Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
(ТУСУР)

Н. Э. Лугина

Методические рекомендации для подготовки к вступительным экзаменам, проводимым ТУСУРом самостоятельно по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Томск
Издательство ТУСУРа
2018

Лугина Н. Э.
Методические рекомендации для подготовки к вступительным экзаменам, проводимым ТУСУРом самостоятельно по дисциплине «МАТЕМАТИКА» : Методическое пособие / Н. Э. Лугина.— Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2018. — 55 с.

Пособие предназначено для подготовки выпускников общеобразовательных учреждений к сдаче экзамена по математике, проводимым ТУСУРом самостоятельно.

В пособие включены программа по математике, методические указания по основным темам. Приведены варианты письменных работ с решениями, которые предлагались на вступительных экзаменах в ТУСУР в 2014 – 17 годах. Приведены варианты заданий для самостоятельной работы с указанием ответов.

Для абитуриентов и преподавателей общеобразовательных учреждений.

Оглавление

Введение

Цель данного пособия — ознакомить абитуриента с требованиями, которые предъявляются на вступительных экзаменах по математике в ТУСУРе, и помочь им подготовиться к экзаменам в университет.

Для этого в пособие включены методические указания по основным темам, варианты письменных работ с решениями, которые предлагались на вступительных экзаменах в ТУСУР в 2014 – 17 годах, варианты заданий по математике для самостоятельного решения.

Экзамен по математике проводится письменно. Каждый абитуриент получает экзаменационный билет и в течение 240 минут решает предложенные ему задачи, оформляя их по обычной школьной методике. Варианты заданий составлены в соответствии с требованиями действующей программы по математике для поступающих в ТУСУР. Экзаменационный билет состоит из 9 задач. Вся работа должна быть выполнена пастой одного цвета (синей или фиолетовой, или черной). Использование простого карандаша, корректора не допускается. Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки. Все вычисления проводятся вручную, без использования калькулятора. Черновик вкладывается в работу. Порядок выполнения заданий не важен.

1. Основные умения и навыки

На экзамене по математике поступающий в ТУСУР должен показать:

- четкое знание математических определений;

- умение точно и сжато выражать математическую мысль в письменном изложении;
- умение использовать соответствующую символику;
- уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений по предмету:

- производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей;
- проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;
- строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;
- решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним;
- решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;

- решать задачи на составление уравнений и систем уравнений;
- изображать геометрические фигуры на чертеже;
- использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии при решении геометрических задач;
- пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы при построении графиков функций;
- решать задачи с параметрами.

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное.
2. Рациональные числа, их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
3. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел. Сложение, вычитание, умножение и деление действительных чисел.
4. Пропорции. Проценты.
5. Числовые промежутки. Модуль действительного числа, его геометрический смысл. Свойства модуля.
6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

7. Степень с натуральным показателем. Определение и свойства арифметического корня.

8. Степень с рациональным показателем. Тождественные преобразования выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

9. Одночлен и многочлен. Корень многочлена. Выделение полного квадрата трехчлена.

10. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений. Функция обратная данной. Понятие сложной функции.

11. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность. Преобразование графиков.

12. Определение и основные свойства функций: линейной $y = kx + b$, обратной пропорциональной зависимости $y = k/x$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = x^n$ $(n \in Z)$, показательной $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, логарифмической $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрических функций $(y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,\ y = \mathrm{ctg} x)$.

13. Формулы приведения. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Формулы понижения степени. Формулы сложения аргументов. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

14. Логарифм произведения, частного, степени. Основное логарифмическое тождество. Формула перехода к другому основанию. Натуральный логарифм, десятичный логарифм.

15. Уравнение. Множество решений уравнений. Равносильные уравнения. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля. Рациональные алгебраические уравнения с параметрами. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Иррациональные уравнения. Иррациональные уравнения с параметрами. Решение тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg} x = a$. Тригонометрические уравнения с параметрами.

16. Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств.

17. Неравенства, содержащие неизвестное. Множество решений неравенства. Решение линейных, квадратных и сводящихся к ним неравенств. Метод интервалов. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Рациональные алгебраические неравенства с параметрами. Показательные и логарифмические неравенства. Показательные и логарифмические неравенства с параметрами. Тригонометрические неравенства с параметрами.

18. Системы уравнений и неравенств. Решение системы. Множество решений системы. Равносильные системы

уравнений. Системы уравнений и неравенств с параметрами.

19. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

20. Производная функции. Вычисление производных. Производная суммы двух функций. Производная произведения двух функций. Производная частного двух функций. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Задачи с параметрами.

21. Достаточные условия возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции. Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Задачи с параметрами.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

3. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника. Свойства

равнобедренного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема косинусов. Теорема синусов. Сумма углов треугольника.

4. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

5. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Свойства касательной к окружности. Дуга окружности. Сектор. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

6. Центральные и вписанные углы.

7. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

8. Площадь многоугольника. Формулы площади: треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

9. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

10. Подобие. Подобные фигуры. Признаки подобия треугольников. Отношение площадей подобных фигур.

2. Образцы вариантов билетов и их решений

Вариант 1

1. Упростите до числового ответа выражение
$$\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(5a-\frac{10a-5}{a+1}\right)$$

2. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

3. Решите неравенство $\qquad 9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x}\leq\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$

4. Вычислите $\qquad \cos^2 3\alpha+\cos^2\alpha-\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha$

5. Решите уравнение $\qquad (x-3)\cdot\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)=2\cdot(x-3)$

6. Решите неравенство $\qquad (\log_3 3x)^2-3\cdot\log_3 x>7$

7. Дано уравнение
$$\frac{1}{\sin x}-1=\mathrm{ctg}x-\cos x.$$

   а) Решите уравнение.

   б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;4\pi]$.

8. В треугольнике ABC медиана AM делит биссектрису CK в отношении 5:3, считая от вершины C. Найдите отношение длин сторон треугольника AC и BC (большей к меньшей).

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=6,\\ y=8+a(x-6)\end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение задач варианта 1.

Замечание. Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

1. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(5a-\frac{10a-5}{a+1}\right)$$

   Решение.

   1) $\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}=\frac{a^2+2a+1}{(a+1)(a^2-a+1)}=\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a^2-a+1)}=\frac{a+1}{a^2-a+1}$

   2) $5a-\frac{10a-5}{a+1}=\frac{5\cdot(a^2-a+1)}{a+1}$

   3) $\frac{a+1}{a^2-a+1}\cdot\frac{5\cdot(a^2-a+1)}{a+1}=5$

   Ответ: $\boxed{5}$

2. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

   Решение. Свежие грибы содержат воду (90%) и вещество (10%). Сухие грибы содержат воду (12%) и вещество (88%). Процесс сушки грибов состоит в том, что вода испаряется, а вещество остается. Согласно условию, 10% от 44 кг составляет $44\cdot 0{,}1=4{,}4$ кг. Эти 4,4 кг составляют 88% вещества. Тогда

$$\begin{aligned} 4{,}4 \quad &\text{кг} - 88\% \\ x \quad &\text{кг} - 100\% \end{aligned}$$

   Отсюда,

$$x=\frac{4,4\cdot 100}{88}=5 \quad \text{кг.}$$

   Ответ: $\boxed{5}$

3. Решите неравенство $\qquad 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x} \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$

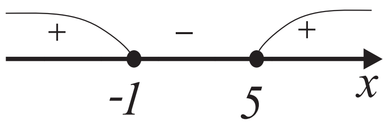
Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3}; \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3}.$$

Так как основание показательной функции
$0 < 1/3 < 1$, то показательная функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству в показателе степени знак неравенства меняется на противоположный:

$x^2 - 4x + 2 \geq 3, \quad x^2 - 4x - 5 \geq 0$. Решим неравенство методом интервалов.



$x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)}$

4. Вычислите $\qquad \cos^2 3\alpha + \cos^2 \alpha - \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$

Решение. Применим формулу понижения степени и формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$\cos^2 3\alpha + \cos^2 \alpha - \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha =$

$= \frac{1+\cos 6\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) =$

$= \frac{1+\cos 6\alpha+1+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\cos 2\alpha}{2} = 1.$

Ответ: $\boxed{1}$

5. Решите уравнение $\quad (x-3)\cdot\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)=2\cdot(x-3)$

Решение. Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель $(x-3)$

$$(x-3)\cdot\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2=0. \end{array}\right.$$

Решим каждое уравнение. Затем обязательно выполним проверку, чтобы отбросить посторонние корни.

$x-3=0 \Rightarrow x_1=3$. Решим уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2=0$.

Уединим один из радикалов, затем возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня.

$\sqrt{2x-3}=2-\sqrt{x-1}, \quad \left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2,$

$2x-3=4-4\sqrt{x-1}+x-1, \qquad 4\sqrt{x-1}=6-x.$

Замечание. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

$$\sqrt{f(x)}=\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x)\geq 0, \\ f(x)=\varphi^2(x). \end{array}\right.$$

Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x: $x \leq 6$. *Этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.*

Повторно возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня: $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2$,

$16x - 16 = 36 - 12x + x^2$, $x^2 - 28x + 52 = 0$, $x_2 = 2$ или $x_3 = 26$ ($x_3 = 26$ — *постороннее решение, так как не удовлетворяет ограничению* $x \le 6$).

Проверка.

$x_1 = 3$ $0 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2 \cdot 0$, $0 = 0$ — истина, $\Rightarrow$ $x_1 = 3$ является корнем уравнения. *Замечание. Здесь один из множителей обращается в ноль. При проверке нужно обязательно показать, что второй множитель, содержащий иррациональности, не теряет смысла.*

$x_2 = 2$ $-1 \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{1}) = 2 \cdot (-1)$, $-2 = -2$ — истина, $\Rightarrow$ $x_2 = 2$ является корнем уравнения.

$x_3 = 26$ $23 \cdot (\sqrt{49} + \sqrt{25}) = 2 \cdot 23 \;\Rightarrow\; 23 \cdot 12 = 23 \cdot 2$ — ложно, $\Rightarrow$ $x_3 = 26 \in \varnothing$ (Это так же следует из вышеприведенного ограничения на значения переменной x: $x \le 6$.)

Ответ: $\boxed{2;\ \ 3}$

6. Решите неравенство $(\log_3 3x)^2 - 3 \cdot \log_3 x > 7$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, то есть $x \in (0; +\infty)$.

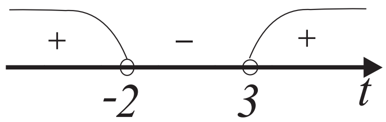
Воспользуемся свойством логарифма.

$(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x - 7 > 0$,

$(1 + \log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x - 7 > 0$, $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 > 0$.

Введем новую переменную: $\log_3 x = t$, $t \in R$. Неравенство примет вид $t^2 - t - 6 > 0$. Найдем нули функции

$f(t) = t^2 - t - 6$. $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Изобразим решение неравенства $t^2 - t - 6 > 0$.

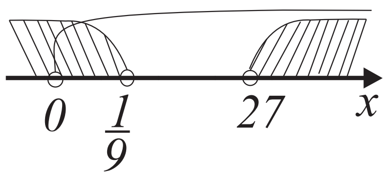


$$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ t > 3. \end{array}\right.$$ Вернемся к прежней переменной.

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < -2, \\ \log_3 x > 3. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 3^{-2}, \\ \log_3 x > \log_3 3^3. \end{array}\right.$$

Так как основание логарифма $3 > 1$, то логарифмическая функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства сохраняется. $\left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{9}, \\ x > 27. \end{array}\right.$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (0; 1/9) \cup (27; +\infty)$



Ответ: $\boxed{(0; 1/9) \cup (27; +\infty)}$

7. Дано уравнение $\frac{1}{\sin x} - 1 = \mathrm{ctg} x - \cos x$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 4\pi]$.

Решение. а) ОДЗ: $\sin x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pi n,\ n \in Z$. Найдем общее решение уравнения. Воспользуемся определением $\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$\frac{1}{\sin x} - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x, \qquad \frac{1}{\sin x} - 1 = \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right).$

$\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) - \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) \cdot (1 - \cos x) = 0.$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sin x} - 1 = 0, \\ 1 - \cos x = 0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \cos x = 1. \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z \\ x = 2\pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Полученное решение $x = 2\pi k, \quad k \in Z$, не удовлетворяет ОДЗ.

б) Найдем углы, удовлетворяющие условию $0 \le x \le 4\pi$. Подставим в общее решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$, целые значения n. Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения n будем брать целые положительные.

$n = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \in [0; 4\pi], \qquad n = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{2} \in [0; 4\pi].$

Для остальных $\quad n \quad x \notin [0; 4\pi]$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad \text{б) } \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}}$

Замечание. Как общее решение, так и отобранные углы могут быть записаны только в градусах. Например, найдем углы, удовлетворяющие условию $0^\circ \le x \le 720^\circ$. Для этого будем подставлять в общее решение $x = 90^\circ + 360^\circ n$ целые значения n. Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения n будем брать целые положительные.

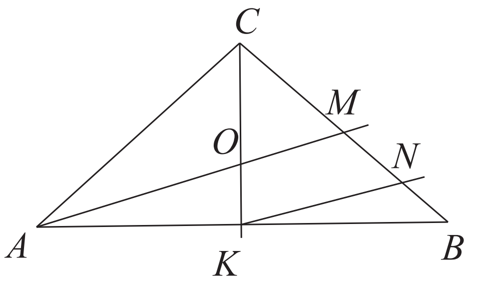
$n = 0 \;\Rightarrow\; x = 90^\circ \in [0^\circ; 720^\circ],$

$n = 1 \;\Rightarrow\; x = 450^\circ \in [0^\circ; 720^\circ].$

Для остальных $\quad n \quad x \notin [0^\circ; 720^\circ]$. В решении пункта б) необходимо выполнить полный перебор значений n и показать, что при других значениях n найденные корни уравнения не войдут в заданный отрезок значений углов. Неполный перебор считается ошибкой, и экзаменатор *имеет право снизить установленные за задачу баллы.*

Ответ: $\boxed{90^\circ + 360^\circ n;\ \ 90^\circ;\ \ 450^\circ}$ *При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например,* $x = 90^\circ + 2\pi n$ *считается грубой ошибкой.*

8. В треугольнике ABC медиана AM делит биссектрису CK в отношении 5:3, считая от вершины C. Найдите отношение длин сторон треугольника AC и BC (большей к меньшей).



Дано: $CM = MB = \frac{1}{2}BC$, CK — биссектриса, $\frac{CO}{OK} = \frac{5}{3}$
$\frac{AC}{BC} =?$

Решение. Пусть O — точка пересечения медианы AM и биссектрисы CK. Дано отношение

$$\frac{CO}{OK} = \frac{5}{3}.$$

Проведем прямую KN параллельно медиане AM (*Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.*) $\Rightarrow$ рассматривая $\angle KCB$,

$$\frac{CO}{OK} = \frac{CM}{MN}.$$

Те же прямые пересекают стороны угла $\angle ABC$:

$$\frac{MB}{MN} = \frac{AB}{AK}.$$

Так как M — середина стороны $BC \Rightarrow CM = MB \Rightarrow$

$$\frac{CO}{OK} = \frac{CM}{MN} = \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{AK}; \qquad \frac{5}{3} = \frac{AB}{AK} \quad \Rightarrow \quad KB = 2 \quad \text{части.}$$

Так как CK — биссектриса, то по свойству биссектрисы

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Итак, $\frac{AC}{CB} = 1{,}5.$

Ответ: $\boxed{\frac{AC}{CB} = 1{,}5}$

Замечание. Решение геометрических задач часто вызывает трудности у абитуриентов. Ведь геометрические задачи настолько многообразны, что невозможно дать какие-либо общие указания к их решению. Редко какая задача в геометрии может быть решена только с использованием определенной формулы. При решении большинства задач необходимо свободно владеть всем теоретическим материалом.

Выполняя чертеж (рисунок), стремитесь сделать его соответствующим условиям задачи. Так, если сказано, что некоторый угол вдвое больше другого или отрезки перпендикулярны, отразите это на чертеже. Хороший чертеж — это удобный для восприятия наглядный способ записи условий задачи, он может стать помощником в решении задачи, подсказать правильный ход рассуждений. В то же время, правильный чертеж ничего не доказывает, так как все должно быть обосновано соответствующим логическим выводом.

Начиная решать задачу, используйте определения и свойства входящих в задачу данных и искомых элементов, *ведите рассуждения: треугольник равнобедренный, следовательно, ..., две касательные проведены из одной точки, следовательно, ..., окружность описана около прямоугольного треугольника, следовательно, ... Вспомните теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомните похожие задачи.*

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + a(x-6) \end{cases}$$
имеет два различных решения.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $a \in R$. Используя свойства логарифма, исходная система примет вид
$$\begin{cases} xy = 64, \\ y = 8 + a(x-6). \end{cases}$$

Подставив y в первое уравнение системы, получим
$$ax^2 - (6a-8)x - 64 = 0.$$

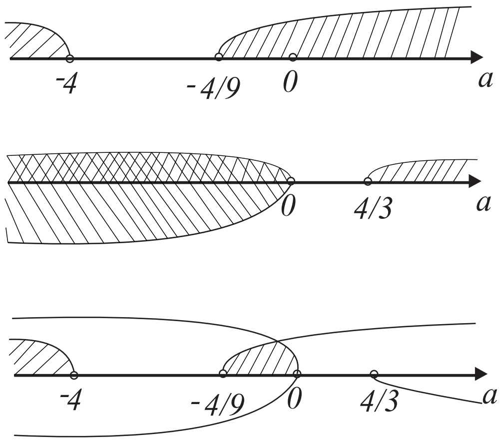
Система уравнений будет иметь два различных решения, если квадратное уравнение будет иметь два различных корня, принадлежащих ОДЗ.

В первую очередь нужно рассмотреть случай, когда $a = 0$. В этом случае полученное уравнение имеет единственный корень $x = 8$, что не подходит по условию задачи. Следовательно, $a \neq 0$.

Для случая "два различных положительных корня" имеем

$D = (6a-8)^2 - 4\cdot(-64)\cdot a, \qquad D = 4(9a^2+40a+16) > 0.$ Отсюда $a < -4$ или $a > -\frac{4}{9}$. Обеспечим выполнение всех условий с помощью теоремы Виета:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ 4(9a^2+40a+16) > 0, \\ \frac{6a-8}{a} > 0, \\ \frac{-64}{a} > 0. \end{cases}$$



Отсюда $a \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{9}; 0)$.

Ответ: $\boxed{a \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{9}; 0)}$

Замечание. После решения всех задач варианта абитуриент заполняет таблицу ответов, помещенную на первой странице чистовика. Например, для Варианта 1 заполненная таблица ответов выглядит так

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
5	5	1	$(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$	2; 3	$(0; 1/9) \cup (27; +\infty)$	$\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$

8	**9**
1,5	$(-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{9}; 0)$

Вариант 2

1. Решите уравнение $|10-x|+|x-20|=10$

2. В геометрической прогрессии сумма первого и пятого членов равна 51, сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

3. Решите неравенство $5^{2x+1}>5^x+4$

4. Вычислите $\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 70^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 65^\circ}$

5. Дано уравнение
$$\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\sin x=\cos x.$$
а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\pi/2]$.

6. Решите уравнение $x^2+x=\frac{3}{5}\left(x+3-\sqrt{5x^2+2x+1}\right)$

7. Решите неравенство $\log_x 3+2\log_{3x}3-6\log_{9x}3\le 0$

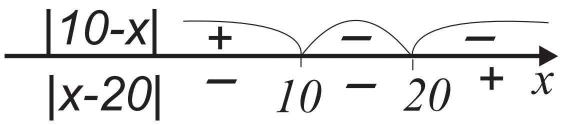
8. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD=3\sqrt{10}$, основание $BC=\sqrt{10}$, высота $BM=2\sqrt{10}$. Найдите радиус описанной окружности.

9. При каких значениях параметра a уравнение
$$\left(4x^2-(9a+8)x+5a^2+10a\right)\cdot\sqrt{x-8}=0$$
имеет ровно два различных решения?

Решение задач варианта 2.

1. Решите уравнение $\qquad |10 - x| + |x - 20| = 10$

   Решение. Приравняем к нулю выражения под знаком модуля $10 - x = 0, \quad x - 20 = 0$. Точки $x = 10$ и $x = 20$ нанесем на числовую прямую. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка. Решим уравнение на каждом из них, раскрывая знаки модулей.



   I. $\quad x \in (-\infty; 10) \qquad 10 - x + 20 - x = 10, \quad x = 10 \notin (-\infty; 10)$.

   II. $\quad x \in [10; 20) \qquad x - 10 + 20 - x = 10, \quad 20 = 20$ выполняется для всех $x \in [10; 20) \Rightarrow x \in [10; 20)$.

   III. $\quad x \in [20; +\infty) \qquad x - 10 + x - 20 = 10, \quad x = 20 \in [20; +\infty)$.

   Объединим все решения: $x \in [10; 20]$.

   Ответ: $\boxed{[10; 20]}$

2. В геометрической прогрессии сумма первого и пятого членов равна 51, сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

   Дано: $b_1 + b_5 = 51, \quad b_2 + b_6 = 102, \quad S_n = 3069.$ Найти $n =?$ $(n \in N)$

   Решение. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии

   $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_5 = 51, \\ b_2 + b_6 = 102 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 51, \\ b_1q + b_1q^5 = 102 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot \left(1 + q^4\right) = 51, \\ b_1q \cdot \left(1 + q^4\right) = 102 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое, получим $q = 2$. Подставим $q = 2$ в первое уравнение системы, получим $b_1 = 3$. Тогда по формуле суммы n первых членов

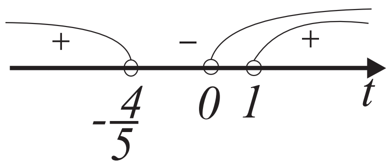
$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

получаем $3 \cdot (2^n - 1) = 3069 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 1024 \quad \Rightarrow \quad n = 10.$

Ответ: $\boxed{10}$

3. Решите неравенство $\qquad 5^{2x+1} > 5^x + 4$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Введем новую переменную $t = 5^x$, $t > 0$. Тогда имеем $\begin{cases} 5t^2 - t - 4 > 0, \\ t > 0. \end{cases}$ Решим первое неравенство системы методом интервалов.



$\Rightarrow \begin{cases} t < -\frac{4}{5}, \\ t > 1, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad t > 1.$ Вернемся к прежней переменной: $5^x > 1$ или $5^x > 5^0$. Так как основание показательной функции $5 > 1$, то показательная функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для показателя степени знак неравенства сохраняется. $\Rightarrow x > 0$.

Ответ: $\boxed{(0; +\infty)}$

4. Вычислите $\qquad \sqrt{2}\cdot\frac{\sin 70^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 65^\circ}$

Решение. $\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 70^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 65^\circ}=\sqrt{2}\cdot\frac{2\cdot\sin 25^\circ\cdot\cos 45^\circ}{\cos 65^\circ}=$

$=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin(90^\circ-65^\circ)}{\cos 65^\circ}=2\cdot\frac{\cos 65^\circ}{\cos 65^\circ}=2.$

Ответ: $\boxed{2}$

5. Дано уравнение

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\sin x=\cos x.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\pi/2]$.

Решение. а) Применим формулу двойного угла, затем сгруппируем слагаемые и вынесем общий множитель.

$\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\sin x=\cos x,$

$\sin x\cdot\cos x-\cos x+\sin^2 x-\sin x=0,$

$\cos x\cdot(\sin x-1)+\sin x\cdot(\sin x-1)=0,\ (\cos x+\sin x)\cdot(\sin x-1)=0,$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0,\\ \sin x-1=0;\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=-1,\\ \sin x=1;\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\mathrm{arctg}(-1)+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

б) Найдем углы, удовлетворяющие условию $[-2\pi;-\pi/2]$. Так как задан отрезок на отрицательной полуоси, то значения n и k будем задавать отрицательные целые.

$n=-1\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{5\pi}{4}\in[-2\pi;-\pi/2];$

$k=-1\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{3\pi}{2}\in[-2\pi;-\pi/2].$

Убеждаемся, что для всех остальных n и k $\quad x \notin [-2\pi; -\pi/2]$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \text{б) } -\frac{3\pi}{2},\quad -\frac{5\pi}{4}}$

Замечание. Множество (область) значений функции арктангенс $E\left(\mathrm{arctg}\right) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. *Поэтому* $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

6. Решите уравнение $\qquad x^2 + x = \frac{3}{5}\left(x + 3 - \sqrt{5x^2 + 2x + 1}\right)$

Решение. ОДЗ: $x \in R$, так как $5x^2 + 2x + 1 > 0$ для всех значений $x \in R$.

Умножим обе части на 5, раскроем скобки, и перепишем уравнение в виде

$5x^2 + 5x - 3x - 9 + 3 \cdot \sqrt{5x^2 + 2x + 1} = 0$,

$5x^2 + 2x + 1 + 3 \cdot \sqrt{5x^2 + 2x + 1} - 10 = 0$.

Введем новую переменную $t = \sqrt{5x^2 + 2x + 1}$, $\ t > 0$ (так как по условию ОДЗ нет таких значений x, при которых $t = 0$). Тогда $t^2 + 3t - 10 = 0$. Решим полученное уравнение $t_1 = -5$, $t_2 = 2$. Но $t_1 = -5 < 0 \ \Rightarrow \ t_1 \in \varnothing$, $\ t = 2$. Обратная замена: $\sqrt{5x^2 + 2x + 1} = 2$, $\ 5x^2 + 2x + 1 = 2^2$, $\ 5x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $\ x_2 = \frac{3}{5}$. Оба корня подходят по ОДЗ.

Ответ: $\boxed{-1; \frac{3}{5}}$

7. Решите неравенство $\qquad \log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x \neq 1, \\ 9x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases}$

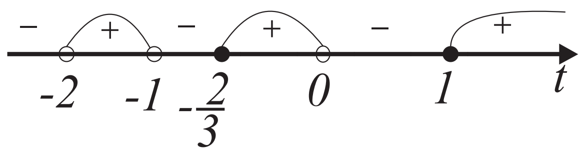
Применим формулу перехода к новому основанию

$\log_a b = \frac{1}{log_b a}$. $\quad$ Перепишем неравенство в виде

$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 3x} - \frac{6}{\log_3 9x} \le 0$. По свойству логарифма произведения $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1+\log_3 x} - \frac{6}{2+\log_3 x} \le 0$. Введем новую переменную. Пусть $\log_3 x = t$. Тогда неравенство примет вид $\frac{1}{t} + \frac{2}{1+t} - \frac{6}{2+t} \le 0$. Приведем выражение слева к общему знаменателю.

$\frac{3t^2-t-2}{t(t+1)(t+2)} \ge 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{(t-1)(t+\frac{2}{3})}{t(t+1)(t+2)} \ge 0.$

Для решения неравенства применим метод интервалов.



$$\left[\begin{array}{l} -2 < t < -1, \\ -\frac{2}{3} \le t < 0, \\ t \ge 1 \end{array}\right.$$

Вернемся к прежней переменной

$$\left[\begin{array}{l} -2 < \log_3 x < -1, \\ -\frac{2}{3} \le \log_3 x < 0, \\ \log_3 x \ge 1; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 3^{-2} < \log_3 x < \log_3 3^{-1}, \\ \log_3 3^{-\frac{2}{3}} \le \log_3 x < \log_3 1, \\ \log_3 x \ge \log_3 3. \end{array}\right.$$

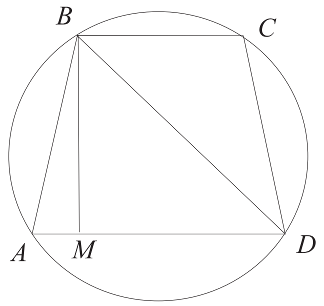
Так как основание логарифма $3 > 1$, то логарифмическая функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства сохраняется. $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \le x < 1, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1\right) \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1\right) \cup [3; +\infty)}$

8. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD = 3\sqrt{10}$, основание $BC = \sqrt{10}$, высота $BM = 2\sqrt{10}$. Найдите радиус

описанной окружности.



Решение. Окружность, описанная около трапеции, является также описанной вокруг $\triangle ABD$. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = 2R.$$

В $\triangle ABM$ найдем AM. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $AM = \frac{AD-BC}{2} = \sqrt{10}$; по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{50}$.

В $\triangle BMD$ найдем $MD = BC + AM = 2\sqrt{10}$; по теореме Пифагора $BD = \sqrt{MD^2 + BM^2} = \sqrt{80}$. Отсюда находим $\sin\angle ADB = \frac{MD}{BD} = \frac{2}{\sqrt{8}}$. Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = 5.$$

Ответ: $\boxed{R = 5}$.

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(4x^2 - (9a+8)x + 5a^2 + 10a\right) \cdot \sqrt{x-9} = 0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение. ОДЗ: $x \geq 9, \quad a \in R.$

Если $x = 9$, то уравнение уже имеет одно решение при любом a. Тогда второе решение данного уравнения может быть получено при выполнении условий:

1) $D = 0$ и единственный корень принадлежит ОДЗ;

2) $D > 0$, но $x_1 \in$ ОДЗ, а $x_2 \notin$ ОДЗ; или $x_1 \notin$ ОДЗ, а $x_2 \in$ ОДЗ.

Исследуем эти случаи.

1) $D = 0$; $D = a^2 - 16a + 64 = 0$, $D = (a-8)^2 = 0$.

Если $a = 8$, то $x_1 = x_2 = 10 \in [9; +\infty)$. Поэтому при $a = 8$ уравнение имеет ровно два решения: $x_1 = 9$ и $x_2 = 10$.

2) $D > 0$. Тогда $a \neq 8$, $x_1 = a + 2$, $x_2 = \frac{5}{4}a$. Решим совокупность систем

$$\begin{cases} a + 2 > 9, \\ \frac{5}{4}a \leq 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a + 2 \leq 9, \\ \frac{5}{4}a > 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a > 7, \\ a \leq \frac{36}{5}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \leq 7, \\ a > \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Отсюда получаем решение первой системы: $a \in \left(7; \frac{36}{5}\right]$; решение второй системы: $a \in \varnothing$.

Ответ: $\boxed{a \in \left(7; \frac{36}{5}\right] \cup \{8\}}$

Таблица ответов для Варианта 2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$[10; 20]$	10	$(0; +\infty)$	2	$-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$	-1; $\frac{3}{5}$

7	**8**	**9**
$(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1) \cup [3; +\infty)$	5	$(7; \frac{36}{5}] \cup \{8\}$

Вариант 3

1. Решите неравенство $|2x-12|+|x+9|>18$

2. Через точку $M(x;y)$ графика функции $f(x)=\ln(x-2)-0,5x^2$ проведена касательная. Угловой коэффициент этой касательной равен -2. Найдите координаты точки M.

3. Вычислите $10^{2+\frac{1}{2}\cdot\lg 75-2\cdot\lg(2\sqrt[4]{3})}$

4. Решите уравнение $3\cdot\sqrt[x]{81}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0$

5. Решите уравнение $\lg(x+1)^2+\lg(x+9)^2=2\lg 9$

6. Решите уравнение $(x^2-9)\cdot\left(\sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}\right)=3x^2-27$

7. Дано уравнение

$$\sqrt{2}\cdot\sin 4x-\sin x-\sin 7x=0.$$

   а) Решите уравнение.

   б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

8. В правильном $\triangle ABC$, сторона которого равна a, проведена высота BK. В $\triangle ABK$ и $\triangle BCK$ вписано по окружности и к ним проведена общая касательная, отличная от стороны AC. Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от $\triangle ABC$.

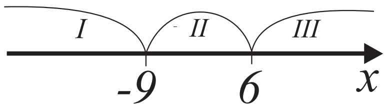
9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение системы $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$

1. Решите неравенство $|2x - 12| + |x + 9| > 18$

   Решение. ОДЗ: $x \in R$.

   Приравняем к нулю выражения под знаком модуля

   $2x - 12 = 0, \;\; x + 9 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = 6, \;\; x = -9$. Нанесем эти точки на числовую прямую и рассмотрим решение неравенства на каждом из трех промежутков, раскрывая знаки модулей.



I. $\begin{cases} x < -9, \\ -(2x - 12) - (x + 9) > 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -9, \\ -3x > 15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -9, \\ x < -5. \end{cases}$

Решение системы неравенств: $x \in (-\infty; -9)$.

II. $\begin{cases} -9 \le x < 6, \\ -(2x - 12) + x + 9 > 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 \le x < 6, \\ x < 3. \end{cases}$

Решение системы неравенств: $x \in [-9; 3)$.

III. $\begin{cases} x \ge 6, \\ 2x - 12 + x + 9 > 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 6, \\ 3x > 21, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 6, \\ x > 7. \end{cases}$

Решение системы неравенств: $x \in (7; +\infty)$.

Решением исходного неравенства является объединение всех трех решений

$x \in (-\infty; -9) \cup [-9; 3) \cup (7; +\infty) \;\; \Rightarrow \;\; x \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$

Ответ: $\boxed{(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)}$.

2. Через точку $M(x;y)$ графика функции $f(x) = \ln(x-2) - 0,5x^2$ проведена касательная. Угловой коэффициент этой касательной равен -2. Найдите координаты точки M.

Решение. ОДЗ: $x > 2$. Так как геометрический смысл производной функции в данной точке x_0 $\boxed{f'(x_0) = k}$,

где k — угловой коэффициент касательной, то получаем $f'(x) = (\ln(x-2) - 0,5x^2)' = \frac{1}{x-2} - x$. Тогда $\frac{1}{x-2} - x = -2$, $(x-2) - \frac{1}{x-2} = 0$, $\Rightarrow$ $(x-2)^2 = 1$,

$\Rightarrow$ $x_1 = -1$ или $x_2 = 3$. $x_1 \in \varnothing$, так как $x > 2$, $x_2 = 3$ — удовлетворяет ОДЗ.

Найдем координаты точки M. $f(3) = \ln 1 - 0,5 \cdot 3^2 = -4,5$. Тогда координаты точки $M(3;-4,5)$.

Ответ: $\boxed{M(3;-4,5)}$

3. Вычислите $$10^{2+\frac{1}{2}\cdot\lg 75 - 2\cdot\lg(2\sqrt[4]{3})}.$$

Решение. $10^{2+\frac{1}{2}\cdot\lg 75 - 2\cdot\lg(2\sqrt[4]{3})} = 100 \cdot 10^{\lg\sqrt{75} - \lg\left(2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^2} =$
$= 100 \cdot 10^{\lg\left(\frac{\sqrt{75}}{4\cdot\sqrt{3}}\right)} = 100 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{75}{3}} = 25 \cdot 5 = 125.$

Ответ: $\boxed{125}$

4. Решите уравнение $3 \cdot \sqrt[x]{81} - 10 \cdot \sqrt[x]{9} + 3 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in N$, $x > 1$.

Перепишем уравнение в виде $3 \cdot 9^{\frac{2}{x}} - 9 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$.

Пусть $9^{\frac{1}{x}} = t$, $t > 0$. Получаем квадратное уравнение относительно t:

$3t^2 - 10t + 3 = 0$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9^{\frac{1}{x}} = 3, \\ 9^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\frac{2}{x}} = 3^1, \\ 3^{\frac{2}{x}} = 3^{-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{x} = 1, \\ \frac{2}{x} = -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Но $x_2 = -2$ не удовлетворяет ОДЗ $\Rightarrow x = 2$.

Ответ: $\boxed{2}$

5. Решите уравнение $\lg(x+1)^2 + \lg(x+9)^2 = 2\lg 9$.

Решение. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} (x+1)^2 > 0, \\ (x+9)^2 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \neq -9, \quad x \neq -1.$

Используя свойства логарифма, получим

$2\lg|x+1| + 2\lg|x+9| = 2\lg 9$, откуда находим, что $\lg|(x+1)(x+9)| = \lg 9$ и далее $|x^2 + 10x + 9| = 9$. Последнее равенство выполняется в любом из следующих случаев: $\left[\begin{array}{l} x^2 + 10x + 9 = 9, \\ x^2 + 10x + 9 = -9, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x = 0, \\ x^2 + 10x + 18 = 0, \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = -10, \\ x_3 = -5 + \sqrt{7}, \\ x_4 = -5 - \sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Таким образом, уравнение имеет четыре корня, удовлетворяющих ОДЗ.

Ответ: $\boxed{-10; -5-\sqrt{7}; -5+\sqrt{7}; 0}$

6. Решите уравнение $(x^2-9)\cdot\left(\sqrt{-3x-5} + \sqrt{-2x}\right) = 3x^2 - 27$

Решение. Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель за скобку.

$(x^2-9)\cdot\left(\sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}-3\right)=0 \quad\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9=0, \\ \sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}-3=0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ x-3=0, \\ \sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}=3 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=3, \\ \sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}=3 \end{array}\right.$$

Решим иррациональное уравнение и затем обязательно сделаем проверку для всех найденных корней.

$\sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}=3.$ Уединим один из радикалов

$\sqrt{-3x-5}=3-\sqrt{-2x}$ и возведем обе части в квадрат

$-3x-5=9-6\sqrt{-2x}-2x,\quad 6\sqrt{-2x}=x+14.$

Возведем еще раз обе части в квадрат

$-72x=x^2+28x+196,\quad x^2+100x+196=0 \quad\Rightarrow\quad x_3=-98,$ $x_4=-2$. Выполним проверку.

$x_1=-3 \quad 0\cdot(\sqrt{9-5}+\sqrt{6})=3\cdot 0,\quad 0=0$ — истина, $\Rightarrow$ $x_1=-3$ является корнем уравнения.

$x_2=3 \quad 0\cdot(\sqrt{-14}+\sqrt{-6})=3\cdot 0,$ — не имеет смысла, $\Rightarrow$ $x_2=3$ не является корнем уравнения.

$x_3=-98 \quad \left((-98)^2-9\right)\cdot(\sqrt{289}+\sqrt{196})=3\cdot\left((-98)^2-9\right),$

$17+14=3$ — ложно, $\Rightarrow$ $x_3=-98$ не является корнем уравнения.

$x_4=-2 \quad (4-9)\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{4})=3\cdot(4-9),\quad 1+2=3,\quad 3=3$ — истина, $\Rightarrow$ $x_4=-2$ является корнем уравнения.

Ответ: $\boxed{-2;3}$

7. Дано уравнение

$$\sqrt{2}\cdot\sin 4x-\sin x-\sin 7x=0.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Решение. а) Сгруппируем последние слагаемые и применим формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$\sqrt{2}\cdot\sin 4x-(\sin x+\sin 7x)=0,\quad \sqrt{2}\cdot\sin 4x-2\cdot\sin 4x\cdot\cos 3x=0.$

Вынесем общий множитель $\sin 4x\cdot(\sqrt{2}-2\cdot\cos 3x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0,\\ \sqrt{2}-2\cdot\cos 3x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0,\\ \cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\pi n,\ n\in Z,\\ 3x=\pm\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2})+2\pi k,\ k\in Z;\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}4x=\pi n,\ n\in Z,\\ 3x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z,\\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z.\end{array}\right.$$

б) Найдем углы, удовлетворяющие условию $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

$n=0 \;\Rightarrow\; x=0\notin[\frac{\pi}{2};\pi],$

$n=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}\notin[\frac{\pi}{2};\pi],$

$n=2 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}\in[\frac{\pi}{2};\pi],$

$n=3 \;\Rightarrow\; x=\frac{3\pi}{4}\in[\frac{\pi}{2};\pi],$

$n=4 \;\Rightarrow\; x=\pi\in[\frac{\pi}{2};\pi].$

$k=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{\pi}{12}\notin[\frac{\pi}{2};\pi],$

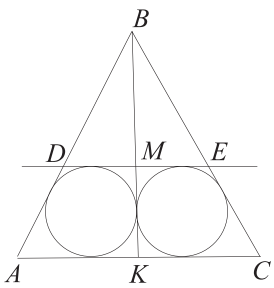
$k=1 \;\;\Rightarrow\;\; x=\frac{7\pi}{12}\in[\frac{\pi}{2};\pi],\; x=\frac{3\pi}{4}\in[\frac{\pi}{2};\pi],$

Убеждаемся, что для всех остальных n и k $\;x\notin[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } \frac{\pi n}{4},\, n\in Z;\;\; \pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},\, k\in Z;\;\; \text{б) } \frac{\pi}{2},\;\; \pi,\;\; \frac{7\pi}{12},\;\; \frac{3\pi}{4}}$

8. В правильном $\triangle ABC$, сторона которого равна a, проведена высота BK. В $\triangle ABK$ и $\triangle BCK$ вписано по окружности и к ним проведена общая касательная, отличная от стороны AC. Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от $\triangle ABC$.

Решение.



Решение. Воспользуемся известными формулами:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad r=\frac{S}{p}.$$

Так как $\triangle DBE$ тоже правильный ($\angle BDE=\angle BAC=60^0$ и $\angle DEB=\angle ACB=60^0$ как углы при параллельных прямых AC и DE и секущих AB, BC), то его площадь может быть найдена по формуле

$$S_{\triangle DBE}=\frac{(DE)^2\sqrt{3}}{4}.$$

Высота $BK=AB\cdot\sin A=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Найдем BM.

$$BM=BK-MK=\frac{a\sqrt{3}}{2}-2r.$$

Радиус вписанной в $\triangle ABK$ окружности равен

$$r = \frac{S_{\triangle ABK}}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{2}\cdot(a+\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2})} = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})}.$$

Отсюда

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{a}{2}.$$

Так как $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (*по двум сторонам и углу между ними*), то

$$\frac{BM}{BK} = \frac{DE}{AC} \quad \Rightarrow \quad DE = AC\cdot\frac{BM}{BK} = a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $\quad S_{\triangle DBE} = \frac{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\quad$ Итак, $\;S_{\triangle DBE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

Ответ: $\boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{12}}$

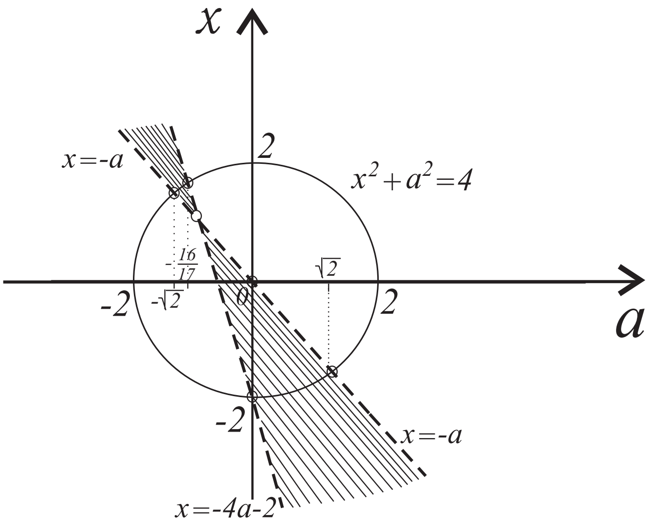
9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение системы
$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x \in R, \quad a \in R.$

Применим координатно-параметрический метод: на плоскости aOx найдем множество точек $(a;x)$, значение параметра и координаты каждой из которых удовлетворяют смешанной системе. Рассмотрим первое неравенство системы.

$$x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \;\Leftrightarrow\; (x+4a+2)\cdot(x+a)<0.$$

Применяем метод частичных областей: определяем знак выражения $F(a,x) = (x+4a+2)\cdot(x+a)$ между прямыми $x=-a$ и $x=-4a-2$. На координатно-параметрической плоскости множество всех точек $(a;x)$, значение параметра и координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству $(x+4a+2)\cdot(x+a)<0$ заштриховано.



Второе уравнение системы $x^2+a^2=4$ представляет собой на координатно-параметрической плоскости окружность с центром в начале координат, радиусом $R=2$. Найдем точки пересечения прямых $x=-a$ и $x=-4a-2$ с окружностью $x^2+a^2=4$.

$$\begin{cases} x=-a, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2},\ a=\sqrt{2}; \\ x=\sqrt{2},\ a=-\sqrt{2}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2,\ a=0; \\ x=\frac{30}{17},\ a=-\frac{16}{17}. \end{array} \right.$$

Искомое множество решений смешанной системы представляет собой дуги окружности $x^2+a^2=4$, находящиеся внутри заштрихованной области.

Таким образом, $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17};\ \ 0<a<\sqrt{2}$.

Ответ: $\boxed{\left(-\sqrt{2};-\frac{16}{17}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)}$

Таблица ответов для Варианта 3

1	2	3	4
$(-\infty;3)\cup(7;+\infty)$	$M(3;-4,5)$	125	2

5	6	7	8
$-10; -5-\sqrt{7}; -5+\sqrt{7}; 0$	$-2;\ 3$	$\frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{7\pi}{12};\ \frac{3\pi}{4}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

9
$(-\sqrt{2}; -\frac{16}{17})\cup(0;\sqrt{2})$

3. Варианты заданий для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Упростите до числового ответа

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2(ab)^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$$

2. Два подъёмных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 часов. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может её разгрузить на 5 часов скорее, чем другой?

3. Решите неравенство $2^{2x}-15\cdot 11^{x}<11^{x}-15\cdot 12^{2x+3}$. В ответе укажите наименьшее целое решение.

4. Вычислите $5\sin 2\alpha-\frac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha=-2$

5. Решите уравнение

$$\left(x^2-36\right)\left(\sqrt{-5-6x}-\sqrt{1-3x}\right)=3x^2-108$$

6. Решите неравенство $\log_2(x+15) - 2 \cdot \log_4(15-x) \le 2$. В ответе укажите наименьшее целое решение.

7. Дано уравнение
$$2 - \cos 2x + 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi/2; 2\pi]$.

8. Периметр равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 18:5. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

9. При каких значениях параметра a уравнение $\big(x^2 - (4a-5)x + 3a^2 - 15a\big) \cdot \sqrt{x+15} = 0$ имеет ровно два решения?

Вариант 2

1. Вычислите $\sqrt{16^{\frac{1}{\log_5 2}} + 64^{\frac{1}{\log_3 4}} + 248}$

2. Решите уравнение $|x+1| + |3x-9| = 8$

3. Решите неравенство $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \ge (20,25)^{2x-7}$

4. Вычислите $\cos^2 3\alpha + \cos^2 \alpha - \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$

5. Решите уравнение
$$(x+1) \cdot \left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{19-3x}\right) = 6 \cdot (x+1)$$

6. Решите неравенство $\log_2 \frac{x}{2} - 2 \cdot \log_{\frac{x}{2}} 2 \le 1$

7. Дано уравнение

$$\cos 2x + 3\sin x = 2.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

8. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна 12, а косинус угла при основании трапеции равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(3+a)x^2 - 2x - 3 + a = 0$ положительны?

Вариант 3

1. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(\frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}}\right) \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

2. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S(t) = -t^3 + 3t^2 + 3t + 6$. Какой путь пройдет точка к тому времени, когда ее скорость станет наибольшей?

3. Решите неравенство $\quad 4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0$

4. Вычислите $\quad \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. Решите уравнение

$$0,5\left(x^2+1\right) = 0,25(2-6x) - \sqrt{2x^2+6x+5}$$

6. Решите неравенство $\log_{0,5} \frac{3x-2}{x+1} > 1$

7. Дано уравнение

$$2\sin^2 2x - 11\sin 2x - 6 = 0.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$ и запишите в ответе их число.

8. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите длины оснований трапеции.

9. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$a^{x+2} + 6\cdot a^{x+1} + 12\cdot a^x + 8\cdot a^{x-1} - \frac{4}{a} > a+4$$

Вариант 4

1. Вычислите $\sqrt{625\cdot\sqrt{16}}\cdot\log_2 \sqrt[5]{\sqrt[5]{16}}$

2. Решите уравнение $|x+15| - |x| = 15$

3. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 196^{0,5\log_{14}(1-x^3)} + 3x^4 - 7x^3 - 48x^2$$

4. Решите неравенство $\frac{1}{3^{x+5}} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$

5. Дано уравнение $\sin x + 2\sin 2x = -\sin 3x$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

6. Решите уравнение $\quad (x-3)\cdot\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+8}\right)=3-x$

7. Решите неравенство $\quad \log^2_{1/3}(x-1)+3\geq -\frac{4}{5}\log_{1/3}(x-1)^5$

8. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ катет $CB=a$, катет $CA=b$, CH — высота, AM — медиана. Найдите площадь треугольника $\triangle BMH$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(8a+4)x+7a^2+4a<0, \\ x^2+a^2=16 \end{cases}$$

имеет решение. В ответе укажите наибольшее целое отрицательное значение параметра a.

Вариант 5

1. Упростите до числового ответа

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$$

2. Вычислите

$$\left(125^{\log_{\sqrt{5}}2}-\sqrt{7^{\frac{2}{\log_{25}7}}}\right)^{\log_{39}12}$$

3. Решите неравенство $\quad \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2-3}\cdot(12,25)^{2x+1}\geq 1.$

4. Вычислите

$$\sqrt{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$$

6. Решите неравенство

$$\log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-7}{x+3} \right) > 0$$

7. Дано уравнение $\quad \sin 4x = 2\cos^2 x - 1.$

   а) Решите уравнение.

   б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ и запишите в ответе их число.

8. Основание равнобедренного треугольника относится к его высоте как $3:2$. Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

9. При каких значениях параметра k уравнение

$$(k-1)\cdot 5^{x} - 2\cdot 5^{-x} + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

Вариант 6

1. Упростите до числового ответа

$$\left(\frac{b-y}{\sqrt{b}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{b^3}-\sqrt{y^3}}{b-y} \right) \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{y}}{\sqrt{by}}$$

2. Решите неравенство $\quad |x+36| - |x-12| > 6x.\quad$ В ответе укажите наибольшее целое решение.

3. Решите неравенство $3^{1+2x} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$. В ответе укажите целое решение.

4. Вычислите
$$\frac{\mathrm{ctg} 55^\circ \cdot \sin 110^\circ - 1}{\cos 110^\circ}$$

5. Решите уравнение $x \cdot \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right) = x$. В ответе укажите наименьшее решение.

6. Решите неравенство $\log^2_{1/6} + \log_{1/6}(6x) > 1$.
В ответе укажите наименьшее целое решение.

7. Дано уравнение
$$\sin 3x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot \cos 2x = 0.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi/2]$.

8. Диагональ равнобедренной трапеции составляет с боковой стороной и с основанием углы 15° и 45° соответственно. Найдите радиус описанной около трапеции окружности, если высота трапеции равна $\sqrt{6}$.

9. При каких значениях параметра a уравнение
$$\frac{3^{x^2+1} - 3^{2-\sqrt{x}}}{a} = 3^{x^2} + 2 \cdot 3^{-\sqrt{x}}$$
имеет решение? В ответе укажите наименьшее значение параметра a.

Вариант 7

1. Решите уравнение $|3-x|-|x-6|=-3$

2. Три числа, третьим из которых является 12, составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то получившиеся числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

3. Решите неравенство
$$2^{\frac{x+3}{x-3}} \geq 16^{-1}$$

4. Вычислите $2 \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

5. Дано уравнение
$$\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 2\cos 3x.$$

   а) Решите уравнение.

   б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi/2]$.

6. Решите уравнение $(x-1) \cdot \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-2}\right) = x-1$

7. Решите неравенство
$$\frac{1}{1-\lg x} < \frac{2\lg x - 5}{1+\lg x}$$

8. В треугольнике $\triangle ABC$ величина угла C равна 60°, а длина стороны $AB = \sqrt{31}$. На стороне AC отложен отрезок $AD = 3$. Найдите длину BC, если $BD = 2\sqrt{7}$.

9. Найдите множество значений параметра a, при которых существует хотя бы одно решение уравнения

$$\sin^4 2x - (3a-2)\sin^2 2x + 9a - 15 = 0.$$

В ответе укажите наибольшее значение параметра a.

Вариант 8

1. Упростите до числового ответа

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}(8y-x)}{x^{\frac{2}{3}} + 2(xy)^{\frac{1}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}} : \frac{2y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{2}{3}}$$

2. Найдите абсциссы всех точек графика функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2-36}{x-6},$$

касательные в которых параллельны прямой $y = 35x$ или совпадают с ней.

3. Решите неравенство $\quad 3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$

4. Вычислите

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha\cdot\cos\alpha} - 2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$$

5. Решите уравнение $\quad (x-1)\cdot\left(\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}\right) = 3\cdot(x-1)$

6. Решите неравенство $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3\cdot\log_3(81\cdot x) < 1$

7. Дано уравнение

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\sin x + \sqrt{3}\cdot\left(\sin x - \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} 2x\right) = 3\sqrt{3}.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ и запишите в ответе их число.

8. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, если меньший катет треугольника $\triangle ABC$ равен 1.

9. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$2^{\frac{ax+3}{x^2+3}} + 2^{\frac{4x^2-ax+9}{x^2+3}} = 10$$

Вариант 9

1. Вычислите $\quad \log_2 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_{27} 64$

2. Насос выкачивает воду из бассейна за 1,5 часа. Проработав 15 минут, насос остановился. Найдите объем бассейна, если в нем осталось 15 куб. метров воды.

3. Решите неравенство $\quad 6^{1+x} + 6^{2-x} - 42 \leq 0$

4. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - \frac{(1-\sqrt{a})^{-1}}{1+\sqrt{a}}\right) : \frac{a^2-a+1}{1+a(a-2)} \cdot \left((a-1)^2+4a\right)^{-\frac{1}{2}}$$

при $\quad a = -2$.

5. Решите уравнение $\quad (x^2-9)\cdot\left(\sqrt{-3x-5}+\sqrt{-2x}\right) = 3x^2-27$

6. Решите уравнение $\quad 2\lg\lg x = \lg(3-2\lg x)$

7. Дано уравнение $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi/2;\ 2\pi]$.

8. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом $60°$. Найдите диагонали четырехугольника.

9. При каких значениях параметра k квадратный трехчлен $f(x) = x^2 - 2kx + k + 6$ имеет корни больше 1?

Вариант 10

1. Вычислите

$$25^{\frac{1}{\log_2 5}} + 9 \cdot \left(4^{\,1-\frac{1}{\log_5 2}}\right) - 7^{\log_{49} 9}$$

2. Решите уравнение $3 \cdot |x-3| - |x-9| = 10$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x-6}{x}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$$

4. Вычислите

$$\frac{2 \cdot (1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha)}{\sin\alpha \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

5. Решите уравнение $x + 2x^2 - \sqrt{2x^2 + x - 1} = 7$

6. Решите неравенство

$$\frac{6 \cdot \log_2 x^2 - 20}{\log_2^2 x} \geq 1$$

7. Дано уравнение

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{3x}{2}.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

8. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает сторону AC в точке M, при этом $AM : MC = 3$. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает сторону AB в точке N, так что $AN : NB = 2$. Найдите углы треугольника ABC.

9. При каких значениях параметра b уравнение

$$25^x - (2b+5) \cdot 5^{x-\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения? В ответе запишите наименьшее целое значение параметра b.

4. Ответы к заданиям для самостоятельного решения

Вариант 1.

1. 0. **2.** 10; 15. **3.** $(2; +\infty)$; 3. **4.** 1. **5.** -21; -6. **6.** $(-15; 9]$; -14. **7.** $(-1)^n 45° + 180°n$; 135°. **8.** 0,32. **9.** $(-10; -5) \cup \{-2, 5\}$.

Вариант 2.

1. 30. **2.** 1; 4. **3.** $[-7; 2]$. **4.** 1. **5.** 1; 5. **6.** $(0; 1] \cup (2; 8]$. **7.** $90° + 360°n$; $(-1)^n 30° + 180°n$; 30°; 90°; 150°. **8.** 4,5. **9.** $(3; \sqrt{10}]$.

Вариант 3.

1. 2. **2.** 11. **3.** $[1; +\infty)$. **4.** $\frac{31}{49}$. **5.** -2; -1. **6.** $(2/3; 1)$. **7.** $(-1)^n 15° + 90°n$; 105°; 165°; *2*. **8.** 2; 14. **9.** $0 < a < 1$, $x < -log_a(a+2)$; $a > 1$, $x > -\log_a(a+2)$; $a = 1$, $x \in R$.

Вариант 4.

1. 8. **2.** $[0;+\infty)$. **3.** -2. **4.** $(-1;1]$. **5.** $180^\circ+360^\circ n$; $90^\circ n$; 0°; 90°; 180°. **6.** 1; 3. **7.** $(1;4]\cup[28;+\infty)$. **8.** $\frac{a^3b}{4(a^2+b^2)}$.
9. $(-4;-2\sqrt{2}/5)\cup(0;2\sqrt{2}/5)$; *-3.*

Вариант 5.

1. 1. **2.** 12. **3.** $[-1;5]$. **4.** 1/2. **5.** -2. **6.** $(7;12)$. **7.** $45^\circ+90^\circ n$; $(-1)^n15^\circ+90^\circ n$; 45°; 75°; 135°; *3.* **8.** $\frac{25}{12}$. **9.** $[1;+\infty)\cup\{\frac{7}{8}\}$.

Вариант 6.

1. 1. **2.** $(-\infty;6)$; *5.* **3.** $(-1;1)$; *0.* **4.** 1. **5.** -1; 0.
6. $(0;1/6)\cup(36;+\infty)$; *37.* **7.** $36^\circ n$; $90^\circ+180^\circ n$; 0°; 36°; 72°; 90°. **8.** 2.
9. $[-2;0)\cup(0;3)$; -2.

Вариант 7.

1. $(-\infty;3]$. **2.** 3; 6; 12. **3.** $(-\infty;\frac{9}{5}]\cup(3;+\infty)$. **4.** -1.
5. $-7{,}5^\circ+90^\circ n$; $15^\circ+180^\circ n$; 15°; $82{,}5^\circ$. **6.** 1; 3. **7.** $(0;\frac{1}{10})\cup(10;+\infty)$.
8. 6. **9.** 2.

Вариант 8.

1. 0. **2.** -6. **3.** $(0;\frac{1}{2})\cup(3;+\infty)$. **4.** 0. **5.** -2; 1.
6. $(0;\frac{1}{9})\cup(\frac{1}{3};1)\cup(9;+\infty)$. **7.** $-30^\circ+90^\circ n$; -210°; -120°; *2.* **8.** $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.
9. $a\in R$, $x=0$, $x=a$; $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-72}}{6}$ при
$a\in(-\infty;-6\sqrt{2}]\cup[6\sqrt{2};+\infty)$.

Вариант 9.

1. 4. **2.** 18. **3.** $[0;1]$. **4.** 3. **5.** -3; -2. **6.** 10. **7.** $\pm30^\circ+180^\circ n$; 150°; 210°; 330°. **8.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$; $\sqrt{a^2+b^2+ab}$. **9.** $[3;7)$.

Вариант 10.

1. 5. **2.** -5; 7. **3.** $(0;7]$. **4.** 4. **5.** $-2{,}5$; 2. **6.** $[4;1024]$. **7.** $60^\circ+120^\circ n$; $(-1)^n20^\circ+120^\circ n$; 60°; 100°; 180°. **8.** $\angle A=45^\circ$; $\angle B=\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$; $\angle C=\arcsin(\frac{3}{\sqrt{10}})$. **9.** $(0;\frac{1}{50})\cup(\frac{25}{2};+\infty)$; *13.*

5. Критерии оценивания заданий

Решения задач должны содержать пояснения. В алгебраических примерах необходимо объяснить выкладки, провести проверку решений (если это необходимо), указать все ограничения, возникающие как из условия, так и в ходе выкладок. Не забывайте указывать, какому множеству принадлежат n или k в записи решения тригонометрического уравнения. Чертежи надо выполнять аккуратно (можно от руки), все обозначения на чертеже должны соответствовать обозначениям, используемым в тексте решения. Все выкладки при решении геометрической задачи надо записывать сначала в буквенных обозначениях, и лишь затем подставлять числовые данные. Все геометрические утверждения, например, подобие треугольников, должны быть обоснованы указанием признака подобия и выполнения соответствующих условий подобия. Обращаем внимание поступающих на некоторые критерии оценивания заданий в баллах:

1. В ходе проверки экзаменационной работы задача оценивается максимальным баллом только в том случае, когда в чистовике (решение в черновике не засчитывается!) приведено ее полное решение без ошибок на промежуточных этапах, завершающееся верным ответом. Не может быть и речи ни о подборе, ни об угадывании ответов.

2. Решение задачи в общем виде, не доведенное до требуемого в условии числового ответа, засчитывается и оценивается меньшим, чем максимальный балл.

3. За вычислительную ошибку снимается 1 балл.

4. Отбрасывание знаменателя дробно-рационального неравенства — задача оценивается половиной максимального балла.

5. Потеря ОДЗ в логарифмическом неравенстве — задача оценивается половиной максимального балла. Потеря смены знака в логарифмическом или показательном неравенстве — задача оценивается меньшим баллом.

6. Если в выражениях используется смешанная запись различных мер углов — градусов и радиан, то снимается 1 балл.

7. Если при решении иррационального уравнения в ответе присутствуют посторонние корни, то задача оценивается половиной максимального балла.

Желаем успехов! Ждем Вас в ТУСУРе!

Список рекомендуемой литературы

1. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Мордкович А. Г., Семенов П. В. — 12-е изд., стер. - М.: 2010. — 224 с.: ил.

2. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина и др.]; Под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., испр. — М.: 2010.— 223 с.: ил.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник. Базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, Л. В. Шевкин]. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2009 (2008). — 430 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, Л. В. Шевкин]. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2009 (2008). — 464 с. : ил.

5. Геометрия. 7 — 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Антанасян, В. Ф.Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009. — 384 с.: ил.

6. Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз).: Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. — М: Изд-во Фойлис, 2010. — 296 с.: ил.

7. Задачи с параметром / Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Изд. 3-е, перераб., доп.— М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005. — 328 с.

8. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие / В. П. Моденов. — М.: Издательство "Экзамен", 2007. — 285, [3] с. (Серия "Абитуриент").

9. **3000** конкурсных задач по математике.— 5-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 624 с.: ил.