a^b P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz$.

Производные: $\{x' = -a\sin t, y' = a\cos t, z' = 1\}$.

Тогда

$$\int_0^{\pi/2}\big((a\cos t - t)\cdot(-a\sin t)+(a\sin t)\cdot(a\cos t)+(a\sin t - t)\big)dt =$$

Заметим, что $a^2\sin t\cos t$ присутствует со знаками + и –, сокращается.

$\int_0^{\pi/2}(at\sin t + a\sin t - t)dt = a\int_0^{\pi/2} t\sin tdt + a\int_0^{\pi/2}\sin tdt - \int_0^{\pi/2} tdt$, в первом из них применим интегрирование по частям: $u = t, v' = \sin t, u' = 1, v = -\cos t$.

$$a\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos tdt\right) - a\left(\cos t\Big|_0^{\pi/2}\right) - \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$a\left((0-0)+\sin t\Big|_0^{\pi/2}\right) - a(0-1) - \frac{\pi^2}{8} = a\big((0-0)+(1-0)\big)+a-\frac{\pi^2}{8} = 2a-\frac{\pi^2}{8}.$$

Ответ. $2a-\dfrac{\pi^2}{8}$.

Вариант этой задачи для $t\in[0,2\pi]$ (домашнее задание).

$$a\left(-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos tdt\right) - a\left(\cos t\Big|_0^{2\pi}\right) - \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= a\left(-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \sin t\Big|_0^{2\pi}\right) - a\left(\cos t\Big|_0^{2\pi}\right) - \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$a\big(-(2\pi-0)+(0-0)\big) - a(1-1) - \frac{4\pi^2}{2} = -2\pi a - 2\pi^2.$$

Практика № 3.

Задача 13.

Найти работу векторного поля $\overline{F} = \left(2x^2 + y, x - y^2\right)$ по перемещению точки по участку параболы $y = x^2$, где $x\in[0,1]$.

Решение. Здесь используем формулу для явно заданной кривой:

$$\int_L\left(\overline{F}, d\bar{l}\right) = \int_a^b\big(P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\cdot f'(x)\big)dx.$$

Все y, которые встречаются в записи компонент векторного поля, надо выразить в виде x^2. Очевидно также, что $f' = 2x$ Итак:

$$\int_0^1 \left(2x^2 + x^2) + (x - x^4)\cdot 2x\right)dx = \int_0^1 \left(5x^2 - 2x^5\right)dx = \frac{5}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{2}{6}x^6\Big|_0^1 =$$

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ответ. $\frac{4}{3}$.

Задача 13-А (домашняя аналогичная № 13).

Найти работу векторного поля $\overline{F} = \left(x^2 - y^2, x^2 + y^2\right)$ по перемещению точки по участку кубической параболы $y = x^3$, где $x \in [0,1]$.

Ответ. $\frac{118}{105}$.

Задача 14.

Найти работу векторного поля $\overline{F} = (2x - 3y, x + 2y)$ по перемещению точки по половине эллипса, заданного параметрически:

$\{x = 3\cos t, y = 5\sin t\}, \quad x \in [0, \pi]$.

Решение. Здесь используем формулу для параметрически заданной кривой: $\int\limits_L \left(\overline{F}, d\overline{l}\right) = \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y'(t)\right)dt$.

При этом учитываем, что $\{x' = -3\sin t, y' = 5\cos t\}$. При этом все x и y, которые встречаются в записи компонент векторного поля, надо выразить в виде $\{x = 3\cos t, y = 5\sin t\}$.

$$\int_0^{\pi} \Big(\underbrace{(6\cos t - 15\sin t)}_{P}\cdot\underbrace{(-3\sin t)}_{x'} + \underbrace{(3\cos t + 10\sin t)}_{Q}\cdot\underbrace{(5\cos t)}_{y'}\Big)dt =$$

$$\int_0^{\pi}\left(45\sin^2 t+15\cos^2 t-18\sin t\cos t+50\sin t\cos t\right)dt\ =$$

$$\int_0^{\pi}\left(30\sin^2 t+15(\sin^2 t+\cos^2 t)+32\sin t\cos t\right)dt\ =$$

$$\int_0^{\pi}\left(30\frac{1-\cos 2t}{2}+15+16\sin 2t\right)dt\ =\ 15\int_0^{\pi}\ dt+16\int_0^{\pi}\sin 2tdt+15\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt$$

$$=\ 15t\Big|_0^{\pi}\ -8\cos 2t\Big|_0^{\pi}\ +15t\Big|_0^{\pi}-\frac{15}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}\ =15\pi-8(1-1)+15\pi-\frac{15}{2}(0-0)\ =$$

30π. **Ответ.** 30π.

В следующих задачах кривые будут замкнутые, и в них будем применять формулу Грина, доказанную на лекции:

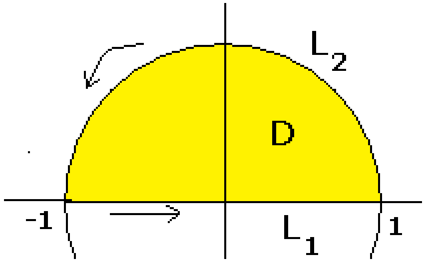
$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Наиболее удобно её применение именно в тех случаях, когда граница состоит из нескольких частей, ведь работу векторного поля надо было бы отдельно вычислять по каждой части (у которой своё уравнение в плоскости), а двойной интеграл сразу по единой плоской области.

Задача 15.

Найти циркуляцию векторного поля $\overline{F}=\left(x^2y,y^2\right)$ по перемещению точки по границе верхнего полукруга радиуса 1 двумя методами:

А). без формулы Грина. Б). по формуле Грина.



Решение.

Решение А). без формулы Грина. В этом случае нужно для каждого участка - отрезка L_1 и полуокружности L_2 - вычислить работу поля отдельно. Чтобы обход всего контура осуществлялся один раз и против часовой стрелки, надо, чтобы движение по отрезку было слева направо $x \in [-1,1]$ (при этом $y \equiv 0$, и $dy \equiv 0$), а по полуокружности справа налево, т.е. на ней использовать обычный метод параметрического задания точек: $x = \cos t, y = \sin t$.

По L_1 : $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot 0dx = 0.$

По L_2: $\int\limits_0^{\pi} \left((\cos^2 t \sin t)(-\sin t) + (\sin^2 t)\cos t \right) dt =$

$-\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt + \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t \cos t dt$, во втором интеграле очевидно, подведение под знак дифференциала, а в первом есть несколько путей решения:

1) с помощью замены, учитывая то, что суммарная степень чётна (изучали во 2 семестре).

2) применить формулу понижения степени к каждому из квадратов.

3) использовать то, что $(\sin t \cos t)^2$ и формулу $\sin 2t = 2\sin t \cos t$.

Наиболее оптимальным наверное, здесь будет 3-й путь.

$$-\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt + \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t \cos t dt = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} (2\cos t \sin t)^2 dt + \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t \cdot d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 2t dt + \frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4t}{2} dt + \frac{1}{3}(0-0) =$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos 4t) dt = -\frac{1}{8}\left(t\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{1}{8}\left(\pi - \frac{1}{4}(0-0) \right) = -\frac{\pi}{8}.$$

Решение Б). По формуле Грина.

Если $\overline{F} = \left(x^2 y, y^2\right)$ то $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x^2$.

Двойной интеграл по полукругу вычисляется с помощью полярных координат, это стандартная задача, которые решали во 2 семестре. Так как полукруг в верхней полуплоскости, то $\varphi \in [0, \pi]$, а радиус 1, $\rho \in [0,1]$.

$$-\iint_D x^2 dx dy = -\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(\rho\cos\varphi)^2 d\rho = -\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$-\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \; d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{1}{8}\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\pi + \frac{1}{2}(0-0) \right) = -\frac{\pi}{8}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{8}$.

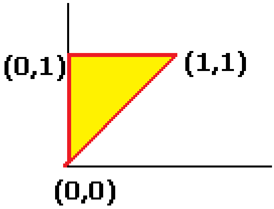
Задача 16.

Найти циркуляцию векторного поля $\overline{F} = \left(x^2 y^3, 1\right)$ по перемещению точки по треугольнику с вершинами (0,0), (0,1), (1,1) с помощью формулы Грина.

Решение. Если не использовать формулу Грина, то на каждой из сторон - горизонтальной, вектикальной и наклонной - надо было бы отдельно провести вычисление работы поля. Используя формулу Грина, мы вычислим лишь один двойной интеграл.

$$\overline{F} = \left(x^2 y^3, 1\right) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 3x^2 y^2.$$

Чертёж этого треугольника:



Далее следует стандартный метод вычисления двойного интеграла, изученный в прошлом семестре. Сначала спроецируем фигуру на ось Ох и найдём глобальные границы по x, это $x \in [0,1]$. При каждом конкретном x высота изменяется от наклонной линии $y = x$ до горизонтальной $y = 1$, то есть $y \in [x,1]$. Итак,

$$-\iint_D 3x^2 y^2 dxdy = -\int_0^1 dx \int_x^1 3x^2 y^2 dy = -\int_0^1 dx \left(x^2 y^3 \Big|_x^1 \right) = -\int_0^1 \left(x^2 (1 - x^3) \right) dx$$

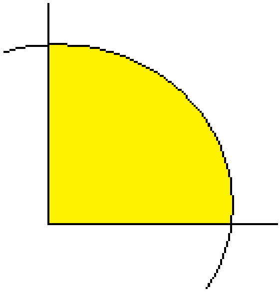
$$= -\int_0^1 \left(x^2 - x^5 \right) dx = \int_0^1 \left(x^5 - x^2 \right) dx = \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}$.

Задача 17.

Найти циркуляцию $\oint\limits_L (1 - x^2) y dx + (1 + y^2) x dy$ где L - это граница четверти круга радиуса 1 (лежащего в 1-й четверти).

Решение. $\overline{F} = \left((1 - x^2) y, (1 + y^2) x \right) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (1 + y^2) - (1 - x^2) =$ $x^2 + y^2$. Если бы мы не применяли формулу Грина, то пришлось бы 3 раза вычислять работу силы по трём разным участкам, из которых состоит этот замкнутый контур: часть окружности, горизонтальный и вертикальный отрезки. Чертёж:



А по формуле Грина надо найти двойной интеграл по четверти круга, с очевидным переходом к полярным координатам.

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \cdot \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 \right) =$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{8}$.

Контрольная работа

(30 минут, по 15 минут на задачу).

Задача 1. Тройной интеграл в сферических координатах.

Задача 2. Криволинейный интеграл 1-го рода.

Практика № 4.

Поверхностные интегралы 2 рода (поток поля через поверхность).

Задача 18. Найти поток векторного поля $\overline{F} = (x - z, y, y - z)$ через часть плоскости $z = 1 - x - y$ в 1-м октанте.

Решение. Данная поверхность это треугольник с вершинами (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1). При этом очевидно, что

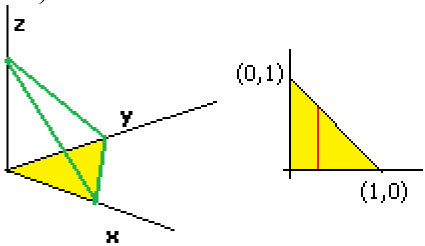
$f'_x = (1 - x - y)'_x = -1$, а также $f'_y = (1 - x - y)'_y = -1$.

Воспользуемся формулой $\iint\limits_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right) = \iint\limits_D \left(-P\cdot f'_x - Q\cdot f'_y + R\right)dxdy$.

При этом ещё и повсеместно z представим в виде $1-x-y$.

$$\iint\limits_D \left(-(x-(1-x-y))\cdot(-1) - y\cdot(-1) + (y-(1-x-y))\right)dxdy =$$

$\iint\limits_D (3x+4y-2)dxdy$, где D - проекция исходного треугольника на плоскость, т.е. треугольник с вершинами (0,0), (1,0) и (0,1) в плоскости, ограниченный сверху линией $y = 1-x$ (см. такой же треугольник в задаче 10).



Тогда $\iint\limits_D (3x+4y-2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (3x+4y-2)dy =$

$$\int\limits_0^1 dx\left(3xy + 2y^2 - 2y\Big|_0^{1-x}\right) = \int\limits_0^1 \left(3x(1-x) + 2(1-x)^2 - 2(1-x)\right)dx =$$

$$\int\limits_0^1 \left(3x - 3x^2 + 2 + 2x^2 - 4x - 2 + 2x\right)dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. **Ответ.** $\frac{1}{6}$.

Аналогично прошлой задаче, но с другим векторным полем:

Задача домашняя Д-2. Найти поток векторного поля $\overline{F} = (2x^2, x^2 - y^2, z + y)$ через поверхность $z = 1-x-y$ в 1 октанте.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 19. Найти поток векторного поля $\overline{F}=(x,y,3z)$ через поверхность $z=x^2+y^2$, где $z\in[0,1]$.

Решение. Формула: $\iint\limits_S\left(\overline{F},d\overline{S}\right) = \iint\limits_D\left(-P\cdot f'_x-Q\cdot f'_y+R\right)dxdy$.

Здесь $f'_x=(x^2+y^2)'_x=2x$, $f'_y=(x^2+y^2)'_y=2y$.

$\iint\limits_D\left(-P\cdot f'_x-Q\cdot f'_y+R\right)dxdy = \iint\limits_D\left(-x\cdot 2x-y\cdot 2y+3(x^2+y^2)\right)dxdy =$

$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, причём D это проекция параболоида на плоскость 0xy, то есть D круг радиуса 1. Делаем обычный переход к полярным координатам для такого круга, как в прошлом семестре.

$$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\cdot\rho^2d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}$.

Ротор, дивергенция. Формулы Стокса, Остроградского-Гаусса и их применение.

Задача 20. Вычислить дивергенцию и ротор поля $\overline{F}=(xy,yz,x)$.

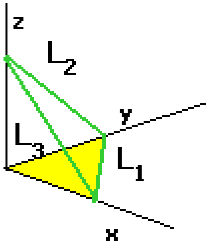
Решение. $divF=P'_x+Q'_y+R'_z = y+z+0 = y+z$.

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & x\end{vmatrix} = \left(-y,-1,-x\right).$$

Ответ. $divF=y+z$, $rotF=\left(-y,-1,-x\right)$.

Задача 21. Найти циркуляцию поля $\overline{F}=(xy,yz,x)$ по треугольнику с вершинами (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Решение. Если вычислять без формулы Стокса, то надо найти 3 раза работу поля по 3 различным сторонам треугольника.



Например, можно на каждой стороне описать движение точки с помощью параметра t так:

на L_1: $x = 1 - t, y = t, z = 0$,

на L_2: $x = 0, y = 1 - t, z = t$,

на L_3: $x = t, y = 0, z = 1 - t$.

Но по формуле Стокса мы можем не делать 3 разных вычисления работы поля, а вычислить через двойной интеграл по единой области.

Формула Стокса. $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S (rot\overline{F}, d\overline{S})$.

Для этого векторного поля, ротор был найден в задаче 20:

$$rotF = (-y, -1, -x).$$

Нужно найти поток через данный треугольник, как в задаче 18, но не самого векторного поля, а ротора (нового векторного поля, полученного с помощью исходного).

Вычислим интеграл $\iint\limits_D \left(-P \cdot f'_x - Q \cdot f'_y + R\right) dxdy$ где

$f'_x = (1 - x - y)'_x = -1$, $f'_y = (1 - x - y)'_y = -1$, а P, Q, R это компоненты ротора, т.е. векторного поля $(-y, -1, -x)$,

$$\iint\limits_D \left(-P \cdot f'_x - Q \cdot f'_y + R\right) dxdy = \iint\limits_D \left(-(-y)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1) - x\right) dxdy =$$

$$\iint\limits_D \left(-y - 1 - x\right) dxdy = -\iint\limits_D (x + y + 1) dxdy = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x + y + 1) dy =$$

$$-\int_0^1 dx\left(xy+\frac{1}{2}y^2+y\Big|_0^{1-x}\right) = -\int_0^1\left(x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2+(1-x)\right)dx =$$

$$-\int_0^1\left(x-x^2+\frac{1}{2}(1+x^2-2x)+1-x\right)dx = -\int_0^1\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2-x\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{3}{2}x\Big|_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2} = -\frac{5}{6}.$$

Ответ. $-\frac{5}{6}$.

Задача 22. Найти поток поля $\overline{F}=(x^2yz, x+y, xyz)$ через поверхность куба $x,y,z\in[0,1]$.

Решение. Если не использовать формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S (F,dS) = \iiint_D div(F)dxdydz$$

то нужно было бы вычислить 6 раз поток поля (через каждую грань поверхности куба). А по формуле Остроградского-Гаусса будет всего лишь одно вычисление тройного интеграла по внутренности куба.

Во-первых, $div\overline{F}=2xyz+1+xy$.

Тогда $\iiint_D div(F)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(2xyz+xy+1)dz =$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left(xyz^2+xyz+z\Big|_0^1\right) = \int_0^1 dx\int_0^1(2xy+1)dy = \int_0^1 dx\left(xy^2+y\right)\Big|_0^1 =$$

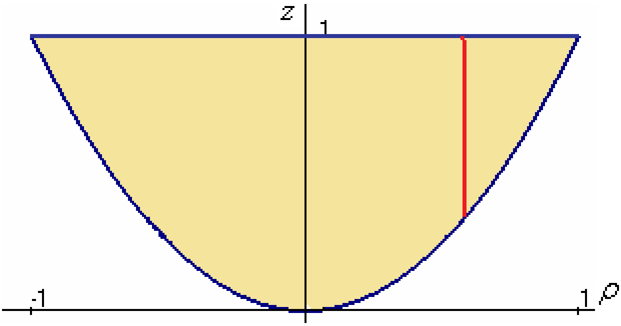
$$\int_0^1(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}.$$ **Ответ.** $\frac{3}{2}$.

Задача 23. Найти поток поля $\overline{F}=(x^2, 2y, z)$ через поверхность, ограниченную эллиптическим параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

Решение.

Снова воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. Иначе пришлось бы вычислять 2 потока поля: по параболоиду и кругу.

$divF = 2x + 3$



Построим вертикальное сечение проходящее через ось Oz, причём неважно, в какую сторону оно повёрнуто: для тела вращения, диапазон изменения z зависит только от ρ (расстояния от оси Oz), но не зависит от угла φ. Поэтому так и обозначим оси: горизонтальную ρ, вертикальную z. Так как в сечении снизу парабола а сверху прямая линия на уровне 1, то $z \in [\rho^2, 1]$. Проекция на горизонтальную плоскость - круг радиуса 1. Поэтому

$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{\rho^2}^1 \rho(3 + 2\rho\cos\varphi)dz$. Обратите внимание, что $divF = 2x + 3$ мы тоже выразили в полярных координатах. Сначала применим формулу Ньютона-Лейбница по z, получается:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \left(\rho(3 + 2\rho\cos\varphi) z \Big|_{\rho^2}^1 \right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho(3 + 2\rho\cos\varphi)(1 - \rho^2) \right) d\rho =$$

$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(3(\rho - \rho^3) + 2\rho(\rho - \rho^3)\cos\varphi \right) d\rho$, разобьём на 2 интеграла: здесь в первом слагаемом нет φ, а во втором есть, там можно будет вынести множитель, зависящий от φ.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(3(\rho - \rho^3) \right) d\rho + \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 \left(2\rho(\rho - \rho^3) \right) d\rho =$$

$$3\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1+(\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^1\left(2\rho(\rho-\rho^3)\right)d\rho$$

во 2-м слагаемом по φ всё равно получается множитель 0, поэтому интеграл по ρ можно и не вычислять.

$$3\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+0\cdot\int_0^1\left(2\rho(\rho-\rho^3)\right)d\rho = 3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}+0 = \frac{3}{2}\pi .$$

Ответ. $\frac{3}{2}\pi$.

Потенциал векторного поля.

В следующих задачах найти потенциал, либо доказать, что поле не потенциально:

Задача 24. $\overline{F}=(yz,xz,xy)$.

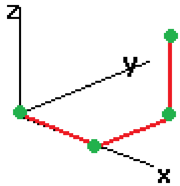
Решение.

Чтобы доказать, что поле потенциально, построим матрицу из всех 9 производных. В первом столбце по x, во втором по y и в 3-м по z :

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица симметрична $\Rightarrow$ поле потенциально.

Теперь ищем потенциал. Для этого соединим начальную точку с произвольной с помощью ломаной, чтобы каждое звено было параллельно какой-либо из осей координат.



Начальная точка, как правило, (0,0,0). Изменяющуюся переменную при этом будем обозначать через t, чтобы отличать от переменных x, y, z, которые в этих вычислениях будут использять роль верхнего предела в том или ином интеграле, либо роль фиксированной константы внутри функции. Получается такая сумма интегралов:

$$\int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt$$

Применим это к конкретным функциям в этой задаче.

$$\int_0^x (0\cdot 0)dt + \int_0^y (x\cdot 0)dt + \int_0^z xydt = 0+0+xyt\Big|_0^z = xyz.$$

Вспомнив, что потенциал определяется с точность до константы, окончательный ответ можно записать так: $U = xyz + C$.

Ответ. $U = xyz + C$.

Задача 25. $\overline{F} = (x^2y^3,\ x^3y^4)$

Решение. Найдём матрицу из всех производных:

$$\begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x^3y^4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 3x^2y^4 & 4x^3y^3 \end{pmatrix}$$

Матрица не симметрична. Тогда поле не потенциально.

Ответ. Поле не потенциально.

Задача 26. $\overline{F} = (3x^2y^2,\ 2x^3y)$.

Решение. Найдём матрицу из всех производных:

$$\begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix}$$

Матрица симметрична. Поле потенциально.

Ищем криволинейный интеграл 2 рода по ломаной, соединяющей (0,0) с точкой (x,y).

$$\int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x (3t^2 \cdot 0^2)dt + \int_0^y (2x^3 \cdot t)dt = 0 + x^3t^2\Big|_0^y = x^3y^2.$$

Но потенциал вычисляется с точностью до константы, так что $U(x,y) = x^3y^2 + C$.

Ответ. $U(x,y) = x^3y^2 + C$.

Проверка. $(x^3y^2 + C)'_x = 3x^2y^2$, $(x^3y^2 + C)'_y = 2x^3y$.

Задача 27. $\overline{F} = (y^2 + 1,\ 2xy + 2)$.

Решение. Найдём матрицу из всех производных:

$$\begin{pmatrix} y^2+1 \\ 2xy+2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Матрица симметрична, значит, существует потенциал поля.

$$\int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x (0^2 + 1)dt + \int_0^y (2xt + 2)dt = t\Big|_0^x + xt^2\Big|_0^y + 2t\Big|_0^y =$$

$x + xy^2 + 2y$.

Ответ. $U(x,y) = x + xy^2 + 2y + C$.

Проверка. $(x + xy^2 + 2y + C)'_x = 1 + y^2$, $(x + xy^2 + 2y + C)'_y = 2xy + 2$.

Задача 28. $\overline{F} = (y^2z, 2xyz, xy^2 + 3z^2)$.

Решение. Найдём производную матрицу.

$$\begin{pmatrix} y^2z \\ 2xyz \\ xy^2 + 3z^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2yz & y^2 \\ 2yz & 2xz & 2xy \\ y^2 & 2xy & 6z \end{pmatrix}$$

Она симметрична, значит, поле потенциально. Ищем потенциал:

$$\int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt =$$

$$\int_0^x 0dt+\int_0^y 0dt+\int_0^z (xy^2+3t^2)dt = 0+0+xy^2t\Big|_0^z+t^3\Big|_0^z = xy^2z+z^3.$$

Ответ. $U=xy^2z+z^3+C$.

Задача 29. $\overline{F}=(2xe^y, x^2e^y)$.

Решение. Производная матрица симметрична:

$$\begin{pmatrix} 2xe^y \\ x^2e^y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix}.$$

Ищем потенциал поля.

$$\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x 2te^0dt+\int_0^y x^2e^tdt = t^2\Big|_0^x+x^2e^t\Big|_0^y =$$

$$(x^2-0)+x^2(e^y-e^0) = x^2+x^2e^y-x^2 = x^2e^y.$$

Ответ. $U=x^2e^y+C$

Задача 30. $\overline{F}=(2e^{2x}\sin y, e^{2x}\cos y)$.

Решение. $\begin{pmatrix} 2e^{2x}\sin y \\ e^{2x}\cos y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4e^{2x}\sin y & 2e^{2x}\cos y \\ 2e^{2x}\cos y & -e^{2x}\sin y \end{pmatrix}$ симметрична.

$$\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x 2e^{2t}\sin 0dt+\int_0^y e^{2x}\cos tdt = 0+e^{2x}\sin t\Big|_0^y =$$

$e^{2x}\sin y$. **Ответ.** $U=e^{2x}\sin y+C$.

Задача 31. $\overline{F}=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$.

Решение. $\begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/z^2 \end{pmatrix}$ симметрична.

В данном случае мы не можем в качестве начальной точки взять (0,0,0), так как эти функции имеют там бесконечный предел. Однако можно рассматривать точку (1,1,1) .

$$\int_1^x P(t,0,0)dt + \int_1^y Q(x,t,0)dt + \int_1^z R(x,y,t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_1^y \frac{1}{t}dt + \int_1^z \frac{1}{t}dt =$$

$$\ln t\Big|_1^x + \ln t\Big|_1^y + \ln t\Big|_1^z = (\ln x - \ln 1) + (\ln y - \ln 1) + (\ln z - \ln 1) =$$

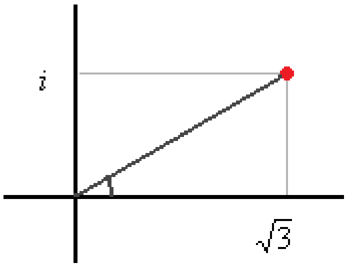
$$\ln x + \ln y + \ln z = \ln(xyz).$$

Ответ. $U = \ln(xyz) + C$.

Глава 2. Теория функций комплексного переменного. Действия над комплексными числами.

Задача 32. Возвести в степень $\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}$.

Решение. Чертёж:



Катеты имеют длину 1 и $\sqrt{3}$, поэтому в полярных коорданатах:

$$\rho = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \varphi = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

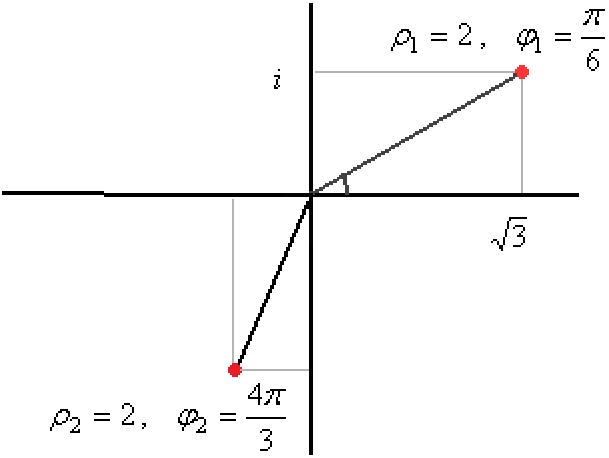
Тогда $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ в показательной форме, а тогда $\left(\sqrt{3}+i\right)^{18} =$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{18} = 2^{18}e^{i\frac{18\pi}{6}} = 2^{18}e^{i3\pi}$$ далее раскроем по формуле Эйлера:

$2^{18}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$, но синус и косинус не зависят от добавления и вычитания полного оборота 2π, поэтому получается $2^{18}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{18}(-1+i0) = -2^{18}$. **Ответ.** -2^{18}.

Задача 33. Вычислить в показательной форме $\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1-\sqrt{3}i}$.

Решение.



Для 1-го числа: $\rho_1 = 2$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ (та же точка, как в прошлой задаче).

Для 2-го числа: $\rho_2 = 2$, $\varphi_2 = \dfrac{4\pi}{3}$. Тогда $\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1-\sqrt{3}i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} =$

$e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} = \cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$, прибавим $2\pi = \dfrac{12\pi}{6}$, для удобства вычисления. Итак, $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

Задача 34. Вычислить $\dfrac{(2-2i)^{10}}{(-\sqrt{3}+i)^{16}}$.

Решение. Представим в показательной форме каждое из чисел.

$\rho_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ и $\rho_2 = 2$, $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. Тогда

$$\frac{(2-2i)^{10}}{(-\sqrt{3}+i)^{16}} = \frac{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}\right)^{10}}{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{16}} = \frac{2^{15}e^{i\frac{-10\pi}{4}}}{2^{16}e^{i\frac{80\pi}{6}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{e^{i\frac{8\pi}{6}}}$$ здесь в числителе

прибавили угол $\dfrac{8\pi}{4}$, кратный 2π, а в знаменателе отняли $\dfrac{72\pi}{6}$.

Далее, $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{e^{i\frac{8\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{6}\right)i} = \dfrac{1}{2}\cdot e^{\left(-\frac{11\pi}{6}\right)i} = \dfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i} =$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$.

Домашняя задача. Вычислить $\dfrac{(\sqrt{3}-3i)^6}{(-1+i)^{18}}$. **Ответ.** $\dfrac{27}{8}i$

Задача 35. Вычислить $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

Решение. Формула: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$.

Сначала найдём модуль и аргумент исходного числа.

$\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ (т.к. 90 градусов и ещё 30 во второй четверти),

$\rho = \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$.

Тогда $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right) =$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right) =$$

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k\right)\right)$ таким образом, 4 точки лежат на окружности, углы 30^0, 120^0, 210^0, 300^0 (по $+90^0$ добавить 4 раза). Отмечены на чертеже зелёным. Здесь 4 корня:

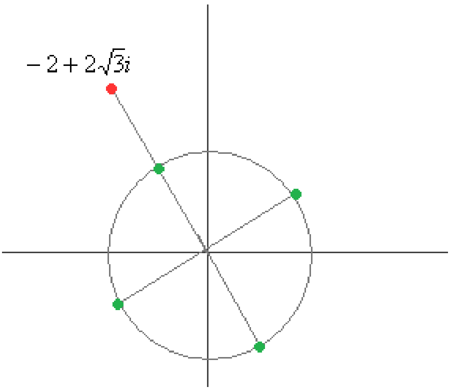
$$k=0: \quad \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$k=1: \quad \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$k=2: \quad \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$k=3: \quad \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Чертёж:



Ответ. $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

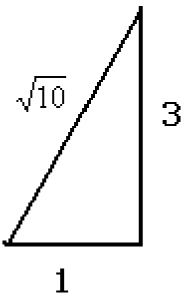
Задача 36. Дано $z=2+i\frac{\pi}{6}$. Найти e^z.

Решение. $e^{2+i\frac{\pi}{6}} = e^2 e^{i\frac{\pi}{6}} = e^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$.

Задача 37. Дано $z=\ln\sqrt{40}+i\cdot arctg(3)$. Найти e^z.

Решение. $e^{\ln\sqrt{40}+i\cdot arctg(3)} = e^{\ln\sqrt{40}}e^{i\cdot arctg(3)} = \sqrt{40}\left(\cos(arctg3)+i\sin(arctg3)\right)$. Далее с помощью прямоугольного треугольника вычислим $\cos(arctg3),\sin(arctg3)$. Если надо найти синус и косинус того угла, тангенс которого равен 3, то сначала подпишем длины катетов по известному тангенсу, гипотенуза $\sqrt{10}$ вычислится автоматом по теореме Пифагора, а далее будет уже известны синус и косинус.



$$\sqrt{40}\left(\cos(arctg3)+i\sin(arctg3)\right) = \sqrt{40}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}+i\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 2+6i.$$

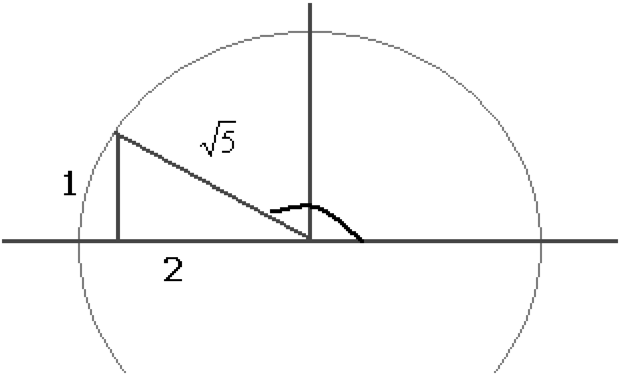
Ответ. $2+6i$.

Задача 38. Дано $z = \frac{1}{2}\ln 5 + i \cdot \left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right)$. Найти e^z.

Решение. $\exp\left(\frac{1}{2}\ln 5 + i \cdot \left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right)\right) = e^{\frac{1}{2}\ln 5} e^{i\cdot\left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right)} =$

$\left(e^{\ln 5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right)\right) =$

$\sqrt{5}\left(\cos\left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(\pi - arctg\frac{1}{2}\right)\right)$. Делаем аналогично тому, как в прошлой задаче, просто треугольник здесь во 2 четверти (угол $arctg\frac{1}{2}$ отмеряется от 180 в обратном направлении).



Но гипотенуза всё равно легко вычисляется по теореме Пифагора: $\sqrt{5}$, тогда $\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2 + i$.

Ответ. $-2 + i$.

Задача 39. Найти все значения $Ln(-e)$.

Решение. Используем формулу $Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

$Ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2\pi k) = 1 + i(\pi + 2\pi k)$. Таким образом, это точки в комплексной плоскости, имеющие вид: $1 \pm i\pi$, $1 \pm i3\pi$, $1 \pm i5\pi$, ...

Ответ. $1 + i(\pi + 2\pi k)$.

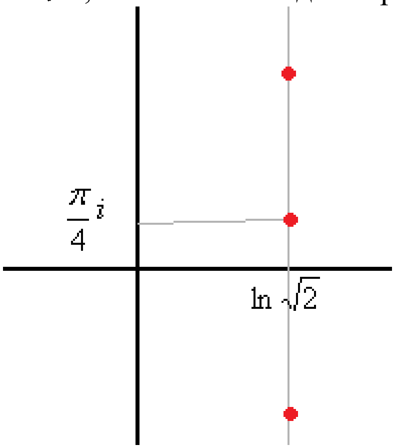
Задача 40. Найти все значения $Ln(1+i)$.

Решение. Используем формулу $Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

Для числа $1+i$, $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right).$$

Чертёж: бесконечная последовательность точек, на уровне абсциссы $\ln\sqrt{2}$, по высоте каждая пара соседних отличается на 2π.



Ответ. $Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$.

Динамическая анимация, показывающая поведение значений $Ln(z)$ в зависимости от колебаний модуля или аргумента z, показана в следующем обучающем видеоролике:
http://www.youtube.com/watch?v=LKFFn-TSLd0

Практика № 6. 8 и 11.10.2018
Функции комплексного переменного
Задача 41. Вычислить $\cos(i)$.

Решение. Применяем формулу $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, где аргумент вместо z подставим i. Тогда $\cos(i) = \dfrac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{2e}$.

Ответ. $\dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{2e}$.

Заметим, что $\dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{2e} > \dfrac{e}{2} > 1$, то есть модули значений косинуса вне действительной оси не ограничены отрезком $[-1,1]$.

Задача 42. Решить уравнение $\cos z = 2$.

Решение. $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow e^{iz} + \dfrac{1}{e^{iz}} = 4$.

Введём замену $e^{iz} = t$, при этом получаем

$t + \dfrac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 + 1 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$. Задача разбивается на 2 шага

1) решим это уравнение и найдём t,

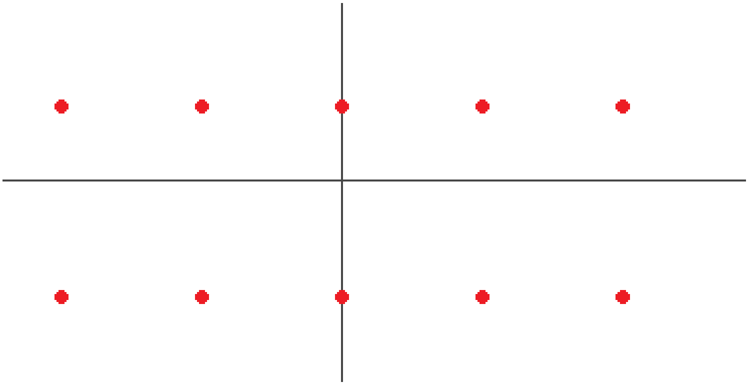
2) учитывая $e^{iz} = t$, запишем $iz = Ln(t)$ и далее найдём z.

Квадратичное уравнение решаем через дискриминант, здесь $D = 12$, тогда $t = \dfrac{4 \pm 12}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Оба значения t - положительные действительные числа, т.е. им соответствует аргумент $\varphi = 0$.

Далее, $iz = Ln(2 \pm \sqrt{3}) \Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(0 + 2\pi k) \Leftrightarrow$

$z = \dfrac{1}{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k \Leftrightarrow z = 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$. Это две бесконечных последовательности точек, одна выше а другая ниже действительной прямой. По горизонтали расстояние между соседними ровно 2π.

Чертёж:



Замечание. Если число в правой части уменьшать до 1, то обе эти последовательности сближаются и в итоге соединятся в одну, расположенную на действительной прямой. Это будут в таком случае уже давно знакомые решения равенства $\cos z = 1$, т.е. $z = 2\pi k$.

Общий случай. Если $\cos z = a$ то $t^2 - 2at + 1 = 0$, $D = 4a^2 - 4$, $t = \dfrac{2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Тогда $z = 2\pi k - i\ln(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$, что при $a = 1$ порождает $z = 2\pi k - i0$.

В следующей серии задач надо функцию представить в виде $u(x, y) + iv(x, y)$.

Задача 43. Функцию $f(z) = i(\bar{z})^2$ представить в виде $u(x, y) + iv(x, y)$.

Решение. $f(z) = i(\bar{z})^2 = i(x - iy)(x - iy) = i(x^2 + i^2 y^2 - i2xy) =$
$i(x^2 - y^2 - i2xy) = -i^2 2xy + i(x^2 - y^2) = (2xy) + i(x^2 - y^2)$.

Поэтому $u(x, y) = 2xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2$.

Заметим, что здесь нарушено уже даже 1-е условие Коши-Римана: $u'_x = 2y$, $v'_y = -2y$.

Ответ. $u(x, y) = 2xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2$.

Задача 44. $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z)$ представить в виде $u + iv$.

Решение. $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z) = (x + iy)y = xy + iy^2 \Rightarrow u = xy$, $v = y^2$.

Заметим, что условия Коши-Римана не выполнены:
$u'_x = y$, $v'_y = 2y$.

Ответ. $u = xy$, $v = y^2$.

Задача 45. $f(z) = (\bar{z})^2 - 3z$ представить в виде $u + iv$.

Решение. $f(z) = (\bar{z})^2 - 3z = (x - iy)(x - iy) - 3(x + iy)$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые, чтобы сначала шли именно те, в которых нет мнимой единицы i, а затем те, в которых она есть.

$(x^2 - y^2 - i2xy) - 3x - i3y = x^2 - y^2 - 3x - i2xy - i3y =$

$(x^2 - y^2 - 3x) + i(-2xy - 3y) \Rightarrow$

$u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x$. $v(x, y) = -2xy - 3y$.

Ответ. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x$. $v(x, y) = -2xy - 3y$.

Задача 46. $f(z) = e^{z^2}$ представить в виде $u + iv$.

Решение. $f(z) = e^{z^2} = e^{(x+iy)(x+iy)} = e^{x^2 - y^2 + i2xy} = e^{x^2 - y^2} e^{i2xy}$

Далее по формуле Эйлера $e^{x^2-y^2} e^{i2xy} = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy)) =$

$e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Ответ. $u(x, y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v(x, y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Задача 47. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ представить в виде $u + iv$.

Решение. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}$

Домножили на сопряжённое, чтобы в знаменателе получилось некое единое действительное число, а разбиение на Re и Im осталось только в числителе. Тогда дробь можно будет разбить на сумму или разность двух дробей.

$$\frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Ответ. $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Задача 48. $f(z)=\cos(iz)$ представить в виде $u+iv$.

Решение. Если $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, то $\cos(iz)=\dfrac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2}=$

$$\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\frac{e^{-x-iy}+e^{x+iy}}{2}=\frac{e^{-x}e^{-iy}+e^{x}e^{iy}}{2}$$

далее раскроем по формуле Эйлера:

$$\ldots=\frac{e^{-x}(\cos(-y)+i\sin(-y))+e^{x}(\cos y+i\sin y)}{2}=$$

воспользуемся чётностью косинуса и нечётностью синуса:

$$\ldots=\frac{e^{-x}(\cos y-i\sin y)+e^{x}(\cos y+i\sin y)}{2}=$$

$$\frac{e^{-x}\cos y-ie^{-x}\sin y+e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y}{2}=$$

$$\frac{(e^{x}+e^{-x})\cos y+i(e^{x}-e^{-x})\sin y}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cos y+i\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\sin y,$$

это можно ещё записать в таком виде, используя гиперболические синус и косинус: $chx\cos y+ishx\sin y$.

Ответ. $u(x,y)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cos y$, $v(x,y)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\sin y$.

Задача 49. $f(z)=iz^2-z$ представить в виде $u+iv$.

Решение. $f(z)=iz^2-z = i(x+iy)(x+iy)-(x+iy) =$

$i(x^2-y^2+i2xy)-x-iy = -2xy+i(x^2-y^2)-x-iy =$

$(-2xy-x)+i(x^2-y^2-y)$, тогда

$u(x,y) = -2xy - x$, $v(x,y) = x^2 - y^2 - y$.

Ответ. $u(x,y) = -2xy - x$, $v(x,y) = x^2 - y^2 - y$.

Задача 50. Для $f(z) = iz^2 - z$ найти $f'(i)$.

Решение.

Способ 1.

Производная как от единой функции $f(z)$:

$(iz^2 - z)'_z = 2iz - 1$, что в точке i равно $-2-1=-3$.

Способ 2.

По компонентам u, v из предыдущей задачи:

$u'_x + iv'_x = (-2xy - x)'_x + i(x^2 - y^2 - y)'_x = (-2y-1) + i(2x)$,

в точке i означает что в $0+1i$, т.е. данные функции надо вычислить в точке $(0,1)$. Тогда $(-2\cdot 1 - 1) + i(2\cdot 0) = -3$, как и том способе.

Ответ. -3.

Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.

Задача 51. Дано $u(x,y) = 2xy - 2y$, $f(0) = i$. Найти $v(x,y)$ и $f(z)$.

Решение. Сначала проверим уравнение Лапласа, т.е. что сумма вторых производных равна 0.

$u'_x = 2y \Rightarrow u''_{xx} = 0$,

$u'_y = 2x - 2 \Rightarrow u''_{yy} = 0$.

Их сумма равна 0. Уравнение Лапласа выполняется. Поэтому данная $u(x,y)$ может являться одной из компонент какой-либо комплексной функции. Далее надо вычислить $v(x,y)$, найдём её в виде потенциала от её градиента: $v = \int dv = \int v'_x dx + v'_y dy$ то есть в виде потенциала векторного поля (v'_x, v'_y). Дело в том, что в такой записи можно заменить производные от неизвестной функции $v(x,y)$ на производные от известной функции $u(x,y)$ по условиям Коши-Римана. $\int v'_x dx + v'_y dy = \int (-u'_y) dx + u'_x dy$. А первые производные от u

уже известны, мы их вычисляли выше в процессе проверки уравнения Лапласа. Как и при вычислении потенциала, в качестве начальной точки как правило, принимаем (0,0) и интегрируем по ломаной.

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (-u'_y)dx + u'_x dy \; = \; \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2-2x)dx + (2y)dy \; = \; \int_0^x (2-2x)dx + \int_0^y 2ydy \; =$$

$2x\Big|_0^x - x^2\Big|_0^x + y^2\Big|_0^y \; = \; 2x - x^2 + y^2$. Но так как начальная точка была взята произвольно, то надо записать в самом общем виде:

$v(x,y) = 2x - x^2 + y^2 + C$.

При этом константа C должна быть такая, чтобы обеспечивалось равенство $f(0) = i$, т.е. $f(0+0i) = 0+1i$, т.е. в точке $(x,y) = (0,0)$ было $(u,v) = (0,1)$, таким образом, должно быть $v(0,0) = 1$.

$v(0,0) = 0 - 0^2 + 0^2 + C = 1 \;\Rightarrow\; C = 1$.

Итак, $v(x,y) = 2x - x^2 + y^2 + 1$.

Осталось восстановить функцию $f(z)$. Для этого вспомним, что:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \; y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

и применим эти выражения в записи $u + iv$.

$$u + iv \; = \; (2xy - 2y) + i(2x - x^2 + y^2 + 1) \; =$$

$$\left(2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i} - 2\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(2\frac{z+\bar{z}}{2} - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 1\right) =$$

$$\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i} - \frac{1}{i}(z-\bar{z})\right) + i\left((z+\bar{z}) - \frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4} + \frac{z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{-4} + 1\right) =$$

$$-i\frac{z^2-\bar{z}^2}{2} + i(z-\bar{z}) + i(z+\bar{z}) - \frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}) - \frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}) + i \; =$$

$$-i\frac{z^2-\bar{z}^2}{2} + 2iz - \frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2) - \frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2) + i \; =$$

$$2iz - \frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2) - \frac{i}{2}(z^2+\bar{z}^2) + i \; = \; 2iz - iz^2 + i\,.$$

Как видим, $\bar{z}$ здесь в процессе преобразований полностью сократилось. Так и должно было быть, ведь

Ответ. $2iz - iz^2 + i$.

Задача 52. $u(x,y) = 1 - e^x \sin y$, $f(0) = 1 + i$. Найти $v(x,y)$ и $f(z)$.

Решение. Сначала проверим уравнение Лапласа.

$u'_x = -e^x \sin y \Rightarrow u''_{xx} = -e^x \sin y$,

$u'_y = -e^x \cos y \Rightarrow u''_{yy} = e^x \sin y$.

Их сумма равна 0, уравнение Лапласа выполняется, $u(x,y)$ - одна из компонент комплексной функции.

$$v = \int dv = \int_{(0,0)}^{(x,y)} v'_x dx + v'_y dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-u'_y) dx + u'_x dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$$

далее по ломаной интеграл вида $\int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt$

$$\int_0^x e^t \cos 0 dt - \int_0^y e^x \sin t dt = \int_0^x e^t dt - e^x \int_0^y \sin t dt = e^t\Big|_0^x + e^x \cos t\Big|_0^y =$$

$$(e^x - 1) + e^x \cos y - e^x \cos 0 = e^x \cos y - 1.$$

В общем виде, потенциал равен $v(x,y) = e^x \cos y - 1 + C$.

Условие $f(0) = 1 + i$ означает $f(0 + 0i) = 1 + 1i$ и сводится к $v(0,0) = 1$

$v(0,0) = e^0 \cos 0 - 1 + C = 1 \Rightarrow 1 - 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$.

Тогда $v(x,y) = e^x \cos y$.

Итак, $u + iv = (1 - e^x \sin y) + i(e^x \cos y) = 1 + e^x (i \cos y - \sin y)$. Далее на примере этой задачи мы увидим, что не обязательно использовать выражения $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, можно просто сгруппировать слагаемые так, чтобы свернуть их по формуле Эйлера.

В выражении $1 + e^x (i \cos y - \sin y)$ надо получить структуру $\cos\alpha + i \sin\alpha$, для этого внутри скобки поделим на i а снаружи домножим.

$$1+e^x(i\cos y-\sin y) = 1+ie^x\left(\cos y-\frac{1}{i}\sin y\right) = 1+ie^x(\cos y+i\sin y) =$$

$1+ie^x e^{iy} = 1+ie^{x+iy} = 1+ie^z$.

Ответ. $1+ie^z$.

Практика № 7. 15 и 18.10.2018

Задача 53. $v(x,y)=2xy,\ f(0)=0$. Найти $u(x,y)$ и $f(z)$.

Решение. Проверим уравнение Лапласа.

$v'_x=2y \Rightarrow v''_{xx}=0$, $\quad v'_y=2x \Rightarrow v''_{yy}=0$.

Сумма вторых производных равна 0.

Ищем u в виде потенциала от её же градиента.

$u=\int du=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(u'_x dx+u'_y dy\right)$ где заменяем производные от неизвестной функции на производные от известной (v) по условиям Коши-Римана.

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(u'_x dx+u'_y dy\right) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(v'_y dx-v'_x dy\right) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2xdx-2ydy\right)$$

А первые производные от v мы уже считали, когда проверяли уравнение Лапласа, их и используем здесь.

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2xdx-2ydy\right) = \int\limits_0^x 2xdx-\int\limits_0^y 2ydy = x^2\Big|_0^x-y^2\Big|_0^y = x^2-y^2.$$

Но если бы мы выбрали не (0,0) а другую начальную точку, то могло получиться и выражение с какой-то лишней константой, например если (1,2) то было бы $x^2\Big|_1^x-y^2\Big|_2^y = (x^2-1)-(y^2-4) = x^2-y^2+3$.

Поэтому мы должны записать самый общий случай:

$u(x,y)=x^2-y^2+C$, а затем уже из условия $f(0)=0$ определим константу C. Если $f(0+0i)=0+0i$ то $u(0,0)=0$, тогда $C=0$.

Итак, $u(x,y)=x^2-y^2$.

Теперь запишем $u+iv = (x^2-y^2)+i(2xy)$ и выразим все x, y через $z, \bar{z}$ в виде $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Если привести подобные, то $\bar{z}$ сократится. $\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+i2\dfrac{z+\bar{z}}{2}\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=$

$$\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4}-\frac{z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{-4}+\frac{z^2-\bar{z}^2}{2} =$$

$$\frac{z^2+\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2+\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2-\bar{z}^2}{2} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\bar{z}^2 = 1z^2+0\bar{z}^2$$

$= z^2$.

Ответ. $f(z)=z^2$.

Задача 54. $v(x,y)=x+2y$, $f(0)=0$. Найти $u(x,y)$ и $f(z)$.

Решение. Проверим уравнение Лапласа.

$v'_x=1 \Rightarrow v''_{xx}=0$, $\qquad v'_y=2 \Rightarrow v''_{yy}=0$.

Сумма вторых производных равна 0.

Ищем u. $u=\int du = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(u'_x dx+u'_y dy\right) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(v'_y dx - v'_x dy\right) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2dx-1dy\right)=$

$$\int\limits_0^x 2dx - \int\limits_0^y dy = 2x\Big|_0^x - y\Big|_0^y = 2x-y.$$

При произвольном выборе начальной точки, $u(x,y)=2x-y+C$, из условия $f(0)=0$ определим константу C. Если $f(0+0i)=0+0i$ то $u(0,0)=0$, тогда $C=0$.

$$u+iv = (2x-y)+i(x+2y) = \left(2\frac{z+\bar{z}}{2}-\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+2\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) =$$

$$(z+\bar{z})+\frac{i}{2}(z-\bar{z})+\frac{i}{2}(z+\bar{z})+(z-\bar{z}) = 2z+iz.$$

Объединяя 2 крайних и 2 средних слагаемых, получаем $2z+iz$.

Ответ. $f(z)=2z+iz$.

Интегрирование функций комплексного переменного.

Задача 55. Вычислить $\int\limits_L \bar{z}dz$ по отрезку от 0 до i.

Решение. $\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_L (x-iy)(dx+idy) = \int\limits_L (xdx+ydy-iydx+ixdy) =$ $\int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L (-ydx+xdy)$ а это уже 2 криволинейных интеграла второго рода от различных векторных полей. Причём на вертикальном отрезке, соединяющем 0 с точкой i, фиксировано $x=0$, а значит и $dx=0$, т.е. исчезают все слагаемые, где есть x или dx.

При этом $y \in [0,1]$. Итак, $\int\limits_L (0+ydy)+i\int\limits_L (-0+0dy) = \int\limits_0^1 ydy+0i =$

$$\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 +0i = \frac{1}{2}+0i = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 56. Вычислить $\int\limits_L \bar{z}dz$ по окружности радиуса R.

Решение. Изначально преобразование с раскрытием скобок точно такое же, как и в прошлой задаче: $\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_L (x-iy)(dx+idy) =$ $\int\limits_L (xdx+ydy-iydx+ixdy) = \int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L (-ydx+xdy)$.

Дальше, криволинейные интегралы вычисляются иначе из-за того, что другая кривая. На окружности наилучший способ задать точку - параметрически: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. При этом $t \in [0,2\pi]$.

Также вычислим дифференциалы: $dx=-R\sin tdt$, $dy=R\cos tdt$.

$$\int_0^{2\pi}(R\cos t(-R\sin t)+R\sin tR\cos t)dt+i\int_0^{2\pi}((-R\sin t)(-R\sin t)+R\cos tR\cos t)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}0dt+i\int_0^{2\pi}R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = 0+iR^2\int_0^{2\pi}dt = 2\pi R^2 i.$$

Ответ. $2\pi R^2 i$.

Задача 57. Вычислить $\int\limits_L z^2dz$ по отрезку от 0 до $1+2i$.

Решение. Способ 1. Без формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_L z^2dz = \int_L\left((x^2-y^2)+i(2xy)\right)(dx+idy) =$$

$$\int_L\left((x^2-y^2)dx-(2xy)dy\right)+i\int_L\left((2xy)dx+(x^2-y^2)dy\right) =$$

Далее используем явное выражение $y=2x$, так как отрезок соединяет точки (0,0) и (1,2). При этом $dy=2dx$, $x\in[0,1]$.

$$\int_0^1\left((x^2-4x^2)-(2x2x)2\right)dx+i\int_0^1\left((2x2x)+(x^2-4x^2)2\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(-11x^2\right)dx+i\int_0^1\left(-2x^2\right)dx = -\frac{11}{3}x^3\Big|_0^1-i\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = -\frac{11}{3}-\frac{2}{3}i.$$

Способ 2. По формуле Ньютона-Лейбница.

Заметив, что функция z^2 аналитическая, т.е. для неё выполняются условия Коши-Римана, можно не раскрывать скобки предыдущим способом, а вычислить первообразную по z в начальной и конечной точке.

$\int\limits_0^{1+2i}z^2dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+2i} = \frac{(1+2i)^3}{3}-0$, а дальше всё сводится просто к вычислению степени комплексного числа.

$(1+2i)^2=-3+4i \Rightarrow (1+2i)^3=(-3+4i)(1+2i) = -11-2i$, тогда

$\frac{(1+2i)^3}{3} = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$.

Ответ. $-\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$

Задача 58. Вычислить $\int\limits_{AB} z^2 dz$ по участку единичной окружности в 1-й четверти от 1 до i .

Решение. Здесь тоже можно вычислять как без, так и по формуле Ньютона-Лейбница. Но разница в объёме вычислений будет огромная, в несколько раз в данном случае.

Способ 1. $\int\limits_L z^2 dz = \int\limits_L \Big((x^2 - y^2) + i(2xy)\Big)(dx + idy) =$

$\int\limits_L \Big((x^2 - y^2)dx - (2xy)dy\Big) + i\int\limits_L \Big((2xy)dx + (x^2 - y^2)dy\Big)$, далее используем параметрические выражения $x = \cos t$, $y = \sin t$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} ((\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) - (2\cos t \sin t)\cos t)dt$$

$$+ i\int\limits_0^{\pi/2} ((2\cos t \sin t)(-\sin t) + (\cos^2 t - \sin^2 t)\cos t)dt =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^3 t - 3\cos^2 t \sin t)dt + i\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^3 t - 3\sin^2 t \cos t)dt$$

здесь в двух слагаемых из 4 можно применить подведение под знак дифференциала, а в двух других, где третья степень - замену (при нечётной степени косинуса замена $s = \sin t$, при нечётной степени синуса $s = \cos t$).

Итак, $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t dt - \int\limits_0^{\pi/2} 3\cos^2 t \sin t dt + i\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t dt - i\int\limits_0^{\pi/2} 3\sin^2 t \cos t dt$ =

$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t dt + i\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t dt + \int\limits_0^{\pi/2} 3\cos^2 t d(\cos t) - i\int\limits_0^{\pi/2} 3\sin^2 t d(\sin t)$ =

$\int\limits_1^0 \sqrt{1-s^2}^3 \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}} ds + i\int\limits_0^1 \sqrt{1-s^2}^3 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds + \cos^3 t\Big|_0^{\pi/2} - i\sin^3 t\Big|_0^{\pi/2}$ =

$\int\limits_0^1 \sqrt{1-s^2}^2 ds + i\int\limits_0^1 \sqrt{1-s^2}^2 ds + (0-1) - i(1-0)$ =

$\int\limits_0^1 (1-s^2) ds + i\int\limits_0^1 (1-s^2) ds - 1 - i$ = $\left(s - \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + i\left(s - \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 - 1 - i$ =

$\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i - 1 - i$ = $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

Способ 2. Так как функция аналитическая, нам не важно, соединены точки по дуге окружности или по какой-то другой линии, на самом деле результат зависит только от первообразной в начальной и конечной точках.

$$\int\limits_1^i z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_1^i = \frac{i^3 - 1^3}{3} = \frac{-i-1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.$$

Ответ. $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

Задача 59. Вычислить $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}(z^2) dz$ по отрезку от 0 до $1+3i$.

Решение. Так как $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 + 0i$, то функция не аналитическая, т.к. частные производные от u будут какие-то функции, а от v нулевые, и точно не не будет совпадений, которые нужны для условий Коши-Римана. Поэтому формулу Ньютона-Лейбница здесь применить нельзя, а только универсальный способ с разложением на $u+iv$. Отрезок от (0,0) до (1,3), он характеризуется явным уравнением $y=3x$, при этом $dy=3dx$, $x\in[0,1]$.

$$\int\limits_{AB}\mathrm{Re}(z^2)dz = \int\limits_{AB}(x^2-y^2)(dx+idy) = \int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx+i\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dy =$$

$$\int\limits_0^1(x^2-9x^2)dx+i\int\limits_0^1(x^2-9x^2)3dx = \int\limits_0^1(-8x^2)dx+i\int\limits_0^1(-24x^2)dx =$$

$$-\frac{8}{3}x^3\Big|_0^1-i\frac{24}{3}x^3\Big|_0^1 = -\frac{8}{3}-8i.$$

Ответ. $-\dfrac{8}{3}-8i$.

Задача 60. Вычислить $\int\limits_1^{1-i}(3z^2+2z+1)dz$.

Решение. Здесь сумма степенных функций, они являются аналитическими. Поэтому используем формулу Ньютона-Лейбница.

$$\int\limits_1^{1-i}(3z^2+2z+1)dz = z^3\Big|_1^{1-i}+z^2\Big|_1^{1-i}+z\Big|_1^{1-i} = (1-i)^3+(1-i)^2+(1-i)-3.$$

Отдельно вычислим $(1-i)^2=(1-i)(1-i)=-2i$,

$(1-i)^3=-2i(1-i)=-2-2i$.

Тогда $-2-2i+(-2i)+(1-i)-3 = -4-5i$.

Ответ. $-4-5i$.

Задача 61. Вычислить $\int\limits_2^{5+i}(z-3z^2)dz$.

Решение. $\displaystyle\int\limits_2^{5+i}(z-3z^2)dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_2^{5+i}-z^3\Big|_2^{5+i} = \frac{(5+i)^2}{2}-\frac{4}{2}-((5+i)^3-8)$.

Вычислим квадрат и куб этого числа. $(5+i)(5+i)=24+10i$,

$(5+i)^3=(24+10i)(5+i) = 110+74i$.

Тогда $\dfrac{24+10i}{2}-2-(110+74i)+8 = 12+5i-110-74i+6 =$
$-92-69i$.

Ответ. $-92-69i$.

Задача 62. Вычислить $\displaystyle\int_0^{i\pi/2} e^z dz$.

Решение. Можно применять формулу Ньютона-Лейбница, так как функция e^z аналитическая.

$e^z = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$, тогда:

$u'_x = e^x \cos y = v'_y, \quad u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$.

$$\int_0^{i\pi/2} e^z dz = e^z\Big|_0^{i\pi/2} = e^{i\pi/2} - e^0 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - 1 = (0+1i) - 1 =$$

$i-1 = -1+i$.

Ответ. $-1+i$.

Практика № 8. 22 и 25.10.2018

Интегральная формула Коши.

Следующая серия задач решается с помощью формул Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad \text{и} \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Здесь будут комбинированные задачи, состоящие из нескольких подзадач, где контур проводится сначала вокруг той или иной точки разрыва, а затем вокруг всех этих точек.

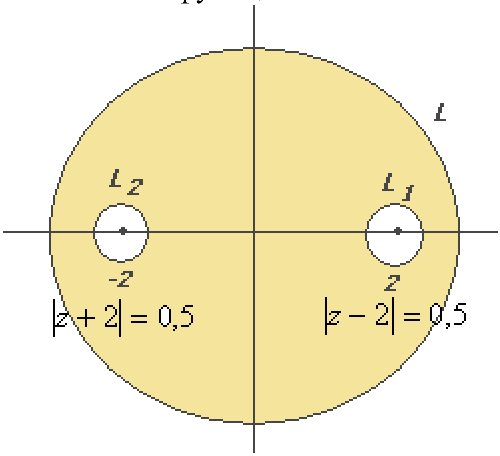
Задача 63. Вычислить $\displaystyle\oint_L \frac{z^3}{z^2-4}dz$, где контур L:

А) $|z-2| = 0{,}5$ Б) $|z+2| = 0{,}5$ В) $|z| = 3$.

Решение. В знаменателе разложим на множители, и станет видно, что корни многочлена там 2 и -2.

$$\oint\limits_L \frac{z^3}{z^2-4}dz = \oint\limits_L \frac{z^3}{(z+2)(z-2)}dz.$$

Если контур радиуса 0,5 окружает одну из точек, то надо применить интегральную формулу Коши, где точка z_0 одна из них, а именно, в первом пункте $z_0=2$, а во втором $z_0=-2$. Надо убрать из знаменателя соответствующую скобку, и присвоить конкретное z_0 вместо z в оставшейся части функции.



А) $$\oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{z^3}{(z+2)(z-2)}dz = \oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{z^3\big/ z+2}{z-2}dz = 2\pi\, i \left.\frac{z^3}{z+2}\right|_{z=2} =$$
$$2\pi\, i\frac{2^3}{2+2} = 2\pi\, i\frac{8}{4} = 4\pi\, i\ .$$

Б) $$\oint\limits_{|z+2|=0,5} \frac{z^3}{(z+2)(z-2)}dz = \oint\limits_{|z+2|=0,5} \frac{z^3\big/ z-2}{z+2}dz = 2\pi\, i \left.\frac{z^3}{z-2}\right|_{z=-2} =$$
$$2\pi\, i\frac{(-2)^3}{-2-2} = 2\pi\, i\frac{-8}{-4} = 4\pi\, i\ .$$

В) В третьем пункте, где контур окружает уже обе точки, достаточно будет воспользоваться теоремой Коши и суммировать результаты двух предыдущих пунктов. Получится $8\pi\, i$.

Ответы. А) $4\pi\ i$ Б) $4\pi\ i$ В) $8\pi\ i$.

Задача 64. Вычислить $\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz$, где контур L:

А) $|z-2| = 0{,}5$ Б) $|z| = 0{,}5$ В) $|z| = 3$.

Решение. В 1 пункте здесь корень 2 соответствует $|z-2| = 0{,}5$, а во втором корень 0, но он имеет кратность 2, поэтому надо будет сделать по обобщённой интегральной формуле Коши, то есть с помощью производной.

А) $\oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz = 2\pi\ i\frac{e^z}{z^2}\bigg|_{z=2} = 2\pi\ i\frac{e^2}{4} = \frac{\pi\ i}{2}e^2$.

Б) Здесь корень 0, он соответствует множителю z, который, впрочем, можно было бы записать в виде скобки $(z-0)$.

Конкретизируем обобщённую формулу Коши для 2 степени:

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, при n=1: $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

Тогда $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz = 2\pi\ i\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'\bigg|_{z=0} = 2\pi\ i\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0} =$

$2\pi\ i\frac{e^0(-2)-e^0}{(-2)^2} = 2\pi\ i\frac{-2-1}{4} = -\frac{3}{2}\pi\ i$.

В) Здесь внутри контура обе особые точки, рассмотренные в предыдущих пунктах. По интегральной теореме Коши просто складываем результаты, полученные в 2 предыдущих пунктах. Получаем $\frac{\pi\ i}{2}e^2 - \frac{3}{2}\pi\ i$.

Ответы. А) $\frac{\pi\ i}{2}e^2$ Б) $-\frac{3}{2}\pi\ i$ В) $\frac{\pi\ i}{2}e^2 - \frac{3}{2}\pi\ i$.

Задача 65. Вычислить $\oint\limits_L \frac{1}{(z-2)(z-3)(z-5)}dz$, где контур L:

А) $|z-2|=0{,}5$ Б) $|z-3|=0{,}5$ В) $|z-5|=0{,}5$ Г) $|z|=6$.

Решение. В каждом случае применяем интегральную формулу Коши к той или иной точке разрыва функции, 2, 3 и 5. Убирая соответствующий множитель из знаменателя, затем подставляем в оставшуюся часть функции это число.

А) $2\pi i \left.\frac{1}{(z-3)(z-5)}\right|_{z=2} = 2\pi i \frac{1}{(-1)(-3)} = \frac{2\pi i}{3}$.

Б) $2\pi i \left.\frac{1}{(z-2)(z-5)}\right|_{z=3} = 2\pi i \frac{1}{1(-2)} = -\pi i$.

В) $2\pi i \left.\frac{1}{(z-2)(z-3)}\right|_{z=5} = 2\pi i \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{\pi i}{3}$.

Г) $\frac{2\pi i}{3} - \pi i + \frac{\pi i}{3} = 0$.

Ответы. А) $\frac{2\pi i}{3}$ Б) $-\pi i$ В) $\frac{\pi i}{3}$ Г) 0.

Задача 66. Вычислить $\oint\limits_L \frac{z}{(z-1)^3(z-2)}dz$, где контур L:

А) $|z-2|=0{,}5$ Б) $|z-1|=0{,}5$ В) $|z|=3$.

Решение.

А) $\oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{z}{(z-1)^3(z-2)}dz = 2\pi i \left.\frac{z}{(z-1)^3}\right|_{z=2} = 2\pi i \frac{2}{1^3} = 4\pi i$.

Б) В этом случае корень знаменателя имеет кратность 3, так что придётся считать с помощью 2-й производной.

Конкретизируем обобщённую формулу Коши для 3 степени:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\text{, при n=2:}\quad f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz\ .$$

Тогда $\oint\limits_{|z-1|=0,5}\frac{z}{(z-1)^3(z-2)}dz = \pi\ i\left(\frac{z}{z-2}\right)''\Bigg|_{z=1} =$

$$\pi\ i\left(\frac{1\cdot(z-2)-1\cdot z}{(z-2)^2}\right)'\Bigg|_{z=1} = \pi\ i\left(\frac{-2}{(z-2)^2}\right)'\Bigg|_{z=1} = \pi\ i\left((-2)(z-2)^{-2}\right)'\Big|_{z=1} =$$

$$\pi\ i\left(4(z-2)^{-3}\right)\Big|_{z=1} = \pi\ i\left(\frac{4}{(z-2)^3}\right)\Bigg|_{z=1} = \pi\ i\frac{4}{(-1)^3} = -4\pi\ i\ .$$

В) $4\pi\ i\ -4\pi\ i\ = 0$.

Ответы. А) $4\pi\ i$ Б) $-4\pi\ i$ В) 0 .

Задача 67. Вычислить $\oint\limits_L \frac{z^4}{z(z-1)^2}dz$, где контур L :

А) $|z|=0{,}5$ Б) $|z-1|=0{,}5$ В) $|z|=3$.

Решение.

А) $\oint\limits_{|z|=0,5}\frac{z^4}{z(z-1)^2}dz = 2\pi\ i\frac{z^4}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=0} = 2\pi\ i\frac{0}{(-1)^2} = 0.$

Б) $\oint\limits_{|z-1|=0,5}\frac{z^4}{z(z-1)^2}dz = 2\pi\ i\left(\frac{z^4}{z}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi\ i\left(z^3\right)'\Big|_{z=1} = 2\pi\ i3z^2\Big|_{z=1} =$

$6\pi\ i$.

В) 0+ $6\pi\ i\ = 6\pi\ i$.

Ответы. А) 0 Б) $6\pi\ i$ В) $6\pi\ i$.

Задача 68. Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)^2}dz$, где контур L:

А) $|z-1|=0{,}5$ Б) $|z-2|=0{,}5$ В) $|z-4|=0{,}5$ Г) $|z|=5$.

Решение. Так как здесь в интеграле уже изначально есть множитель $\frac{1}{2\pi\ i}$, то домножать на $2\pi\ i$ в правой части не нужно.

А) $\left.\frac{z}{(z-2)(z-4)^2}\right|_{z=1} = \frac{1}{(-1)(-3)^2} = -\frac{1}{9}$.

Б) $\left.\frac{z}{(z-1)(z-4)^2}\right|_{z=2} = \frac{2}{1(-2)^2} = \frac{1}{2}$.

В) В отличие от двух первых точек, здесь в знаменателе корень 2-го порядка, поэтому подставляем $z=4$ не сразу, а после вычисления производной.

$$\left.\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)'\right|_{z=4} = \left.\left(\frac{z}{z^2-3z+2}\right)'\right|_{z=4} = \left.\frac{1\cdot(z^2-3z+2)-(2z-3)z}{(z^2-3z+2)^2}\right|_{z=4}$$

$$= \left.\frac{z^2-3z+2-2z^2+3z}{(z-1)^2(z-2)^2}\right|_{z=4} = \left.\frac{2-z^2}{(z-1)^2(z-2)^2}\right|_{z=4} = \frac{-14}{9\cdot 4} = -\frac{7}{18}.$$

Г) По интегральной теореме Коши, сумма интегралов по трём предыдущим контурам: $-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{7}{18}=0$.

Ответы. А) $-\frac{1}{9}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $-\frac{7}{18}$ Г) 0.

Повторение и самостоятельная работа по задачам:

1) Разложение $f(z)$ в виде $u+iv$ и проверка условий Коши-Римана.

2) Восстановление аналитической функции $f(z)$ по одной её части (u или v).

Практика № 9. 29.10.2018

Завершение темы «интегрирование» и самостоятельная:

1) Интеграл по незамкнутой кривой (как в задачах 55-59).

2) Интеграл по замкнутой кривой (как в задачах 63-68).

Задача 69. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}^2 \operatorname{Im} z dz$.

Решение. Несмотря на то, что здесь интеграл по замкнутому контуру, применять интегральную формулу Коши нельзя, ведь функция не аналитическая, т.е. аналитичность нарушена не в изолированных точках, а во всей плоскости.

Сделаем разложение функции на Re и Im.

$$\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}^2 \operatorname{Im} z dz = \oint\limits_{|z|=1} (x-iy)(x-iy)y(dx+idy) =$$

$$\oint\limits_{|z|=1} (x^2-y^2-i2xy)y(dx+idy) = \oint\limits_{|z|=1} ((x^2y-y^3)-i2xy^2)(dx+idy) =$$

$$\oint\limits_{|z|=1} (x^2y-y^3)dx+2xy^2dy+i\oint\limits_{|z|=1} (-2xy^2)dx+(x^2y-y^3)dy \ .$$

После этого введём обычную для такой единичной окружности параметризацию через t: $x=\cos t, y=\sin t$, где $t\in[0,2\pi]$.

При этом $dx=-\sin t dt, dy=\cos t dt$. После того, как выразим через t, получается такое выражение, записанное в две строки:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left((\cos^2 t \sin t - \sin^3 t)(-\sin t) + 2\cos t \sin^2 t \cos t\right)dt \ +$$

$$+i\int\limits_0^{2\pi} \left((-2\cos t \sin^2 t)(-\sin t) + (\cos^2 t \sin t - \sin^3 t)\cos t\right)dt \ .$$

Если привести подобные, то:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^4 t + \sin^2 t \cos^2 t\right)dt + i\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^3 t \cos t + \cos^3 t \sin t\right)dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt + i\int\limits_0^{2\pi} \sin^3 t \cos t dt + i\int\limits_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt$$

далее в действительной части используем формулу понижения степени, а в мнимой части подведение под знак дифференциала.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + i\int_0^{2\pi} \sin^3 t d(\sin t) - i\int_0^{2\pi} \cos^3 t(-\sin t dt) =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + i\int_0^{2\pi} \sin^3 t d(\sin t) - i\int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt + i\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{2\pi} - i\frac{1}{4}\cos^4 t\Big|_0^{2\pi}$$

в мнимой части все интегралы окажутся 0, так как на верхнем и нижнем пределе 0 и 2π, а тригонометрические функции совпадают в точках, отличающихся на 2π, значит, формула Ньютона-Лейбница приведёт к 0.

$$\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} + i\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{2\pi} - i\frac{1}{4}\cos^4 t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{4}(0-0) + i\frac{1}{4}(0-0) - i\frac{1}{4}(1-1) = \pi.$$

Ответ. π.

Задача 70. Вычислить $\int_{AB} (2\bar{z}+1)dz$, где АВ - участок кубической параболы $y = x^3$ от (0,0) до (1,1).

Решение. $\int_{AB} (2\bar{z}+1)dz = \int_{AB} (2(x-iy)+1)(dx+idy) =$

$$\int_{AB} (2x+1)-2iy)(dx+idy) = \int_{AB} (2x+1)dx + 2ydy + i\int_{AB} (-2y)dx + (2x+1)dy.$$

Теперь сведём все получившиеся криволинейные интегралы к одной лишь переменной x, заменяя $y = x^3$ и $dy = 3x^2 dx$, где $x \in [0,1]$.

$$\int_0^1 \left(2x+1+2x^3 3x^2\right)dx + i\int_0^1 \left(-2x^3 + (2x+1)3x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x + 1 + 6x^5\right)dx + i\int_0^1 \left(4x^3 + 3x^2\right)dx =$$

$$\left(x^2\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 + x^6\Big|_0^1 \right) + i\left(x^4\Big|_0^1 + x^3\Big|_0^1 \right) = 3 + 2i .$$

Ответ. $3 + 2i$.

Задача 71. Вычислить $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 1} dz$.

Решение. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz$. Здесь две особые точки, это $i, -i$, они являются полюсами 1 порядка. Тогда в каждой из этих точек применим интегральную формулу Коши.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = 2\pi\, i \frac{1}{z+i}\Bigg|_{z=i} + 2\pi\, i \frac{1}{z-i}\Bigg|_{z=-i} =$$

$$\frac{2\pi\, i}{2i} + \frac{2\pi\, i}{-2i} = \pi - \pi = 0 .$$

Ответ. 0.

Задача 72. Вычислить $\oint\limits_{|z|=10} \frac{1}{(z-1)(z-9)^2} dz$.

Решение. Здесь две особые точки, $z = 1$ полюс 1-го порядка и $z = 9$ полюс 2-го порядка. Для 2-й точки надо применять обобщённую формулу Коши (с производной).

$$\oint\limits_{|z|=10} \frac{1}{(z-1)(z-9)^2} dz = 2\pi\, i \frac{1}{(z-9)^2}\Bigg|_{z=1} + 2\pi\, i \left(\frac{1}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=9} =$$

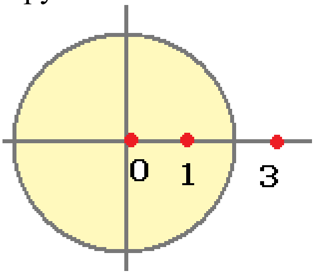
$$2\pi\, i \frac{1}{(z-9)^2}\Bigg|_{z=1} + 2\pi\, i \frac{-1}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=9} = 2\pi\, i \frac{1}{(-8)^2} + 2\pi\, i \frac{-1}{8^2} =$$

$$\frac{2\pi\, i}{64} - \frac{2\pi\, i}{64} = 0 .$$

Ответ. 0.

Задача 73. Вычислить $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)}dz$.

Решение. Внутри окружности радиуса 2 лежат 2 из 3 особых точек, а именно, 0 и 1, точка 3 снаружи.



Поэтому интегральную формулу Коши применяем только к двум точкам.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi\, i \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right|_{z=0} + 2\pi\, i \left.\left(\frac{1}{z(z-3)}\right)'\right|_{z=1}.$$

Предварительно вычислим производную.

$$\left(\frac{1}{z(z-3)}\right)' = \left(\frac{1}{z^2-3z}\right)' = \frac{0-(2z-3)}{(z^2-3z)^2} = \frac{3-2z}{z^2(z-3)^2}.$$

Далее, $2\pi\, i \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right|_{z=0} + 2\pi\, i \left.\frac{3-2z}{z^2(z-3)^2}\right|_{z=1} =$

$$2\pi\, i \left.\frac{1}{(-1)^2(-3)}\right|_{z=0} + 2\pi\, i \left.\frac{3-2}{1^2(-2)^2}\right|_{z=1} = -2\pi\, i\frac{1}{3} + 2\pi\, i\frac{1}{4} =$$

$$\pi\, i\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi\, i}{6}.$$

Ответ. $-\frac{\pi\, i}{6}$.

Практика № 10. 12.11.2018

Особые точки, определение типов особых точек.

Задача 74 (вводная, на знание определения). Найти все особые точки и определить их тип для функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2 (z-3)^4}$.

Решение. Корни знаменателя это $z = i$ (нуль порядка 2) и $z = 3$ (нуль порядка 4). Соответственно, для дроби это полюсы порядка 2 и 4.

Ответ. $z = i$ полюс порядка 2, $z = 3$ полюс порядка 4.

Задача 75. Найти все особые точки и определить их тип для функции

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2 + z + 1}.$$

Решение. Здесь нужно сначала преобразовать выражение в знаменателе, выделить множители, соответствующие каждому корню.

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{1}{z^2(z+1) + (z+1)} = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)} =$$

$\dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+1)}$. Таким образом, полюсы 1-го порядка: $-1, i, -i$.

Ответ. Полюсы 1-го порядка: $-1, i, -i$.

Задача 76. Найти все особые точки и определить их тип для функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + iz + 2}.$$

Решение. Разложим знаменатель на множители, предварительно найдём корни с помощью дискриминанта.

$D = b^2 - 4ac = i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -1 - 8 = -9$. $z = \dfrac{-i \pm 3i}{2}$, корни i, $-2i$.

Тогда $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)(z+2i)}$. Для знаменателя i и $-2i$ нули порядка 1, значит, для функции это полюсы порядка 1.

Ответ. Полюсы 1-го порядка: i, $-2i$.

Задача 77. Найти все особые точки и определить их тип для функции $f(z)=\dfrac{1}{z-z^3}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители,

$$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z(1-z^2)}=\frac{1}{z(1-z)(1+z)}.$$

При $z=0$, $z=1$, $z=-1$ нули 1-го порядка в знаменателе, тогда для функции это полюсы 1 порядка.

Ответ. Полюсы 1-го порядка: $0,1,-1$.

Задача 78. Исследовать тип особой точки $z_0=0$ для $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$.

Решение. Здесь в знаменателе 3-я степень, но в этой точке в числителе тоже 0, и он влияет на итоговый порядок полюса. Надо в числителе разложить в ряд, чтобы остались одни лишь только степенные функции, потом вынесем за скобку минимальную степень, и это будет определять порядок нуля в числителе.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots}{z^3}=\frac{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots\right)}{z^3}$$

В числителе и знаменателе нули соответственно 1-го и 3-го порядка. После сокращения на z видно, что полюс 2 порядка, так как в скобках осталась функция, не стремящаяся к 0 в $z_0=0$.

$$f(z)=\frac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots\right)}{z^2}=\frac{\varphi(z)}{z^2}.$$

Ответ. $z_0=0$ полюс 2 порядка.

Замечание. Другие варианты этой задачи: если $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ то был бы полюс 3 порядка, если $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^3}$ полюс 1 порядка, если $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ то устранимая особая точка.

Задача 79. Найти особые точки и указать их тип: $f(z)=\frac{\ln(z+4)}{(z+3)^6}$.

Решение. Составим разложение в ряд для логарифма в числителе.

Учитывая что $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots$, получится

$$f(z)=\frac{\ln(z+4)}{(z+3)^6}=\frac{\ln(1+(z+3))}{(z+3)^6}=\frac{(z+3)-\frac{(z+3)^2}{2}+\frac{(z+3)^3}{3}-\ldots}{(z+3)^6}$$

видно, что можно вынести за скобку этот элемент $(z+3)$ лишь в 1-й степени, т.е. для числителя, точка $z=-3$ является нулём 1-го порядка.

$$\frac{(z+3)\left(1-\frac{(z+3)}{2}+\frac{(z+3)^2}{3}-\ldots\right)}{(z+3)^6}=\frac{\left(1-\frac{(z+3)}{2}+\frac{(z+3)^2}{3}-\ldots\right)}{(z+3)^5}=\frac{\varphi(z)}{(z+3)^5}$$

Нули 1 и 6 порядков в числителе и знаменателе, вследствие чего получилось, что полюс 5 порядка для всей функции.

Ответ. $z=-3$ полюс 5 порядка.

Задача 80. Найти особые точки и указать их тип: $f(z)=\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$.

Решение. Здесь $(z-2)$ не является множителем в функции, его нельзя вынести за скобку, он внутри синуса.Составим разложение в ряд:

$$f(z)=\sin\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{z-2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(z-2)^5}-...$$

Так как отрицательных степеней бесконечное количество и они никаким порядком не ограничены, точка - существенно-особая. Если бы в знаменателе была наибольшая степень m и всё сводилось бы к структуре $\frac{\varphi(z)}{(z-2)^m}$, был бы полюс порядка m.

Ответ. $z=2$ существенно-особая.

Задача 81. Найти особые точки и указать их тип: $f(z)=\frac{1}{\sin z}$.

Решение. В этой задаче можно исследовать порядок нулей для функции $\frac{1}{f(z)}=\sin z$. Нули синуса это точки $z=\pi k$. При этом, 1-я производная в каждой из них отлична от 0 (ведь это косинус). Геометрически это значит, что график пересекается с осью Ox под углом, а не как парабола. Таким образом, каждая из этих точек является нулём 1-го порядка для $\frac{1}{f(z)}=\sin z$. Тогда для $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ точки $z=\pi k$ полюсы 1-го порядка. Кстати, при этом вне круга какого угодно большого радиуса всегда есть какие-то особые точки, т.е. ∞ не является изолированной особой точкой. При этом $\lim\limits_{z\to\infty}\sin z$ а значит и $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\sin z}$ не существует, т.е. ∞ существенно-особая точка.

Ответ. Точки $z=\pi k$ полюсы 1-го порядка, ∞ существенно-особая.

Задача 82. Исследовать тип особой точки $z=0$ для функции:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z-\frac{z^3}{6}-\sin z}.$$

Решение. Чтобы свести к степенным функциям и узнать порядок нуля в числителе и знаменателе, разложим sin и cos по формуле Тейлора.

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z-\frac{z^3}{6}-\sin z}=\frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)}{z-\frac{z^3}{6}-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=\frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots}{-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\ldots}=$$

$\dfrac{z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)}{z^5\left(-\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}-\ldots\right)}$ теперь видно, что нули соответственно 2-го и 5-го порядка в числителе и знаменателе, тогда после сокращения увидим, что полюс 3 порядка.

$\dfrac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)}{z^3\left(-\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}-\ldots\right)}=\dfrac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z)=\dfrac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)}{\left(-\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}-\ldots\right)}$ не стремится к 0 при $z\to 0$

Ответ. $z=0$ полюс 3-го порядка.

Задача 83. Исследовать тип особой точки $z=\infty$ для $f(z)=\dfrac{z^6}{(1+z)^2}$.

Решение. Во-первых, сразу видно, что $z=-1$ полюс 2-го порядка. Далее, сделаем замену $t=\dfrac{1}{z}$, этим самым мы получим возможность вместо $z=\infty$ исследовать точку $t_0=0$.

$$f(z)=\frac{z^6}{(1+z)^2}\ \Rightarrow\ f(t)=\frac{\frac{1}{t^6}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t^6}\frac{1}{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t^6}\frac{t^2}{(t+1)^2}=$$

$\dfrac{1}{t^4}\dfrac{1}{(t+1)^2}$. Итак, в знаменателе осталось t^4. Точка $t_0=0$ полюс 4-го порядка. Значит, $z=\infty$ полюс 4-го порядка.

Ответ. $z = \infty$ полюс 4-го порядка.

Вычеты.

Напомним формулы вычисления вычетов, доказанные в лекциях.

z_0 полюс порядка 1: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$.

z_0 полюс порядка m: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m\cdot f(z)\right)^{(m-1)}$.

∞ устранимая особая точка: $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right)$

∞ полюс порядка m: $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \dfrac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right)$

Задача 84. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{z}{(z-i)(z+2i)}$

Решение. Точка $z=i$ является полюсом 1-го порядка. Вычисляем по формуле $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z}{(z-i)(z+2i)} = \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{z}{(z-i)(z+2i)}\right) = \lim_{z\to i}\frac{z}{z+2i} = \frac{i}{3i} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

Задача 85. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{z}{(z-i)^2(z+2i)}$

Решение. Точка $z=i$ является полюсом 2-го порядка. Вычисляем по формуле $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m\cdot f(z)\right)^{(m-1)}$ при $m=2$.

Более конкретно эта формулы выглядит так:

$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^2\cdot f(z)\right)'$. В этом конкретном примере получается $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{z}{(z-i)^2(z+2i)} = \lim\limits_{z\to i}\left((z-i)^2\cdot\dfrac{z}{(z-i)^2(z+2i)}\right)' =$

$$\lim_{z\to i}\left(\frac{z}{z+2i}\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{z+2i-z}{(z+2i)^2}\right) = \left.\frac{2i}{(z+2i)^2}\right|_i = \frac{2i}{(3i)^2} = -\frac{2i}{9}.$$

Ответ. $-\dfrac{2i}{9}$.

Задача 86. Вычислить вычеты во всех особых точках и в ∞ для функции $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$.

Решение. Особые точки здесь 1 и -2, полюсы 1 порядка.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \lim_{z\to 1}\left((z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z+2)}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{z+2}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \lim_{z\to -2}\left((z+2)\cdot\frac{z}{(z-1)(z+2)}\right) = \lim_{z\to -2}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{2}{3}.$$

Для вычисления $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ покажем 2 способа:

Способ 1. Использовать тот факт, что $\operatorname*{Res}_{z=\infty}$ противоположен сумме всех вычетов в конечных особых точках. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z}{(z-1)(z+2)} = -\left(\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{(z-1)(z+2)} + \operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{z}{(z-1)(z+2)}\right) = -\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Способ 2. По формуле $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right)$. Заметим, что здесь ∞ является устранимой особой точкой, ведь $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}=0$, т.к. степень числителя меньше степени знаменателя.

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right) = \lim_{z\to\infty}\left(z^2\left(\frac{z}{z^2+z-2}\right)'\right) =$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(z^2\,\frac{(z^2+z-2)-(2z+1)z}{(z^2+z-2)^2}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(z^2\,\frac{-z^2-2}{(z^2+z-2)^2}\right) =$$

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{-z^4-2z^2}{z^4+\ldots}\right)=-1$ т.к. старшая степень 4 одна и та же и в числителе, и в знаменателе. Соотношение коэффициентов при старших степенях равно -1.

Ответ. $\operatorname*{Res}\limits_{z=1} f = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-2} f = \dfrac{2}{3}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f = -1$.

Задача 87. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}\limits_{z=3}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-3)^3}$.

Решение. Точка $z=3$ является полюсом 3 порядка.
При этом формула приобретает вид (при $m=3$):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^3\cdot f(z)\right)''.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-3)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 3}\left((z-3)^3\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-3)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)'' =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 3}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$-\frac{\pi^2}{8}(-1) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Задача 88. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)$

Решение. Здесь $z=0$ существенно особая точка (см. аналогично задаче 80). Поэтому ни одна из формул не подходит, а можно найти только с помощью коэффициента a_{-1} ряда Лорана.

Разложим в ряд Лорана:

$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \ldots$, здесь коэффициент $a_{-1} = 1$.

Ответ. 1.

Задача 89. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{(z-1)^2(z^2-1)}$

Решение. Несмотря на то, что видим здесь $(z-1)^2$, тем не менее, полюс $z=1$ не 2-го порядка, потому что в другом множителе тоже присутствует $(z-1)$.

$$\frac{z}{(z-1)^2(z^2-1)} = \frac{z}{(z-1)^2(z-1)(z+1)} = \frac{z}{(z-1)^3(z+1)}.$$

Таким образом, $z=1$ полюс 3 порядка.

Тогда $\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{(z-1)^3(z+1)} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{z}{z+1}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{(z+1)-z}{(z+1)^2}\right)' =$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{-2}{(z+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{2^3} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ. $-\frac{1}{8}$.

Практика № 11. 19.11.2018

Задача 90. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \dfrac{z^2}{(z+2)}$.

Решение. (2 способа).
1) С помощью перехода к конечным особым точкам.
2) С помощью формулы в ∞.

Способ 1. Заметим, что здесь всего одна особая точка в плоскости, это $z=-2$. Таким образом, вычет в ∞ противоположен вычету в $z=-2$. Этот метод очень удобен, когда мало конечных особых точек. Но наоборот, неудобен, когда слишком много особых точек, т.е. когда в знаменателе многочлен большой степени, когда даже поиск корней будет слишком сложной проблемой.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^2}{(z+2)} = -\operatorname*{Res}_{z=-2} \frac{z^2}{(z+2)} = -\lim_{z\to-2}\left((z+2)\frac{z^2}{(z+2)}\right) = -\lim_{z\to-2}\left(z^2\right) =$$

$$-z^2\Big|_{z=-2} = -4.$$

Способ 2. По формуле. Тогда надо сначала определить порядок полюса m, чтобы знать, какую формулу применить.

$f(z)=\dfrac{z^2}{(z+2)}$. Если сделать замену $t=\dfrac{1}{z}$, то можно будет исследовать порядок полюса в точке $t=0$. Итак, $f(t)=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}+2}$ $=$

$$\frac{1}{t^2}\frac{1}{\frac{1+2t}{t}} = \frac{1}{t^2}\frac{t}{1+2t} = \frac{1}{t(1+2t)}.$$ Полюс $t=0$ порядка 1, а значит и $z=\infty$ полюс порядка 1. Впрочем, это можно было заметить и по виду функции: степень числителя на 1 больше, чем знаменателя.

Итак, надо применить формулу для полюса при $m=1$.

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right) \text{ при } m=1.$$

Конкретизируем её для $m=1$.

$\operatorname{Res}\limits_{\infty} f(z) = \dfrac{-1}{2!}\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^3 f''(z)\right)$. Найдём 2-ю производную. Всё делаем по формуле $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}, \qquad f'(z) = \frac{2z(z+2) - z^2}{(z+2)^2} = \frac{z^2+4z}{(z+2)^2}.$$

$$f''(z) = \frac{(2z+4)(z+2)^2 - 2(z+2)(z^2+4z)}{(z+2)^4} = \frac{(2z+4)(z+2) - 2(z^2+4z)}{(z+2)^3}$$

$$= \frac{2z^2 + 8z + 8 - 2z^2 - 8z}{(z+2)^3} = \frac{8}{(z+2)^3}.$$ Тогда

$$\operatorname{Res}\limits_{\infty} f(z) = \frac{-1}{2!}\lim_{z\to\infty}\left(z^3 f''(z)\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\left(z^3\frac{8}{(z+2)^3}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{8z^3}{z^3+6z^2+12z+8}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 8 = -4.$$

Ответ. -4.

Задача 91. Вычислить вычет $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty}\dfrac{z^4}{z^4-1}$.

Решение. (2 способа).

Способ 1. С посощью перехода к сумме вычетов в конечных точках.

$$\frac{z^4}{z^4-1} = \frac{z^4}{(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{z^4}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}.$$ Здесь 4 особых точки, это $\pm 1, \pm i$. $\operatorname{Res}\limits_{z=\infty}\dfrac{z^4}{z^4-1} =$

$$-\left(\operatorname{Res}_{z=i}\frac{z^4}{z^4-1} + \operatorname{Res}_{z=-i}\frac{z^4}{z^4-1} + \operatorname{Res}_{z=1}\frac{z^4}{z^4-1} + \operatorname{Res}_{z=-1}\frac{z^4}{z^4-1}\right) =$$

$$-\left(\left.\frac{z^4}{(z+i)(z^2-1)}\right|_i + \left.\frac{z^4}{(z-i)(z^2-1)}\right|_{-i} + \left.\frac{z^4}{(z^2+1)(z+1)}\right|_1 + \left.\frac{z^4}{(z^2+1)(z-1)}\right|_{-1}\right)$$

$= -\left(\frac{1}{2i(-2)}+\frac{1}{-2i(-2)}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot(-2)}\right) = 0$, т.к. 1-е и 2-е слагаемое противоположны, и 3-е с 4-м тоже.

Способ 2. По формуле. $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^4}{z^4-1} = 1$, то ∞ устранимая особая точка. Тогда надо считать по формуле $\operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right)$.

$\left(\frac{z^4}{z^4-1}\right)' = \frac{4z^3(z^4-1)-4z^3z^4}{(z^4-1)^2} = \frac{-4z^3}{(z^4-1)^2}$, тогда

$\operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(z^2\frac{-4z^3}{(z^4-1)^2}\right) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{-4z^5}{z^8+\ldots}\right) = 0$, т.к. наивысшая степень в числителе 5-я а в знаменателе 8-я.

Ответ. 0.

Задача 92. Вычислить вычет $\operatorname*{Res}\limits_{z=7}\frac{1}{(z-7)^3(z-5)^2}$.

Решение. Здесь 7 это полюс 3-го порядка. Тогда надо использовать формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m\cdot f(z)\right)^{(m-1)}$, которая при $m=3$ выглядит так: $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^3\cdot f(z)\right)''$.

Итак, $\operatorname*{Res}\limits_{z=7}\frac{1}{(z-7)^3(z-5)^2} = \frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 7}\left((z-7)^3\cdot\frac{1}{(z-7)^3(z-5)^2}\right)'' =$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 7}\left(\frac{1}{(z-5)^2}\right)'' = \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 7}\left(\frac{(-2)}{(z-5)^3}\right)' = \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 7}\left(\frac{(-2)(-3)}{(z-5)^4}\right) = \left.\frac{3}{(z-5)^4}\right|_7 =$

$\frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$.

Ответ. $\frac{3}{16}$.

Задача 93. Вычислить вычет $\underset{z=7}{\operatorname{Re}s}\,\dfrac{1}{(z-7)^4(z-5)^2}$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь полюс 4-го порядка, так что формула $\underset{z=z_0}{\operatorname{Re}s}\, f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m \cdot f(z)\right)^{(m-1)}$

приобретёт вид: $\underset{z=z_0}{\operatorname{Re}s}\, f(z) = \dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^4 \cdot f(z)\right)^{(3)}$.

$$\underset{z=7}{\operatorname{Re}s}\,\frac{1}{(z-7)^4(z-5)^2} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{1}{(z-5)^2}\right)^{(3)} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)}{(z-5)^3}\right)'' =$$

$$\frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)(-3)}{(z-5)^4}\right)' = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{(-2)(-3)(-4)}{(z-5)^5}\right) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 7}\left(\frac{3!(-4)}{(z-5)^5}\right) = \left.\frac{-4}{(z-5)^5}\right|_7$$

$$= \frac{-4}{2^5} = -\frac{2^2}{2^5} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{8}$.

Задача 94. Вычислить вычет $\underset{z=i}{\operatorname{Re}s}\,\dfrac{e^{z^2}}{(z-i)^2}$.

Решение. Здесь точка $z=i$ полюс 2-го порядка.

Тогда $$\underset{z=i}{\operatorname{Re}s}\,\frac{e^{z^2}}{(z-i)^2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\cdot f(z)\right)' = \lim_{z\to i}\left(e^{z^2}\right)' = \lim_{z\to i}\left(2ze^{z^2}\right) =$$

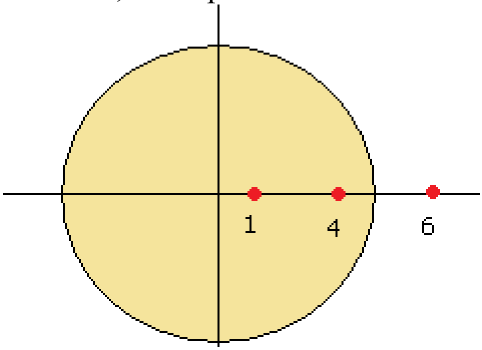
$$2i\cdot e^{-1} = \frac{2i}{e}.$$

Ответ. $\dfrac{2i}{e}$.

Приложения вычетов.

Задача 95. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=4,5}\dfrac{1}{(z-1)^2(z-4)(z-6)}dz$.

Решение. Так как радиус равен 4,5 то точки 1 и 4 внутри круга, а 6 снаружи. Поэтому интеграл считается с помощью суммы двух вычетов, а не трёх.



$\dfrac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=4,5}\dfrac{1}{(z-1)^2(z-4)(z-6)}dz = \operatorname*{Res}\limits_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=4} f(z)$. Одна из точек ($z=1$) это полюс 2-го порядка, в том случае надо считать производную, а там где полюс 1-го порядка ($z=4$) не нужно.

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=4} f(z) = \left.\left(\frac{1}{(z-4)(z-6)}\right)'\right|_1 + \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-6)}\right|_4 =$$

$$\left.\left(\frac{1}{z^2-10z+24}\right)'\right|_1 + \frac{1}{3^2(-2)} = \left.\frac{-(2z-10)}{(z^2-10z+24)^2}\right|_1 + \frac{1}{9(-2)} =$$

$$\left.\frac{-(2z-10)}{(z-4)^2(z-6)^2}\right|_1 + \frac{1}{9(-2)} = \frac{-(-8)}{(-3)^2(-5)^2} + \frac{1}{9(-2)} = \frac{8}{9\cdot 25} + \frac{1}{9(-2)} =$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{8}{25}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{16}{50}-\frac{25}{50}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{-9}{50} = -\frac{1}{50}.$$

Для технического удобства вычисления производной мы сначала перемножили в знаменателе, а потом снова разъединили множители.

Ответ. $-\dfrac{1}{50}$.

Задача 96. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{|z|=5}\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2(z-6)}dz$.

Решение. Здесь очевидно, точки 2 и 4 внутри круга, 6 снаружи, так как радиус равен 5.

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{|z|=5}\frac{1}{(z-2)(z-4)^2(z-6)}dz = \underset{z=2}{\mathrm{Res}}\, f(z)+\underset{z=4}{\mathrm{Res}}\, f(z) =$$

$$\left.\frac{1}{(z-4)^2(z-6)}\right|_2+\left.\left(\frac{1}{(z-2)(z-6)}\right)'\right|_4 = \frac{1}{(-2)^2(-4)}+\left.\left(\frac{1}{z^2-8z+12}\right)'\right|_4 =$$

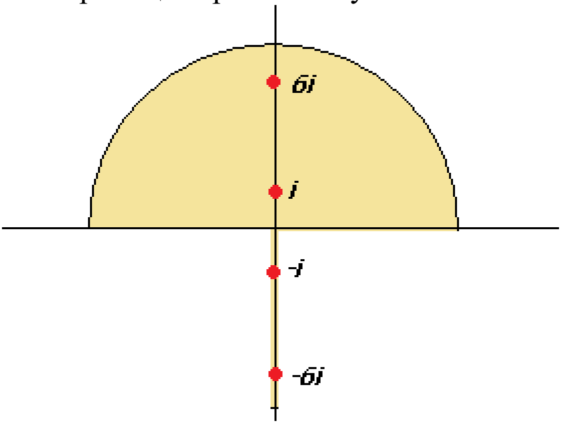
$$-\frac{1}{16}+\left.\frac{-(2z-8)}{(z^2-8z+12)^2}\right|_4 = -\frac{1}{16}+\left.\frac{-(2z-8)}{(z-2)^2(z-6)^2}\right|_4 = -\frac{1}{16}+\frac{0}{2^2(-2)^2} =$$

$$-\frac{1}{16}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{16}$.

Задача 97. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+36)}$, её можно представить в виде $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+6i)(z-6i)}$, есть 4 полюса первого порядка: $\pm i, \pm 6i$. Интеграл по границе верхнего полукруга равен сумме вычетов в 2 точках, а именно $i, 6i$. Если радиус больше 6, то обе точки внутри полукруга, и при дальнейшем увеличении радиуса интеграл уже не изменится. При этом из теории известно, что при увеличении радиуса, доля результата, приходящегося на горизонтальный отрезок, растёт, а по дуге - стремится к 0, потому что здесь степень знаменателя на 4 больше, чем числителя, то есть модуль функции величина порядка $\frac{1}{R^4}$, а дуга длины πR. Поэтому интеграл по дуге меньше, чем $\frac{\pi}{R^3}$, и стремится к 0. В пределе, действительная ось - граница верхней полуплоскости.



Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)} dx = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=6i} f(z) \right)$,

где $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+6i)(z-6i)}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+36)} dx = 2\pi i \left(\left. \frac{1}{(z+i)(z^2+36)} \right|_i + \left. \frac{1}{(z^2+1)(z+6i)} \right|_{6i} \right) =$$

$$2\pi i \left(\frac{1}{(2i)35} + \frac{1}{(-35)(12i)} \right) = \frac{2\pi i}{35i} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2\pi}{35} \cdot \frac{5}{12} = \frac{\pi}{6 \cdot 7} = \frac{\pi}{42}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{42}$.

Практика № 12.   26.11.2018

Задача 98. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$. Найдём корни знаменателя, т.е. полюсы функции. $D=1-4=-3$, тогда $z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ $= \ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Поскольку 2 сопряжённых корня, один вверхней полуплоскости, а другой в нижней. Вычет надо будет вычислять только в точке $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx = 2\pi\ i\left(\operatorname*{Re s}_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{1}{\left(z-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}\right)=$$

$$2\pi\ i\frac{1}{z-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\Bigg|_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2\pi\ i\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} =$$

$$2\pi\ i\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Задача 99. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+20}dx$.

Решение. Найдём корни знаменателя функции $\frac{1}{z^2+4z+20}$.

$D = 16 - 4\cdot 20 = 16 - 80 = -64$. Тогда $z = \frac{-4 \pm 8i}{2} = -2 \pm 4i$.

В верхней полуплоскости только один полюс, $-2+4i$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+20}dx = 2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{z=-2+4i} \frac{1}{(z-(-2+4i))(z-(-2-4i))}\right) =$$

$$2\pi\, i \left.\frac{1}{z-(-2-4i)}\right|_{-2+4i} = 2\pi\, i \frac{1}{-2+4i+2+4i} = \frac{2\pi\, i}{8i} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

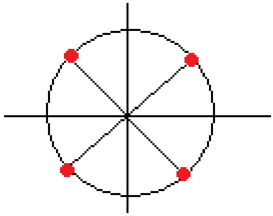
Замечание. Для сравнения, покажем и решение методами прошлого семестра, без комплексных чисел и вычетов. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+20}dx =$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2+4^2}dx = \frac{1}{4} arctg\left(\frac{x+2}{4}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 100. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$.

Решение. Для функции $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ полюсы это корни 4 степени из -1. Решим уравнение $z^4 = -1$.

Вспомним формулу $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$. В нашем случае получается $\sqrt[4]{-1}=1\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$, т.е. на единичной окружности есть 4 точки, соответствующие аргументам $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Эти 4 точки можно записать в виде $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$. Вот они на чертеже:



Две из них, а именно $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$, в верхней полуплоскости. То есть, надо будет найти сумму вычетов в 2 из 4 полюсов для функции $\frac{1}{z^4+1}$, которую можно представить в виде:

$$\frac{1}{\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)}$$

В первом случае в знаменателе пропадает 1-я скобка, во втором - 4-я.

$$\left.\frac{2\pi\, i}{\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}+$$

$$\left.\frac{2\pi i}{\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)}\right|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}} =$$

$$\frac{2\pi i}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}\right)}+\frac{2\pi i}{\left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)} =$$

$$\frac{2\pi i}{\left(\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}\right)}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}+\frac{1}{(-1)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}\right) = \frac{2\pi i}{2i}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)}\right).$$

Далее приводим к общему знаменателю, причём там умножаются сопряжённые числа.

$$\pi\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)} = \pi\frac{2\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Задача 101. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$.

Решение. В этом примере, если решать без вычетов, решение было бы более громоздким: надо было бы дважды применять рекуррентную формулу из прошлого семестра, чтобы от 3 степени перейти ко 2-й и затем к 1-й. А с помощью вычетов, будет просто один вычет в полюсе порядка 3.

$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$. В верхней полуплоскости только один полюс $z=i$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx = 2\pi i\cdot\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\left.\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''\right|_i =$$

$$\pi\, i\left(\frac{(-3)}{(z+i)^4}\right)'\Bigg|_i = \pi\, i\left(\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}\right)\Bigg|_i = \pi\, i\frac{12}{(2i)^5} = \pi\, i\frac{2^2 3}{2^5 i^5}\ .$$

Учитывая, что $i^4 = (-1)^2 = 1$, тогда $i^5 = i$, далее:

$$\pi\, i\frac{2^2 3}{2^5 i^5} = \pi\, i\frac{3}{2^3 i} = \frac{3}{8}\pi .$$

Ответ. $\frac{3}{8}\pi$.

Интегралы типа $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin axdx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos axdx$ вычисляются в комплексе, одним действием, если вместо sin и cos рассмотреть e^{aiz}.

По формуле Эйлера, $e^{aiz} = \cos az + i\sin az$. Тогда

$$\oint\limits_L f(z)\cos azdz + i\oint\limits_L f(z)\sin azdz = \oint\limits_L f(z)e^{aiz}dz = 2\pi\, i\left(\sum \operatorname{Re}s\left(f(z)e^{aiz}\right)\right)$$

по всем полюсам в области. Если же область это верхняя полуплоскость, а граница - действительная ось, то сумма вычетов по всем полюсам в верхней полуплоскости. Тогда получается, что:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos axdx = \operatorname{Re}\left(2\pi\, i\left(\sum \operatorname{Re}s\left(f(z)e^{aiz}\right)\right)\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin axdx = \operatorname{Im}\left(2\pi\, i\left(\sum \operatorname{Re}s\left(f(z)e^{aiz}\right)\right)\right)$$

то есть вычислив $2\pi\, i\left(\sum \operatorname{Re}s\left(f(z)e^{aiz}\right)\right)$, затем достаточно найти Re и Im получившегося комплексного числа.

Задача 102. Вычислить интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+4}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+4} = \frac{ze^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}$. Здесь всего лишь один полюс в верхней полуплоскости, а именно $z = 2i$.

Тогда $2\pi\ i \operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\dfrac{ze^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}\right) = 2\pi\ i \left.\dfrac{ze^{iz}}{z+2i}\right|_{2i} = 2\pi\ i\dfrac{2ie^{-2}}{4i} =$

$2\pi\ i\dfrac{2e^{-2}}{4} = \dfrac{\pi}{e^2}i$. При этом $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\pi}{e^2}i\right)=0$, $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\pi}{e^2}i\right)=\dfrac{\pi}{e^2}$.

Ответ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{e^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+4}dx = 0$.

Замечание. Кстати, интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\cos x}{x^2+4}dx$ можно записать и в таком виде, что выделить чётную и нечётную компоненту, т.е. под интегралом нечётная функция (произведение нечётной на чётную), и результат по правой и левой полуосям взаимоуничтожается. Поэтому можно было сразу заметить, что он равен 0.

Далее изучим задачи на вычисление интегралов $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin x,\cos x)dx$.

При этом применяется замена $z=e^{ix}$*, чтобы свести к интегралу по единичной окружности в комплексной плоскости. Тогда:*

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{1}{iz}dz.$$

Задача 103. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx$.

Решение. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx = \oint_{|z|=1}\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right)\frac{1}{z}dz =$

$\displaystyle\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}\right)dz$, разобьём на сумму 3 интегралов:

$\frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1} z dz + \frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3} dz + \frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{z} dz$. В первом, аналитическая функция, не имеющая особых точек. Интеграл от неё по замкнутому контуру равен 0. Во 2-м и 3-м слагаемом, единственным полюсом является точка $z=0$, но в одном из них полюс 3 порядка, а в другом 1 порядка. Там, где полюс 3-го порядка, надо вычислить 2-ю производную от числителя, но 2 производная от константы равна 0. И только в 3-м слагаемом при вычислении вычета остаётся ненулевой результат, потому что там полюс 1 порядка, и производную от константы считать не нужно. Подставлять $z=0$ в функцию, тождественно равную 2, тоже нет необходимости, ведь она равна 2 в любой точке.

$$0 + \frac{2\pi i}{4i}\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3} + \frac{2\pi i}{4i}\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{2}{z} = 0 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2!}(1)''\Big|_0 + \frac{\pi}{2}2 = 0 + \frac{\pi}{2}\cdot 0 + \pi = \pi .$$

А для сравнения, можно было решить и старым методом, без комплексных чисел. Применим формулу понижения степени.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{2\pi - 0}{2} + \frac{0-0}{4} = \pi + 0 = \pi .$$

Ответ. π.

Задача 104. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$.

Решение. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz} dz$

Чтобы упростить это выражение, сначала домножим на z в числителе и знаменателе, затем на 2, затем домножим i, которое есть в знаменателе, на все слагаемые слева от него.

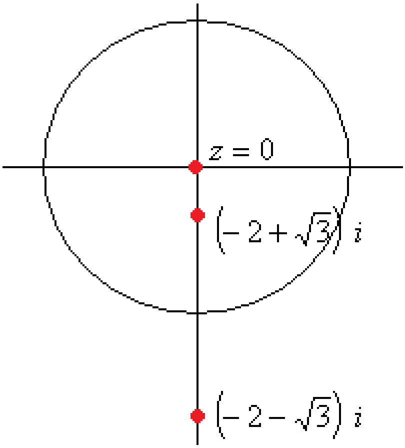
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2+1\right)}{2z+\frac{1}{2i}\left(z^2-1\right)} \frac{1}{iz} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)}{4z+\frac{1}{i}\left(z^2-1\right)} \frac{1}{iz} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)}{4iz+\left(z^2-1\right)} \frac{1}{z} dz$$

Отдельный множитель z в знаменателе наоборот, лучше не объединять со знаменателем большой дроби, ведь он и так соответствует полюсу $z=0$. Чтобы не приводить к 3-й степени и не усложнять поиск корней многочлена, лучше оставить это z отдельно, и найти 2 корня многочлена второй степени.

Итак, получили $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)}{z^2+4iz-1} \cdot \frac{1}{z} dz$. Один полюс $z=0$ видно сразу, ищем 2 других. Ищем корни многочлена $z^2+4iz-1$.

$D=(4i)^2-4(-1)=-16+4=-12$. $z=\frac{-4i\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{-4i\pm 2\sqrt{3}i}{2} =$ $\left(-2\pm\sqrt{3}\right) i$. При этом $\left(-2-\sqrt{3}\right) i$ по модулю больше 1, т.е. этот полюс вне единичного круга, а точка $\left(-2+\sqrt{3}\right) i$ внутри круга.

Итак, 2 из 3 полюсов внутри круга радиуса 1, т.е. интеграл определяется суммой вычетов в них.



Подынтегральную функцию можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{\left(z^2+1\right)}{\left(z-\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i\right)\left(z-\left(-2-\sqrt{3}\right)\,i\right)}\cdot\frac{1}{z}$$ впрочем, когда мы будем считать вычет в 0, те две скобки можем для краткости опять объединить.

Итак, мы должны вычислить $2\pi\ i\left(\underset{z=0}{\operatorname{Re}s}\ f(z)+\underset{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i}{\operatorname{Re}s}\ f(z)\right)$, причём полюсы 1-го порядка.

$$2\pi\ i\left(\left.\frac{\left(z^2+1\right)}{z^2+4iz-1}\right|_0+\left.\frac{\left(z^2+1\right)}{\left(z-\left(-2-\sqrt{3}\right)\,i\right)z}\right|_{\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i}\right)=$$

$$2\pi\ i\left(\frac{1}{-1}+\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)^2\ i^2+1}{\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i-\left(-2-\sqrt{3}\right)\,i\right)\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i}\right)=$$

$$2\pi\ i\left(-1+\frac{-\left(-2+\sqrt{3}\right)^2+1}{2\sqrt{3}i\left(-2+\sqrt{3}\right)\,i}\right)=2\pi\ i\left(-1+\frac{-\left(4+3-4\sqrt{3}\right)+1}{-2\sqrt{3}\left(-2+\sqrt{3}\right)}\right)=$$

$$2\pi\ i\left(-1+\frac{4\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}\right)=2\pi\ i\left(-1+\frac{4\sqrt{3}-6}{4\sqrt{3}-6}\right)=2\pi\ i\left(-1+1\right)=0.$$

Для сравнения, покажем решение этой задачи методами прошлого семестра, без вычетов. Можно было применить универсальную тригонометрическую подстановку, но лучше подвести под знак дифференциала.

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{d(\sin x)}{2+\sin x}=\int_0^{2\pi}\frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}=\ln\left|2+\sin x\right|\Big|_0^{2\pi}=\ln 2-\ln 2$$

$=0$. **Ответ.** 0.

Практика № 13.   03.12.2018

Задача 105. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$.

Решение. Здесь надо сделать замену $z = e^{ix}$, при которой:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{1}{iz}dz.$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{5+4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{5+2\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{z}dz =$$

$$\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{5z+2(z^2+1)}dz = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}dz.$$

Теперь найдём корни многочлена в знаменателе, тем самым найдём полюсы функции.

$D = 25-4\cdot2\cdot2 = 9$. $z = \frac{-5\pm3}{4}$, корни $-\frac{1}{2}$ и -2. Один из них, очевидно, внутри единичного круга, другой снаружи. Поэтому надо будет найти всего один вычет.

С учётом найденных полюсов, интеграл запишется в виде:

$$\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz = 2\pi\, i\frac{1}{i}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right) =$$

$$2\pi\left.\frac{1}{2(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = 2\pi\frac{1}{2\left(2-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\pi.$$

Ответ. $\frac{2}{3}\pi$.

Задача 106. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 x dx$.

Решение. Сделаем ту же замену что и в прошлой задаче.

$z = e^{ix}$, $\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $dx = \frac{1}{iz} dz$.

Тогда $\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 x dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2^4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 \cdot \frac{1}{iz} dz$,

вынесем за знак интеграла все константы, получим

$$\frac{1}{16i} \oint\limits_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 \cdot \frac{1}{z} dz = \frac{1}{16i} \oint\limits_{|z|=1} \left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{1}{z} dz =$$

$$\frac{1}{16i} \oint\limits_{|z|=1} \left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) \cdot \frac{1}{z} dz = \frac{1}{16i} \oint\limits_{|z|=1} \left(z^3 + 4z + \frac{6}{z} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right) dz$$

что далее можно представить в виде суммы 5 интегралов. Для 1-го и 2-го из них функции вообще не имеет особых точек внутри круга радиуса 1, эти слагаемые 0. Исследуем 3 последних.

$\frac{1}{16i}\left(\oint\limits_{|z|=1} \frac{6}{z} dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{4}{z^3} dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^5} dz \right)$, каждый считается с помощью вычета внутри круга, причём для всех полюс это точка $z = 0$. Но в одном случае это полюс 1 порядка, а в других 3-го и 5-го. Если полюс кратный, то находится производная от числителя, а он равен константе, значит, производная равна 0. Таким образом, два последних интеграла тоже 0.

$$\frac{2\pi i}{16i}\left(\operatorname*{Res}_{z=0} s \frac{6}{z} + \operatorname*{Res}_{z=0} s \frac{4}{z^3} + \operatorname*{Res}_{z=0} s \frac{1}{z^5} \right) = \frac{\pi}{8}\left(6 + \frac{1}{2!}(4)'' + \frac{1}{4!}(1)^{(4)} \right) =$$

$$\frac{\pi}{8}(6 + 0 + 0) = \frac{6}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi .$$

Ответ. $\frac{3}{4}\pi$.

Задача 107. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

Решение. В соответствии с тем методом, который был описан на странице 86 перед задачей 102, здесь надо рассмотреть функцию $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$, она имеет 4 полюса $i,-i,2i,-2i$, из них $i,2i$ в верхней полуплоскости. Надо будет искать с помощью суммы вычетов в $i,2i$.

$$\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\sum \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)\right)=$$

$$\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left(\operatorname{Re}\underset{i}{s}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)+\operatorname{Re}\underset{2i}{s}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)\right)\right)$$

учитывая тот факт, что $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$,

здесь мы в 1 слагаемом надо устранить из знаменателя множитель $(z-i)$, во втором $(z-2i)$.

$$\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left(\left.\frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right|_i+\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{2i}\right)\right) =$$

$$\operatorname{Re}\left(2\pi\ i\left(\frac{e^{-1}}{2i\cdot 3}+\frac{e^{-2}}{(-3)4i}\right)\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi\left(\frac{e^{-1}}{6}-\frac{e^{-2}}{12}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{e^{-1}}{6}-\frac{e^{-2}}{12}\right) =$$

$$\frac{2\pi}{12}\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}\right) = \frac{\pi}{6e}\left(2-\frac{1}{e}\right).$$

Ответ. $\frac{\pi}{6e}\left(2-\frac{1}{e}\right)$.

Ещё серия подобных задач на повторение перед контрольной.

Задача 108 А. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь в числителе нет e,

$$2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{i}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)+\operatorname*{Res}_{2i}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)\right)=$$

$$2\pi\, i\left(\left.\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{i}+\left.\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{2i}\right)=\ 2\pi\, i\left(\frac{1}{2i\cdot 3}+\frac{1}{(-3)4i}\right)=$$

$$2\pi\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)=2\pi\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

Задача 108 Б. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, в верхней полуплоскости полюс 2 порядка, зато всего один.

$$2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{2i}\frac{1}{(z^2+4)^2}\right)=2\pi\, i\left.\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)'\right|_{2i}=2\pi\, i\left.\frac{-2}{(z+2i)^3}\right|_{2i}=$$

$$2\pi\, i\frac{-2}{(4i)^3}=\frac{-4\pi\, i}{4^3 i^3}=\frac{-\pi\, i}{4^2(-i)}=\frac{\pi}{16}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{16}$.

Задача 108 В. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$..

Решение. $2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{2i}\frac{z^2}{(z^2+4)^2}\right)=2\pi\, i\left.\left(\frac{z^2}{(z+2i)^2}\right)'\right|_{2i}=$

$$2\pi\, i\frac{2z(z+2i)^2-2(z+2i)z^2}{(z+2i)^4}\Bigg|_{2i} = 2\pi\, i\frac{2z(z+2i)-2z^2}{(z+2i)^3}\Bigg|_{2i} =$$

$$2\pi\, i\frac{4iz}{(z+2i)^3}\Bigg|_{2i} = 2\pi\, i\frac{-8}{4^3 i^3} = 2\pi\frac{-8}{4^3 i^2} = 2\pi\frac{-8}{4^3(-1)} = \frac{16\pi}{4^3} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Ряды Фурье.
Тригонометрический ряд Фурье.

Задача 109. Разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in(-1,0)\\ 1, x\in(0,1)\end{cases}.$$

Решение. Здесь $l=1$, функция ступенчатая, на левой половине тождественно равна 0. Поэтому при вычислениях надо будет учесть только интеграл от 0 до 1.

$a_0 = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}0dx+\int_{0}^{1}1dx\right) = 1$. Тогда $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$. Кстати, это и есть средняя высота графика этой функции.

$a_n = \frac{1}{1}\left(\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)dx\right) = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = 0$ так как синус любого угла, кратного π, есть 0. В ряде Фурье не будет косинусов. Впрочем, об этом можно было догадаться и сразу и не считать интегралы: ведь если сместить этот график вниз на 1/2, то получится нечётная функция. $b_n = \frac{1}{1}\left(\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)dx\right) = \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 =$

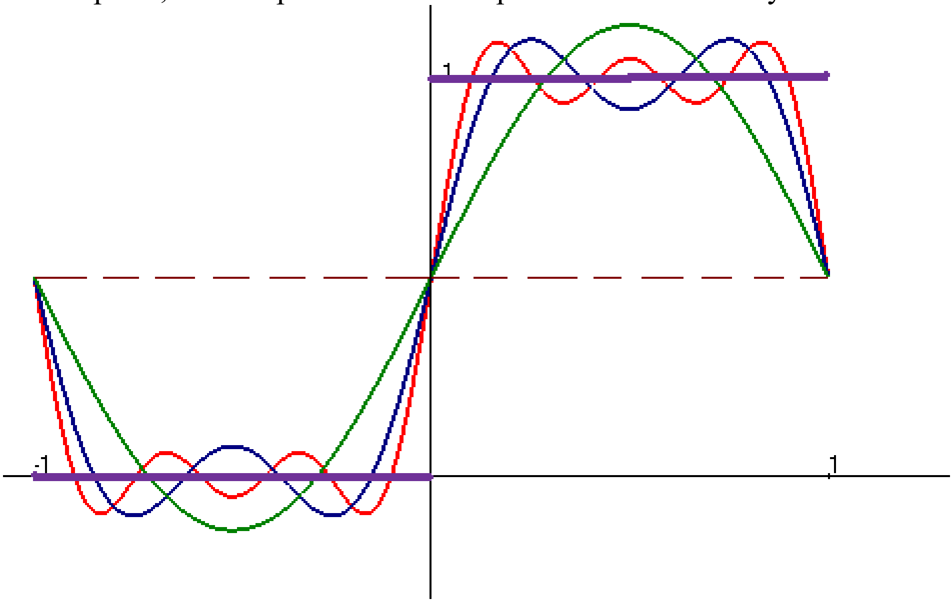
$$\frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Ответ. Ряд Фурье: $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

Подробнее изучим строение частичных сумм. Видно, что при чётном n коэффициент равен 0. Получается:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x)+\frac{2}{5\pi}\sin(5\pi x)+\ldots$$

Вот чертёж, на котором показано строение частичных сумм.



Жирная фиолетовая линия - это исходная ступенчатая функция, пунктирная линия - константа $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$ (средняя высота) , зелёный, синий и красный графики это суммы:

$f_1(x) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)$, $f_2(x) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x)$,

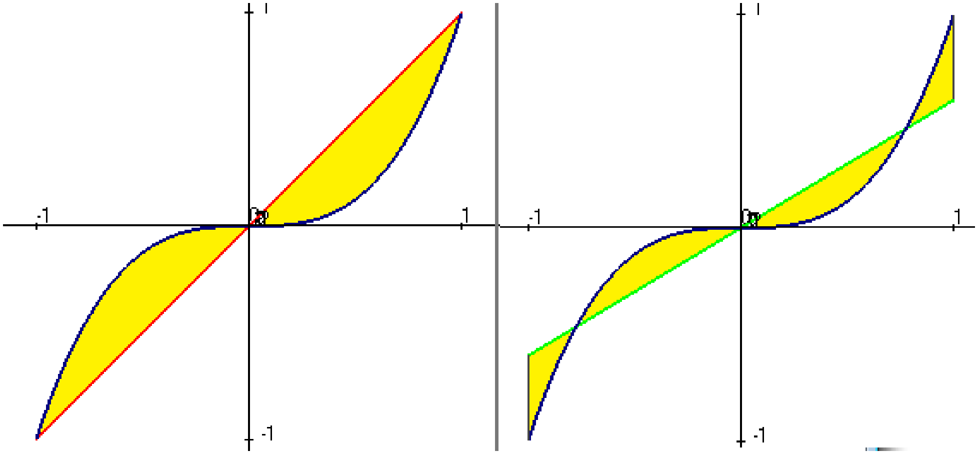
$f_3(x) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x)+\frac{2}{5\pi}\sin(5\pi x)$.

Чем больше слагаемых содержит частичная сумма и чем большие частоты учтены, тем меньше среднеквадратичное отклонение от исходной функции.

Практика № 14.   10.12.2018

Задача 110. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(x) = x^3$ среди линейных функций $y = kx + b$ на $[-1,1]$.

Решение. Среднеквадратичное отклонение пропорционально такому интегралу от квадрата разности: $\int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 - (kx+b)\right)^2 dx$.



На чертеже видно, что если провести прямую через точки $(-1,-1)$ и $(1,1)$, то отклонение не получится наименьшим. А если угол наклона сделать чуть меньше, то получится. Так вот, мы и должны вычислить, какой именно угол наклона обеспечит наименьшее отклонение.

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 - (kx+b)\right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^6 - 2x^3(kx+b) + (kx+b)^2\right) dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(x^6 - 2kx^4 - 2bx^3 + k^2x^2 + 2kbx + b^2\right) dx =$$

$$\left.\frac{x^7}{7}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{2kx^5}{5}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{2bx^4}{4}\right|_{-1}^{1} + \left.\frac{k^2x^3}{3}\right|_{-1}^{1} + \left.kbx^2\right|_{-1}^{1} + \left.b^2x\right|_{-1}^{1}.$$

Там, где были нечётные степени, а после интегрирования стали чётные, результат 0 (ведь по формуле Ньютона-Лейбница получается $c - c$). Так что из 6 слагаемых остаются лишь 4. А где нечётные, там наоборот, удваивается, ведь отнимается подобный результат при -1

Получается $\frac{2}{7}-\frac{4k}{5}+\frac{2k^2}{3}+2b^2$. Вычислили интеграл, исчезла переменная x, но зависимость от параметров осталась, т.е. получили некую функцию $\Phi(k,b) = \frac{2}{7}-\frac{4k}{5}+\frac{2k^2}{3}+2b^2$.

Чтобы найти экстремум, надо найти частные производные по k,b и приравнять к нулю.

$$\Phi'_b = 4b = 0, \qquad \Phi'_k = -\frac{4}{5}+\frac{4k}{3} = 0.$$

Тогда $b=0$, $\frac{k}{3}=\frac{1}{5}$, т.е. $k=\frac{3}{5}$. Линейная функция $y=\frac{3}{5}x$.

Ответ. $y=\frac{3}{5}x$.

Задача 111. Разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in(-2,0)\\ 5, x\in(0,2)\end{cases}.$$

Решение. Здесь функция ступенчатая, поэтому вычислять интегралы по частям не придётся, будет в 1 шаг. Но разбивать на две части надо, т.к. функция задана по-разному справа и слева от 0. Кроме того, надо учесть, что $l=2$ здесь.

$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}1dx+\int_{0}^{2}5dx\right) = \frac{1}{2}(2+10) = 6$. Тогда $\frac{a_0}{2}=3$. Кстати, это и есть средняя высота графика этой функции.

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_{0}^{2}5\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}+5\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}(\sin 0-\sin(-n\pi))+5\frac{2}{n\pi}(\sin n\pi-\sin 0)\right)=0$ так как синус любого угла, кратного π, есть 0. В ряде Фурье не будет косинусов. Впрочем, об этом можно было догадаться и сразу и не считать интегралы: ведь если сместить этот график вниз на 3, то получится нечётная функция.

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} \sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 5\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{0} + 5\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{0}^{2}\right)$$

$= \frac{-1}{n\pi}\left((\cos 0 - \cos n\pi) + 5(\cos n\pi - \cos 0)\right)$ притом здесь мы уже сразу учли чётность косинуса, что $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$.

Итак, $\frac{-1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n + 5(-1)^n - 5\right) = \frac{-1 + (-1)^n - 5(-1)^n + 5}{n\pi} =$

$\frac{4 - 4(-1)^n}{n\pi} = 4\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$.

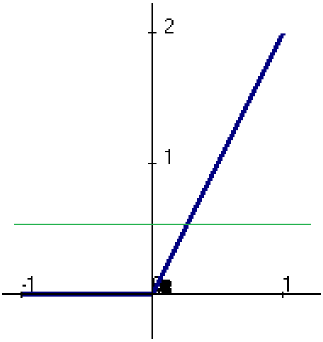
Ответ. Ряд Фурье: $3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Задача 112. Разложить в тригонометрический ряд Фурье $f(x) = x + |x|$ на $[-1,1]$.

Решение. Сначала исследуем, что такое $f(x) = x + |x|$ и как это выражение ведёт себя на разных частях интервала: $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Поэтому здесь на левой части интеграл считать не надо, он равен 0. Остаётся вычислять только на $(0,1)$.

$a_0 = \int_0^1 2x dx = x^2\Big|_0^1 = 1$, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. Это и есть средняя высота функции (показано зелёной тонкой линией).



$a_n = \int_0^1 2x \cos n\pi x dx$ интегрируем по частям:

$u = 2x$	$v = \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
$u' = 2$	$v' = \cos n\pi x$

Тогда $a_n = \dfrac{2x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \dfrac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx = 0 + \dfrac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 =$

$\dfrac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{n^2\pi^2} = \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$.

$b_n = \int_0^1 2x \sin n\pi x dx$ тоже по частям,

$u = 2x$	$v = \dfrac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
$u' = 2$	$v' = \sin n\pi x$

Тогда $b_n = \dfrac{-2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \dfrac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx =$

$\dfrac{-2}{n\pi}\cos n\pi + \dfrac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \dfrac{-2(-1)^n}{n\pi} + \dfrac{2(\sin n\pi - \sin 0)}{n^2\pi^2} = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Задача 113. Найти ряд Фурье для $f(x)=\begin{cases} x+1 & if\ x\in(-1,0) \\ 1 & if\ x\in(0,1)\end{cases}$

Решение. Здесь функция не является чётной либо нечётной, поэтому надо будет искать все коэффициенты.

При этом, на левой и правой части интервала надо считать отдельно, ведь там функция задана по-разному.

$$a_0=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}1dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-1}^{0}+\left.x\right|_0^1=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+1=\frac{3}{2},\quad \frac{a_0}{2}=\frac{3}{4}.$$

$a_n=\int_{-1}^{0}(x+1)\cos n\pi x dx+\int_{0}^{1}\cos n\pi x dx$. Первый интеграл вычисляется методом «по частям», второй просто в один шаг.

Кстати, для удобства вычислений можно раскрыть скобки и объединить так:

$$a_n=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx+\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx+\int_{0}^{1}\cos n\pi x dx=$$

$\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx+\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx$. Тогда интеграле по частям остаётся не скобка, а только x.

$u=x,\ u'=1,\ v'=\cos n\pi x,\ v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$. Тогда

$$\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx+\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx=\left.\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right|_{-1}^{0}-\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx+\left.\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{-1}{n\pi}\sin(-n\pi)-\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx+\frac{0-0}{n\pi}=0+\left.\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right|_{-1}^{0}+0=$$

$$\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n^2\pi^2}=\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}(x+1)\sin n\pi x dx+\int_{0}^{1}\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi x dx+\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx$$

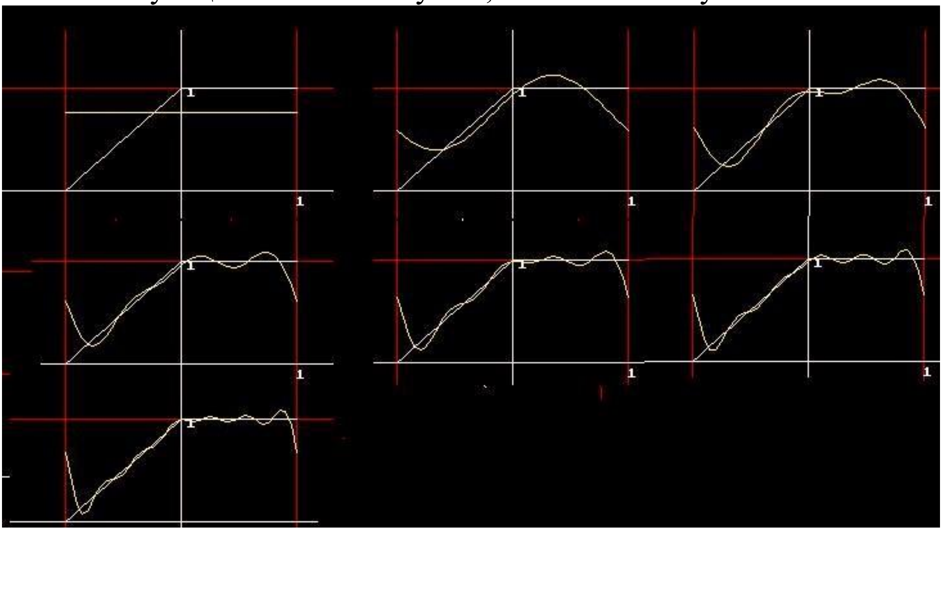
В первом $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin n\pi x$, $v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{\cos n\pi - \cos n\pi}{n\pi} = \frac{-(-1)^n}{n\pi} + 0 - 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Ответ. Ряд Фурье: $\dfrac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Чертёж к этой задаче, получившийся в результате работы программы на Паскале. Видно, что чем больше n, тем более плотно кривая, соответствующая частичной сумме, огибает ломаную.



Комплексный ряд Фурье.

Комплексный ряд Фурье. $f(x)=c_0+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$.

Где $c_0=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$, $c_n=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx$.

Задача 114. Разложить в комплексный ряд Фурье функцию $f(x)=x+1$ на $[-1,1]$.

Решение. Здесь $l=1$. Ищем коэффициенты Фурье для системы $\left\{e^{in\pi x}\right\}$.

$$c_0=\frac{1}{2l}\int\limits_{-1}^{1}(x+1)dx=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1}+\left.x\right|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}(0+2)=1.$$

$c_n=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-1}^{1}(x+1)e^{-in\pi x}dx$, здесь вычисляем по частям,

$u=x+1$	$v=\dfrac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}$
$u'=1$	$v'=e^{-in\pi x}$

$$c_n=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{x+1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{in\pi}\int\limits_{-1}^{1}e^{-in\pi x}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{-in\pi}e^{-in\pi}+\left.\frac{1}{-i^2n^2\pi^2}e^{-in\pi x}\right|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{-in\pi}e^{-in\pi}+\frac{e^{-in\pi}-e^{in\pi}}{n^2\pi^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{-in\pi}e^{-in\pi}+\frac{-(e^{in\pi}-e^{-in\pi})}{2i}\frac{2i}{n^2\pi^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{-in\pi}e^{-in\pi}-\frac{2i}{n^2\pi^2}\sin n\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{-in\pi}e^{-in\pi}-0\right)=\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi}=\frac{i}{n\pi}e^{-in\pi}=\frac{i}{n\pi}(\cos n\pi-i\sin n\pi)$$

$=\dfrac{i}{n\pi}((-1)^n-0)$. Тогда $c_0+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}=1+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{i(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi x}$.

Ответ. $1+\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi x}$.

Если мы дальше преобразуем экспоненты в комплексной степени, то получим действительную форму, т.е. тригонометрический ряд.
Объединим элементы с номерами $n,-n$. Тогда нумерация будет уже только по натуральным числам.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi x}+\frac{i(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi x}\right)=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi x}-\frac{i(-1)^n}{n\pi}e^{-in\pi x}\right)= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i(-1)^n}{n\pi}\left(e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}\right)=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2i^2(-1)^n}{n\pi}\frac{e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}}{2i} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x.$$

Кстати, если отнять 1, то получилась бы функция $f(x)=x$, а ведь для неё получали именно такое разложение в ряд Фурье в примере на лекции (см. стр. 118): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Задача 115. Разложить в комплексный ряд Фурье $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1,0)\\ 1 & (0,1)\end{cases}$

Решение. Функция нечётная, поэтому $c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$.

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(-1)\cdot e^{-in\pi x}dx+\int_{0}^{1}1\cdot e^{-in\pi x}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{in\pi x}}{in\pi}-\frac{e^{-in\pi}-1}{in\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-e^{in\pi x})-(e^{-in\pi}-1)}{in\pi}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2-e^{in\pi x}-e^{-in\pi}}{in\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-(e^{in\pi x}+e^{-in\pi})}{in\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\dfrac{e^{in\pi x}+e^{-in\pi}}{2}}{in\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos n\pi}{in\pi}\right) = \frac{1-\cos n\pi}{in\pi} = \frac{1-(-1)^n}{in\pi}.$$

Ряд: $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{in\pi x}$. Впрочем, заметим, что при чётном n коэффициенты равны 0. Тогда можно так задать индексацию, чтобы учесть только все нечётные номера. Для любого целого числа, $2n-1$ нечётное. Тогда можно записать в таком виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i(2n-1)\pi} e^{i(2n-1)\pi x}$$

Ответ. $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{in\pi x} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i(2n-1)\pi} e^{i(2n-1)\pi x}$.

Практика № 15. 17.12.2018

Задача 116. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на $[-1,1]$.

Решение. Функция является четной, $b_n = 0$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$a_n = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x dx$ в силу чётности равно $a_n = 2\int\limits_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x dx$, такой интеграл можно найти с помощью интегрирования по частям в 2 шага.

Сначала $u_1 = x^2, u_1' = 2x$, $v_1' = \cos n\pi x, v_1 = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$.

$$a_n = 2\int\limits_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x dx = 2\left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x dx \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} x \sin n\pi x dx \right) =$$

$-\frac{4}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} x \sin n\pi x dx$. Затем 2-й шаг,

$u_2 = x, u_2' = 1$, $v_2' = \sin n\pi x, v_1 = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$.

$$-\frac{4}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} x \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int\limits_{0}^{1} \cos n\pi x dx \right) =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi + 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

Итак, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}$, $b_n = 0$.

Разложение функции в ряд Фурье: $x^2 = \frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

его можно также записать в виде $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$, если вынести константы, не зависящие от n, за знак суммы.

Ответ. $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$.

Замечание. С помощью этого ряда Фурье можно найти суммы числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Подставим $x=0$. $0=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, то есть

$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{1}{3}$, из чего следует $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Подставим $x=1$. $1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi$, то есть

$\frac{2}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, из чего следует $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задача 117. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in(-1,0)\\ x+2, & x\in(0,1)\end{cases}$

в тригонометрический ряд Фурье на $[-1,1]$.

Решение. Найдём все коэффициенты ряда Фурье. Здесь $l=1$, поэтому $\frac{1}{l}$ перед каждым интегралом не пишется.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}1dx+\int_{0}^{1}(x+2)dx=x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+2x\Big|_{0}^{1}=1+\frac{1}{2}+2=\frac{7}{2}.$$

При этом $\frac{a_0}{2}=\frac{7}{4}$. Далее, вычислим все прочие коэффициенты.

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx+\int_{0}^{1}(x+2)\cos n\pi x dx$$

во 2-м слагаемом здесь будет интегрирование «по частям».

$u=x+2$	$v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$
$u'=1$	$v'=\cos(n\pi x)$

$$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x+2}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi x)dx\right).$$

Теперь получилось 3 слагаемых, в 1-м и 2-м получится $0-0=0$ в каждом, так как там либо $\sin 0$ либо $\sin n\pi$.

$$\frac{0-\sin(-n\pi)}{n\pi}+\left(\frac{3\sin(n\pi)-0}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_{0}^{1}\right)=$$

$$0+\left(0+\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\right)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx+\int_0^1(x+2)\sin n\pi x dx$$

во 2-м слагаемом также интегрируем по частям.

$u=x+2$	$v=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)$
$u'=1$	$v'=\sin(n\pi x)$

$$-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x+2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(n\pi x)dx\right)=$$

$$-\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}+\left(-\frac{3\cos(n\pi)-2}{n\pi}+\frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_{0}^{1}\right)$$

теперь 3-е слагаемое содержит $\sin 0$ и $\sin n\pi$ и равно 0.

При этом мы ещё и не различаем $\cos(-n\pi)$ и $\cos(n\pi)$ так как косинус функция чётная. И то и другое равно $(-1)^n$.

$$-\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\left(-\frac{3(-1)^n-2}{n\pi}+\frac{0-0}{n^2\pi^2}\right)=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}+\frac{2-3(-1)^n}{n\pi}=\frac{1-2(-1)^n}{n\pi}.$$

Итак, $\frac{a_0}{2}=\frac{7}{4}$, $a_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$, $b_n=\frac{1-2(-1)^n}{n\pi}$. Мы знаем все коэффициенты и теперь запишем ряд Фурье:

Ответ. $\frac{7}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{1-2(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right).$

Задача 118. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in(-1,0)\\ x+2, & x\in(0,1)\end{cases}$

в комплексный ряд Фурье на $[-1,1]$.

Решение. Здесь $l=1$, поэтому $\frac{1}{2l}$ перед каждым интегралом это $\frac{1}{2}$.

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}1dx+\int_{0}^{1}(x+2)dx\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+2x\Big|_{0}^{1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+2\right)=\frac{7}{4}.$$

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}e^{-in\pi x}dx+\int_{0}^{1}(x+2)e^{-in\pi x}dx\right)$$

Во втором слагаемом интегрирование по частям.

$u=x+2$	$v=\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}$
$u'=1$	$v'=e^{-in\pi x}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{-in\pi}\int_{0}^{1}e^{-in\pi x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{in\pi}\int_{0}^{1}e^{-in\pi x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{-i^2n^2\pi^2}e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in\pi}+\frac{3e^{-in\pi}-2}{-in\pi}+\frac{e^{-in\pi}-1}{n^2\pi^2}\right).$$

Учтём тот факт, что по формуле Эйлера:

$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^n + i0 = (-1)^n$,

$e^{-in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi = (-1)^n - i0 = (-1)^n$.

Тогда $\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{in\pi}}{-in\pi} + \frac{3e^{-in\pi}-2}{-in\pi} + \frac{e^{-in\pi}-1}{n^2\pi^2}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n}{-in\pi} + \frac{3(-1)^n-2}{-in\pi} + \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n+3(-1)^n-2}{-in\pi} + \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(-1)^n-1}{-in\pi} + \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1-2(-1)^n}{in\pi} + \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right)$.

Мы вычислили коэффициент c_n и теперь можно записать ряд.

Ответ. $\frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1-2(-1)^n}{in\pi} + \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\right)e^{in\pi x}$.

Контрольная работа.

Практика № 16. 24.12.2018 Исправление долгов

Литература

1. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258

2. А.П.Ерохина, Л.Н. Байбакова. Высшая математика III в упражнениях с задачами и решениями. http://narod.ru/disk/29273915001/eroh-bajb.djvu.html

3. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

4. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2005. 204 с. http://edu.tusur.ru/publications/39

5. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. Санкт-Петербург, 2002, изд-во «Лань». ISBN 5-8114-0446-8