Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика
Курс лекций
Семестр 3
Учебное пособие

для специальности
09.03.01 « информатика и вычислительная техника»

Томск
ТУСУР
2019

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ в группах 437-1,2,3 осенью 2018 года.

(ДОК №) - доказательства формул или теорем, которые попадают в теооретические билеты.

Оглавление

Оглавление по номерам лекций

ЛЕКЦИЯ 1. 05.09.2018

Глава 1.
Криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля

§ 1. Криволинейные и поверхностные интегралы 1 рода (от скалярных функций).

В прошлом учебном году мы изучали формулы длины кривой и площади поверхности. Напомним их, чтобы ввести понятия криволинейных и поверхностных интегралов.

Формула длины явно заданной кривой: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

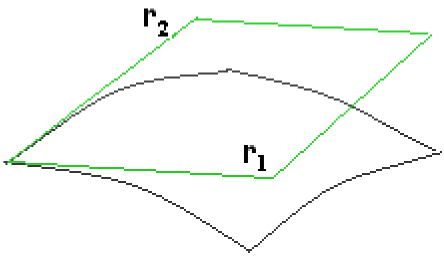
Для параметрически заданной кривой: $L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

В трёхмерном пространстве: $L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$.

Площадь поверхности.

Для явно заданной поверхности: $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy$.

Коротко напомним идею вывода этой формулы.



Вектор r_1 направлен по касательной в сечении, параллельном оси Ox, то есть тангенс угла наклона для него это $f'_x(x, y)$. Его координаты: $(\Delta x, 0, \Delta x \cdot f'_x) = \Delta x(1, 0, f'_x)$. Аналогично вектор r_2 расположен в сечении вдоль оси Oy, его координаты $(0, \Delta y, \Delta y \cdot f'_x)$, если вынести дельта, то это $\Delta y(0, 1, f'_x)$. Площадь параллелограмма вычисляется с помощью векторного произведения, она равна модулю векторного произведения.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right),$$ модуль этого вектора: $\sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}$.

А в случае параметрического задания поверхности с помощью векторной функции $\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ этот определитель приобрёл бы вид

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$ Этот способ тоже употребляется на практике. Так, например, задать сферу можно с помощью двух параметров, аналогичных широте и долготе на земном шаре. Тогда в формуле площади поверхности под корнем - сумма квадратов трёх миноров, состоящих из частных производных, расположенных в двух нижних строках определителя.

$$S = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}\, dudv.$$

Теперь представим следующую ситуацию: проволока или поверхность имеют переменную плотность, и требуется найти массу. Если плотность единичная, то фактически найти длину кривой (или площадь поверхности) это и означает найти данную массу. Но если плотность переменная, то при мелком разбиении нужно на каждом участке надо умножать длину (площадь) соответствующего участка на плотность. Именно такая задача привела к появлению понятий криволинейного и поверхностного интегралов 1-го рода (от скалярных функций).

Определение. Пусть дана некоторая кривая в пространстве R^3. Во всех точках пространства (и в частности, на кривой) задана ограниченная и непрерывная скалярная функция $F(x, y, z)$. Введём разбиение кривой на n частей, длину каждой из них обозначим L_i. Возьмём на каждой из этих частей по одной точке M_i. Рассмотрим такую сумму: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(M_i) \cdot L_i$ (она называется интегральной суммой). Предел таких сумм при $n \to \infty$ называется криволинейным интегралом 1-го рода (от скалярной функции).

Примечание. $n \to \infty$ следует рассматривать при условии, что разбиение измельчается по всей кривой, т.е. $\max L_i \to 0$.

Формулы вычисления криволинейного интеграла 1-го рода.

Обозначение: $\int_L F \cdot dl$.

1) Для параметрически заданной кривой в трёхмерном пространстве:

$$\int_L F \cdot dl = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt .$$

2) Для параметрически заданной кривой в плоскости:

$$\int_L F \cdot dl = \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

На практике это значит, что необходимо все переменные x, y, z в составе функции F выразить через параметр t, таким образом, функция станет зависеть только одной переменной, получим $F(t)$, и далее сводится к обычному определённому интегралу от t.

3) Для явно заданной кривой в плоскости:

$$\int_L F \cdot dl = \int_a^b F(x, f(x)) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Примечание. Если $F \equiv 1$, то из этих получаются прежние формулы длины кривой, указанные в начале лекции.

Пример. Найти массу проволоки, расположенной в виде полуокружности в верхней полуплоскости, если плотность равна y.

Решение. Так как все точки расположены на окружности, то лучше задать параметрически: $x=\cos t$, $y=\sin t$, причём $t\in[0,\pi]$.

Далее, $x'=-\sin t$, $y'=\cos t$.

$$\int_0^{\pi}\sin t\cdot\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi}\sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi-\cos 0) = 2.$$

Определение. Пусть дана некоторая поверхность в пространстве R^3. Во всех точках пространства (и в частности, на поверхности) задана ограниченная и непрерывная скалярная функция $F(x,y,z)$. Введём разбиение поверхности на n частей двумя семействами линий, площадь каждой части обозначим S_i. Возьмём на каждой из этих частей по одной точке M_i. Рассмотрим интегральную сумму: $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}F(M_i)\cdot S_i$. Предел таких сумм при $n\to\infty$ называется поверхностным интегралом 1-го рода (от скалярной функции).

Обозначение $\iint\limits_S F\cdot dS$

Формулы вычисления поверхностного интеграла 1-го рода.

Для явно заданной поверхности:

$$\int\limits_S F\cdot dS=\iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dxdy.$$

Для параметрически заданной поверхности правая часть формулы была бы такого вида:

$$\iint\limits_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}^2}\,dudv$$

Мы на практике будем, как правило, стараться сводить к явному виду.

Ещё один физический смысл. $F(x,y,z)$ этот вовсе не обязательно плотность какой-то тонкой пластины. Допустим, что $F(x,y,z)$ -

уровень радиации, заданный во всех точках пространства. То есть, эта функция может быть задана во всем пространстве, независимо от наличия или отсутствия какой-либо поверхности. Если затем расположить там поверхность, то поверхностный интеграл 1 рода будет показывать, какую суммарную дозу радиоактивности получит эта поверхность.

Пример. Дана функция $F(x,y,z)=y$. Пусть поверхность - верхняя полусфера радиуса 1. Найти поверхностный интеграл 1 рода.

Решение. Верхняя полусфера задаётся в явной форме так:

$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Частные производные:

$$f'_x=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad f'_y=\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

$$\int\limits_S F\cdot dS=\iint\limits_D y\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy =$$

$\iint\limits_D y\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}dxdy$, где D - проекция полусферы на горизонтальную плоскость, то есть круг радиуса 1, а поскольку круг, то выгодно будет перейти к полярным координатам.

$$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho =$$

$0\cdot\int\limits_0^1\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho=0$. К счастью, интеграл по ρ здесь даже не пришлось считать, т.к. интеграл по φ выделяется отдельным множителем и он равен 0.

§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы 2 рода (от векторных функций).

Теперь мы рассмотрим другую ситуацию. В каждой точке пространства, и в частности, на кривой (или на поверхности), задана не скалярная, а векторная функция $\overline{F}(x,y,z)$. Векторная функция состоит из 3 координатных скалярных функций и имеет вид:

$$\overline{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Чтобы получить в результате интегрирования некую скалярную величину, необходимо также при разбиении кривой (поверхности) на части, в каждой из частей заранее также каким-либо образом получить скалярную величину. Для кривой наиболее логично в каждой точке M_i скалярно умножить $\overline{F}(x,y,z)$ на вектор, расположенный на касательной, а обозначаемый $d\overline{l}$ и равный $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Другими словами, это хорошо известный из физики вектор скорости. Если для криволинейного интеграла 1 рода мы фактически использовали в интеграле его модуль $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$, то теперь не будет вычисляться модуль, а будет производиться скалярное домножение на $\overline{F}(x,y,z)$.

Определение. Пусть дана некоторая кривая в пространстве R^3. Во всех точках пространства (и в частности, на кривой) задана ограниченная и непрерывная векторная функция $\overline{F}(x,y,z)$. Введём разбиение кривой на n частей, возьмём на каждой из этих частей по одной точке M_i. Рассмотрим интегральную сумму: $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(M_i) \cdot d\overline{l}_i\right)$. Предел таких сумм при $n \to \infty$ называется криволинейным интегралом 2-го рода (от векторной функции).

Обозначается $\int\limits_L \left(\overline{F}, d\overline{l}\right)$

Физический смысл: работа силы по перемещению точки по кривой.

Формулы вычисления:

Краткая формула для запоминания: $\int\limits_L (\overline{F}, d\bar{l}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Здесь видно скалярное произведение двух векторов, у каждого из которых по 3 координаты: (P, Q, R) и (dx, dy, dz), который также можно записать в виде $(x'(t), y'(t), z'(t))dt$.

Более подробно для вычислений на практике:

1) Для параметрически заданной кривой в трёхмерном пространстве правая часть формулы пример такой длинный вид:

$$\int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\right)dt$$

На самом деле, ничего особо сложного в вычислениях нет, надо просто в функциях P, Q, R все переменные x, y, z выразить через t по тем формулам, которые задают параметрически кривую в пространстве. После этого всё сводится к определённому интегралу от одной переменной t .

2) Для параметрически заданной кривой в плоскости:

$$\int\limits_L (\overline{F}, d\bar{l}) = \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right)dt .$$

3) Для явно заданной кривой в плоскости x отождествляется с t , поэтому вместо $x'(t)$ будет 1.

$$\int\limits_L (\overline{F}, d\bar{l}) = \int\limits_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)\right)dx .$$

Пример. Точка движется по полуокружности радиуса 1 в верхней полуплоскости, и на неё действует сила $\overline{F} = (-y, x)$. Найти работу силы.

Решение. Так как все точки расположены на окружности, то задаём параметрически: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

При этом $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$.

$$\int\limits_L (\overline{F}, d\bar{l}) = \int\limits_0^\pi \left((-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\right)dt = \int\limits_0^\pi \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = \int\limits_0^\pi dt = \pi .$$

Поверхностные интегралы 2 рода определяются несколько иначе, чем криволинейные. Это связано с тем, что для поверхности, в отличие от кривой, направление касательной в любой точке не единственно: их бесконечно много и они образуют касательную плоскость. Напротив, нормаль соответствует некоторому единственному направлению, перпендикулярному касательной плоскости. Именно по этой причине приняли решение использовать нормаль для построения данных интегралов. Причём нормаль не единичную а такую, чтобы она по длине была равна площади соответствующего участка поверхности. Вспомним определитель, который мы использовали при выводе формулы площади поверхности:

$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$, но теперь мы не будем считать модуль этого вектора, а будем на него скалярно домножать вектор-функцию $\overline{F} = (P, Q, R)$. Обозначим $d\overline{S} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$

Определение. Пусть дана некоторая поверхность в пространстве R^3. Во всех точках пространства (и в частности, на поверхности) задана ограниченная и непрерывная векторная функция $\overline{F}(x, y, z)$. Введём разбиение поверхности на n частей двумя семействами линий, возьмём на каждой из этих частей по одной точке M_i. Рассмотрим интегральную сумму: $\sigma = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{F}(M_i), d\overline{S}\right)$. Предел таких сумм при $n \to \infty$ называется поверхностным интегралом 2-го рода (от векторной функции).

Обозначается так: $\iint_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right)$.

Физический смысл в данном случае не работа силы, а поток векторного поля через поверхность. Чем меньше угол между $\overline{F} = (P, Q, R)$ и нормалью, тем больше энергии каких-либо лучей проходит через участок поверхности, а к примеру, если $\overline{F}$ направлен по касательной (и перпендикулярен нормали при этом), то лучи скользят вдоль поверхности. Это например, как вблизи полюса лучи солнца почти перпендикулярны нормали к земной поверхности, а вблизи экватора наоборот, близки к нормали.

Чтобы получить формулу вычисления поверхностного интеграла 2 рода, мы должны под интегралом скалярно умножать такие векторы: $\overline{F} = (P, Q, R)$ и $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$. Получаем $\iint\limits_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right) =$

$$\iint\limits_D \left(-P(x, y, f(x, y)) \cdot f'_x - Q(x, y, f(x, y)) \cdot f'_y + R(x, y, f(x, y))\right) dxdy.$$

Кратко: $\iint\limits_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right) = \iint\limits_D \left(-P \cdot f'_x - Q \cdot f'_y + R\right) dxdy$.

Вывод этой формулы **(ДОК 1).**

Здесь D - проекция поверхности на горизонтальную плоскость, т.е. область определения параметров x, y. Также предполагается, что на практике при вычислении надо выразить все z, которые присутствовали в координатных функциях P, Q, R, через x, y, в соответствии с тем уравнением $z = f(x, y)$, которое задаёт поверхность.

ЛЕКЦИЯ 2. 12.09.2018

Пример вычисления поверхностного интеграла 2 рода

Векторное поле $\overline{F} = (x, y, 3z)$, поверхность - эллиптический параболоид $z = x^2 + y^2$, где $z \le 1$.

Решение. Вектор нормали $\left(-f'_x, -f'_y, 1\right)$ в данном случае $\left(-2x, -2y, 1\right)$.

$$\iint\limits_D \left(-x \cdot 2x - y \cdot 2y + 3(x^2 + y^2)\right) dxdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

где D - проекция этой части параболоида на плоскость Oxy, это круг радиуса 1. Перейдём к полярным координатам.

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \cdot \rho^2 d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Далее рассмотрим взаимосвязь между двойным интегралом по плоской области и криволинейным интегралом по её границе (формула Грина). Вам давно известна формула Ньютона-Лейбница, выражающая взаимосвязь между интегралом по отрезку и значениями первообразной на его границе (граница состоит из 2 точек). Но подобные взаимосвязи есть также и и между плоской областью и её границей.

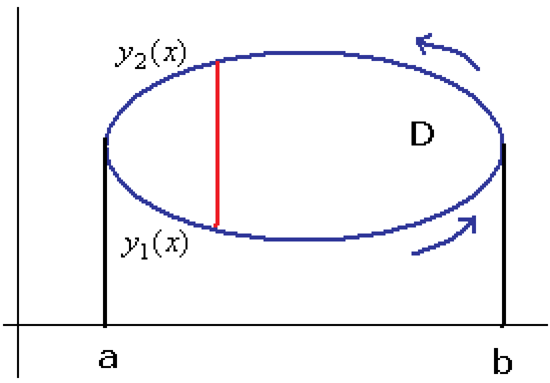
Определение. Работа векторного поля по перемещению точки по **замкнутой** кривой называется **циркуляцией**.

Обозначение: $\oint\limits_L \left(\overline{F}, d\overline{l}\right)$ или $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Для плоского векторного поля $\overline{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ верна такая формула. Формула Грина: $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Работа силы по границе области равна двойному интегралу от $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ по этой плоской области.

Доказательство (ДОК 2). Спроецируем область на ось Ох, обозначим границы проекции: точки a, b. Сама граница области тогда условно подразделяется на две линии, снизу $y_1(x)$, а сверху $y_2(x)$. Чтобы движение по замкнутому контуру происходило против часовой стрелки, надо по $y_1(x)$ двигаться слева направо, а по $y_2(x)$ справа налево.



Рассмотрим подробнее интеграл от функции $P(x, y)$ по границе области. В соответствии со всем сказанным, он может быть записан так: $\int_a^b P(x, y_1(x))dx + \int_b^a P(x, y_2(x))dx$. Но во втором интеграле можно изменить $[b, a]$ на $[a, b]$, сменив знак.

$\int_a^b P(x, y_1(x))dx - \int_a^b P(x, y_2(x))dx$ и их можно объединить

$$\int_a^b \big(P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))\big)dx = -\int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\big)dx$$

разность, которая внутри интеграла, является результатом применения формулы Ньютона-Лейбница по переменной y:

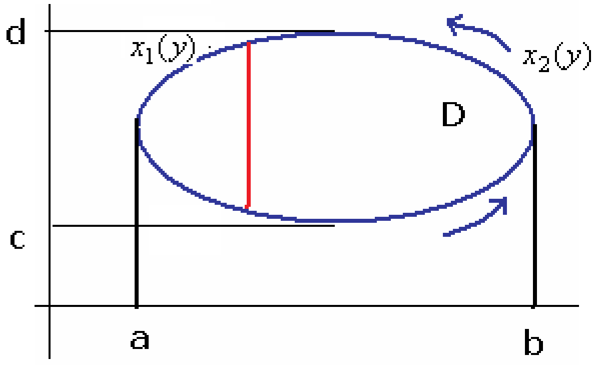
запишем это в виде: $-\int_a^b \left(P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\right)dx$.

Но если формула Ньютона-Лейбница применяется к P, значит, P это первообразная по y, а она очевидно, является первообразной от своей производной $\frac{\partial P}{\partial y}$. То есть:

$-\int_a^b \left(P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\right)dx = -\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right)dx$ а этой как раз и есть двойной интеграл по области D.

$$-\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Аналогично можно спроецировать область D на ось Oy, допустим проекция займёт некоторый отрезок $[c, d]$. Левую и правую линии, составляющие замкнутый контур, обозначим $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Правая здесь будет $x_2(y)$ (она дальше от оси Oy).



Тогда $\int_c^d Q(x_2(y), y)dy + \int_d^c Q(x_1(y), y)dy =$

$$\int_c^d Q(x_2(y), y)dy - \int_c^d Q(x_1(y), y)dy = \int_c^d \big(Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)\big)dy =$$

$$\int_c^d \left(Q(x, y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} \right) dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Сложим два полученных равенства и получается двойной интеграл

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Пример вычисления работы по единичной окружности от поля $\overline{F} = (-y, x)$ без формулы Грина и по формуле Грина.

Способ 1. Параметрически: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

При этом $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$.

$$\int_0^{2\pi} \big((-\sin t)\cdot(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\big)dt = \int_0^{2\pi} \big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Способ 2. $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-(-1)=2$. Тогда $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D 2dxdy$ $= 2\iint\limits_D dxdy$ где D - круг радиуса 1. Тогда интеграл от 1 это его площадь. $2\iint\limits_D dxdy = 2\cdot\pi\cdot 1^2 = 2\pi$.

§ 3. Элементы теории поля

Скалярное поле, или скалярная функция: $U(x,y,z)$.

Векторная функция, которая отображает $(x,y,z)\to\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ называется векторным полем.

Заметим, что градиент скалярной функции - это векторная функция: $U'_x=P$, $U'_y=Q$, $U'_z=R$

То есть, по скалярному полю всегда можно построить некоторое векторное.

Пример: $U = xyz$. Тогда $(P,Q,R)=(yz,xz,xy)$.

А вот обратная задача: если даны некоторые 3 скалярные функции, т.е. векторное поле, всегда ли они являются частными производными какой-то единой скалярной функции? Оказывается, нет.

Определение. Если существует такая скалярная функция U, что выполняется $U'_x=P$, $U'_y=Q$, $U'_z=R$, (то есть их общая первообразная), то векторное поле называется потенциальным, а функция U называется потенциалом поля $\overline{F}=(P,Q,R)$.

Свойство. Если U - потенциал, то $U+C$ - тоже потенциал.

Доказательство: $(U+C)'_x=P+0=P$, $(U+C)'_y=Q+0=Q$, $(U+C)'_z=R+0=R$.

Потенциал определяется с точностью до константы (точно так же как и первообразная). Именно поэтому в физике важна именно разность потенциалов, а не сам потенциал.

Примеры.

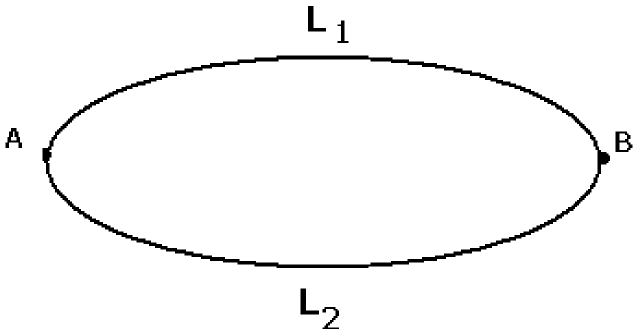
Пример не потенциального поля.

$\overline{F}=(2xy^2, xy)$. Первообразная от 1 компоненты по x это x^2y^2, однако первообразная по y от второй компоненты совсем другая: $\frac{xy^2}{2}$, они не совпадают.

Пример потенциального поля.
$\overline{F}=(2xy^2, 2x^2y)$. Его потенциал: $U=x^2y^2$.

Далее нам надо научиться выяснять 2 вопроса:
1) выяснять, является ли поле потенциальным.
2) вычислять потенциал, если оно потенциально.

Теорема 1. Криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути $\Leftrightarrow$ циркуляция по замкнутому контуру равна 0.
Доказательство (ДОК 3).



Необходимость. Пусть интеграл зависит только от начальной и конечной точки, и не зависит от пути, соединяющего точки A,B. Возьмём какой-нибудь замкнутый контур, разобьём его какими-нибудь случайно взятыми точками. Докажем, что циркуляция равна 0.

$$\int\limits_{L_1^+}(F,dl)=\int\limits_{L_2^+}(F,dl) \Rightarrow \int\limits_{L_1^+}(F,dl)=-\int\limits_{L_2^-}(F,dl) \Rightarrow \int\limits_{L_1^+}(F,dl)+\int\limits_{L_2^-}(F,dl)=0.$$

Но так как объединение 2 частей в замкнутый контур это $L_1^+\cup L_1^-=L$, то получается: $\int\limits_{L_1^+}(F,dl)+\int\limits_{L_2^-}(F,dl)=\int\limits_{L}(F,dl)=0$.

Достаточность.

Пусть для любого замкнутого контура $\int\limits_L (F,dl)=0$. Если даны какие-то точки A,B, и какие-то две различные линии, соединяющие их, то эти две линии можно объединить в единый замкнутый контур.

$$\int\limits_{L_1^+}(F,dl)+\int\limits_{L_2^-}(F,dl)=0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{L_1^+}(F,dl)=-\int\limits_{L_2^-}(F,dl) \;\Rightarrow\; \int\limits_{L_1^+}(F,dl)=\int\limits_{L_2^+}(F,dl),$$

что и требовалось доказать.

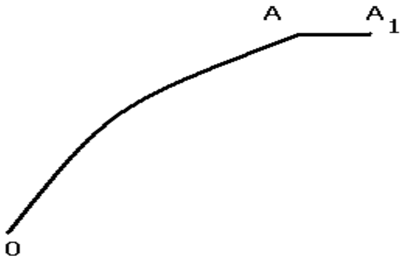
Теорема 2. Поле F потенциально $\Leftrightarrow$ криволинейный интеграл 2 рода от F не зависит от пути, причём тогда потенциал в любой точке $A\in R^3$ вычисляется в виде $\int\limits_{A_0}^{A}\left(\bar{F},d\bar{l}\right)$ где A_0 - некоторая начальная точка, как правило (0,0,0).

Доказательство (ДОК 4).

Необходимость. Если поле потенциально то $U'_x=P$, $U'_y=Q$, $U'_z=R$ а тогда в интеграле $\int\limits_A^B Pdx+Qdy+Rdz$ получится $\int\limits_A^B\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$ а по формуле полного дифференциала это $\int\limits_A^B\frac{dU}{dt}dt$ но ведь первообразная от производной - это сама функция U, тогда работа поля $\int\limits_A^B Pdx+Qdy+Rdz$ в итоге равна $U(t)\Big|_A^B$ = $U(B)-U(A)$ то есть зависит только от начальной и конечной точки.

Достаточность.

Если криволинейный интеграл для поля (P,Q,R) не зависит от пути, возьмём начальную точку, например начало координат (0,0,0). Введём некоторую скалярную функцию U(x,y,z) равную работе поля от (0,0,0) до точки A(x,y,z). То есть $\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$.



А теперь мы докажем, что именно эта функция является потенциалом. Составим путь из дуги от 0 до A и дополнительного маленького горизонтального отрезка вдоль оси Ox. Интеграл от 0 до A равен U(A). Интеграл от 0 до A_1 равен U(A_1).

Координаты точек: A (x,y,z) и A_1 (x+Δx,y,z) .

Тогда $\int\limits_{(0,0,0)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$

= $U(A_1) = U(A) + \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$ но в интеграле по отрезку AA_1 меняется только x, при этом y, z константы, то есть dy = 0, dz = 0.

$U(A_1) = U(A) + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx = P(c)\Delta x$ для некоторой промежуточной точки c, где достигается среднее значение.

Тогда $P(c)\Delta x = U(A_1) - U(A)$, следовательно,

$$P(c) = \frac{U(A_1) - U(A)}{\Delta x} = \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Но точка c тоже стремится к x при Δx →0.

То есть $U'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x} = P(x)$. Итак, $U'_x = P$.

Аналогично, рассматривая точку A_1 с координатами A_1 (x,y+Δy,z) получили бы $U'_y = Q$, а если то A_1 (x,y,z+Δz) то $U'_z = R$. Итак, поле потенциально и U(x,y,z), равная работе силы по перемещению от начальной точки до (x,y,z), является потенциалом.

Следствие. Поле F потенциально $\Leftrightarrow$ циркуляция по замкнутому контуру равна 0.

ЛЕКЦИЯ 3. 19.09.2018

Итак, в конце прошлой лекции мы доказали, что поле потенциально $\Leftrightarrow$ криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути. Этот критерий позволяет вычислить потенциал, если известно, что поле потенциально, однако практически ничем не поможет выяснить изначально вопрос о том, потенциально ли поле. Ведь кривых, соединяющих две точки A,B бесконечно много, и невозможно вычислить интегралы по всем этим кривым. Поэтому для проверки потенциальности необходим другой критерий.

Теорема 3. 1) Если поле $\overline{F} = (P, Q)$ потенциально то симметрична производная матрица $\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$.

2) Если граница области D, в которой задано векторное поле, является односвязным множеством, и симметрична производная матрица $\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$, то поле потенциально.

Доказательство (ДОК 5).

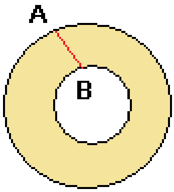
1) Необходимость. Пусть поле потенциально. Тогда P, Q являются производными от какой-то общей функции U, т.е. $U'_x = P$, $U'_y = Q$.

тогда $P'_y = (U'_x)'_y = U''_{xy}$, $Q'_x = (U'_y)'_x = U''_{yx}$. Но смешанные частные производные 2-го порядка совпадают, значит, $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$.

а следовательно, $\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U''_{xx} & U''_{xy} \\ U''_{yx} & U''_{yy} \end{pmatrix}$.

2) Достаточность. Сначала подробнее о том, почему односвязной должна быть даже не сама область, а её граница. Это означает, что

внутри плоской области нет пустот, то есть областей, не принадлежащих данному множеству, то есть каждый контур можно стянуть в точку. Например, кольцо само как плоское множество является односвязным множеством, любую пару точек можно соединить какой-либо кривой. Но его граница не является односвязной, а состоит из двух окружностей, и не всякую пару точек на границе можно соединить кривой, лежащей на границе. Например, если A,B на внешней и внутреннней окружности, то соединяющая кривая проходит не только по границе:



Здесь мы будем использовать формулу Грина, которую доказали ранее, а там фактически неявно это и предполагали при записи двойного интеграла, когда для $x \in [a,b]$ рассматривался отрезок $y \in [y_1(x), y_2(x)]$, то есть такая ситуация, как для кольца, не рассматривается, а только множества без внутренних пустот.

Если производная матрица симметрична, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (в других обозначениях $P'_y = Q'_x$). Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$, и двойной интеграл по любой плоской области равен 0: $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$.

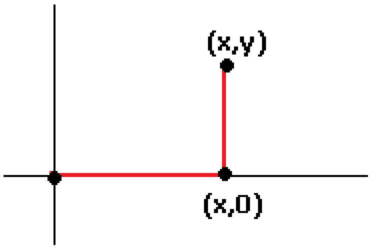
Но ведь тогда для любого замкнутого контура получается, что по формуле Грина, если двойной интеграл по его внутренней области 0, то и циркуляция по границе тоже 0:

$$\oint\limits_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

а если для любого контура циркуляция 0, то поле потенциально, что следует из теорем 1 и 2, доказанных ранее.

В 3-мерном случае требуется совпадение трёх пар производных, доказательство показано пока для 2-мерного случая, чтобы использовать формулу Грина. В 3-мерном случае будет использоваться формула Стокса, которую введём чуть позже.

Алгоритм нахождения потенциала.
1. Выяснить потенциальность поля, проверив симметричность производной матрицы (она сотоит из всех частных производных: от всех компонент векторного поля по всем переменным).
2. Найти потенциал, как скалярную функцию, равную криволинейному интегралу от фиксированной точки до произвольной. Как правило, в качестве «начальной» фиксированной точки рассматривают начало координат, если же в функциях присутствуют к примеру $\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{y}$, то можно взять в качестве начальной точку (1,1) а не (0,0).
Путь от начальной точки до может быть по любой кривой, но практически лучше по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат. Сначала от (0,0) к (x,0) а затем 2-е звено до точки (x,y).



Пример. Доказать, что поле $\overline{F} = \left(2xy, x^2\right)$ потенциально и найти потенциал.
Решение. Шаг 1. Сначала найдём производную матрицу, вычислив все частные производные по всем переменным:
$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$. Мы видим, что она симметрична. Значит, поле потенциально.

Шаг 2. Найдём криволинейный интеграл от (0,0) до (x, y), соединив с помощью ломаной. Лучше всего даже обозначить конечную точку (x_0, y_0), чтобы не путать обозначение переменной, по которой ведётся интегрирование, и верхнего предела. Вычислив $U(x_0, y_0)$, затем мы учтём тот факт, что эта точка была произвольной, и сможем записать уже просто $U(x, y)$.

$\int\limits_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} Pdx + Qdy$ разбивается на сумму двух интегралов, по каждому участку ломаной, причём на каждом из них обнуляется один из двух дифференциалов: на горизонтальном отрезке меняется только x, а тогда $dy = 0$, на вертикальном меняется y, тогда $dx = 0$.

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} Pdx + Qdy = \int\limits_0^{x_0} (P(x,0)dx + Q(x,0)\cdot 0) + \int\limits_0^{y_0} (P(x_0, y)\cdot 0 + Q(x_0, y)dy)$$

в обоих интегралах формально присутствуют оба слагаемых, но одно из них обнуляется, поэтому выглядит далее так, как будто распределилось по одному слагаемому в каждый интеграл.

$\int\limits_0^{x_0} P(x,0)dx + \int\limits_0^{y_0} Q(x_0, y)dy$ в первом фиксировано $y = 0$, а на втором участке переменная x уже достигла x и далее не меняется, поэтому там $x = x_0$.

Для данного конкретного примера получается

$$\int\limits_0^{x_0} P(x,0)dx + \int\limits_0^{y_0} Q(x_0, y)dy = \int\limits_0^{x_0} 2x0dx + \int\limits_0^{y_0} x_0{}^2 dy = 0 + x_0{}^2\Big|_0^{y_0} = x_0{}^2 y_0.$$

Итак, $U(x_0, y_0) = x_0{}^2 y_0$, тогда можно сказать, что $U(x, y) = x^2 y$.

Проверка. $U'_x = 2xy$, $U'_y = x^2$.

Определение. Дивергенция векторного поля.

$div(\overline{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$ (сумма элементов главной диагонали производной матрицы). Это скалярная величина.

Определение. Ротор векторного поля.

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

в других обозначениях это выглядит так:

$\left(R'_y - Q'_z\right)i - \left(R'_x - P'_z\right)j + \left(Q'_x - P'_y\right)k$.

Таким образом, ротор - это некоторое новое векторное поле из 3 компонент, построенное с помощью исходного векторного поля.

Определение. Если ротор = 0 то поле называется безвихревым.

Обратим внимание, что при определении дивергенции используются 3 частных производных, которые расположены в производной матрице по диагонали: дифференцируется i-я компонента по i-й переменной, а при определении ротора - только производные компонент по «чужим» номерам переменных, таких 6 из 9 в производной матрице:

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$$

Причём, 3-я координата ротора это та разность, которая уже использовалась в формуле Грина. Если поле плоское, а именно $(P, Q, 0)$, то отлична от 0 только лишь третья компонента, а именно та, которая была в формуле Грина.

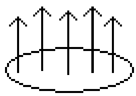
Пример, демонстрирующий геометрический смысл ротора.

Рассмотрим векторное поле $(-y, x, 0)$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 2k .$$

т.е. если векторы в плоскости соответствуют вращению против часовой стрелки, то ротор направлен вверх.

Пусть две из трёх компонент векторного поля равны 0. Например, $\overline{F} = (P, 0, 0)$ или $\overline{F} = (0, Q, 0)$ или $\overline{F} = (0, 0, R)$. Тогда все векторы направлены в одну сторону. Например, рассмотрим $\overline{F} = (0{,}0,R)$. Тогда векторное поле выглядит примерно так:



То есть, фактически здесь информацию содержит только скалярная функция R, все векторы направлены по одной линии и отличаются лишь длиной. Тогда поток поля через поверхность можно вычислить через двойной интеграл $\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy$, где D это проекция поверхности на плоскость 0xy, ведь в формуле: $\iint\limits_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right)$ = $\iint\limits_D \left(-P\cdot f_x' - Q\cdot f_y' + R\right)dxdy$

компоненты P,Q равны 0. Аналогично, если есть только одна ненулевая компонента $\overline{F} = (P{,}0{,}0)$ то получится $\iint\limits_D Pdydz$, а если $\overline{F} = (0,Q{,}0)$ то $\iint\limits_D Qdxdz$. Но ведь любой вектор в пространстве можно представить в виде суммы трёх векторов, параллельных осям. Таким образом, и векторное поле можно разложить на сумму 3 компонент, а именно $\overline{F} = (P,Q,R) = (P{,}0{,}0) + (0,Q{,}0) + (0{,}0,R)$. Тогда поверхностный интеграл 2 рода можно вычислить с помощью суммы трёх двойных интегралов по трём проекциям на координатные плоскости соответственно, т.е. верна ещё и такая формула:

$$\iint\limits_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right) = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \quad (*)$$

Пусть теперь L - замкнутая пространственная кривая, S - поверхность, натянутая на эту кривую, т.е. кривая является краем поверхности, для наглядности представьте например, окружность и полусферу, то есть, S не обязано лежать в плоскости. Да впрочем, и сам замкнутый контур L тоже не обязан лежать в плоскости. Так, например, гнутое железное колесо является хоть и замкнутой, но не плоской кривой. Циркуляция по контуру L выражается через поверхностный интеграл по S, а именно, равна потоку ротора через S. Эта взаимосвязь выражена в формуле Стокса, которая является обобщением формулы Грина на пространственный случай.

Формула Стокса. $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S (rot\overline{F}, d\overline{S})$.

Кратко рассмотрим идею доказательства формулы Стокса. Надо рассмотреть 3 проекции на координатные плоскости. При подробной записи формулы Стокса, если расшифровать подробно все 3 координаты ротора и кроме того, применить при этом формулу (*) выведенную чуть выше, получим:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Обратим внимание, что 3-е слагаемое в точности такое, как в формуле Грина. Если рассмотреть проекция векторного поля на координатную плоскость 0xy, а именно для поля $(P, Q, 0)$, доказательство в точности такое, как было для формулы Грина, что приведёт к слагаемому $\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. Если то же самое сделать в двух других координатных плоскостях, 0xz и 0yz, то получим два других слагаемых.

Из формулы Стокса следует, что и в 3-мерном случае потенциальность векторного поля эквивалентна симметричности производной матрицы:

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$$

Действительно, если 3 пары частных производных совпадают: $R'_y = Q'_z$, $R'_x = P'_z$, $Q'_x = P'_y$ то ротор равен 0, а значит и поток ротора равен 0, но тогда по формуле Стокса и циркуляция равна 0, из чего следует потенциальность поля (чуть раньше это было выведено из формулы Грина для 2-мерного поля). Итак, эквивалентны такие 3 условия:

Симметрична производная матрица $\Leftrightarrow$ $rot\overline{F} = 0$ $\Leftrightarrow$ поле потенциально.

Пример. Доказать, что поле $\left(y, x + z^2, 2yz\right)$ потенциально и найти потенциал.

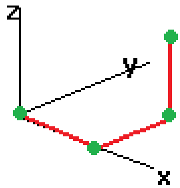
Решение.

Сначала найдём матрицу из всех 9 частных производных.

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix}$$

. Матрица симметрична, это в то же самое время означает, что ротор равен 0. Поле потенциально.

Вычислим криволинейный интеграл по ломаной,соединяющей точки $(0,0,0)$ и (x_0, y_0, z_0).



$$U(x_0, y_0, z_0) = \int_0^{x_0} P(x,0,0)dx + \int_0^{z_0} Q(x_0, y,0)dy + \int_0^{z_0} R(x_0, y_0, z)dz =$$

$$\int_0^{x_0} 0dx + \int_0^{z_0} x_0 dy + \int_0^{z_0} 2y_0 z dz = 0 + x_0 y\Big|_0^{y_0} + y_0 z^2\Big|_0^{z_0} = x_0 y_0 + y_0 {z_0}^2 .$$

Тогда $U(x, y, z) = xy + yz^2$.

Проверка:

$$\left(xy+yz^2\right)'_x = y, \quad \left(xy+yz^2\right)'_y = x+z^2, \quad \left(xy+yz^2\right)'_z = 2yz.$$

Рассмотрим ещё одну разновидность формул, взаимосвязывающих интеграл по границе и внутренней части области.

Формула Остроградского-Гаусса.

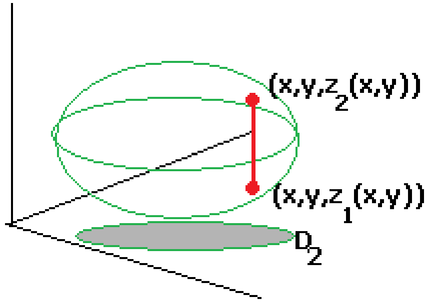
Пусть S - замкнутая поверхность, ограничивающая некоторое 3-мерное тело D. Тогда $\iint\limits_S (F, dS) = \iiint\limits_D div(F) dxdydz$.

Доказательство (ДОК 6). Запишем подробнее:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Изучим подробнее одну компоненту $\iint\limits_S Rdxdy$.

Обозначим явные уравнения двух частей поверхности, ограничивающей 3-мерное тело сниз и сверху, через $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ соответственно. Проекцию 3-мерного тела на горизонтальную плоскость обозначим D_2.



Если точка лежит на поверхности S это означает, что координаты точки $(x, y, z_1(x, y))$ либо $(x, y, z_2(x, y))$. Если нормаль во всех точках внешняя, это значит, что в точке $(x, y, z_2(x, y))$ она направлена вверх, а в $(x, y, z_1(x, y))$ наоборот, вниз. На плоскую область D_2 таким образом, проецируется 2 части поверхности, и $\iint\limits_S R dxdy$ подробно запишется в виде:

$$\iint\limits_{D_2} R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_{D_2} R(x,y,z_1(x,y))dxdy =$$

$$\iint\limits_{D_2} \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\right)dxdy =$$

$$\iint\limits_{D_2} \left(R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\right)dxdy$$ но если R есть первообразная по переменной z, к которой применена формула Ньютона-Лейбница, то это первообразная именно от производной по z, то есть от $\frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\iint\limits_{D_2} \left(R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\right)dxdy = \iint\limits_{D_2} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdy$$, а это как раз и есть тройной интеграл $\iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ по телу D, записанный через повторные интегралы. Итак, $\iint\limits_S R dxdy = \iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$.

Полностью аналогично, с точностью до замены обозначения переменных, проводятся рассуждения для других слагаемых, в проекции на другие координатные плоскости. Получится

$$\iint\limits_S Q dxdz = \iiint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz \text{ и } \iint\limits_S P dydz = \iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz..$$

В итоге, для суммы трёх равенств, верно:

$$\iint\limits_S P dydz + Q dxdz + R dxdy = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Что и требовалось доказать.

Физический смысл. Дивергенция - это функция источника излучения: сколько энергии вырабатывается в некотором объёме, столько и излучается через замкнутую поверхность, ограничивающую данный объём (при нулевом поглощении).

Замечание. Формула Остроградского Гаусса применяется на практике. Ведь если без неё считать поток поля через поверхность, то придётся разбивать её на 2 части, например верхнюю и нижнюю полусферу, и производить 2 вычисления. А по данной формуле, тройной интеграл вычисляется по единой 3-мерной области. То есть, она упрощает некоторые вычисления, так же, как и формула Грина.

Композиции операций над векторными полями.

Сначала вспомним два факта, которые уже вскользь упоминались.

1. Градиент потенциала векторного поля $\overline{F} = (P, Q, R)$ это исходное поле $\overline{F} = (P, Q, R)$.

2. Потенциал градиента скалярного поля $U(x, y, z)$ это исходная скалярная функция.

Вычисление градиента и потенциала - две взаимно обратные операции.

3. Дивергенция ротора. $div\left(rot\overline{F}\right)$.

$div\left(rot\overline{F}\right) = div\left(\left(R'_y - Q'_z\right), \left(P'_z - R'_x\right), \left(Q'_x - P'_y\right)\right) =$

$\left(R'_y - Q'_z\right)'_x + \left(P'_z - R'_x\right)'_y + \left(Q'_x - P'_y\right)'_z =$

$R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} = 0$ так как здесь по 3 пары смешанных производных 2 порядка, совпадающих между собой. Перегруппируем слагаемые, чтобы увидеть это:

$R''_{yx} - R''_{xy} + Q''_{xz} - Q''_{zx} + P''_{zy} - P''_{yz} = 0$.

4. Ротор градиента. $rot(\nabla U) = 0$. Если некоторое векторное поле есть градиент скалярной функции, то оно потенциально и данная U есть потенциал поля. А для потенциального поля ротор равен 0.

(ДОК 7) Докажите, что $div\left(rot\overline{F}\right) = 0$, $rot(\nabla U) = 0$.

5. Дивергенция градиента. $div(\nabla U) = div\left(U_x{}', U_y{}', U_z{}'\right) =$

$U_{xx}{}'' + U_{yy}{}'' + U_{zz}{}''$, эта сумма вторых производных ещё называется оператором Лапласа и обозначается ΔU.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Некоторые композиции не имеют смысла, не определены, например, ротор потенциала. Потенциал - скалярная функция, а ротор существует только для векторного поля.

ЛЕКЦИЯ 4. 26.09.2018

Дифф. уравнения в полных дифференциалах.

Рассмотрим ещё один метод решения дифференциальных уравнений, основанный на использовании потенциала поля. Пусть дано дифференциальное уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, причем $Q'_x = P'_y$. Тогда это уравнение называется «уравнением в полных дифференциалах». Здесь (P, Q) является потенциальным векторным полем. В этом случае уравнение можно представить в виде $dU(x, y) = 0$, а значит, $U(x, y) = C$. Затем остаётся только выразить y через x.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2xydx + x^2dy = 0$.

Решение. Проверяем тип уравнения. Здесь $P = 2xy$, $Q = x^2$. При этом $Q'_x = P'_y$, ведь $(x^2)'_x = 2x$, $(2xy)'_y = 2x$. То есть, векторное поле $\overline{F} = (2xy, x^2)$ потенциально. Ищем потенциал. Соединяем точки (0,0) и (x, y) с помощью ломаной, и вычисляем:

$\int\limits_0^x 2x0dx + \int\limits_0^y x^2dy = 0 + x^2\Big|_0^y = x^2 y$. Итак, $U = x^2 y \equiv C$. Тогда $y = \dfrac{C}{x^2}$ общее решение дифф. уравнения.

Глава 2.
Теория функций комплексного переменного.
§ 1. Действия с комплексными числами.

Вспомнить из основных действий с комплексными числами:

i мнимая единица. $i=\sqrt{-1}$. Комплексное число $a+bi$, где a,b - действительная и мнимая части Re(z), Im(z).

Замечание. В 4-мерном пространстве существует система кватернионов, обобщающая клмплексные числа, они строятся похожим образом: $(a+bi)+(c+di)j$, затем ij обозначается k, и получаем $a+bi+cj+dk$. Обобщение в 3-мерном пространстве невозможно, т.к. в таком случае всегда получится система с делителями нуля, то есть $zw=0$, где $z\neq 0, w\neq 0$.

Сопряжённое число $\bar{z}=a-bi$, если $z=a+bi$.

При этом $z\bar{z}=a^2+b^2+0i\in R$.

Выражение $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа, φ - его аргументом, ρ - модулем.

$$\varphi=\arg(z) \qquad \rho=|z|.$$

Это $z=\rho,\varphi$ такие же, как в полярных координатах.

Умножение и деление в тригонометрической форме.

$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

(умножить их модули и сложить аргументы).

Формула деления двух комплексных чисел в тригонометрической форме: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Формула Муавра для возведения в степень:

$$z^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$$

Корень порядка n вычисляется по такой формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Между прочим, действительную и мнимую часть x, y для числа $z = x + iy$ можно выразить через $z, \bar{z}$. Докажем такие формулы:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Доказательство **(ДОК 8)**.
Сложим $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$.

$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$, тогда $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

Вычтем $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$.

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2yi$, тогда $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

<u>Формула Эйлера</u> $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Доказательство (ДОК 9).
Обобщение любой функции на случай комплексного переменного можно проводить с помощью рядов. Поскольку существует любая степень мнимой единицы i, например $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, и т.д. то этот подход возможен. Вспомним разложение экспоненты в ряд Тейлора. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

Тогда вычислим $e^{ix} = 1 + ix + \dfrac{i^2x^2}{2!} + \dfrac{i^3x^3}{3!} + \dfrac{i^4x^4}{4!} + \ldots =$

$1 + ix - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{ix^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$ теперь соберём в отдельные слагаемые все части, где нет i, и где есть i.

$\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{3!} + \ldots\right)$ но ведь в 1 и 2 скобках стоят разложения $\cos x$ и $\sin x$. Итак, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, что и требовалось доказать.

Теперь для любого числа z можно вычислить e^z:

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

Для сопряжённого числа можно вычислить аналогично:
$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x \cos y - ie^x \sin y$.
(здесь воспользовались чётностью cos и нечётностью sin).
Получается, сопряжение под знаком экспоненты приводит

§ 2. Функции комплексного переменного.

Только что мы рассмотрели функцию $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$.
Обобщим на комплексную плоскость синус и косинус.

Верны такие формулы: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Доказательство (ДОК 10).
Рассмотрим для действительного числа $x + 0i$ и покажем, что данные функции, а именно $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ и $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, приведут именно к обычному синусу и косинусу действительного числа, т.е. они обобщают синус и косинус. Используя формулу Эйлера,

1) $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)}{2} = \dfrac{2\cos x}{2} = \cos x$

2) $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)}{2i} = \dfrac{2i\sin x}{2i} = \sin x$

Неограниченность синуса и косинуса в комплексной плоскости.
Пример. $\cos(5i) > 1$.

Вычислим: $\cos(5i) = \dfrac{e^{i5i} + e^{-i5i}}{2} = \dfrac{e^{-5} + e^{5}}{2} > \dfrac{e^5}{2} > 1$.

Логарифм комплексного числа.
Обобщённый логарифм вводится с помощью формулы:
$$Ln(z) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k) .$$
Доказательство (ДОК 11).
$$z = e^{Ln(z)} = e^{\ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)} \Rightarrow z = \rho e^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$$z = \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),$$

это означает $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ так как синус и косинус не зависят от прибавления угла, кратного 2π . Это равенство уже очевидно, так как это и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

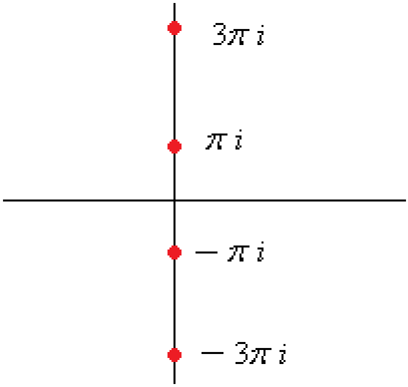
Если вычислять логарифм положительного действительного числа, то $Ln(x) = \ln x + i(0 + 2\pi k)$, т.е. одна точка из бесконечного множества попадает на действительную ось, потому что исходный угол $\varphi = 0$. Для любого числа, которое не является действительным положительным, $\varphi \neq 0$, поэтому происходит сдвиг этой последовательности на часть деления, и ни одна точка не попадёт на действительную ось.

Пример. Вычислить $Ln(-1)$.

Здесь $\varphi = \pi$, $\rho = 1$. Поэтому $Ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = 0 + i(\pi + 2\pi k)$.

Точки в комплексной плоскости: $\pm\pi\ i$, $\pm 3\pi\ i$, $\pm 5\pi\ i$, и так далее.

Ни одного значения на действительной оси нет, и здесь, по сравнению со значениями логарифма положительного числа, сдвиг на половину деления: одна точка ушла вверх с действительной оси, а другая ещё не достигла этой оси. Чертёж:



Пример. Вычислить $Ln(i)$.

$Ln(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. Последовательность значений такова: $\ldots, -\frac{3\pi}{2}i,\ \frac{\pi}{2}i,\ \frac{5\pi}{2}i, \ldots$ каждая соседняя пара отличается на 2π по высоте. Здесь сдвиг вверх всего на четверть деления, а не на половину, как для $Ln(-1)$.

1) При фиксированном модуле исходного числа и увеличении его аргумента, эта последовательность точек плывёт вверх, при полном повороте на 2π как раз следующая точка попадёт на место предыдущей.

2) При фиксированном аргументе исходного числа и увеличении его модуля, эта последовательность точек плывёт вправо, если исходная точка внутри единичной окружности то множество значений логарифма в левой полуплоскости, так как $\ln \rho < 0$, а если вне единичной окружности, то в правой полуплоскости.

Динамическая анимация, показывающая поведение значений $Ln(z)$ в зависимости от колебаний модуля или аргумента z, показана в следующем обучающем видеоролике:
http://www.youtube.com/watch?v=LKFFn-TSLd0

Замечание. Единственная точка в комплексной плоскости, для которой не существует логарифма, это 0. Ведь в этом случае $\rho = 0$, и не существует $\ln \rho$.

Пример. Вычислим i^i.
Решение. Представим i, расположенную в основании, в виде $i = e^{Ln(i)}$. Тогда $i^i = \left(e^{Ln(i)}\right)^i = e^{iLn(i)}$, причём чуть выше мы вычисляли $Ln(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. Тогда $i^i = e^{i \cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ т.е. получается бесконечное множество точек на действительной оси.

Для всякой функции $w = f(z) = f(x+iy)$ можно отдельно выделить действительную и мнимую части, и представить в виде $w = u + iv$. Таким образом, возникают понятия: действительная и мнимая часть функции, обозначения: $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Итак, комплексной функции можно поставить в соответствие некоторое отображение из R^2 в R^2, а именно $(x, y) \to (u, v)$. Но график такого отображения был бы в 4-мерном пространстве, поэтому изобразить его в нашем 3-мерном пространстве невозможно. Но мы можем пользоваться неким подобием графика, а именно, рассматривать чертёж искажений плоскости, изучать, в какие линии отображаются горизонтальные либо вертикальные линии из исходной плоскости.

Пример. Разложить $f(z) = z^2$ на действительную и мнимую часть, изобразить искажения плоскости при переходе $(x, y) \to (u, v)$.
1) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.
Таким образом, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.
Чтобы исследовать, куда переходят горизонтальные прямые, зафиксируем $y = c$, при этом x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, пусть движение задано с помощью параметра t:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u = x^2 - y^2 = t^2 - c^2 \\ v = 2xy = 2tc \end{array}\right\}.$$

Чтобы составить уравнение, взаимосвязывающее u, v, и узнать, какая это кривая, исключим параметр t, выразив из второго уравнения:

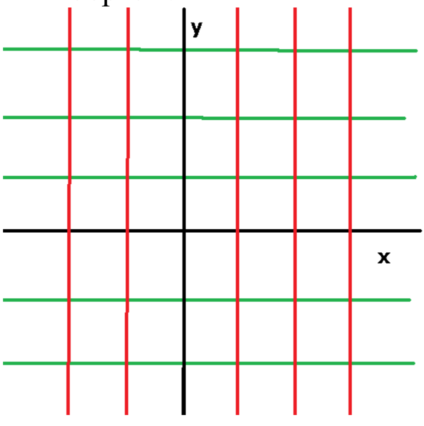
$t = \dfrac{v}{2c}$, тогда $u = \dfrac{v^2}{4c^2} - c^2$. Это парабола, лежащая на боку, ветвями направленная вправо, причём чем больше c, тем левее вершина, и тем более пологая парабола получается, ведь $\dfrac{1}{4c^2}$ при этом меньше. А если $c = 0$, то возникает предельный случай: обе ветви смыкаются в одну линию и образуют правую полуось. Действительная ось отображается на правую полуось в плоскости (u, v).

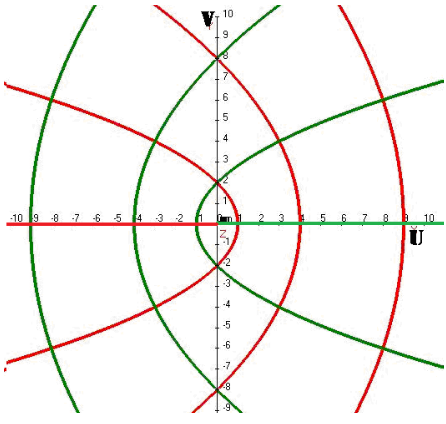
Аналогично, для какой-либо вертикальной прямой:

$\left.\begin{array}{l} x = c \\ y = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u = x^2 - y^2 = c^2 - t^2 \\ v = 2xy = 2ct \end{array}\right\}$. Тогда, исключая параметр t,

получим $t = \dfrac{v}{2c} \Rightarrow u = c^2 - \dfrac{v^2}{4c^2}$. Это параболы, направленные ветвями влево, симметричные тем, что были рассмотрены чуть выше.

На чертеже зелёным цветом показаны горизонтальные прямые и их образы при отображении $f(z) = z^2$, а красным - вертикальные прямые и их образы:





Пример. Разложить $f(z)=z^3$ на действительную и мнимую часть.

Используем то, что нашли ранее: $z^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$, тогда

$z^3=\left((x^2-y^2)+i(2xy)\right)\left(x+iy\right)=$

$x(x^2-y^2)-y2xy+ix2xy+iy(x^2-y^2)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right).$

Здесь $u(x,y)=x^3-3xy^2$ $v(x,y)=3x^2y-y^3$

Пример. Разложить $f(z)=e^z$ на действительную и мнимую часть.

По формуле Эйлера: $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=$ $e^x\cos y+ie^x\sin y$, тогда $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$.

Изучим деформации плоскости при действии линейной функции вида $w=Az+B$, где коэффициенты $A=a+bi$, $B=c+di$ это тоже некоторые комплексные числа. При этом очевидно, что $B=c+di$ приводит к сдвигу плоскости на вектор (c,d), поэтому сначала более подробно изучим именно $w=Az$ без сдвига.

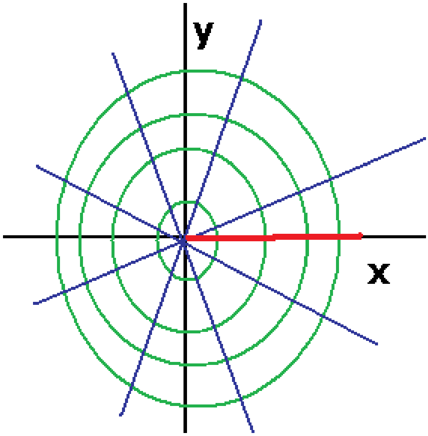
$w=u+iv=(a+bi)(x+iy)=(ax-by)+i(bx+ay)$. Но такое отображение можно представить с помощью линейного оператора:

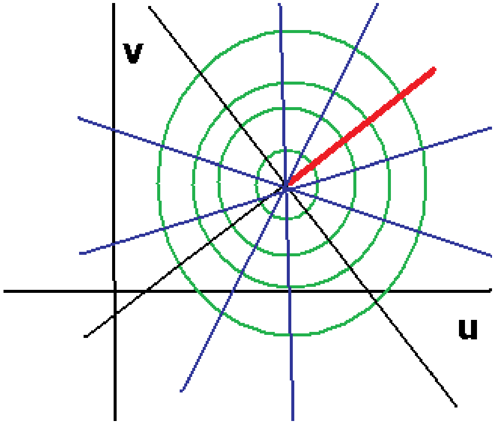
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax-by\\bx+ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Введём величину $k=\sqrt{a^2+b^2}$, тогда существует какой-то угол φ, для которого $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Причём заметим, что это именно $\varphi=\arg(z)$, $k=|z|$ для исходного комплексного числа.

Тогда матрица линейного оператора имеет вид: $k\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$ то есть это композиция растяжения и поворота плоскости, причём поворот на угол $\varphi=\arg(z)$, а растяжение или сжатие на $k=|z|$.

(ДОК 12). Доказать что линейное отображение $w=Az+B$ в комплексной плоскости есть композиция растяжения, поворота и сдвига.





На этом чертеже показано, как изменяется плоскость при линейном отображении. Красным веделено горизонтальное направление, после отображения оно повёрнуто.

Замечание. Отображение $f(z)=\bar{z}$ соответствует зеркальному отражению плоскости, т.е. оно не сводится к композиции поворота и растяжения.

ЛЕКЦИЯ 5. 03.10.2018

§ 3. Дифференцирование комплексных функций

Функция $u+iv=f(x+iy)$ фактически задаёт отображение плоскости в плоскости, то есть пара действительных чисел (x,y) отображается в пару чисел (u,v). Для двух функций $u(x,y)$ и $v(x,u)$ существуют 4 частных производных: $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

Определение производной. Производной функции $f(z)$ в точке z_0 называется следующий предел: $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Также можно кратко записать в виде $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$.

Заметим, что все величины в этой дроби, существуют и вычислимы, ведь здесь частное от разностей комплексных чисел.

Определение дифференцируемости. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если приращение функции можно представить в виде: $\Delta f = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)$, где A некоторое комплексное число, α - бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz.

Заметим, что если функция дифференцируема, то $A = \dfrac{\Delta f}{\Delta z} - \dfrac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z}$, но тогда т.е. $A = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z}$ тогда $A = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} - 0 = f'(z_0)$, т.е. константа $A = f'(z_0)$.

Геометрический смысл производной. Так как с точностью до бесконечно-малой, можно представить $\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z$, а это линейное отображение, изученное в конце прошлой лекции, то в малой окрестности отображение представимо в виде растяжения и поворота, где $\arg(f'(z_0))$ это угол поворота, а $|f'(z_0)|$ - коэффициент растяжения.

Изучим взаимосвязь дифференцируемости $f(z)$ с дифференцируемостью координатных функций $u(x, y)$ и $v(x, u)$.

Теорема 1. Функция $f(z)$ дифференцируема $\Leftrightarrow$ $u(x, y)$ и $v(x, u)$ дифференцируемы и выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Доказательство (ДОК 13). Запишем подробнее равенство

$\Delta f = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)$. $\Delta u + i\Delta v = (a + bi) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)$.

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые, в которых есть и в которых нет мнимой единицы.

$\Delta u + i\Delta v = (a\Delta x - b\Delta y) + i(b\Delta x + a\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2) \Rightarrow$

Получается такая система из двух равенств:

$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1$

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2$

Если в 1-м уравнении рассмотреть приращение только по оси Ox, тогда $\Delta y = 0$, то $\Delta u = a\Delta x + \alpha_1 \Rightarrow a = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\alpha_1}{\Delta x} \Rightarrow$

$a = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha_1}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} - 0$, так как α_1 бесконечно малая более высокого порядка, так что при делении на величину Δx первого порядка предел равен 0. Итак, $a = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Если теперь во 2-м уравнении рассмотреть приращение только по оси Oy, то аналогично получится $a = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\alpha_2}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - 0$, т.е. $a = \frac{\partial v}{\partial y}$. Итак, $a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

По аналогии с этими рассуждениями, если в 1-м равенстве вычислять предел при сдвиге только по оси Oy, а во 2-м по Ox, получим $-b = \frac{\partial u}{\partial y}$, $b = \frac{\partial v}{\partial x}$, откуда второе условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

А для доказательства достаточности, можно наоборот, сложить два равенства:

$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1$

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2$,

умножив при этом второе на i. Если выполнены условия Коши-Римана, то 4 коэффициента при этом не являются 4-мя разными числами, а попарно совпадают, то мы как раз и получим:

$\Delta u + i\Delta v = (a + bi) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)$

□

Вывод. Итак, $u(x, y)$ и $v(x, u)$ должны быть взаимосвязаны, т.е. если мы произвольно зададим две какие-то функции $u(x, y)$, $v(x, u)$ и составим из них $u + iv$, то не всегда получим какую-то дифференцируемую комплексную функцию.

Пример. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = z^2$.

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

$\left(x^2 - y^2\right)'_x = 2x$, $\left(2xy\right)'_y = 2x$ они равны (1-е условие Коши-Римана).

$\left(x^2 - y^2\right)'_y = -2y$, $\left(2xy\right)'_x = 2y$ они противоположны (а это и есть 2-е условие Коши-Римана).

Теорема 2. $f(z)$ дифференцируемая функция $\Leftrightarrow$ векторные поля $\overline{F} = (v,u)$ и $\overline{F} = (-u,v)$ являются потенциальными.

Доказательство (ДОК 14). Вспомним условие потенциальности поля (P,Q), а именно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Для векторного поля $\overline{F} = (v,u)$ в таком случае, $P = v$, $Q = u$, и тогда условие потенциальности эквивалентно первому условию Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Для векторного поля $\overline{F} = (-u,v)$ соответственно, $P = -u$, $Q = v$, и тогда условие потенциальности эквивалентно второму условию Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

.

Метод вычисления производных по функциям $u(x,y), v(x,y)$.

Если задано $u + iv$ то достаточно вычислить $u'_x + iv'_x$. Производные по y являются излишней информацией, так как они взаимосвязаны с этими производными с помощью условий Коши-Римана. Например, $f(z) = z^2$ = $(x^2 - y^2) + i(2xy)$. Тогда $(x^2 - y^2)'_x + i(2xy)'_x$ = $2x + i2y = 2z$, в то же время и $(z^2)' = 2z$.

А сейчас мы рассмотрим функцию, для которой не выполнены условия Коши-Римана.

Пример. $f(z)=\bar{z}$. Тогда $u+iv=x-iy$, $u=x, v=-y$. Не выполняется 1-е условие: $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$, они не равны ни в одной точке.

Геометрически это означает, что зеркальное отражение плоскости невозможно представить в виде композиции растяжения и поворота, то есть невозможно равенство из условия дифференцируемости $\Delta f = A\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)$.

Определение. Если функция дифференцируема и в самой точке z_0, и во всех точках некоторой её окрестности, то она называется **аналитической** в точке z_0.

Пример. Для функции $f(z)=z^2$ условия Коши-Римана выполняются независимо от точки, то есть во всех точках плоскости, тогда для каждой точки они автоматически выполнены и во всей её окрестности. Таким образом, $f(z)=z^2$ аналитическая во всех точках комплексной плоскости.

Различие понятий аналитичности и дифференцируемости видно на другом примере.

Пример. $f(z)=z\cdot\bar{z}$. Распишем её через $u+iv$.

$f(z)=z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2+0i$. Здесь $u=x^2+y^2$, $v=0$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

1-е условие Коши-Римана выполняется только при $x=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $-\frac{\partial v}{\partial x}=0$.

2-е условие Коши-Римана выполняется только при $y=0$.

Таким образом, единственная точка в плоскости, где выполнены условия Коши-Римана, это (0,0). Но ни в одной точке из её окрестности они не выполняются, а только в одной изолированной точке $0+0i$. То есть, в начале координат функция дифференцируемая, но не аналитическая.

Теорема 3. Если функция является аналитической в некоторой области D, то для каждой из её частей (действительной и мнимой) u, v в этой области выполняется уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ и } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Доказательство. (ДОК 15).

Запишем 2 условия Коши-Римана. Одно продифференцируем по переменной x, а второе по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Сложим теперь эти 2 равенства, но при этом смешанные производные 2 порядка от v при этом совпадают, они вычитаются и дают 0.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=0. \text{ Итак, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Теперь снова запишем условия Коши-Римана, 1-е дифференцирует по y, а второе по x.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Теперь вычтем из 1-го равенства 2-е.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=0, \text{ тогда } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

□

Пример. $f(z) = z\cdot\bar{z} = x^2 + y^2 + 0i$. Здесь для $u = x^2 + y^2$ не верно уравнение Лапласа: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2+2 = 4 \neq 0$.

Теорема 4. Условия Коши-Римана эквивалентны условию $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Доказательство (ДОК 16). Вспомним, что x, y можно выразить через $z, \bar{z}$ таким образом: $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Сделаем это в функциях $u(x,y), v(x,y)$.

$u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$.

Таким образом, функция стала выражена через два аргумента $z, \bar{z}$, а значит, можно искать частную производную по $\bar{z}$.

Вспомним формулу полной производной (из 1 семестра) для случая композиции типа $f(x(t), y(t))$: $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$. Найдём производные от u, v по $\bar{z}$ этим методом, причём здесь тоже промежуточные переменные x, y.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}.$$

При этом такие компоненты как $\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}$ можно найти

из формул $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, а именно :

$\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)'_{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)'_{\bar{z}} = -\dfrac{1}{2i}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i}{2i^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Выполнение условий Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

в данном случае как раз и эквивалентно тому, что в обеих скобках нули, то есть $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 + 0i$.

□

Итак, как видим, наличие $\bar{z}$ в составе функции приводит к недифференцируемости. Впрочем, то же верно и при наличии $x = \operatorname{Re} z$ или $y = \operatorname{Im} z$, в составе которых есть элемент $\bar{z}$.

Алгоритм восстановления аналитической функции по её действительной или мнимой части.

Поскольку действительная и мнимая части взаимосвязаны условиями Коши-Римана, то достаточно одной её части, чтобы восстановить вторую часть, и далее всю функцию $f(z)$.

Например, нам известна u. Тогда $v = \int dv = \int \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$, это криволинейный интеграл 2 рода для векторного поля $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ от фиксированной точки, например (0,0) до произвольной (x, y). Нам неизвестны эти частные производные, как и сама функция v, однако их можно заменить на известные, по условиям Коши-Римана.

$\int \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$ и далее вычислить.

Итак, алгоритм:

1. Проверить выполнение уравнения Лапласа (иначе u или v не может быть частью какой-то единой комплексной функции).
2. Вычислить криволинейный интеграл.
3. В полученной функции $u(x,y)+iv(x,y)$ выразить x,y по формулам: $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. При правильном вычислении сократятся все $\bar{z}$ и останется только z.

Пример. Дано $u(x,y)=x^2-y^2$. Узнать мнимую часть и восстановить вид функции $f(z)$.

Сначала проверяем уравнение Лапласа.

$\left(x^2-y^2\right)''_{xx}=\left(2x\right)'_x=2$, $\left(x^2-y^2\right)''_{yy}=\left(-2y\right)'_y=-2$, сумма 2-й производных равна 0, то есть $u(x,y)=x^2-y^2$ является одной из компонент комплексной функции.

$v=\int dv = \int\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$, где $-\frac{\partial u}{\partial y}=2y, \frac{\partial u}{\partial x}=2x$.

Итак, найдём криволинейный интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2ydx+2xdy\right)$. Сделаем это с помощью интегрирования по ломаной, как при вычислении потенциала поля. $\int\limits_0^x 2\cdot 0dx+\int\limits_0^y 2xdy = 0+2xy\Big|_0^y = 2xy$.

Далее, в выражение $\left(x^2-y^2\right)+i\left(2xy\right)$ подставим $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+i2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i}=$$

$$\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4}-\frac{z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{-4}+\frac{z^2-\bar{z}^2}{2} =$$

$$\frac{z^2+\bar z^2}{4}+\frac{z^2+\bar z^2}{4}+\frac{z^2-\bar z^2}{2} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\bar z^2 = 1z^2+0\bar z^2$$

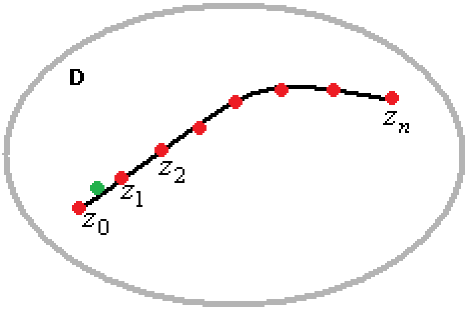
$= z^2$. Итак, $f(z)=z^2$.

ЛЕКЦИЯ 6. 10.10.2018

§ 4. Интегрирование комплексных функций

Возможны разные подходы к определению понятия интеграла от комплексной функции. Так, например, $u(x,y), v(x,y)$ - функции двух переменных, тогда можно вычислять кратные интегралы от них по некоторой плоской области, и объединять результаты в комплексное число вида I_1+iI_2. Однако в качестве основного всё же исторически был принят метод интегрирования по кривой, именно при таком подходе возможно введение понятия первообразной $F(z)$, а также получают применение многие факты из теории векторного поля. Итак, определение интеграла и метод его вычисления:

Определение. Пусть в области D задана некоторая функция $w=f(z)$ (не обязательно аналитическая), и в области D расположена кусочно-гладкая кривая L (не обязательно замкнутая). Введём разбиение кривой на n частей с помощью (n-1) внутренних точек. Таким образом, получилась последовательность точек $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$, расположенных по порядку на кривой, где z_0, z_n - начальная и конечная точки. Обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$. Выберем на каждом участке дуги какую-то точку c_k и составим интегральную сумму: $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k$. Предел интегральных сумм при измельчении разбиения, т.е. при $n\to\infty$, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой L и обозначается $\int\limits_L f(z)dz$.



Метод вычисления. При вычислении необходимо разбить на действительную и мнимую части как функцию, так и дифференциал, затем раскрыть скобки и получить 4 слагаемых. Но их можно объединить по два, в двух из них нет мнимой единицы, а в двух она есть:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx+udy) .$$

Таким образом, при вычислении всё сводится к двум криволинейным интегралам 2-го рода от векторных полей (v,u) и $(u,-v)$, а мнимая единица умножается на второй из них, при этом в самих вычислениях она фактически не участвует.

Некоторые свойства.

1. Линейность $\int_L (af(z)+bg(z))dz \;=\; a\int_L f(z)dz + b\int_L g(z)dz$.

2. Если кривая АС разбита на две части некоторой точкой В, то:
$\int_{AC} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz$

3. $\int_{BA} f(z)dz = -\int_{AB} f(z)dz$.

4. Если $|f(z)| \le M$ то $\int_{AB} f(z)dz \le ML$, где L - длина кривой АВ.

Пример. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z}dz$:

A) по прямолинейному отрезку от 0 до $1+i$.
B) по параболе от 0 до $1+i$.
Решение.
A) $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_L (x-iy)(dx+idy) =$

$\int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L (-ydx+xdy)$, далее вычисляем 2 криволинейных интеграла по отрезку, на котором $y=x$, заменяем $y=x$, $dy=dx$.

При этом $x\in[0,1]$. $\int\limits_0^1 2xdx+i\int\limits_0^1 (-xdx+xdx) = \int\limits_0^1 2xdx+0i =$

$x^2\Big|_0^1 +0i = 1+0i = 1$.

Б) Исходное раскрытие скобок происходит так же, как и в прошлом случае: $\int\limits_L (xdx+ydy)+i\int\limits_L (-ydx+xdy)$ но теперь линия L это не отрезок, заданный явным уравнением $y=x$, а парабола, заданная явным уравнением $y=x^2$. Поэтому заменяем $y=x^2$, $dy=2xdx$.

$\int\limits_0^1 (x+x^2 2x)dx+i\int\limits_0^1 (-x^2+x2x)dx = \int\limits_0^1 (x+2x^3)dx+i\int\limits_0^1 (x^2)dx =$

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 + i\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{3}i$.

Ответ. по отрезку: 1, по параболе: $1+\frac{1}{3}i$.

Как видим, в зависимости от формы кривой могут получиться разные ответы, но это здесь потому, что функция не аналитическая, она содержит $\bar{z}$, а мы доказывали теорему 4 в конце прошлого § о том, что аналитичность равносильна отсутствию $\bar{z}$ в составе функции, то есть тому, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Теорема 1. Если L замкнутый контур, внутри которого во всех точках $f(z)$ является аналитической, то $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

(ДОК 17). Доказательство. $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L (u+iv)(dx+idy) =$

$\oint\limits_L (udx - vdy) + i\oint\limits_L (vdx + udy)$ в двух этих интегралах - циркуляция двух векторных полей (v,u) и $(u,-v)$, они потенциальны по теореме 2 прошлого §, а тогда циркуляция равна 0, то есть получаем $0+0i$.

Теорема 2. Если $f(z)$ является аналитической во всех точках некоторой области D, граница которой односвязна, то интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути, то есть имеет одно и то же значение для любой кривой AB, соединяющей пару точек A, B.

(ДОК 18). Доказательство. Аналогично прошлой теореме,

$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_L (udx - vdy) + i\int\limits_L (vdx + udy)$.

Криволинейные интегралы 2 рода от векторных полей (v,u) и $(u,-v)$ не зависят от пути, что доказано ранее в главе «теория поля».

Так как для аналитической функции интеграл не зависит от пути, то для аналитической функции оказывается возможным ввести понятие первообразной. Введём в рассмотрение такую функцию: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ которая каждой точке ставит в соответствие интеграл до неё от некоторой фиксированной точки z_0. Вводится по аналогии с вычислением потенциала поля, только в данном случае, вычисляются потенциалы двух полей (v,u) и $(u,-v)$. Докажем, что построенная таким образом функция является первообразной.

Теорема 3. Функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ является первообразной от функции $f(z)$.

(ДОК 19). Доказательство.

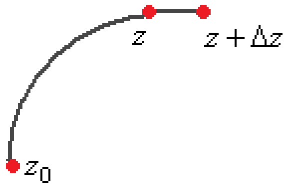
Докажем, что производная от $F(z)$ равна $f(z)$.

По определению производной, $F'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$.

Распишем разность в числителе более подробно.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz}{\Delta z}.$$

потому что по свойству 2, в числителе сокращается интеграл по той части, которая от z_0 до z, и остаётся только от z до $z+\Delta z$.



Итак, остаётся доказать равенство: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz = f(z)$, которое

можно переписать в виде $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz = \lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z)\Delta z$.

Распишем более подробно действительную и мнимую часть как в интеграле, так и в правом пределе.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \int\limits_{x+iy}^{x+iy+\Delta x+i\Delta y} (u+iv)(dx+idy) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (u+iv)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \int\limits_{x+iy}^{x+iy+\Delta x+i\Delta y} (udx - vdy + ivdx + iudy) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (u\Delta x - v\Delta y + iv\Delta x + iu\Delta y)$$

Проведём исследование 1 из 4 слагаемых, остальные по аналогии. Если рассматривать в проекции на горизонтальную ось, допустим, что y фиксировано, то:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x} u(x,y)dx = \lim_{\Delta x\to 0} u(x,y)\Delta x$$ что эквивалентно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} u(x,y)dx = \lim_{\Delta x\to 0} u(x,y).$$

Но так как для непрерывной функции действительного переменного верна теорема о среднем, т.е. такое свойство: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$, то в данном случае можно утверждать, что существует такая точка $\xi \in [x, x+\Delta x]$, что выполняется $\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} u(x,y)dx = u(\xi,y)$, причём при $\Delta x \to 0$ точка $\xi \to x$, ведь она находится на отрезке, который стягивается в одну точку, в свою левую границу.

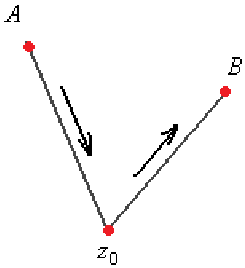
$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} u(x,y)dx = \lim_{\Delta x\to 0} u(\xi,y) = u(x,y)$. Итак, мы исследовали 1-е слагаемое из 4-х, остальные аналогично, причём везде используются только функции действительного переменного, просто одни из них умножаются на i в итоговой записи, а другие нет. Но для каждого элемента при этом можно использовать теорему о среднем как для действительной функции.

Теорема 4. Для аналитической на кривой L функции верна формула Ньютона-Лейбница: $\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A)$.

(ДОК 20). Доказательство. По построению первообразной,

$$F(B) = \int_{z_0}^{B} f(z)dz \quad \text{и} \quad F(A) = \int_{z_0}^{A} f(z)dz.$$

Но тогда $F(B) - F(A) = \int_{z_0}^{B} f(z)dz - \int_{z_0}^{A} f(z)dz$ а тогда по 3-му свойству это $\int\limits_{z_0}^{B} f(z)dz + \int\limits_{A}^{z_0} f(z)dz$, что равно интегралу по кривой, проходящей от A до B (через точку z_0).



Тогда $F(B) - F(A) = \int\limits_{A}^{z_0} f(z)dz + \int\limits_{z_0}^{B} f(z)dz = \int\limits_{A}^{B} f(z)dz$ т.к. по свойству 2, их можно объединить. Итак, $F(B) - F(A) = \int\limits_{A}^{B} f(z)dz$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{0}^{1+i} zdz$ от 0 до $1+i$ двумя способами:

А) без формулы Б) по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

А) $\int\limits_{0}^{1+i} zdz = \int\limits_{0}^{1+i} (x+iy)(dx+idy) = \int\limits_{0}^{1+i} (xdx - ydy) + i\int\limits_{0}^{1+i} (ydx + xdy)$

Пусть точки 0 и $1+i$ соединены по прямой $y = x$ (вспомним, что интеграл не зависит от пути, поэтому можем соединить их как удобнее для вычислений). Тогда $x \in [0,1]$, $dy = dx$, и

$$\int\limits_{0}^{1} (xdx - xdx) + i\int\limits_{0}^{1} (xdx + xdx) = \int\limits_{0}^{1} 0dx + i\int\limits_{0}^{1} 2xdx = 0 + ix^2\Big|_0^1 = i.$$

Б) По формуле: $\int\limits_{0}^{1+i} zdz = \left.\dfrac{z^2}{2}\right|_0^{1+i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$.

Пример. Вычислить $\oint\limits_L \frac{1}{z-z_0}dz$, где L - окружность радиуса ρ вокруг точки z_0

Решение.

Способ 1. Представим функцию в виде $u+iv$. Движение по окружности можно задать формулами:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos t \\ y = y_0 + \rho\sin t \end{cases}$$

В этом случае $dx = -\rho\sin t, \quad dy = \rho\cos t$. Тогда

$$\oint\limits_L \frac{1}{z-z_0}dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(x_0+\rho\cos t+iy_0+i\rho\sin t)-(x_0+iy_0)}(dx+idy) =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(\rho\cos t+i\rho\sin t)}(dx+idy)$$, домножим на сопряжённое,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\rho\cos t-i\rho\sin t)}{(\rho\cos t+i\rho\sin t)(\rho\cos t-i\rho\sin t)}(dx+idy) =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\rho\cos t-i\rho\sin t)}{\rho^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}(dx+idy) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\cos t-i\sin t)}{1}(dx+idy) =$$

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\pi}(\cos t-i\sin t)(-\rho\sin t+i\rho\cos t)dt = \int\limits_0^{2\pi} i(\cos^2 t+\sin^2 t)dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} idt = 2\pi\, i.$$

Способ 2. Представим $z = x+iy = x_0+iy_0+\rho(\cos t+i\sin t) = z_0+\rho e^{it}$. Тогда $dz = \rho\cdot i\cdot e^{it}dt$.

$$\oint\limits_L \frac{1}{z-z_0}dz = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{it}dt}{\rho e^{it}} = \int\limits_0^{2\pi} idt = 2\pi\, i.$$

ЛЕКЦИЯ 7. 17.10.2018

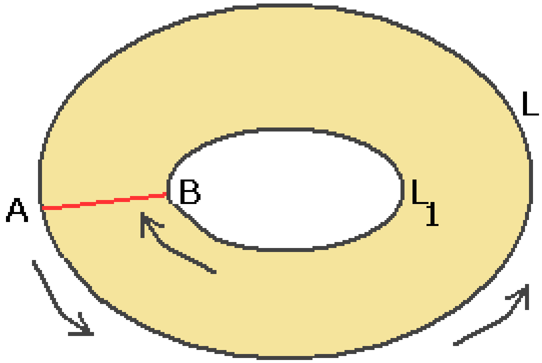
§ 5. Интегральная формула Коши

Заметим, что в последнем примере в конце прошлой лекции ρ сократилось и ответ вообще не зависел от ρ - радиуса окружности. То есть получается, при уменьшении или увеличении окружности ничего не изменится, если та же самая точка разрыва остаётся внутри, а замкнутый контур стягивается к ней, оставляя снаружи область аналитичности. Этот факт докажем в общем случае.

Теорема 1. (Интегральная теорема Коши).
Пусть L некоторый замкнутый контур, $L_1,...,L_n$ - n замкнутых непересекающихся контуров, лежащих внутри L. Функция $f(z)$ является аналитической на всех этих контурах, а также внутри L, но вне $L_1,...,L_n$. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n}\oint\limits_{L_k} f(z)dz$.

Доказательство (ДОК 21).

Для того, чтобы лучше понять идею доказательства, рассмотрим сначала ситуацию, когда внутри L расположен один контур L_1, то есть оласть аналитичности - кольцо. Можно взять какую-либо пару точек A, B на L и L_1 соответственно (чтобы точкибыли максимально близко напротив друг друга) и соединить их отрезком. Тогда для комбинированого контура, состоящего из 4 частей: L^+, AB, L_1^-, BA внутренняя область, похожая на кольцо с разрезом, это область аналитичности. Мы один раз обходим этот контур, двигаясь по внешнему против часовой стрелки, поэтому и обозначено L^+, затем переходя на внутренний контур по AB, затем двигаясь по внутреннему в противоположном направлении (L_1^-), и возвращаясь по BA снова на внешний контур. Чертёж:

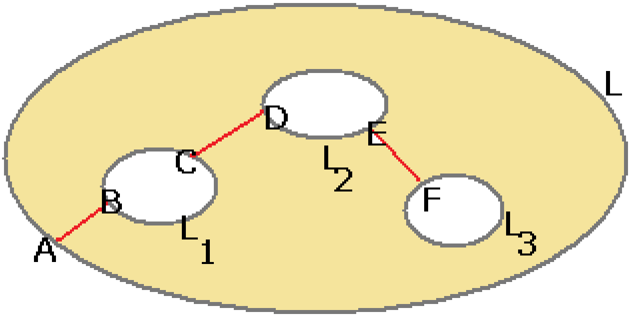


Но если комбинированный контур окружает область аналитичности, то интеграл по нему равен 0.

$$\oint\limits_{L^+\cup AB\cup L_1^-\cup BA} f(z)dz = \oint\limits_{L^+} f(z)dz + \oint\limits_{AB} f(z)dz + \oint\limits_{L_1^-} f(z)dz + \oint\limits_{BA} f(z)dz = 0 .$$

При этом интегралы по AB и BA и так взаимно уничтожаются, поэтому $\oint\limits_{L^+} f(z)dz + \oint\limits_{L_1^-} f(z)dz = 0$. Но если сменить направление движение по внутреннему контуру L_1, то интеграл по нему сменил бы знак, тогда: $\oint\limits_{L^+} f(z)dz - \oint\limits_{L_1^+} f(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint\limits_{L^+} f(z)dz = \oint\limits_{L_1^+} f(z)dz$.

Таким образом, интегралы по L и L_1 одинаковы, то есть можно без изменения результата уменьшить область, стянув её к точке разрыва, оставив снаружи какую-то часть области аналитичности.



Если внутри L несколько контуров, внутри которых нарушена аналитичности или даже существование функции, то применяется похожая схема рассуждений, только надо поочерёдно соединить отрезком L_1 с L_2, затем L_2 с L_3 и так далее, до номера n.

Теорема 2. (Интегральная формула Коши).
Пусть $f(z)$ является аналитической на контуре L и внутри него, точка z_0 лежит внутри L. Тогда $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Доказательство (ДОК 22).
В рассмотренном примере в конце прошлой лекции мы вычислили $\oint\limits_L \dfrac{1}{z-z_0}dz=2\pi i$, то есть верно $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{1}{z-z_0}dz=1$. Но мы можем домножить это равенство на любую комплексную константу, и тогда: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{A}{z-z_0}dz=A$. Впрочем, тогда это же верно и для константы $f(z_0)$: получаем $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z_0)}{z-z_0}dz=f(z_0)$. Мы получили выражение, очень похожее на то, которое надо доказать, но ещё не то: ведь здесь в числителе константа, а не функция. Вот если мы теперь ещё и докажем, что $\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint\limits_L \dfrac{f(z_0)}{z-z_0}dz$, или то же самое, что $\oint\limits_L \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0$, то требуемое утверждение будет верно.

Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Это функция, которая участвует в определении предела, ведь $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$.

Таким образом, $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=f'(z_0)$, то есть $\varphi(z)$ имеет конечный предел в точке z_0, а это значит, что она ограничена в окрестности этой точки, $|\varphi(z)|\le M$. По теореме 1 (интегральная теорема Коши), интеграл по L можно заменить на интеграл по любой малой окружности γ радиуса ρ, лежащей внутри L, результат при этом не изменится. Тогда $\left|\oint\limits_L \varphi(z)dz\right| = \left|\oint\limits_\gamma \varphi(z)dz\right| \le M\cdot 2\pi\rho$, где M - максимальное значение модуля функции, $2\pi\rho$ - длина кривой, по которой происходит интегрирование. Но ведь по теореме 1 это должно быть верно для какого угодно малого ρ. То есть $\oint\limits_\gamma \varphi(z)dz$ меньше или равен любой бесконечно-малой величины. Тогда этот интеграл равен 0. То есть $\oint\limits_\gamma \varphi(z)dz = \oint\limits_L \varphi(z)dz = \oint\limits_L \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$.

Значит, $\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint\limits_L \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz$, а тогда:

$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)$, т.е. $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)$ доказано в итоге.

Интегральная формула Коши позволяет быстро вычислять интегралы по контуру вокруг точки разрыва, фактически не проводя подробное интегрирование. Достаточно убрать из знаменателя ту скобку $(z-c)$, которая соответствует этой точке разрыва, подставить в остальную функцию $z=c$ и домножить на $2\pi i$.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z}{(z-1)(z+2)}dz$.

Решение. Внутри окружности радиуса 1,5 всего одна из двух точек разрыва функции, вторая снаружи. Обозначим в качестве $f(z)$ функцию без $(z-1)$, как будто на $(z+2)$ делим чуть раньше, а на $(z-1)$ позже.

$$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z}{(z-1)(z+2)}dz$$

$$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z}{(z-1)(z+2)} dz = \oint\limits_{|z|=1,5} \frac{\left(\dfrac{z}{z+2}\right)}{z-1} dz$$, где $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$ это то, что именно обозначается $f(z)$ в интегральной формуле Коши.

Тогда $$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{\left(\dfrac{z}{z+2}\right)}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{z}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi i = \frac{2}{3}\pi i . \backslash$$

Ответ. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z}{(z-1)(z+2)} dz = \frac{2}{3}\pi i$.

Теорема 3. (Обобщённая интегральная формула Коши).
Пусть $f(z)$ является аналитической на контуре L и внутри него, точка z_0 лежит внутри L. Тогда $\displaystyle f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

Доказательство (ДОК 23).
Продифференцируем по параметру z_0 правую и левую часть равенства в исходной интегральной формуле Коши.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz .$$

$$\left(f(z)(z-z_0)^{-1}\right)'_{z_0} = \left((-1) f(z)(z-z_0)^{-2}\right) \cdot (z-z_0)'_{z_0} =$$

$$\left((-1) f(z)(z-z_0)^{-2}\right) \cdot (-1) = f(z)(z-z_0)^{-2} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} .$$

Таким образом, $\displaystyle f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

Следующая производная от $f(z)(z-z_0)^{-2}$ равна $(-2) f(z)(z-z_0)^{-3}(-1) = 2 f(z)(z-z_0)^{-3}$. Аналогично следующая (тертья от исходной функции) равна $2 \cdot 3 \cdot f(z)(z-z_0)^{-4}$, далее по индукции для n-й производной получим $n!\cdot f(z)(z-z_0)^{-(n+1)}$ = $n!\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$. Тогда $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

Рассмотрим примеры, похожие на предыдущий, но в которых будет 2 или 3 степень скобки $(z-1)$. По обобщённой интегральной формуле Коши, если скобка во 2 степени, надо не просто убрать её из знаменателя, а после этого ещё и один раз продифференцировать оставшуюся функцию, и лишь затем подставлять $z=1$. А если 3 степень, то 2 раза продифференцировать, но с 3-й степени начинает ещё и изменяться коэффициент из-за того, что он уже не равен 1, а будет $2!$.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}dz$.

Решение. $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \dfrac{2\pi i}{1!}\cdot\left.\left(\dfrac{z}{z+2}\right)'\right|_{z=1} =$

$2\pi i\cdot\left.\left(\dfrac{1\cdot(z+2)-1\cdot z}{(z+2)^2}\right)\right|_{z=1} = 2\pi i\cdot\left.\dfrac{2}{(z+2)^2}\right|_{z=1} = 2\pi i\cdot\dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}\pi i$.

Ответ. $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \dfrac{4}{9}\pi i$.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^3(z+2)}dz$.

Решение. $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^3(z+2)}dz = \dfrac{2\pi i}{2!}\cdot\left.\left(\dfrac{z}{z+2}\right)''\right|_{z=1} = \pi i\cdot\left.\left(\dfrac{2}{(z+2)^2}\right)'\right|_{z=1} =$

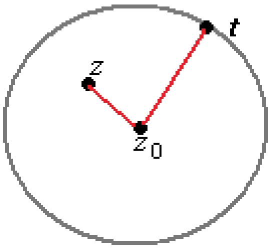
$\pi i\cdot\left.\left(\dfrac{0-2(z+2)\cdot 2}{(z+2)^4}\right)\right|_{z=1} = \pi i\cdot\left.\left(\dfrac{-4}{(z+2)^3}\right)\right|_{z=1} = \pi i\cdot\dfrac{-4}{3^3} = -\dfrac{4}{27}\pi i$.

Ответ. $\oint\limits_{|z|=1,5} \dfrac{z}{(z-1)^3(z+2)}dz = -\dfrac{4}{27}\pi i$.

Далее докажем с помощью интегральной формулы Коши, что верно разложение в ряд Тейлора не только для функций действительного переменного (1 семестр), но и для комплексных функций.

Теорема 4. (Теорема о разложении в ряд Тейлора).
Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0.
Тогда она представима в виде степенного ряда:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, где $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Доказательство (ДОК 24).
Рассмотрим окрестность точки z_0 и какую-нибудь точку z, лежащую внутри неё. Пусть граница окрестности - кривая L, а точку на ней обозначим t.



Можно записать интегральную формулу Коши для точки z в таком виде: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(t)}{t-z}dt$ (здесь t и z имеют такой же смысл, как ранее было z и z_0).

Изучим дробь $\dfrac{1}{t-z}$ подробнее. Можно прибавить и отнять z_0:

$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)}$ а дальше преобразовать к виду суммы геометрической прогрессии, чтоб воспользоваться тем фактом, что $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Причём выносить за скобку в знаменателе надо именно такой из двух блоков, чтобы получилось 1 и нечто меньшее по модулю, чем 1. Учитывая, что t на границе, а z внутри контура, то z ближе к z_0, чем t. Поэтому $|z-z_0| < |t-z_0|$, т.е. $\frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} < 1$

Тогда $\frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}$. Подставим это выражение в интегральную формулу Коши вместо $\frac{1}{t-z}$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t-z} dt =$

$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \left(f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_L \left(f(t) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \right) dt$.

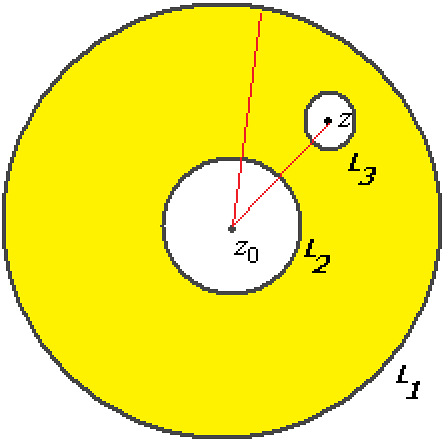
Оставим внутри знака интеграла только те множители, которые зависят от t. Получим $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_L \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$ но оставшийся внутри суммы интеграл можно преобразовать по обобщённой интегральной формуле Коши из теоремы 3, ведь если $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$ то $\oint_L \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Получилось разложение в ряд Тейлора с коэффициентами $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Теорема 5. (Теорема о разложении в ряд Лорана).
Пусть $f(z)$ является аналитической в некотором кольце с центром z_0, тогда она представима в виде ряда $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Доказательство (ДОК 25).
Обозначим внутреннюю и внешнюю границы кольца через L_1 и L_2. Возьмём произвольную точку z в кольце. Окружим её контуром L_3 малого радиуса, так, чтобы он не пересекался с L_1 и L_2.



По теореме 1, $\oint\limits_{L_1} \frac{f(t)}{t-z}dt = \oint\limits_{L_2} \frac{f(t)}{t-z}dt + \oint\limits_{L_3} \frac{f(t)}{t-z}dt$, впрочем, тогда $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1} \frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2} \frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_3} \frac{f(t)}{t-z}dt$. Но третий интеграл по контуру L_3, внутри которого только одна точка нарушения аналитичности функции $\frac{f(z)}{t-z}$, а именно точка z. Тогда третий интеграл сразу можно по интегральной формуле Коши представить в виде значения функции:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(t)}{t-z}dt + f(z).$$

Тогда $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(t)}{t-z}dt$.

В каждом из интегралов преобразуем выражение $\frac{1}{t-z}$ с помощью геометрической прогрессии. В первом из них почти как в предыдущей теореме, потому что $|z-z_0|<|t-z_0|$, т.е. $\frac{|z-z_0|}{|t-z_0|}<1$. А вот во втором, преобразование будет чуть иначе, потому что для точки $t\in L_2$, наоборот, $|z-z_0|>|t-z_0|$ и соответственно, $\frac{|t-z_0|}{|z-z_0|}<1$.

Если $t\in L_1$: $\quad \frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} =$

$$\frac{1}{t-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Если $t\in L_2$: $\quad \frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{\frac{t-z_0}{z-z_0}-1} =$

$$-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Тогда $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(t)}{t-z}dt \quad \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{L_1}f(t)\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}dt + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{L_2}f(t)\frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}dt \quad =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{L_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)^n\,dt$$

В первой части снова по обобщённой интегральной формуле Коши, а во 2 части сделаем сдвиг индексов на 1 пункт.

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\,\frac{2\pi i}{n!}\,f^{(n)}(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)^n\,dt\ =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)^{n-1}dt\right).$$

Мы получили такую структуру ряда, где представлены все целые степени, и положительные, и отрицательные:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}\ ,$$

а если бы мы ещё сделали замену индекса $m=-n$ для 2 части, чтобы подчеркнуть, что там именно отрицательные степени, то получили бы

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\sum_{m=-1}^{-\infty}(z-z_0)^m\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)^{-(m+1)}dt\right)$$

где $a_m=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{m+1}}dt$ т.е. коэффициенты при отрицательных степенях во 2 части приобрели бы точно такой же вид, как и в 1 части, с той разницей лишь, что $(t-z_0)$ с отрицательной степенью в знаменателе, хоть и формально написан в знаменателе, но реально располагается в числителе. Так, например,

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)^0\,dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}f(t)dt\,,\quad a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}f(t)(t-z_0)dt\,.$$

ЛЕКЦИЯ 8. 24.10.2018

Сначала рассмотрим ещё некоторые примеры на интегральную формулу Коши, которую мы доказали на прошлой лекции.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$.

Решение. Здесь степень множителя в знаменателе равна 2. Есть всего одна точка разрыва, а именно $z_0 = 1$. Конкретизируем обобщённую интегральную формулу Коши для этого случая.

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, при n = 1 получается

$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi\ i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi\ i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

Отсюда следует, что $\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi\ if'(z_0)$

Тогда $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz = 2\pi\ i\left(e^z\right)'\Big|_{z=1} = 2\pi\ ie^z\Big|_{z=1} = 2\pi\ ie$.

Ответ. $2\pi\ ie$.

Пример. Доказать, что $\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = 0$ для любого целого числа $n > 1$.

Решение. Здесь по обобщённой интегральной формуле Коши при любом n получается, что $f(z) = 1$. Затем любая производная от константы есть 0. Поэтому результат всегда 0.

Впрочем, если бы мы вычисляли даже старым способом без интегральной формулы Коши (как в конце лекции 6 на странице 56), то получалось бы $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho ie^{it} dt}{(\rho e^{it})^n} = \frac{1}{\rho^{n-1}} i \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{itn}} dt = \frac{1}{\rho^{n-1}} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt =$

$\frac{1}{\rho^{n-1}} i\left(\int_0^{2\pi} \cos((1-n)t)dt + i\int_0^{2\pi} \sin((1-n)t))dt\right)$ но оба интеграла здесь равны 0, потому что $(1-n)$ целое число, а значит, на отрезке $[0,2\pi]$ один или больше полных периодов, что приводит к нулевому интегралу. И лишь при $n=1$ результат получается $2\pi\ i$ (а это было в примере на стр. 56 в конце лекции 6).

§ 6. Комплексные числа и дифференциальные уравнения.

Теперь, когда мы более подробно изучили ТФКП, в том числе формулу Эйлера, ненадолго вернёмся к теме «линейные дифференциальные уравнения», а именно, ещё раз рассмотрим случай комплексных характеристических корней. Это очень полезно, чтобы не забывать дифференциальные уравнения, а также лучше понять происхождение решений вида $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$, которые есть в составе ФСР. Напомним, что линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид $a_n y^{(n)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Пусть среди корней есть 2 комплексно-сопряжённых корня, а именно $a+bi$ и $a-bi$. Тогда $e^{(a+bi)x}$ и $e^{(a-bi)x}$. По формуле Эйлера, эти две функции можно записать в виде

$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$,

$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}\cos bx - ie^{ax}\sin bx$.

Линейные комбинации решений снова являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения. Таким образом, можно образовать две действительные функции действительного переменного, а именно, с помощью комбинаций: $\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx$ и $\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $r^2 + 2r + 5 = 0$.

Его корни найдём с помощью дискриминанта. $D = 4 = 4 \cdot 5 = -16$.

Тогда $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

ФСР: $e^{-x} \cos 2x$ и $e^{-x} \sin 2x$.

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$.

Наличие 1-й производной привело к появлению e^{-x} в решении. Это - затухающие колебания из-за сопротивления среды. Уравнение можно представить и в таком виде: $y'' = -5y - 2y'$ ускорение (вторая производная) зависит от координаты точки с противоположным знаком, но кроме того, ещё и от скорости: чем больше скорость при движении вправо, тем больше дополнительная сила направлена влево. Это физически как раз и означает сопротивление среды. А вот если бы не было 1 производной, то в решении были бы только синус и косинус, без экспоненты в отрицательной степени, т.е. колебания в вакууме без сопротивления:

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$.

Здесь характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$, т.е. $r = \pm i = 0 \pm 1i$.

Тогда $y = C_1 e^{0x} \cos 1x + C_2 e^{0x} \sin 1x = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

§ 7. Гиперкомплексные числовые системы. Кватернионы.

Задумаемся над таким вопросом, можно ли обобщить комплексные числа, например, создать систему с двумя мнимыми единицами и числами вида $a + bi + cj$.

В системе комплексных чисел задана так называемая в алгебре билинейная операция умножения векторов плоскости. Линейное отображение, которое мы раньше ещё называли линейный оператор, переводит 1 вектор в 1 вектор: $x \to L(x)$. Билинейное отображение даёт результат для пары объектов, $z_1 \cdot z_2 = z_3$. Так как выполняется дистрибутивность, то есть можно раскрыть скобки в случае, когда объект на первом или втором месте есть сумма двух других, то отображение линейно по каждому аргументу, поэтому оно и называется билинейным.

При фиксировании одного из элементов, получается действие только на 2-й элемент, т.е. линейное отображение (линейный оператор) действующий по закону $z \to a \cdot z$. Например, умножение на i в комплексной плоскости приводит к повороту на 90^0.
Если линейный оператор задаётся плоской квадратной матрицей порядка n, то для билинейной операции фактически можно построить n линейных операторов: умножение на $e_1, e_2, ..., e_n$. Тогда в итоге получается объёмная матрица из n^3 элементов.
Например, чтобы задать умножение в комплексной плоскости, надо задать умножения всех базисных элементов друг на друга. Можно это записать в виде символьной таблицы:

	1	i
1	1	i
i	i	-1

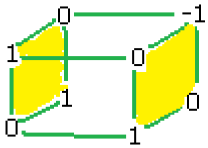
Если записать в векторном виде, используя обозначения $1 = e_1$, $i = e_2$, то есть не акцентируя на том что это комплексная плоскости, а просто в общем виде как действия с геометрическими векторами плоскости, то таблица запишется так:

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-e_1$

Но можно записать подробнее, учитывая все кординаты (те, которых нет, соответствуют 0):

	e_1	e_2
e_1	$1e_1 + 0e_2$	$0e_1 + 1e_2$
e_2	$0e_1 + 1e_2$	$-1e_1 + 0e_2$

Но фактически здесь n^2 векторов, а значит n^3 констант. Если откладывать вниз координаты каждого вектора, а в верхнем слое поместить основание матрицы, то получится вот такая 3-мерная матрица:



Рассмотрим две матрицы, являющиеся сечениями - они выделены жёлтым. Это линейный оператор умножения на 1 и умножения на i. И здесь одна матрица единичная (задаёт тождественный оператор) а вторая задаёт поворот плоскости на 90^0.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Докажем, что невозможно задать 3-мерную систему, так, чтобы при этом соблюдались известные базовые арифметические свойства. Например, докажем, что в 3-мерной системе (и в любой системе нечётной размерности) всегда есть делители нуля.

Теорема. Не существует числовой системы нечётной размерности без делителей нуля.

Доказательство (ДОК 26). Допустим, что существует система с двумя мнимыми единицами, где числа вида $a+bi+cj$. Умножение на 1 сохраняет любой объект. Отразим это в таблице умножения базисных единиц:

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	*
j	j	*	*

Здесь осталось 3 элемента, помеченных *, которые ещё надо задать, а именно, ij, ji, j^2. Как бы мы их не задали, в любом случае, умножение на какой-либо фиксированный элемент данной системы - это линейный оператор в 3-мерном пространстве: $z \to a \cdot z$. Ему соответствует какая-то плоская матрица из 9 элементов A_a. Существует её определитель $|A_a| = c$. Таким образом, можно поставить некое число в соответствие каждой точке пространства. Определитель матрицы умножения на данный элемент отождествляет

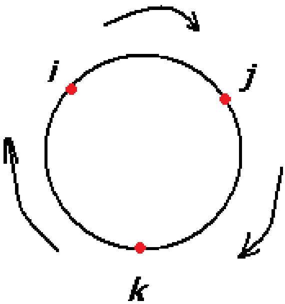
с элементом данной системы, т.е. с точкой 3-мерного пространства. Таким образом, в 3-мерном пространстве задана непрерывная скалярная функция. Но ведь умножение на противоположный элемент $z \to (-a) \cdot z$ соответствует оператору, у которого матрица состоит из чисел с противоположным знаком. Это матрица $-A_a$. Так как она порядка 3, то $|-A_a| = (-1)^3 |A_a| = -|A_a| = -c$, т.к. коэффициент -1 выносится из каждой строки, а их всего 3, нечётное количество. Соединяя точки $a, -a$ по сфере, получаем дугу, на которой функция изменяется от $-c$ до c. Тогда существует какая-то точка $b \in R^3$, где данная функция обращается в 0. Таким образом, линейный операторв умножения на b является вырожденным оператором, ведь определитель его матрицы равен 0. А если оператор вырожденный, то существует вектор в пространстве, который отображается в 0. Тогда $z \to b \cdot z = 0$. Таким образом, $b \cdot z = 0$, но $b \neq 0, z \neq 0$. То есть, в 3-мерной системе обязательно существуют делители нуля - такие ненулевые элементы, которые при умножении порождают 0.
Аналогичное верно и для любой нечётной размерности, так как для неё $|-A_a| = (-1)^n |A_a| = -|A_a|$.

Кватернионы.
Указанные выше причины не препятствуют построению числовых систем в случае чётной размерности. Так, если сделать по аналогии перехода от действительных чисел к комплексным, удвоить размерность и образовать числа вида $(a+bi)+(c+di)j$ из пары комплексных чисел, где второе умножено ещё на какой-то объект j, то получается 4-мерная система с тремя мнимыми единицами и числами вида $a+bi+cj+dk$, которые называются кватернионами.
При этом $ij = k$ это мы изначально называем произведение 1-й и 2-й мнимых единиц некоторой третьей мнимой единицей.
Получается антикоммутативная система с умножением:
$ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Умножение на 1 сохраняет любой объект неизменным. Получается таблица:

Таблица умножения базисных элементов системы кватернионов.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Обратите вниание, что законы умножения в системе кватернионов $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ легко запомнить, если представить с помощью цикла:



При умножении каждой пары получается следующий, если двигаться строго по часовой стрелке. Ещё обратите внимание, что мнимые единицы системы кватернионов подчиняются таким же законам, как векторное умножение в 3-мерном пространстве. Там тоже $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$. Векторное произведение пары векторов есть общий перпендикулярк ним, причём так чтобы получалась правоориентированная тройка. Векторное умножение было придумано Гамильтоном в 1843 году как раз одновременно с системой кватернионов.

Как и для комплексных чисел, здесь есть понятие «сопряжённый кватернион». Если $z = a + bi + cj + dk$ то $\bar{z} = a - bi - cj - dk$. При этом $z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, то есть можно также ввести понятие модуля кватерниона: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Подробнее о том, почему получается $z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

$z\bar{z} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) =$

$a^2 - i^2b^2 - j^2c^2 - k^2d^2 - bcij - bcji - bdik - dbki - cdjk - cdkj =$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bc(ij + ji) - bd(ik + ki) - cd(jk + kj)$ но система антикоммутативна, т.е. $(ij = -ji,\ \ ik = -ki,\ \ jk = -kj$, поэтому все эти суммы в скобках равны 0, вот и остаётся $z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Глава 3. Особые точки и вычеты.

§ 1. Нули аналитической функции.

Определение. Точка z_0 называется нулём функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Мы сначала изучим нули функции, для того, чтобы затем изучить более подробно типы точек разрыва. Если z_0 является нулём для $f(z)$ то в этой же точке предел $\dfrac{1}{f(z)}$ равен ∞.

Вспомним, что в 1 семестре было ещё название «бесконечно-малая» и «бесконечно-большая» функция в точке. Бесконечно-малые могли быть разных порядков. Есть и здесь аналогичное более подробное определение, различающее порядки бесконечно малых:

Определение. Точка z_0 называется нулём порядка m функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$ и функция представима в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$.

Кстати, здесь ещё можно напомнить, что для многочленов тоже было известно понятие корня кратности m, и аналогия тут прямая.

Теорема 1. (О виде ряда Тейлора в окрестности нуля порядка m). Если z_0 нуль порядка m функции $f(z)$, то ряд Тейлора имеет вид $f(z) = a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \ldots$ т.е. начинается именно со степени m.

Доказательство (ДОК 27). Если $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, то ряд Тейлора функции $\varphi(z)$ обязательно начинается с константы, а иначе не было бы $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда:

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) = (z - z_0)^m (a_0 + a_1(z - z_0) + ...)$$

что и приводит к виду $f(z) = a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + ...$

Теорема 2. (Об изолированности нулей).
Если z_0 является нулём порядка m функции $f(z)$, то существует окрестность $U(z_0)$, не содержащая других нулей этой функции.

Доказательство (ДОК 28). Если z_0 является нулём порядка m функции $f(z)$, то $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$. Первый множитель обращается в 0 только в самой точке z_0 и нигде больше. Второй в точке z_0 отличен от 0. Но $\varphi(z_0) \neq 0$, а так как эта функция аналитическая и значит, непрерывная, то существует окрестность $U(z_0)$, в которой $\varphi(z) \neq 0$ т.е. не обращается в 0 ни в одной её точке. Итак, есть произведение двух множителей, где первый равен 0 только в z_0, а второй нигде в окрестности $U(z_0)$. Таким образом, в $U(z_0)$ произведение обращается в 0 только в z_0.

Следствие 1. Если существует последовательность нулей функции, сходящаяся к z_0, то в некоторой окрестности $f(z) \equiv 0$.

ЛЕКЦИЯ 9. 31.10.2018

§ 2. Особые точки

Определение. Точка z_0 называется **правильной** точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ является аналитической в z_0, и **особой** точкой, если она не является аналитической в z_0.

Определение. Точка z_0 называется **изолированной** особой точкой, если в некоторой её окрестности $U(z_0)$ нет других особых точек.

Существует такая классификация особых точек в зависимости от предела $f(z)$.

Название	Устранимая особая точка	Полюс	Существенно-особая точка
При каком условии	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = const$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует
Пример ($z_0 = 0$)	$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$	$f(z) = \dfrac{1}{z^m}$	$f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Теорема 1. Точка z_0 является нулём функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ она является полюсом функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Доказательство. Точка z_0 является нулём функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, причём $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) \neq 0$. Это эквивалентно тому, что $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)} = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\lim\limits_{z\to z_0} \psi(z) \neq 0$, а предел знаменателя равен 0. Это означает, что $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = \infty$.

В связи с этим, естественным образом возникает определение полюса порядка m: точка z_0 называется полюсом порядка m для функции $f(z)$, если для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ она является нулём порядка m.

Теорема 2.

(О взаимосвязи типа особой точки и строения ряда Лорана).

1). z_0 устранимая особая точка $\Leftrightarrow$ остутствует главная часть ряда Лорана.

2) z_0 полюс $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит конечное количество слагаемых.

3) z_0 существенно-особая точка $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество слагаемых.

Доказательство (ДОК 29). Напомним строение ряда Лорана в окрестности точки z_0 в общем случае:

$$f(z) = ... + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Пункт 1) Если присутствует хотя бы одна отрицательная степень, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не будет конечным числом. Таким образом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = const$ то $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$, причём $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

И обратно, если $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$ то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = const$, потому что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0 + 0 + 0 + ...$, ведь каждое слагаемое кроме a_0 стремится к 0.

Пункт 2) Точка z_0 является полюсом порядка m эквивалентно тому, что $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}$, где функция в числителе имеет ненулевой предел, поэтому её разложение в ряд имеет вид: $\psi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$

Тогда $f(z) = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...}{(z - z_0)^m} =$

$\frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + ... + a_m + a_{m+1}(z - z_0) + ...$ то есть крайняя отрицательная степень это именно число $-m$ если порядок полюса m. В главной части может быть не ровно m слагаемых, а какие-то пропущены (коэффициенты 0) но крайнее левое имеет именно степень, равную $-m$.

И обратно, если крайняя левая степень $-m$, то можно представить в виде

$f(z)=\dfrac{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+...}{(z-z_0)^m}$ т.е. $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, и тогда точка является полюсом.

Пункт 3) Если точка является существенно-особой, но при этом допустить, что главная часть ряда Лорана состоит из нулевого либо из конечного количества слагаемых, то согласно предыдущим пунктам, получали бы противоречие: точка или устранимая, или полюс, и не является существенно-особой. Таким образом, из того, что она существенно-особая, логически следует бесконечность главной части ряда. И обратно, если главная часть бесконечна, то невозможно допустить, что точка полюс или устранимая, иначе сразу получалось бы противоречевое условие, что главная часть конечна.

Пример. Найти все особые точки и указать их тип для $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z^2+z+1}$.

Решение. Преобразуем знаменатель: $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)+(z+1)}$ = $\dfrac{1}{(z^2+1)(z+1)}$ = $\dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+1)}$. В знаменателе 3 нуля, причём каждый 1-го порядка, а именно $1, i, -i$. Следовательно, для функции 3 полюса 1-го порядка: $1, i, -i$.

Пример. Указать тип всех особых точек для функции:

$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}$.

Решение. В знаментателе нули 1-го, 2-го и 3-го порядка, а именно, точки 2,3 и 4. Тогда для $f(z)$: $z_0=2$ полюс 1-го порядка,

$z_0=3$ полюс 2-го порядка, $z_0=4$ полюс 3-го порядка.

Теорема 3. Если $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, причём точка z_0 является нулём порядка m для функции $f_1(z)$, и нулём порядка n для функции

$f_2(z)$, то при $m \geq n$ точка z_0 устранимая или правильная точка, а при $n > m$ полюс порядка $n-m$ для функции $f(z)$.

Доказательство (ДОК 30). Если z_0 - нуль порядка m и n соответственно для числителя и знаменателя, то $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ = $\dfrac{(z-z_0)^m \varphi_1(z)}{(z-z_0)^n \varphi_2(z)}$ = $\dfrac{1}{(z-z_0)^{n-m}} \cdot \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$ где $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi_i(z) = const$ для каждой из двух функций. Тогда можно обозначить $\psi(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$ и в итоге $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^{n-m}}$, это и означает, что полюс порядка $n-m$.

Пример. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z^4}$.

Решение. Представим функцию в числителе в виде разложения в ряд Тейлора.

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots}{z^4} = \frac{z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right)}{z^4}$$

в числителе нуль 1 порядка, а в знаменателе 4-го. Тогда точка $z_0 = 0$ полюс 3 порядка.

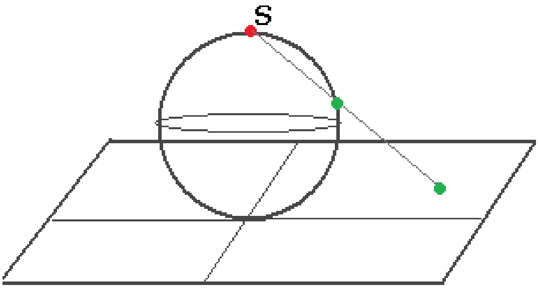
$$\frac{z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right)}{z^4} = \frac{\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right)}{z^3} = \frac{\psi(z)}{z^3}$$

. В числителе после сокращения осталась функция, имеющая ненулевой предел.

Характеризация бесконечно-удалённой точки.

Когда мы вычисляем предел в точке z_0, он может быть конечным, бесконечным либо не существовать. Аналогично этому, подобные ситуации могут быть и при вычислении предела $f(z)$ при $z \to \infty$. Бесконечность не является точкой в плоскости, тем не менее, тип такого объекта как «бесконечно-удалённая точка» можно тоже классифицировать как и типы особых точек, с помощью предела.

Существует геометрическая модель, в которой бесконечно-удалённая точка присутствует на равных с другими точками. Поместим сферу над плоскостью в начало координат. Если от верхней точки S провести любую наклонную прямую, то она 1 раз пересечётся со сферой и 1 раз с плоскостью. Таким образом, каждой точке комплексной плоскости можно однозначно поставить в соответствие точку на сфере. При этом единственная точка, для которой нет образа на плоскости - это точка S. Она соответствует горизонтальной касательной, и можно поставить ей в соответствие «бесконечно удалённую точку».



Классификация ∞ как особой точки происходит аналогично, как и было для точки z_0:

Название	Устранимая особая точка	Полюс	Существенно-особая точка
При каком условии	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = const$	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует
Пример	$f(z) = \dfrac{1}{z}$	$f(z) = z^m$	$f(z) = \sin z$

Только в данном случае наоборот, полюс если степень m в числителе, а не в знаменателе. Например, для $f(z) = z^m$ полюс порядка m.

В задачах можно делать замену $w=\frac{1}{z}$ и таким образом сводить изучение $z=\infty$ к изучению поведения функции в точке $w=0$.

Пример. Определить тип точки ∞ для $f(z)=\frac{z^5}{(1-z)^3}$.

Решение. Сделаем замену $w=\frac{1}{z}$, т.е. После этого функция изменит вид так: $f(w)=\frac{\left(\frac{1}{w}\right)^5}{\left(1-\frac{1}{w}\right)^3}=\frac{1}{w^5}\frac{1}{\left(\frac{w-1}{w}\right)^3}=\frac{1}{w^5}\frac{w^3}{(w-1)^3}$.

Попутно заметим, что $w=1$ а значит и $z=1$ - полюс 3-го порядка.

Для точки $w_0=0$, соответствующей $z=\infty$, видим нуль 3-го порядка в числителе и 5-го порядка в знаменателе. Сократив дробь, можно получить $\frac{1}{w^2}\frac{1}{(w-1)^3}$. Тогда видно, что $w_0=0$ полюс 2-го порядка, а значит, $z=\infty$ полюс 2-го порядка.

Пример. Определить тип точки ∞ для $f(z)=z^m$.

Решение. Сделаем замену $w=\frac{1}{z}$, т.е. После этого функция станет $f(w)=\frac{1}{w^m}=\frac{1}{(w-0)^m}$, то есть $w=0$ полюс порядка m, значит $z=\infty$ полюс порядка m.

Пример. Определить тип точки ∞ для $f(z)=e^z$.

Решение. Сделаем замену $w=\frac{1}{z}$, т.е. После этого $f(w)=e^{1/w}$.

Если устремить w к 0 со стороны положительной полуоси, то получается $e^{+\infty}=\infty$. Если со стороны отрицательной полуоси, то $e^{-\infty}=0$. А если со стороны мнимой оси, то предел вообще не существует: при $w \to 0$, $z = iy$, и при этом $y \to \infty$, при этом e^{iy} = $\cos y + i \sin y$, т.е. при $y \to \infty$ не существует предел ни действительной, ни мнимой части. Итак, приближаясь к (0,0) на плоскости с разных сторон, получаем разные результаты, а при приближении по некоторым траекториям предел даже не существует. Вывод: предел в точке $w = 0$ не существует, $w = 0$ а значит $z = \infty$ это существенно-особая точка.

§ 3. Вычеты

Определение. Пусть C замкнутый контур, внутри него точка z_0, на самом контуре и внутри него нет особых точек, кроме z_0. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_C f(z)dz$ называется **вычетом** функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Теорема 1. Вычет функции равен коэффициенту a_{-1} в разложении в ряд Лорана. $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Доказательство. В § 5 прошлой главы («интегральная формула Коши») доказывали теорему 5 о разложении в ряд Лорана, и получили, в частности, $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2} f(t)(t - z_0)^0\, dt = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2} f(t)dt$. А правое выражение это и есть вычет.

Теорема 2. Если z_0 - правильная точка или устранимая особая точка, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

Доказательство. Если $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$, а для правильной или устранимой особой точки $a_{-1} = 0$ по теореме 2 прошлого параграфа, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

Теорема 3. Если z_0 простой полюс (т.е. 1-го порядка) то верна формула вычисления вычета: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$.

Доказательство (ДОК 31). Можно доказать двумя методами:
1) с помощью ряда Лорана
2) с помощью интегральной формулы Коши.

Способ 1. Рассмотрим ряд Лорана. Если полюс 1-го порядка, то крайняя отрицательная степень равна -1, то есть ряд имеет такой вид:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...$$

Домножим на $(z-z_0)$, чтобы выразить крайний коэффициент a_{-1}.

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + a_2(z-z_0)^3 + ...$$

Теперь все слагаемые стремятся к 0 при $z \to z_0$, кроме a_{-1}.

$\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right) = a_{-1} + a_0 0 + a_1 0 + a_2 0 + ... = a_{-1}$, при этом из теоремы 1 известно, что $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Тогда $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$.

Способ 2. Если z_0 полюс 1-го порядка, то функцию можно представить в виде: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$, тогда верно $(z-z_0)f(z) = \varphi(z)$. В то же время по интегральной формуле Коши: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}dz = \varphi(z_0)$. Тогда $\varphi(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}dz = \varphi(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ 10. 07.11.2018 Вычеты (продолжение).

В случае, когда в точке z_0 полюс, в знаменателе далеко не всегда степенная функция, содержащая $(z-z_0)$, возможно, что там произвольная функция. Чтобы вычислять вычет и в этом случае, рассмотрим такой факт.

Теорема 4. Если функция имеет вид $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\psi(z)$ имеет нуль 1 порядка в точке z_0, а $\varphi(z_0)\neq 0$, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$.

Доказательство (ДОК 32). По предыдущей теореме,

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$, тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$,

но при этом $\psi(z_0)=0$, так что можно утверждать, что

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)}\right) = \lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}\right)$, а теперь

в знаменателе как раз и есть производная от $\psi(z)$ в точке z_0. Итак,

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^z}{\sin z}$.

Решение. $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^z}{\sin z} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z}{\cos z} = \dfrac{1}{1}=1$.

Можно было решить и с помощью теоремы 4, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^z}{\sin z} = \lim\limits_{z\to 0}\left(z\dfrac{e^z}{\sin z}\right)$

$= \lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\sin z}e^z\right) = 1\cdot 1=1$, но в этом случае надо было бы использовать 1-й замечательный предел.

Выведем формулу для полюса порядка m.

Теорема 5. Если z_0 - полюс порядка m, то верна формула вычисления вычета: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m \cdot f(z)\right)^{(m-1)}$.

Доказательство (ДОК 33). Как и теорему 3, можно доказать двумя методами: с помощью ряда и с помощью интегральной формулы Коши. Здесь остановимся на доказательстве только по интегральной формуле Коши. Запишем обобщённую формулу Коши для какой-нибудь функции f_1, т.к. обозначение f у нас уже использовано, оно будет применяться ко всей функции, которая в интеграле.

$f_1^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. Но ведь мы можем сделать такую замену индекса: $m = n+1$ и переписать формулу в виде

$f_1^{(m-1)}(z_0) = \dfrac{(m-1)!}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^m}dz$ или эквивалентно: $\dfrac{1}{(m-1)!} f_1^{(m-1)}(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^m}dz$. Пусть $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^m}$. Тогда $f_1(z) = f(z)(z-z_0)^m$, а интегральная формула Коши запишется в виде: $\dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$. Правая часть этой формулы по определению как раз и равна вычету $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Пример. Найти вычет $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{1}{z^3(z+1)}$.

Решение. Здесь точка $z_0 = 0$ полюс порядка 3, конкретизируем формулу для этого порядка и этой точки:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3 \cdot f(z)\right)''.$$ Итак, $$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3(z+1)} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3 \cdot \frac{1}{z^3(z+1)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z+1}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-1}{(z+1)^2}\right)' =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{(-1)(-2)}{(z+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1^3} = 1.$$

Пример. Найти вычет $\operatorname*{Res}_{z=5} \dfrac{z}{(z-2)(z-5)}$.

Решение. Здесь точка $z=5$ полюс 1 порядка. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=5} \frac{z}{(z-2)(z-5)} = \lim_{z\to 5}(z-5)\frac{z}{(z-2)(z-5)} = \lim_{z\to 5}\frac{z}{z-2} = \frac{5}{3}.$$

Пример. Найти вычет $\operatorname*{Res}_{z=5} \dfrac{z}{(z-2)(z-5)^2}$.

Решение. Здесь точка $z=5$ полюс 2 порядка. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=5} \frac{z}{(z-2)(z-5)} = \lim_{z\to 5}\left((z-5)\frac{z}{(z-2)(z-5)}\right)' = \lim_{z\to 5}\left(\frac{z}{z-2}\right)' =$$

$$\lim_{z\to 5}\left(\frac{(z-2)-z}{(z-2)^2}\right) = \lim_{z\to 5}\left(\frac{-2}{(z-2)^2}\right) = -\frac{2}{9}.$$

Пример. Найти вычет $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(5z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}$.

Решение. Здесь точка $z=5$ полюс 3 порядка. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(5z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin(5z)\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(5\cos(5z)\right)' =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(-25\sin(5z)\right) = -\frac{25}{2}.$$

Определение вычета в ∞. Пусть C замкнутый контур, на контуре и вне его нет особых точек. Тогда интеграл $-\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ называется **вычетом** функции $f(z)$ в ∞ и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$.

Когда мы рассматривали конечную точку z_0, то при вычислении интеграла по контуру обходили его против часовой стрелки, чтобы точка оставалась слева. А чтобы например, линия горизонта (бесконечность) оставалась с левой стороны при движении, нужно круг обходить наоборот, именно по часовой стрелке. Поэтому-то здесь изначально в определении знак минус.

Важно заметить, что при этом $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ равен $-a_{-1}$, т.е. минус первому коэффициенту ряда Лорана при разложении в окрестности ∞ (то есть в области $|z| > R$) с противоположным знаком.

Пример. Найти вычет $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(z\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.

Решение. Вспомним разложение косинуса в ряд Тейлора:

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$ Здесь z бесконечно-большая величина, а $t = \frac{1}{z}$ наоборот, бесконечно малая, так что переход получается корректный, ведь мы применяем формулу Тейлора как раз в окрестности нуля.

$$z\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z^6}+\ldots\right) = z-\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z^5}+\ldots$$

Теперь выберем коэффициент при $\frac{1}{z}$ и изменим его знак, получится $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$. Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример. Найти вычет $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(z^3e^{\frac{1}{z}}\right)$.

Решение. Вспомним разложение экспоненты в ряд Тейлора:

$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\ldots$ Тогда $z^3e^{\frac{1}{z}}=$

$$= z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\ldots\right) = z^3+z^2+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\ldots$$

Коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$, тогда ответ $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(z^3e^{\frac{1}{z}}\right)=-\frac{1}{24}$.

Подробнее рассмотрим строение ряда Лорана в окрестности ∞. Если для $t=\frac{1}{z}$ полюс порядка m в точке $t=0$, то крайняя отрицательная степень равна $-m$. Тогда для ряда Лорана по z, крайняя положительная степень равна m. То есть ряд вида $\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m$. Если ∞ устранимая особая точка, то ряд имеет вид $\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0$. Но в этом случае коэффициент a_{-1} может быть не равен 0. То есть, даже в случае, когда ∞ устранимая особая точка, то вычет может быть не равен 0.

Теорема 6. Если ∞ устранимая особая точка, то вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right)$$

Доказательство (ДОК 34). Если ∞ устранимая особая точка, то ряд имеет вид: $f(z) = \ldots\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0$. Чтобы коэффициент a_{-1} оказался крайним и его можно было выразить, продифференцируем 1 раз, и константа a_0 исчезнет: $f'(z) = \ldots\frac{-3a_{-3}}{z^4} + \frac{-2a_{-2}}{z^3} + \frac{-a_{-1}}{z^2} + 0$. Теперь домножим на z^2, получим $z^2 f'(z) = \ldots + \frac{-3a_{-3}}{z^2} + \frac{-2a_{-2}}{z} - a_{-1}$. Если перейти к пределу при $z \to \infty$, то все слагаемые устремятся к 0, и останется лишь одна константа a_{-1}, которую мы как раз и хотели выразить. Коэффициент a_{-1} с отрицательным знаком в точности равен вычету, поэтому полчили то, что и требовалось доказать:

$$\lim_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right) = \ldots + 0 + 0 - a_{-1} = \operatorname*{Res}_{\infty} f(z)$$

Теорема 7. Если ∞ является полюсом порядка m, то вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right)$$

Доказательство (ДОК 35). Если ∞ полюс порядка m, то ряд имеет вид: $f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1(z - z_0)\ldots + a_m(z - z_0)^m$. Чтобы коэффициент a_{-1} оказался крайним и его можно было выразить, надо продифференцировать столько раз, чтобы исчезли все положительные степени. Так, после 1-го дифференцирования:

$$f'(z) = \ldots + \frac{(-2)a_{-2}}{z^3} + \frac{(-1)a_{-1}}{z^2} + 0 + a_1\ldots + ma_m(z - z_0)^{m-1}$$

исчезла только константа a_0. После 2-го исчезнет a_1, а там где была степень m, только после $m+1$- го дифференцирования.

$$f''(z)=...+\frac{(-2)(-3)a_{-2}}{z^4}+\frac{(-1)(-2)a_{-1}}{z^3}+0+0...+m(m-1)a_m(z-z_0)^{m-2}$$

Все положительные степени исчезнут после дифференцирования $m+1$ раз. Но более подробно обратим внимание, что при этом происходит с тем коэффициентом, где есть a_{-1}. Там каждый раз степень в знаменателе увеличивается, и домножается на следующее отрицательное число. После m шагов получилось бы

$$f^{(m)}(z)=...+\frac{(-2)(-3)...(-m-1)a_{-2}}{z^{m+2}}+\frac{(-1)(-2)...(-m)a_{-1}}{z^{m+1}}+0+...+0+ca_m$$

где $c=m(m-1)(m-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$.

На последнем шаге справа от a_{-1} исчезает уже всё полностью, и получается

$$f^{(m+1)}(z)=...\frac{S_{-3}\cdot a_{-3}}{z^{m+4}}+\frac{S_{-2}\cdot a_{-2}}{z^{m+3}}+\frac{(-1)(-2)...(-m)(-(m+1))a_{-1}}{z^{m+2}}$$

где S_{-2}, S_{-3} и далее - тоже числовые коэффициенты, состоящие из произведений целых отрицательных чисел. Если домножить на z^{m+2}, то получатся все отрицательные степени z, и лишь одна константа, как раз там, где есть a_{-1}.

$$z^{m+2}f^{(m+1)}(z)=...\frac{S_{-3}\cdot a_{-3}}{z^2}+\frac{S_{-2}\cdot a_{-2}}{z}+(-1)(-2)...(-m)(-(m+1))a_{-1}.$$

Если теперь перейти к пределу при $z\to\infty$, то все слагаемые кроме последнего устремятся к 0.

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{m+2}f^{(m+1)}(z)\right)=...0+0+(-1)(-2)...(-m)(-(m+1))a_{-1}$, итак,

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{m+2}f^{(m+1)}(z)\right)=(-1)^{m+1}(m+1)!\cdot a_{-1}$. Но для вычета нам надо выразить величину $-a_{-1}$, поэтому запишем так:

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{m+2}f^{(m+1)}(z)\right)=(-1)^m(m+1)!\cdot(-a_{-1})$. Тогда

$-a_{-1}=\operatorname{Res}\limits_{\infty} f(z)=\dfrac{1}{(-1)^m(m+1)!}\lim\limits_{z\to\infty}\left(z^{m+2}f^{(m+1)}(z)\right)$. Впрочем, деление на $(-1)^m$ эквивалентно умножению на $(-1)^m$, ведь это либо $+1$ либо

-1. Так что для удобства записи формулы, можно перенести в числитель:

$$-a_{-1} = \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. При $m = 0$ из формулы в теореме 7:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right)$$

получается формула из теоремы 6: $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \left(z^2 f'(z)\right)$.

полюс порядка $m = 0$ это и есть устранимая точка.

Теорема 8. (Основная теорема о вычетах).

Если $f(z)$ является аналитической на некотором замкнутом контуре L и в односвязной области внутри него, за исключением конечного количества изолированных особых точек, то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \right).$$

Доказательство (ДОК 36). По интегральной теореме Коши (стр. 58), интеграл по контуру L равен сумме интегралов по n контурам внутри него.

Тогда $\dfrac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{L_k} f(z)dz \right)$. Но каждое слагаемое в этой сумме - интеграл по контуру вокруг одной особой точки, делённый на $2\pi\, i$, а по определению это и есть вычет в данной точке z_k.

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \right) \;\Rightarrow\; \oint_L f(z)dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \right).$$

Вот и получается, что интеграл равен такой величине: $2\pi\, i$ умножить на сумму вычетов.

Теорема 9. Если $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением конечного количества изолированных особых точек, то $\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)\right)+\operatorname{Res}_{\infty} f(z)=0$.

(Сумма вычетов во всех конечных особых точках + вычет в бесконечности равно 0).

Доказательство (ДОК 37). Если в плоскости конечное количество особых точек, то среди них есть самая далёкая от начала координат. Тогда их все можно включить в круг некоторого радиуса. Ограничим все n особых точек замкнутым контуром γ настолько большого радиуса R, чтобы все они лежали внутри круга $|z|=R$.

По определению вычета в ∞, $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$,

а по прошлой теореме 8, $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)\right)$.

Получается, что вычет в ∞ противоположен сумме всех вычетов в конечных особых точках. Складывая эти 2 равенства, мы как раз и получим $\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)\right)+\operatorname{Res}_{\infty} f(z)=0$.

В следующем примере будет видно разнообразие способов вычисление вычета в ∞: и по доказанным формулам, и с помощью перехода к конечным точкам, и с помощью коэффициента из ряда Лорана.

Пример. Найти $\operatorname{Res}_{\infty} \frac{z}{z-2}$.

Способ 1. С помощью формулы из теоремы 6.

Так как $\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-2}=1$ то ∞ устранимая точка. Тогда можно вычислить по формуле: $\operatorname{Res}_{\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\left(z^2 f'(z)\right)$. Итак, $\lim_{z\to\infty}\left(z^2\left(\frac{z}{z-2}\right)'\right)=$

$$\lim_{z\to\infty}\left(z^2\left(\frac{(z-2)-z}{(z-2)^2}\right)\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{-2z^2}{(z-2)^2}\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{-2z^2}{z^2-4z+4}\right) =$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{-2}{1-\frac{4}{z}+\frac{4}{z^2}}\right) = -2.$$

Обратите внимание, что по определению вычет это интеграл по ограниченному контуру, т.е. он не может получиться равным ∞. При правильном вычислении производной, степени числителя и знаменателя уравниваются и предел получается конечный.

Способ 2. С помощью теоремы 9 (через конечную точку).

Заметим, что в знаменателе только $(z-2)$, т.е. эта функция имеет всего лишь одну конечную особую точку. Тогда:

$\operatorname*{Res}_{\infty} s\frac{z}{z-2} = -\operatorname*{Res}_{z=2} s\frac{z}{z-2}$. То есть надо найти вычет в точке 2 и сменить знак. $\operatorname*{Res}_{z=2} s\frac{z}{z-2} = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{z-2} = \lim_{z\to 2} z = 2$. Поэтому $-\operatorname*{Res}_{z=2} s\frac{z}{z-2} = -2$. Получается такой же ответ, как и прошлым методом.

Способ 3. С помощью ряда Лорана.

Разложим $f(z)=\frac{z}{z-2}$ в ряд Лорана в области $|z|>2$. При этом надо воспользоваться формулой суммы бесконечной убывающей прогрессии: $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$. Так как $|z|>2$ (рассматриваем окрестность бесконечности, а не нуля) то надо, чтобы получалось $q=\frac{2}{z}$, оно по модулю меньше 1. Но ни в коем случае не $q=\frac{z}{2}$.

Итак, $\dfrac{z}{z-2}=\dfrac{z}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = 1+\dfrac{2}{z}+\left(\dfrac{2}{z}\right)^2+\left(\dfrac{2}{z}\right)^3+\dots$. Выберем коэффициент a_{-1} при -1-й степени. Он равен 2. Тогда вычет равен $-a_{-1}=-2$.

ЛЕКЦИЯ 11. 14.11.2018

§ 4. Приложения вычетов

1) Вычисление интегралов по замкнутому контуру.

Пользуясь основной теоремой о вычетах, интеграл по замкнутому контуру L можно найти как сумму вычетов в особых точках, расположенных внутри этого контура:

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi\ i\sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z)$$

Пример. Вычислить $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3+1}dz$.

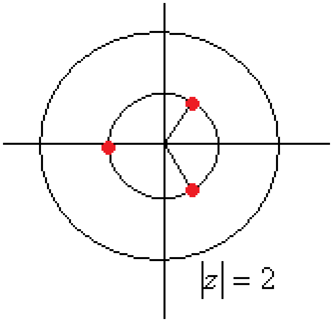
Решение. Здесь 3 особых точки, это корни уравнения $z^3=-1$. Они расположены на единичной окружности, то есть внутри окружности $|z|=2$. Корни можно найти либо с помощью формулы

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, либо таким образом: разложим сначала по формуле суммы кубов, получится $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$ и затем найдём корни квадратичного уравнения.

$D=1-4=-3$, $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$.

Тогда разложение дроби имело бы вид:

$\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)}dz$. Чертёж:



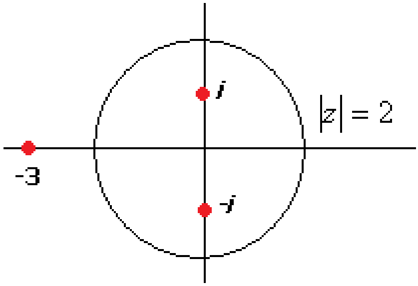
Далее надо было бы найти сумму вычетов в трёх полюсах 1-го порядка. На этом пути было бы слишком много действий по приведению подобных, так что в этом примере более рационально использовать один вычет в ∞, вспомнив о том, что сумма всех вычетов противоположна вычету в ∞. Так что далее надо найти $-2\pi\, i \operatorname*{Res}_{\infty} f(z)$. Для поиска вычета в ∞ разложим в ряд Лорана в области вне круга $|z| = 2$. При этом для получения сходящейся прогрессии надо использовать условие $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, а не $|z| < 1$, так как область не внутри круга а снаружи.

$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^3}\right)}$, при этом $q = -\frac{1}{z^3}$ по модулю меньше чем 1 вне круга, и тогда по формуле $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ получим

$\frac{1}{z^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n = \frac{1}{z^3}\cdot\left(1-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\ldots\right) = \frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^9}\ldots$ здесь отсутствует элемент, содержащий $\frac{1}{z}$, т.е. его коэффициент равен 0. Таким образом, $a_{-1} = 0$, тогда очевидно, что и $-a_{-1} = \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$, а значит, сумма вычетов во всех конечных точках тоже 0, и соответственно, исходный интеграл равен 0.

Пример. Вычислить $\dfrac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z}{(z^2+1)(z+3)}dz$.

Решение. Можно записать в виде $\dfrac{1}{2\pi\ i}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z}{(z+i)(z-i)(z+3)}dz$, здесь есть особые точки $-3, i, -i$, но только две из трёх лежат внутри окружности радиуса 2.



Тогда интеграл равен сумме двух вычетов:

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z}{(z+i)(z-i)(z+3)}+\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{z}{(z+i)(z-i)(z+3)}=$$

$$\left.\frac{z}{(z+i)(z+3)}\right|_{i}+\left.\frac{z}{(z-i)(z+3)}\right|_{-i}=\frac{i}{2i(3+i)}+\frac{-i}{(-2i)(3-i)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+i}+\frac{1}{3-i}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-i)+(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{3}{10}.$$

2) Вычисление несобственных интегралов по действительной оси

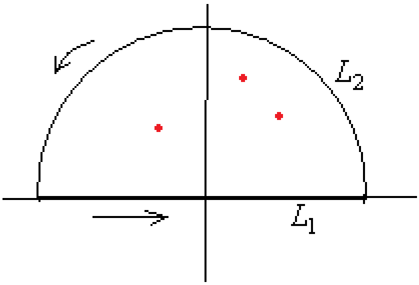
Теорема. Если $f(z)$ аналитическая на действительной оси, а также в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, и при этом $|f(z)|<\dfrac{c}{|z|^{1+\varepsilon}}$, то $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi\ i\cdot\sum_{\operatorname{Im}z_k>0}\left(\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)\right)$

т.е. несобственный интеграл по всей оси равен произведению $2\pi\ i$ на сумму вычетов во всех особых точках верхней полуплоскости.

Доказательство (ДОК 38).

1) Если особых точек конечное количество, то существует самая дальняя из них (с наибольшим модулем). Тогда можно найти такой радиус R, при котором все эти особые точки включены в полукруг, и при дальнейшем увеличении радиуса полукруга, новые точки в нём уже не могут появиться.

2) По основной теореме о вычетах (следующей из интегральной формулы Коши), интеграл по границе полукруга равен произведению $2\pi\, i$ на сумму вычетов во всех особых точках в верхнем полукруге. Граница состоит из двух частей: L_1 и L_2, по отрезку L_1 движение влева направо, а по полуокружности L_2 против часовой стрелки.



Тем самым, мы 1 раз обходим весь контур против часовой стрелки. Именно этим и объясняется, что надо рассматривать полукруг именно в верхней, а не нижней полуплоскости, а иначе движение по действительной оси получалось бы справа налево.

3) Начиная с некоторого радиуса R при дальнейшем его увеличении, интеграл уже не будет меняться, потому что все особые точки верхней полуплоскости уже попали в полукруг, и других точек там нет. Из того, что $|f(z)| < \dfrac{c}{|z|^{1+\varepsilon}}$, следует, что максимум модуля функции на полуокружности радиуса R меньше чем $\dfrac{c}{R^{1+\varepsilon}}$. А так как её длина равна πR, т.е. интеграл $\left|\int\limits_{L_2} f(z)dz\right| < \pi R \dfrac{c}{R^{1+\varepsilon}} = \pi \dfrac{c}{R^{\varepsilon}}$, эта величина стремится к 0 при $R \to \infty$. Таким образом, при неограниченном

увеличении радиуса, интеграл по дуге L_2 уменьшается и стремится к 0. существенная часть приходится именно на интеграл по L_1, то есть $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$, который при $R \to \infty$ как раз и стремится к $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. То есть, в пределе интегральная теорема Коши применяется к верхней полуплоскости, а её граница - это действительная ось.

Пример. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$.

Во 2 семестре мы вычисляли такие несобственные интегралы,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{c\to\infty} \int\limits_{-c}^{c} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{c\to\infty} \left(arctgx\Big|_{-c}^{c} \right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

А теперь покажем, как решить с помощью вычетов.

Решение. Заметим, что степень числителя на 2 порядка больше, чем степеннь знаменателя, то есть $|f(z)| < \frac{c}{|z|^{1+\varepsilon}}$ выполнено. Надо, чтобы разность степеней бала хотя бы чуть больше 1, а она равна 2.

Введём в рассмотрение функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$, которая на действительной оси как раз и совпадает с исходной функцией. Видно, что есть 2 полюса порядка 1, причём лишь один из них в верхней полуплоскости, а именно i. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = 2\pi\, i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z+i)(z-i)} = 2\pi\, i \frac{1}{z+i}\Big|_{i} = \frac{2\pi\, i}{2i} = \pi.$$

Ответ. π.

При правильных действиях, все мнимые единицы в такого рода примерах должны сократиться (они играют лишь вспомогательную роль), ответ - действительное число.

Пример. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$. Если знаменатель полностью разложить на множители, с учётом комплексных корней, получим $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$.

Таким образом, из 4-х особых точек, две в верхней полуплоскости, а именно $i, 2i$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = 2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\right) =$$

$$2\pi\, i\left(\left.\frac{z^2}{(z+i)(z+2i)(z-2i)}\right|_i + \left.\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)}\right|_{2i}\right)$$

(для удобства вычислений мы снова объединим сопряжённые).

$$2\pi\, i\left(\left.\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}\right|_i + \left.\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{2i}\right) =$$

$$2\pi\, i\left(\frac{-1}{2i(-1+4)}+\frac{-4}{(-4+1)(4i)}\right) = 2\pi\, i\left(\frac{-1}{2i\cdot 3}+\frac{-1}{(-3)(i)}\right) =$$

$$\frac{2\pi\, i}{i}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$ **Ответ.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Пример. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$.

Решение. Для решения таких задач во 2 семестре требовалось использовать рекуррентную формулу, чтобы свести к меньшей степени. А с помощью вычетов, это не нужно, отличие лишь в том, что полюс 2-го порядка, и надо будет использовать обобщённую интегральную формулу Коши (с производной). Тот факт, что инетграл по полуоси, не существенен: мы можем, пользуясь чётностью функции, удвоить до интеграла по всей оси (а потом разделить на 2) то есть решить этим методом можно.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$. Для функции

$\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ в верхней полуплоскости единствнееая особая точка, это i , полюс 2-го порядка.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}2\pi\, i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\right) = \pi\, i\left.\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'\right|_i =$$

$$\pi\, i\left.\frac{-2}{(z+i)^3}\right|_i = \pi\, i\frac{-2}{(2i)^3} = \pi\, i\frac{-2}{-8i} = \frac{\pi}{4}.$$ **Ответ.** $\dfrac{\pi}{4}$.

3) Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по отрезку длины 2π.

Рассмотрим ещё один метод, где комплексные числа и вычеты используются вспомогательно при интегрировании действительных функций. Пустьдан интеграл $\int_0^{2\pi} f(\sin x,\cos x)dx$. При этом мы можем ввести замену $z=e^{ix}$. Учитывая формулу Эйлера, $z=e^{ix}$ = $\cos x+i\sin x$, то есть образы это точки с координатами $(\cos x,\sin x)$, т.е. отрезок длины 2π отображается на окружность единичного радиуса. А интеграл по окружности в комплексной плоскости можно вычислять с помощью интегральной теоремы Коши и вычетов.

При этом синус и косинус заменяются на z таким образом:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix}+\dfrac{1}{e^{ix}}}{2} = \frac{z+\dfrac{1}{z}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix}-\dfrac{1}{e^{ix}}}{2i} = \frac{z-\dfrac{1}{z}}{2i}$$

Надо ещё рассмотреть взаимосвязь дифференциалов.

Если $z = e^{ix}$ то $ix = Ln(z) \Rightarrow x = \frac{1}{i} Ln(z) \Rightarrow dx = \frac{1}{iz} dz = -\frac{i}{z} dz$.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x} dx$.

Решение. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x} dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{5+3\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} =$

$\frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{5z+3\cdot\frac{1}{2}\left(z^2+1\right)} dz = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{10z+3\cdot\left(z^2+1\right)} dz =$

$\frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{3z^2+10z+3} dz$, далее найдём корни многочлена в знаменателе, это и будут полюсы функции.

$D = 100 - 4\cdot 3\cdot 3 = 64$, $z = \frac{-10 \pm 8}{6}$, т.е. $z = -\frac{1}{3}$ и $z = -3$.

Один полюс внутри круга, другой снаружи, таким образом, надо будет считать только один вычет в точке $z = -\frac{1}{3}$.

$\frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)} dz = \frac{2}{i} 2\pi\ i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{1}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = 4\pi\ \left.\frac{1}{3(z+3)}\right|_{-\frac{1}{3}} =$

$\frac{4\pi}{3\left(3-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4\pi}{3\cdot\frac{8}{3}} = \frac{\pi}{2}$.   **Ответ.** $\frac{\pi}{2}$.

ЛЕКЦИЯ 12. 21.11.2018

Ещё один пример на рассмотренный в конце прошлой пары метод.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos x+2\sin x}dx$.

Решение. Учитывая, что $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $dx = \frac{1}{iz}dz$, получим $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$. Преобразуем так, чтобы не было вложенных дробей.

1) домножим числитель и знаменатель на 2.

2) домножим iz, которое есть справа.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{6+\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{2}{i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{6i+i\left(z+\frac{1}{z}\right)+2\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} =$$

$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{6iz+i\left(z^2+1\right)+2\left(z^2-1\right)}dz$ затем надо перегруппировать слагаемые так, чтобы получился многочлен, где были бы явно видны коэффициенты при z^2, z и 1: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{(2+i)z^2+6iz+(-2+i)}dz$.

Ищем корни с помощью дискриминанта.

$D=(6i)^2-4(2+i)(-2+i) = -36-4(-5) = -16$. Корни:

$z=\frac{-6i\pm\sqrt{-16}}{2(2+i)} = \frac{-6i\pm 4i}{2(2+i)}$, это либо $\frac{-5i}{(2+i)}$ либо $\frac{-i}{(2+i)}$. Чтобы оценить, каков модуль каждого из них, т.е. какой внутри единичного круга а какой снаружи, надо домножить на сопряжённое, чтобы в знаменателе было действительное число.

$$-\frac{5i}{(2+i)} = -\frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{5i(2-i)}{5} = -(1+2i)$$

$$-\frac{i}{(2+i)} = -\frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{1+2i}{5}.$$

Модуль числителя равен $\sqrt{5}$, т.е. когда не делится на 5, то точка снаружи, а когда делится, то модуль станет $\frac{\sqrt{5}}{5} < 1$, и она внутри круга единичного радиуса.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{(2+i)z^2 + 6iz + (-2+i)} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{(2+i)(z+(1+2i))\left(z+\frac{1+2i}{5}\right)} dz =$$

Один полюс внутри круга, поэтому придётся находить вычет всего лишь в одной точке.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{(2+i)(z+(1+2i))\left(z+\frac{1+2i}{5}\right)} dz =$$

$$2\pi\, i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1+2i}{5}} \frac{2}{(2+i)(z+(1+2i))\left(z+\frac{1+2i}{5}\right)} = 2\pi\, i \left.\frac{2}{(2+i)(z+(1+2i))}\right|_{z=-\frac{1+2i}{5}}$$

$$= \frac{4\pi\, i}{(2+i)\frac{4}{5}(1+2i)} = \frac{5}{4}\frac{4\pi\, i}{(2+i)(1+2i)} = \frac{5}{4}\frac{4\pi\, i}{5i} = \pi.$$

В завершение этой главы рассмотрим пример, иллюстрирующий связь порядка полюса и строения главной части разложения в ряд Лорана.

Пример. Разложить в ряд Лорана $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+2i)}$ по степеням $(z-i)$ во множестве $0 < |z-i| < 3$.

Решение. В прошлом семестре мы строили разложение в кольце, где центр находился не в ослбой точке, тогда кольцо определялось расстояниями до 1-й и 2-й особой точки от центра. А здесь центр

кольца по условию находится именно в полюсе 1-го порядка. Поэтому множество - не кольцо, а круг с выколотой центральной точкой (фактически это кольцо, только внутренний радиус 0).
Разложим на простейшие дроби.

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+2i)} = \frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+2i} = \frac{A(z+2i)+B(z-i)}{(z-i)(z+2i)}.$$

Сравним числители: $A(z+2i)+B(z-i) = (A+B)z+2Ai-Bi = 1z+0$

Получается система уравнений: $\begin{cases} A+B=1 \\ i(2A-B)=0 \end{cases}$

Впрочем, во 2-м уравнении можно сократить на i, и получить систему в виде: $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=0 \end{cases}$. Складывая оба уравнения, получим $3A=1$, т.е. $A=\frac{1}{3}$, тогда $B=\frac{2}{3}$.

$f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+2i)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+2i}$. Здесь в первом слагаемом уже есть структура $(z-i)$, т.е. его преобразовывать больше и не надо. Во 2-м создадим искусственно слагаемое $(z-i)$.

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(z-i)+3i}$. Для того, чтобы использовать формулу суммы сходящейся геометрической прогрессии $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, надо вынести из знаменателя такой множитель, чтобы выполнялось условие $|z-i|<3$, т.е. чтобы там остались 1 и $\frac{z-i}{3i}$ (оно по модулю <1) но ни в коем случае не $\frac{3i}{z-i}$, т.к. оно >1 по модулю.

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{\frac{z-i}{3i}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{9i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{3i}\right)} =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{9i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{3i}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(3i)^{n+1}}.$$

Как видим, главная часть состоит всего лишь из одного слагаемого, крайняя отрицательная степень равна -1. Это именно потому, что в качестве центра была изначально назначена точка $z=i$, которая является полюсом 1-го порядка.

Глава 4. Ряды Фурье.
§ 1. Скалярное произведение, ортогональные системы.

Определение. Пусть задана система функций $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...\}$ на некотором отрезке $[a,b]$. Она называется базисом во множестве функций M, если $\forall f\in M$, функция представима в виде $f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$.

Пример. Пусть система функций состоит из 2 функций $\{1,x\}$. Тогда она является базисом для множества всех линейных функций вида $y=kx+b$.

Пример. Пусть система функций бесконечна и состоит из всех степенных: $\{1,x,x^2,...,x^n,...\}$. Тогда она является базисом во множестве всех непрерывных функций, которое обозначается $C[a,b]$. Вспомним, что каждую непрерывную функцию можно представить с помощью ряда Тейлора, это и есть разложение по данному базису.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad .$$

Существует ещё множество так называемых **кусочно-непрерывных** функций $C^1[a,b]$. В отличие от непрерывных, кусочно-непрерывная функция может содержать конечное число разрывов 1-го рода. Такие функции также легко интегрируются, т.к. можно разбить отрезок на части и рассмотреть сумму интегралов.

Скалярное произведение функций.

Вспомним скалярное произведение векторов $(a,b) = a_1 b_1 + ... a_n b_n$.

Для функций можно построить обобщение. Если заданы две функции $f(x), g(x)$, то очевидно, их можно умножить в каждой точке. Затем все эти произведения надо проинтегрировать, так как точек на интервале бесконечное количество. Получается как бы бесконечное количество координат.

Итак, определим скалярное произведение пары функций на интервале (a,b) по формуле: $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Можно считать, что это верно и на отрезке $[a,b]$, ведь две граничные точки не влияют на величину интеграла.

Пример. Найти скалярное произведение $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ на интервале (0,1).

Решение. $(f,g) = \int\limits_0^1 x \cdot x^2 dx = \int\limits_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Свойства скалярного произведения, которые напрямую следуют из свойств определённого интеграла:

1. $(f,g) = (g,f)$
2. $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$ и $(f,g+h) = (f,g) + (f,h)$
3. $(cf,g) = c(f,g)$ и $(f,cg) = c(f,g)$
4. $(f,f) \geq 0$, и $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

В свойстве 4, $\int\limits_a^b f^2(x)dx \geq 0$. Тогда существует корнь квадратный из (f,f), причём является действительным числом. Эта величина называется **нормой функции:** $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Вспомним, что для векторов есть аналогичное понятие модуля, $|a| = \sqrt{a_1^2 + ... a_n^2} = \sqrt{(a,a)}$.

Ортогональные функции.

Две функции называются ортогональными на интервале (a,b), если $(f,g)=0$, то есть $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=0$.

Здесь нет такого простого геометрического смысла, как в случае перпендикулярных векторов, для функций ортогональность значит, что произведение функций где-то больше, а где-то меньше нуля так, чтобы эти части компенсировались и уничтожились при интегрировании.

Пример. Доказать, что функции $f=\sin x$, $g=\cos x$ ортогональны на интервале $(0,\pi)$.

$$\int\limits_0^\pi \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^\pi = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Замечание. Если одна из функций в произведении тождественно равна 0, то интеграл очевидно, равен 0. Поэтому тождественный 0 - это функция, ортогональная любой другой.

Ортогональные системы. Если любая пара функций в системе ортогональна, то система называется ортогональной.
$\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,,...\}$ ортогональна, если $(\varphi_i,\varphi_j)=0$ для любых $i\neq j$.

Теорема. Верны следующие формулы вычисления коэффициентов разложения по ортогональной системе: $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ или $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

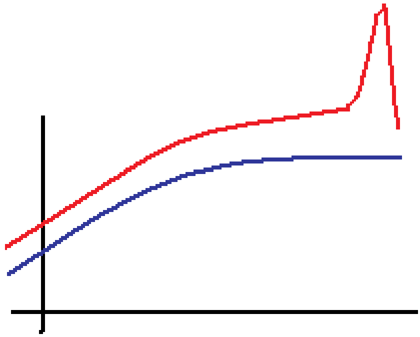
Доказательство (ДОК 39). Пусть функция f представлена в виде суммы: $f=c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+...c_n\varphi_n+...$ найдём коэффициенты .
Можно скалярно домножить на φ_n. Получим
$(f,\varphi_n)=(c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+...c_n\varphi_n+...,\varphi_n)$ =
$c_0(\varphi_0,\varphi_n)+c_1(\varphi_1,\varphi_n)+...c_n(\varphi_n,\varphi_n)+...$
среди этих слагаемых, лишь одно отлично от нуля, ведь система ортогональна, и при $i\neq n$ будет $(\varphi_i,\varphi_n)=0$.

Тогда $(f,\varphi_n)=c_n(\varphi_n,\varphi_n)$, тогда $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$ то есть $c_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Аналогичное равенство верно и для векторов: $a_1=\dfrac{(a,e_1)}{|e_1|^2}=\dfrac{a_1}{1}$.

Максимальное, среднее и среднеквадратичное отклонение.
Чтобы исследовать взаимосвязь 2 функций, а именно, удаление их графиков друг от друга, можно использовать такую величину:

$\Delta_1=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ называемую «равномерным», или максимальным, отклонением между графиками. Однако это не совсем точно характеризует взаимосвязь пары функций, ведь они могут идти очень близко, а затем удалиться на коротком интервале, а отклонение будет считаться большим. Например, как на чертеже:



Вместо этого можно рассматривать среднее значение модуля разности, и это уже более точная оценка.

$\Delta_2=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ - **среднее отклонение.**

Но чтобы посчитать интеграл от модуля, надо искать точки пересечения (а их может быть несколько) и разбивать интервал на части. Чтобы избежать этих громоздких вычислений, можно рассматривать такую величину:

$\Delta_3 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$ **среднеквадратичное** отклонение между f и g. Когда среднее стремится к 0, то и среднеквадратичное тоже, и хотя они не прямо пропорциональны, но минимальное значение одной из этих величин достигается при тех же условиях, что и у другой.

Пример. Найти максимальное, среднее и среднеквадратичное отклонение для функций $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ на $[0,1]$.

1) Максимум модуля разности ищем с помощью производной.

Учитывая, что на рассматриваемом отрезке $x \ge x^2$, можно записать и без модуля. $\left(x - x^2\right)' = 1 - 2x = 0$, это достигается в точке $x = \frac{1}{2}$, и отклонение там равно $\Delta_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2) Среднее отклонение: $\Delta_2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx$ $= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Оно получилось меньше чем $\Delta_1 = \frac{1}{4}$, это потому, что к концам интервала функции сближаются, т.е. естественно, среднее меньше, чем максимальное.

3) $\Delta_3 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{1-0}\int_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx} =$ $\sqrt{\int_0^1 \left(x^2 + x^4 - 2x^3\right) dx} = \sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}} =$ $\sqrt{\frac{10+6-15}{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$. Итак, $\Delta_1 = \frac{1}{4}$, $\Delta_2 = \frac{1}{6}$, $\Delta_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

ЛЕКЦИЯ 13. 28.11.2018

Если домножить функции из ортогональной системы системы на какие-то коэффициенты, то получится выражение

$P_n = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$ **многочлен по ортогональной системе.**

Теорема 1. Среднеквадратичное отклонение между f и P_n минимально $\Leftrightarrow$ коэффициенты $\alpha_i = c_i$ (совпадают с коэффициентами Фурье).

Доказательство (ДОК 40). $\Delta_3 = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$

минимально тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx$

минимально, так что мы можем рассмотреть просто интеграл от квадрата разности, то есть величину $(f-P_n, f-P_n)$. Во-первых, она по построению больше или равна 0. Рассмотрим её подробнее:

$(f-P_n, f-P_n) = \left(f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right)$ применим свойства скалярного произведения, будет так:

$$\left(f,f\right)-2\left(f,\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right)+\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i,\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right) =$$

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j\left(\varphi_i,\varphi_j\right).$$

Но от двойной суммы где $(n+1)^2$ слагаемых, фактически остаётся только (n+1) так как при несовпадении номера, скалярные произведения 0, ведь это ортогональная система.

$$\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n} a_i\left(\varphi_i,\varphi_i\right) = \|f\|^2-\sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right)+\sum_{i=0}^{n} a_i\|\varphi_i\|^2$$

преобразуем 2-е слагаемое по формуле $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} a_i \|\varphi_i\|^2$$ теперь прибавим и вычтем такое слагаемое, чтобы образовать разность квадратов:

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} a_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} (a_i - 2a_i c_i + c_i) \|\varphi_i\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} (a_i - c_i)^2 \|\varphi_i\|^2 .$$

Это выражение минимально, когда разность $(a_i - c_i)$ равна 0, то есть в точности, когда $a_i = c_i$ что и требовалось доказать.

Даже если третье слагаемое равно 0, то 2 первых в любом случае остаются, вспомним, что $(f - P_n, f - P_n) \geq 0$ т.к. это произведение одной и той же функции. Отсюда следует **неравенство Бесселя:**

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 .$$

Аналоги в векторных пространствах: если рассмотреть неполную сумму квадратов координат какого-то вектора, то очевидно, она меньше, чем квадрат его модуля. Так, для вектора из 3 координат

$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = |a|^2, \quad a_1{}^2 + a_2{}^2 < |a|^2$. Так и здесь, если рассматривать не всю систему функций, а всего лишь до номера n то получим неравенство, а если всю - то равенство.

Если для всякой $f \in M$ при $n \to \infty$ из неравенства Бесселя получается равенство $\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \|\varphi_i\|^2$ (называется **уравнением замкнутости)** то система $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ называется замкнутой во множестве M .

Определение полной системы. Если не существует ненулевой функции $f \in M$, которая ортогональна всем функциям данной системы $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$, то система называется **полной** во множестве M .

Для понимания, приведём аналог полной и неполной систем в векторных пространствах. Множество из 2 неколлинеарных векторов в пространстве не является полной системой, т.к. существует элемент, ортогональный этим двум векторам. А множество из 3 некомпланарных векторов - полная система.

Теорема 2. Замкнутая система является полной.

Доказательство (ДОК 41). Пусть верно $\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \|\varphi_i\|^2$, но при этом существует функция $f \in M$, ортогональная всем φ_i. То есть, $(f, \varphi_i) = 0$. Но тогда $c_i = \dfrac{(f, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2} = 0$ для любого номера i, а в этом случае $\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \|\varphi_i\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0$. Если $\|f\|^2 = 0$ то $\|f\| = 0$, тогда функция - тождественно нулевая.

С помощью скалярных произведений и норм можно доказать аналог теоремы Пифагора для систем функций.

Теорема 3. Если $x(t), y(t)$ ортогональные функции, то

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

для векторов такое равенство означало,что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

§ 2. Тригонометрический ряд Фурье

Основная тригонометрическая система

Рассмотрим на отрезке $[-l,l]$ такую систему функций:

$$\left\{\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{\pi x}{l},\ldots,\sin\frac{n\pi x}{l},\cos\frac{n\pi x}{l},\ldots\right\}$$

Рассмотрим подробнее, какие у них периоды. Известно, что при умножении на коэффициент частота увеличивается, а соответственно период уменьшается.

Если $\sin x$ имеет период 2π, то $\sin \pi x$ имеет период 2,

$\sin\dfrac{\pi x}{l}$ имеет период $2l$, то есть как раз совершает одно колебание на $[-l,l]$. Впрочем, можно было бы рассматривать и на $[0,2l]$.

$\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ имеет период $\dfrac{2l}{n}$, то есть для двух первых тригонометрических функций (не считая константы, конечно) на этом промежутке укладывается ровно одна волна, а для последующих - кратное число колебаний.

Докажем (ДОК 42) её ортогональность и вычислим квадраты норм всех составляющих её функций.

Константа ортогональна любой из функций этой системы, так как в интегралах $\displaystyle\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ и $\displaystyle\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ интегрируется функция, у которой целое количество периодов на данном отрезке, и такой интеграл равен 0.

Ортогональность всех остальных функций доказывается по формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\right).$

$\left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx =$

$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}-\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx$ но так как $n\neq m$ (мы же взяли разные функции из системы) то будет $\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{k\pi x}{l}-\cos\frac{s\pi x}{l}\right)dx$ то есть разность интегралов, каждый из которых 0 в силу того, что там периодическая функция, у которой на промежутке укладывается целое число полных периодов.

Для двух косинусов аналогично: $\left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) =$

$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}+\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0.$

Для синуса и косинуса $\left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx =$

$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}-\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0$.

А если умножать не разные функции, а одну и ту же, то получится квадрат нормы. Посчитаем квадраты норм всех функций:

$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}2l = \frac{l}{2}.$

$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$

$\frac{1}{2}(2l-0) = l$.

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(2l+0\right) = l\,.$$

Ряд Фурье: $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

его коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,.$$

Ряд Фурье с помощью синусов и косинусов разных частот осуществляет наилучшее приближении графика функции, в том смысле, что наименьшее среднеквадратичное отклонение. Для частичных сумм ряда, чем больше взято частот, тем более мелкие особенности графика будут учтены, и огибающая пройдёт ближе.

Докажем (ДОК 43), что ряд Фурье имеет именно такое строение. Вспомним общую формулу $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$. У нас в данном случае квадрат нормы равен l для этой конкретной системы. Скалярное произведение определяется через интеграл. Поэтому $\dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ в этом случае имеет вид $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$. Подробнее рассмотрим коэффициент a_0.

$$a_0 = \frac{1}{l/2}\int_{-l}^{l} f(x)\frac{1}{2}dx = \frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,.$$

Свойства чётности и нечётности.

Если $f(x)$ чётная, то $b_n = 0$ и ряд состоит только из константы и косинусов. При вычислении $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ в интеграле одна функция чётная, а синус нечётный, произведение нечётное. Интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку равен 0. Аналогично, если $f(x)$ нечётная, то $a_n = 0$, ведь в интеграле $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ одна нечётная вторая чётная, и интеграл получается от нечётной, по симметричному промежутку, и он равен 0.

Ряд Фурье более подробно учитывает поведение функции на всём протяжении промежутка, в отличие от ряда Тейлора, который учитывает производные только в одной точке.

Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на (-1,1).

Решение. Так как функция нечётная, то все коэффициенты a_0 и a_n равны 0. Поэтому считаем только b_n. Учитываем, что $l = 1$.

$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\sin n\pi x dx$. Вычисляем интеграл по частям.

$u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin n\pi x$, $v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n = -\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{-1}{n\pi}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}$ так как косинус чётная функция, то далее $-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}(0-0) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi =$ $-\frac{2(-1)^n}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. **Ответ.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Пример. Разложить в триг. ряд Фурье $f(x) = 2x+3$ на (-1,1)

Решение. Заметим, что функция $f(x)-3 = 2x$ нечётная. То есть, f это сумма нечётной и константы. Таким образом, коэффициенты a_n здесь тоже окажутся равны 0. Для поиска коэффициентов b_n можно воспользоваться результатом, полученным в прошлой задаче.

Для $f(x)-3 = 2x$ ряд Фурье $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x =$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$. Для $f(x) = 2x+3$ соответственно,

$$3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x .$$

Таким образом, для функции вида $kx+b$ не надо заново проводить интегрирование по частям, если мы получили ряд для x.

Ответ. Ряд Фурье: $3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

ЛЕКЦИЯ 14. 05.12.2018

Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на интервале (-1,1).

$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_0^1 xdx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$, при этом $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$, кстати, это и есть средняя высота графика.

$a_n = \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$, интегрируем по частям.

$u = x, u' = 1$, $v' = \cos(n\pi x)$, $v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

$$2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = 2\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx\right) =$$

$$2\left((0-0)+\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right) = 2\frac{\cos(n\pi)-\cos 0}{n^2\pi^2} = 2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.$$

Обратите внимание, что $\cos(n\pi)$ равен $+1$ при чётных n и -1 при нечётных, поэтому совпадает с $(-1)^n$.

Коэффициенты $b_n = 0$ так как функция чётная. Итак, получаем ряд:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Более подробная запись:

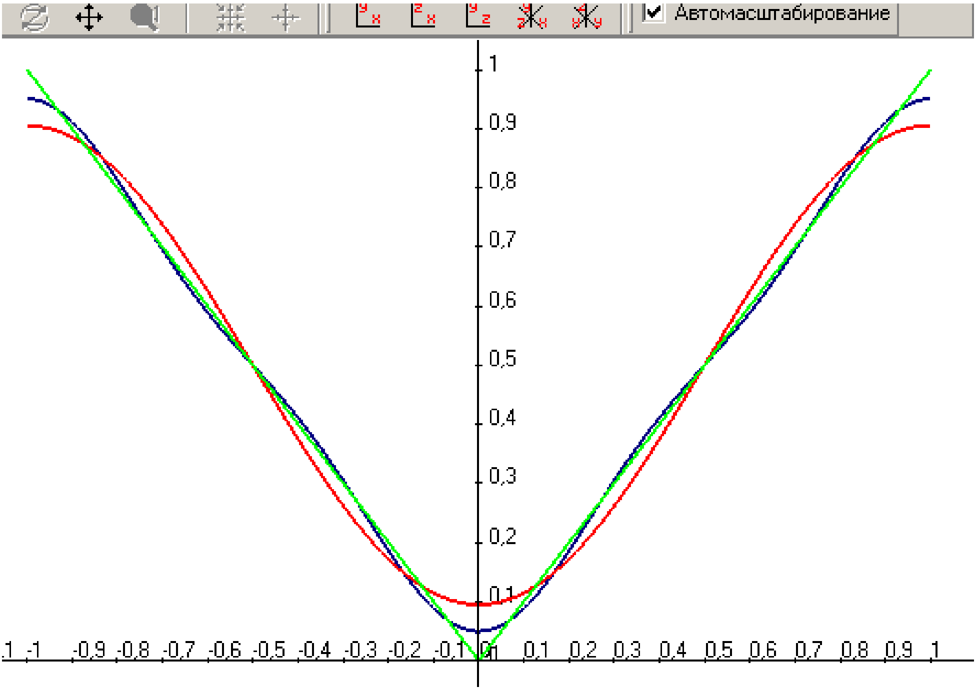
$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x-\frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x-\ldots$$

Графики:

Зелёным цветом показан график модуля,

красным частичная сумма $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$.

синим - частичная сумма $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x$.



Периодическое продолжение.

Мы ищем разложение функции в ряд на $[-l,l]$, однако функции sin и cos существуют на всей действительной оси. Таким образом, в каждой точке $x+2l$ из интервала $[l,3l]$ они принимают точно такое же значение, как и в точке $x\in[-l,l]$. Таким образом, ряд Фурье сходится на $[l,3l]$ к точно такой же функции, как и на $[-l,l]$. То же самое будет на $[-3l,-l]$, и на $[3l,5l]$, и так далее. Получается, что сумма ряда Фурье это функция, определённая на всей числовой оси,

Поведение ряда в точках разрыва, теорема Дирихле.
Ряд Фурье в точке разрыва сходится к среднему арифметическому правостороннего и левостороннего пределов функции в этой точке:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Если точка разрыва на конце интервала, то $S(l) = \dfrac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

Гармонический вид ряда Фурье.

Обозначим $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ тогда $\dfrac{a_n}{A_n} = \cos\varphi_n$, $\dfrac{b_n}{A_n} = \sin\varphi_n$.

Другими словами, если есть какие-то два числа a_n, b_n, то можно создать такой прямоугольный треугольник, что катеты будут именно такие по величине. Тогда $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ - гипотенуза.

Угол в этом треугольнике обозначим через φ_n.

В общем-то, это то же самое, что пересчитать в полярных координатах, A_n и φ_n это аналоги ρ и φ, исходные a_n, b_n аналоги x, y. Тогда ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos\varphi_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

по тригонометрической формуле $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ можно свести к выражению:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n \right)$$

здесь A_n - амплитуда, $\dfrac{n\pi}{l}$ - частота, φ_n - фаза.

Как видим, сумма $a\cos x + b\sin x$ на самом деле представляет собой одно колебание, одну волну, с амплитудой $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

§ 3. Комплексный ряд Фурье.

Пусть $\varphi : R \to C$ комплексная функция действительного аргумента, то есть $\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Скалярное произведение комплекснозначных функций определено так: $(f,\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi}(x)dx$.

Вторая сопряжённая, т.к. только таким способом можно корректно ввести понятие нормы функции. Если по этому правилу умножать одну и ту же функцию, то $(f, f) = \int\limits_a^b f(x)\,\bar{f}(x)dx$ =

$\int\limits_a^b (f_1 + if_2)(f_1 - if_2)dx = \int\limits_a^b (f_1^{\,2} + f_2^{\,2})dx \geq 0$. Таким образом, существует корень квадратный из этой величины, $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Рассмотрим систему функций $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}_{n \in Z}$ т.е. $\dots, e^{-\frac{i\pi x}{l}}, 1, e^{\frac{i\pi x}{l}}, e^{\frac{i2\pi x}{l}}, \dots$

причём при n = 0 получается именно $e^0 = 1$, т.е. константа автоматически находится в составе такой системы функций.

(ДОК 44) Докажем ортогональность системы $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}$ и **вычислим квадраты норм** всех этих функций.

$\left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{im\pi x}{l}} \right) = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{im\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{i(n-m)\pi x}{l}} dx$, что при $n \neq m$ означает

$\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{ik\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} dx + i\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} dx = 0 + 0i$ так как на отрезке $[-l, l]$ будет целое количество полных периодов этих тригонметрических функций. Если вычислять это скалярное произведение при одном и том же номере n ,то мы получим этим самым квадраты норм этих функций.

$$\left\| e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\|^2 = \left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{in\pi x}{l}} \right) = \int_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^{l} e^{\frac{0i\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^{l} e^{0} dx = \int_{-l}^{l} 1dx =$$

$2l$. Квадраты норм равны $2l$.

Комплексный ряд Фурье: $f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$.

Где коэффициенты $c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx$.

Докажем (ДОК 45), что комплексный ряд Фурье эквивалентен тригонометрическому ряду Фурье, т.е. сводится к нему, если преобразовать экспоненты в мнимой степени.

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \right) = \frac{a_0}{2}.$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{in\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

Если объединить слагаемые с номерами $n, -n$ то получим:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{\frac{in\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{l}} - \frac{ib_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{a_n}{2} e^{-\frac{in\pi x}{l}} + \frac{ib_n}{2} e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right),$$

далее перегруппируем их, объединив 1-е с 3-м, а 2-е с 4-м.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\frac{e^{\frac{in\pi x}{l}}+e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2}-ib_n\,\frac{e^{\frac{in\pi x}{l}}-e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2}\right)=$$

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти комплексный ряд Фурье для функции:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-1,0)\\ 1 & x\in(0,1)\end{cases}$$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}\ .\ c_n=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx=-\frac{1}{2in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_0^1=-\frac{e^{-in\pi}-e^0}{2in\pi}=$$

$$-\frac{\cos n\pi-i\sin n\pi-1}{2in\pi}=-\frac{\cos n\pi-1}{2in\pi}=-\frac{(-1)^n-1}{2in\pi}=\frac{1-(-1)^n}{2in\pi}$$

Ответ. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2in\pi}e^{in\pi x}$

.

ЛЕКЦИЯ 15. 12.12.2018

§ 4. Ряд Фурье по ортогональным системам многочленов.

Ряд Фурье можно построить не только по системе тригонометрических функций, но и степенных. Но причём это будет не ряд Тейлора, а другой ряд, где частичные суммы обеспечивают наименьшее среднеквадратичное отклонение от заданной функции. Проблема в том, что система степенных функций $\{1,x,x^2,x^3,...\}$ не ортогональна. При вычислении скалярного произведения двух функций чётной степени или двух функций нечётной степени получается в интеграле функция чётной степени, она положительна при всех $x\neq 0$, и интеграл от неё по любому интервалу строго больше 0, а не равен 0. Поэтому просто набор степенных функций использовать нельзя, систему нужно ортогонализовать.

Одна из самых известных систем ортогональных многочленов на $[-1,1]$ - полиномы Лежандра: $P_n(x)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$. Многочлен с номером n здесь имеет степень n, ведь это n-я производная от некоего многочлена степени 2n.

Так, например, $P_0(x)=1$,

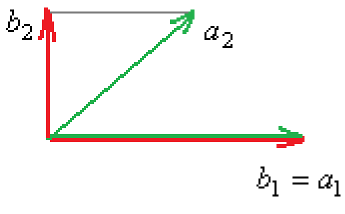
$$P_1(x)=\frac{1}{1\cdot 2}\left((x^2-1)\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x.$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2!\cdot 2^2}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{8}\left(x^4-2x^2+1\right)'' = \frac{1}{8}\left(4x^3-4x\right)' = \frac{12x^2-4}{8}$$

$$= \frac{3x^2-1}{2}.$$

Далее будет 3-я производная от многочлена 6-й степени, т.е. $P_3(x)$ многочлен 3-й степени.

Изучим, как построить ортогональную систему на любом нужном нам интервале. Изучим **алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта** сначала применительно к векторам, а затем перенесём этот метод на множество функций. Пусть дана не ортогональная система векторов $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Первый вектор возьмём из старой системы без изменения $b_1 := a_1$. Теперь мы должны найти второй вектор b_2, так чтобы он был ортогонален b_1. К вектору a_2 нужно прибавить b_1, домноженный на какой-то коэффициент, чтобы подвинуть конец вектора a_2 таким образом, чтобы новый изменённый вектор стал ортогонален b_1. Чертёж:



$b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1$, причём $(b_2, b_1) = 0$. Тогда

$(a_2+\alpha \cdot b_1, b_1)=0$ то есть $(a_2,b_1)+\alpha(b_1,b_1)=0$, тогда $\alpha=-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}$.

Таким образом, $b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}\cdot b_1$.

Далее, рассмотрим вектор a_3, он также изначально может быть не ортогонален векторам b_1 и b_2, необходимо прибавить к нему линейную комбинацию, состоящую из них. Ищем в виде $b_3=a_3+\beta_1\cdot b_1+\beta_2\cdot b_2$, причём так, чтобы было выполнено $(b_3,b_1)=0$ и $(b_3,b_2)=0$.

$(b_3,b_1)=0 \Rightarrow \quad (a_3+\beta_1\cdot b_1+\beta_2\cdot b_2,b_1)=0 \ \Rightarrow$

$(a_3,b_1)+\beta_1\cdot(b_1,b_1)+\beta_2\cdot(b_2,b_1)=0$, причём $(b_2,b_1)=0$ так как эта часть системы уже была построена как ортогональная (на прошлом шаге).

Тогда $(a_3,b_1)+\beta_1\cdot(b_1,b_1)=0 \ \Rightarrow \quad \beta_1=-\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}$.

Аналогично $(b_3,b_2)=0$ означает, что $(a_3+\beta_1\cdot b_1+\beta_2\cdot b_2,b_2)=0 \ \Rightarrow$ $(a_3,b_2)+\beta_1\cdot(b_1,b_2)+\beta_2\cdot(b_2,b_2)=0 \quad \Rightarrow \quad (a_3,b_2)+\beta_2\cdot(b_2,b_2)=0 \quad \Rightarrow$ $\beta_2=-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$.

Итак, $b_3=a_3-\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}\cdot b_1-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}\cdot b_2$. Теперь все 3 вектора b_1,b_2,b_3 ортогональны между собой. Аналогично этот процесс можно продолжить и для n векторов.

Аналогичный процесс Грама-Шмидта возможен и для функций, но только там скалярные произведения вычисляются через интегралы. Исходная система функций: $\{f_1, f_2, f_3, f_4,...\}$ = $\{1, x, x^2, x^3,...\}$. На любом отрезке $[a,b]$ можно произвести алгоритм ортогонализации и построить новую систему $\{g_1, g_2, g_3, g_4,...\}$, но только она будет содержать уже не сами степенные функции, а какие-то их линейные комбинации, т.е. многочлены.

Сначала задаём $g_1 := f_1$. Далее, $g_2 = f_2 + \alpha \cdot g_1$, причём требуем, чтобы $(g_2, g_1) = 0$. Тогда $(f_2 + \alpha \cdot g_1, g_1) = 0 \Rightarrow$ $(f_2, g_1) + \alpha \cdot (g_1, g_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$, и тогда

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1.$$

Можно подробнее записать с помощью интегралов так:

$$\alpha = -\frac{\int\limits_a^b x \cdot 1 dx}{\int\limits_a^b 1 \cdot 1 dx} = -\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b}{\left.x\right|_a^b} = -\frac{\frac{b^2 - a^2}{2}}{b - a} = -\frac{b + a}{2}.$$

Тогда $g_2 = x - \dfrac{b + a}{2} \cdot 1$.

Далее можно найти $g_3 = f_3 + \beta_1 \cdot g_1 + \beta_2 \cdot g_2$, требуя при этом $(g_3, g_1) = 0$ и $(g_3, g_2) = 0$. Коэффициенты β_1, β_2 вычисляем тем же методом, что и для векторов (см. на прошлой странице). Получится равенство: $g_3 = f_3 - \dfrac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 - \dfrac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2$.

Далее аналогичным образом можно найти g_4 и все последующие.

Построим, к примеру, первые несколько многочленов ортогональной системы на $[0,1]$. $\{f_1, f_2, f_3, ...\} = \{1, x, x^2, ...\}$.

$g_1 := f_1 = 1$.

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 = x - \frac{\int\limits_0^1 x \cdot 1 dx}{\int\limits_0^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1}{\left.x\right|_0^1} \cdot 1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Проверим, что новая функция на самом деле ортогональна первой:

$$(g_1, g_2) = \int_0^1 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$$

Найдём $g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)}\cdot g_1 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)}\cdot g_2$.

В данном конкретном случае, это означает

$$g_3 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\cdot 1dx}{\int_0^1 1\cdot 1dx}\cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$x^2 - \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1}{\left.x\right|_0^1}\cdot 1 - \frac{\int_0^1\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx}{\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$x^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot 1 - \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{x}{4}\right|_0^1}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{3-2}{12}}{\frac{4-6+3}{12}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$x^2 - x - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, итого $g_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Можно также проверить, что получившаяся функция ортогональна двум исходным $g_1 = 1$ и $g_2 = x - \frac{1}{2}$ на [0,1].

$$(g_1,g_3)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\frac{x}{6}\right|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=0.$$

$$(g_2,g_3)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{12}\right)dx=$$

$$\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1-\left.\frac{x^3}{2}\right|_0^1+\left.\frac{x^2}{3}\right|_0^1-\left.\frac{x}{12}\right|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3-6+4-1}{12}=0.$$

Аналогично можно найти g_4, ..., g_n. Процесс нахождения скалярных произведений функций легко программируется методами численного интегрирования. А затем можно искать разложение произвольной функции в ряд Фурье с помощью скалярных произведений по формулам $c_n=\dfrac{(f,g_n)}{(g_n,g_n)}$, выведенным ранее для общего случая. Зная эти коэффициенты, затем можно получить линейную комбинацию многочленов g_i, а затем уже, раскрывая скобки, объединять одинаковые степени и свести всё к одному многочлену, который и будет являться наилучшим среднеквадратичным приближением искомой функции.

Разбор тестов к аттестации.

Кратко повторим основные моменты из 1,2 и 3 семестра, вынесенные в итоговое тестирование.

Задание 1.

Даны матрицы A размера (5×2) и B размера $(n\times 1)$.

При каких значениях n существует матрица $C = A\cdot B$?

Варианты ответов:

5	3	● 2	1

Решение. Размеры матриц согласованы, если имеют вид $(m\times n)$ и $(n\times k)$. Поэтому правильный ответ 2.

Задание 2. Дана система:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Можно ли неизвестное x_2 найти по формулам Крамера? Если нельзя, то выберите ответ **нет**. Если да, то ответом выберите соответствующее значение x_2.

Варианты ответов:

● -1	Нет	2	3

Решение. Построим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Методом Крамера можно решить, если основная матрица квадратная и невырожденная. Разложим по 1-му столбцу:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$ Поэтому методом Крамера решить можно. Напомним, что $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, где $|A_2|$ - определитель, где в

основной матрице 2-я строка заменена на правую часть, $|A|$ - определитель основной матрицы (мы его только что находили).

$$|A_2| \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$ Тогда $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -1$.

Задание 3. Известно, что ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных (rang *A* = rang *C* = *n*). Тогда система…

1) Совместная неопределённая
2) ● Совместная определённая
3) Несовместная
4) Не имеет решений

Решение. По теореме Кронекера-Капелли, если rang *A* = rang C то она совместная, то есть имеет решения. Таким путём отбрасываются варианты 3 и 4. Далее, если rang *A* = rang *C* но меньше n, то есть свободные переменные, которые можно перенести вправо, т.е. система была бы неопределённой. Но здесь rang *A* = rang *C* = n. Поэтому остаётся лишь один 2-й вариант - определённая.

Задание 4.

Зная, что векторы $a = (3,1,2)$ и $b = \alpha\ i + 5j - k$ ортогональны, найдите значение параметра α.

Варианты ответов:

1	0	● -1	2

Решение. Векторы ортогональны, то есть их скалярное произведение 0. Запишем второй вектор тоже без обозначения базисных единиц i, j, k, а только по координатам.

$a = (3,1,2)$, $b = (\alpha,5,-1)$. Тогда $3\alpha + 5 - 2 = 0$, $3\alpha + 3 = 0$, $\alpha = -1$.

Задание 5.

Даны векторы $a = (1;-3), b = (2;-3), c = (1;-6), d = (-1;3).$

Укажите вектор, коллинеарный вектору **a**.

Варианты ответов:

1) b
2) c
3) ● d
4) Среди указанных векторов нет вектора, коллинеарного вектору а

Очевидно, что 4-й вектор это 1-й с противоположными знаками координат.

Задание 6.

Какой геометрический образ определяет уравнение

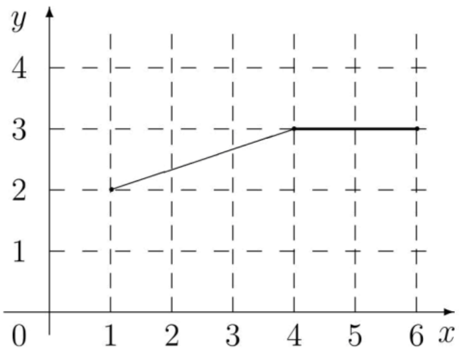
$(x-2)^2 + (x+1)^2 + z^2 = 4$ в пространстве?

Варианты:

1) Цилиндрическая поверхность
2) Плоскость
3) ● Сфера
4) Коническая поверхность

Задание 7.

На отрезке [1;6] задана функция, график которой приведен на рисунке. Укажите аналитическое задание этой функции.



Варианты ответов:

• $y=\begin{cases}\dfrac{x+5}{3} & 1\le x\le 4\\ 3, & 4\le x\le 6\end{cases}$	$y=\begin{cases}-\dfrac{x+5}{3} & 1\le x\le 4\\ 3, & 4\le x\le 6\end{cases}$
$y=\begin{cases}x^2 & 1\le x<4\\ 3, & 4\le x\le 6\end{cases}$	$y=\begin{cases}-x^2 & 1\le x<4\\ 3, & 4\le x\le 6\end{cases}$

Здесь 2 последних варианта исключаются сразу, так как линейная функция. Кроме того, она возрастает, производная положительна, значит коэффициент не может быть отрицательным.

Задание 8.

Уравнение $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ определяет на плоскости…

1) Гиперболу
2) • Эллипс
3) Окружность
4) Параболу

Так как обе 2-е степени, то парабола исключена. Для гиперболы, должна быть разность, а не сумма квадратов. Для окружности - одинаковые коэффициенты при квадратах. Следовательно, эллипс.

Задание 9.

Найти длину отрезка, отсекаемого от оси *OZ* прямой

$$\begin{cases}x=2t+4\\ y=t+2\\ z=t-1\end{cases}$$

Варианты ответов:

1	2	• 3	4

Решение. Если прямая пересекается с осью *OZ*, то на прямой есть точка с координатами $(0,0,c)$. Тогда из условий $x=2t+4=0$ или

$y=t+2=0$ получаем $t=-2$. Тогда $z=t-1=-3$. Длина отрезка это расстояние от (0,0,0), оно равно 3.

Задание 10.

Укажите пределы, в которых присутствует неопределённость $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x+1}{x^3}$	● $\lim\limits_{x\to 4}\frac{e^x-e^4}{x^2-16}$	$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^2+3}{3x-2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-2}{x^2+4}$

В каждом из вариантов, кроме 2-го, хотя бы в числителе или знаменателе что-то не стремится к 0.

Задание 11.

Укажите функцию, бесконечно большую при $x\to 0$

$f(x)=e^{3x}$	● $f(x)=\frac{1}{2x^2+x}$	$f(x)=3x^2+2x$	$f(x)=\sin x$

В первой предел равен 1, в 3-й и 4-й равен 0. Бесконечно большая только во 2-й.

Задание 12.

Укажите функцию бесконечно малую при $x\to 0$

$f(x)=\frac{1}{e^x-1}$	$f(x)=\frac{1}{2x^2+x}$	● $f(x)=3x^2+2x$	$f(x)=2+e^x$

В 1-й и 2-й предел ∞, в последней 3. Предел 0 только в 3-й.

Задание 13.

Дана функция $u=\cos y+(y-x)\sin y$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=\ldots$

● $-\sin y$	$-\sin y-\cos y$	$-x\sin y$	$-x\cos y$

Решение.

$$u=\cos y+(y-x)\sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0+(-1)\sin y=-\sin y .$$

ЛЕКЦИЯ 16. 19.12.2018

Тесты плюс обзорная лекция по доказательствам.

Задание 14.

Дана функция $y = 3x^4 - 5$. Найти y'' в точке $x = -1$.

Варианты ответов:

-2	1	-8	● 36

Решение. $y = 3x^4 - 5 \;\Rightarrow\; y' = 12x^3 \;\Rightarrow\; y'' = 36x^2$, что в точке $x = -1$ составляет 36.

Задание 15.

Установите соответствие между интегралом и его названием:

$$\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx$$

Варианты ответов:

1) Неопределённый интеграл
● 2) Определённый интеграл
3) Двойной интеграл
4) Несобственный интеграл первого рода

Комментарий: Если неопределённый, не было бы верхнего и нижнего предела, если несобственный 1 рода то на верхнем пределе было бы ∞, если двойной то было бы две переменных.

Задание 16.

При вычислении несобственных интегралов получены результаты:

а) $\int_{-\infty}^{1} f_1(x)dx = \infty$ б) $\int_{0}^{+\infty} f_2(x)dx = \infty$

в) $\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x)dx = 5$ г) $\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x)dx = 0$

Какие из данных интегралов сходятся?

Варианты ответов:

а) и б)
б) и в)
● в) и г)
г) и а)

Комментарий: сходится - означает, что результат конечное число. Это только в 3-м и 4-м из них.

Задание 17.
Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 9 - x^2$ и $y = 0$. Варианты ответов:

9
0
1
● 36

Решение. $\int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx = 9x\Big|_{-3}^{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3} = 9(3-(-3)) - \frac{27-(-27)}{3} =$ $9 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 27}{3} = 9 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 36.$

Задание 18.
Среди данных дифференциальных уравнений найдите линейное неоднородное уравнение первого порядка.

$2xy' + x^2 + y^2 = 0$
$(1 + y^2)dx + xydy = 0$
● $y' + y\cos x = \sin x$
$y''' - y'' + y = x$

Комментарий. 1-е и 2-е не линейные, содержат y^2. Последнее не первого порядка.

Задание 19.
Общее решение дифференциального уравнения $y''' = e^{-x}$ имеет вид:

$y = -e^{-x} + C_1 x + C_2$
$y = e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
● $y = -e^{-x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$
$y = e^{-x} + C_1 x$

Решение. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид $r^3 = 0$, корень 0 кратности 3, тогда в общем решении одногодного есть константа, 1 и 2 степени. Таким образом, подходят только 2-й или 3-й ответы. Но кроме того, исследуем частное решение неоднородного уравнения. Если оно имеет вид e^{-x} , как во 2-м варианте, то его 3-я производная равна $-e^{-x}$, т.е. не подходит. А вот если $-e^{-x}$, то третья производная e^{-x}, подходит.

Задание 20.
Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y'' + 4y' + 8y = 0$.

Характеристическое уравнение...
Варианты ответов:

Имеет один вещественный корень
Имеет два вещественных корня
Не имеет корней
● Имеет два комплексно сопряжённых корня

Решение. Составим характеристическое уравнение:
$r^2 + 4r + 8 = 0$. $D = 16 - 4 \cdot 8 = -16 < 0$. Тогда нет вещественных корней, а есть 2 комплексно-сопряжённых. «Не имеет корней» также неверно, потому что 2 комплексных корня в таком случае всегда есть.

Далее обзорная часть лекции по доказательствам к экзамену.

Приложение 1. Список доказательств в билеты.

(ДОК 1). Вывести формулу поверхностного интеграла 2 рода:
$$\iint_S \left(\overline{F}, d\overline{S}\right) = \iint_D \left(-P\cdot f'_x - Q\cdot f'_y + R\right)dxdy.$$

(ДОК 2) Докажите формулу Грина: $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$

(ДОК 3) Доказать, что криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути $\Leftrightarrow$ циркуляция по замкнутому контуру равна 0.

(ДОК 4) Доказать, что поле F потенциально $\Leftrightarrow$ криволинейный интеграл 2 рода от F не зависит от пути.

(ДОК 5) Доказать, что поле F потенциально $\Leftrightarrow$ симметрична производная матрица.

(ДОК 6) Докажите формулу Остроградского-Гаусса:
$$\iint_S (F, dS) = \iiint_D div(F)dxdydz.$$

(ДОК 7) Докажите, что $div\left(rot\overline{F}\right)=0,\ rot(\nabla U) = 0.$

(ДОК 8).Докажите формулы $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(ДОК 9). Докажите формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

(ДОК 10) Докажите формулы: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

(ДОК 11) Докажите формулу логарифма $Ln(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

(ДОК 12). Доказать что линейное отображение $w = Az + B$ в комплексной плоскости есть композиция растяжения, поворота и сдвига.

(ДОК 13). Докажите теорему: Функция $f(z)$ дифференцируема $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ и $v(x,u)$ дифференцируемы и выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

(ДОК 14). Докажите, что $f(z)$ дифференцируемая функция $\Leftrightarrow$ векторные поля $\overline{F}=(v,u)$ и $\overline{F}=(-u,v)$ потенциальны.

(ДОК 15). Если функция является аналитической в некоторой области D, то для каждой из её частей (действительной и мнимой) u,v в этой области выполняется уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ и } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

(ДОК 16). Доказать, что условия Коши-Римана эквивалентны условию $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.

(ДОК 17). Докажите, что если L замкнутый контур, внутри которого во всех точках $f(z)$ является аналитической, то $\oint\limits_L f(z)dz=0$.

(ДОК 18). Докажите, что если $f(z)$ является аналитической во всех точках некоторой области D, граница которой односвязна, то интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути, то есть имеет одно и то же значение для любой кривой AB, соединяющей пару точек A,B.

(ДОК 19). Докажите, что функция $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ является первообразной от функции $f(z)$.

(ДОК 20). Докажите, что для аналитической на кривой L функции верна формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_A^B f(z)dz=F(B)-F(A)$.

(ДОК 21). Доказать интегральную теорему Коши о том, что

$$\oint\limits_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint\limits_{L_k} f(z)dz.$$

(ДОК 22). Доказать интегральную формулу Коши:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(ДОК 23). Доказать обобщённую интегральную формулу Коши:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz .$$

(ДОК 24). Доказать теорему о разложении функции в ряд Тейлора.
(ДОК 25). Доказать теорему о разложении функции в ряд Лорана.
(ДОК 26). Доказать, что не существует числовой системы нечётной размерности без делителей нуля.
(ДОК 27). Доказать теорему о виде ряда Тейлора в окрестности нуля порядка m.
(ДОК 28). Доказать теорему об изолированности нулей.
(ДОК 29). Теорема о взаимосвязи типа особой точки и строения ряда Лорана.

(ДОК 30). Доказать теорему: Если $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, причём точка z_0 является нулём порядка m для функции $f_1(z)$, и нулём порядка n для функции $f_2(z)$, то при $m \geq n$ точка z_0 устранимая или правильная точка, а при $n > m$ полюс порядка $n - m$ для функции $f(z)$.

(ДОК 31). Доказать формулу вычисления вычета для полюса 1-го порядка: $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \big((z - z_0) \cdot f(z)\big)$.

(ДОК 32). Доказать, что если функция имеет вид $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\psi(z)$ имеет нуль 1 порядка в точке z_0, а $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$.

(ДОК 33). Доказать, что если z_0 - полюс порядка m, то верна

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \big((z - z_0)^m \cdot f(z)\big)^{(m-1)} .$$

(ДОК 34). Доказать, что если ∞ устранимая особая точка, то:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \big(z^2 f'(z)\big)$$

(ДОК 35). Доказать, что если ∞ является полюсом порядка m, то:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z\to\infty}\left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right)$$

(ДОК 36). Доказать, что $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi\ i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)\right)$.

(ДОК 37). Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)\right) + \operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z) = 0$.

(ДОК 38). Доказать, что если $f(z)$ аналитическая на действительной оси, а также в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, и $|f(z)| < \dfrac{c}{|z|^{1+\varepsilon}}$, то:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\ i\cdot \sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\left(\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\right).$$

(ДОК 39). Доказать формулы вычисления коэффициентов Фурье по произвольной системе функций: $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)} = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

(ДОК 40). Доказать, что среднеквадратичное отклонение между f и P_n минимально $\Leftrightarrow$ коэффициенты $\alpha_i = c_i$ (совпадают с коэффициентами Фурье).

(ДОК 41). Доказать, что замкнутая система является полной.

(ДОК 42). Доказать ортогональность основной тригонометрической системы: $\left\{\dfrac{1}{2}, \sin\dfrac{\pi x}{l}, \cos\dfrac{\pi x}{l}, \ldots, \sin\dfrac{n\pi x}{l}, \cos\dfrac{n\pi x}{l}, \ldots\right\}$ и вычислить квадраты норм функций.

(ДОК 43). Доказать, что ряд Фурье имеет вид:

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$ а его коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,.$$

(ДОК 44). Доказать ортогональность системы $\left\{e^{\frac{in\pi x}{l}}\right\}$ и вычислить квадраты норм всех этих функций.

(ДОК 45). Доказать, что комплексный ряд Фурье эквивалентен тригонометрическому ряду Фурье.

Литература

1. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258

2. А.П.Ерохина, Л.Н. Байбакова. Высшая математика III в упражнениях с задачами и решениями. http://narod.ru/disk/29273915001/eroh-bajb.djvu.html

3. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

4. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие / Ельцов А. А., Ельцова Т. А. — 2005. 204 с. http://edu.tusur.ru/publications/39

5. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. Санкт-Петербург, 2002, изд-во «Лань». ISBN 5-8114-0446-8