Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Л.И. Магазинников, Ю.П. Шевелев

Математика для гуманитарных, экологических и экономико-юридических специальностей

Часть 2

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М12

Магазинников Л.И.

М12 Математика для гуманитарных, экологических и экономико-юридических специальностей : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Л.И. Магазинников, Ю.П. Шевелев. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 244 с.

ISBN 978-5-86889-326-1
ISBN 978-5-86889-328-5 (Ч. 2)

Изложены первоначальные сведения из теории пределов, непрерывности, дифференциального исчисления, функций одной и многих переменных, интегрального исчисления и дифференциальных уравнений, а также теории вероятностей для непрерывных случайных величин и их систем. Объем материала соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта для гуманитарных, экологических, экономико-юридических и родственных им специальностей. Изложение теоретического материала сопровождается многочисленными упражнениями.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86889-326-1
ISBN 978-5-86889-328-5 (Ч. 2)

Предисловие

В первой части пособия рассмотрены элементы дискретной математики, не использующей предельный переход. Вторая часть посвящена основным понятиям «непрерывной» математики, главным из которых является понятие предела. На теории пределов строится большинство объектов математического анализа. Весь материал пособия разбит на пять разделов. В первом из них изучаются первоначальные сведения о функциях, проводится их классификация как по размерности, так и по свойствам. Для построения теории пределов сначала дано понятие окрестностей точки на прямой, плоскости и в пространстве, изучаются типы окрестностей и формы их записи в виде неравенств. После этого определение предела формулируется на языке окрестностей в самом общем виде, а затем показывается, как можно его записать на языке неравенств для всевозможных случаев. Далее приводятся традиционные сведения из теории пределов и непрерывности, а также очень кратко рассматриваются числовые и функциональные ряды, в которых на основе предела обобщается понятие суммы на бесконечное число слагаемых.

Второй раздел посвящен дифференциальному исчислению функций одной и многих переменных. Основной задачей дифференциального исчисления является выделение линейной части произвольного отображения. Поэтому в качестве первоначальных понятий в этом разделе взяты дифференцируемое отображение и дифференциал, а затем даны определения производных и частных производных. Формула Тейлора и ряды Тейлора помещены в подраздел о дифференциалах высших порядков. В дифференциальной форме формула Тейлора записывается одинаково как для функций одной переменной, так и для функций многих переменных.

В третьем разделе очень кратко изучаются интегралы: неопределенные, определенные и интегралы от функций многих переменных. Чтобы пояснить общую идею интегрирования, дано понятие интеграла по фигуре, позволяющего вычислять простейшие двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы.

В четвертом разделе приводятся некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений первого и высших порядков, изучаются типы уравнений, а также однородные и неоднородные линейные уравнения второго порядка.

В качестве приложений дифференциального и интегрального исчислений к задачам теории вероятностей в пятом разделе изучаются непрерывные одномерные и двумерные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики. Завершается раздел элементами выборочного метода, основного в математической статистике.

Изложение теоретического материала сопровождается большим числом примеров и упражнениями, предназначенными для самостоятельного решения.

Цель пособия — помочь студентам получить представление об основных понятиях математики, широко используемых для построения математических моделей различного рода явлений. В государственных образовательных стандартах специальностей, для которых предназначено пособие, на изучение курса математики отводится очень мало аудиторных занятий — от 64 до 120 часов. Поэтому особенно тщательно нужно относиться к отбору учебной информации. Например, можно курс математики начать с элементов теории вероятностей, изучив некоторые понятия комбинаторики. А понятия функции, предела, производной, интеграла ввести как необходимые инструменты для изучения непрерывных случайных величин. При этом придется более подробно остановиться на понятиях функции распределения, плотности распределения.

При подготовке пособия использовалась литература, приведенная в библиографическом списке. По указанным в нем учебникам и учебным пособиям можно ознакомиться с более подробным и глубоким изложением некоторых разделов курса, а также с другими способами его построения.

В пособие включено более 1000 задач, оформленных в виде двух контрольных работ, которые можно рекомендовать студентам при заочной форме обучения. В зависимости от объема изучаемого материала часть задач можно исключить, разбить данные две работы на несколько работ, содержащих меньшее число заданий. При очной форме обучения эти контрольные работы можно применять в качестве довольно подробного задачника, достаточного как для аудиторной работы, так и для домашних заданий. При наличии устройства «Символ», созданного в Томском государственном университете автоматизированных систем управления и радиоэлектроники, многие задачи можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля. Как осуществлять самоконтроль, объяснено в инструкции к устройству.

Приведенный в пособии перечень вопросов для экзаменов можно также применять при очной форме обучения в качестве теоретических вопросов для подготовки к практическим занятиям и коллоквиумам.

Надеемся, что предлагаемое пособие окажет положительное влияние в решении трудной задачи математического образования специалистов, близких к гуманитарным профилям.

Авторы

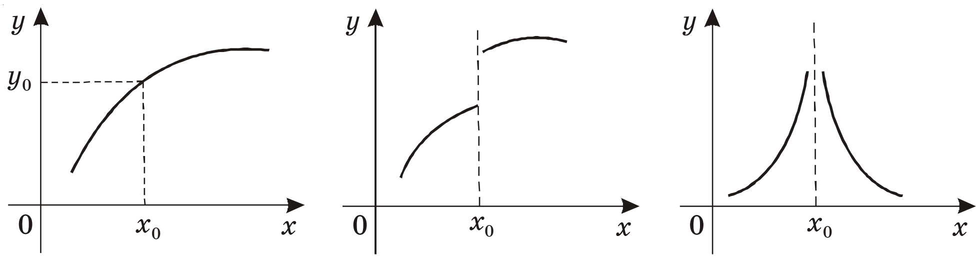
Введение

Вторая часть пособия полностью посвящена изучению функций — одного из основных элементов математического анализа.

Для математического описания многих явлений природы потребовалось ввести понятие переменной величины. Напрмер, движение материальной точки можно охарактеризовать двумя переменными величинами: временем t и длиной пути S, пройденного точкой за время t. Величины t и S между собой взаимосвязаны. Каждому значению переменной t ставится в соответствие единственное значение переменной S. Принято говорить, что переменная S является функцией переменной величины t. Кратко записывают: $S = f(t)$. В математике не учитывают конкретное содержание переменных величин и изучают функции в общем виде: $y = f(x)$. Величину x называют независимой переменной или аргументом, а величину y — зависимой переменной или функцией от x. Для каждой теоретической и прикладной науки характерны свои классы функций. Например, при изучении процессов в экономике появляется целый ряд функций: производственная функция, функция потребления, функция полезности и многие другие. В теории вероятностей наиболее важными являются функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей. В математическом анализе изучают функции с общей точки зрения, не связывая их с конкретным содержанием. Поэтому выводы, получаемые в математике, применимы во всех областях, где возникает необходимость в использовании понятия функции.

Пусть имеем произвольную функцию $y = f(x)$. Допустим, что некоторое значение $x = x_0$ по какой-то причине является наиболее важным. Возникает задача: охарактеризовать поведение функции, если x будет приближаться к значению x_0. Например, имеем функцию $y = (1 + x)^{1/x}$. Представляет интерес поведение величины y, если x неограниченно приближается к нулю. Доказано, что в этом случае y приближается к числу Эйлера $e \cong 2,7182818285$, одной из мировых констант. Это число встречается во многих задачах и служит основанием для введения многих функций: $y = e^x$; $y = \log_e x = \ln x$ — натуральный логарифм; $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус; $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус; $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — гиперболический тангенс; $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гиперболический котангенс и других, значительно расширяющих класс элементарных функций, изучаемых в средней школе. Гиперболические функции находят применение при построении неевклидовых геометрий подобно тригонометрическим функциям в евклидовой геометрии.

Допустим, что процесс характеризуется функцией $y = \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}$. Каково поведение величины y, если x приближается к единице? Такие задачи в математике решают с помощью понятия предела функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0. Пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. В зависимости от поведения функции при приближении к точке x_0 все функции можно разбить на два класса — непрерывные в точке x_0 и имеющие разрыв в этой точке. На первом рисунке изображен график непрерывной функции, а на двух других — разрывных.



Для непрерывных функций отыскание предела особых трудностей не представляет. Например, в случае $\lim\limits_{x \to 3}\left(x^2 + 1\right)$ интуиция подсказывает, что этот предел равен 10, хотя мы пока еще не знаем точное определение предела. Приведенные ранее функции $y = (1+x)^{1/x}$ и $y = \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}$ относятся к классу разрывных функций в точках $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$ соответственно.

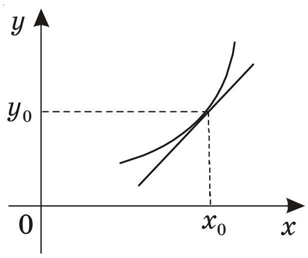
Понятие предела является одним из основных в курсе математического анализа. С его помощью вводятся многие другие понятия: производной, определенного интеграла, числового и функционального рядов и т.д.

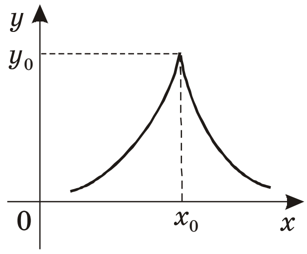
Еще одной характеристикой поведения функции $y = f(x)$ в точке x_0 является скорость изменения величины y при изменении величины x. Например, если x — количество внесенных удобрений, а y — урожайность, то важно знать, как изменение количества внесенных удобрений повлияет на урожайность. Для характеристики скорости поступим следующим образом. Зафиксируем как-либо аргумент x, положив $x = x_0$, и дадим ему приращение Δx. В результате величина y также получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ясно, что скорость возрастания величины y тем выше, чем больше Δy. В зависимости от характера изменения величины Δy при изменении Δx все непрерывные функции делятся на два класса — дифференцируемые и недифференцируемые. Для дифференцируемых функций приращение Δy можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где A — константа, а второе слагаемое, т.е. функция $\alpha(\Delta x)$, стремится к нулю быстрее величины Δx.

Первое слагаемое пропорционально Δx. При малых Δx приближенно можно положить $\Delta y \approx A\Delta x$. При этом функцию $y = f(x)$ вблизи точки x_0 мы заменяем приближенно очень простой линейной функцией $\varphi(x) = Ax + B$. Константа A равна пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует производная $f'(x_0)$. В этом случае график функции $y = f(x)$ имеет в точке x_0 касательную прямую. Если же функция в точке x_0 не дифференцируема, то касательной нет. На левом рисунке изображен график дифференцируемой в точке x_0 функции, а на правом — недифференцируемой.





Можем записать $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$. Первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ обозначают dy и называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Дифференциал функции — это часть приращения функции, пропорциональная величине Δx. Заменяя приращение функции дифференциалом, мы трудновычисляемую величину Δy заменяем приближенно дифференциалом, который находится очень просто при умении находить $f'(x_0)$, а это не так уж сложно.

Понятия производной и дифференциала служат инструментом для дальнейшего глубокого изучения функций, что является основной задачей дифференциального исчисления — одного из разделов математического анализа.

В процессе решения ряда сложных задач, в том числе одной из главных — задачи о вычислении площади плоской фигуры, было создано интегральное исчисление — другой раздел математического анализа. Интегральное исчисление содержит два подраздела: неопределенный интеграл и определенный интеграл. В дифференциальном исчислении по известной функции находим ее производную, используя неопределенные интегралы, решаем обратную задачу, т.е. по известной производной $f'(x)$ восстанавливаем функцию $f(x)$. Тесная связь между определенным и неопределенным интегралами выражается формулой Ньютона — Лейбница, которая позволяет для большого класса функций сравнительно просто вычислять определенный интеграл и тем самым решать многие задачи, встречающиеся в различных разделах математики, физики и других науках. Исаак Ньютон (1642–1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) завершили длительный процесс создания дифференциального и интегрального исчисления.

Только в простейших случаях функцию $y = f(x)$ удается задать в виде формулы, таблицы, графика или некоторым уравнением $F(x,y) = 0$. Многие функции, значительно расширяющие класс элементарных функций, изучаемых в средней школе, задают в виде интегралов $J(x)=\int_a^x f(t)dt$ (интегральный синус, интегральный косинус, интегральный логарифм и др.).

Другой многочисленный класс функций удается описать интегралами вида $J(x)=\int_a^b \varphi(x,y)dy$. Они называются интегралами, зависящими от параметра (Г-функция, В-функция, функция Пуассона и др.). Некоторые функции оказалось удобно задавать в виде функционального ряда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$ где функции $\varphi_n(x)$ принадлежат различным классам хорошо изученных функций, например: 1, x, x^2, …, x^n, …; $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, …, $\sin nx$, $\cos nx$, …

Во многих задачах интересующие исследователя функции описываются дифференциальными уравнениями $F\left(x,y,y',\dots,y^n\right)=0,$ в которые входят независимая переменная x, неизвестная функция $y(x)$ и ее производные до n-го порядка $y',y'',\dots,y^n$. Например, применяемый в прикладных и теоретических исследованиях класс цилиндрических функций можно описать дифференциальным уравнением Бесселя $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0.$

Подобные способы задания функций привели к появлению важнейших разделов в математике — теории рядов, теории интегралов, зависящих от многих параметров, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и др. С некоторыми из этих разделов мы кратко ознакомимся в предлагаемом пособии.

1. Функции. Предел. Непрерывность

1.1. Понятие функции

Для описания закономерных связей в природе используются различного рода величины. Под величиной в математике понимают все то, что можно измерить и выразить числом. Например, площадь S круга радиуса r выражается формулой $S=\pi r^2$. В нее входит величина π, приближенно равная 3,14, для всех кругов одна и та же. Такие величины называют постоянными. Другие примеры постоянных величин: число Авогадро, скорость света в вакууме, число Эйлера и пр. Величины же S и r изменяются при переходе от одного круга к другому. Такие величины называют переменными. Говорят, что переменная величина S является функцией от переменной величины r, и пишут $S=f(r)=\pi r^2$. Положив, например, $r=2$, получим $S=4\pi$. Величина 4π есть значение функции $f(r)=\pi r^2$ при $r=2$. Можно записать $f(2)=4\pi$. В зависимости $S=\pi r^2$ переменную величину r называют аргументом, а величину S — функцией. Мы рассмотрели пример функции от одного аргумента. Существуют переменные величины, зависящие от двух, трех и более аргументов. Например, площадь треугольника S, как мы знаем, зависит от длины его основания a и высоты h: $S=\frac{1}{2}ah$. Любой паре чисел (a,h) сопоставляется единственное число S. Говорят, что величина S является функцией двух аргументов, и пишут $S=f(a,h)=\frac{1}{2}ah$. Пара чисел (a,h) определяет двумерный вектор, т.е. S можно считать функцией от векторного аргумента.

Если стороны прямоугольного параллелепипеда равны x,y,z, то его объем $V=x\cdot y\cdot z$. Величина V является функцией трех аргументов x,y,z. Тройка чисел x,y,z определяет трехмерный вектор, т.е. V — также функция векторного аргумента.

В последних двух примерах переменному вектору сопоставлялось число. Возможны зависимости, когда либо числу сопоставляется вектор, либо вектору сопоставляется вектор. Например, в физике при описании движения точки $V(x,y,z)$ в пространстве каждую ее координату выражают как функцию времени t. Получаем векторную функцию $\overline{r}(t)$ числового (скалярного) аргумента t вида

$$\overline{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix}.$$

При описании векторных полей встречаются случаи, когда x,y,z являются функциями двух, трех и более аргументов. В общем случае вместо трех переменных x,y,z может быть любое их число — x_1, x_2, ..., x_m, вместо одной переменной t может быть любое число переменных — t_1, t_2, ..., t_n. Получаем зависимость самого общего вида

$$\overline{r}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\begin{bmatrix} x_1(t_1,t_2,\ldots,t_n) \\ x_2(t_1,t_2,\ldots,t_n) \\ x_m(t_1,t_2,\ldots,t_n) \end{bmatrix}.$$

Имеем векторную функцию векторного аргумента.

В математическом анализе изучают функции с самой общей точки зрения, отвлекаясь от конкретного содержания переменных величин.

Все понятия математического анализа строятся на основе множества R действительных чисел или множества R^n n-мерных векторов.

Определение. Пусть даны два множества: $X \subset R^n$ и $Y \subset R^m$. Если каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие по некоторому правилу f элемент y из множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y=f(x)$. Пишут $f\colon X \subset R^n \to Y \subset R^m$.

Эта краткая запись означает, что функция f определена на множестве X из R^n, а значения принимает на множестве Y из R^m.

При этом x называют независимой переменной (или аргументом) y-зависимой переменной. Множество X называют областью определения функции, а множество

$$\tilde{Y}=\{f(x), x\in X\}\subseteq Y,$$

состоящее из тех значений y, которые соответствуют хотя бы одному значению x из множества X, называется областью значений функции $y=f(x)$.

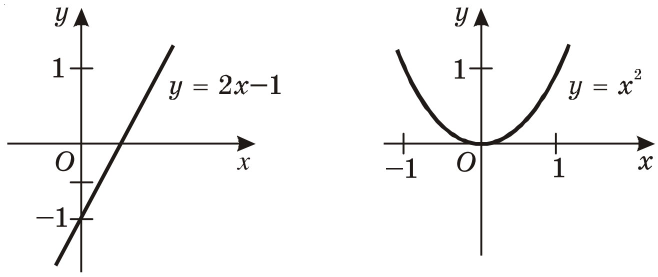
Как видим, чтобы задать функцию, нужно указать два множества — X и Y, и правило f. Иногда множество $X=\{x\}$ не указывают, а считают, что x может принимать все те значения, при которых зависимость $y=f(x)$ имеет смысл. Например, функция $y=\sqrt{(x-2)}+$ $+\sqrt{(5-x)}$ определена на отрезке [2;5], т.е. $2\le x\le 5$, так как по определению квадратного корня должно быть $x-2\ge 0$ и $5-x\ge 0$.

В зависимости от значений m и n различают функции одного аргумента и многих аргументов. Если $n=1$, т.е. X — подмножество множества R действительных чисел, то имеем функцию одного аргумента, если X — подмножество множества R^n, то имеем функцию $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от n аргументов x_1, x_2, ..., x_n. Функции этого вида наиболее часто встречаются в практических приложениях.

1.2. Понятие графика функции

Множество всех точек $(x, f(x))$ плоскости называют графиком функции $f : X \subset R \to Y \subset R$. В большинстве практически важных случаев графиком является некоторая кривая, но возможны ситуации, когда график состоит из отдельных точек.

Например, графиком функции $y = 2x - 1$ является прямая линия, графиком функции $y = x^2$ является парабола, симметричная относительно оси Oy.



Графиком функции $z = f(x,y)$ двух аргументов является множество всех точек $(x, y, f(x, y))$ пространства. Они могут описывать некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Например, точки графика функции $z = x^2 + y^2$ описывают поверхность, называемую эллиптическим параболоидом, а графиком функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ является верхняя половина сферы радиуса $R = 2$ с центром в начале системы координат.

Как известно из курса математики средней школы, функцию можно задать формулой ($y = x^3, y = \sqrt[4]{x^5}$ и др.), графически, в виде таблицы или в виде словесного описания.

1.3. Простейшие свойства функций

Отметим несколько наиболее часто встречающихся классов функций одного аргумента $f: X \subset R \to Y \subset R$.

Определение 1. Пусть область определения функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$. Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любых значений из области ее определения $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. Если ни одно из этих соотношений не выполняется, то функция $y = f(x)$ называется функцией общего вида.

Например, функции $y = x^2$, $y = \cos x$ — четные, $y = x^3$, $y = \sin x$ — нечетные, $y = x + x^2$, $y = \sin x + \cos x$ — общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

Определение 2. Функция называется монотонно убывающей (монотонно возрастающей) на множестве X, если для любых точек x_1 и x_2 из X, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$.

Если $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$, то функция называется строго монотонно убывающей (строго монотонно возрастающей) на множестве X.

Например, функция $y = \cos x$ строго монотонно убывает на интервале $(0, \pi)$ и строго монотонно возрастает на интервале $(\pi, 2\pi)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если множество Y ее значений ограничено, т.е. существует такое число $M > 0$, что для любых x из X выполняется $|f(x)| \leq M$. Если такого числа M не существует, то функция называется неограниченной.

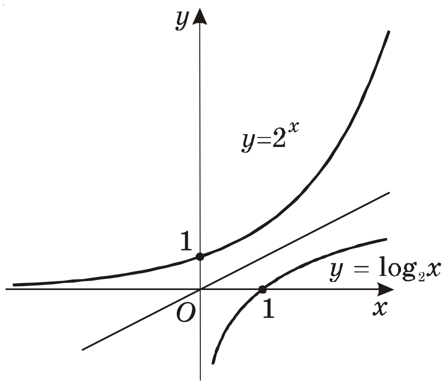
Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, поскольку при любом x справедливо неравенство $|\sin x| \leq 1$. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ на множестве $(0,1)$ является неограниченной, так как приближая x к нулю, можем получить значения y больше любого наперед заданного числа M, взяв $x < \dfrac{1}{M}$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что для всех x из области определения X следует, что $x + T \in X$ и $f(x + T) = f(x)$. Число T называется периодом функции. Наименьшее положительное число T, удовлетворяющее этим условиям, называется наименьшим периодом функции. Очевидно, что если T — период, то и nT также период при любом целом положительном n.

Например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ — периодические с наименьшим периодом $T = 2\pi$. Функции $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ также периодические с наименьшим периодом $T = \pi$.

1.4. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, а Y — множество ее значений. Поставим в соответствие каждому значению y из Y то единственное значение x из множества X, при котором $y = f(x)$.



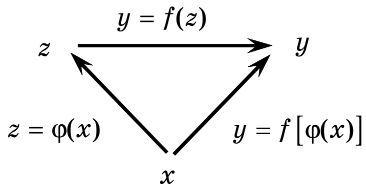
Мы получим функцию $x = \varphi(y)$, определенную на множестве Y, с множеством значений X. Функцию $x = \varphi(y)$ называют обратной к функции $y = f(x)$.

Например, функция $f(x) = a^x$ обратна к функции $\varphi(y) = \log_a y$ и наоборот.

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую — y. Поэтому функцию, обратную функции $y = f(x)$, записывают в виде $y = \varphi(x)$ или в виде $y = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.5. Сложная функция

Пусть задана функция $y = f(z)$, определенная на множестве Z, а переменная z является функцией от x — $z = \varphi(x)$, определенной на множестве X, со значениями, принадлежащими множеству Z.



Мы каждому значению x из X сопоставили значение y, т.е. определили y как функцию от x. Эту функцию обозначают $y = f\left[\varphi(x)\right]$ и называют сложной функцией от x. Переменную z иногда называют промежуточной. Промежуточных переменных может быть несколько: $y = f\left\{\varphi\left[t(x)\right]\right\}$. Например, $y = (\lg \sin x)^4$ есть сложная функция. Ее можно представить в виде $y = u^4$, $u = \lg t$, $t = \sin x$. В данном случае имеем две промежуточные переменные u и t.

Для функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно также ввести понятие сложной функции, т.е. функции аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые сами являются функциями одного или многих аргументов. Получаются функции вида

$$y(t) = f\left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right],$$

$$y = f(t_1, t_2, \ldots, t_m) =$$

$$= f\left[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m),\ x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m),\ \ldots,\ x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)\right].$$

При этом некоторые из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут оставаться независимыми, а другие — зависеть от различных наборов аргументов $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

1.6. Элементарные функции

Среди функций $y = f(x)$ выделяют класс основных элементарных функций, к которым относятся следующие:

1) степенная функция $y = x^{\lambda}$, где λ — любое действительное число. В общем случае ее область определения $(0,+\infty)$. При некоторых значениях λ область определения может быть шире, например функция $y = x^n$ (n — натурально) определена на всей оси;

2) показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ее область определения вся числовая ось. При $a > 1$ показательная функция строго монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — строго монотонно убывает;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ее область определения луч $(0,+\infty)$. Логарифмическая функция также является монотонной, убывающей или возрастающей в зависимости от значения a. При $a > 1$ она монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены на всей числовой оси, их область значений отрезок $[-1,+1]$. Функция $y = \mathrm{tg}x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, а функция $y = \mathrm{ctg}x$ определена при $x \neq k\pi$, где k — любое целое число;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$. Областью определения функций $y = \arcsin x$, и $y = \arccos x$ является отрезок $[-1,+1]$. Область значений функции $y = \arcsin x$ — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$, а функции $y = \arccos x$ — отрезок $[0,\pi]$. Функции $y = \mathrm{arctg}x$ и $y = \mathrm{arcctg}x$ определены на всей числовой оси. Областью значений первой из них является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$, а второй — $(0,\pi)$.

Функции, полученные из основных элементарных функций в результате конечного числа операций сложения, умножения и деления, а также конечного числа образования сложной функции, называются элементарными.

Например, функция $y = \dfrac{x^3 \mathrm{arctg}\sqrt{x}}{x + \sin^5 4x} - \sqrt[3]{\lg^5 x + 4}$ является элементарной, так как она получена из основных элементарных алгебраическими операциями и образованием сложной функции $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x},\ \sqrt[3]{\lg^5 x+4},\ \sin^5 4x\right)$.

В класс элементарных функций входят многочлены (полиномы): $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен степени n, где a_0, a_1, …, a_n — действительные числа, называемые коэффициентами многочлена, n — натуральное число. Часто применяются дробно-рациональные функции — отношение двух многочленов.

Упражнения

1. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$. Ответ: $[-1, +\infty)$;

б) $f(x) = \lg\dfrac{2+x}{2-x}$. Ответ: $(-2,2)$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$. Ответ: $(-\infty, -1] \vee [2, +\infty)$;

г) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$. Ответ: $[1,2]$;

д) $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$. Ответ: $(-\infty, +\infty)$.

2. Найдите область значений следующих функций:

а) $y = 2\sin x + 3\cos x$. Ответ: $\left[-\sqrt{13}, +\sqrt{13}\right]$;

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ответ: $(0,1]$.

3. Докажите, что функции

а) $f_1(x) = 2^{-x^2}$, $f_2(x) = x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ — четные;

б) $\varphi_1(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$, $\varphi_2(x) = \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$ — нечетные;

в) $\varphi_1(x) = \sin x - \cos x$, $\varphi_2(x) = (x-1)^2\cos^2 x$ — общего вида.

4. Даны функции: а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \sin x^2$; в) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; г) $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

Какие из них являются периодическими?

5. Найдите функцию, обратную к $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$.

Ответ: $y = \log_2\dfrac{x}{1-x}$.

6. Постройте графики всех основных элементарных функций.

1.7. Понятие последовательности

Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента

$$y = f(n),\ n = 1, 2, \ldots, k, \ldots$$

Вместо $f(n)$ обычно пишут $\{a_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, или $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют членами последовательности, функцию $f(n)$ при этом называют общим членом последовательности. Числа $1, 2, \ldots, n$ называют номерами членов последовательности, например, a_2 — второй член последовательности, a_3 — третий и т.д.

Примеры последовательностей:

1) $f(n)=a_n=\dfrac{1}{n}$; $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$; $\dfrac{1}{n}$ — общий член;

2) $f(n)=a_n=\dfrac{n-1}{n}$; $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \ldots$; $\dfrac{n-1}{n}$ — общий член;

3) $f(n) = a_n = \dfrac{1}{n^2}$; $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots, \dfrac{1}{n^2}, \ldots$; $\dfrac{1}{n^2}$ — общий член;

4) $f(n) = a_n = \sin n$; $\sin 1, \sin 2, \ldots, \sin n, \ldots$; $\sin n$ — общий член;

5) $f(n) = a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \ldots, \dfrac{n^2}{n+1}, \ldots$; $\dfrac{n^2}{n+1}$ — общий член;

6) $f(n)=a_n=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$; $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots, 1+\dfrac{(-1)^n}{n}, \ldots$; $1+\dfrac{(-1)^n}{n}$ — общий член.

Как и для функций $y = f(x)$, можно дать определения монотонных, монотонно убывающих, монотонно возрастающих, ограниченных, неограниченных последовательностей. В приведенных примерах последовательности 1, 2, 3 и 5 — монотонные, причем 1 и 3 — монотонно убывающие, 2 и 5 — монотонно возрастающие. Последовательности 4 и 6 монотонными не являются. Последовательности 1–4 и 6 ограничены, а 5 — не ограничена.

1.8. Предел последовательности

Замечаем, что члены последовательностей 1 и 3 с ростом номера n как угодно близко приближаются к нулю, мало от него отличаясь, а члены последовательностей 2 и 6 приближаются к единице. При этом величина разности $|a_n - 1|$ с ростом n уменьшается и становится близкой к нулю.

Слова «как угодно близко», «сколь угодно мало», «мало», «велико» лишены точного математического смысла. Все зависит от решаемых задач. Если из 100 гвоздей 10 не удовлетворяют стандарту, то это многовато, но, купив их, мы больших убытков не понесем, если же из 100 парашютов 10 не раскрываются, то это слишком много и недопустимо. По этой причине в математике всем этим понятиям даются точные определения. Рассмотрим, например, последовательность $f(n)=\dfrac{1}{n}$. Какое бы мы не взяли число $\varepsilon>0$ (даже очень маленькое), с ростом n члены последовательности станут меньше этого числа, достаточно взять $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. при $n>N$ справедливо $a_n<\varepsilon$. При $\varepsilon=0{,}01$ все члены последовательности, начиная с номера $n=101$, будут меньше 0,01; при $\varepsilon=0{,}001$ все члены последовательности с номерами больше 1000 будут меньше 0,001 и т.д. Это и означает, что члены последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ с ростом n «сколь угодно мало» отличаются от нуля. Число «0» называют пределом последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$. Аналогично можно показать, что члены последовательностей $a_n=\dfrac{n-1}{n}$, $a_n=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$ с ростом n сколько угодно мало отличаются от единицы, т.е. какое бы заранее не взять число $\varepsilon>0$, даже очень малое, с ростом n начнет выполняться неравенство $|a_n-1|<\varepsilon$. Число «1» называют пределом этих последовательностей. Дадим точное определение предела последовательности.

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N (зависящий от ε), что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Мы ранее, фактически, доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Не всякая последовательность имеет предел, например последовательность $a_n=1+(-1)^n$; $0, 2, 0, 2, 0, \ldots$ предела не имеет. С ростом n ее члены не приближаются ни к какому числу. Не имеет предела и последовательность $a_n=\sin n$. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

Существуют последовательности, обладающие следующим свойством: для любого числа $M > 0$ (даже сколько угодно большого) существует номер N такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|a_n| > M$. Для таких последовательностей полагают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Подобные последовательности считают расходящимися. Например, легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

1.9. Теоремы о пределе последовательности

Сформулируем без доказательства несколько теорем, характеризующих понятие предела.

Теорема 1. Всякая последовательность, имеющая конечный предел, ограничена.

Теорема 2. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 3. Пусть имеем три последовательности: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, причем $a_n \le b_n \le c_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Теорема 4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \ne \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \ne \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \quad b_n \ne 0, \quad B \ne 0.$$

Последняя теорема очень часто используется при отыскании предела.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

Решение: так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то, используя теорему 4, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Пример 2. Найти $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 7}$.

Решение: формальное применение теоремы 4 приведет к неопределенному выражению $\frac{\infty}{\infty}$, которое следует раскрыть. Для этого числитель и знаменатель поделим на n^2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+4}{n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}=0$, то по теореме 4 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+4}{n^2+7}=2.$$

Если функция $y=f(x)$ является основной элементарной, то справедливо утверждение

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right). \qquad (*)$$

Это утверждение верно и в более общем случае для класса непрерывных функций, который мы определим позднее (см. подразд. 1.19).

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

Решение: используя (*) и теорему 4, находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\sqrt{2}.$$

Пример 4. Найти $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2}-1}{16n+5}$.

Решение: поделим числитель и знаменатель на n. Получим $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}}{16+\frac{5}{n}}$. Далее применяем теорему 4 и формулу (*):

$$A=\frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(16+\frac{5}{n}\right)}=\frac{\sqrt[3]{8}}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

Пример 5. Найти:

а) $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 6n + 8} - n$;

б) $B = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 5n^2}$.

Решение: применение теоремы 4 в обоих случаях приводит к неопределенности вида $(\infty - \infty)$. Используем формулы:

$$(a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2;$$

$$(a-b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

известные из средней школы.

В примере (а) положим $a = \sqrt{n^2 + 6n + 8}$, $b = n$, умножим числитель и знаменатель на $a + b$. Получим

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+6n+8} - n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+8} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 6n + 8 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n + 8}{\sqrt{n^2 + 6n + 8} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{8}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^2}} + 1} = \frac{6}{1+1} = 3.$$

В примере (б) положим $a = \sqrt[3]{n^3 + 1}$, $b = \sqrt[3]{n^3 + 5n^2}$ и умножим числитель и знаменатель на $a^2 + ab + b^2$. Получим

$$B = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^3 + 1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{n^3 + 5n^2}\right)^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 1)\,(n^3 + 5n^2)} + \sqrt[3]{(n^3 + 5n^2)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 1 - n^3 - 5n^2}{\sqrt[3]{n^6 + 2n^3 + 1} + \sqrt[3]{n^6 + 5n^5 + n^3 + 5n^2} + \sqrt[3]{n^6 + 10n^5 + 25n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1/n^2\right) - 5}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + \sqrt[3]{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4}} + \sqrt[3]{1 + \frac{10}{n} + \frac{25}{n^2}}} =$$

$$= \frac{-5}{1+1+1} = -\frac{5}{3}$$ (числитель и знаменатель разделили на n^2).

Напомним правила действий с символом ∞, приведенные в первой части пособия, часто используемые при отыскании пределов:

$\infty \cdot C = \infty$ $(C \neq 0)$; $\dfrac{\infty}{C} = \infty$; $\infty \pm C = \infty$. Предлагается вспомнить также правила действий с символами «$-\infty$» и «$+\infty$». На основании этих операций находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(n \frac{n}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \infty \cdot \frac{1}{2} = \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 + \frac{n}{n+1}\right) = \infty.$$

Операции $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ являются неопределенными, они требуют дополнительных исследований.

Упражнения

1. Исходя из определения предела, докажите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n+3} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+4} = 0$.

2. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+5n^2+n+1}{n^3-2n+2}$. Ответ: 5;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Ответ: 0;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+2n^2+4}{n^3+5n^2+3}$. Ответ: ∞;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3-2n^2+1}{2n^3+6}\right)^4$. Ответ: $\dfrac{1}{16}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+5}-2}{\sqrt{18n+1}-3}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{n}\right)$. Ответ: ∞;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$. Ответ: $\dfrac{3}{2}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+4n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+6n^2+2}\right)$. Ответ: $-2/3$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. Ответ: 0.

1.10. Понятие числового ряда и его суммы

С помощью предела последовательности вводят понятие числового ряда, обобщающее понятие суммы на бесконечное число слагаемых. При этом обобщении не все свойства конечных сумм остаются справедливыми.

Пусть дана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

называется числовым рядом. Числа a_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ называют членами ряда, а функцию $f(n) = a_n$ — его общим членом. Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$ общий член $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}$. Зная общий член, легко найти значение любого члена ряда, например для данного ряда $a_8 = \dfrac{1}{65}$, $a_{11} = \dfrac{-1}{122}$ и т.д.

Пока выражение (1.1) лишено какого-либо смысла, так как неизвестно, каким образом найти сумму бесконечного числа слагаемых. Поступают следующим образом.

Определяют последовательность $\{S_n\}$:

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Число S_n называется n-й частичной суммой ряда (1.1). Говорят, что ряд сходится и что его сумма равна S, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{1.2}$$

Если же предел (1.2) не существует или равен ∞, то говорят, что ряд (1.1) расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots \tag{a}$$

Решение: если $q = 1$, то $S_n = 1+1+\ldots+1 = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд (а) при $q = 1$ расходится. Пусть $q \neq 1$. Тогда

$$S_n(1-q) = \left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)(1-q) =$$
$$= 1+q+\ldots+q^{n-1}-q-q^2-\ldots-q^n = 1-q^n.$$

Отсюда $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Отыскание $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ сводится к отысканию $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Нетрудно доказать, что этот предел существует и равен нулю при $|q| < 1$ и равен ∞ или не существует при $|q| > 1$. Таким образом, ряд (а) сходится к числу $S = \dfrac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Решение: можем записать $a_n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ и получить

$$S_1 = \ln 2,\ S_2 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3,\ \ldots,\ S_n = \ln(n+1).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то данный ряд расходится.

1.11. Признаки сходимости рядов

Ряды широко применяются в приближенных вычислениях, и при этом важен вопрос о сходимости ряда. Доказать сходимость или расходимость ряда исходя из определения в общем случае затруднительно. Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие упростить эту задачу. При их доказательстве используется следующий критерий Коши.

Теорема 1. Для того чтобы числовой ряд (1.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что неравенство $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ выполнялось бы при любых $n > N$ и любых $p \geq 1$.

Пример. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ расходится (этот ряд называется гармоническим).

Решение: для гармонического ряда находим $|S_{2n}-S_n|=$ $=\sum\limits_{m=n+1}^{2n}\frac{1}{m}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, т.е. $|S_{2n}-S_n|>\frac{1}{2}$, следовательно, для этого ряда не выполнен критерий Коши при $p=n$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Гармонический ряд расходится, но очень медленно. Так, разница между его частичной суммой S_{1000} и S_{1001} меньше одной миллионной, разница между S_{10000} и S_{10001} меньше одной стомиллионной. Но все же ряд расходится, хотя интуиция противится этому.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ называют обобщенным гармоническим. Можно доказать, что при $s>1$ он сходится, а при $s\le 1$ — расходится. Положив $s=1+\delta$, $\delta>0$, получим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ при $\delta>0$ даже очень малом. Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходятся как обобщенные гармонические при $s>1$.

Непосредственно из критерия Коши следует необходимый признак сходимости.

Теорема 2. Если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) лишь необходимо для сходимости ряда, но недостаточно. Так, для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ условие (1.3) выполнено, но этот ряд, как мы только что показали, расходится.

Если же условие (1.3) не выполнено, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0, \tag{1.4}$$

то ряд расходится. Условие (1.4) достаточно для расходимости ряда. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+10}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{10}{n}} = 1 \ne 0$$

(необходимый признак не выполнен).

1.12. Условная и абсолютная сходимость

Все сходящиеся ряды делят на два класса: абсолютно и условно сходящиеся.

Пусть дан ряд (1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Можем рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{1.5}$$

составленный из его модулей. Члены ряда (1.5) неотрицательны, так как $|a_n| \geq 0$.

Из критерия Коши следует, что если ряд (1.5) сходится, то сходится ряд (1.1). Обратное неверно, ряд (1.1) может сходиться, а (1.5) — расходиться. Если ряд (1.5) сходится, то говорят, что ряд (1.1) сходится абсолютно; если же ряд (1.1) сходится, а (1.5) расходится, то говорят, что ряд (1.1) сходится условно. Например, доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, но ряд, составленный из модулей его членов, совпадает с гармоническим, а потому расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ сходится условно.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают всеми свойствами конечных сумм. Для условно сходящихся рядов свойство конечных сумм «от перемены мест слагаемых сумма не изменяется», как показал Риман, не выполняется. Условно сходящиеся ряды не имеют большого практического значения.

1.13. Признаки абсолютной сходимости

Приведем несколько достаточных признаков абсолютной сходимости.

Теорема 1 (признак сравнения в конечной форме). Пусть даны два ряда: $A - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$|a_n| \leq |b_n|, \tag{1.6}$$

то из абсолютной сходимости ряда B следует абсолютная сходимость ряда A; если же ряд A абсолютно расходится, то абсолютно расходится и ряд B (при этом условная сходимость не исключается). Справедливость теоремы следует непосредственно из критерия Коши.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$.

Решение: очевидно, $\frac{1}{n^2+5} < \frac{1}{n^2}$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический при $s = 2 > 1$. По теореме 1 данный ряд сходится.

Заметим, что для рядов с положительными числами понятия абсолютной сходимости и сходимости совпадают. Такие ряды условно сходиться не могут.

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Если $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = K$ $(K \neq 0,\ K \neq \infty)$, то ряды A и B либо оба сходятся абсолютно, либо оба абсолютно не сходятся (возможно, сходятся условно либо расходятся).

Пример 2. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

Решение: возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0.$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ абсолютно не сходится.

Очень удобен в применении признак Даламбера.

Теорема 3 (признаки Даламбера и Коши). Если либо $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$ (признак Даламбера), либо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ (признак Коши), то при $q < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $q > 1$ — расходится.

При $q = 1$ признаки Даламбера и Коши ответа не дают.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение: данный ряд с положительными членами, поэтому $|a_n| = a_n$. Находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^n+1}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$.

Решение: применим признак Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1.$ По признаку Коши данный ряд расходится.

Имеется большое количество других более тонких достаточных признаков, на которых мы останавливаться не будем.

1.14. Знакочередующиеся ряды

Часто встречаются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,\ a_n > 0,$$

называемые знакочередующимися.

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $a_{n+1} < a_n$, и стремятся к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то этот ряд сходится.

Замечание: признак Лейбница не отвечает на вопрос о характере сходимости ряда. Чтобы выяснить сходится ли он абсолютно или условно, требуется исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение: так как $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то по признаку Лейбница данный ряд сходится. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то эта сходимость условная.

Упражнения

Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; г) $\sum\frac{n^2}{n^3+2n+1}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+4}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+4}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+5}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+1\right)(-1)^n}{n^4+2}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+100}$.

Ответ: а, г, д, е, и — расходятся; б, ж — сходятся условно; в, з — сходятся абсолютно.

1.15. Понятие окрестности точки

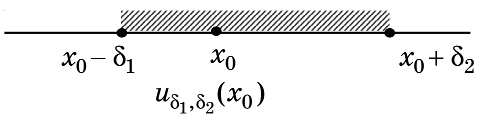
Важным понятием в теории пределов является понятие окрестности точки. Оно служит для точного математического описания таких неопределенных выражений, уже упоминавшихся нами, как «число A мало отличается от числа B», «расстояние между точками x и x_0 мало» и т.д.

Определение 1. Окрестностью конечной точки x_0 (числа x_0) действительной оси называется любой интервал (a,b), содержащий эту точку. Обозначать окрестность точки x_0 будем $u(x_0)$, т.е.

$$u(x_0) = (a, b) = (x_0 - \delta_1,\, x_0 - \delta_2),$$

где $a = x_0 - \delta_1$, $b = x_0 + \delta_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Эту же окрестность иногда обозначают $u_{\delta_1,\,\delta_2}(x_0)$. Окрестность $u_{\delta_1,\delta_2}(x_0)$ есть множество точек $\{x\}$, удовлетворяющих неравенствам $x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_2$.

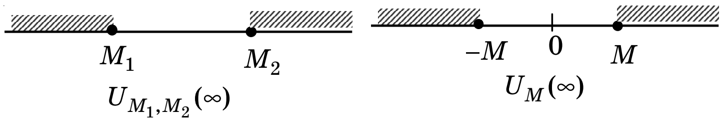


Если $\delta_1=\delta_2=\delta$, то окрестность называется симметричной и обозначается $u_\delta(x_0)$. Это множество точек, удовлетворяющих неравенству $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ или неравенству $|x-x_0|<\delta$.

Часто рассматриваются проколотые окрестности точки x_0. Это окрестность $u_{\delta_1,\delta_2}(x_0)$, из которой выброшена точка x_0. Обозначают проколотую окрестность $\overset{\circ}{u}_{\delta_1,\delta_2}(x_0)$. Если $\delta_1=\delta_2=\delta$, то имеем симметричную проколотую окрестность точки x_0. Ее обозначают $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$. Это множество точек $\{x\}$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$.

Мы рассмотрели окрестности конечной точки. Вводят понятие окрестности и для символа «∞».

Определение 2. Окрестностью бесконечно удаленной точки, т.е. символа «∞», называется внешность любого отрезка $[M_1, M_2]$. Обозначают $U_{M_1,M_2}(\infty)$. Симметричной окрестностью точки ∞ называют внешность отрезка $[-M; M]$, симметричного относительно начала координат. Обозначают $U_M(\infty)$.



Таким образом, согласно определению $U_{M_1,M_2}(\infty)$ — это множество точек $\{x\}$, удовлетворяющих неравенствам $x < M_1$ и $x > M_2$. Симметричную окрестность $U_M(\infty)$ можно задать неравенством $|x| > M$.

Для определения односторонних пределов введем понятие односторонних окрестностей следующим образом:

1) правосторонняя окрестность конечной точки x_0 — это множество $U_\delta^+(x_0) : x_0 < x < x_0 + \delta$;

2) левосторонняя окрестность конечной точки x_0 — это множество $U_\delta^-(x_0) : x_0 - \delta < x < x_0$;

3) правая окрестность символа «∞» — это множество $U_M(+\infty)$: $x > M$. Ее называют окрестностью символа «$+\infty$»;

4) левая окрестность символа «∞» — это множество $U_M(-\infty) : x < -M (M > 0)$. Ее называют окрестностью символа «$-\infty$».

Аналогично можно построить окрестности точек на плоскости и в пространстве. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка трехмерного пространства. Множество всех точек $\{M(x, y, z)\}$, удаленных от точки M_0 на расстояние d, меньшее δ, называют δ-окрестностью точки M_0 и обозначают $V_\delta(M_0)$. Если точку M_0 из окрестности $V_\delta(M_0)$ исключить, то окрестность называют проколотой и обозначают $\overset{\circ}{V}_\delta(M_0)$.

Определение 3. Точка x_0 называется предельной для множества X, если в любой ее окрестности имеются точки из X, отличные от x_0.

Предельная точка множества может как принадлежать множеству, так и не принадлежать. Например, точка $x_0 = 0$ является предельной для множества $(0,1]$, но не принадлежит ему. Остальные предельные точки принадлежат этому множеству. К предельной точке множества можно приблизиться как угодно близко, двигаясь по точкам этого множества.

1.16. Предел функции

Понятие предела функции является одним из важнейших в курсе математического анализа. На его основе вводится ряд других понятий: производной, дифференциала, интеграла, суммы ряда и др.

Дана функция $y = f(x)$ на множестве X, и x_0 — его предельная точка.

Определение 1. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 $(x \to x_0)$, если для любой окрестности $U(A)$ числа A существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всякой точки x, принадлежащей $\overset{\circ}{V}(x_0) \cap X$, выполняется $f(x) \in U(A)$. Записывают $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

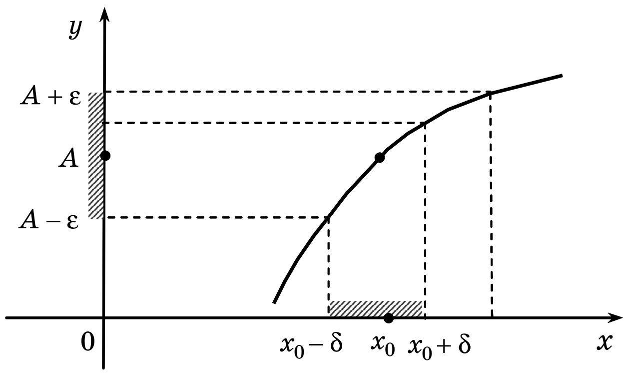
Вместо произвольных окрестностей $U(A)$ и $\overset{\circ}{V}(x_0)$ в определении 1 можно использовать симметричные окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$.

Определение 2. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для всякой симметричной окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A существует симметричная проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$ такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) \cap X$ имеет место $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Иногда окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$ задают в виде неравенств. Тогда определение 2 можно переписать в следующем виде.

Определение 3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Заметим, поскольку ε — любое, то оно может быть и очень малым.



Если в определениях 1, 2 и 3 брать окрестности $U_M(\infty)$, $U_M(-\infty), U_M(+\infty)$, $V_N(\infty), V_N(-\infty), V_N(+\infty)$, $V_\delta^+(x_0), V_\delta^-(x_0)$, то легко сформулировать определения для следующих пределов:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty, -\infty, +\infty;$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty} f(x) = A;$

3) $\lim\limits_{x\to\infty,-\infty,+\infty} f(x) = \infty, -\infty, +\infty;$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A, \infty, -\infty, +\infty;$

5) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A, \infty, -\infty, +\infty.$

Последние два предела называют односторонними. Предел 4 называется правым, а предел 5 — левым. Запись $x \to x_0 + 0$ означает, что x стремится к x_0 справа, оставаясь все время большим x_0 $(x > x_0)$, а запись $x \to x_0 - 0$ означает, что x приближается к x_0 слева, оставаясь все время меньшим x_0 $(x < x_0)$.

Чтобы доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, нужно взять любую малую окрестность точки A, например симметричную $U_\varepsilon(A)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, и найти множество $\{x\}$ тех значений x, для которых справедливо включение $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Если найденное множество является окрестностью точки x_0 (проколотой или нет), то утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ доказано; если это множество не является окрестностью x_0, то утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ несправедливо.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1.$

Для определенности будем считать, что $a > 1$. Берем любую малую окрестность $U_\varepsilon(1)$ точки 1 и находим множество $\{x\}$ значений x, для которых выполнено $a^x \in U_\varepsilon(1)$. Последнее означает, что $|a^x - 1| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < a^x - 1 < +\varepsilon$, $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$. Так как функция $\log_a x$ при $a > 1$ монотонно возрастает, то справедливо неравенство $\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$ при $\varepsilon < 1$. Поскольку $\log_a(1-\varepsilon) < 0$, а $\log_a(1+\varepsilon) > 0$, то неравенство $\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$ определяет множество $\{x\}$, являющееся окрестностью точки $x = 0$. Утверждение $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ при $a > 1$ доказано. Это утверждение легко доказать и при $0 < a < 1$, если учесть при этом, что функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ монотонно убывает.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} \neq 2.$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=2$, т.е. множество $\{x\}$ тех значений x, для которых $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon(2)$, при любом $x>0$ является окрестностью точки $x_0=1$, но $\dfrac{1}{x}\in U_\varepsilon(2)$ означает, что $-\varepsilon<\dfrac{1}{x}-2<\varepsilon$, $-\varepsilon+2<\dfrac{1}{x}<\varepsilon+2$. Можно считать все члены этого неравенства положительными, т.е. считать, что $0<\varepsilon<2$. Поэтому $\dfrac{1}{2+\varepsilon}<x<\dfrac{1}{2-\varepsilon}$. Но интервал $\left(\dfrac{1}{2+\varepsilon}<x<\dfrac{1}{2-\varepsilon}\right)$ при любом $\varepsilon>0$ не содержит точку $x_0=1$, т.е. найденное множество $\{x\}$ не является окрестностью точки $x_0=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}\neq 2$.

1.17. Определение предела функции на языке последовательностей (по Гейне)

Мы привели определение предела на языке окрестностей. Его в литературе называют определением Коши. Существует другое определение — на языке последовательностей (определение Гейне).

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Доказано, что определения Коши и Гейне эквивалентны, т.е. пределы, найденные в соответствии с этими двумя определениями, совпадают. Определения Коши и Гейне показывают, что непрерывный процесс можно достаточно точно описать дискретным процессом.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

Решение: возьмем две последовательности: $\{x_n\}=\{n\pi\}$ и $\{y_n\}=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right\}$. Предел каждой из них равен ∞, но $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$. По определению Гейне это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

В качестве упражнения докажите, что пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x+3y}{5x+4y}$ не существуют.

1.18. Теоремы о пределах

Во многих случаях отыскание предела можно упростить, пользуясь приведенными ниже теоремами.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел единственный.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_2$, то, взяв непересекающиеся окрестности $U_\varepsilon(A_1)$ и $U_\varepsilon(A_2)$, мы придем к противоречию. Должна существовать окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ такая, что для всех $x\in \overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется $f(x)\in U_\varepsilon(A_1)$ и $f(x)\in U_\varepsilon(A_2)$, что невозможно.

Таким образом, предел не зависит от способа его отыскания.

Теорема 2. Функция $f(x)$, имеющая конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$.

Доказательство. Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ такая, что для всех x из этой окрестности справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, или $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. Это и означает ограниченность функции $f(x)$.

Теорема 3. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=B$, то существуют и следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)] = A+B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A}{B}$ (при $B \neq 0$).

Докажем, например, утверждение 1. Можем записать, пользуясь свойством модулей:

$$|f(x)+\varphi(x)-(A+B)| = |f(x)-A+\varphi(x)-B| \leq |f(x)-A| + |\varphi(x)-B|. \quad (1.7)$$

Из определения предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$, для всех точек x которой выполняются неравенства $|f(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\varphi(x)-B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Внося эти неравенства в (1.7), получаем $|f(x)+\varphi(x)-(A+B)| < \varepsilon$, что и означает справедливость утверждения 1 теоремы.

Теорема 3 широко применяется при отыскании пределов.

Пример 1. Найти $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^4 + 2x^3 - 14}{5x^4 + x^3 + x^2 + 1}$.

Решение: имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поделим числитель и знаменатель на x^4. Получим $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7 + \frac{2}{x} - \frac{14}{x^4}}{5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$. Применяем теорему о пределе частного и суммы и, учитывая, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{14}{x^4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, находим $A = \dfrac{7}{5}$.

Пример 2. Найти $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 15x + 12}$.

Решение: непосредственное применение теоремы о пределе частного невозможно, так как это приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$, поскольку числитель и знаменатель при $x = 1$ обращаются в нуль. Напомним, что в определении предела при $x \to x_0$ величина x значения x_0 не принимает. В нашем примере $x \neq 1$, а потому $x - 1 \neq 0$. Разлагаем числитель и знаменатель на множители, получаем

$A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{3(x-1)(x-4)}$. Поделим числитель и знаменатель на величину $x-1$, отличную от нуля. Тогда $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{3(x-4)}=\dfrac{2}{9}$. В данном случае применили теорему о пределе частного.

Сформулируем без доказательства несколько интуитивно ясных теорем о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема 4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ и в некоторой точке x_0 выполнено неравенство $f(x)\le\psi(x)\le\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$ существует и равен A.

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x)\le\varphi(x)$ и существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то $A\le B$.

Теорема 6. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x)\le B$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то $A\le B$.

1.19. Непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и x_0 — его предельная точка. Предположим, что $x_0\in X$, т.е функция $f(x)$ определена в точке x_0. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$. В этом случае имеет место

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)=f(x_0). \tag{1.8}$$

В случае непрерывных функций отыскание пределов значительно упрощается. Доказано, что все элементарные функции непрерывны в области их определения. Напомним, что класс элементарных функций состоит из функций, полученных из основных элементарных путем образования сложных функций. Для сложной непрерывной функции $y=f\left[\varphi(x)\right]$ правило (1.8) можно переписать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right]. \qquad (1.9)$$

Используя это правило, легко находим:

$$\lim_{x\to\pi/2} \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\lim_{x\to\pi/2}(1+\sin x)} = \sqrt{2};$$

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x+2} = \operatorname{arctg} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{x+2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

и т.д.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Зафиксируем как-либо $x = x_0$ из области определения X и перейдем в другую точку x. Разность $x - x_0 = \Delta x$ называют приращением аргумента x при переходе из точки x_0 в точку x. Разность $\Delta f = \Delta y = f(x) - f(x_0)$ называют приращением функции при переходе из точки x_0 в точку x. Для непрерывных функций малое приращение аргумента вызывает также малое приращение функции. Это характерно для эволюционного пути развития процесса без резких скачков.

Если даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, то можно рассмотреть функции $\varphi_1(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\varphi_2(x) = f(x)\cdot g(x)$; $\varphi_3(x) = f(x) - g(x)$; $\varphi_4(x) = f(x)^{g(x)}$.

Пусть x_0 — предельная точка множества X определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ непрерывны в точке x_0, то никаких проблем при отыскании пределов от этих функций не возникает. Просто нужно заменить x на x_0. Если же непрерывность нарушается, то могут возникнуть неопределенные выражения типа $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 в зависимости от значения пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (x_0 может быть и ∞, $-\infty$, $+\infty$). Одна из важных задач теории пределов — научиться раскрывать эти неопределенности, т.е. предсказывать, чем завершится тот или иной процесс. Выражения потому и называют неопределенными, что в пределе может получиться или 0, или ∞, либо некоторые числа, отличные от нуля.

1.20. Точки разрыва функции и их классификация

Будем применять понятие односторонних пределов — правого и левого. Их определяют с помощью правой $V_\delta^+(x_0)$ или левой $V_\delta^-(x_0)$ полуокрестностей. Рассмотрим пример.

П р и м е р 1. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$. Найти ее правый и левый пределы при $x\to 1$. Как мы уже отмечали, их обозначают $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ соответственно.

Решение: из определения модуля следует, что

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ если } x\ge 1; \\ -(x-1), \text{ если } x<1. \end{cases}$$

Поэтому при $x>1$ $\lim\limits_{x\to 1+0}=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(x-1)(x-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$; при $x<1$ $\lim\limits_{x\to 1-0}=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\left[-(x+1)\right]=-2.$

Как видим, функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ имеет в точке $x=1$ правый и левый пределы, но они не равны. Предел $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не существует.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, также равные A, и обратно, если существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, равные A, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке x_0 справа, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, и слева, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Из теоремы следует, что для непрерывной функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x-0} f(x)=f(x_0). \tag{1.10}$$

Предельные точки области определения X функции $f(x)$, в которых нарушаются равенства (1.10), называют точками разрыва функции.

Классифицируют разрывы в зависимости от характера нарушения условия (1.10) следующим образом.

1. Правый и левый пределы существуют и равны, но не равны значению функции в точке x_0. При этом функция в точке x_0 или не определена, или определена, но $f(x_0)$ не совпадает с общим правым и левым пределами. Такой разрыв называют устранимым. Его можно «устранить», доопределив или переопределив значение функции в точке x_0.

Пример 2. Охарактеризовать точку $x_0 = 3$ для функции $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$.

Решение: областью определения этой функции является множество $X = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$. При $x = 3$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, т.е. $f(x)$ в точке $x_0 = 3$ не определена, но эта точка предельная для множества X. Поэтому точка $x_0 = 3$ является точкой разрыва. Находим

$$\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{3-1}{3-2}=2,$$

т.е. правый и левый пределы существуют и равны, но не равны значению $f(3)$, которое не определено. Если положить $f(3) = 2$, то новая полученная функция в точке $x_0 = 3$ разрыва иметь не будет.

2. В точке x_0 существуют конечные правый и левый пределы, не равные между собой. Этот разрыв называют разрывом первого рода (разрыв типа скачка). Примером может служить точка $x_0 = 1$ для функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, рассмотренной в примере 1.

3. Один или оба односторонних предела при $x \to x_0$ не существуют или обращаются в ∞. Разрыв этого типа называют разрывом второго рода. Например, для функции $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-4)(x-3)}$ точка $x_0 = 4$ является точкой разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 4\pm 0} f(x)=\infty$. Точка $x_0 = 0$ для функции $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ также точка разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

1.21. Замечательные пределы

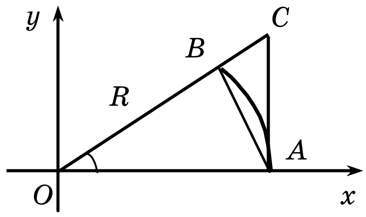
Некоторые пределы ввиду их важности получили специальные названия. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ называют первым замечательным, каждый из пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ называют вторым замечательным.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Подчеркнем, что x здесь измеряется в радианах. Предварительно докажем неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{1.11}$$

С этой целью рассмотрим треугольники OAB, OAC и сектор OAB в круге радиуса R, их площади обозначим S_1, S_2 и S_3 соответственно. Очевидно, $S_1 < S_3 < S_2$. Если x — радианная мера угла OAB, то это означает, что

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x.$$



После деления на $\dfrac{1}{2}R^2$ получаем неравенство (1.11). Поделим все части неравенства (1.11) на величину $\sin x > 0$, получим $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{x}{\cos x}$, или $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, по теореме 4 из подразд. 1.18 получаем $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Так как $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}$, то и $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\right)^2\cdot 4^2=16.$

Пример 3.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\left\{\begin{array}{l} y=\arcsin x,\quad x=\sin y, \\ \text{если } x\to 0,\ \text{ то и } y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin y}{y}}=1.$

Подчеркнем, что в первом замечательном пределе раскрывается неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Докажем существование конечного предела последовательности $\{x_n\}$, где $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Предварительно покажем, что эта последовательность ограничена и монотонно возрастает. Применим формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}b^n.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos}{x^2}$

Полагая в ней $a=1$, $b=\dfrac{1}{n}$, получаем

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{1.12}$$

Аналогично находим

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \tag{1.13}$$

Сравнивая (1.12) и (1.13), видим, что $x_n < x_n + 1$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Так как $\dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-1}}$ при $k > 2$, то

$$x_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - 1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

(использована формула суммы n членов геометрической прогрессии).

Видим, что $2 < x_n < 3$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена. По теореме 2 из подразд. 1.9 она имеет конечный предел. Его обозначают буквой e и называют числом Эйлера. Число e трансцендентно, $e \approx 2{,}7182818285\ldots$

Используя определение предела на языке последовательностей, можно доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Число e часто принимают за основание логарифма. Обозначают $\log_e a = \ln a$, и этот логарифм называют натуральным. Функция $y = e^x$ называется экспонентой, а обратная к ней обозначается $y = \ln x$. С помощью экспоненты вводят так называемые гиперболические функции:

$\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус;

$\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

$\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ — гиперболический тангенс;

$\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ — гиперболический котангенс,

и обратные к ним: $\mathrm{Arch}x$, $\mathrm{Arsh}x$, $\mathrm{Arth}x$, $\mathrm{Arcth}x$.

Гиперболические функции широко применяются в различных областях, особенно при построении неевклидовых геометрий.

Подчеркнем, что во втором замечательном пределе раскрывается неопределенность вида 1^∞.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{5n}\right)^{n+1}$.

Решение: так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n}=0$, то имеем неопределенность 1^{∞}. Можем записать

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5n}(n+1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}}=e^{\frac{1}{5}}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+4}$.

Решение: так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)=1$, то также имеем неопределенность 1^{∞}. Сведем ее ко второму замечательному пределу следующими приемами:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+6}{2n+3}-1\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n+3}\right)^{n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{3}}\right]^{\frac{3(n+4)}{2n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+4)}{2n+3}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2+4}{x+6}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

Решение: поскольку $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+6}=1$, а $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\infty$, то имеем неопределенность 1^{∞} и сводим ее ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+4}{x+6}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x^2+4}{x+6}-1\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x^2-x-2}{x+6}-1\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x^2-x-2}{x+6}\right)^{\frac{x+6}{x^2-x-2}}\right]^{\frac{x^2-x-2}{(x+6)(x^2-4)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x+6}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+6)(x-2)(x+2)}}=e^{\frac{3}{32}}.$$

Следствиями второго замечательного предела являются следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ $(\mu=\text{const})$.

Докажем, например, предел 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $\log_a x$. Пределы 1—5 применяют для вывода формул производных от некоторых функций.

1.22. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Среди всех функций выделяют два класса — бесконечно малые и бесконечно большие функции, часто применяемые в теоретических и прикладных задачах. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, и бесконечно большой, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, -\infty, +\infty$. Например, функция $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ является бесконечно малой при $x\to 2$ и бесконечно большой при $x\to 3$.

Непосредственно из определения бесконечно малых и бесконечно больших функций следует, что если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x\to x_0$, то функция $\beta(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая при $x\to x_0$, и наоборот. По этой причине достаточно изучить одну из них, например бесконечно малую функцию. Остановимся более подробно на бесконечно малых функциях, сыгравших большую роль в становлении математического анализа и его приложений.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых функций.

Теорема 1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x\to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ на функцию $f(x)$, ограниченную в окрестности x_0, есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, и обратно, т.е. функция отличается от своего предела на бесконечно малую величину.

Бесконечно малые функции сравнивают между собой по скорости их стремления к нулю. Пусть даны бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$. Они называются сравнимыми, если существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Говорят, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, и что они имеют одинаковый порядок малости, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ $(C \neq 0, C \neq \infty)$. Если $C = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными. Пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Говорят, что бесконечно малая функция $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C$ $(C \neq 0, C \neq \infty)$, при этом бесконечно малую $\gamma(x) = C[\beta(x)]^k$ называют главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$. Обычно в качестве эталонной бесконечно малой функции при $x \to x_0$ принимают $\beta(x) = x - x_0$ и с ней сравнивают все остальные. При $x \to \infty$ в качестве эталонной принимают $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$.

В приближенных вычислениях, а также при отыскании пределов широко применяется понятие эквивалентности. Легко доказать, что если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \tag{1.14}$$

При этом полезна следующая таблица эквивалентных бесконечно малых функций, где через $\alpha(x)$ обозначена бесконечно малая функция при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, $\pm\infty$:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $\log_a[1 + \alpha(x)] \sim (\log_a e)\alpha(x)$;

6) $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$; 7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$;

8) $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$; 9) $[1+\alpha(x)]^{\mu}-1 \sim \mu\alpha(x)$;

10) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$; 11) $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\alpha^2(x)$.

Справедливость соотношений 1—11 следует из замечательных пределов и их следствий.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\ln(1+2x)}$.

Решение: согласно таблице эквивалентных бесконечно малых $\sin 8x \sim 8x$, $\ln(1+2x) \sim 2x$ при $x\to 0$. Поэтому, используя формулу (1.14), получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{2x}=4$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{e^{4x}-1}$.

Решение: так как $\sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}\left(x+x^2\right) \sim \dfrac{1}{2}x$, $e^{4x}-1 \sim 4x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1/2)\,x}{4x}=\frac{1}{8}.$$

Совершенно аналогично сравниваются и бесконечно большие функции, только вместо порядка малости вводят понятие порядка роста. Говорят, что бесконечно большая функция $f(x)$ при $x\to x_0$ имеет порядок роста m относительно бесконечно большой функции $\varphi(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{[\varphi(x)]^m}=K$, $K\neq 0$, $K\neq\infty$, при этом если $m=1$, то говорят что бесконечно большие функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют равные порядки роста.

Изучая числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, мы показали, что необходимым условием их сходимости является равенство $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (см. теорему 2 из подразд. 1.11), т.е. функция $f(n)=a_n$ должна быть бесконечно малой при $n\to\infty$. Теперь признак сравнения в предельной форме (теорема 2 из подразд. 1.13) можно сформулировать иначе: для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился абсолютно, достаточно, чтобы его общий член $|a_n|$ был бесконечно малой функцией порядка выше первого относительно бесконечно малой $\beta(n)=\dfrac{1}{n}$ при $n\to\infty$. Так, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ сходится абсолютно, так как порядок малости функции $\alpha(n)=\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ при $n\to\infty$ равен $3/2$ относительно $\beta(n)=\dfrac{1}{n}$, т.е. больше 1.

Мы изучили понятия предела и непрерывности для функций $y = f(x)$ одного аргумента. Аналогично определяются эти понятия и для функций $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многих аргументов. Вместо окрестностей $V_\delta(x_0)$, $\overset{o}{V}\delta(x_0)$ нужно брать окрестности $V_\delta(M_0)$, $\overset{o}{V}\delta(M_0)$ точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

В заключение подраздела приведем некоторые теоремы о свойствах функций, непрерывных на множестве $[a,b]$.

Теорема 4 (о промежуточных значениях функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для всякого числа C, заключенного между A и B, существует такая точка $t\in[a,b]$, что $f(t)=C$.

В частности, если числа A и B имеют разные знаки, то на (a,b) обязательно существует корень уравнения $f(x)=0$. Это свойство часто используется для приближенного отыскания корней уравнений вида $f(x)=0$.

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция ограничена.

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция принимает на $[a,b]$ свои наибольшее и наименьшее значения.

Упражнения

1. Исходя из определения предела, докажите, что

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$; в) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

2. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x+1}{6x^4+5x^3+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{x^3+x^2+7}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{16x^6+5}}{x^3}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{16x^6+5}}{x^3}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$;

з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$.

Ответ: а) 4; б) 27; в) $\dfrac{1}{2}$; г) 0; д) –3; е) 5; ж) $\dfrac{1}{4}$; з) $-\dfrac{1}{12}$.

3. Применяя первый замечательный предел, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin10x}{\sin2x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin3(x-2)}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin4x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-\cos3x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Ответ: а) 3; б) 5; в) 3; г) 4; д) 2; е) $\dfrac{1}{4}$; ж) $-\dfrac{7}{2}$; з) $\dfrac{1}{2}$.

4. Применяя второй замечательный предел, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x-3}{4x-18}\right)^{\frac{2}{5-x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{5x^2-2x+1}\right)^{4x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin^2 4x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ответ: а) $e^{3/2}$; б) e^6; в) e^{-1}; г) e^3; д) $e^{8/5}$; е) 1.

5. Применяя следствия из второго замечательного предела, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{5x}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+2\sin^2x\right)}{\operatorname{tg}^2x}$; д) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+5}{x-3}\ln\dfrac{4x-1}{2x+5}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{e^{\sin2x}-1}$.

Ответ: а) 4; б) $5\ln2$; в) $\dfrac{3}{5}$; г) 2; д) $\dfrac{16}{11}$; е) 2.

6. Найдите и охарактеризуйте точки разрыва для следующих функций:

а) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-4} + \sin\dfrac{4-x^2}{x^2-2x}$; б) $f_2(x) = \dfrac{\sin(x+2)}{\left|x^2-4\right|} + \dfrac{\operatorname{tg}x}{5x}$.

Ответ: а) –210221; б) –210У22. Рядом с точкой разрыва указан ее характер 1; 2; У.

7. Найдите порядок малости функции $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ в следующих случаях:

а) $\alpha(x)=\left(x^3-1\right)\sin^2\left(x^2-1\right)$, $\beta(x)=x-1$, $x\to 1$;

б) $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos 3(x-2)}{\sqrt{3-x}-1}$; $\beta(x)=x-2$; $x\to 2$;

в) $\alpha(x)=\sqrt[4]{x-3}\,\operatorname{tg}\left(x^2-9\right)$, $\beta(x)=x-3$, $x\to 3$;

г) $\alpha(x)=\sin\dfrac{x+1}{x^3+1}\cdot\ln\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\to\infty$.

Ответ: а) 3; б) 1; в) $5/4$; г) 4.

8. Пользуясь методом замены бесконечно малых функций эквивалентными, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{4(x-1)}-1}{\ln\left[1+\operatorname{tg}2(x-1)\right]}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin 3(x-2)}{\operatorname{arctg}4\left(x^2-4\right)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x+\arcsin^2 x}{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Ответ: а) 4; б) 2; в) $\dfrac{3}{16}$; г) $\dfrac{3}{2}$; д) $\dfrac{1}{4}$; е) $\dfrac{1}{8}$.

1.23. Понятие функционального ряда и его области сходимости

В отличие от числовых рядов членами функциональных рядов являются функции $y_n = f_n(x)$.

Пусть каждому натуральному числу n поставлена в соответствие функция $f_n(x)$. Получаем последовательность

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{1.15}$$

называемую функциональной. Предполагается, что все функции в (1.15) имеют общую часть X из областей определения.

Символ вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.16}$$

называется функциональным рядом. Зафиксируем точку $x = x_0$ из множества X. В результате получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0). \tag{1.17}$$

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (1.16) сходится в точке x_0 и расходится, если (1.17) расходится. Множество D всех точек $\{x\}$, в которых ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда. Очевидно, что $D \subseteq X$. Как видим, функциональный ряд — это обобщение понятия суммы функций на бесконечное число слагаемых. Каждому числу x из области D можно сопоставить число, являющееся суммой числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Получившаяся функция $S(x)$ называется суммой функционального ряда.

Для отыскания области сходимости функционального ряда применяют достаточные признаки сходимости числовых рядов, приведенные в подразд. 1.13.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{(n+1)x^{n-1}}$.

Решение: применим признак Даламбера (см. теорему 3 из подразд. 1.13):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+2}2^{n+1}\right|}{|n+2|\left|x^n\right|} : \frac{\left|(-1)^{n+1}2^n\right|}{|(n+1)|\left|x^{n-1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)|x|^{n-1}}{(n+2)|x|^n\, 2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)|x|} = \frac{2}{|x|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{|x|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2}{|x|}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится и притом абсолютно, если $\dfrac{2}{|x|} < 1$, т.е. если $|x| > 2$. Этому неравенству удовлетворяют все точки множества $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Если же $\dfrac{2}{|x|} > 1$, т.е. если $|x| < 2$, то по признаку Даламбера ряд расходится. Осталось рассмотреть условие $\dfrac{2}{|x|} = 1$, так как в этом случае признак Даламбера ответа не дает. Точки $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ исследуем отдельно. При $x_1 = 2$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(n+1)2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n+1}.$$

Получили знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница (см. теорему в подразд. 1.14). При $x_2 = -2$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} 2^n}{(n+1)(-2)^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} 2^n}{(-1)^{n-1}(n+1)2^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n+1}$. Так как $\dfrac{2}{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n+1}$ также расходится, а следовательно, и функциональный ряд в точке $x_2 = -2$ расходится. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является множество $(-\infty, -2) \cup [2; +\infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$.

Решение: члены данного ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 3x$. Как мы показали в примере 1 в подразд. 1.10, такой ряд сходится при $|q| < 1$, т.е. при $|3x| < 1$, или если $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Ряд расходится, если $|3x| \geq 1$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Определить сумму функционального ряда можно тем же способом, что и сумму числового ряда. Образуем последовательность функций $\{S_n(x)\}$:

$$\begin{aligned}
&S_1(x) = f_1(x),\\
&S_2(x) = f_1(x) + f_2(x),\\
&S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).
\end{aligned}$$

Функция $S_n(x)$ называется n-й частичной суммой функционального ряда. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, то функция $S(x)$ называется суммой ряда.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}x^{n-1}$.

Решение: $S(x) = \dfrac{1}{1-3x}$ при $|x| < \dfrac{1}{3}$ как сумма членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3x$.

Пример 4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|}{\left(1+|x|\right)^n}$.

Решение: данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+|x|} < 1$ при $x \neq 0$. При $x = 0$, очевидно, $S(0) = 0$; если $x \neq 0$, то $S(x) = \dfrac{|x|/\left(1+|x|\right)}{1-\dfrac{1}{1+|x|}} = 1$. Следовательно,

$$S(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$$

т.е. сумма бесконечного числа непрерывных функций оказалась функцией разрывной.

1.24. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{1.18}$$

где a_n, x_0 — константы, называется степенным. При $x = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1.19}$$

От ряда (1.18) к ряду (1.19) можно перейти, сместив начало координат в точку $x = x_0$. Поэтому степенные ряды изучают в форме (1.19). Числа a_n называют коэффициентами степенного ряда. Найдем область сходимости ряда (1.19), применяя признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\,|x|$. Предположим, что существует

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=r$, конечный или бесконечный. Тогда по признаку Даламбера ряд сходится и притом абсолютно при $r|x|<1$, т.е. при $|x|<\dfrac{1}{r}$, или в интервале $\left(-\dfrac{1}{r},\dfrac{1}{r}\right)$. Если обозначить $\dfrac{1}{r}=R$, то получим интервал $(-R, R)$. При $|x|>R$ ряд расходится также по признаку Даламбера. При $r=\infty$ получаем $R=0$, и ряд (1.19) сходится только в точке $x=0$. Такие ряды называют расходящимися всюду. Если же $r\neq\infty, r\neq 0$, то областью сходимости является интервал $(-R, R)$. В точках $x=\pm R$ ряд (1.19) может как сходиться, так и расходиться, поэтому нужны дополнительные исследования. При $r=0$ ряд сходится на всей числовой оси, так как $R=\infty$. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. Для всякого степенного ряда, не являющегося расходящимся всюду, существует такое число R, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ — расходится.

Для частного случая, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, теорема доказана выше. Число R называют радиусом сходимости ряда.

Как видим, радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{1.20}$$

если этот предел существует.

Если предел (1.20) не существует, то таким методом определить величину R не удается.

Пример. Найти радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

Решение:

а) по формуле (1.20) находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1;$$

б) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+2) = \infty$, т.е. ряд сходится на всей числовой оси;

в) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, т.е. ряд сходится только в точке $x = 0$.

Можно доказать, что сумма степенного ряда непрерывна внутри интервала его сходимости.

Степенные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. В следующем разделе мы покажем, что многие функции можно представить в виде суммы степенного ряда.

Упражнения

1. Найдите суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{x}\right)^{n-1}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{1-2x}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{x}{x-3}$, $|x| > 3$.

2. Найдите область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x-2)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n2^n}{(n+1)\left(3x^2+8x+6\right)^n}$.

Ответ: а) $(-\infty;1)\cup(3,+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;-2)\cup\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

3. Найдите радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{8}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(n^2+n\right)x^{n-1}}{3^{n+1}}$.

Ответ: а) 1; б) 2; в) 3.

2. Дифференциальное исчисление

2.1. Дифференцируемые функции. Производная и дифференциал

Наиболее простыми функциями являются линейные. Такие функции в случае n переменных имеют вид

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_n\ x_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы. Если обозначить

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n],\ \ X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T,$$

то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot X$ по правилу умножения матриц.

Для функции одного аргумента линейная функция имеет вид $y = ax$ ($a = \text{const}$). Основной задачей дифференциального исчисления является приближенное представление функций в виде линейной зависимости в окрестности заданной точки. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1 (задача о теплоемкости). Количество тепла $Q(t)$, которое требуется, чтобы нагреть 1 г вещества от 0 до t градусов, является нелинейной функцией, вид которой, как правило, неизвестен. Но в большинстве практически важных задач величину $\Delta Q(t) = Q(t) - Q(t_0)$ — количество тепла, требуемого для нагревания тела от температуры t_0 до t, — можно представить в виде

$$\Delta Q(t) = Q(t) - Q(t_0) = C \cdot \Delta t + \alpha \Delta t, \tag{а}$$

где $\Delta t = t - t_0$; C — постоянный множитель; α — бесконечно малая функция при $t \to t_0$. При малых Δt вторым слагаемым пренебрегают и получают приближенную формулу

$$\Delta Q(t_0) = C \cdot \Delta t = C(t - t_0). \tag{б}$$

Коэффициент C называется удельной теплоемкостью вещества при $t = t_0$. Таким образом, нелинейная зависимость (а) заменена приближенно линейной функцией (б). Говорят, что проведена линеаризация функции $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$.

Пример 2 (задача о силе тока). Пусть $Q(t)$ — количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за время t. Тогда разность $\Delta Q(t_0) = Q(t) - Q(t_0)$ определяет количество электричества, протекающего за промежуток времени Δt от t_0 до t. И в этом случае, как и в задаче с теплоемкостью, можно записать соотношение (а) и приближенное равенство (б): $Q(t) - Q(t_0) = J(t - t_0) = J \cdot \Delta t$.

Константу J называют силой тока в момент времени $t = t_0$.

В дифференциальном исчислении выясняют, для каких функций возможна линеаризация и как найти при этом линейную часть.

Пусть на промежутке (a,b) задана функция $y=f(x)$ и x_0 — любая фиксированная точка из (a,b), а x — любая другая точка из (a,b). Обозначим $x-x_0=\Delta x$, $f(x)-f(x_0)=\Delta f$. Как мы уже отмечали, величину Δx называют приращением аргумента, а Δf — приращением функции при переходе из точки x_0 в x.

Функция $f(x):(f: X\subset R\to Y\subset R)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такая линейная функция ax, что имеет место равенство

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=a(x-x_0)+\left|(x-x_0)\right|\alpha, \tag{2.1}$$

где a — константа; α — бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Соотношение (2.1) можно переписать в виде

$$\Delta f=a\cdot\Delta x+\alpha\left|\Delta x\right|. \tag{2.2}$$

Константу a называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $a=f'(x_0)$. Слагаемое $a\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x$ обозначают df и называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. При этом часто полагают $\Delta x=dx$ и пишут $df=f'(x_0)dx$. Теперь соотношение (2.2) можно записать в виде

$$\Delta f=df+\alpha\left|\Delta x\right|. \tag{2.3}$$

При $\Delta x\to 0$ величины Δf и df — эквивалентные бесконечно малые, причем df является главной частью приращения функции Δf. При малых Δx можно положить $\Delta f\approx df$.

Поделим обе части равенства (2.2) на Δx и перейдем к пределу. Получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}(a\pm\alpha)=a=f'(x_0),$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$ по определению дифференцируемой функции. Таким образом, производная равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Величина $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ равна средней скорости изменения функции на участке Δx, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ означает мгновенную скорость изменения функции в точке x_0. В этом заключается механический смысл производной. Из курса математики средней школы известно, что производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке x_0 и осью Ox.

Если $f(x) = C$ (константа), то $\Delta f = 0$, а потому и $C' = 0$. Производная от константы равна нулю. Наряду с обозначением производной $f'(x_0)$ применяется обозначение $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в любой точке $x = x_0$ и найти $f'(x_0)$.

Решение: пусть $x = x_0 + \Delta x$, тогда

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2,$$
$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x.$$

Мы пришли к соотношению вида (2.2), причем $a \cdot \Delta x = 2x_0\Delta x$, $\alpha = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это и означает, что функция $f(x) = x^2$ дифференцируема и $a = f'(x_0) = 2x_0$.

Аналогично вводится понятие дифференцируемости для функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ограничимся случаем $n = 3$ для функции $u = f(x,y,z)$. Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и возьмем любую другую точку $M(x,y,z)$. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, $\Delta u = f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)$.

Функция $u = f(x,y,z)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если справедливо равенство

$$\Delta u = a_1\Delta x + a_2\Delta y + a_3\Delta z + \alpha, \tag{2.4}$$

где a_1, a_2, a_3 — константы; α — величина бесконечно малая при $M \to M_0$ порядка выше первого относительно бесконечно малой $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Величина ρ равна расстоянию между точками M и M_0. Положив $y = y_0$, $z = z_0$, получим функцию только одной переменной x. В этом случае в (2.4) надо положить $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$. Поэтому величина a_1 равна производной от функции $u = f(x, y_0, z_0)$ в точке x_0. Ее называют частной производной от функции $u = f(x,y,z)$ по переменной x и обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$. Полагая $\Delta x = 0$, $\Delta z = 0$, $\Delta y \neq 0$, получаем $a_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$. Положив $\Delta x = \Delta y = 0$, $\Delta z \neq 0$, найдем $a_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0)$. Слагаемое

$$a_1\Delta x + a_2\Delta y + a_3\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\Delta z$$

называют дифференциалом функции $u = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и обозначают df или du. Обычно полагают $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$.

Поэтому $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz.$

Аналогично можно ввести понятие дифференцируемости и дифференциала функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n аргументов и получить

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Запомним: чтобы найти частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, нужно взять производную по x_i, считая все остальные переменные константами.

Остановимся более подробно на функциях одного аргумента. Если функция $f(x): x \subset R \to Y \subset R$ дифференцируема в каждой точке x промежутка (a,b), то в качестве x_0 можно взять любую точку x из (a,b) и получить новую функцию $f'(x)$, называемую также производной. Возможны случаи, когда в некоторой точке x_0 производная не существует, т.е. функция не дифференцируема. При этом не существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Но возможно существование конечных односторонних пределов. Правый предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ обозначают $f'_+(x_0)$ и называют правой производной. Левый предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ называют левой производной и обозначают $f'_-(x_0)$.

П р и м е р 4. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ и точку $x_0 = 0$. В данном случае $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Этот предел не существует, но

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = f'_+(0),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 = f'_-(0).$$

Таким образом, функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет конечные правую и левую производные, но они не равны. Функция $|x|$ в точке $x_0 = 0$ не дифференцируема.

Возможны недифференцируемые функции, когда не существует либо левая производная, либо правая, либо обе одновременно. Убедитесь самостоятельно, что функция $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$ в точке $x_0=0$ не имеет ни правой, ни левой производной.

Проблема дифференцируемости функций многих переменных гораздо сложнее. Мы на ней останавливаться не будем.

Непосредственно из (2.1) следует, что если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке. Обратное неверно, т.е. непрерывная функция может быть недифференцируемой. Например, функция $y=|x|$ непрерывна в точке $x_0=0$, но в этой точке она не дифференцируема.

Упражнения

1. Докажите, что функция $f(x)=x^3$ дифференцируема в любой точке x_0 и $f'(x)=3x_0^2$.

2. Найдите частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ от функции $f(x,y)=x^2+y^3$. Ответ: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2$.

3. Докажите, что функция $f(x)=e^{|x|}$ не дифференцируема в точке $x_0=0$.

2.2. Правила дифференцирования функций

Процесс отыскания производных называют дифференцированием функции. При этом используют таблицу производных основных элементарных функций:

1) $c'=0$ $(c=\text{const})$; 2) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha=\text{const})$;

3) $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $(a=\text{const},\ a>0)$, $\left(e^x\right)'=e^x$;

4) $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{\log_a e}{x}$, $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$; 5) $(\cos x)'=-\sin x$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Эту таблицу желательно запомнить. Докажем справедливость некоторых формул таблицы производных.

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Здесь использовано следствие из второго замечательного предела $\lim\limits_{x>0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$.

$$\left(a^{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^{x}\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^{x}\ln a,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a$ по следствию из второго замечательного предела.

Используя предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, докажите самостоятельно четвертую формулу таблицы.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} = \cos x,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} = 1$ (использованы непрерывность функции $y = \cos x$ и первый замечательный предел).

Докажите самостоятельно, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства, значительно расширяют таблицу производных.

Теорема 1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и функции $u(x)+v(x)$, $u(x)\,v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x)\neq 0$, дифференцируемы в точке x и при этом справедливы формулы:

1) $[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$;

2) $[u(x)\,v(x)]' = v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$;

3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{v(x)u'(x)-u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Следствие. Константу C можно выносить за знак производной, т.е. $[Cu(x)]' = Cu'(x)$. Это следует из формулы 2 при $v(x)=C$ и того, что $C'=0$.

Применяя соотношение 3, находим

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Докажите самостоятельно, что $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

П р и м е р 1. Найти производные от следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^7}$; б) $y=\sin x\cdot\ln x$; в) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$.

Решение:

а) перепишем функцию $y(x)$ в виде $y=x^{2/3}+x^{7/5}$. Применяя правило дифференцирования суммы и степенной функции, находим

$$y'=\left(x^{2/3}\right)'+\left(x^{7/5}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2};$$

б) по правилу дифференцирования произведения

$$y' = \ln x\cdot(\sin x)'+\sin x(\ln x)' = \ln x\cdot\cos x+\frac{\sin x}{x};$$

в) по правилу дифференцирования частного получаем

$$y' = \frac{\left(x^2\right)'\cos x - x^2(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}.$$

Теорема 2 (о дифференцировании сложной функции). Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную $y'_u = f'(u_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет в точке x_0 производную $y'_x = \{f[\varphi(x)]\}'$, для которой справедлива формула

$$y'_x = y'_u \, u'_x. \tag{2.5}$$

Пример 2. Найти производные от следующих функций:

а) $y = \ln\cos x$; б) $y = e^{x^2}$; в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$.

Решение:

а) в рассматриваемом случае $y = \ln u$, $u = \cos x$, $y'_u = \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\cos x}$,

$u'_x = -\sin x$. По формуле (2.5) получаем $y' = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg}x$;

б) $y = e^u$, $u = x^2$, $y' = e^{x^2} \cdot 2x$;

в) $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^4}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{x^4}{x^4+1}\left(x^{-2}\right)' = \dfrac{x^4}{1+x^4}\left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = \dfrac{-2x}{1+x^4}$.

Если промежуточных переменных более одной, то формулу (2.5) нужно применять несколько раз.

Пример 3. Найти производную от функции $y = \operatorname{tg}^3(\sin\ln 2x)$.

Решение: $y' = 3\operatorname{tg}^2(\sin\ln 2x)\cdot\cos\ln 2x \cdot \dfrac{1}{2x}\cdot 2$.

Теорема 3. Пусть для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = g(y)$. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную и отличную от нуля производную $y' = f'(x_0)$, то и обратная функция имеет производную в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. При этом справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{2.6}$$

В качестве примера использования формулы (2.6) докажем, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Функция $x = \sin y$, обратная к функции $y = \arcsin x$, имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ конечную, отличную от нуля производную $x'_y=\cos y$. По формуле (2.6) находим $(\sin y)'=\cos y=\frac{1}{(\arcsin x)'}$, отсюда $(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; корень взят со знаком «+», так как $\cos y>0$ при $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

Предлагается в качестве упражнения доказать справедливость формул $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

При дифференцировании произведений или частных с большим числом сомножителей рекомендуется предварительно прологарифмировать их модуль.

Пример 4. Найти y', если $y=\frac{x^3\cdot\mathrm{arctg}2x\cdot\left(1+x^2\right)}{\sin^2 5x\cdot(1+x)^{10}}$.

Решение: прологарифмируем модуль данной функции:

$$\ln|y|=3\ln|x|+\ln|\mathrm{arctg}2x|+\ln\left|1+x^2\right|-2\ln|\sin 5x|-10\ln|1+x|.$$

Находим производные от обеих частей равенства:

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x}+\frac{1}{\mathrm{arctg}x}\frac{2}{1+x^2}+\frac{2x}{\sin 5x}-\frac{2\cdot 5}{\sin 5x}\cos 5x-\frac{10}{1+x}.$$

Отсюда

$$y'=\frac{x^3\mathrm{arctg}2x\cdot\left(1+x^2\right)}{\sin^2 5x\cdot(1+x)^{10}}\left[\frac{3}{x}\frac{2}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}x}+\frac{2x}{1+x^2}-10\mathrm{ctg}x-\frac{10}{1+x}\right].$$

Чтобы продифференцировать степенно-показательную функцию вида $y=f(x)^{\varphi(x)}$ $(f(x)>0)$, можно либо представить ее, пользуясь основным логарифмическим тождеством, в виде $y=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$, либо, предварительно прологарифмировав ее, находить производную от обеих частей выражения $\ln y(x)=\varphi(x)\ln f(x)$.

Пример 5. Найти y', если $y=\left(x^2\right)^{\sin 3x}$.

Решение: в этом примере $f(x)=x^2, \varphi(x)=\sin 3x$. Можем записать $y=e^{\sin 3x\cdot\ln x^2}$. Находим $y'=e^{\sin 3x\cdot\ln x^2}\left(\sin 3x\cdot\ln x^2\right)'=$

$$= e^{\sin 3x \cdot \ln x^2}\left(3\cos 3x \cdot \ln x^2 + \sin 3x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\right) = (x^2)^{\sin 3x} \times$$

$$\times \left(3\cos 3x \cdot \ln x^2 + \sin 3x \cdot \frac{2}{x}\right).$$

Можно найти y' другим способом:

$$\ln y = \sin 3x \cdot \ln x^2, \quad \frac{y'}{y} = \left(3\cos 3x \cdot \ln x^2 + \sin 3x \cdot \frac{2}{x}\right),$$

$$y' = y\left(3\cos 3x \cdot \ln x^2 + \sin 3x \cdot \frac{2}{x}\right) = \left(x^2\right)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \cdot \ln x^2 + \frac{2\sin 3x}{x}\right).$$

Мы научились дифференцировать сложные функции одного аргумента. Приведем формулы для отыскания частных производных от сложных функций многих аргументов (см. подразд. 1.5). Пусть $y(t) = f\left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right]$, причем существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ и производные $x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)$. Тогда

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Если $y(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f\left[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)\right]$, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\\
\frac{\partial y}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2},\\
\frac{\partial y}{\partial t_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Формулы (2.7) и (2.8) часто применяются при переходе от одних переменных к другим, а также они обобщают формулу (2.5) на случай векторных функций числового или векторного аргумента.

Пример 6. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z = f(x, y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Решение: по формуле (2.7) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos t - \frac{\partial f}{\partial y}\sin t.$$

Пример 7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t_1}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial t_2}$, если $z=f(x,y)$, $x=t_1^2-t_2^2$, $y=t_1^3-t_2^3$.

Решение: применяем формулы (2.8):

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1},\quad \frac{\partial z}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}.$$

Так как $\dfrac{\partial x}{\partial t_1}=2t_1$, $\dfrac{\partial y}{\partial t_1}=3t_1^2$, $\dfrac{\partial x}{\partial t_2}=-2t_2$, $\dfrac{\partial y}{\partial t_2}=-3t_2^2$, то

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 2t_1-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 3t_1^2,\quad \frac{\partial z}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(-2t_2\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 3t_2^2.$$

Производную $f'(x)$ называют производной первого порядка. Она является функцией от x. Производную $\left[f'(x)\right]'$ обозначают $f''(x)$ и называют производной второго порядка. Производную $\left[f''(x)\right]'$ обозначают $f'''(x)$ и называют производной третьего порядка. Таким же образом можно определить производные любого порядка. Производную порядка n обозначают $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$.

Пример 8. Найти $y^{(n)}$, если $y=e^{2x}$.
Решение: имеем $y'=2e^{2x}$, $y''=2^2e^{2x}$, $y'''=2^3e^{2x}$ и т.д., $y^{(n)}=2^n e^{2x}$.

Пусть дана функция двух аргументов $u=z(x,y)$. Ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, называемые частными производными первого порядка, являются функциями от x и y. От них также можно взять частные производные и получить частные производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Символом $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ обозначено $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Частные производные от частных производных второго порядка называют частными производными третьего порядка и т.д.

Упражнения

1. Найдите производные функций и вычислите их значения в точке $x_0=1$:

а) $y(x)=4x^{7/3}+5x^{5/2}+\sqrt{x}+1$; б) $y(x)=\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{8}{x^2\sqrt[4]{x^3}}+2$;

в) $y(x)=2x^3\sqrt{x^3}+3x^2\sqrt[3]{x^5}+3$.

Ответ: а) $\dfrac{67}{3}$; б) -27; в) 20.

2. Найдите производную $y'(x)$ и вычислите ее значение в точке x_0:

а) $y=\left(x^2+2x+2\right)\arcsin(0,5+x)-\dfrac{4}{\sqrt{3}}x,\ \ x_0=0;$

б) $y=x^4\operatorname{arctg}2x-\dfrac{\pi}{8}x,\ \ x_0=\dfrac{1}{2};$ в) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{3+4x},\ \ x_0=0;$

г) $y=\dfrac{\cos x+\sin x}{3-\cos x},\ \ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3}$; б) $\dfrac{1}{16}$; в) $\dfrac{2}{9}$; г) $-\dfrac{4}{9}$.

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производные от следующих функций и вычислите их значения в точке x_0:

а) $y(x)=\left(x^4+3x^2+2x+3\right)^{20},x_0=-1;$ б) $y(x)=\sqrt{2}\sin^5 2x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{8};$

в) $y(x)=\sqrt{3}\ln\cos 4x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{12};$ г) $y(x)=\dfrac{1}{12}\cdot 3^{\operatorname{tg}2x},\ \ x_0=\dfrac{\pi}{8};$

д) $y(x)=\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)^2,\ \ x_0=1;$ е) $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2,\ \ x_0=-\dfrac{1}{3};$

ж) $y(x)=\cos^3\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ \ x_0=1;$ з) $y(x)=2e^2\ln 2\ln\ln\ln x,\ \ x_0=e^2.$

Ответ: а) $-160\cdot 5^{19}$; б) $\dfrac{5}{2}$; в) -12; г) $\ln 3$; д) $-\dfrac{\pi}{8}$; е) $\dfrac{\pi}{4}$; ж) $\dfrac{3}{2}\cos^2 1\cdot\sin 1$; з) 1.

4. Найдите производные функций, предварительно прологарифмировав их модуль:

а) $y(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4\sqrt{(x+3)^5}}}$; б) $y(x)=e^x\sin 2x\cdot\cos 3x\cdot\operatorname{tg}5x.$

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4\sqrt{(x+3)^5}}}\left[\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{4}{3(x+2)}-\dfrac{5}{2(x+3)}\right]$;

б) $e^x\sin 2x\cdot\cos 3x\cdot\operatorname{tg}5x\left(1+2\operatorname{ctg}2x-3\operatorname{tg}3x+\dfrac{5}{\operatorname{tg}5x}\dfrac{1}{\cos^2 5x}\right).$

5. Найдите производные от функций:

а) $y(x)=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$; б) $y(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$; б) $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; в) $\dfrac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

6. Найдите частные производные от функций:

а) $z(x,y)=x^4y^3+2y\ln x$; б) $z(x,y)=(\sin x)^{\cos y}+(\cos y)^{\sin x}$;

в) $u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}$; г) $u(x,y,z)=z^{x/y}$.

Ответ: а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3+\dfrac{2y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2+2\ln x$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos y\sin x^{\cos y-1}\cdot\cos x+\left(\cos y^{\sin x}\right)(\ln\cos y)\cdot\cos x$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^{\cos y}(\ln\sin x)(-\sin y)+\sin x(\cos y)^{\sin x-1}(-\sin y)$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2+x^2y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2+x^2y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{xy}{z^2+x^2y^2}$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z^{x/y}\ln z\cdot\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=z^{x/y}\ln z\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x}{y}z^{\frac{x}{y}-1}$.

2.3. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно

Пусть задана система двух функций

$$\left.\begin{aligned}x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

причем общей частью областей определения функций $x(t)$ и $y(t)$ является множество T, а область их значений — множества X и Y соответственно. Зафиксируем как-либо значение $t=t_1$ из области T. Из (2.9) можем найти $x_1=x(t_1)$, $y_1=y(t_1)$. Значению x_1 поставим в соответствие y_1. Поступим таким образом с каждым значением t из T. В результате мы каждому значению x из X поставим в соответствие значение y из Y. Мы получили функцию $y=y(x)$ с областью определения X и областью значений Y. Говорят, что функция $y=y(x)$ задана параметрически соотношениями (2.9). Переменную t называют параметром. Если соотношение $x=x(t)$ удается разрешить относительно t, то мы приходим к известному способу задания функции

$y = y(x)$ в виде формулы. Но часто это разрешение затруднительно. В физике роль параметра t играет время, и тогда соотношения (2.9) определяют закон движения точки на плоскости.

Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на множестве T, причем $x'(t) \neq 0$, и функция $x(t)$ имеет дифференцируемую обратную функцию $t = t(x)$, вид которой нам неизвестен. Тогда $y = y\left[t(x)\right]$. По правилу (2.5) дифференцирования сложной функции находим $y'_x = y'_t\, t'_x$; по формуле (2.6) имеем $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$. Поэтому $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Мы нашли производную y'_x, которая также задана параметрически в виде

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ x &= x(t) \end{aligned}\right\}. \tag{2.10}$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют и вторые производные x''_t и y''_t, то аналогично находим вторую производную:

$$\left.\begin{aligned} y''_x &= \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'}{x'(t)} \\ x &= x(t) \end{aligned}\right\}. \tag{2.11}$$

Таким образом можно найти производную любого порядка.

Пример 1. Найти y'_x и y''_x, если

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\left(1 + t^2\right). \end{cases}$$

Решение: так как $x'_t = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y'_t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t}{1+t^2} : \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{t}$, то согласно формуле (2.10) производная y'_x задана параметрически в виде $\begin{cases} y'_x = \dfrac{2}{t}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Например, при $t = 1$ переменная $x = 1 - \dfrac{\pi}{4}$, $y'_x = 2$.

Поскольку $\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)' = \left(\frac{2}{t}\right)' = -\frac{2}{t^2}$, $\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = -\frac{2\left(1+t^2\right)}{t^4}$, то вторую производную y''_{xx} можно записать в виде $\begin{cases} y''_x = -\dfrac{2\left(1+t^2\right)}{t^4}, \\ x = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Перейдем к неявному способу задания функции.

Пусть дано некоторое уравнение

$$\phi(x, y) = 0, \tag{2.12}$$

связывающее две переменные x и y в некоторой области D плоскости xOy, причем переменная x заполняет некоторое множество X, а переменная y — множество Y. Зафиксируем как-либо значение $x = x_1$ из множества X. Получим уравнение $\phi(x_1, y) = 0$. Значению $x = x_1$ поставим в соответствие то значение $y = y_1$ из Y, которое обращает это уравнение в тождество, т.е. $\phi(x_1, y_1) \equiv 0$. Другими словами, y_1 есть решение уравнения $\phi(x_1, y) = 0$. Если проделать подобную процедуру с каждым значением x из X, то мы каждому значению x из X поставим в соответствие некоторое значение y из Y. Мы определили функцию $y = y(x)$. Говорят, что функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением (2.12). В этом случае имеем тождество $\phi\left[x, y(x)\right] \equiv 0$, справедливое на множестве X.

Если уравнение (2.12) удается разрешить относительно y, то получаем явное задание функции $y = y(x)$. В этом случае никаких проблем с отысканием y'_x не возникает. Пусть явный вид функции $y(x)$ неизвестен. Предположим, что уравнение $\phi(x, y) = 0$ имеет решения (x, y), заполняющие некоторую область D, и в этой области существуют частные производные $\phi'_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\phi'_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, причем $\phi'_y \neq 0$. Дифференцируем тождество $\phi\left[x, y(x)\right] \equiv 0$, применяя формулу (2.7), где роль переменной t играет переменная x (подчеркнем, что мы дифференцируем тождество, а не уравнение, которое дифференцировать нельзя). Получаем $\frac{\partial \phi}{\partial x} x'_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'_x = 0$. Опять получили тождество относительно x, но не тождество относительно других переменных. Так как $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$ по предположению, а $x'_x = 1$, то

$$y'_x = -\frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}} = -\frac{\phi'_x}{\phi'_y}. \tag{2.13}$$

Вторую производную можно найти, дифференцируя выражение (2.13), считая переменную y функцией от x. Подробно на этом останавливаться не будем.

Заметим, что не всякое уравнение $\phi(x,y)=0$ определяет неявно функцию $y(x)$, например, уравнение $x^2+y^2+1=0$ не определяет никакой функции, так как оно не имеет решений.

Пример 2. Найти y'_x от функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $\phi(x,y)=y^3x+y^4-x+y=0$.

Решение: находим $\phi'_x=y^3-1$, $\phi'_y=3y^2x+4y^3+1$. По формуле (2.13)

$y'_x=-\dfrac{y^3-1}{3y^2x+4y^3+1}$ для тех точек $M(x,y)$, где $3y^2x+4y^3+1\neq 0$.

Можно задать неявно функцию двух переменных $z=z(x,y)$ уравнением $\phi(x,y,z)=0$, если $\phi[x,y,z(x,y)]\equiv 0$, и найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, предполагая, что уравнение $\phi(x,y,z)=0$ имеет решения (x,y,z), заполняющие некоторую пространственную область V, в которой существуют частные производные $\dfrac{\partial\phi}{\partial x},\dfrac{\partial\phi}{\partial y},\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$, причем

$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\neq 0$. Легко получить:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\phi'_x}{\phi'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\phi'_y}{\phi'_z}. \tag{2.14}$$

Пример 3. Функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $\phi(x,y,z)=$ $=2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение: так как $\phi'_x=4x-8z$, $\phi'_y=4y$, $\phi'_z=2z-8x-1$, то по формуле (2.14) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{4x-8z}{2z-8x-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4y}{2z-8x-1}$.

Упражнения

1. Найдите y''_x и вычислите ее значение в указанной точке $t=t_0$ для следующих функций:

а) $\begin{cases} y(t)=\dfrac{t^3}{3}-t, \\ x(t)=t^2+2, \end{cases}$ $t_0=1$; б) $\begin{cases} y(t)=\sqrt{1-t^2}, \\ x(t)=\arcsin t, \end{cases}$ $t_0=0$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$; б) -1.

2. Найдите значение y'_x в точке $x_0 = 1$ функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$; б) $\ln x + e^{-y/x} - 1 = 0$.

Ответ: а) 3 или 1; б) 1.

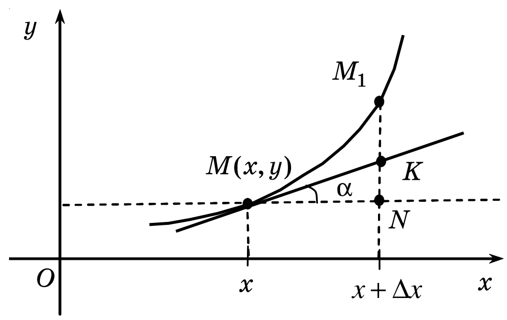
3. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z(x,y)$ задана неявно следующими уравнениями:

а) $x^3y^2 + x^2z^3 + yz^2 = 1$; б) $xyz + \operatorname{tg} xyz = 1$.

Ответ: а) $-\dfrac{3x^2y^2 + 2xz^3}{3z^2x^2 + 2zy}$, $-\dfrac{2x^3y + z^2}{3z^2x^2 + 2zy}$; б) $-\dfrac{z}{x}, -\dfrac{z}{y}$.

2.4. Дифференциал. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Ряд Тейлора

Как мы уже отмечали в подразд. 2.1, дифференциалом функции $f(x)$, где $f: X \subset R \to Y \subset R$, называется величина $df = f'(x)dx$. Выясним геометрический смысл дифференциала. Возьмем произвольную точку x. На графике функции получим точку $M(x,y)$, $y = f(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $f(x)$ получит приращение Δf, равное по величине отрезку NM_1 (см. рисунок). Как нам известно, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Под углом α наклонена к оси Ox касательная MK к графику функции в точке M. Поскольку $MN = \Delta x$, $KN = \operatorname{tg}\alpha MN = f'(x)\Delta x = df$, то дифференциал функции равен приращению ординаты касательной в точке x к графику функции $f(x)$ при переходе в точку $x + \Delta x$. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, мы график функции в окрестности точки x заменяем касательной в точке x. Величина погрешности, допускаемая при этом, зависит от величины Δx.



П р и м е р 1. Найти df, если $f(x) = e^{x^2 \sin 5x}$.

Решение: так как $f'(x) = e^{x^2 \sin 5x}\left(2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x\right)$, то

$$df = e^{x^2 \sin 5x}\left(2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x\right)dx.$$

П р и м е р 2. Вычислить df, если $f(x) = x^3$, в точке $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}01$.

Решение: $df = 3x^2 dx$. Полагая $x = x_0 = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}01$, получаем $df = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$.

П р и м е р 3. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, вычислить приближенно $(1{,}030)^5$. Оценить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при этом.

Решение: примем $f(x) = x^5$, $x_0 = 1{,}000$; $x_1 = 1{,}030$. Тогда

$$dx = \Delta x = 1{,}030 - 1{,}000 = 0{,}030,\ f(x_0) = 1{,}000;$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

В нашем случае $df = 5x dx$, $df(x_0) = 5 \cdot 1 \cdot 0{,}030 = 0{,}150$. Поэтому $f(x_0 + \Delta x) = f(1{,}030) = (1{,}030)^5 \approx 1 + 0{,}150 = 1{,}150$.

Так как само число 1,030 приближенное и указано с точностью до тысячных, то непосредственное вычисление с округлением до тысячных дает $(1{,}03)^5 = 1{,}159$. Таким образом, при замене приращения дифференциалом допущена абсолютная погрешность $\Delta = |1{,}15 - 1{,}159| = 0{,}009$, а относительная — $\delta = \dfrac{0{,}009}{1{,}159} \approx 0{,}008$, т.е. менее одного процента.

Иногда точность приближенного равенства $\Delta f \approx df$ бывает недостаточной (если Δx велико). Тогда привлекают дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x имеет производные любого порядка. Ее дифференциал $df = f'(x)dx$, называемый первым дифференциалом, является функцией двух переменных — x и $\Delta x = dx$. Приращение аргумента будем полагать в заданном процессе постоянным и независимым от выбора точки x. При таком соглашении дифференциал является функцией от x, от которой также можно найти дифференциал, называемый вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка, он обозначается $d^2 f$. Таким образом, $d^2 f = d(df)$. Находим $d^2 f = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)(dx)^2$. При этом учтено, что dx не зависит от x. Итак, $d^2 f = f''(x)(dx)^2$.

Аналогично можно ввести понятие дифференциала любого порядка: $d^3 f = d(d^2 f)$ — дифференциал третьего порядка, ..., $d\left(d^{(n-1)} f\right) = d\left(f^{(n-1)}(dx)^n\right) = f^{(n)}(x)(dx)^n$ — дифференциал порядка n. Заметим, что если $y = f[x(t)]$, то $df = f'_x x'_t dt$, но $x'_t dt = dx$, поэтому $df = f'_x dx$ как для x — независимой переменной, так и для x — функции другого аргумента. Это свойство называют свойством инвариантности формы записи первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков, начиная со второго, свойством инвариантности не обладают, так как если $x = x(t)$, то $d(dx) \neq 0$. В этом случае $\Delta x \neq dx$.

Пример 4. Найти $d^3 f$, если $f(x) = x^4$.

Решение: так как $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, то $d^3 f = = 24x(dx)^3$.

Доказано, что если функция имеет в точке x_0 производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то в некоторой окрестности $u_\delta(x_0)$ справедлива формула

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n'_0} d^n f(x_0) + R_{n+1}(x), \quad x \in U_\delta(x_0), \tag{2.15}$$

называемая формулой Тейлора порядка n. Величина $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора. Вспоминая, что $d^n f(x_0) = = f^{(n)}(x_0)(dx)^n = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$, формулу (2.15) можно переписать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}.$$

Остаточный член R_{n+1} можно записать в различных формах, наиболее простая из них предложена французским математиком Лагранжем: $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где c — некоторая точка из окрестности $U_\delta(x_0)$, лежащая между x и x_0. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора. Формула Тейлора позволяет функцию $f(x)$ представить приближенно многочленом: $f(x) \approx P_n(x)$. Величина остаточного члена $R_{n+1}(x)$ определяет абсолютную погрешность равенства $f(x) \approx P_n(x)$. Итак, имеем

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (2.16)$$

Соотношение (2.16) называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$, то функцию с любой степенью точности можно представить многочленом Тейлора. Это условие заведомо выполнено, если все производные ограничены одним числом, т.е. $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$ при $x\in U_\delta(x_0)$, что справедливо для многих практически важных функций.

Если $x_0=0$, то

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (2.17)$$

Формулу (2.17) называют формулой Маклорена порядка n. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные всех порядков и $R_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то функцию $f(x)$ можно представить в виде степенного ряда:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad (2.18)$$

где

$$a_0=f(x_0),\ \ a_n\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (2.19)$$

Степенной ряд (2.18), коэффициенты которого находятся по формулам (2.19), называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Вычисляя производные в нуле, легко получить следующие ряды:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad 0!=1;$

2) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};$

3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(разложения 1—3 имеют место при любом значении x);

4) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n;$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$;

6) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

7) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$

(разложения 4—7 имеют место при $|x| < 1$).

Приведенные ряды широко используются в приближенных вычислениях, поскольку они позволяют свести все элементарные функции к многочленам.

Пример 5. Представить в виде суммы ряда Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{x+4}$.

Решение: можем записать $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}$ и, используя ряд 4, получить $\frac{1}{x+4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^{n+1}}$ при $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, $|x| < 4$.

Мы рассмотрели дифференциал и формулу Тейлора для функций одной переменной. Формула (2.15) сохраняется и для функций многих переменных, только значительно усложняется вид дифференциалов высших порядков.

Упражнения

1. Найдите дифференциалы функций:

а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \arcsin \frac{x}{a}$.

Ответ: а) $-\frac{2dx}{x^3}$; б) $\frac{|a|\,dx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$.

2. Вычислите дифференциал и приращение функции $f(x)$ при переходе из точки x_0 в точку x_1:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, $x_0 = 3{,}000$; $x_1 = 3{,}040$;

б) $f(x) = 5x^3 - x^2 + 3$, $x_0 = 1{,}000$; $x_1 = 1{,}010$.

Ответ: а) $\Delta f = 0{,}643$, $dy = 0{,}640$; б) $\Delta y = 0{,}131$, $dy = 0{,}130$.

3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите, округлив до 0,0001:

а) $\sqrt{4,0120}$; б) $\sqrt[3]{0,9843}$.

Ответ: а) 2,0030; б) 0,9948.

4. Запишите ряд Маклорена для функций:

а) $f(x) = e^{2x}$; б) $f(x) = \sin^2 x$; в) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$.

2.5. Правило Лопиталя

Производная функции $f(x)$ является пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и содержит неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Естественно предположить, что отыскание некоторых пределов можно свести к дифференцированию функций. Например, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin x - \sin 2}{x-2}$ согласно определению производной равен $(\sin x)'$ при $x = 2$, т.е. равен $\cos 2$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2} - e}{x-1} = 2e$, поскольку этот предел равен значению производной от функции $f(x) = e^{x^2}$ в точке $x = 1$.

Рассмотрим более сложный пример: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{x^2} - e^4}{\sin x - \sin 2}$. Поделив числитель и знаменатель на $x-2$, получим $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(e^{x^2} - e^4\right)/(x-2)}{(\sin x - \sin 2)/(x-2)}$. Видим, что числитель стремится к $\left(e^{x^2}\right)'$ при $x = 2$, а знаменатель — к $(\sin x)'$ при $x = 2$. Следовательно, этот предел равен $4e^4/\sin 2$. При раскрытии неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ применяют следующие теоремы Лопиталя, которые мы приводим без доказательства.

Теорема 1 (о раскрытии неопределенности $\dfrac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; 3) в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ существуют производные $f'(x)$

и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$; 4) существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, также равный K.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Решение: условия 1–3 теоремы 1, очевидно, выполнены. Проверим условие 4. В нашем примере $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$, $g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/(1+x^2)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Из теоремы 1 следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

Замечание. Иногда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ опять приводит к неопределенности $\frac{0}{0}$. Тогда применяют еще раз теорему 1.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

Теорема 2 (о раскрытии неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$; 3) всюду в окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$; 4) существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, также равный K.

Теоремы 1 и 2 легко перефразировать на случай односторонних пределов $x \to x_0 \pm 0$, а также на случай $x \to \infty, -\infty, +\infty$, если заменить окрестность $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ на другие виды окрестностей.

П р и м е р 3. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение: имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Условия 1–3 теоремы 2, очевидно, выполнены. Проверим условие 4. В нашем примере

$$f(x) = \operatorname{tg} x,\ \ g(x) = \operatorname{tg} 3x,\ \ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ \ g'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1+\cos 6x}{3(1+\cos 2x)}$. Получили неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Применяем теорему 1, условия которой 1–3 выполнены. Проверяем четвертое условие: $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{(1+\cos 6x)'}{3(1+\cos 2x)'} =$ $= \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{-6\sin 6x}{-6\sin 2x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$. Опять получили неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Находим $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{(\sin 6x)'}{(\sin 2x)'} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = 3$, следовательно, $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = 3$.

Замечание. Можно было в этом примере ограничиться однократным применением правила Лопиталя. Предел $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1+\cos 6x}{3(1+\cos 2x)}$ найти просто, заменяя бесконечно малые им эквивалентными. Получим

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\cos 6x}{3(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{3\cdot\frac{1}{2}(2x)^2} = \frac{36}{3\cdot 4} = 3$$

(см. в подразд. 1.22 таблицу эквивалентных бесконечно малых).

Неопределенности $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ сводятся к рассмотренным выше путем алгебраических преобразований соответствующих выражений.

Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенности $0\cdot\infty$ путем логарифмирования.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

Решение: имеем неопределенность 0^0. Обозначим $y=x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$, находим $\ln y=\dfrac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}$.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left[\ln\left(e^x-1\right)\right]'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(xe^x\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=1$, то, учитывая непрерывность функции $\ln x$, получаем $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0+0} y\right)=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=e$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}=e$.

2.6. Основные теоремы дифференциального исчисления

При исследовании функций применяются многие теоремы. Часть из них мы уже изучили. Рассмотрим еще несколько важных для дальнейшего теорем.

Пусть дано множество X. Точку x_0 множества X называют внутренней, если она принадлежит множеству вместе с некоторой окрестностью $U_\delta(x_0)$; если же в окрестности $U_\delta(x_0)$ имеются точки, как принадлежащие X, так и не принадлежащие, то точка x_0 называется граничной. Граничная точка множества может и не принадлежать множеству. Например, для множества $(a,b]$ точки a и b граничные, причем точка a множеству не принадлежит, а точка b — принадлежит. Все точки множества $(a,b]$, кроме точки b, внутренние.

Теорема 1 (Ферма). Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и во внутренней точке x_0 этого множества принимает наибольшее или наименьшее значение. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть в точке x_0 функция принимает наибольшее значение. Тогда $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$ для любых значений Δx таких, что $(x_0+\Delta x)\in X$. Поэтому $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$ независимо от знака Δx. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, если $\Delta x>0$. По теореме 5 из подразд. 1.18 (о переходе к пределу в неравенстве) и из условия существования $f'(x_0)$ получаем $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$. Так как по условию теоремы производная $f'(x_0)$ существует, то $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, что возможно, только если $f'(x_0)=0$. Теорема доказана.

Таким образом, в точке наибольшего значения производная или не существует, или равна нулю, если существует. Геометрически теорема Ферма означает, что если в точке наибольшего или наименьшего значения существует касательная, то она параллельна оси Ox.

Теорема 2 (Ролля). Если функция $y=f(x)$: 1) непрерывна на $[a,b]$; 2) дифференцируема на (a,b); 3) в точках $x=a$ и $x=b$ принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $\xi\in(a,b)$, в которой $f'(\xi)=0$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 6, подразд. 1.22) функция, непрерывная на $[a,b]$, достигает своего наименьшего значения m и наибольшего — M. Если окажется $m=M$, тогда $f(x)=c$ и $f'(x)=0$ во всех точках на (a,b). В качестве точки ξ можно взять любую точку из (a,b). Если же $m<M$, то одно из значений m или M принимается в точке ξ, лежащей внутри (a,b), так как $f(a)=f(b)$, а $M\ne m$. По теореме Ферма $f'(\xi)=0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает, что если $f(a)=f(b)$, то существует точка на (a,b), в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox. В частности, если $f(a)=f(b)=0$, то теорему Ролля можно сформулировать по-другому: между двумя последовательными корнями уравнения $f(x)=0$ для дифференцируемой функции $f(x)$ имеется хотя бы один корень уравнения $f'(x)=0$.

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция $f(x)$: 1) непрерывна на $[a,b]$; 2) дифференцируема на (a,b), то существует такая точка $\xi\in(a,b)$, в которой

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{b-a}. \qquad (2.20)$$

Выражение (2.20) называется формулой Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a)$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (предлагается убедиться в этом самостоятельно). Поэтому существует точка ξ, в которой $F'(\xi) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}$, следовательно, $f'(\xi) = \dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}$.

Отсюда и следует формула (2.20). Теорема доказана.

Если положим $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, то формулу (2.20) можно переписать в виде $f'(x) = \dfrac{x(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ или $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$,

$$\Delta y = f'(\xi)\Delta x. \tag{2.21}$$

Выражение (2.21) называют формулой о конечных приращениях.

2.7. Условия постоянства и монотонности функции

Сформулируем эти условия в виде теорем.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке X (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) и имеет внутри него конечную производную $f'(x) = 0$. Для того чтобы функция $f(x)$ была в X постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ внутри X.

Доказательство. Необходимость условия очевидна: из $f(x) = \text{const}$ следует $f'(x) = 0$. Покажем его достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ внутри X. Зафиксируем любую точку $x_0 \in X$ и возьмем любую другую точку $x \in X$. К функции $f(x)$ и промежутку $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ применим теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Так как $f'(\xi) = 0$, то $f(x) = f(x_0) = \text{const}$. Теорема доказана.

Пример 1. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение: рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, дифференцируемую на $(-1,1)$.

Так как $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, то по теореме 1 $f(x) = c = \text{const}$.

Поскольку $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, то $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет конечную производную на (a,b). Для того чтобы функция

$f(x)$ монотонно возрастала (убывала) на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на (a,b).

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на (a,b). Тогда

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0, \tag{2.22}$$

так как разность $f(x+\Delta x)-f(x)$ имеет тот же знак, что и Δx. Переходя к пределу в неравенстве (2.22), получим $f'(x) \geq 0$. Необходимость условия доказана. Покажем его достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b). Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из (a,b), $x_2 > x_1$. По теореме Лагранжа $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Так как $f'(\xi) \geq 0$, $x_2 > x_1$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Теорема доказана.

Пример 2. Доказать, что $\sin x \leq x$.

Решение: при $x \geq \dfrac{\pi}{2}$ неравенство $\sin x \leq x$ при $x > 0$ очевидно, так как $\sin x \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x - x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, причем $f(0)=0$ и $f'(x)=\cos x - 1 < 0$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, следовательно, функция $f(x)=\sin x - x$ на этом промежутке убывает, а так как $f(0)=0$, то $\sin x - x \leq 0$ при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Неравенство $\sin x \leq x$ при $x > 0$ доказано.

2.8. Экстремумы. Необходимые условия экстремума

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)\,(f(x) \geq f(x_0))$. Точка x_0 называется точкой экстремума, если она является точкой максимума или минимума. Заметим, что на одном и том же промежутке функция может иметь несколько точек экстремума. (Не путать точки максимума и минимума с наибольшим и наименьшим значениями функции.)

Если в точке x_0 имеется экстремум, то в окрестности $U_\delta(x_0)$ для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы Ферма, а потому в точке x_0 производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо равна нулю, если существует. Мы получили необходимое условие экстремума: для того чтобы в точке x_0 функция $y = f(x)$ имела экстремум, необходимо, чтобы производная $f'(x_0)$ либо не существовала, либо равнялась нулю.

Точки, в которых производная не существует или обращается в нуль, называются критическими. Если в точке имеется экстремум, то эта точка обязательно критическая, но обратное утверждение неверно, т.е. в критической точке экстремума может не быть. Нужны дополнительные исследования этих точек.

2.9. Достаточные условия экстремума

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ критической точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак по схеме (+,–), то в точке x_0 имеется максимум, если смена знаков происходит по схеме (–,+), то в точке x_0 имеется минимум, если же смена знаков не происходит, то в точке x_0 нет экстремума (достаточный признак, связанный с первой производной). Действительно, в случае схемы (+,–) слева от точки x_0 функция возрастает по теореме 2 из подразд. 2.7, а справа убывает, следовательно, в точке x_0 имеется максимум.

Пример 1. Найти точки экстремума функций:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

Решение:

а) так как $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$, то производная обращается в нуль в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются критическими. При переходе через точку x_1 смена знаков происходит по схеме (+,–), а через точку x_2 — по схеме (–,+). Следовательно, в точке x_1 имеется максимум, а в точке x_2 — минимум;

б) $f'(x) = 3x^2 - 6x^2 + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3(x-1)^2$.

Критическая точка $x = 1$, причем при переходе через эту точку смена знаков не происходит, следовательно, в точке $x = 1$ экстремума нет.

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ критической точки x_0 не только первую производную, но и вторую — $f''(x)$. Если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 максимум, если же $f''(x_0) > 0$, то минимум. Если же $f''(x_0) = 0$, то нужны дополнительные исследования (достаточный признак экстремума, связанный со второй производной).

Докажем справедливость этого утверждения. Так как $f'(x_0) = 0$, то формула Тейлора третьего порядка для функции $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+R_3.$$

Поскольку R_3 имеет порядок малости выше второго, то знак выражения $f(x)-f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. При $f''(x_0)>0$ разность $f(x)-f(x_0)>0$, т.е. $f(x)>f(x_0)$ и в точке x_0 минимум. Если же $f''(x_0)<0$, то $f(x)-f(x_0)<0$, $f(x)<f(x_0)$ и в точке x_0 максимум.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^2e^{-x}$.

Решение: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$.

Из условия $\left(2x-x^2\right)e^{-x}=0$ находим две критические точки: $x_1=$ $=0$, $x_2=0$. Находим вторую производную:

$$f''(x)=(2-2x)e^{-x}-\left(2x-x^2\right)e^{-x}=\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}.$$

Так как $f''(0)=2>0$, то в точке $x_1=0$ будет минимум; $f''(2)=(4-$ $-8+2)^{e-2}=-2e^{-2}<0$, поэтому в точке $x_2=2$ будет максимум.

Если окажется $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то, также используя формулу Тейлора, легко доказать, что при n четном в точке x_0 имеется экстремум: максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$. Если n нечетно, то в точке x_0 экстремума нет.

2.10. Экстремум функции двух аргументов

Пусть дана функция двух аргументов $z=f(x,y)$. Напомним, что δ-окрестностью $U_\delta(M_0)$ точки M_0 называется множество всех точек $M(x,y)$ таких, что $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, т.е. всех точек, удаленных от точки M_0 на расстояние меньше δ.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой максимума (минимума), если существует δ-окрестность $U_\delta(M_0)$ такая, что для всех точек M этой окрестности выполняется $f(M)\le f(M_0)$ $\left(f(M)\ge f(M_0)\right)$.

Зафиксировав одну из переменных x или y, получим функции одного переменного. Необходимое условие экстремума для них формулируется аналогично функции одной переменной с заменой производной на частные производные: если в точке M_0 имеется экстремум, то в этой точке частные производные первого порядка либо не существуют, либо обращаются в нуль, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0$. Достаточные условия формулируются с привлечением вторых частных производных: f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}. Если окажется

$$f''_{xx}(M_0) > 0,\ \ \Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то в точке M_0 будет минимум. Если же $f''_{xx}(M_0) < 0,\ \Delta > 0,$ то в точке M_0 будет максимум. Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума. Если окажется $\Delta = 0$, то экстремум может быть или не быть, нужны дополнительные исследования.

П р и м е р. Найти точки экстремума функции

$$f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Решение: критические точки находим из условия $\frac{\partial f}{\partial x} = 6 - 2x - y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y = 0$. Решая систему $\left.\begin{matrix} 6 - 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}\right\}$, находим координаты единственной критической точки $M_0(4;-2)$. Так как $f''_{xx}(4,-2) = -2 < 0$, $f''_{yy}(4,-2) = -2$, $f''_{xy}(4,-2) = -1$, $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, то в точке $M_0(4,-2)$ имеем максимум.

2.11. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на множестве $[a,b]$. Точки, в которых достигаются эти значения, могут быть как внутренними точками множества $[a,b]$, так и граничными. Алгоритм их отыскания следующий:

1) находим все критические точки функции $f(x)$, лежащие внутри $[a,b]$, и вычисляем значения функции в этих точках;

2) вычисляем $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех найденных значений выбираем наименьшее и наибольшее, которые и будут наименьшим и наибольшим значениями функции на $[a,b]$.

П р и м е р. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2;1]$.

Решение: находим критические точки функции $f(x)$ из условия $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$ являются внутренними для отрезка $[-2;1]$. Находим: $f(0) = 3$; $f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$. Вычисляем значения функции в граничных точках: $f(-2) = 16 - 8 + 3 = 11$, $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$. Сравнивая найденные значения, видим, что наибольшее значение достигается в точке $x = -2$ и равно 11, а наименьшее — в точке $x = \pm 1$ и равно 2.

2.12. Выпуклость графика функции

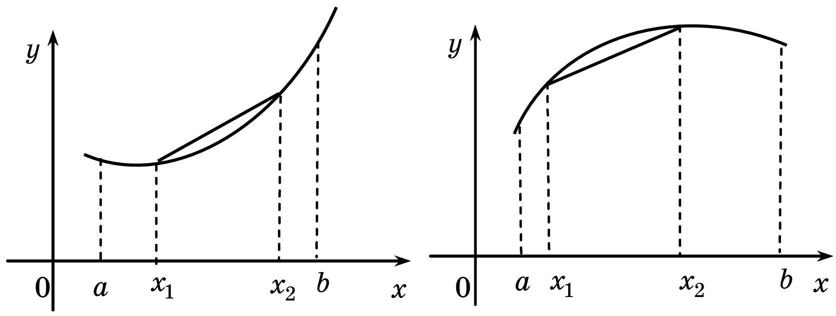
Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вниз на промежутке $[a,b]$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из (a,b) выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \tag{2.23}$$

и выпуклой вверх, если

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{2.24}$$

Если на графике выпуклой вниз (вверх) функции взять любые две точки и соединить их отрезком, то график целиком будет ниже (выше) этого отрезка. На рисунке слева изображен график функции, выпуклой вниз, а на рисунке справа — выпуклой вверх.



Пусть функция $f(x)$ имеет на (a,b) производную $f'(x)$. Используя неравенства (2.23) и (2.24), можно доказать, что $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на промежутке (a,b) тогда и только тогда, когда ее первая производная на (a,b) монотонно возрастает (убывает). Если при этом существует и вторая производная $f''(x)$, то при $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ функция выпукла вниз (вверх). Точки графика непрерывной функции, при переходе через которые функция меняет направление выпуклости, называются точками перегиба графика функции. Если существует вторая производная $f''(x)$, то в точке перегиба x_0 необходимо $f''(x) = 0$. Если в некоторой точке $f''(x) = 0$ и вторая производная при переходе через точку x_0 изменяет знак, то x_0 является точкой перегиба.

П р и м е р. Найти промежутки выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика функции $f(x) = 3x^2 - x^3$.

Решение: данная функция имеет производные первого и второго порядка на всей числовой оси.

Находим: $f'(x) = 6x - 3x^2$, $f''(x) = 6 - 6x = 6(1 - x)$. При $x \in (-\infty, 1)$ имеем $f''(x) > 0$, следовательно, на $(-\infty, 1)$ функция выпукла вниз, при $x \in (1, +\infty)$ имеем $f'(x) < 0$, следовательно, на $(1, +\infty)$ функция выпукла вверх. Точка $x = 1$ является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная меняет знак.

2.13. Асимптоты графика функции

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет ветви, уходящие в бесконечность. Прямая $x = x_0$ называется двусторонней вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, -\infty, +\infty$; прямая $y = a$ называется двусторонней горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$; прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется двусторонней наклонной асимптотой, если $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0$. Видим, что асимптота — это такая прямая, к которой неограниченно приближаются точки графика функции при неограниченном удалении ее от начала координат. Правило отыскания вертикальных и горизонтальных асимптот следует из их определения. Для отыскания наклонной асимптоты $y = kx + b$ нужно найти k и b. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0$, то функция $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ — бесконечно малая при $x \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x} \right) = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{b}{x} = 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k \right) = 0$. Отсюда $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. После того как значение k найдено, число b находим из условия, что $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0$. Это возможно, если $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$. Асимптоты существуют, если все отмеченные пределы существуют, в противном случае асимптот нет. Могут существовать односторонние пределы при $x \to x_0 + 0$ или $x \to x_0 - 0$, $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$. В этом случае асимптоты называют односторонними — правыми или левыми, в отличие от двусторонних асимптот в общем случае.

Пример. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$.

Решение: прямая $x = 0$ является двусторонней вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3} = \infty$. Находим $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+x^3+1}{x^4} = 2,\quad b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{x^3} = 1,$ следовательно, прямая $y = 2x + 1$ — наклонная асимптота. Горизонтальных асимптот нет.

2.14. Общая схема исследования и построения графика функции

Можно предложить следующий план действий.

1. Найти область определения и область значения функции.
2. Определить, является ли функция четной, нечетной или функцией общего вида.
3. Выяснить, является ли функция периодической.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и охарактеризовать их, указать вертикальные асимптоты.
5. Найти наклонные асимптоты.
6. Найти производную функции и определить участки монотонности, найти точки экстремума.
7. Найти вторую производную, охарактеризовать точки экстремума, если это не сделано с помощью первой производной, указать участки выпуклости вверх и вниз и точки перегиба.
8. Вычислить значение функции в характерных точках.
9. На основании полученных данных построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Решение

1. Область определения функции $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Область значения функции $(-\infty, +\infty)$.

2. Так как $f(x) = -f(-x)$, то функция $f(x)$ нечетна.

3. Функция непериодическая.

4. Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 2$, где она терпит разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to\pm 2} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \infty$. Прямые $x = 2$ и $x = -2$ — двусторонние вертикальные асимптоты.

5. Находим наклонные асимптоты $y = kx + b$. Нами показано, что

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\left(4-x^2\right)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{4x-x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4 - x^2} = 0.$$

Итак, прямая $y = -x$ — наклонная асимптота.

6. Находим

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(4 - x^2\right) + 2x \cdot x^3}{\left(4 - x^2\right)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{\left(4 - x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(12 - x^2\right)}{\left(4 - x^2\right)^2}.$$

Видим, что точки $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{12} = \pm 3,46$ критические. Из неравенства $x^2\left(12 - x^2\right) < 0,\ x \neq \pm 2$ следует, что при $x \in \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$ функция $f(x)$ убывает, а из неравенства $x^2\left(12 - x^2\right) > 0,\ x \neq \pm 2$, получаем, что на промежутках $\left(-\sqrt{12}, -2\right), (-2, 2)$ и $\left(2, \sqrt{12}\right)$ функция возрастает. Отсюда следует, что в точке $x = -\sqrt{12}$ функция имеет минимум, равный $f\left(-\sqrt{12}\right) = \frac{(-3,46)^3}{4 - 12} \cong \frac{41,42}{8} \approx 5,18,$ а в точке $x = +\sqrt{12}$ — максимум, равный –5,18.

7. Находим $f''(x) = \left[\frac{12x^2 - x^4}{\left(4 - x^2\right)^2}\right]' = \frac{8x\left(x^2 + 12\right)}{\left(4 - x^2\right)^3}$ (промежуточные вычисления предлагается выполнить самостоятельно). Видим, что $f''(x) > 0$ на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(0,2)$. На этих промежутках функция выпукла вниз. На промежутках $(-2,0)$ и $(2, +\infty)$ имеем $f''(x) < 0$, следовательно, функция выпукла вверх. В точке $x = 0$ функция непрерывна и при переходе через нее меняет направление выпуклости. Поэтому точка $x = 0$ является точкой перегиба.

8. Для удобства построения графика полученные данные, а также значения функции в некоторых точках занесем в таблицы.

x	–4	$-\sqrt{12} = -3,46$	–2,5	–1	0	1	2,5	$\sqrt{12} = 3,46$	4
y	5,33	+5,18	6,94	0,33	0	0,33	–6,94	–5,18	–5,33
		min			*			max	

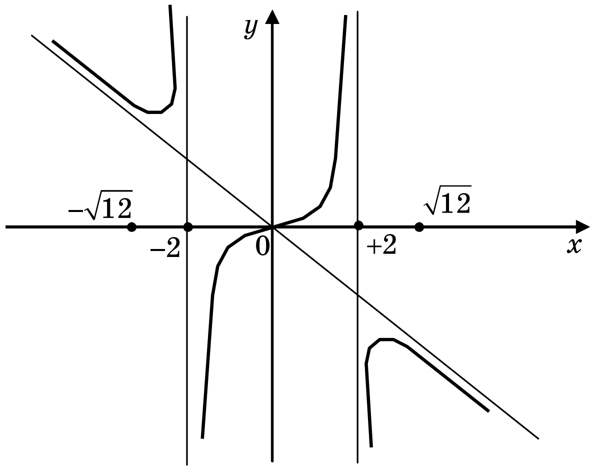
Примечание: * — перегиб.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{12}\right)$	$\left(-\sqrt{12}, -2\right)$	$(-2,2)$	$\left(2, \sqrt{12}\right)$	$\left(\sqrt{12}, +\infty\right)$
y	убывает	возрастает			убывает

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
y	выпукла вниз	выпукла вверх	выпукла вниз	выпукла вверх

Асимптоты $x=2$, $x=-2$ и $y=-x$.

9. Используя полученные данные, строим график функции.



Упражнения

1. Применяя правило Лопиталя, найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos 2x\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi x$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+4^x\right)^{\frac{1}{x}}$; к) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Ответ: а) 2; б) $1/2$; в) $-1/2$; г) $8/25$; д) $\cos 10$; е) -2; ж) $1/\pi$; з) $2/3$; и) 4; к) 1.

2. Докажите, что $\arcsin x=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $-1<x<1$.

3. Найдите, при каких значениях a функция $f(x)=x^3-ax$ возрастает на всей числовой оси.

Ответ: $a\le 0$.

4. Найдите области монотонности функций:

а) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$; б) $f(x)=x-e^x$; в) $f(x)=x+\cos x$; г) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

Ответ: а) на $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ возрастает, на $(-1,1)$ убывает; б) на $(-\infty,0)$ возрастает, на $(0,+\infty)$ убывает; в) возрастает всюду; г) на $(0,1)$, $(1,e)$ убывает, на $(e,+\infty)$ возрастает.

5. Пользуясь первой производной, найдите точки экстремума функций:

а) $f(x)=x-\ln\left(1+x^2\right)$; б) $f(x)=x^2\sqrt[3]{6x-7}$;

в) $f(x)=x^{2/3}+x^{5/3}$; г) $f(x)=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Ответ: а) нет точек экстремума; б) $x_1=0$ — точка максимума, $x_2=1$ — точка минимума; в) $x_1=0$ — точка минимума, $x_2=-5/2$ — точка максимума; г) $x_1=5$ и $x_2=-1$ — точки минимума, $x_3=1/2$ — точка максимума.

6. Пользуясь производными высших порядков, исследуйте на экстремум функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{5}{3}x^3+3x^2$; б) $f(x)=e^x+e^{-x}-2\sin x$;

в) $f(x)=x^3e^{-x}$; г) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

Ответ: а) $x_1=0$ и $x_2=3$ — точка минимума; $x_3=2$ — точка максимума; б) нет точек экстремума; в) $x=3$ — точка максимума; г) $x=e$ — точка минимума.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных множествах:

а) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на $[-1,2]$; б) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на $[0,1]$; в) $y=\sqrt{x(10-x)}$ на $[0,10]$.

Ответ: а) 2 и –10; б) 1 и $3/5$; в) 5 и 0.

8. Найдите интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба для функций:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=x^4(12\ln x-7)$.

Ответ: а) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0,\sqrt{3}\right)$ — выпукла вниз, $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ — выпукла вверх, $\pm\sqrt{3}$ и 0 — точки перегиба; б) $(0,1)$ — выпукла вверх, $(1,+\infty)$ — выпукла вниз, $x=1$ — точка перегиба.

9. Найдите асимптоты функций:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\dfrac{\left|x^3\right|}{x^2+9}$;

в) $f(x)=\sqrt[4]{16x^4+1}$; г) $f(x)=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

Ответ: а) $x=3$ и $x=1$ — вертикальные двусторонние асимптоты, $y=x+4$ — наклонная двусторонняя асимптота; б) $y=-x$ — левая асимптота, $y=x$ — правая асимптота; в) $y=\pm 2x$ — односторонние асимптоты; г) $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ — двусторонняя асимптота.

10. Проведите полное исследование и постройте графики следующих функций:

а) $f(x)=\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$; б) $y=2xe^{-x^2/2}$; в) $y=\sqrt{1-\ln^2 x}$;

г) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

3. Интегральное исчисление

3.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении для заданной функции мы находим производную или дифференциал. В интегральном исчислении будем решать обратную задачу, т.е. по заданным производным или дифференциалам находить саму функцию.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на множестве X, если в каждой точке $x \in X$ выполняется $F'(x) = f(x)$. Например, функция $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = \cos^2 x$ на всей числовой оси, так как

$$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\cos 2x}{4} = \frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x.$$

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Функция $F(x) = \sin x + C$, где C — любая константа, также первообразная для $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

В общем случае справедливо утверждение: если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные для функции $f(x)$, то они или совпадают, или отличаются на константу.

Действительно, по определению первообразной $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $F_2'(x) - F_1'(x) = \left[F_2(x) - F_1(x)\right]' = 0$. Из теоремы 1 подразд. 2.7 следует, что $F_2(x) - F_1(x) = C$, т.е. $F_2(x) = F_1(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Из этого утверждения следует, что если $F(x)$ какая-либо первообразная для $f(x)$ на множестве X, то множество всех первообразных для $f(x)$ можно задать в виде $\Phi(x) + C$. Чтобы выделить конкретную первообразную, нужно задать дополнительные условия, например задать точку, через которую будет проходить график первообразной.

П р и м е р 1. Среди всех первообразных функций $f(x) = 2x$ найти ту, которая проходит через точку $M_0(1,2)$.

Решение: так как $\left(x^2\right)' = 2x$, то функция $F(x) = x^2$ является одной из первообразных для $f(x) = 2x$. Все остальные первообразные можно задать в виде $\Phi(x) = x^2 + C$. По условию кривая $y = x^2 + C$ должна проходить через точку $M_0(1,2)$, следовательно, $2 = 1 + C$, отсюда $C = 1$, и первообразная $F(x) = x^2 + 1$ — искомая.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на множестве X называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается

$\int f(x)dx$; $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение.

По определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3.1}$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$.

Отметим некоторые свойства неопределенного интеграла, которые следуют из (3.1), определения первообразной, дифференциала и правил дифференцирования функций:

1) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$;

2) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx$; $\alpha = \mathrm{const}$;

5) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

6) $\int \left[\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)\right] dx = \lambda\int f_1(x)dx + \mu\int f_2(x)dx$.

Процесс отыскания неопределенного интеграла называют интегрированием функции. Как видим, операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны (см. свойства 1 и 2).

Приведем таблицу интегралов от некоторых элементарных функций, которую легко проверить дифференцированием (свойство 1).

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^{\lambda} dx = \dfrac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + C$, $\lambda \neq -1$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int \sin axdx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$, $a = \mathrm{const}$.

5. $\int \cos axdx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$, $a = \mathrm{const}$.

6. $\int a^{\alpha x} dx = \dfrac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a} + C$, α, a — константы, $a \neq 1$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$, $-a < x < a$, $a > 0$, $a = \mathrm{const}$.

8. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$, $a = \mathrm{const}$.

9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a=\text{const},\quad a\neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,\quad a=\text{const},\quad a\neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax}=\frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\,ax+\text{C},\quad a\neq 0,\quad a=\text{const}.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax}=-\frac{1}{a}\,\mathrm{ctg}\,ax+C,\quad a\neq 0,\quad a=\text{const}.$

3.2. Простейшие методы интегрирования

Многие интегралы легко свести к табличным, преобразуя подынтегральные выражения и используя свойства интеграла.

Пример 1. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}}$; б) $\int \frac{\left(3\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}$; д) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$.

Решение:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}}=\int x^{-5/4}dx=\frac{1}{\left(-\frac{5}{4}\right)+1}x^{-\frac{5}{4}+1}+C=-4x^{-1/4}+C=\frac{-4}{\sqrt[4]{x}}+C$ (использовали табличный интеграл 2 при $\lambda=-5/4$);

б) $\int \frac{\left(3\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2\sqrt{x}}dx=\int \frac{9x+6\sqrt{x}+1}{x^2\sqrt{x}}dx=9\int x^{-3/2}dx+6\int x^{-2}dx+\int x^{-5/2}dx=$

$=18x^{1/2}-6x^{-1}-\frac{2}{3}x^{-2/3}+C=18\sqrt{x}-\frac{6}{x}-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}+C$ (использовали табличный интеграл 2 при различных значениях λ и свойство 6 неопределенного интеграла);

в) $\int \frac{dx}{4x^2-1}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot(1/2)}\ln\left|\frac{x-1/2}{x+1/2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$ (использовано свойство 4 интеграла и табличный интеграл 9 при $a=1/2$);

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(1/9)}}=\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+(1/9)}\right|+C$ (применен табличный интеграл 10 при $a^2=1/9$);

д) $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+4/9} = \frac{1}{9\,(2/3)}\operatorname{arctg}\frac{x}{2/3} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2} + C$

(применен табличный интеграл 8 при $a = 2/3$).

Иногда интеграл $\int f(x)dx$ удается упростить путем замены переменной $x = \varphi(t)$. В результате $\int f(x)dx = \int [\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$. Один из интегралов в этом равенстве может оказаться более простым. Его и находят.

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int (2x+4)^{15}dx$; б) $\int \sin(5x+2)dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; г) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;

д) $\int xe^{x^2}dx$; е) $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Решение:

а) в интеграле $\int (2x+4)^{15}dx$ сделаем замену $t = 2x+4$, тогда $x = \frac{t-4}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$. Получаем

$$\int (2x+4)^{15}dx = \frac{1}{2}\int t^{15}dt = \frac{1}{2\cdot 16}t^{16} + C = \frac{1}{32}(2x+4)^{16} + C;$$

б) делаем замену $5x+2=t$; $x=\frac{t-2}{5}$, $dx=\frac{dt}{5}$, поэтому

$$\int \sin(5x+2)dx = \frac{1}{5}\int \sin t dt = \frac{-1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + C;$$

в) если положить $t = \ln x$, то $\frac{dx}{x} = dt$, а потому

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}dx}{x} = \int \sqrt[3]{t}dt = \frac{3}{4}t^{4/3} + C = \frac{3}{4}(\ln x)^{4/3} + C;$$

г) положим $1+x^2=t$, тогда $2xdx=dt$, $xdx=\frac{dt}{2}$, следовательно,

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C;$$

д) положим $t = x^2$, тогда $dt = 2xdx$, поэтому

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$$

е) можем записать $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+16}$.

Сделаем замену $x+2=t$, $dx=dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C$$

(использован табличный интеграл 8 при $a=4$).

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда $d(U \cdot V) = VdU + UdV$ или $UdV = d(U \cdot V) - VdU$.

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\int UdV = U \cdot V - \int VdU. \qquad (3.2)$$

Выражение (3.2) называют формулой интегрирования по частям.

П р и м е р 3. Применяя формулу интегрирования по частям, найти $\int (4x+3)\sin 2xdx$.

Решение: положим $U=4x+3$, $dV=\sin 2xdx$. Тогда $dU=4dx$, $V=\int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. В качестве функции $V(x)$ можно взять любую из первообразных функции $\sin 2x$. Обычно полагают $C=0$. По формуле (3.2) находим $\int (4x+3)\sin 2xdx = (4x+3)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(4x+3)\cos 2x + \sin 2x + C$.

Некоторые интегралы от тригонометрических выражений удается найти, применяя формулы тригонометрии или формулу замены переменных.

П р и м е р 4. Найти: а) $\int \sin^2 xdx$; б) $\int \sin 5x \cdot \sin 7xdx$; в) $\int \cos^3 x \sin^8 xdx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение:

а) по формулам тригонометрии $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, поэтому $\int \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$;

б) так как $\sin 5x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x)$, то $\int \sin 5x \cdot \sin 7x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 12x)\, dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C;$$

в) делаем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$. Поэтому

$$\int \cos^3 x \sin^8 x dx = \int \cos^2 x \sin^8 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^8 x \cos x dx =$$

$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^8 x d\sin x = \int \left(1 - t^2\right) t^8 dt = \int \left(t^8 - t^{10}\right) dt = \frac{t^9}{9} -$$

$$- \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(\sin x)^9}{9} - \frac{(\sin x)^{11}}{11} + C;$$

г) сделаем замену $t = \mathrm{tg} x$. Тогда $x = \mathrm{arctg} t$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$,

$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, следовательно, $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{1+t^2} = \int \left(1+t^2\right)^2 dt =$

$$= \int \left(1 + 2t^2 + t^4\right) dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \mathrm{tg} x + \frac{2}{3}(\mathrm{tg}\, x)^3 + \frac{1}{5}(\mathrm{tg}\, x)^5 + C.$$

Заметим, что для неопределенных интегралов имеются подробные справочники, в которых можно найти почти любой интеграл, встречающийся в практических задачах.

Доказано, что любая непрерывная функция имеет первообразную, но далеко не всегда она выражается через элементарные функции. Появляются «неберущиеся» интегралы, т.е. существуют элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными. Примеры таких интегралов: $\int e^{x^2} dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ и другие.

Упражнения

1. Найдите интегралы, применяя свойства интеграла и таблицы интегралов:

1) $\int \left(9x^2 + 4x + 5\right) dx$; 2) $\int x(x+2)(x+3) dx$;

3) $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^2+6}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2-5}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 8) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; 9) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx$; 10) $\int \cos 5x dx$.

Ответ: 1) $3x^3+2x^2+5x+C$; 2) $\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+3x^2+C$;

3) $\frac{3x^4\left(\sqrt[3]{x}\right)}{13}-\frac{3}{7}x^2\left(\sqrt[3]{x}\right)-6\sqrt[3]{x}+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}}+C$;

5) $\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$; 6) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$; 7) $\arcsin\frac{x}{4}+C$;

8) $\operatorname{tg}x-x+C$; 9) $x+2\operatorname{arctg}x+C$; 10) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$.

2. Применяя простейшие замены переменной, найдите интегралы:

1) $\int(8x+2)^{10}dx$; 2) $\int x(5x+4)^8dx$; 3) $\int x\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

4) $\int\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{1+x^2}dx$; 5) $\int\sin^4 3x\cdot\cos 3xdx$; 6) $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; 7) $\int\frac{x^3dx}{x^4+5}$;

8) $\int\frac{e^xdx}{e^x+4}$; 9) $\int\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$; 10) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}$;

11) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; 12) $\int\frac{x^3dx}{1+x^8}$; 13) $\int\frac{x^5dx}{1+x^{10}}$; 14) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

15) $\int\frac{e^{5x}dx}{\sqrt{1-e^{10x}}}$; 16) $\int\frac{\sin dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$; 17) $\int x^3e^{x^4}dx$; 18) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x$;

19) $\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; 20) $\int x\sin\left(x^2+5\right)dx$.

Ответ: 1) $\frac{1}{88}(8x+2)^{11}+C$; 2) $\frac{(5x+4)^{10}}{50}-\frac{4(5x+4)^9}{45}+C$;

3) $\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{4/3}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3x+C$; 5) $\frac{1}{15}(\sin 3x)^5+C$;

6) $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$; 7) $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+5\right)+C$; 8) $\ln\left(e^x+4\right)+C$;

9) $\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x)+C$; 10) $\frac{1}{2}\ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right|+C$; 11) $\ln\left|\ln x\right|+C$;

12) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4+C$; 13) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x^5+C$; 14) $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$;

15) $\frac{1}{5}\arcsin e^{5x}+C$; 16) $-\arcsin\frac{\cos x}{2}+C$; 17) $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$;

18) $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$; 19) $e^{\operatorname{tg} x}+C$; 20) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+5\right)$.

3. Найдите следующие интегралы, содержащие трехчлен ax^2+bx+c:

1) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$; 2) $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

3) $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; 4) $\int\frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 2) $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$;

3) $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{5}+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C$.

4. Применяя формулу интегрирования по частям, найдите интегралы:

1) $\int\ln xdx$; 2) $\int\operatorname{arctg} xdx$; 3) $\int x\sin xdx$;

4) $\int x\cos 3xdx$; 5) $\int x^2e^{3x}dx$; 6) $\int\ln^2 xdx$.

Ответ: 1) $x\ln x-x+C$; 2) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$;

3) $\sin x-x\cos x+C$; 4) $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C$;

5) $\frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2-6x+2\right)+C$; 6) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

5. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int\cos^3 xdx$; 2) $\int\sin^4 xdx$; 3) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$;

4) $\int\sin 3x\cos 5xdx$; 5) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$.

Ответ: 1) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$;

2) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C$;

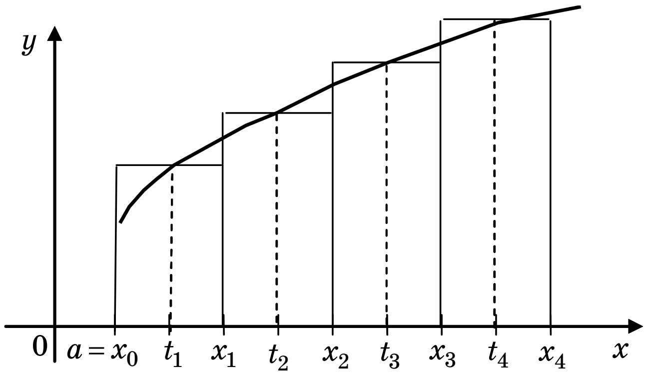
3) $-\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$; 4) $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C$; 5) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

Результат интегрирования можно проверить также дифференцированием.

3.3. Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть дана ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$. Точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На каждом частичном участке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем по точке t_i. Через λ обозначим $\max|\Delta x_i|$, через R — способ разбиения отрезка $[a,b]$; через T — способ выбора точек t_i. Образуем сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i. \tag{3.3}$$



Сумма (3.3), зависящая от переменных λ, R и T, называется интегральной суммой Римана для функции $f(x)$ на $[a,b]$. Предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i,$$

если он существует, конечен и не зависит ни от R, ни от T, называется определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману. Класс интегрируемых функций довольно широк. Доказано, что, например, любая непрерывная функция, а также функция, имеющая на $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

Заметим, что если $\lambda \to 0$, то $n \to \infty$, обратное неверно, т.е. из того, что $n \to \infty$, не следует, что $\lambda \to 0$.

Если $f(x) \geq 0$, то произведение $\Delta S_i = f(t_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(t_i)$. Сумма Римана приближенно равна площади криволинейной трапеции — фигуры, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, справа и слева — прямыми $x = a$ и $x = b$, а сверху — графиком функции $y = f(x)$. Точность этого приближения тем выше, чем меньше $\lambda = \max|\Delta x_i|$. Полагают

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Как видим, величина $\int_a^b f(x)dx$ геометрически означает площадь криволинейной трапеции, которую мы только что охарактеризовали.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$; 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где c — любая точка из $[a,b]$;

4) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$, $\lambda = \text{const}$;

5) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

6) если $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$;

7) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$;

8) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на нем существует такая точка ξ, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ (теорема о среднем).

3.4. Формула Ньютона — Лейбница

Вычислить определенный интеграл, исходя из определения, довольно затруднительно и удается лишь в простейших случаях. Получим вычислительную формулу для интеграла $\int_a^b f(x)dx$. С этой целью рассмотрим функцию $J(x)=\int_a^b f(t)dt$, называемую функцией от переменного верхнего предела. Переменная интегрирования обозначена буквой t, чтобы не путать ее с переменным верхним пределом x.

Теорема 1. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $J(x)$ дифференцируема в любой точке x_0 из $[a,b]$ и $J'(x)=f(x)$, т.е. функция $J(x)$ является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Пусть x_0 — любая точка из $[a,b]$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{J(x_0+\Delta x)-J(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dx-\int_a^{x_0} f(t)dt\right]=$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$ (применили свойство 3 интеграла). Далее, применяя свойство 8, получим: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{J(x_0+\Delta x)-J(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=$ $=f(x_0)$, так как точка ξ лежит между точками x_0 и $x_0+\Delta x$. Мы показали, что $J'(x_0)$ существует и $J'(x_0)=f(x_0)$. Поскольку x_0 — любая точка из $[a,b]$, то $J'(x)=f(x)$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a), \tag{3.4}$$

где $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. Функция $J(x)=\int_a^x f(t)dt$ по теореме 1 является одной из первообразных для функции $f(x)$. Любую другую первообразную $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C. \tag{3.5}$$

Полагая в (3.5) $x = a$ и применяя свойство 1 интеграла, получим $F(a) = C$. После этого положим в (3.5) $x = b$. Находим $F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + F(a)$. Отсюда и следует формула (3.4).

Формула (3.4) получена почти одновременно Ньютоном и Лейбницем и носит их имя — формула Ньютона — Лейбница. Формулу (3.4) записывают в виде $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a$, считая, что $F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)$.

Пример 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}dx$; б) $\int\limits_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; в) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение:

а) $\int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \int\limits_0^8 x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot 8^{4/3} = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12;$

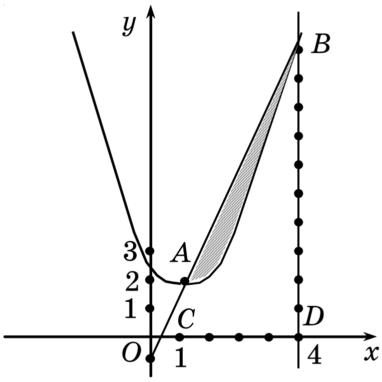
б) $\int\limits_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^0 (25+3x)^{-1/2}d(25+3x) = \frac{2}{3}(25+3x)^{1/2}\Big|_{-3}^0 =$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{25} - \sqrt{16}\right) = \frac{2}{3}(5-4) = \frac{2}{3}.$

в) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_e^{e^2} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln\left(\ln e^2\right) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функций $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Решение: выполнив преобразования $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, видим, что графиком функции $y = x^2 - 2x + 3$ является парабола с вершиной в точке (1,2) и осью симметрии, параллельной оси Oy.



Графиком функции $y = 3x - 1$ является прямая линия. Искомую площадь S заштрихованной фигуры можно найти как разность площадей S_1 трапеции $CABD$ и площади S_2 криволинейной трапеции $CABD$. Решив уравнение $3x - 1 = x^2 - 2x + 3$, или $x^2 - 5x + 4 = 0$, находим $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Следовательно: $S_1=\int\limits_1^4(3x-1)dx$, $S_2=\int\limits_1^4\left(x^2-2x+3\right)dx$, $S=S_1-S_2=$

$$=\int\limits_1^4\left(3x-1-\left(x^2-2x+3\right)\right)dx=\int\limits_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4=$$

$$=-\frac{64}{3}+40-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=\frac{-128+240-96+2-15+24}{6}=\frac{266-239}{6}=$$

$$=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}\text{(кв.ед.)}$$

Как и в случае неопределенного интеграла, применяют в некоторых интегралах вида $\int\limits_a^b U(x)V(x)dx$ формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b U(x)dV=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b VdU. \qquad (3.6)$$

П р и м е р 3. Вычислить интеграл $J=\int\limits_0^{\pi/2}(2x+3)\cos 6x dx$.

Решение: положим в формуле (3.6) $2x+3=U(x)$, $dV=\cos 6x dx$, $V=\frac{1}{6}\sin 6x$.

Тогда $J=(2x+3)\cdot\frac{1}{6}\sin 6x\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{6}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin 6x dx$. Первое слагаемое на верхнем и нижнем пределах обращается в нуль. Поэтому

$$J=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{18}\left(\cos 3\pi-\cos 0\right)=\frac{1}{18}(-1-1)=-\frac{1}{9}.$$

Очень часто применяется формула замены переменной

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt, \qquad (3.7)$$

где функция $\varphi(t)$ дифференцируема на (α,β) и осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[\alpha,\beta]$ в отрезок $[a,b]$, а функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

В случае непрерывной функции $f(x)$ формула (3.7) следует из формул замены переменной в неопределенном интеграле и формулы Ньютона — Лейбница.

Пример 4. Вычислить интегралы:

а) $J_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$; б) $J_2 = \int\limits_1^{22} \frac{dx}{4+\sqrt{x+3}}$; в) $J_3 = \int\limits_1^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение:

а) положим $x = \sin t$. Функция $\varphi(t) = \sin t$ отображает отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ в отрезок $[0,1]$. По формуле (3.7) имеем:

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4};$$

б) сделаем замену $x + 3 = t^2$. При $x = 1$ переменная t принимает значение $t_1 = 2$, а при $x = 22$ — значение $t_2 = 5$. Поэтому $J_2 = \int\limits_2^5 \frac{2tdt}{4+t} =$

$$= 2\int\limits_2^5 \frac{t+4-4}{4+t} dt = 2(t - 4\ln(4+t))\Big|_2^5 = 2[5 - 4\ln 9 - 2 + 4\ln 6] = 2\left(3 - 4\ln\frac{9}{6}\right) =$$

$$= 6 - 8\ln 1,5;$$

$$\text{в) } \int\limits_0^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} = \left\{\begin{matrix} x = t^2, \\ dx = 2tdt, \quad 0 \le t \le 2 \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^2 \frac{2t^3dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t^3+1-1}{1+t} dt =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right)\Big|_0^2 = 2\left(\frac{8}{3} - 2 + 2 - \ln 3\right) =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - \ln 3\right).$$

3.5. Несобственные интегралы

Мы определили интеграл от ограниченных функций, заданных на конечном отрезке $[a,b]$. Интегралы от функций, заданных на $[a,+\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty,+\infty)$, называют несобственными интегралами первого рода, а интегралы от неограниченных функций — несобственными интегралами второго рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[a,+\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a,b]$ при любом b, т.е. при любых значениях b существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{3.8}$$

обозначаемый $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, называется несобственным интегралом первого рода. Если предел (3.8) существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $J = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение: если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} (\ln x)_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится. Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \infty \ \text{ при } \alpha < 1, \\ \dfrac{-1}{1-\alpha} \ \text{ при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится при $\alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$. При $\alpha > 1$ этот интеграл равен $\frac{1}{\alpha - 1}$.

Можно доказать, что для сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ достаточно, чтобы функция $|f(x)|$ была бесконечно малой при $x \to \infty$ порядка выше первого относительно бесконечно малой $\beta(x) = \frac{1}{x}$. Например, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5} + 1}$ сходится, так как подынтегральная функция имеет порядок малости $\alpha = \frac{5}{3} > 1$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = \frac{1}{x}$ при $\to +\infty$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right].$$

Видим, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, если существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, в противном случае интеграл расходится. Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$, если этот предел существует и конечен. Тогда

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \tag{3.9}$$

Выражение (3.9) — это формула Ньютона — Лейбница для несобственных интегралов первого рода. Совершенно аналогично можно определить несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$ и получить

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty), \end{cases} \tag{3.10}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, $F(-\infty) = \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$.

Пример 2. Вычислить несобственные интегралы

а) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$, б) $\int_{-\infty}^{2} \dfrac{dx}{x^2-4x+8}$, в) $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[5]{\ln x}}$ или доказать расходимость.

Решение:

а) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^b - \dfrac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-1\right) = \dfrac{1}{2}$

(применена формула (3.9));

б) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int\limits_{-\infty}^{2} \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+4} = \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Big|_a^2 =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{a-2}{2}\right) = +\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{arctg} 0 = 0$, а

$\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a-2}{2} = -\frac{\pi}{2}$ (применена первая формула в (3.10));

в) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \int\limits_{e}^{+\infty} \frac{d\ln x}{(\ln x)^{1/3}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{3}{2}(\ln x)^{2/3}\Big|_e^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{3}{2}\left[(\ln b)^{2/3} - (\ln e)^{2/3}\right] =$

$= +\infty$. Интеграл расходится.

Переходим к интегралам от неограниченных функций. Точку $x = x_0$ будем называть особой для функции $f(x)$, если функция не ограничена в окрестности этой точки. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b)$, а точка b особая, причем $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b-\delta]$ при любых δ (но $b - \delta > a$), т.е. существует интеграл $J = \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$. Предел

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx \tag{3.11}$$

называется несобственным интегралом второго рода. Если предел (3.11) существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится. Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода, если функция определена на $(a,b]$ и точка a особая, как предел вида $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$. Если же особая точка c лежит внутри отрезка $[a,b]$, то несобственным интегралом второго рода называют сумму пределов

$$\lim_{\delta_1\to 0} \int\limits_{a}^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2\to 0} \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx.$$

Можно доказать, что для сходимости несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ (точка b — особая) достаточно, чтобы функция $|f(x)|$ при $x \to b$ была бесконечно большой порядка ниже первого относительно бесконечно большой $\varphi(x)=\dfrac{1}{b-x}$. Если известна первообразная функция $F(x)$ для $f(x)$, то вычисление несобственного интеграла (3.11) сводится к отысканию предела $\lim\limits_{x\to b}F(x)$.

Пример 3. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_4^8\dfrac{dx}{\sqrt{x-4}}$.

Решение:

а) точка $x=1$ является особой для первого интеграла, поэтому

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\delta}=\lim_{\delta\to 0}\left[\arcsin(1-\delta)-\arcsin 0\right]=$$

$$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2};$$

б) для второго интеграла точка $x=4$ является особой, поэтому

$$\int\limits_4^8\frac{dx}{\sqrt{x-4}}=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{4+\delta}^8\frac{dx}{\sqrt{x-4}}=2\lim_{\delta\to 0}\sqrt{x-4}\,\Big|_{4+\delta}^8=2\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt{8-4}+\sqrt{4+\delta-4}\right)=8.$$

Упражнения

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{1+x}$; б) $\int\limits_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_1^2\left(x^2-2x+3\right)dx$; г) $\int\limits_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

д) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; е) $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ж) $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$; з) $\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx$.

Ответ: а) $\ln 3$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{7}{3}$; г) $\dfrac{100}{3}$; д) $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; е) $\pi/6$; ж) $\ln 2$; з) $1/4+\pi/8$.

2. Применяя подходящую замену переменной интегрирования, вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^9\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ (замена $e^x-1=t^2$);

в) $\int\limits_2^{29}\dfrac{(x-2)^{2/3}dx}{(x-2)^{2/3}+3}$ (замена $x-2=t^3$);

г) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ (замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$);

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$ (замена $t = \operatorname{tg} x$); е) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; ж) $\int\limits_0^{5} \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

Ответ: а) $6 - 2\ln 4$; б) $2 - \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{9}{\sqrt{3}}\pi$; г) $\pi/\sqrt{5}$; д) $\pi/4$;

е) $\sqrt{3} - \pi/3$; ж) $\frac{2}{3}(3 - \ln 4)$.

3. Вычислите определенные интегралы, применяя формулу интегрирования по частям:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$; б) $\int\limits_1^{e} \ln x dx$; в) $\int\limits_0^{1} x^3 e^{2x^2+1} dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx$;

д) $\int\limits_1^{e} x\ln x dx$; е) $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x dx$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} - 1$; б) 1; в) $\frac{1}{8}\left(e + e^3\right)$; г) 1; д) $\frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$; е) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

4. Вычислите площади следующих фигур:

а) ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью абцисс;

б) ограниченной графиком функции $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$;

в) ограниченной кривой $y^3 = x$, прямыми $y = 1$ и $x = 8$;

г) ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью Oy;

д) ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

Ответ: а) $32/3$; б) 1; в) $45/4$; г) 12; д) $9/2$.

5. Вычислите несобственные интегралы первого рода (или установите расходимость) :

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; в) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; г) $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x} dx$;

д) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; е) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$.

Ответ: а) $\pi/2$; б) $\pi/\sqrt{5}$; в) расходится; г) $1/2$; д) $\frac{1}{2\ln^2 3}$; е) $\pi^2/8$.

6. Вычислите несобственные интегралы второго рода (или установите расходимость) :

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{ctg}\, x dx$.

Ответ: а) $4/3$; б) расходится; в) $1/\ln 2$; г) $\pi/2$; д) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$; е) расходится.

3.6. Понятие об интегралах от функции многих переменных

В подразд. 3.3 мы определили интеграл от функции одного аргумента $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$. Функция двух аргументов $z = f(x,y)$ может быть задана в некоторой области D плоскости xOy или на кривой L этой плоскости. Функция трех аргументов $u = (x,y,z)$ может быть определена в некоторой пространственной области V, на пространственной кривой L, а также на поверхности S. При этом кривые и поверхности могут быть или ориентированными, или неориентированными. Кривая L называется гладкой, если в каждой ее точке имеется касательная, положение которой меняется непрерывно при движении по кривой. Гладкая кривая называется ориентированной, если на касательной указано направление, считающееся положительным. Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке имеется касательная плоскость, положение которой меняется непрерывно при движении по поверхности. Поверхность S называется ориентированной, если в каждой ее точке указано направление нормали — вектора, перпендикулярного касательной плоскости. Будем называть многообразием и обозначать его буквой A любое из следующих множеств: 1) отрезок $[a,b]$; 2) область D плоскости xOy; 3) неориентированную плоскую или пространственную кривую L; 4) ориентированную пространственную или плоскую кривую; 5) трехмерную область V; 6) неориентированную поверхность S; 7) ориентированную поверхность S. Интеграл по каждому виду многообразий строится по одной схеме. Пусть дано ограниченное многообразие A и на нем ограниченная функция $f(M)$, где M — точки многобразия. Предполагается, что выбрана каким-либо способом декартова система координат $Oxyz$ в пространстве или Oxy на плоскости. В случае ориентированных многообразий в каждой точке M определены функции $\cos\alpha(M)$, $\cos\beta(M)$, $\cos\gamma(M)$, где α,β,γ — углы, которые образуют касательные к кривым или нормали к поверхностям с соответствующими осями координат. Разобьем многообразие A произвольным образом на n частей $\Delta A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ того же вида, что и само многообразие A. Способ разбиения обозначим через R. В каждой из частей ΔA_k выберем по любой точке M_k. Способ выбора точек обозначим через T. Пусть $|\Delta A_k|$ — мера множества ΔA_k, т.е. длина, площадь или объем в зависимости от строения многообразия A, λ — диаметр множества ΔA_k, т.е. наибольшее возможное расстояние между точками множества ΔA_k. Сумма

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)|\Delta A_k| \tag{3.12}$$

для неориентированных многообразий, и каждая из сумм

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cos\alpha(M_k)|\Delta A_k|, \tag{3.13}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cos\beta(M_k)|\Delta A_k|, \tag{3.14}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cos\gamma(M_k)|\Delta A_k| \tag{3.15}$$

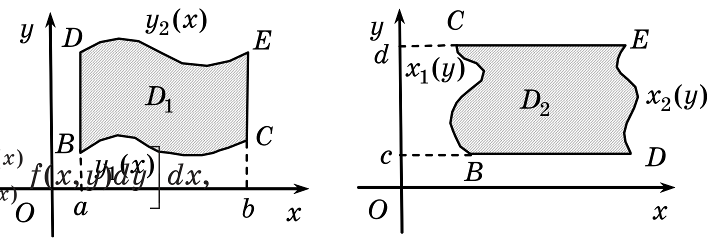
для ориентированных многообразий называется интегральной суммой Римана от функции $f(M)$ по многообразию A. Предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$, если он существует, конечен и не зависит ни от R, ни от T, называется интегралом Римана от функции $f(M)$ по многообразию A и обозначается $\int\limits_A f(M)dA$. Функция $f(M)$ в этом случае называется интегрируемой по многообразию A. В подробных курсах математики выясняются условия интегрируемости функции. Мы на этом останавливаться не будем. Важно усвоить общую идею интегрирования.

Если A — плоская область D, расположенная в плоскости xOy, то интеграл называется двойным и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$; если A — пространственная область V, в которой задана декартова система координат $Oxyz$, то интеграл называется тройным и обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$. Если многообразие A — неориентированная кривая L или неориентированная поверхность S, то соответствующие интегралы называются криволинейными или поверхностными первого рода и обозначаются $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ или $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$. В случае ориентированных кривых или поверхностей интегралы называются криволинейными или поверхностными второго рода. Их обозначают в зависимости от того, пределом какой из сумм (3.13), (3.14) или (3.15) они являются: $\int\limits_L f(x,y,z)dx$, $\int\limits_L f(x,y,z)dy$, $\int\limits_L f(x,y,z)dz$ — для криволинейных интегралов второго рода; $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$, $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$ — для поверхностных интегралов второго рода.

В описанной схеме определенный интеграл, изученный нами в подразд. 3.3, получается, если в качестве многообразия A взять отрезок $[a,b]$ оси Ox.

Для каждого из типов интегралов получены формулы, которые сводят их вычисление к вычислению определенных интегралов.

Пусть даны плоские области D_1 или D_2, приведенные на рисунках.



$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right] dx,$$

В них задана непрерывная функция $f(x,y)$. Через $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ обозначены уравнения кривых BC и DE соответственно на каждом из рисунков. Будем предполагать, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$, а функции $x_1(y)$, $x_2(y)$ непрерывны на $[c,d]$. Тогда можно доказать, что

(3.16)

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right] dy. \qquad (3.17)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл и получают в (3.16) функцию $\varphi(x)$, а в (3.17) — $\varphi(y)$, затем функцию интегрируют по отрезку $[a,b]$ в (3.16) или по отрезку $[c,d]$ в (3.17). Если область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, то все пределы интегрирования постоянны.

Если $f(x,y)>0$, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ геометрически равен объему тела, ограниченного снизу областью D, сверху — поверхностью, заданной уравнением $z=f(x,y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Интеграл $\iint\limits_D dxdy$ численно равен площади области D.

Пример 1. Вычислить двойные интегралы:

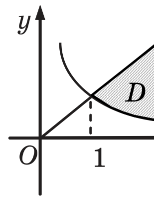
а) $\iint\limits_D \dfrac{x^2dxdy}{1+y^2}$, где D — прямоугольник $\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le 1\}$;

б) $\iint\limits_D xdxdy$, где D — треугольник с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$;

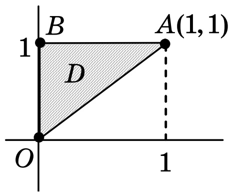
в) $\iint\limits_D \dfrac{x^2dxdy}{y^2}$, где $D_2\left\{1\le x\le 2;\ \dfrac{1}{x}\le y\le x\right\}$.

Решение:

а) $\iint\limits_D \dfrac{x^2dxdy}{1+y^2}=\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^1\dfrac{x^2dy}{1+y^2}\right)dx=\int\limits_0^2 x^2\left(\operatorname{arctg} y\Big|_0^1\right)dx=\dfrac{\pi}{4}\int\limits_0^2 x^2dx=\dfrac{\pi}{4}\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2=\dfrac{2}{3}\pi;$



б) изобразим область D. Прямая OA имеет, очевидно, уравнение $y=x$. Применяем формулу (3.16):



$$\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 xdy\right)dx=\int\limits_0^1\left(xy\Big|_x^1\right)dx=\int\limits_0^1 x(1-x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$

в) в данном случае область D имеет вид, изображенный на рисунке. Находим

$$\iint\limits_D\frac{x^2dxdy}{y^2}=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}\right)dx=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int\limits_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\left(\frac{16}{4}-\frac{4}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\left(4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.$$

Пусть пространственная область V снизу ограничена поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x,y)$, а по сторонам — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Такое тело называют z-цилиндрическим. Через D обозначим проекцию области V на плоскость xOy.

Тогда

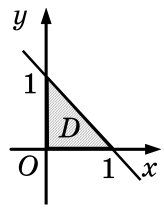
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dxdy. \qquad (3.18)$$

Аналогично можно записать вычислительные формулы для тройного интеграла в случае y-цилиндрического и x-цилиндрического тела.

Пример 2. Пусть область V задана неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$. Вычислить $J = \iiint\limits_V x\,dxdydz.$

Решение: в данном случае переменная величина z изменяется от 0 до $z = 1 - x - y$. Поэтому $J = \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{1-x-y} x\,dz\right) dxdy.$

Область D — проекция области V на плоскость xOy — есть треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Следовательно,



$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} x\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy\right) dy = \int\limits_0^1 \left[\left(xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2}\right] dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x}{2} + x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Если пространственная кривая L задана параметрически в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 < t < t_2$, где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — дифференцируемы, то криволинейный интеграл первого рода $J = \int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ может быть вычислен по формуле

$$J = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),\, y(t),\, z(t)\right]\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 + \left(z_t'\right)^2}\,dt. \qquad (3.19)$$

Для криволинейных интегралов второго рода справедливы формулы:

(3.20)

В случае если кривая L расположена в плоскости xOy, в формулах (3.19) и (3.20) надо положить $z=0$. Если плоская кривая задана явно уравнением $y=y(x),\ a\le x\le b$, где $y(x)$ — дифференцируемая функция, то для криволинейного интеграла первого рода $J=\int\limits_L f(x,y)\,dl$ вычислительная формула принимает вид

$$J=\int\limits_a^b f\left[x,y(x)\right]\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx, \qquad (3.21)$$

а для криволинейных интегралов второго рода имеем

$$\int\limits_L f(x,y)dx=\int\limits_a^b f\left[x,y(x)\right]dx,\quad \int\limits_L f(x,y)dy=\int\limits_a^b f\left[x,y(x)\right]y'(x)dx. \qquad (3.22)$$

Подобные формулы получены и для вычисления поверхностных интегралов, они сводят их к двойным интегралам.

Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода применяются для вычисления некоторых величин, распределенных по кривой или поверхности (масса, заряд и т.д.). Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода широко используются при изучении векторных полей.

П р и м е р 3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+z)dl$, где L — дуга кривой, заданной параметрически в виде $x=t,\ y=\dfrac{3t^2}{\sqrt{6}},\ z=t^3,\ 0\le t\le 1.$

Решение: используем формулу (3.19). Так как $x_t'=1,\ y_t'=\dfrac{6t}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}t,$ $z_t'=3t^2$, то $J=\int\limits_L (x+z)dl=\int\limits_0^1 (t+t^3)\sqrt{1+6t^2+9t^4}\,dt=\int\limits_0^1\left(t+t^3\right)\left(1+3t^2\right)dt=$

$$=\int\limits_0^1\left(3t^5+4t^3+t\right)dt=\left(\frac{3t^6}{6}+\frac{4t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2.$$

$\int\limits_L f(x,y,z)d$

$\int\limits_L f(x,y,z)d$

$\int\limits_L f(x,y,z)d$

Заметим, что интеграл $J=\int\limits_L dl=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$ равен длине дуги кривой L от точки $M[x(t_1),y(t_1),z(t_1)]$ до точки $N[x(t_2),y(t_2),z(t_2)]$.

Пример 4. Найти длину дуги астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Решение: астроида — замкнутая кривая, симметричная относительно начала координат и обеих координатных осей. Перейдем к параметрическому заданию кривой, положив $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$. Четверть длины кривой находим, вычисляя интеграл

$$\frac{l}{4}=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt=$$

$$=3a\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,dt=3a\int\limits_0^{\pi/2}\frac{|\sin 2t|}{2}\,dt.$$

Так как функция $\sin 2t$ на промежутке $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ не отрицательна, то знак модуля можно опустить и получить $\dfrac{l}{4}=\dfrac{3a}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=$

$=\dfrac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2}=\dfrac{3a}{4}(-\cos\pi+\cos 0)=\dfrac{3a}{4}(1+1)=\dfrac{3a}{2}$. Следовательно, $l=4\cdot\dfrac{3a}{2}=6a$.

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $J=\int\limits_L x\sqrt{1+4y}\,dl$, где L — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1,+1)$ до точки $B(2,4)$.

Решение: применяем формулу (3.21). Получаем

$$J=\int\limits_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+\left[\left(x^2\right)'\right]^2}\,dx=\int\limits_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int\limits_1^2 x\left(1+4x^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^2\left(x^2+4x^3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^4\right)\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}+16-\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}+15=\frac{52}{3}.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $J = \int\limits_L (y - z)dx$, где L — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t < 2\pi$.

Решение: применяем первую формулу в (3.20): $J = \int\limits_L (y - z)dx =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (a\sin t - bt)(a\cos t)'dt = \int\limits_0^{2\pi} (a\sin t - bt)(-a\sin t)dt = -a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt +$$

$$+ ab\int\limits_0^{2\pi} t\sin t dt.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно.

$$J_1 = -a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = -a^2 \left(\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

Второй интеграл вычисляем, применяя формулу (3.6) интегрирования по частям. Положим $t = u$, $\sin t dt = dv$, тогда $du = dt$, $v = -\cos t$. Поэтому

$$J_2 = \int\limits_0^{2\pi} t\sin t dt = -t\cos t \Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi + \sin t \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Таким образом, $J = \int\limits_L (y - z)dx = -\pi a^2 - 2\pi(2b + a)$.

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right) dx + \int\limits_L \left(2xy + y^2\right) dy,$$

где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Решение: применяем формулы (3.22):

$$J = \int\limits_0^1 \left(x^2 - 2xx^2\right) dx + \int\limits_0^1 \left(2xx^2 + x^4\right) 2xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x^3\right) dx + \int\limits_0^1 \left(4x^4 + 2x^5\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4}{5} x^5 + 2\frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{10 - 15 + 24 + 10}{30} = \frac{29}{30}.$$

Упражнения

1. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D xydxdy$, область D ограничена прямыми $y=x$, $y=\sqrt{2}x$, $x=1$, $x=2$;

б) $\iint\limits_D y^2dxdy$, D — треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,-1)$ и $B(1,1)$;

в) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, D — область, ограниченная параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$ и $y=1$.

Ответ: а) $\frac{15}{8}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{2}$.

2. Вычислите тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V xdxdydz$, V — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x+2y+z-6=0$.

б) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V — тело, ограниченное поверхностями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=xy$;

в) $\iiint\limits_V zdxdydz$, V — тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

Ответ: а) $\frac{27}{4}$; б) $\frac{1}{96}$; в) $\frac{\pi}{4}$.

3. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

а) $\int\limits_L \frac{\cos^2 xdl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, L — дуга синусоиды $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$;

б) $\int\limits_L xy^2dl$, L — дуга окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, лежащая в первой четверти;

в) $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, L — отрезок прямой между точками $M(1,1,1)$, $N(3,0,0)$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{R^4}{3}$; в) 27.

4. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

а) $\int\limits_L zdx + x^2dy + z^3dz$, L — дуга кривой $x = t^2$, $y = t$, $z = t^3$;

б) $\int\limits_L x^2dx + y^2dy - zdz$, L — дуга кривой $x = t^3$, $y = t$, $z = t^2$;

в) $\int\limits_L xydx + (y - x)dy$, L — дуга параболы $x = y^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Ответ: а) $\dfrac{25}{3}$; б) $\dfrac{1}{6}$; в) $\dfrac{17}{30}$.

4. Элементы теории дифференциальных уравнений

4.1. Понятие дифференциального уравнения

Многие задачи естествознания сводятся к соотношениям вида

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

связывающим независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}$. Такие соотношения называют дифференциальными уравнениями. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение (4.1), называется порядком дифференциального уравнения. Любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо $y, y', \dots, y^{(n)}$ обращает его в тождество относительно x на некотором промежутке (a, b), называется решением дифференциального уравнения. Например, функции $\varphi_1(x) = \sin x$ и $\varphi_2(x) = \cos x$ являются решениями дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y = 0$, так как $\varphi_1'(x) = \cos x$, $\varphi_1''(x) = -\sin x$, а потому $\varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -\sin x + \sin x \equiv 0$, $\varphi_2'(x) = -\sin x$, $\varphi_2''(x) = -\cos x$, $\varphi_2''(x) + \varphi_2(x) = -\cos x + \cos x \equiv 0$. Иногда решение задают неявно соотношением $F(x, y) = 0$ или параметрически. График функции $y = \varphi(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения, называют интегральной кривой этого уравнения. Процесс отыскания решений дифференциального уравнения называют интегрированием этого уравнения.

Простейшие дифференциальные уравнения типа $y'(x) = f(x)$ мы уже решали в подразд. 3.1 и получили, что $y(x) = \int f(x)dx + C$. Как видим, уравнение $y' = f(x)$ имеет бесконечно много решений, отличающихся на константу. Чтобы из всего множества решений выделить единственное, задают какие-либо условия на неизвестную функцию, например, можно потребовать, чтобы при $x = x_0$ функция $y(x)$ принимала значение $y = y_0$. Число x_0 называют начальным значением аргумента, а y_0 — начальным значением функции $y(x)$. Вместе пару чисел (x_0, y_0) называют начальными условиями. Задачу отыскания решения, удовлетворяющего начальным условиям (x_0, y_0), называют задачей Коши. Доказано, что если в уравнении первого порядка $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$, а начальные условия заполняют некоторую двумерную область D. Функция $y = \varphi(x,C)$ называется общим решением этого уравнения, если какие бы ни взять начальные условия (x_0,y_0) из области D, можно так подобрать константу C_0, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ будет решением уравнения и удовлетворять условию $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$. Решение, получающееся из общего при фиксированном значении константы C, называется частным.

4.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим приемы интегрирования простейших уравнений первого порядка $F(x, y, y') = 0$. Мы будем рассматривать уравнения, разрешенные относительно производной, т.е. уравнения вида

$$y' = f(x, y), \tag{4.2}$$

где $f(x,y)$ — функция двух аргументов, определенная в некоторой области D. Умножив обе части уравнения (4.2) на dx, получим $dy = f(x, y)\,dx$. Если положить $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, где $N(x, y) \neq 0$, то уравнение (4.2) можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y) = 0. \tag{4.3}$$

Если $M(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$, $N(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)$, то уравнение (4.3) принимает вид

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)dx + \psi_1(x)\,\psi_2(y)dy = 0 \tag{4.4}$$

и называется уравнением с разделяющимися переменными. Считая, что $\varphi_2(y)\,\varphi_1(x) \neq 0$, поделим обе части уравнения на это произведение. В результате получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}dx + \frac{\psi_2(y)}{\varphi_2(y)}dy = 0. \tag{4.5}$$

Предположим, что функция $y = \alpha(x)$ является решением уравнения (4.5). Тогда

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}dx + \frac{\psi_2[\alpha(x)]}{\varphi_2[\alpha(x)]}\alpha'(x)dy \equiv 0.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}dx + \int\frac{\psi_2[\alpha(x)]}{\varphi_2[\alpha(x)]}\alpha'(x)dx = C.$$

Если во втором интеграле сделать замену $\alpha(x) = y(x)$, то получим

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}dx + \int\frac{\psi_2(y)}{\varphi_2(y)}dy = C. \tag{4.6}$$

Это равенство представляет собой соотношение, которому удовлетворяют все решения уравнения (4.4). Поэтому (4.6) можно считать общим решением, записанным в неявной форме: $\Phi(x, y) = C$. Соотношение $\Phi(x, y) = C$ называют общим интегралом дифференциального уравнения (4.4). Заметим, что в процессе деления на $\varphi_2(y)\varphi_1(x)$ мы могли потерять решение $y = \lambda$ или $x = \mu$, где λ есть корень уравнения $\varphi_2(y) = 0$, а μ — корень уравнения $\varphi_1(x) = 0$. Нужно дополнительно проверить, являются ли функции $y = \lambda$ и $x = \mu$ решениями, и если они не содержатся в общем решении, то присоединить их к общему решению.

Пример. Найти общее решение уравнения $2xydx - \left(x^2 - 9\right)dy = 0$ и частное решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y(5) = 4$.

Решение: данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Предполагая, что $y\left(x^2 - 9\right) \neq 0$, получаем уравнение с разделенными переменными $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2xdx}{x^2 - 9}$. Интегрируя, находим $\ln|y| = \ln\left|x^2 - 9\right| + \ln|C|$. Отсюда $y = C\left(x^2 - 9\right)$ — общее решение. Отдельно рассмотрим случай $y\left(x^2 - 9\right) = 0$. Функция $y = 0$ является решением. Оно получается из общего при $C = 0$, а решения $x = \pm 3$ не содержатся в нем. Таким образом, все решения уравнения можно записать в виде $y = C\left(x^2 - 9\right)$, $x = \pm 3$. Решим задачу Коши — найдем решение, которое при $x_0 = 5$ принимает значение $y_0 = 4$. Полагая в общем решении $x = 5$, $y = 4$, получаем $4 = C(25 - 9)$, $4 = 16C$, $C = \dfrac{1}{4}$.

Решение $y = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 9\right)$ является искомым.

4.3. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка, которое может быть приведено к виду $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ или $y' = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, называется однородным. Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены $y = zx$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. В результате такой замены получаем $\dfrac{dz}{dx}x + z = \varphi(z)$, или $[z - \varphi(z)]dx + xdz = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными, которое мы интегрировать умеем.

Пример. Найти общее решение уравнения $\left(y^2 - xy\right)dx + {}$ $+ x^2 dy = 0$.

Решение: находим $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - y^2}{x^2} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, т.е. данное уравнение однородное. Полагая $y = zx$, получаем $\dfrac{dz}{dx}x + z = z - z^2$, или $z^2 dx + x dz = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными. Считая, что $x z \neq 0$, находим $\dfrac{dz}{z^2} + \dfrac{dx}{x} = 0$. После интегрирования получаем $-\dfrac{1}{z} + \ln|x| = C$. Так как $z = \dfrac{y}{x}$, то $\dfrac{x}{y} = \ln|x| + C$, $y = \dfrac{x}{\ln|x| + C}$. При делении на xz^2 мы потеряли два решения — $x = 0$ и $y = 0$, которые нужно присоединить к найденному общему решению.

4.4. Линейные уравнения

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным, $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции. Если функция $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным, если же $q(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным. Интегрируют линейные уравнения методом вариации произвольной постоянной. Суть этого метода проиллюстрируем на примере.

Пример. Найти общее решение линейного уравнения $y' + y\operatorname{ctg} x = {}$ $= \cos x$.

Решение: метод вариации произвольной постоянной содержит следующие этапы.

1. Находим общее решение однородного линейного уравнения $\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{ctg} x = 0$, или $dy = -y\operatorname{ctg} x dx$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y} + \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = 0$. После интегрирования находим $\ln|y| + \ln|\sin x| = \ln C$, или $y = \dfrac{C}{\sin x}$.

2. Ни при каких значениях постоянной C функция $y = \dfrac{C}{\sin x}$ не является решением данного уравнения. Будем искать его решения в виде $y = \dfrac{C(x)}{\sin x}$, где $C(x)$ — новая неизвестная функция. Подставляем функцию $y = \dfrac{C(x)}{\sin x}$ в уравнение. Получаем $\dfrac{C'(x)}{\sin x} - \dfrac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} + C(x)\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x$. Отсюда получаем

$$C'(x) = \sin x \cos x,\ C(x) = \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + \tilde{C}.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения можно записать в виде $y = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\tilde{C}}{\sin x}$, где $\tilde{C}$ — произвольная константа.

4.5. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

Рассмотрим примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 1. Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Найти закон изменения количества радия с течением времени.

Решение: пусть $y(t)$ — количество нераспавшегося радия в момент времени t. Дадим времени t приращение Δt. Считая, что на промежутке $[t, t + \Delta t]$ функция $y(t)$ остается равной значению в точке t, можем записать приближенное равенство $\Delta y \cong ky(t) \cdot \Delta t$, где k — коэффициент пропорциональности. Точность этого равенства тем выше, чем меньше Δt. Поделим обе части равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dt} = ky(t)$ с разделяющимися переменными, интегрируя которое найдем $y = Ce^{kt}$.

Для определения константы C надо задать начальные условия, указав, например, количество радия в начальный момент времени $t = 0$. Чтобы найти множитель пропорциональности k, нужно указать, какая часть радия распадается за определенный промежуток времени.

П р и м е р 2. Из демографических исследований известно, что число новорожденных и число умерших за единицу времени в некотором регионе пропорционально численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2. Описать закон изменения численности населения с течением времени.

Решение: пусть $y(t)$ — число жителей региона в момент времени t. За промежуток времени Δt прирост населения будет равен $\Delta y = k_1 y(t)\Delta t - k_2 y(t)\Delta t$. Последнее равенство приближенное, так как мы считаем, что функция $y(t)$ не изменяется на промежутке времени Δt. Обозначим $k_2 - k_2 = k$, поделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Приходим к тому же уравнению $\frac{dy}{dt} = ky(t)$, что и в примере 1. Получаем $y = Ce^{kt}$. Для определения C нужно задать начальные условия.

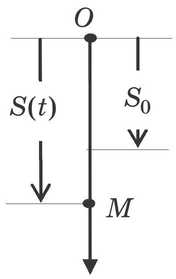
Как видим, внешне разные задачи привели к одному и тому же дифференциальному уравнению.

4.6. Уравнения высших порядков

Кратко остановимся на уравнениях высших порядков.

П р и м е р. Материальная точка массой m свободно падает под действием силы тяжести. Найти закон движения точки без учета сопротивления воздуха.

Решение: возьмем вертикальную ось с выбранной точкой O — начало движения. Положение точки M можно охарактеризовать функцией $S(t)$, где $S(t)$ — путь, пройденный точкой за время t. По второму закону Ньютона можем записать $F = ma$, где F — сила, действующая на точку, $a = \frac{d^2S}{dt^2}$ — ускорение точки. По условию задачи на точку действует только сила тяжести $F = mg$. Поэтому $m\frac{d^2S}{dt^2} = mg$, где g — ускорение свободного падения. Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка $\frac{d^2S}{dt^2} = g$. Интегрируя его один раз, получим $\frac{dS}{dt} = gt + C_1$. Мы пришли к уравнению первого порядка. Интегрируем еще один раз. Находим $S(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$. Функция $S(t)$ и определяет закон движения



точки. Эта функция содержит две произвольные константы C_1, C_2. Чтобы их определить, нужно знать положение точки в начальный момент времени и ее скорость, т.е. начальные данные содержат три числа: $t = t_0$, $S_0 = S(t_0)$ и $S'_0 = S'(t_0)$.

В общем случае, чтобы получить единственное решение $y(x)$ для уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, задания чисел x_0, y_0 недостаточно. Задают еще числа $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ и требуют, чтобы $y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

В этом случае начальные условия содержат $n+1$ чисел $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\right)$, которые, изменяясь, могут заполнять некоторую $(n+1)$-мерную область Δ. Как и в случае уравнения первого порядка, можно определить общее решение в виде функции $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащей n произвольных констант, позволяющей найти решение путем подбора констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$, удовлетворяющее любым фиксированным начальным условиям из области Δ. Такие решения называют частными. Как и для уравнений первого порядка, задачу отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y^{(n-1)}\right)$, называют задачей Коши. Доказано, что если функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ в окрестности начальных условий, то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее этим начальным условиям.

4.7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Среди уравнений высших порядков наиболее хорошо изучены линейные уравнения, имеющие вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \qquad (4.7)$$

где y — неизвестная функция; $y', \ldots, y^{(n)}$ — ее производные; $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$, $q(x)$ — известные непрерывные на (a,b) функции. Если $q(x) \neq 0$ на (a,b), то уравнение (4.7) называется линейным неоднородным, если же $q(x) \equiv 0$ на (a,b), — то линейным однородным.

В теории линейных уравнений широко используется понятие линейной зависимости и линейной независимости функций. Система функций $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_m(x)$ называется линейно зависимой на промежутке (a,b), если существуют такие константы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, среди которых есть отличные от нуля, что выполняется тождество

$$\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x), \ldots, \lambda_m a_m(x) \equiv 0 \qquad (4.8)$$

относительно x на (a,b). Если же тождество (4.8) выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то система функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_m(x)$ называется линейно независимой на (a,b). Например, функции $a_1(x) = \sin^2 x$, $a_2(x) = \cos^2 x$, $a_n(x) = 1$ линейно зависимы на $(-\infty,+\infty)$, так как справедливо тождество $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv \equiv 0$ при любом x. Функции $1, x, x^2$ линейно независимы на $(-\infty,+\infty)$. Действительно, если предположить, что эти функции линейно зависимы, то квадратное уравнение $\lambda + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0$ имело бы более двух решений, что невозможно. Доказано, что всякое линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на (a,b) коэффициентами имеет систему n линейно независимых на (a,b) частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. При этом общее решение $y(x)$ может быть представлено в виде линейной комбинации

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называют фундаментальной системой решений.

Ограничимся рассмотрением линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' + ay' + by = q(x) \tag{4.9}$$

с постоянными коэффициентами a и b.

Пусть сначала $q(x) \equiv 0$. Решения однородного линейного уравнения

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.10}$$

будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$ — неизвестная константа. Так как $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, то полагая в (4.10) $y = e^{kx}$, получим $k^2 e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = e^{kx}\left(k^2 + ak + b\right) = 0$. Поскольку $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) называется характеристическим. Возможны следующие три случая:

1) уравнение (4.11) имеет два различных вещественных корня k_1 и k_2. Тогда уравнение (4.10) имеет два линейно независимых решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Общее решение может быть записано в виде $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) уравнение (4.11) имеет единственный вещественный корень $k = \alpha$. Тогда, что легко показать непосредственной подстановкой, уравнение (4.10) имеет два линейно независимых решения $y_1 = e^{\alpha x}$ и $y_2 = xe^{\alpha x}$. Общее решение может быть записано в виде $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$;

3) уравнение (4.11) имеет два комплексно-сопряженных корня

$k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$. Этим корням соответствуют два линейно независимых решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Неоднородное уравнение (4.9) можно проинтегрировать методом вариации, который состоит в следующем.

1. Находим каких-либо два независимых решения y_1 и y_2 однородного уравнения $y'' + ay' + by = 0$ и записываем его общее решение в виде $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

2. Решение неоднородного уравнения $y'' + ay' + by = q(x)$ ищем в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \tag{4.12}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции, производные от которых находим из системы

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) &= 0,\\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) &= q(x).\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Первое уравнение в этой системе выбрано произвольно, а второе получено исходя из требования, чтобы функция (4.12) удовлетворяла уравнению (4.9). Решая систему (4.13), находим производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int C_2'(x)dx + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — константы интегрирования. Решение (4.12) найдено.

Пример. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение:

а) составляем характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ и находим его корни: $k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} + \dfrac{5 \pm 1}{2}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

Решения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$ образуют фундаментальную систему. Записываем общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;

б) записываем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$. Оно имеет единственный корень $k = 2$. Согласно теории фундаментальную систему в этом случае составляют решения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$, а $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ — общее решение;

в) характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 13 = 0$. Его корни $k_{1,2} = -2\sqrt{4-13} = -2 \pm 3i$ являются комплексными. В этом случае фундаментальную систему образуют решения $y_1 = e^{-2x}\cos 3x$ и

$y_2 = e^{-2x}\sin 3x$, а общее решение можно записать в виде $y = C_1 e^{-2x}\cos 3x + C_2 e^{-2x}\sin 3x$.

Пример 2. Применяя метод вариации, найти общее решение уравнения $y'' - 4y = e^x$.

Решение: согласно методу вариации решаем сначала уравнение $y'' - 4y = 0$: $k^2 - 4 = 0$, $k_{1,2} = \pm 2$. Общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Решение исходного уравнения $y'' - y = e^x$ будем искать в виде $y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}$.

Для отыскания $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляем систему вида (4.13):

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} + C_2' e^{-2x} = 0, \\ 2C_1' e^{2x} - 2C_2' e^{-2x} = e^x, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1'(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$, $C_2'(x) = -\frac{1}{4}e^{+3x}$. Следовательно, $C_1(x) = \frac{1}{4}\int e^{-x}dx = -\frac{1}{4}e^{-x} + \tilde{C}_1$, $C_2(x) = -\frac{1}{4}\int e^{3x}dx = -\frac{1}{12}e^{3x} + \tilde{C}_2$.

Поэтому общее решение можно записать в виде

$$y = \left(-\frac{1}{4}e^{-x} + \tilde{C}_1\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{12}e^{3x} + \tilde{C}_2\right)e^{-2x}.$$

Упражнения

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $\operatorname{tg}x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\,dy = 0$; б) $xyy' = 1 - x^2$;

в) $y'\left(x^3 - 9\right)\sin y = x^2 \cos y$; г) $\left(e^{2x} + 5\right)y^2 dy - \left(1 - y^3\right)e^{2x}dx = 0$;

д) $y^2 + x^2 y' = 2xyy'$; е) $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$;

ж) $\left(y^2 - 3xy\right)dx = x^2 dy$; з) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$; и) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$;

к) $y' - 4y = 2e^{3x}$.

Ответ: а) $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$; б) $x^2 + y^2 = \ln\left(Cx^2\right)$;

в) $\cos y = \frac{C}{\sqrt[3]{x^3 - 9}}$; г) $\left(1 - y^3\right)^{-2} = C\left(e^{2x} + 5\right)^3$; д) $y^2 - xy = Cx^{-1}$;

е) $\ln\left(y^2 + 2x^2\right) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x\sqrt{2}} = C$; ж) $\frac{y}{y - 4x} = \frac{C}{x^4}$;

з) $y = Cx + x^2$; и) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$; к) $y = Ce^{4x} - 2e^{3x}$.

2. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$, $y=1$ при $x=0$;

б) $\left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0$, $y=1$ при $x=0$;

в) $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$, $y=1$ при $x=2$;

г) $\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy=0$, $y=0$ при $x=4$;

д) $xy'+y=e^x$, $y=2$ при $x=4$;

е) $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y=0$ при $x=0$.

Ответ: а) $2e^{y^2/2}=\sqrt{e}\left(1+e^x\right)$; б) $1+y^2=\dfrac{2}{1-x^2}$; в) $y=x\sqrt{1-\dfrac{3}{8}x}$; г) $(x-2)^2-y^2=4$; д) $y=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{8-e^4}{x}$; е) $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

3. Найдите общее решение уравнений второго порядка:

а) $y''-4y'+3y=0$; б) $y''+y'-6y=0$; в) $y''-6y'+9y=0$;

г) $y''+8y'+16y=0$; д) $y''+4y=0$; е) $y''+y'+5y=0$.

Ответ: а) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$; б) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$; в) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$; г) $y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$; д) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$; е) $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin x$.

4. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $y''-5y'+4y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=8$;

б) $y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Ответ: а) $y=4e^x+e^{4x}$; б) $y=\sin x+\cos x$.

5. Применяя метод вариации, найдите общее решение уравнений:

а) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$; б) $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$.

Ответ: а) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\cos x\right|+x\sin x$; б) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+xe^{-x}\ln|x|-xe^{-x}$.

5. Приложение дифференциального и интегрального исчисления к задачам теории вероятностей

5.1. Понятие непрерывной случайной величины

В первой части курса мы уже изучили дискретные случайные величины. В этом разделе будем изучать непрерывные случайные величины.

Понятие случайной величины позволяет свести исследование случайных событий к исследованию числовых множеств и их отображений, что делает возможным применять в теории вероятностей хорошо разработанный аппарат математического анализа.

Напомним и уточним некоторые определения.

Пусть для некоторого случайного эксперимента построено пространство элементарных событий Ω. Случайной величиной называется функция $\xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, со значениями в R или R^n. Множество значений функции $\xi(\omega)$ называют множеством значений случайной величины. При этом случайная величина называется одномерной, если ее множество значений есть подмножество действительных чисел. Если же область значений принадлежит R^n, то случайная величина называется n-мерной. В последнем случае каждой точке пространства элементарных событий сопоставляется n-мерный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, называемый случайным вектором.

Случайные величины обозначают большими буквами: X, Y, Z, ..., а их значения — малыми: x, y, z, ...

Случайную величину называют дискретной, если множество ее значений счетно. Мы в этом подразделе будем изучать случайные величины, множество значений которых несчетно. Такие величины называют непрерывными. Позднее это понятие будет уточняться. Непрерывные случайные величины широко встречаются в задачах, связанных с обработкой результатов различных измерений.

Указания только области значений случайной величины недостаточно для ее полной характеристики, нужно указать еще и вероятности этих значений. Полную характеристику дает ее закон распределения — всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений. Другими словами, закон распределения случайной величины — это некоторая функция, заданная на множестве значений случайной величины со значениями в [0,1], или сложная функция на пространстве элементарных событий. Для одномерной дискретной случайной величины закон распределения удобно задавать в виде ряда распределения.

Но ряд распределения невозможно составить для случайных величин, область значений которых несчетна. Для таких величин указывают не вероятности отдельных значений (что сделать невозможно), а вероятности попадания этих значений в некоторые области. Одним из таких способов задания закона распределения является функция распределения.

5.2. Функция распределения одномерной случайной величины

Пусть дана одномерная случайная величина X. Функция $F(x)$, определяемая равенством $F(x) = P(X < x)$, указывающая вероятность попадания значений случайной величины в область $(-\infty, x)$, называется функцией распределения случайной величины X.

Рассмотрим свойства функции распределения.

1. $F(x)$ определена на всей числовой оси (независимо от области значений X).

2. $0 \le F(x) \le 1$, что следует из определения $F(x)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, так как событие $X < +\infty$ достоверно, а событие $X < -\infty$ невозможно.

4. $F(x)$ есть неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Докажем это свойство. Рассмотрим три события: $A\{X < x_1\}$, $B\{x_1 \le X < x_2\}$, $C\{X < x_2\}$. Очевидно, что $C = A + B$. Так как события A и B несовместны, то $P(C) = P(A) + P(B)$, т.е. $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$, следовательно,

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2). \tag{5.1}$$

Поскольку $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то отсюда следует, что $F(x_2) \ge F(x_1)$. Свойство 4 доказано. Из соотношения (5.1) получаем

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{5.2}$$

Пользуясь формулой (5.2), находят вероятность попадания значений случайной величины на любой промежуток.

Полагая в (5.2) $x_2 = x_1 + \Delta x$, получаем

$$P(x_1 \le X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \tag{5.3}$$

Если функция $F(x)$ непрерывна в точке x_1, то переходя в формуле (5.3) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $P(X = x_1) = 0$, т.е. вероятность принять какое-либо заранее фиксированное значение равна нулю. Под непрерывными случайными величинами будем понимать такие, для которых функция $F(x)$ непрерывна. Для непрерывных случайных величин равенство нулю вероятности события не означает его невозможность. Ведь в результате опыта случайная величина примет какое-то значение, хотя до опыта вероятность этого равна нулю.

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0,5x - 1 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

Найти: а) $P(x < 2,5)$; б) $P(2,4 \le X < 3,2)$; в) $P(1 \le X < 3)$; г) $P(3 < X < 5)$.

Решение:

а) $P(x < 2,5) = F(2,5) = 0,5 \cdot 2,5 - 1 = 0,25$;

б) по формуле (5.2) находим $P(2,4 \le X < 3,2) = F(3,2) - F(2,4) = 0,5 \cdot 3,2 - 1 - 0,5 \cdot 2,4 + 1 = 0,4$;

в) $P(1 \le X < 3) = F(5) - F(3) = 1 - 0,5 \cdot 3 + 1 = 0,5$.

Заметим, что функция распределения определена для любых случайных величин — и непрерывных и дискретных.

От ряда распределения дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

можно перейти к функции распределения, пользуясь соотношением

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta(x - x_i) p_i, \tag{5.4}$$

где $\eta(x - x_i) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le x_i, \\ 1, \text{если } x > x_i. \end{cases}$

Из формулы (5.4) следует, что функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой со скачками в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, равным вероятностям этих значений.

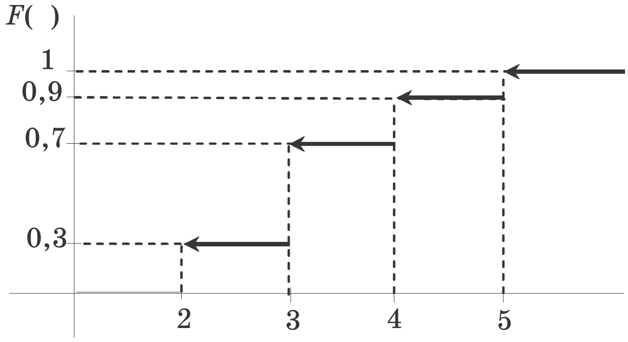
Пример 2. Найти функцию распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X по заданному ряду распределения

X	2	3	4	5
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Решение: применяя формулу (5.4), получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 2, \\ 0,3, \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0,7, \text{ если } 3 < x \le 4, \\ 0,9, \text{ если } 4 < x \le 5, \\ 1, \text{ если } x > 5. \end{cases}$$

График $F(x)$ представлен на рисунке.



5.3. Матрица распределения двумерной случайной величины

В случае n-мерной случайной величины каждой точке ω пространства элементарных событий сопоставляется n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, каждая координата которого является одномерной случайной величиной. Поэтому n-мерную случайную величину можно рассматривать как систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ одномерных случайных величин. Если все случайные величины X_i дискретны, то и систему называют дискретной. Остановимся более подробно на системе (X,Y) двух случайных величин. Если $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, то описать систему (X,Y) можно, указав вероятности $P_{ij}=P(X=x_i,\ Y=y_j)$ того, что случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y — y_j. Из чисел p_{ij} можно составить матрицу размера $m\times n$, называемую матрицей распределения системы (X,Y):

$Q =$

Y	X			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}

(5.5)

Так как все события $(X=x_i,\ Y=y_j)$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$, образуют полную группу, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}=1$. Зная матрицу (5.5), легко найти ряды распределения величин X и Y. Очевидно, что вероятность $P_i=(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\ldots+p_{im}$, т.е. равна сумме элементов i-го столбца матрицы Q.

Аналогично $P_j = (Y = y_j) = p_{j1} + p_{j2} + \ldots + p_{jn}$, т.е. равна сумме элементов строки с номером j. Но зная ряды распределения величин X и Y, в общем случае невозможно найти матрицу распределения системы (X,Y). Нужна дополнительная информация о взаимосвязи величин X и Y.

События $A\left(X=x_i,\, Y=y_j\right)$ есть произведения двух событий: $B(X=x_i)$ и $C\left(Y=y_j\right)$. Поэтому

$$P(A) = P(B \cdot C) = P(B)P(C/B) = P(C)P(B/C)$$

по формуле умножения вероятностей. Следовательно,

$$\begin{aligned} &P\left(X=x_i,\, Y=y_j\right)=P\left(X=x_i\right)P\left(Y=\ y_j/X=x_i\right), \\ &P\left(X=x_i,\, Y=y_j\right)=P\left(Y=y_j\right)P\left(X=x_i/Y=y_j\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Условная вероятность $P\left(X=x_i/Y=y_j\right)$ означает вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, если известно, что случайная величина Y приняла значение y_j. Из соотношений (5.6) находим

$$\begin{aligned} &P\left(X=x_i/Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i,\, Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_j\right)}=\frac{P_{ij}}{P_j}, \\ &P\left(Y=y_j/X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i,\, Y=y_j\right)}{P\left(X=x_i\right)}=\frac{P_{ij}}{P_i}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Зафиксировав значение $Y=y_j$ или $X=x_i$, с помощью формул (5.7) можно найти условные ряды распределения:

$X/Y = y_j$	x_1	x_2	...	x_n
P	$P(X=x_1/Y=y_j)$	$P(X=x_2/Y=y_j)$	...	$P(X=x_n/Y=y_j)$

$Y/X = x_i$	y_1	y_2	...	y_m
P	$P(Y=y_1/X=x_i)$	$P(Y=y_2/X=x_i)$	...	$P(Y=y_m/X=x_i)$

Эти ряды позволяют вычислить математические ожидания

$$M\left[X/Y=y_i\right]=\sum_{k=1}^{n} x_k P\left(X=x_k/Y=y_j\right),$$

$$M\left[Y/X=x_i\right]=\sum_{s=1}^{m} y_s P\left(Y=y_s/X=x_i\right),$$

называемые условными математическими ожиданиями.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если события B и C независимы, и зависимыми, если эти события зависимы. Из (5.6) следует, что если величины X и Y независимы, то $P_{ij} = P_i P_j$.

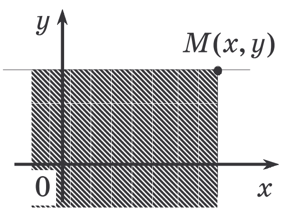
Как видим, зная ряды распределения величин X и Y, а также условные вероятности $P\left(X=x_i / Y=y_j\right)$ или $P\left(Y=y_j / X=x_i\right)$, можно восстановить матрицу распределения системы (X,Y).

5.4. Функция распределения *n*-мерной случайной величины

Пусть дана система случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n)$$

называется функцией распределения системы случайных величин.



Для двумерной случайной величины (X,Y) имеем $F(x,y) = P(X<x, Y<y)$, т.е. значение функции $F(x,y)$ равно вероятности того, что случайная точка $M(x,y)$ попадет в левый нижний угол с вершиной в точке (x,y).

При изучении свойств функции распределения ограничимся двумерным случаем.

1. $0 \le F(x,y) \le 1$, что следует из определения $F(x,y)$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$.

Действительно, первые три предела соответствуют вероятностям невозможных событий, а четвертый — достоверного.

3. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y.

Действительно, $F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)=P(X<x, Y<+\infty)=P(X<x)=$ $=F_1(x)$, так как событие $Y<+\infty$ достоверно. (Мы здесь предположили, что $F(x,y)$ непрерывна по x.)

4. $F(x,y)$ является неубывающей по x при фиксированном y и неубывающей по y при фиксированном x.

Это следует из свойств для функции распределения одномерной величины.

5. $P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$, что следует из определения функции распределения.

6. Если случайные величины X и Y независимы, то $F(x,y) =$ $= F_1(x)\,F_2(y)$, и обратно, если $F(x,y) = F_1(x)\,F_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

Справедливость свойства следует непосредственно из определения функции распределения и независимости случайных величин.

7. Для зависимых случайных величин вводят понятие условных законов распределения $F(x/y)$ и $F(y/x)$. Например, $F(x/y)$ означает функцию распределения случайной величины X, если случайная величина Y приняла фиксированное значение y. Если X и Y независимы, то $F(x/y) = F(x)$, $F(y/x) = F(y)$.

Легко доказать, что

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F(x)F(y/x), \\ F(x,y) &= F(y)F(x/y). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Соотношения (5.8) называют правилом умножения законов распределения.

П р и м е р. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}, \text{ если } x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найти $F_1(x)$, $F_2(y)$, показать, что X и Y независимые случайные величины.

Решение: по свойству 3 функции $F(x,y)$ находим:

$$F_1(x) = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}\right) = 1 - 5^{-x},$$

если $x > 0$, и $F_1(x) = 0$, если $x < 0$;

$$F_2(y) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}\right) = 1 - 5^{-x},$$

если $y > 0$, и $F_2(y) = 0$, если $y < 0$.

Так как $F(x,y) = F_1(x)\,F_2(y)$, то по свойству 6 случайные величины X и Y независимы.

Упражнения

1. Дана матрица Q распределения двумерной дискретной случайной величины:

$Q =$

Y	X		
	0	1	4
–4	0,1	0,1	0,2
–2	0,1	0,2	0,1
0	0	0,1	0,1

Найдите: а) ряды распределения величин X и Y; б) m_x, m_y; в) D_x, D_y; г) ряд распределения X, если $Y = -4$; д) $M[X/Y = -4]$.

Ответ: б) $m_x = 2$; $m_y = -2{,}4$; в) $D_x = 2{,}8$; $D_y = 2{,}24$; д) $M[X/Y = -4] = 2{,}25$.

2. Система случайных величин (X, Y) задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \text{ или } y \le 0; \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2},\ y > \dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5\left[\sin x + \sin y - \sin(x+y)\right], \text{ если } x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 0{,}5(\sin x - \cos x + 1), \text{ если } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ y > \dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5(\sin y - \cos y + 1), \text{ если } y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите $F_1(x)$ и $F_2(y)$ и докажите, что случайные величины X и Y зависимы.

Ответ: $F_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0; \\ 0{,}5(\sin x - \cos x + 1), \text{ если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \text{ если } x > \pi/2; \end{cases}$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \le 0; \\ 0{,}5(\sin y - \cos y + 1), \text{ если } 0 < y \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \text{ если } y > \pi/2. \end{cases}$$

5.5. Плотность распределения одномерных случайных величин

Функция распределения дает исчерпывающую характеристику случайной величины, но она не очень удобна для изучения поведения случайной величины в окрестности фиксированной точки x_0, так как число $F(x_0) = P(x < x_0)$ недостаточно полно характеризует саму точку x_0.

Случайная величина X называется абсолютно непрерывной в точке x, если ее функция распределения $F(x)$ дифференцируема в этой точке. Полагая в (5.3) $x_1 = x$, можем записать

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Поделим обе части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \tag{5.9}$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}$, если он существует и конечен, называется плотностью распределения вероятностей случайной величины X и обозначается $\rho(x)$, т.е.

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \tag{5.10}$$

Как следует из (5.9), если случайная величина X абсолютно непрерывна, то плотность распределения $\rho(x)$ существует и при этом

$$\rho(x) = F'(x). \tag{5.11}$$

Отметим свойства функции $\rho(x)$.

1. $\rho(x) \ge 0$ как производная от неубывающей функции.

2. Справедлива формула

$$P(a \le x < b) = \int_a^b \rho(x)dx. \tag{5.12}$$

Действительно, из соотношения (5.11) следует, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $\rho(x)$, а потому $\int_a^b \rho(x)dx = F(b) - F(a)$, но из формулы (5.2) получаем, что $F(b) - F(a) = P(a \le x < b)$. Формула (5.12) доказана.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$ (условие нормировки). Этот интеграл определяет вероятность достоверного события.

4. Функции $F(x)$ и $\rho(x)$ связаны соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx. \tag{5.13}$$

Действительно, по определению $F(x)$ имеем $F(x) = P(-\infty < X < x)$, а из формулы (5.12) следует, что $P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx = F(x)$, свойство 4 доказано.

5. Из соотношения (5.10) следует, что с точностью до бесконечно малых выше первого порядка малости относительно Δx имеет место равенство $P(x \le X < x + \Delta x) \cong \rho(x)\Delta x$.

Пример 1. Случайная величина задана плотностью распределения вида

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ ax + 1, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ 0, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра a, вычислить $P(0,5 \le x < 1)$.

Решение: из условия нормировки следует, что $\int\limits_0^2 (ax+1)\,dx = 1$, т.е. $\left(\frac{1}{2}ax^2 + x\right)\Big|_0^2 = 1$, $2a + 2 = 1$, следовательно, $a = -0,5$. По формуле (5.12) находим

$$P(0,5 \le x < 1) = \int\limits_{0,5}^{1} (1 - 0,5x)dx = (x - 0,25x^2)\Big|_{0,5}^{1} =$$
$$= 1 - 0,25 - 0,5 + 0,0625 = 0,3125.$$

Пример 2. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1,5\sin 3x, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение: воспользуемся формулой (5.13). Если $x \le 0$, то $\rho(x) = 0$, поэтому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$. При $0 < x \le \frac{\pi}{3}$ получаем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{x} 1,5\sin 3x dx = 0,5(1 - \cos 3x).$$

Если $x > \frac{\pi}{3}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{\pi/3} 1,5\sin 3x dx + \int\limits_{\pi/3}^{0} 0 \cdot dx = -0,5\cos 3x \Big|_0^{\pi/3} =$ $= 0,5 + 0,5 = 1$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0,5(1 - \cos 3x), & \text{если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

В прикладных задачах наиболее часто встречаются случайные величины, задаваемые следующими плотностями распределения:

а) $\rho(x)=c$ (const), $a \le x < b$ — равномерное распределение;

б) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $a=\text{const}$, $\sigma=\text{const}$ — нормальное распределение;

в) $\rho(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0, \end{cases}$ $\lambda=\text{const}$, $\lambda>0$ — показательное распределение.

Причина широкого распространения в природе нормального распределения объяснена А.М. Ляпуновым. Он доказал, что нормальный закон возникает всегда, когда случайная величина может быть представлена в виде суммы большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин (не обязательно распределенных по нормальному закону), каждая из которых в отдельности незначительно влияет на сумму. Такие ситуации встречаются довольно часто, особенно в задачах, связанных с процессом измерения и оценкой его точности.

5.6. Числовые характеристики случайных величин

В первой части пособия мы уже рассмотрели числовые характеристики дискретных случайных величин. Переходим к числовым характеристикам абсолютно непрерывных величин. Такие величины полностью характеризуются плотностью распределения $\rho(x)$, но иногда такая полная характеристика не нужна, а достаточно знать какие-либо особенности изучаемой случайной величины. Для этого и вводят числовые характеристики.

Пусть на интервале (a,b) задана абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\rho(x)$. Функцию $\rho(x)$ будем предполагать интегрируемой на (a,b). Разобьем интервал (a,b) на n частичных промежутков Δx_k, на каждом из них выберем по точке ξ_k и построим дискретную случайную величину $\tilde{X}$ с рядом распределения

$\tilde{X}$	ξ_1	ξ_2	…	ξ_n
P	$\rho(\xi_1)\Delta x_1$	$\rho(\xi_2)\Delta x_2$	…	$\rho(\xi_n)\Delta x_n$

Найдем ее математическое ожидание:

$$M\left[\tilde{X}\right]=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\rho(\xi_k)\Delta x_k. \tag{5.14}$$

Величину $M\left[\tilde{X}\right]$ можно считать приближенным значением математического ожидания случайной величины X. Переходя в (5.14) к пределу при $\max \Delta x_k \to 0\,(k \to \infty)$ и учитывая, что выражение (5.14) есть интегральная сумма Римана для функции $x\rho(x)$, получаем, что правая часть в (5.14) стремится к $\int\limits_a^b x\rho(x)dx$. Эту величину и принимают за математическое ожидание величины X. Таким образом,

$$M[X] = \int\limits_a^b x\rho(x)dx. \tag{5.15}$$

Если величина X распределена на всей числовой оси, то переходя к пределу в интеграле (5.15) при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, получаем

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx \tag{5.16}$$

(один из пределов в последнем интеграле может быть конечным). При этом предполагается, что несобственный интеграл (5.16) сходится. Если же он расходится, то случайная величина X математического ожидания не имеет.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей плотность распределения вида

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}x \text{ на интервале } (0,3), \\ 0 \text{ вне интервала } (0,3). \end{cases}$$

Решение: по формуле (5.15) при $a = 0$, $b = 3$ находим

$$M[X] = \int\limits_0^3 \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 2.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание показательного распределения

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0,\ \lambda > 0. \end{cases}$$

Решение: $M[X] = \lambda\int\limits_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = \left\{\begin{matrix} x = u, & dv = e^{-\lambda x}dx, \\ v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}, & du = dx \end{matrix}\right\} =$

$$= \lambda\left(-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right) = \lambda\left(-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

При изучении случайных величин иногда их непосредственное наблюдение очень сложно или невозможно. Часто такие величины удается выразить через другие, более доступные для изучения. При этом получают случайные величины, являющиеся функциями одного или нескольких случайных аргументов:

$$Y=\varphi(X), \quad Y=\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Если случайная величина X дискретна и задана рядом распределения

X	X_1	X_2	…	X_n
P	P_1	P_2	…	P_n

то случайная величина $Y=\varphi(X)$ будет также дискретной с рядом распределения

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	…	p_n

При этом если среди чисел $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ есть равные, то соответственно столбцы нужно объединять в один, сложив входящие в них вероятности. Находим

$$M[Y]=\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)p_k. \tag{5.17}$$

Пусть случайная величина X непрерывна на (a,b) и задана плотностью распределения $\rho(x)$. Непрерывную случайную величину $Y=\varphi(X)$ можно представить приближенно дискретной величиной $\tilde{Y}$, разбив промежуток (a,b) на n частичных промежутков Δx_k и выбрав на каждом из них по точке ξ_k. Получим ряд распределения

$\tilde{Y}$	$\varphi(\xi_1)$	$\varphi(\xi_2)$	…	$\varphi(\xi_n)$
P	$\rho(\xi_1)\Delta x_1$	$\rho(\xi_2)\Delta x_2$	…	$\rho(\xi_n)\Delta x_n$

Число $M\{\tilde{Y}\}=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta x_k$ можно считать приближенным значением математического ожидания величины $Y=\varphi(X)$.

Переходя к пределу при $\max|\Delta x_k|\to 0$, предполагая функции $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемыми, получим

$$M[Y]=\int_a^b \varphi(x)\rho(x)dx. \tag{5.18}$$

Если величина X задана на всей числовой оси, то

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\rho(x)dx. \tag{5.19}$$

П р и м е р 3. Дан ряд распределения дискретной случайной величины

X	–1	2	4	5
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Найти математическое ожидание величины $Y = X^2 - 4$.

Решение: полагая в формуле (5.17) $\varphi(x) = x^2 - 4$, находим $M[Y] = (1-4)0,2 + \left(2^2 - 4\right)0,3 + \left(4^2 - 4\right)0,1 + \left(5^2 - 4\right)0,4 = -0,6 + 0 + 1,2 + 8,4 = 9$.

П р и м е р 4. Случайная величина X распределена по закону $\rho(x) = 2\cos 2x$ на $(0, \pi/4)$. Найти математическое ожидание величины $Y = \sin 2x$.

Решение: применяя формулу (5.18), получаем

$$M[Y] = \int_0^{\pi/4} 2\sin 2x \cdot \cos 2x dx = \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,5.$$

Отметим некоторые свойства математического ожидания.

1. $M[C] = C$, $C = \text{const}$. Константу C можно трактовать как случайную величину X, принимающую единственное значение $X = C$ с вероятностью $p = 1$, поэтому $M[X] = C \cdot 1 = 1$.

2. $M[CX] = CM[X]$, $C = \text{const}$. Справедливость этого свойства следует из того, что константу можно выносить за знак суммы или интеграла.

3. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$, $M[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n] = \alpha_1 M[X_1] + \alpha_2 M[X_2] + \ldots + \alpha_n M[X_n]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — константы.

Напомним, что случайные величины X и Y называются независимыми, если события $A(X < x)$ и $B(Y < y)$ независимы.

4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$.

Свойства 3 и 4 будут доказаны позднее.

Чтобы охарактеризовать степень разброса значений случайной величины вокруг математического ожидания, вводят понятие дисперсии $D[X]$, которое нами уже определено в первой части пособия формулой $D[X] = M\left[\left(X - m_x\right)^2\right]$, m_x — математическое ожидание величины X. Для непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $\rho(x)$, $-\infty < x < \infty$, применяя формулу (5.13), получаем

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x\right)^2 \rho(x) dx. \tag{5.20}$$

Предполагается, что записанный здесь несобственный интеграл сходится, если же он расходится, то случайная величина X не имеет конечной дисперсии. Дисперсию иногда обозначают D_x.

Если величина X задана на конечном промежутке (a,b), то, как это следует из (5.18),

$$D[X] = \int_a^b (x - m_x)^2 \rho(x)dx. \qquad (5.21)$$

Применяя свойство 3 математического ожидания, легко получить более простую, чем (5.20) и (5.21), формулу для вычисления дисперсии:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (m_x)^2. \qquad (5.22)$$

Размерность дисперсии равна квадрату размерности величины X. Чтобы избежать этого неудобства, вводят величину $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, называемую средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением. Непосредственно из определения дисперсии следует, что

$$D[C] = 0,\ \ D[CX] = C^2 D[X],\ \ C = \text{const}.$$

Других свойств дисперсии коснемся позднее.

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X, распределенной по показательному закону

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } \ x \geq 0, \end{cases} \quad \lambda = \text{const}, \lambda > 0.$$

Решение: в примере 2 мы уже нашли, что $M[X] = \dfrac{1}{\lambda}$. По формуле (5.19) получаем $M\left[X^2\right] = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx$. Применяем дважды формулу интегрирования по частям:

$$\lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx, \\ dv = e^{-\lambda x}dx,\ v = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^2 \right) \Bigg|_0^{+\infty} + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx.$$

Первое слагаемое обращается в нуль, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} = $ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = 0$ (дважды применили правило Лопиталя). Интеграл

$2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx$ вычисляем по частям, полагая $u = x$, $du = dx$, $e^{-\lambda x}dx = dv$,

$v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$. $2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = -\dfrac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \dfrac{-2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \dfrac{2}{\lambda^2}$. По формуле (5.22) окончательно находим

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (m_x)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

П р и м е р 6. Найти плотность распределения $\rho(x)$, $F(x)$, $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$ равномерно распределенной на (a,b) случайной величины X.

Решение: мы уже отмечали, что распределение называется равномерным, если $\rho(x) = c$ (const), $a < x < b$, $\rho(x) = 0$ вне (a,b). По свойству плотности распределения $\int_a^b c\,dx = c(b-a) = 1$. Поэтому $c = \dfrac{1}{b-a}$. Таким образом, $\rho(x) = \dfrac{1}{b-a}$ при $a < x < b$, $\rho(x) = 0$, если $x \notin (a,b)$.

Для отыскания функции распределения применяем формулу (5.13) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx$:

1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx$, если $x \le a$;

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \int_a^x \dfrac{dx}{b-a} = \dfrac{x-a}{b-a}$, если $a < x \le b$;

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \int_a^x \dfrac{dx}{b-a} + \int_b^x 0\cdot dx = 1$, если $x > b$.

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \le b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$

Найдем $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$ равномерного распределения:

$$M[X] = \int_a^b x\frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$M\left[X^2\right]=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}=\frac{x^3}{3(b-a)}\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3};$$

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(m_x)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Для более полной характеристики закона распределения применяют также величины $M\left[(X-m_x)^3\right]$ и $M\left[(X-m_x)^4\right]$. Число $S_x=\frac{M\left[(X-m_x)^3\right]}{\sigma_x^3}$ называют коэффициентом асимметрии. Если график функции $\rho(x)$ симметричен относительно прямой $x=m_x$, то $S_x=0$. Поэтому величина S_x характеризует степень несимметричности распределения относительно математического ожидания. Число $E_x=\frac{M\left[(X-m_x)^4\right]}{\sigma_x^4}-3$ называют эксцессом случайной величины. Для нормального распределения справедливо равенство $\frac{M\left[(X-m_x)^4\right]}{\sigma_x^4}=3$. Поэтому эксцесс численно характеризует степень отличия распределения от нормального.

Упражнения

1. Дана случайная величина X, распределенная равномерно на интервале (2,6). Найдите: а) плотность распределения $\rho(x)$; б) функцию распределения $F(x)$; в) $M[X]$; г) $D[X]$; д) $P(3<X<5)$; е) $P(-2<X<3)$; ж) $P(3<X<10)$; з) $P(1<X<8)$; и) постройте графики функций $\rho(x)$ и $F(x)$.

Ответ: а) $\rho(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 0{,}25, & 2<x<6,\\ 0, & x>6;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0{,}25(x-2), & 2<x\le 6,\\ 1, & x>6;\end{cases}$

в) 4; г) $4/3$; д) 0,5; е) 0,25; ж) 0,75; з) 1.

2. Дана случайная величина X, распределенная по показательному закону $\rho(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$ Найдите: а) $F(x)$; б) m_x; в) D_x; г) $P(0<X<2)$; д) $P(-1<X<1)$.

Ответ: а) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ 1-e^{-2x}, \text{ если } x>0;\end{cases}$ б) 0,5; в) 0,25; г) $1-e^{-4}$; д) $1-e^{-2}$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения вида

$$\rho(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<1,\\ A, \quad \text{если } 1\le x\le 2,\\ -\dfrac{1}{4}x+1, \text{ если } 2<x\le 4,\\ 0, \text{ если } x>4.\end{cases}$$

Найдите: а) константу A; б) функцию распределения $F(x)$; в) m_x; г) D_x; д) $P(1,5<X<3)$; е) постройте графики функций $\rho(x)$ и $F(x)$.

Ответ: а) 0,5; б) $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 1,\\ 0,5x-0,5, \text{ если } 1<x\le 2,\\ -0,125x^2+x-1, \text{ если } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ если } x>4;\end{cases}$

в) $25/12$; г) $71/144$; д) $5/8$.

5.7. Нормальное распределение

Как мы уже отмечали, непрерывная случайная величина X называется нормальной, если ее плотность распределения имеет вид

$$\rho(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a=\text{const}, \ \sigma=\text{const}. \tag{5.23}$$

Распределение (5.23) также будем называть нормальным. Нормальное распределение определяется двумя параметрами — a и σ. Кратко этот закон распределения будем записывать в виде $N\left(a,\sigma^2\right)$.

Непосредственным вычислением, учитывая равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{2\pi}$, можно найти:

$$a=M[X], \ \sigma^2=D[X], \ M\left[(X-m_x)^3\right]=0, \ M\left[(X-m_x)^4\right]=3\sigma^4.$$

Поэтому коэффициент асимметрии S_x и эксцесс E_x равны нулю. Таким образом, в распределении $N\left(a,\sigma^2\right)$ параметр a равен математическому ожиданию, а σ^2 — дисперсии случайной величины X. Если a и σ произвольны, то нормальное распределение называют общим, если же $a = 0$, $\sigma = 1$, то нормальное распределение называют нормированным. От общего к нормированному нормальному распределению можно перейти заменой $u = \dfrac{x-a}{\sigma}$. Так как $M[u] = 0, \sigma[u] = 1$, то $\rho(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$. Для функции $\rho(u)$ составлены подробные таблицы (см. приложение А).

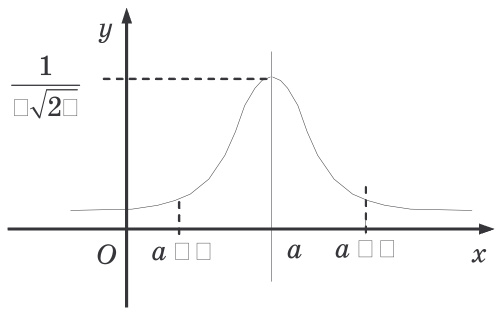
Функция

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/2\sigma^2} dz \qquad (5.24)$$

является функцией распределения для нормальной величины X.

Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz$.

Если в интеграле (5.24) сделать замену $u = (z-a)/\sigma$, то получим $F(x) = F_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. Функция $F_0(x)$ также табулирована. График функции $\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ называют нормальной кривой. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho(x) = 0$, то ось Ox является горизонтальной асимптотой. Кривая симметрична относительно прямой $x = a$.



Находим:

$$\rho'(x) = \frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \quad \rho''(x) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right] e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда следует, что функция $\rho(x)$ имеет единственную точку экстремума $x = a$, в которой принимает наибольшее значение $\rho(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

В точках $x_{1,2} = a \pm \sigma$ нормальная кривая имеет перегибы. При увеличении параметра a график $\rho(x)$ сдвигается вправо, не изменяя своей формы. Изменение параметра σ ведет к изменению формы кривой. Чем меньше σ, тем кривая круче. При увеличении σ кривая распрямляется и становится более пологой.

Вычислим $P(\alpha < X < \beta)$ и $P(|x-a|<\delta)$ для нормальной величины. По формуле (5.12) находим

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx. \qquad (5.25)$$

Данный интеграл в элементарных функциях не выражается. Его вычисление сводят к табулированной функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ путем замены $u=\frac{x-a}{\sigma}$, $x=\sigma u+a$, $dx=\sigma du$. Осуществив в интеграле (5.25) эту замену, получим $P(\alpha<X<\beta)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-u^2/2}du$. Отсюда и из свойств определенного интеграла следует:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (5.26)$$

Заметим, что $\Phi(-x) = -\Phi(-x)$, т.е. функция Лапласа нечетна.

Пример 1. Дана случайная величина $N(1,4)$. Найти $P(2<X<3)$.

Решение: по формуле (5.26) при $\alpha=2, \beta=3, a=1, \sigma=2$ получаем $P(2<X<3)=\Phi(1)-\Phi(0,5)$. По таблице для функции Лапласа (приложение Б) находим $\Phi(1) = 0,3413$; $\Phi(0,5) = 0,1915$. Отсюда $P(2<X<3)=$ $=0,3413-0,1915=0,1498$.

Пусть $\delta > 0$ — произвольное число. Вычислим вероятность $P(|x-a|<\delta)$ того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую δ. Так как $P(|x-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)$, то по формуле (5.26) получаем

$$P(|x-a|<\delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (5.27)$$

Пусть $\delta = 3\sigma$, тогда из (5.27) следует, что $P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)$. По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(3) = 0,49865$. Поэтому $P(|x-a|<3\sigma)=2\cdot 0,49865=0,9973$, т.е. событие $P(|x-a|<3\sigma)$ почти достоверно. Таким образом, вероятность того, что нормальная случайная величина примет значение вне интервала $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$, равна всего 0,0027. Такое событие в большинстве практически важных задач считают невозможным, т.е. полагают, что все значения нормальной случайной величины расположены в интервале $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$.

П р и м е р 2. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки X взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 10 г.

Решение: так как систематические ошибки отсутствуют, то $M[X]=0$. По формуле (5.27), в которой нужно положить $\delta = 10$ г, $\sigma = 20$ г, находим $P\left(|x|<10\right)=2\Phi\left(\dfrac{10}{20}\right)=2\Phi(0,5)$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(0,5)=0,1915$, поэтому $P\left(|x|<10\right)=2\cdot 0,1915=$ $=0,383$.

Упражнения

1. Случайная величина X задана плотностью распределения вида:

а) $\rho(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2)^2/32}$; б) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-5)^2/2}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

Ответ: а) 2; 16; б) 5; 1.

2. Дана нормальная случайная величина $N(5,9)$. Найдите:

а) $P(1\le X\le 2)$; б) $P(2\le X\le 4)$; в) $P\left(|x-5|<3\right)$;

г) $P\left(|x-5|<2\right)$; д) $P\left(|x|<1\right)$; е) $P\left(|x|<3\right)$.

Ответ: а) 0,0686; б) 0,2120; в) 0,6826; г) 0,2454; д) 0,0673; е) 0,2476.

5.8. Плотность распределения двумерной случайной величины

В подразд. 5.4 мы уже рассмотрели понятие функции распределения многомерной случайной величины.

Пусть функция распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F''_{xy} в некоторой точке (x,y). Дадим значениям x и y приращения Δx и Δy. Предел

$$\rho(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x,\ y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y},$$

если он существует и конечен, называется плотностью распределения системы (X,Y). Полагая $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $y_1 = y$, $y_2 = y + \Delta y$, по свойству 5 функции распределения (см. подразд. 5.4), получаем

$$\rho(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left\{ \left[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta y \right] - \right.$$

$$\left. - \left[F(x, y + \Delta y) - F(x,y) \right] \right\}.$$

Применяя к двум разностям формулу (2.21) о конечных приращениях, а затем эту же формулу к полученной разности, находим

$$\rho(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Отметим свойства плотности распределения $\rho(x,y)$, которые следуют из свойств функции распределения $F(x,y)$ и определения $\rho(x,y)$.

1. $\rho(x,y) \ge 0$.

2. Если $\rho(x,y)$ непрерывна в точке (x,y) и ее окрестности, то $P(x \le X < x + \Delta x,\ y \le Y < y + \Delta y) = \rho(\xi,\eta)\Delta x \Delta y$, где (ξ,η) — некоторая точка из окрестности точки (x,y).

3. Если функция $\rho(x,y)$ интегрируема в области D, то

$$P\left[(x,y) \in D\right] = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy. \tag{5.28}$$

4. Справедливо равенство

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \rho(x,y)\,dxdy. \tag{5.29}$$

Соотношение (5.29) есть следствие равенства (5.28), если в качестве D взять область $(-\infty < X < x,\ -\infty < Y < y)$.

5. Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dxdy = 1, \tag{5.30}$$

так как этот интеграл определяет вероятность достоверного события.

6. Имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dy \right] dx, \\ F_2(y) &= \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx \right] dy. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Здесь $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения величин X и Y. Эти равенства в случае непрерывной функции $\rho(x,y)$ следуют из формулы (5.28), если в качестве D взять $(-\infty < X < x, -\infty < Y < +\infty)$ или $(-\infty < x < +\infty, -\infty < Y < y)$ соответственно.

7. Справедливы выражения

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy, \quad \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx, \tag{5.32}$$

где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ — плотности распределения величин X и Y. Эти равенства получаются дифференцированием интегралов (5.31) по переменному верхнему пределу (см. теорему 1 из подразд. 3.4).

8. Если случайные величины X и Y независимы, то $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$, и обратно, если $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

9. Для зависимых случайных величин вводится понятие условных плотностей распределения $\rho(x/y)$ и $\rho(y/x)$:

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}, \ \rho(y/x) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)}, \tag{5.33}$$

тогда

$$\rho(x,y) = \rho_2(y)\rho(x/y), \ \rho(x,y) = \rho_1(x)\rho(y/x). \tag{5.34}$$

Соотношения (5.34) называют правилом умножения плотностей распределения.

Подчеркнем, что условная плотность распределения $\rho(y/x)$ означает плотность распределения величины Y, если известно, что случайная величина X приняла значение x.

10. Зная плотность распределения $\rho(x,y)$ системы, можно найти плотность распределения величины $Z = \varphi(X,Y)$, являющейся функцией случайных аргументов X и Y. Сначала находим функцию распределения $F(z)$, применяя следующий прием: $F(z) = P(Z < z) = P(\varphi(x,y) < z) = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$, где область D состоит из тех точек плоскости xOy, для которых справедливо неравенство $\varphi(x,y) < z$. Найдя $F(z)$, легко найти $\rho(z) = F'(z)$.

Пример 1. Система случайных величин (X,Y) задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 4^{-x} - 4^{-y} + 4^{-x-y}, \text{ если } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти $\rho(x,y)$.

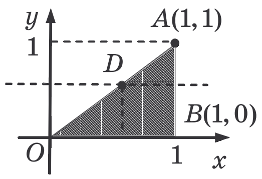
Решение: так как функция $F(x,y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков, то $\rho(x,y) = F''_{xy}$. Поэтому

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 4^{-x-y}\ln^2 4, & \text{если } x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Простейшим примером двумерной плотности распределения является равномерное распределение

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если } (x,y) \in D\ (C = \text{const}), \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

По условию нормировки $\iint\limits_D C\,dxdy = 1 = CS$, где S — площадь области D. Поэтому $C = \dfrac{1}{S}$.



Пример 2. Система случайных величин $\rho(x,y)$ распределена равномерно внутри треугольника (0,0), $A(1,1)$, $B(1,0)$. Найти $\rho(x,y)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$.

Решение: поскольку распределение равномерное, то $\rho(x,y) = C$ внутри треугольника и $\rho(x,y)=0$ вне треугольника. Так как $\iint\limits_D C\,dxdy = C\iint\limits_D dxdy = C\cdot\dfrac{1}{2} = 1$, то $C = 2$. Поэтому $\rho(x,y) = \begin{cases} 2, \text{ если } (x,y) \in D, \\ 0, \text{ если } (x,y) \notin D. \end{cases}$

Плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ находим по формулам (5.32). Зафиксируем значение x. Тогда $\rho_1(x) = 0$, если $x \le 0$ либо $x \ge 1$. Если же $0 < x < 1$, то $\rho_1(x) = \int\limits_0^x 2dy = 2x$, так как при фиксированном $x \in (0,1)$ величина y изменяется от 0 до x, поскольку прямая OA имеет уравнение $y = x$. Зафиксируем величину y. При $y \le 0$ или $y \ge 1$ функция $\rho_2(y)$ равна нулю. Если $0 < y < 1$, то $\rho_2(y) = \int\limits_y^1 2dx = 2(1-y)$, так как при фиксированном $y \in (0,1)$ величина x изменяется от y до 1. Итак, мы получили

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{в остальных точках;} \end{cases} \qquad \rho_2(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{если } 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Пусть дана случайная величина $Z = \varphi(X, Y)$, являющаяся функцией двух случайных аргументов X и Y. Найдем $M[Z]$. Если величины X и Y дискретны и известна матрица распределения, т.е. заданы вероятности $P_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, то

$$M(Z) = \sum_{i,j} \varphi\left(x_i, y_j\right) p_{ij}. \tag{5.35}$$

Рассмотрим систему непрерывных величин (X, Y), распределенную в области D плоскости xOy с плотностью $\rho(x, y)$. Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$, не находя плотность распределения $\rho(z)$. Пусть функции $\varphi(x, y)$ и $\rho(x, y)$ интегрируемы. Разобьем область D на n частичных областей D_i площадью ΔS_i, в каждой из частичных областей D_i выберем по точке (ξ_i, η_i) и построим дискретную случайную величину $\tilde{Z}$ с рядом распределения

$\tilde{Z}$	$\varphi(\xi_1, \eta_1)$	$\varphi(\xi_2, \eta_2)$	$\ldots$	$\varphi(\xi_n, \eta_n)$
P	$\rho(\xi_1, \eta_1)\Delta S_1$	$\rho(\xi_2, \eta_2)\Delta S_2$	$\ldots$	$\rho(\xi_n, \eta_n)\Delta S_n$

Величину $M[\tilde{Z}] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i)\, \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ можно принять в качестве приближенного значения $M[Z]$. Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta S_i \to 0$, получаем

$$M[Z] = \iint\limits_D \varphi(x, y)\, \rho(x, y) dx dy. \tag{5.36}$$

Если система (X, Y) задана на всей плоскости, то

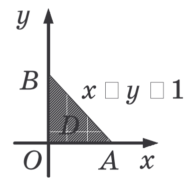
$$M[Z] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, \rho(x, y) dx dy \tag{5.37}$$

при условии сходимости этого интеграла. Формулы (5.36) и (5.37) легко обобщаются на любое число аргументов. Так, если $U = \varphi(x, y, z)$, то $M[U] = \iiint\limits_D \varphi(x, y, z)\, \rho(x, y, z) dx dy dz$, где D — область определения системы (X, Y, Z).

П р и м е р 3. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 24xy, \text{ если точка } (x, y) \text{ лежит внутри треугольника} \\ \qquad O(0, 0),\ A(1, 0),\ B(0, 1); \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти $M[X + Y]$.



Решение: по формуле (5.36) находим $M[X+Y]=$

$$=24\iint\limits_{D}(x+y)xydxdy=24\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}\left(x^2y+xy^2\right)dy=$$

$$=24\int\limits_{0}^{1}\left[\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1-x}\right]dx=4\int\limits_{0}^{1}\left[3x^2(1-x)^2+2x(1-x)^3\right]dx=$$

$$=4\int\limits_{0}^{1}\left(x^4-3x^2+2x\right)dx=4\left(\frac{x^5}{5}-x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=4\left(\frac{1}{5}-1+1\right)=\frac{4}{5}.$$

Упражнения

1. Система случайных величин (X,Y) задана плотностью распределения, описанной в примере 3. Найдите: а) $\rho_1(x)$; б) $\rho_2(y)$; в) $\rho(x/y)$; г) $\rho(y/x)$; д) $F\left(\frac{1}{2},2\right)$.

Ответ: а) $\rho_1(x)=12x(1-x)^2,\ \ 0<x<1$; б) $\rho_2(y)=12y(1-y)^2,\ \ 0<y<1$; в) $\rho\left(x/y\right)=\dfrac{2x}{(1-y)^2}$ в треугольнике OAB; г) $\rho\left(y/x\right)=\dfrac{2y}{(1-x)^2}$ в треугольнике OAB; д) $F\left(\frac{1}{2},2\right)=11/16$.

2. Система случайных величин задана плотностью распределения

$$\rho(x,y)=\begin{cases}C(x+y) \text{ при } \ 0\le y\le x\le 1,\\ 0 \ \text{ в остальных \ точках.}\end{cases}$$

Найдите: а) константу C; б) $P(X+Y<1)$.

Ответ: а) 2; б) $1/3$.

5.9. Характеристики связи двух случайных величин

Функция распределения $F(x,y)$ или плотность распределения $\rho(x,y)$ дают исчерпывающую характеристику системы (X,Y). По плотности распределения $\rho(x,y)$ можно найти плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ каждой из величин, входящих в систему, т.е. получить их полную характеристику. Зная же функции $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ в общем случае нельзя восстановить функцию $\rho(x,y)$. Нужно знать дополнительную информацию об их связи. Наиболее полную характеристику связи дают либо условные функции распределения $F\left(x/y\right)$ и $F\left(y/x\right)$, либо условные плотности распределения $\rho(x/y)$ и $\rho(y/x)$. Иногда достаточны менее полные характеристики, но более просто определяемые. К таким относятся условные математические ожидания, или функции регрессии одной случайной величины на другую. Для дискретных случайных величин X и Y условные математические ожидания мы определили в подразд. 5.3. Для непрерывных величин полагают:

$$M[X/Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x/y)\,dx, \tag{5.38}$$

$$M[Y/X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\rho(y/x)\,dy. \tag{5.39}$$

Условное математическое ожидание $M[X/Y = y]$, как это следует из (5.38), есть некоторая функция $\psi(y)$ аргумента y. Ее называют функцией регрессии случайной величины X на случайную величину Y. График функции $x = \psi(y)$ называют кривой регрессии случайной величины X на Y. Соотношение (5.39) определяет функцию $\varphi(x)$, называемую функцией регрессии величины Y на X, а ее график называют кривой регрессии Y на X.

Если случайные величины X и Y независимы, то кривые регрессии являются прямыми, параллельными осям координат, пересекающимися в точке $(m_x,\ m_y)$, называемой центром распределения системы (X,Y).

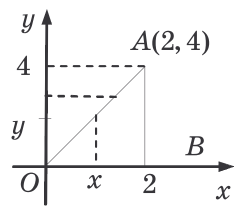
При экспериментальном исследовании зависимости величин X и Y одной из величин, как правило, удается управлять, т.е. придавать ей определенные значения. Положив $X = x_1$, путем нескольких замеров находят соответствующие значения Y. Взяв их среднее значение, получают приближенно величину $M[Y/X = x_1]$, т.е. точку на кривой $y = \varphi(x)$. Полагая $X = x_2, x_3, \ldots, x_n$, получим на кривой $y = \varphi(x)$ n точек, по которым можно судить о функции регрессии $y = \varphi(x)$.

П р и м е р 1. Система (X,Y) распределена равномерно в треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;4)$, т.е.

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если точка } (x,y) \text{ лежит внутри треугольника } OAB; \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти функции регрессии $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$.

Решение. Так как $C = \dfrac{1}{S}$, где S — площадь области D значений системы (X,Y), то в нашем случае $C = \dfrac{1}{4}$. Зафиксируем каким-либо образом $X = x$ в промежутке $[0,2]$. При этом значении x величина Y



изменяется равномерно в интервале $(0,2x)$. Поэтому $\varphi(x)=M\left[Y/X=x\right]= =\dfrac{0+2x}{2}=x$ (см. пример 6 в подразд. 5.6). При фиксированном значении y величины Y из промежутка $(0,4)$ величина X изменяется равномерно в промежутке $(0,5y;4)$. Следовательно,

$$\psi(y) = M\left[X/Y = y\right] = \frac{0,5y + 4}{2} = 0,25y + 2.$$

Такой простой способ отыскания функций регрессии пригоден лишь для равномерного распределения. В общем случае необходимо использовать формулы (5.38) и (5.39).

Функции регрессии хорошо характеризуют зависимость одной случайной величины от другой, но их отыскание связано с громоздкими вычислениями. Для числовой характеристики степени зависимости величины X и Y используют величину $M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]$, называемую ковариацией случайных величин X и Y (обозначается $\mathrm{cov}(X,Y)$). Для дискретных величин

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - m_x\right)\left(y_j - m_y\right)p_{ij}, \tag{5.40}$$

а для непрерывных —

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_x\right)\left(y - m_y\right)\rho(x, y)dxdy. \tag{5.41}$$

Соотношения (5.40) и (5.41) следуют из формул (5.36) и (5.37), в которых надо положить $\varphi(x, y) = (x - m_x)(y - m_y)$.

Пользуясь свойствами математического ожидания (см. подразд. 5.6), выражение $M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]$ можно преобразовать и получить

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M\left[XY - m_xY - m_yX + m_xm_y\right] = M[X \cdot Y] -$$
$$- m_xM[Y] - m_yM[X] + m_xm_y = M[X \cdot Y] - m_xm_y,$$

т.е.

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M[X \cdot Y] - m_xm_y. \tag{5.42}$$

С учетом (5.42) формулы (5.40) и (5.41) можно переписать в виде

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_{ij} - m_xm_y, \tag{5.43}$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x, y) - m_xm_y. \tag{5.44}$$

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы, то $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство проведем для непрерывных величин. Если случайные величины X и Y независимы, то плотности распределения связаны соотношением $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$ (свойство 8 функции $\rho(x,y)$), следовательно, по формуле (5.41)

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)\left(y - m_y\right)\rho_1(x)\rho_2(y)\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)\rho_1(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - m_y\right)\rho_2(y)\,dy =$$

$$= M\left[(X - m_x)\right] \cdot M\left[\left(Y - m_y\right)\right] = (m_x - m_x)\left(m_y - m_y\right) = 0.$$

Здесь применена формула (5.19), где $\varphi(x) = (x - m_x)$, $\varphi(y) = \left(y - m_y\right)$. Теорема доказана.

Обратное утверждение неверно, т.е. из того, что $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, не следует независимость величин X и Y.

Величину $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}} = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ называют коэффициентом корреляции.

Случайные величины X и Y называют коррелированными, если $r_{xy} \neq 0$, и некоррелированными, если $r_{xy} = 0$. Если случайные величины независимы, то они и некоррелированны. Зависимые случайные величины могут быть как некоррелированными, так и коррелированными. Как мы покажем в следующем подразделе, коэффициент корреляции характеризует зависимость не любого вида, а лишь только линейную.

Пример 2. Дана матрица распределения

Y	X		
	–1	2	3
2	0,1600	0,2300	0,2000
5	0,1500	0,1400	0,1200

Найти $\operatorname{cov}(X, Y), r_{xy}$.

Решение: чтобы найти эти величины, нужно вычислить m_x, m_y, D_x, D_y. Записываем ряды распределения X и Y (см. подразд. 5.3):

X	–1	2	3
P	0,3100	0,3700	0,3200

Y	2	5
P	0,5900	0,4100

Находим: $m_x = -1 \cdot 0,3100 + 2 \cdot 0,3700 + 3 \cdot 0,3200 = 1,3900;$
$m_y = 2 \cdot 0,5900 + 5 \cdot 0,4100 = 3,2300;$

$M\left[X^2\right] = 1 \cdot 0,3100 + 4 \cdot 0,3700 + 9 \cdot 0,3200 = 4,6700 = 4,6700;$

$D_x = 4,6700 - (1,3900)^2 = 4,6700 - 1,9321 = 2,7379;$

$M\left[Y^2\right] = 4 \cdot 0,5900 + 25 \cdot 0,4100 = 12,6100;$

$D_y = 12,6100 - (3,23)^2 = 12,6100 - 10,4329 = 2,1771.$

Для вычисления $\operatorname{cov}(X,Y)$ применяем формулу (5.43). Сначала находим $M[X \cdot Y] = -1 \cdot 2 \cdot 0,1600 - 1 \cdot 5 \cdot 0,1500 + 2 \cdot 2 \cdot 0,2300 + 2 \cdot 5 \times$
$\times\, 0,1400 + 3 \cdot 2 \cdot 0,2000 + 3 \cdot 5 \cdot 0,1200 = -0,3200 - 0,7500 + 0,9200 +$
$+\, 1,400 + 1,200 + 1,800 = 4,2500.$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 4,2500 - 1,3900 \cdot 3,2300 = 4,25 - 4,4897 = -0,2397;$$

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}},\quad r_{xy} = \frac{-0,2397}{\sqrt{2,7379}\sqrt{2,1771}} = \frac{-0,2397}{2,4415} \approx -0,0982.$$

Все вычисления приведены с точностью до четырех знаков, так как вероятности даны с этой точностью. Как видим, величины X и Y слабо отрицательно коррелированны, т.е. рост одной из них вызывает медленное убывание другой.

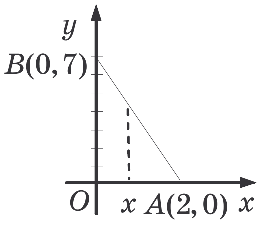
Пример 3. Дана плотность распределения вероятностей системы (X,Y):

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C \text{ (const) внутри треугольника } A(2,0),\ B(0,7), \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) константу C; б) $\rho_1(x)$; в) $\rho_2(y)$; г) m_x; д) m_y; е) D_x; ж) D_y; з) $\operatorname{cov}(X,Y)$; и) r_{xy}.

Решение:

а) так как данное распределение равномерно, а площадь S треугольника OAB равна 7, то $C = \dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{7};$



б) плотность распределения $\rho_1(x)$ величины X находим по первой формуле (5.32). Величина X распределена только на участке (0,2). Поэтому вне этого участка $\rho_1(x) = 0$. Зафиксируем как-либо x на (0,2). При этом значении x величина y изменяется от $-\infty$ до нуля, затем от 0 до прямой AB, имеющей уравнение $y = -\dfrac{7}{2}x + 7$, и от прямой AB до $+\infty$. Поскольку первый и третий участки находятся вне треугольника OAB, то на них $\rho(x,y)=0$, а потому $\rho_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy=\frac{1}{7}\int\limits_0^{(-7/2)x+7}dy=-\frac{1}{2}x+1$ на $(0,2)$, вне $(0,2)$ функция $\rho_1(x)=0$;

в) аналогично находим: $\rho_2(y)=\frac{1}{7}\int\limits_0^{2-(2/7)y}dx=\frac{2}{7}-\frac{2}{49}y$ при $0<y<7$, $\rho_2(y)=0$ вне $(0,7)$;

г) по формуле (5.15) находим $m_x=\int\limits_0^2 x\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2=$

$=2-\frac{8}{6}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$;

д) $m_y=\int\limits_0^7 y\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{49}y\right)dy=\left(\frac{y^2}{7}-\frac{2y^3}{49\cdot 3}\right)\Big|_0^7=7-\frac{14}{3}=\frac{7}{3}$;

е) для отыскания D_x применяем формулу (5.22):

$$D_x=M\left[X^2\right]-(m_x)^2.$$

$M\left[X^2\right]=\int\limits_0^2 x^2\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$, $D_x=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$

$=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$;

ж) $M\left[Y^2\right]=\int\limits_0^7 y^2\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{49}y\right)dy=\left(\frac{2y^3}{7\cdot 3}-\frac{2y^4}{49\cdot 4}\right)\Big|_0^7=\frac{98}{3}-\frac{49}{2}=$

$=\frac{196-147}{6}=\frac{49}{6}$; $D_y=\frac{49}{6}-\frac{49}{9}=\frac{49}{18}$;

з) для вычисления $\operatorname{cov}(X,Y)$ применяем формулу (5.44): $\operatorname{cov}(X,Y)=$ $=M[X\cdot Y]-m_x m_y$. $M[X\cdot Y]=\iint\limits_D \frac{1}{7}xydxdy$, где D — область, расположенная внутри треугольника OAB, поэтому

$$M[X\cdot Y]=\frac{1}{7}\int\limits_0^2 x\int\limits_0^{7(1-x/2)}ydy=\frac{49}{2\cdot 7}\int\limits_0^2 x\left(1-\frac{x}{2}\right)^2dx=\frac{7}{2}\int\limits_0^2\left(x-x^2+\frac{x^3}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{7}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}\right)\Big|_0^2=\frac{7}{2}\left(2-\frac{8}{3}+1\right)=\frac{7}{6},$$

следовательно, $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{6}-\frac{14}{9}=-\frac{7}{18}$;

и) $r_{xy} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x D_y}} = \dfrac{-7/18}{\sqrt{(2/9)\cdot(49/18)}} = -1/2$.

Упражнения

1. Дана матрица распределения системы (X,Y)

Y	X		
	1	4	5
2	0,1700	0,2500	0,2000
4	0,1500	0,1300	0,1000

Найдите: а) ряды распределения X и Y; б) m_x; в) m_y; г) D_x; д) D_y; е) $\mathrm{cov}(X,Y)$; ж) r_{xy}.

Ответ: б) 3,34; в) 2,76; г) 2,7444; д) 0,9424; е) –0,1984; ж) –0,12.

2. Дана плотность распределения системы (X,Y)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C & \text{внутри треугольника } O(0,0), A(7,0), B(7,-3), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите: а) C; б) $\rho_1(x)$; в) $\rho_2(y)$; г) m_x; д) m_y; е) D_x; ж) D_y; з) $\mathrm{cov}(X,Y)$; и) r_{xy}.

Ответ: а) 2/21; г) –1; д) 1/2; е) 49/18; з) –7/12; и) –1/2.

5.10. Свойства числовых характеристик случайных величин

1. Свойства математического ожидания. Непосредственно из определения математического ожидания следует, что

$$M[C] = C, \quad M[CX] = CM[X], \quad C = \mathrm{const}.$$

Теорема 1. Если случайные величины X и Y имеют конечные математические ожидания, то

$$M[\alpha X + \beta Y] = \alpha M[X] + \beta M[Y],$$

где α и β — константы.

Доказательство проведем для непрерывных случайных величин. Пусть $\rho(x,y)$ — плотность распределения системы (X,Y). Тогда по формуле (5.37), в которой надо положить $\varphi(x,y) = \alpha x + \beta y$, находим

$$M[\alpha X + \beta Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta y)\rho(x,y)dxdy = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy\right] dx +$$

$$+ \beta\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx\right] dy = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho_1(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} y\rho_2(y)dy = \alpha M[X] + \beta M[Y].$$

При этом мы применили формулы (5.32) и (5.16).

Теорема 1 легко обобщается на любое число слагаемых:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i M[X_i],\quad \alpha_i=\text{const}.$$

Теорема 2. Если случайные величины X и Y имеют конечные математические ожидания, то

$$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]+\operatorname{cov}(X,Y). \qquad (5.45)$$

Справедливость этого соотношения следует из формулы (5.42).

Если X и Y некоррелированны, то $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$.

2. Свойства дисперсии. Из определения дисперсии следует, что $D[C]=0$, $D[CX]=C^2D[X]$, $C=\text{const}$.

Теорема 3. Для любых случайных величин, имеющих конечную дисперсию, справедлива формула

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2\operatorname{cov}(X,Y). \qquad (5.46)$$

Докажем это: $D[X+Y]=M\left[(X+Y-M[X+Y]\right]^2=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]+$

$+M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right]+2M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=D_x+D_y+2\operatorname{cov}(X,Y).$

Для некоррелированных случайных величин $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, поэтому $D\left[X+Y\right]=D\left[X\right]+D\left[Y\right]$. Пользуясь свойством $D\left[CX\right]=C^2D\left[X\right]$ и формулой (5.46), легко получить

$$D\left[\alpha x+\beta y\right]=\alpha^2D\left[X\right]+\beta^2D\left[Y\right]+2\alpha\beta\operatorname{cov}(X,Y)$$

и

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2D\left[X_i\right]+2\sum_{j=1,i<j}^{n}\alpha_i\alpha_j\operatorname{cov}\left(X_i,X_j\right].$$

3. Свойства коэффициента корреляции. Докажем следующие теоремы.

Теорема 4. Для любых случайных величин X и Y, имеющих конечную дисперсию, коэффициент корреляции r_{xy} не превышает по модулю единицу, т.е. $-1\le r_{xy}\le 1$.

Для доказательства вычислим $M[Z_{1,2}]=M\left[\left(\dfrac{X-m_x}{\sigma_x}\pm\dfrac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]=$

$$=M\left[\frac{\left(X-m_x\right)^2}{\sigma_x^2}+\frac{\left(Y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\pm 2\frac{\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)}{\sigma_x\sigma_y}\right]=\frac{M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]}{\sigma_x^2}+$$

$$+\frac{M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right]}{\sigma_y^2}\pm\frac{2M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]}{\sigma_x\sigma_y}=1+1\pm 2r_{xy}=2(1\pm r_{xy}),$$

так как $\sigma_x^2=D_x$, $\sigma_y^2=D_y$, $M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D_x$, $M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right]=D_y$,

$M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=r_{xy}\sigma_x\sigma_y$. Поскольку $M[Z_{1,2}]\geq 0$, то $1\pm r_{xy}\geq 0$, следовательно, $\left|r_{xy}\right|\leq 1$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y+aX+b$, где a и b — константы, то

$$r_{xy}=\begin{cases}1, & \text{если } a>0,\\ -1, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Докажем это. По свойству математического ожидания $m_y=M[aX+b]=am_x+b$, поэтому $Y-m_y=aX+b-am_x-b=a(X-m_x)$, $D_y=a^2D_x$. Следовательно,

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=$$

$$=M\left[a\left(X-m_x\right)^2\right]=aM\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=aD_x,$$

$$r_{xy}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}=\frac{aD_x}{\sqrt{a^2D_xD_x}}=\frac{a}{|a|}=\pm 1,$$

что и требовалось доказать.

Верна и обратная теорема: если $r_{xy}=\pm 1$, то случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью. Таким образом, величину r_{xy} можно считать числовой мерой степени линейной зависимости случайных величин X и Y.

Часто зависимость между X и Y ищут приближенно как линейную функцию $Y=aX+b$. Параметры a и b определяют методом наименьших квадратов, требуя, чтобы функция $F(a,b)=M\left[(Y-ax-b)^2\right]$ была наименьшей. При таких значениях a и b функцию $q(X)=ax+b$ называют линейной среднеквадратичной регрессией величины Y на X. Можно показать, что $q(X)=m_y+r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(X-m_x\right)$. При этом абсолютная погрешность равенства $Y=ax+b$ равна $\Delta=\sigma_y^2\left(1-r_{xy}^2\right)$. Ошибка тем меньше, чем ближе величина $\left|r_{xy}\right|$ к единице.

5.11. Понятие о выборочном методе в математической статистике

Теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений, при этом сама математическая модель считается заданной, т.е. если изучается некоторое событие A,то известна его вероятность $P(A)$ или ее нетрудно найти. Если речь идет о случайной величине X, то либо известен закон ее распределения в какой-нибудь форме, либо имеется возможность найти этот закон. В практических задачах эти характеристики, как правило, неизвестны, но имеются некоторые экспериментальные данные о событии или случайной величине. Требуется на основании этих данных построить подходящую вероятностную модель. Построение вероятностных моделей случайных явлений на основании экспериментальных данных — основная задача математической статистики, обширного раздела современной математики.

Одним из важных методов математической статистики является выборочный метод. Пусть требуется изучить случайную величину X, распределенную по некоторому неизвестному нам закону A. Множество всех значений случайной величины X называют генеральной совокупностью A. Предположим, что имеется возможность производить над величиной X любое число опытов (измерений) и получать множество ее значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5.47}$$

как результат n наблюдений. Среди чисел (5.47) могут быть и равные.

Множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ отдельных значений случайной величины X, распределенной по закону A, называется выборкой объема n из генеральной совокупности A.

Например, случайная величина X — рост студентов-мужчин в данной аудитории. Исходя из здравого смысла, можно считать, что величина X распределена в промежутке (140,210) (рост выражен в сантиметрах). Тогда генеральной совокупностью является интервал (140,210). Отобрав 5 студентов и измерив их рост, получим выборку, например, (179, 168, 187, 180, 190) объема 5.

Числа x_i называют элементами выборки или вариантами.

Итак, в результате n экспериментов получена выборка (5.47). Если предпринять другую серию n экспериментов, то, как правило, получим другую выборку $\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$. Следовательно, множество всех выборок объема n из данной генеральной совокупности можно рассматривать как систему n случайных величин

$$X_1, X_2, \ldots, X_n. \tag{5.48}$$

Выборка (5.47) представляет собой одно из возможных значений n-мерной случайной величины (5.48). Обычно систему (5.48) и ее конкретную реализацию (5.47) обозначают одинаково в виде (5.47).

Чтобы по выборке можно было достаточно полно судить о случайной величине X, проведение экспериментов должно быть организовано специальным образом. Будем считать, что все эксперименты независимы и не изменяют характера изучаемой случайной величины. Это означает, что случайные величины в системе (5.48) независимы и распределены по тому же закону A, что и изучаемая величина X.

Если случайная величина X принимает лишь небольшое число значений, то условию независимости и постоянства распределений удовлетворяют лишь выборки с возвращением, когда обследуемые объекты в предыдущем эксперименте возвращаются в изучаемую совокупность.

Выборка (5.47) является первичной формой записи экспериментального материала. Его можно обработать по-разному для удобства дальнейшего анализа. Если выборочные данные (5.47) расположить в порядке возрастания $x_1', x_2', \ldots, x_n^1$, $x_1' \le x_2' \le \ldots \le x_n'$, то полученная последовательность называется вариационным рядом.

Разность $x_n' - x_1'$ между максимальным и минимальным элементами выборки называется размахом выборки.

Пусть в выборке объема n одно и то же число x_i встречается n_i раз. Число n_i называется абсолютной частотой элемента x_i, а отношение $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ — его относительной частотой. Мы получили две последовательности пар чисел (x_i, n_i) и (x_i, w_i). Первую из них называют статистическим рядом абсолютных частот, а вторую — статистическим рядом относительных частот. Статистические ряды обычно записывают в виде таблиц, в первой строке которых располагают различные элементы выборки в порядке возрастания, а во второй — соответствующие абсолютные или относительные частоты этих элементов, т.е. в виде

x_i	x_1'	x_2'	…	x_m'
n_i	n_1	n_2	…	n_m

(5.49)

x_i	x_1'	x_2'	…	x_m'
w_i	w_1	w_2	…	w_m

(5.50)

Здесь $x_1' < x_2' < \ldots < x_m'$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

При большом объеме выборки строят группированный статистический ряд. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, делят на K равных (иногда неравных) частичных интервалов, эти интервалы нумеруют и подсчитывают числа n_i^* элементов выборки, попавших в i-й интервал, при этом элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относят к последующему интервалу. Обозначая через x_i^* середину i-го интервала, получают две последовательности пар $\left(x_i^*, n_i^*\right)$ и $\left(x_i^*, \dfrac{n_i^*}{n}\right)$, называемые группированными рядами абсолютных или относительных частот. Эти ряды обычно также записывают в виде таблиц:

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\ldots$	x_k^*
n_i^*	n_1^*	n_2^*	$\ldots$	n_k^*

(5.51)

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\ldots$	x_k^*
$w_i = \dfrac{n_i^*}{n}$	$\dfrac{n_1^*}{n}$	$\dfrac{n_2^*}{n}$	$\ldots$	$\dfrac{n_k^*}{n}$

(5.52)

Для большей наглядности применяют различного рода графические построения, отражающие те или иные особенности выборки. Отметим некоторые из них.

1. Полигон абсолютных частот — ломаная с вершинами в точках $M_i(x_i, n_i)$.

2. Полигон относительных частот — ломаная с вершинами в точках $M_i\left(x_i, \dfrac{n_i}{n}\right)$.

Полигоны частот графически представляют ряды (5.49) и (5.50).

3. Гистограмма относительных частот — ступенчатая фигура, состоящая из K прямоугольников, опирающихся на частичные интервалы. Площадь i-го прямоугольника полагают равной $\dfrac{n_i^*}{n}$, где n_i^* — число элементов выборки, попавших в i-й частичный интервал. Гистограмма строится на основании ряда (5.52). Для непрерывной случайной величины гистограмма дает некоторое представление об ее плотности распределения.

При построении вероятностных характеристик случайной величины X используется все множество ее значений. Такие характеристики называют теоретическими. Характеристики, построенные на основе выборочных данных, называют эмпирическими или выборочными.

Пусть имеем выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функция $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x — число элементов выборки, меньших x; n — объем выборки, называется эмпирической функцией распределения или функцией распределения выборки.

Отличие теоретической функции распределения $F(x)$ от эмпирической заключается в том, что $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Эмпирическая функция распределения совпадает с теоретической для дискретной случайной величины, заданной рядом распределения (5.50). Поэтому эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами теоретической.

На основании ряда (5.52) определяют также выборочные числовые характеристики: выборочное математическое ожидание $m_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ и выборочную дисперсию $D_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_в)^2}{n}$. Доказано, что выборочные характеристики приближаются к теоретическим с увеличением объема выборки.

В математической статистике решают многие важные задачи для практики, но все они базируются на выборочных, т.е. экспериментальных данных.

Контрольные работы

О самоконтроле при выполнении работ

Студенты, которые имеют устройство «Символ», могут выполнять работы в режиме автоматизированного самоконтроля. Как осуществлять самоконтроль, объяснено в инструкции, прилагаемой к прибору. Форма записи ответа, вводимого в устройство, указана в формулировках задач. При вводе числовых ответов, если не оговорено особо, необходимо соблюдать следующие правила:

а) все нецелые числа вводить в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной запятой, а не точкой;

б) после запятой записывать два знака, производя округление с точностью до 0,01. Например, округлив до 0,01 число 11,999, получим 12,00. В таком виде это число и вводится в устройство. По этому правилу, например, число 0,001 нужно вводить в виде 0,00 (в соответствии с правилом округления), а не просто 0;

в) целые числа, если операция округления не производилась, вводятся без использования запятой.

Контрольная работа № 3

Задача 1

1.1 (П11.РП). Дана функция $f(x) = 9x^2 - 4x - 6$. Докажите, что функция $f(-6x - 1)$ может быть представлена в виде $f(-6x - 1) = Ax^2 + Bx + C$. Найдите значения констант A, B, C. В ответ введите сначала значение A, затем B и C.

1.2 (ТТ2.РП). Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = 8x^2 - 56x - 144$ с осью Ox. В ответ введите сначала меньшее значение x, а затем через точку с запятой большее.

1.3 (403.РП). Функция $f: X \subset R \to Y \subset R$ вида $f(x) = \dfrac{-8x + 6}{-6x - 4}$ называется дробно-линейной. Докажите, что функция $y = f\left[f(x)\right]$ также дробно-линейная, т.е. имеет вид $f\left[f(x)\right] = \dfrac{Ax + B}{Cx + D}$. В ответ введите сначала значение B, а затем значение C.

1.4 (754.РП). Даны две линейные функции: $f_1(x) = -7x - 5$ и $f_2(x) = -4x + 1$. Докажите, что функция $f(x) = f_2\left[f_1(x)\right]$ также линейна, т.е. имеет вид $f(x) = Ax + B$.

В ответ введите сначала значение A, а затем через точку с запятой значение B.

1.5 (ББ5.РП). Даны две функции: $f_1(x)=\dfrac{6x+6}{5x+7}$ и $f_2(x)=\dfrac{-3x-5}{-4x-1}$, называемые дробно-линейными. Докажите, что функция $f(x)=f_1\left[f_2(x)\right]$ также дробно-линейная, т.е. имеет вид $f(x)=\dfrac{Ax+B}{Cx+D}$.

В ответ введите сначала значение A, а затем через точку с запятой значение D.

1.6 (Б06.РП). Для некоторой функции $f: X\subset R\to Y\subset R$ известно, что $f(-4x-2)=-48x^2-36x$. Докажите, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x)=Ax^2+Bx+C$. В ответ введите значение A, B, C, разделив их точкой с запятой.

1.7 (8Б7.РП). Для некоторой функции $f: X\subset R\to Y\subset R$ известно, что $f(8x-2)=-16x-2$. Докажите, что функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x)=Ax+B$. В ответ введите числа A и B, разделив их точкой с запятой.

1.8 (268.РП). Функцию $f(x)=Ax+B$ называют линейной. Найдите коэффициенты A и B, если известно, что $f(x)$ принимает значение -99 при $x=9$, а при $x=18$ принимает значение -108. В ответ введите сначала значение A, затем через точку с запятой значение B.

1.9 (П79.РП). Дана линейная функция $f(x)=-10x+109$. Найдите значение этой функции в точке $x=16$ и в точке $x=-1$. В ответ введите значение в точке $x=16$, а затем через точку с запятой значение в точке $x=-1$.

1.10 (930.РП). Дана функция $f(x)=3x^2-4x+1$. Докажите, что функция $f(2x-8)$ может быть представлена в виде $f(2x-8)=Ax^2+$ $+Bx+C$. Найдите значения констант A, B, C. В ответ введите значения A, B, C, разделив их точкой с запятой.

1.11 (88А). Докажите, что функция $f(x)=x^2-4x+20$ ограничена снизу. Укажите ее наименьшее значение.

1.12 (44А). Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{12}{\sqrt{x^2-6x+13}}$ ограничена сверху. Найдите ее наибольшее значение.

1.13 (4АП.РП). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=12\sin x+5\cos x$. В ответ введите сначала наименьшее значение, а затем наибольшее.

1.14 (2АА.РП). Найдите значения A и B в выражении функции $f(x)=Ax^2+\mathrm{B}x+5$, если справедливо тождество $f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$.

1.15 (О2А). Вычислите значение функции $f(x)$ в точке $x=2$, если известно, что $f(x+5)=x^2-2x+4$.

1.16 (ПД1). Докажите, что функция $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{3}$ периодическая и найдите ее наименьший период.

1.17 (552). Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ периодическая и найдите ее наименьший период.

1.18. Постройте график функции $f(x)=|x+1|+|x-1|$.

1.19. Постройте график функции $y=\left|x^2-1\right|$.

1.20. Постройте график функции $y=x\frac{|x-2|}{x-2}$.

Задача 2

Найдите область определения функций.

Ответ вводите в виде промежутков или отрезков, или их объединений в порядке следования на числовой оси. Пустое множество вводить знаком $\varnothing$. Пример: $(-\infty;2]\cup[2;3)\cup(4;+\infty)$.

2.1 (СПА.РП). $f(x)=\sqrt{x^2+33x+270}$.

2.2 (Д6Б.РП). $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+26x+168}}$.

2.3 (70С.РП). $f(x)=\sqrt{(2-x)(x-13)}$.

2.4 (Д1Т.РП). $f(x)=\lg[(-1-x)(x-12)]$.

2.5 (221.РП). $f(x)=\sqrt{\frac{-14x-182}{-10x-120}}$.

2.6 (Б52.РП). $f(x)=\sqrt{(x+9)(x+8)(x-14)}$.

2.7 (563.РП). $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+17)(x+8)(x-13)}}$.

2.8 (8П4.РП). $f(x)=\lg\frac{x+17}{(x-8)(x-11)}$.

2.9 (155.РП). $f(x)=\arcsin\frac{x+2}{x-6}$.

2.10 (АБ6.РП). $f(x)=\arccos\frac{x-32}{x-38}$.

2.11 (567.РП). $f(x)=\arcsin\frac{x-10}{x+16}$.

2.12 (Т48.РП). $f(x)=\arccos\frac{x-18}{x+24}$.

2.13 (Д69.РП). $f(x)=\arcsin\frac{x-4}{-17}$.

2.14 (810.РП). $f(x) = \arcsin\dfrac{15}{x-11}$.

2.15 (ОДП.РП). $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x+4}$.

2.16 (БАА.РП). $f(x) = \sqrt{x^2+31x+234} + \arcsin\dfrac{x}{-6}$.

2.17 (69Б.РП). $f(x) = \sqrt{x^2+3x-54} + \arcsin\dfrac{x}{-8}$.

2.18 (76С.РП). $f(x) = \sqrt{x^2+13x+42} + \arcsin\dfrac{x}{-13}$.

2.19 (039). $f(x) = \sqrt{x^2+x-210} + \arcsin\dfrac{x}{11}$.

2.20 (ПД1.РП). $f(x) = \sqrt{x^2-6x-40} + \arcsin\dfrac{x}{6}$.

Задача 3

Найдите пределы.

3.1 (68Б). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{18n-1}{n+2} - \dfrac{18n}{n-15}\right)$.

3.2 (АД2.Д6). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-3+\sqrt{n^5}+6\sqrt[4]{n^3}+3\sqrt{n}}{-11\sqrt{n}+12\sqrt[5]{n^2}-7\sqrt{n^5}}\right)$.

3.3 (323). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4\sqrt[14]{n+16}+15\sqrt[14]{n+4}}{11\sqrt[14]{n-20}+8\sqrt[14]{n+17}}\right)$.

3.4 (СО4.Д7). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7\sqrt[9]{n-19}-15\sqrt[9]{n+2}}{14\sqrt[8]{n-11}+10\sqrt[8]{n-15}} + \dfrac{-7n^2}{-8n^2-3n-14}\right)$.

3.5 (885). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{16\sqrt[11]{n-8}+2\sqrt[11]{n-6}}{\sqrt[11]{n+2}+12} + \dfrac{7-3n}{n+12}\right)$.

3.6 (806). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3+17n^2-11n+16}{-13-18n+9n^2-n^3} + \dfrac{14n-3}{n-19}\right)$.

3.7 (Д87). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+16}-10}{\sqrt{n}+8} + \dfrac{10n}{n+16}\right)$.

3.8 (258). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{19x^2+17x-3}{7-15x-x^2} + 9\sqrt[4]{\dfrac{x+16}{x-14}}\right)$.

3.9 (329). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{18+16x-5x^2-14x^3}{-20-16x+4x^2-x^3}+16\sqrt[4]{\dfrac{x-3}{x-20}}\right)$.

3.10 (ДАО.Д7). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5\sqrt{x^3}+7\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}}{13\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x^2}+17\sqrt{x^3}}$.

3.11 (84П). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-7n-3}-\sqrt{n^2-5n+13}\right)$.

3.12 (08А). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-16\sqrt{n}+11}-\sqrt{n-36\sqrt{n}-10}\right)$.

3.13 (45Б.Д7). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{15n-9}-\sqrt{15n-10}\right)\sqrt{n}$.

3.14 (04С.Д7). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{13n-4}-\sqrt{19n+10}}{\sqrt{n}}$.

3.15 (08Т). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+29n^2+13}-\sqrt[3]{n^3-13n^2-12}\right)$.

3.16 (26Д). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-5n+11}-\sqrt[3]{n^3-14n+13}\right)n$.

3.17 (241.Д7). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{9n^2-9n+12}-\sqrt[3]{9n^2+11n+17}\right)\sqrt[3]{n}$.

3.18 (9С2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+18x+5}-\sqrt{x^2+8x+3}\right)$.

3.19 (24Д.ДО). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{13x-19}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{x}}$.

3.20 (234.Д8). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{17x^2+18x+2}-\sqrt[3]{10x^2+4x-13}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Задача 4

Найдите пределы.

4.1 (3Д5.Д7). $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+10x+24}{x^2+9x+18}$.

4.2 (Т46). $\lim\limits_{x\to-9}\dfrac{x^3+6x^2-45x-162}{x^3+25x^2+204x+540}$.

4.3 (7П7.Д8). $\lim\limits_{x\to-10}\dfrac{x^3+22x^2+140x+200}{x^3+23x^2+160x+300}$.

4.4 (ПП8). $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^3-x^2-44x-96}{x^2-17x+72}$.

4.5 (779.Д6). $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^3-48x+128}{x^2-6x+8}+\dfrac{9x+4}{-9x+6}\right)$.

4.6 (7ПО.Д6). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{0,6^x-4}{0,1^x+1}-\dfrac{10x+8}{3x+1}\right)$.

4.7 (ТДП.Д8). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3^x-6}{3^x+2}-\dfrac{4x^2-8}{9x^2-1}\right)$.

4.8 (8АА.Д9). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{-7\cdot 3^x+19\cdot 18^x}{-13\cdot 3^x-5\cdot 18^x}-\dfrac{3x^3+8x}{12x^3-13x}\right)$.

4.9 (22Б). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-4x-17\sqrt{x^2-15x-17}}{x}$.

4.10 (ОДС). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x+16\sqrt{x^2-x+8}}{x}$.

4.11 (Т5Т.Д8). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}$.

4.12 (281.Д7). $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+10x+16}{x^2+3x-40}$.

4.13 (5Т2.Д7). $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{x^3+12x^2+12x-80}{x^3+x^2-76x+140}$.

4.14 (733.Д7). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-13x^2+56x-80}{x^3-16x^2+80x-128}$.

4.15 (6Б4). $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{-x^3-4x^2+36x+144}{x^2+9x+18}$.

4.16 (А95). $\lim\limits_{x\to -7}\left(\dfrac{x^3+19x^2+119x+245}{x^2+9x+14}-\dfrac{3-9x}{x+8}\right)$.

4.17 (ТТ6). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{0,2^x-1}{0,9^x+1}+\dfrac{10x+1}{5x}\right)$.

4.18 (Б17.Д8). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{7^x}{7^x+9}-\dfrac{x^2+3}{10x^2+3}\right)$.

4.19 (АС8.Д7). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{-13\cdot 16^x+3\cdot 17^x}{17\cdot 16^x+3\cdot 17^x}+\dfrac{4x^3-6x}{6x^3-15x}\right)$.

4.20 (249). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+10\sqrt{x^2-4x+10}}{x}$.

Задача 5

Найдите пределы.

5.1 (370). $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2+3x-40}\left(64-x^2\right)$. **5.2 (91П).** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin\left(x^2-4\right)}{x^2+3x+2}$.

5.3 (2СА). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^3+1\right)}{x^2-x-2}$. **5.4 (25Р).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 3x}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

5.5 (Т5С.Д7). $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sin x-\sin 6}{\left(x^2-9x+18\right)\cos 6}$. **5.6 (ОДТ).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sqrt{x+16}-4}$.

5.7 (ОС1.Д7). $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\arcsin(x+7)}{x^2+4x-21}$. **5.8 (282).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+16}-4\right)}$.

5.9 (ДА3.Д7). $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\left(\sin 2x-\operatorname{tg} 2x\right)}{(x+2)^2x^3}-\dfrac{4x+2}{x-3}\right]$.

5.10 (384). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin^2\left(16-x^2\right)}{1-\cos(4-x)}$.

5.11 (8Д5). $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sin(x-8)}{x^2-17x+72}\left(x^2-81\right)$.

5.12 (916.Д7). $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\arcsin\left(x^2-49\right)}{x^2-2x-35}$.

5.13 (267.Д7). $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^3+64\right)}{x^2+x-12}$. **5.14 (398).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 4x}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

5.15 (ТП9.Д7). $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sin x-\sin 12}{\left(x^2-20x+96\right)\cos 12}$.

5.16 (350). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x+1}-1}$. **5.17 (Б7П.Д6).** $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{\arcsin\left(9(x+10)\right)}{x^2+x-90}$.

5.18 (28А). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+4}-2\right)}$.

5.19 (48Б). $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2(\operatorname{tg} 4x-\sin 4x)}{(x+4)^2x^3}+\dfrac{5x+2}{1-x}\right]$.

5.20 (Б5С). $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sin^2\left(25-x^2\right)}{1-\cos(-5-x)}$.

Задача 6

Найдите пределы. В ответе запишите значение $\ln A$, соблюдая правила округления.

6.1 (9ДТ). $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right)^{6(x-4)}$.

6.2 (2АД.Д8). $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2x}{8+8x}\right)^{-\frac{2}{x}}$.

6.3 (АР1.Д7). $A = \lim\limits_{x\to -4}\left(1+\dfrac{(x+4)^2}{8x}\right)^{\frac{144}{\sin^2(-5(x+4))}}$.

6.4 (ПА2). $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x+1}\right)^{x-10}$.

6.5 (283). $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+8}{x^2-9x-9}\right)^{-10x+8}$.

6.6 (184.Д7). $A = \lim\limits_{x\to 8}\left[\dfrac{x^2+11x-64}{8(x+3)}\right]^{\frac{3}{x-8}}$.

6.7 (915.Д8). $A = \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1-6x}{5-4x}\right)^{\frac{x-19}{x+2}}$.

6.8 (ДА6). $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-4x^2+4x-4}{-4x^2+2x+5}\right)^{2x-11}$.

6.9 (С47.ДЛ). $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2-4x+8}{-20x^2+10x+8}\right)^{-\frac{14}{x}}$.

6.10 (БТ8.Д7). $A = \lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{-5x+2}{-10x-23}\right)^{\frac{2}{x+5}}$.

6.11 (189). $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-7}\right)^{5(x-7)}$.

6.12 (620.Д8). $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{6x}{10+2x}\right)^{\frac{-8}{x}}$.

6.13 (РТП.Д7). $A=\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{(x-3)^2}{6x}\right)^{\frac{24}{\sin^2(2(x-3))}}$.

6.14 (8АА). $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+7}\right)^{x-10}$.

6.15 (45Б). $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+6x+4}{x^2-5x+7}\right)^{4x}$.

6.16 (АТС.Д8). $A=\lim\limits_{x\to -5}\left[\dfrac{x^2+3x-25}{-5(x+8)}\right]^{\frac{6}{x+5}}$.

6.17 (2СД.ДМ). $A=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1-3x}{2-2x}\right)^{\frac{x-9}{x+1}}$.

6.18 (281). $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x+3}{2x^2+3x+10}\right)^{18x+8}$.

6.19 (2П2.Д7). $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2-7x-3}{-3x^2-5x-3}\right)^{\frac{2}{x}}$.

6.20 (ПС3.Д7). $A=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{3x-3}{6x+6}\right)^{\frac{3}{x+3}}$.

Задача 7

Найдите порядок малости бесконечно малой функции $\alpha(x)$ относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$.

7.1 (П24). $\alpha(x)=\left[1-\cos^2 6(x-16)\right]^{19}$, $\beta(x)=x-16$ при $x\to 16$.

7.2 (983). $\alpha(x)=\sqrt[4]{1+(x+8)^5\sin(x+8)}$, $\beta(x)=x+8$ при $x\to -8$.

7.3 (ОД4). $\alpha(x)=(x+8)^8\left[\sin(x+8)\right]^8\left[\operatorname{arctg}(x+8)\right]^3$, $\beta(x)=x+8$ при $x\to -8$.

7.4 (4П5). $\alpha(x)=\left[\ln\left(1+\operatorname{tg}(x+9)\right)\right]^5\left[\arcsin(x+9)\right]^2$, $\beta(x)=x+9$ при $x\to -9$.

7.5 (Д86). $\alpha(x)=\sin\dfrac{x^4+16}{x^8+13}\ln\dfrac{x^9+17}{x^9-13}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$.

7.6 (657). $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^6+\sqrt{x^6-15}}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

7.7 (368). $\alpha(x)=\left(\sqrt{x^8-15}-x^4\right)\ln\dfrac{x^{16}+8}{x^{16}+19}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

7.8 (029). $\alpha(x)=\dfrac{-11x^3+2}{\sqrt{15x^{30}+12}+x^{15}}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$.

7.9 (940). $\alpha(x)=\sin^7(x-5)\ln\dfrac{x+1+\operatorname{tg}^{16}(x-5)}{x+1}$, $\beta(x)=x-5$ при $x\to 5$.

7.10 (2ДП). $\alpha(x)=\left(e^{x+14}-1\right)^{12}\left(\ln\dfrac{x+42}{28}\right)^5$, $\beta(x)=x+14$ при $x\to-14$.

7.11 (С6А). $\alpha(x)=\dfrac{\sin^{18}(x-10)}{\left(\sqrt{3x^2+100}-20\right)^{15}}$, $\beta(x)=x-10$ при $x\to 10$.

7.12 (40Б). $\alpha(x)=(x-18)^7+4\left[1-\cos(x-18)\right]^{16}$, $\beta(x)=x-18$ при $x\to 18$.

7.13 (Т6С). $\alpha(x)=\dfrac{\left[\operatorname{tg}(x+18)\right]^{17}}{\left[1-\cos(x+18)\right]^{7}}$, $\beta(x)=x+18$ при $x\to-18$.

7.14 (Д2Т). $\alpha(x)=\dfrac{\left(e^{x-2}-1\right)^9\left[\operatorname{arctg}(x-2)\right]^5}{\sqrt{x^2+12}-4}$, $\beta(x)=x-2$ при $x\to 2$.

7.15 (АТД). $\alpha(x)=\left[\operatorname{tg}(x-15)-\sin(x-15)\right]^{15}$, $\beta(x)=x-15$ при $x\to 15$.

7.16 (П21). $\alpha(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)^{16}}{x^{17}-3}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

7.17 (ЗС2). $\alpha(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x+7}}-1\right)^{16}}{x^9-10}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

7.18 (ДДЗ). $\alpha(x)=(x+2)^6\ln\dfrac{x^{16}-3}{x^{16}+7}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

Найдите порядок роста бесконечно большой функции $\alpha(x)$ относительно бесконечно большой функции $\beta(x)$.

7.19 (4Т4). $\alpha(x) = \dfrac{\sin^5(x+9)}{\left(e^{x+9}-1\right)^{10}}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x+9}$ при $x \to -9$.

7.20 (385). $\alpha(x) = \dfrac{\ln\left(1+(x-10)^3\right)}{\left[\sqrt{(x-10)^2+100}-10\right]^{17}}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x-10}$.

Задача 8

Найдите пределы, используя операцию замены бесконечно малых функций эквивалентными им.

8.1 (Д46.Д7). $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{6x^2-2x-8}{-8-3x-5x^2}}{x}$.

8.2 (ДС7). $A = \lim\limits_{x\to -6} \ln \dfrac{\left(1+x^2+10x+24\right)}{x+6}$.

8.3 (278). $A = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x+1}{x-3} \ln \dfrac{4x-13}{9x-28}$.

8.4 (029). $A = \lim\limits_{x\to\infty} 9\left(3x^3+9\right)\ln \dfrac{9x^4+2x}{9x^4-2x+9}$.

8.5 (А20.Д8). $A = \lim\limits_{x\to\infty} (6x-1)\ln\left(1+\dfrac{2x+3}{7x^2+4x-3}\right)$.

8.6 (8АА.Д7). $A = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\ln[1+\sin(x+5)]}{x^2+2x-15}$.

8.7 (82Б). $A = \lim\limits_{x\to -10} \dfrac{e^{x^2+3x-70}-1}{-(x+10)}$.

8.8 (54В). $A = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{e^{2(x+3)}-e^{8(x+3)}}{-(x+3)}$.

8.9 (ДАД). $A = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{e^{\sin^2(6(x+1))}-1}{\sqrt{16+(x+1)^2}-4}$.

8.10 (8А1.Д7). $A = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt[9]{1+x^2-6x-27}-1}{x+3}$.

8.11 (А92). $A=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sin\left[7\left(-x^3-27\right)\right]}{\ln\left[1+3\left(9-x^2\right)\right]}(6x-2).$

8.12 (963). $A=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{e^{8\left(x^2-16\right)}-1}{\operatorname{tg}(x+4)}(3x+2).$

8.13 (504). $A=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\arcsin^2\left[3\left(x^2-16\right)\right]}{\sin^2(x-4)}(3x-13).$

8.14 (655). $A=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3\operatorname{tg}\left(4(x+1)\right)+6\arcsin^2(x+1)-20(x+1)^3}{\ln\left[1+(x+1)\right]}\cdot6x.$

8.15 (ПР6). $A=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\left[1-\cos6(x+2)\right]^2}{\left[1-\cos\sqrt{6}(x+2)\right]^2}(2x-5).$

8.16 (737.Д8). $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+9)\ln\dfrac{3x^2+5x+4}{3x^2+3x+9}.$

8.17 (1Д8). $A=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2\ln\cos(x+2)}{\sqrt[5]{1+(x+2)^2}-1}(7x+7).$

8.18 (ОС9.Д7). $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9\sin\dfrac{1}{x-17}+\dfrac{4}{(x-17)^2}+\dfrac{9}{(x-17)^3}}{\sqrt[5]{1-\dfrac{5}{x-17}+\dfrac{8}{(x-17)^2}}-1}\cdot\dfrac{11x-15}{18x-7}.$

8.19 (800). $A=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2\ln\left[2-\cos7(x-6)\right]}{\ln^2\left[1+\sin7(x-6)\right]}\cdot2x.$

8.20 (28П). $A=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-4\left[e^{\operatorname{tg}5(x+2)}-1\right]}{\sqrt[9]{1+\sin4(x+2)}-1}\cdot\dfrac{7x-2}{-7x-2}.$

Задача 9

Укажите и охарактризуйте все точки разрыва функции.

Ответ записывайте следующим образом. Точки разрыва записывайте в порядке следования их на оси Ox, рядом с точкой разрыва указывайте ее характер: русской буквой у — устранимый разрыв, цифрой 1 — разрыв первого рода, цифрой 2 — разрыв второго рода. Все знаки разделяйте точкой с запятой (;). Например, ответ –2; 1; 3; у; 4; 2 означает, что точка $x_1=-2$ является точкой разрыва первого рода, точка $x_2=3$ — точка устранимого разрыва, а в точке $x_3=4$

разрыв второго рода. Если функция не имеет точек разрыва, то вводите 0.

9.1 (ТРА.РП). $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-17)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x^2-25}$.

9.2 (5АБ.РП). $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{14}{(x-9)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-9)^2}}{x^2-81}$.

9.3 (2АС.РП). $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{(x-13)^3}+\dfrac{\sin(x-9)}{x^2-81}$.

9.4 (9ПТ.РП). $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-10)^2}+\dfrac{\sin|x-3|}{x^2-9}$.

9.5 (04Д). $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-5)}{(x-8)(x-1)}$.

9.6 (7Б1.РП). $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-5)}{(x-6)(x-11)}$.

9.7 (5С2.РП). $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-16)}{(x-17)(x-15)}$.

9.8 (6П3.РП). $f(x)=\dfrac{\sin(x+10)}{(x+10)(x+13)}+\dfrac{\ln[1+(x+14)]}{|x+14|}$.

9.9 (664.РП). $f(x)=\dfrac{e^x-e^4}{x-4}+\dfrac{x^2-144}{(x-17)\sqrt{(x-12)^2}}$.

9.10 (4А5.РП). $f(x)=\dfrac{\sin(x+7)}{(x+7)(x-17)}+\operatorname{arctg}\dfrac{7}{x-14}$.

9.11 (Д76.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{x^2-36}, \text{ если } x\le 9;\\ \dfrac{\sin(x-15)}{(x-15)(x+30)}, \text{ если } x>9.\end{cases}$

9.12 (457.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+7}{x^2-49}, \text{ если } x\le 8;\\ \dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+4)}, \text{ если } x>8.\end{cases}$

9.13 (738.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+5}{x^2-25}, \text{ если } x\le 2;\\ \dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+6)}, \text{ если } x>2.\end{cases}$

9.14 (6А9.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+9}{x^2-81}, \text{ если } x\le 8;\\ \dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)(x+12)}, \text{ если } x>8.\end{cases}$

9.15 (РДО.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-7}{x^2-9}, \text{ если } x\le 7;\\ \dfrac{e^x-e^8}{x^2-64}, \text{ если } x>7.\end{cases}$

9.16 (ССП.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x^2-64}, \text{ если } x\le 4;\\ \dfrac{e^x-e^9}{x^2-81}, \text{ если } x>4.\end{cases}$

9.17 (1РА.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-15}{x^2-36}, \text{ если } x\le 15;\\ \dfrac{e^x-e^8}{x^2-64}, \text{ если } x>15.\end{cases}$

9.18 (9ДБ.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-6}{x^2-64}, \text{ если } x\le 6;\\ \dfrac{e^x-e^2}{x^2-4}, \text{ если } x>6.\end{cases}$

9.19 (21С.РП). $f(x)=\begin{cases}(x-5)\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-4}, \text{ если } x<5;\\ \dfrac{\sin(x-5)}{x^2-64}, \text{ если } x>5.\end{cases}$

9.20 (92Д.РП). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}e^{\frac{1}{x-5}}, \text{ если } x<5;\\ (x-5)\dfrac{\sin(x-7)}{x^2-49}, \text{ если } x\ge 5.\end{cases}$

Задача 10

Найдите производные от функций и вычислите значения $y'(x_0)$ при указанных x_0.

10.1 а) $y=-16\sqrt{x^{-2}}+24\sqrt[6]{x^{-9}}+2$, **(251)** $y'(1)$;

б) $y = 3\,\mathrm{tg}^{-5}(-9x) + 9x$, **(122)** $y'\left(-\dfrac{\pi}{36}\right)$;

в) $y = 3\ln\dfrac{5x+3}{5x+1}$, **(Т93)** $y'(0)$.

10.2 а) $y = \dfrac{24 - 15\sqrt[5]{x^{-10}}}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$, **(904)** $y'(1)$;

б) $y = \dfrac{1}{\ln 2}2^{-2\sin 2x}$, **(865)** $y'(0)$;

в) $y = \arcsin(\cos 6x) + \arccos\left(\sin(-9x)\right)$, **(Т76)** $y'\left(\dfrac{\pi}{36}\right)$.

10.3 а) $y = 5x^5 + 8x^{-1} + 6x^{-7}$, **(А27)** $y'(1)$;

б) $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\,x) + \mathrm{arcctg}\left(\mathrm{tg}(-5x)\right)$, **(8Б8)** $y'(1)$;

в) $y = e^{3x^2+4x+1}$, **(ОС9)** $y'(-1)$.

10.4 а) $y = 4\dfrac{8-10x}{4x-2}$, **(650)** $y'(1)$;

б) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{-5}\left[-3\cos^{-5}\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)-\sin^{-5}\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)\right]-2x$, **(65П)** $y'(0)$;

в) $y=7\ln\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$, **(08А)** $y'\left(\sqrt{2}\right)$.

10.5 а) $y=121\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+4x+5}$, **(Б9Б)** $y'(1)$;

б) $y=\mathrm{tg}^2(-x)-5x$, **(8СС)** $y'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=\ln\left(5x^2-5x+1\right)$, **(8СД)** $y'(1)$.

10.6 а) $y=\dfrac{16(4x+2)}{3x^2-4x-3}$, **(2Р1)** $y'(1)$;

б) $y=\dfrac{1}{9^5\ln 9}\cdot 9^{10\cos^2 4x}$, **(А52)** $y'\left(-\dfrac{\pi}{16}\right)$;

в) $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^8\left[\arccos(-5x)\right]^9$, **(С73)** $y'(0)$.

10.7 а) $y=16\dfrac{2x^2-3x+2}{x+3}$, **(С74)** $y'(1)$;

б) $y=2\sin 6\left(x+\dfrac{\pi}{24}\right)\sin 4\left(x+\dfrac{\pi}{16}\right)+3x$, **(2Д5)** $y'(0)$;

в) $y=\dfrac{2}{2^{-3}}(2-3x)^{4x-3}-(8\ln 2)x$, **(7Т6)** $y'(0)$.

10.8 а) $y=\left(3+x-3x^2\right)^7$, **(АС7)** $y'(1)$;

б) $y=\dfrac{1}{4^3\ln 4}4^{6\sin^2 9x}$, **(АА8)** $y'\left(-\dfrac{\pi}{36}\right)$;

в) $y=2x+\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^6\operatorname{arcctg}^7(5x)$, **(079)** $y'(0)$.

10.9 а) $y=\left(-6x^3+6x^2+2x-1\right)^5$, **(Т90)** $y'(1)$;

б) $y=2\sin 7\left(x+\dfrac{\pi}{28}\right)\cos 4\left(x+\dfrac{\pi}{16}\right)-x$, **(39П)** $y'(0)$;

в) $y=8\ln\operatorname{tg}x-2\ln\operatorname{ctg}x$, **(П4А)** $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10.10 а) $y=\left(21-4x-10x^2+x^3-7x^4\right)^{-8}$, **(91Б)** $y'(1)$;

б) $y=\dfrac{1}{4^{-9}\ln 4}4^{-18\sin^2 5x}$, **(С9С)** $y'\left(\dfrac{\pi}{20}\right)$;

в) $y=\sqrt{2}\left(-2\arcsin\dfrac{1}{x}+7\arccos\dfrac{1}{x}\right)-8x^3$, **(С2Т)** $y'\left(\sqrt{2}\right)$.

10.11 а) $y=-12\sqrt[6]{x^{-5}}-24\sqrt[6]{x^3}-4$, **(04Д)** $y'(1)$;

б) $y=2\cos 5\left(x+\dfrac{\pi}{20}\right)\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-5x$, **(241)** $y'(0)$;

в) $y=\ln\left(8x^3-3x^2+4x+8\right)$, **(942)** $y'(1)$.

10.12 а) $y=\dfrac{35\sqrt[7]{x^2}+20}{\sqrt[5]{x^{-9}}}$, **(С63)** $y'(1)$;

б) $y=\dfrac{7^{80\operatorname{arctg}^2(-7x)}}{\pi 7^{5\pi^2}\ln 7}$, **(С44)** $y'\left(-\dfrac{1}{7}\right)$;

в) $y=\dfrac{17}{4}\left(6\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}-10\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x^2}\right)-4x^2$, **(045)** $y'(2)$.

10.13 а) $y=x^9-3x+5x^5$, **(1Д6)** $y'(1)$;

б) $y = \mathrm{tg}^{-1}\left(-2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right)\mathrm{tg}^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+x$, **(ДД7)** $y'(0)$;

в) $y = 8(9x-2)\ln(8-10x)-(72\ln 8)x$, **(368)** $y'(0)$.

10.14 а) $y = \frac{9(5x+9)}{2x+1}$, **(П79)** $y'(1)$;

б) $y = e^{-2x^3+3x^2-4x-9}$, **(А50)** $y'(-1)$;

в) $y = \frac{1}{\ln 2}\left(6\arcsin\frac{1}{2^x}-9\arccos\frac{1}{2^x}\right)+6x^2$, **(Д4П)** $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

10.15 а) $y = \frac{121\left(7x^2-3x-8\right)}{5x^2+2x+4}$, **(Т7А)** $y'(1)$;

б) $y = \frac{1}{\cos 5}(x\cos 5x-\cos 5x)$, **(С2Б)** $y'(1)$;

в) $y = -3\ln\mathrm{arctg}\,x+\frac{6}{\pi}x$, **(74С)** $y'(1)$.

10.16 а) $y = \frac{9(9x+5)}{3x^2+x-1}$, **(03Т)** $y'(1)$;

б) $y = e^{7x^4-2x^3-2x^2-3}$, **(2ДД)** $y'(1)$;

в) $y = -12\arcsin\frac{3+x}{3-x}-6\sin 4(3+x)$, **(Д51)** $y'(-3)$.

10.17 а) $y = 36\,\frac{3x^2+2x+8}{-5x-1}$, **(202)** $y'(1)$;

б) $y = 8\cos^2 x-6\sin^2 x$, **(283)** $y'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = 2\ln^2(5x+2)+\ln^2(8+8x)-(10\ln 2)x+3\sin 2x$, **(454)** $y'(0)$.

10.18 а) $y = \left(x^2+x-1\right)^8$, **(965)** $y'(1)$;

б) $y = \frac{\sqrt{3}}{3e^{4\pi}}e^{24\arcsin(7x)}$, **(6А6)** $y'\left(\frac{1}{14}\right)$;

в) $y = 36\,\mathrm{arctg}\frac{9-2x}{9+2x}\sin(9-2x)$, **(797)** $y'\left(\frac{9}{2}\right)$.

10.19 а) $y = \left(4x^3-x^2-9x+7\right)^{-10}$, **(258)** $y'(1)$;

б) $y = 49\,\frac{\sin 2x-9}{\cos 2x-8}$, **(1Р9)** $y'(0)$;

в) $y = 2\ln\sqrt{3x^4 + 2x^3 - 4}$, **(Д20)** $y'(1)$.

10.20 а) $y = \left(14 - 7x - x^2 + 2x^3 - 7x^4\right)^5$, **(6ДП)** $y'(1)$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi e^{-8\pi^2}} e^{-72(\arccos 8x)^2}$, **(01А)** $y'\left(\dfrac{1}{16}\right)$;

в) $y = 2\ln\sqrt{2x^4 - 1}$, **(6ДР)** $y'(1)$.

Задача 11

Найдите производные указанного порядка и вычислите их значения в точке $x = x_0$.

11.1 (48С). $y = 2\cos^2 2x - 5\sin^2 2x - 2x^3$, y''', $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

11.2 (5ДТ). $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + \cos 4x$, y'', $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

11.3 (09Д). $y = \left(-2x^2 + 4x - 1\right)^3$, y'', $x_0 = 1$.

11.4 (ДБ1). $y = \dfrac{3 - 5x}{2x - 1}$, y''', $x_0 = 1$.

11.5 (792). $y = 3\sqrt{3}\left(2\arcsin x + 4\arccos x\right)$, y''', $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

11.6 (ППЗ). $y = (3x + 5)^4$, y''', $x_0 = 1$.

11.7 (6Т4). $y = -3\ln(-2x + 3)$, y''', $x_0 = 1$.

11.8 (845). $y = 2(-5\operatorname{arctg} x - 10\operatorname{arcctg} x)$, y'', $x_0 = 1$.

11.9 (1П6). $y = -3e^x - 3e^{-2x} - \cos 2x$, $y^{(\mathrm{IV})}$, $x_0 = 0$.

11.10 (СТ8). $y = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, y''', $x_0 = 1$.

11.11 (Т89). $y = 4\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2x^3$, y''', $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

11.12 (2АО). $y = \dfrac{1}{12}\left(-6\operatorname{tg} 3x - 8\operatorname{ctg} 3x\right) + 2\cos 4x$, y'', $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

11.13 (РДП). $y = \left(-5x^2 + 4x + 2\right)^3$, y'', $x_0 = 1$.

11.14 (А5А). $y = \dfrac{4x + 3}{1 - 2x}$, y''', $x_0 = 1$.

11.15 (68Р). $y = 3\sqrt{3}\left(-2\arcsin x - 2\arccos x\right)$, y''', $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

11.16 (2РС). $y = (3 - x)^4$, y''', $x_0 = 1$.

11.17 (А5Т). $y = \ln(-2x+3) - 4\ln(-3x+4)$, y''', $x_0 = 1$.

11.18 (2СД). $y = 2(2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x)$, y'', $x_0 = 1$.

11.19 (321). $y = -5e^{2x} - 3e^{x} - \cos 2x$, $y^{(\mathrm{IV})}$, $x_0 = 0$.

11.20 (П62). $y = -4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x$, y''', $x_0 = 1$.

Задача 12

Для функции $z(x,y)$ найдите указанную частную производную и выислите ее значения в точке $M_0(x_0,y_0)$ при заданных значениях x_0 и y_0.

12.1 (103). $z(x,y) = 8x^3 + 4y^4 + 3x^5y^6$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0\,(1;1)$.

12.2 (2С4). $z(x,y) = -15\sqrt{2x^2+7y^2} + 6\sqrt{x^2+8y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0\,(1;1)$.

12.3 (245). $z(x,y) = 35\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 40\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0\,(1;2)$.

12.4 (Р06). $z(x,y) = e^{-4\left(x^2-1\right)-9\left(y^3-1\right)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0\,(1;1)$.

12.5 (Т47). $z(x,y) = -20\ln\left(x+y^2\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0\,(1;1)$.

12.6 (Д68). $z(x,y)=8\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x^2+y^3\right)-6\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}+x^4-y^5\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;1)$.

12.7 (369). $z(x,y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-4\arcsin^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-4x+6y\right)-\right.$

$\left.-6\arccos^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2x-8y\right)\right]$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(0;0)$.

12.8 (700). $z(x,y)=\dfrac{4}{\pi}\left[-10\operatorname{arctg}^2\left(3y^3-2x^2\right)+5\operatorname{arcctg}^2\left(4y^4-3x^3\right)\right]$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;1)$.

12.9 (20П). $z(x,y) = \left(7x^{-2}+4y^2-10\right)^{-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1;1)$.

12.10 (8АА). $z(x,y) = \operatorname{tg}\left(-4x-y+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-3x+y\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(0;0)$.

12.11 (48Б). $z(x,y) = -6x^3 - 3y^4 + 3x^5y^6$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;1)$.

12.12 (ТСС). $z(x,y)=-12\sqrt{2x^2+7y^2}+27\sqrt{x^2+8y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1;1)$.

12.13 (ДДТ). $z(x,y)=15\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}+45\,\mathrm{arcctg}\,\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;2)$.

12.14 (28Д). $z(x,y)=e^{5\left(x^2-1\right)-10\left(y^3-1\right)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1;1)$.

12.15 (281). $z(x,y)=4\ln\left(x^2+y^3\right)+12\ln\left(x+y^2\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;1)$.

12.16 (342). $z(x,y)=-9\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x^2+y^3\right)+4\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}+x^4-y^5\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1;1)$.

12.17 (513). $z(x,y)=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left[8\arcsin^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-4x+6y\right)+\right.$ $\left.+3\arccos^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2x-8y\right)\right]$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(0;0)$.

12.18 (Д14). $z(x,y)=\dfrac{4}{\pi}\left[3\,\mathrm{arctg}^2\left(3y^3-2x^2\right)-8\,\mathrm{arcctg}^2\left(4y^4-3x^3\right)\right]$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(1;1)$.

12.19 (С95). $z(x,y)=\left(x^{-3}-4y^{-5}+4\right)^{-3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $M_0(1;1)$.

12.20 (Д66). $z(x,y)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+3x+4y\right)+\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+4x-y\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $M_0(0;0)$.

Задача 13

Найдите y''_{xx} от функции, заданной параметрически, вычислите ее значение при $t=t_0$.

13.1 (017). $\begin{cases} y=64\left(-6t^4-5t+1\right), \\ x=t^3+t, \end{cases}$ $t_0=1$.

13.2 (А78). $\begin{cases} y=8\left(5t^3-5t^2-7t\right), \\ x=\dfrac{1}{4}t^4+t, \end{cases}$ $t_0=1$.

13.3 (Д29). $\begin{cases} y = 4\sqrt{t^2-1} + 5\arcsin\dfrac{1}{t}, \\ x = \arccos\dfrac{1}{t} \quad (t > 1), \end{cases}$ $t_0 = \sqrt{2}$.

13.4 (8ДО). $\begin{cases} y = 4\left[-9\ln\left(1+t^2\right) - 2\operatorname{arctg} t\right], \\ x = \dfrac{1}{3}t^3 + t \quad (t > 1), \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.5 (ТДП). $\begin{cases} y = 125\left(-\dfrac{1}{t} + \dfrac{6}{t^2} - \dfrac{10}{t^3}\right), \\ x = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^3}, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.6 (44А). $\begin{cases} y = -9t + 6\operatorname{arctg} t, \\ x = \ln\left(1+t^2\right) + t, \end{cases}$ $t_0 = 0$.

13.7 (40Б). $\begin{cases} y = 4\left[3\ln\left(1+t^2\right) - 10t\right], \\ x = \dfrac{1}{3}t^3 + t, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.8 (74С). $\begin{cases} y = 4\left(t^3 - 10t^2 + 3t - 10\right), \\ x = \dfrac{1}{3}t^3 + t, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.9 (59Т). $\begin{cases} y = 8\left(4t^5 - 8t^4 - 10t - 1\right), \\ x = \dfrac{1}{4}t^4 + \dfrac{1}{3}t^3, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.10 (ОАД). $\begin{cases} y = -6t + 2\sin t, \\ x = e^t \sin t, \end{cases}$ $t_0 = 0$.

13.11 (851). $\begin{cases} y = 64\left(7t^4 - 9t\right), \\ x = t^3 + t, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.12 (ТТ2). $\begin{cases} y = 8\left(-4t^3 - 2t^2 + 7t\right), \\ x = \dfrac{1}{4}t^4 + t, \end{cases}$ $t_0 = 1$.

13.13 (1А3). $\begin{cases} y=5\sqrt{t^2-1}-9\arcsin\dfrac{1}{t}, \\ x=\arccos\dfrac{1}{t} \quad (t>1), \end{cases} t_0=\sqrt{2}.$

13.14 (ДА4). $\begin{cases} y=4\left[9\ln\left(1+t^2\right)+5\operatorname{arctg} t\right], \\ x=\dfrac{1}{3}t^3+t, \end{cases} t_0=1.$

13.15 (475). $\begin{cases} y=125\left(\dfrac{-4}{t}-\dfrac{10}{t^2}-\dfrac{8}{t^3}\right), \\ x=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t^3}, \end{cases} t_0=1.$

13.16 (А46). $\begin{cases} y=6t+2\operatorname{arctg} t, \\ x=\ln\left(1+t^2\right)+t, \end{cases} t_0=0.$

13.17 (517). $\begin{cases} y=4\left(4t-8\ln\left(1+t^2\right)\right), \\ x=\dfrac{1}{3}t^3+t, \end{cases} t_0=1.$

13.18 (Д58). $\begin{cases} y=4\left(-3t^3-3t^2+7t-7\right), \\ x=\dfrac{1}{3}t^3+t, \end{cases} t_0=1.$

13.19 (379). $\begin{cases} y=8\left(-9t^5-9t^4-9t-7\right), \\ x=\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{1}{3}t^3, \end{cases} t_0=1.$

13.20 (Т10). $\begin{cases} y=9t+5\sin t, \\ x=e^t\sin t, \end{cases} t_0=0.$

Задача 14

Найдите дифференциал функции при заданных значениях Δx и x_0.

14.1 (2СП). $y=\left(-9x^5-5x^3+15\right)^{10}$, $\Delta x=0,01;\ x_0=1.$

14.2 (Б8А). $y=2\cos^2 x-4\sin^2 x$, $\Delta x=0,01;\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

14.3 (Д2Б). $y=5\operatorname{tg}^2 x-7\operatorname{ctg}^2 x$, $\Delta x=0,01;\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

14.4 (4РС.Д8). $y = 7\ln\left(1+x^2\right) - 3\ln\left(1+x^4\right)$, $\Delta x = 0,10$; $x_0 = 1$.

14.5 (Т5Т.ДМ). $y = 7\arcsin x - 7\arccos x$, $\Delta x = 0,03$; $x_0 = 0,80$.

14.6 (8СД.Д7). $y = \dfrac{4x - x^2}{1 + x^3}$, $\Delta x = 0,08$; $x_0 = 1$.

14.7 (661). $y = \dfrac{1 + 9x + 5x^2 - 6x^3}{1 + x^5}$, $\Delta x = 0,04$; $x_0 = 1$.

14.8 (О52). $y = \sqrt{2}\left(9\cos^3 2x + 2\sin^3 2x\right)$, $\Delta x = 0,02$; $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

14.9 (882). $y = 9x^3 - 2\ln\left(1+x^4\right)$, $\Delta x = 0,02$; $x_0 = 1$.

14.10 (Д64). $y = 5(2\operatorname{arctg} 2x - 7\operatorname{arcctg} 2x) + 12x^3$, $\Delta x = 0,01$; $x_0 = 0,50$.

14.11 (Д45.Д7). $y = \left(-x^5 - 10x^3 - x + 13\right)^{10}$, $\Delta x = 0,01$; $x_0 = 1$.

14.12 (Р9С). $y = -6\sin^2 x$, $\Delta x = 0,01$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

14.13 (5П6). $y = -3\operatorname{tg}^2 x - 9\operatorname{ctg}^2 x$, $\Delta x = 0,01$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

14.14 (8С7.ДЛ). $y = 8\ln\left(1+x^2\right) - 7\ln\left(1+x^4\right)$, $\Delta x = 0,1$; $x_0 = 1$.

14.15 (8А8.Д7). $y = 5\arcsin x + 9\arccos x$, $\Delta x = 0,03$; $x_0 = 0,80$.

14.16 (099). $y = \dfrac{9x + 9x^2}{1 + x^3}$, $\Delta x = 0,08$; $x_0 = 1$.

14.17 (ДАО.Д7). $y = \dfrac{2 - 2x + 6x^2 - 10x^3}{1 + x^5}$, $\Delta x = 0,04$; $x_0 = 1$.

14.18 (19П). $y = 8\sqrt{2}\left(\cos^3 2x - \sin^3 2x\right)$, $\Delta x = 0,02$; $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

14.19 (Б4А). $y = -5\ln\left(1+x^4\right) - 6\ln\left(1+x^6\right) - 9x^5$, $\Delta x = 0,02$; $x_0 = 1$.

14.20 (2СБ). $y = 40(\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arcctg} x) + 8x^3$, $\Delta x = 0,01$; $x_0 = 0,50$.

Задача 15

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках. В ответ вводите сначала наименьшее значение, а затем наибольшее, не разделяя никакими знаками.

15.1. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 6$ на отрезках:
а) **(5ЖИ)** $[-1;2]$; б) **(ШН1)** $[-3;4]$.

15.2. $y=2x^3+3x^2-36x+12$ на отрезках:
а) **(ДА4)** $[-1;3]$; б) **(Ф82)** $[-4;0]$.

15.3. $y=2x^3-15x^2+36x-6$ на отрезках:
а) **(НТК)** $[0;3]$; б) **(75Л)** $[2;4]$.

15.4. $y=2x^3+9x^2-24x-6$ на отрезках:
а) **(БКЛ)** $[-1;1]$; б) **(БГД)** $[-5;0]$.

15.5. $y=2x^3-15x^2+24x-6$ на отрезках:
а) **(5ПМ)** $[2;5]$; б) **(РМК)** $[-1;3]$.

15.6. $y=2x^3-9x^2-24x+6$ на отрезках:
а) **(АПН)** $[-1;5]$; б) **(АНН)** $[-2;3]$.

15.7. $y=2x^3+15x^2+24x-6$ на отрезках:
а) **(ПКО)** $[-2;1]$; б) **(5Р1)** $[-5;0]$.

15.8. $y=x^3-9x^2+24x+3$ на отрезках:
а) **(ДЛП)** $[3;5]$; б) **(МТФ)** $[0;4]$.

15.9. $y=x^3-3x^2-24x+6$ на отрезках:
а) **(КФП)** $[-2;2]$; б) **(5ФО)** $[-3;4]$.

15.10. $y=2x^3+21x^2+72x+18$ на отрезках:
а) **(АЛБ)** $[-2;-1]$; б) **(ОТТ)** $[-5;-3]$.

15.11. $y=2x^3+3x^2-72x+6$ на отрезках:
а) **(КС2)** $[-5;0]$; б) **(364)** $[-1;4]$.

15.12. $y=2x^3-3x^2-72x+12$ на отрезках:
а) **(2ДД)** $[-4;0]$; б) **(4АФ)** $[1;5]$.

15.13. $y=2x^3-21x^2+72x+6$ на отрезках:
а) **(13К)** $[-1;4]$; б) **(ДИО)** $[2;5]$.

15.14. $y=x^3-9x^2+15x+3$ на отрезках:
а) **(17Н)** $[-1;3]$; б) **(9ЛЛ)** $[2;6]$.

15.15. $y=x^3+9x^2+15x+3$ на отрезках:
а) **(ТИС)** $[-6;-2]$; б) **(ПТА)** $[-5;1]$.

15.16. $y=x^3-6x^2-15x+6$ на отрезках:
а) **(ЛДМ)** $[-2;3]$; б) **(КИП)** $[0;6]$.

15.17. $y=2x^3+21x^2+60x+6$ на отрезках:
а) **(КОР)** $[-6;-1]$; б) **(ИСЦ)** $[-3;1]$.

15.18. $y=2x^3+9x^2-60x+12$ на отрезках:
а) **(МО1)** $[-6;-2]$; б) **(С8С)** $[-3;3]$.

15.19. $y=2x^3-21x^2+60x-12$ на отрезках:
а) **(ЛАД)** $[-1;2]$; б) **(АПО)** $[0;5]$.

15.20. $y = x^3 + 12x^2 + 45x - 15$ на отрезках:
а) **(11Ц)** $[-6;0]$; б) **(П26)** $[-3;1]$.

Задача 16

Проведите полное исследование и постройте график функции.

16.1. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

16.2. $y = x - \ln x$.

16.3. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

16.4. $y = x^2\sqrt{x+1}$.

16.5. $y = \ln\left(4 - x^2\right)$.

16.6. $y = x + 2\operatorname{arctg} x$.

16.7. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.

16.8. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

16.9. $y = \left(x^2 - 4x + 3\right)e^{x-1}$.

16.10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

16.11. $y = \ln\left(x^2 - 1\right)^2$.

16.12. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)}$.

16.13. $y = 5xe^{-x}$.

16.14. $y = \dfrac{10x}{(1+x)^3}$.

16.15. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

16.16. $y = \dfrac{e^x}{2x}$.

16.17. $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{8}$.

16.18. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

16.19. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

16.20. $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}$.

Задача 17

Выясните, сходятся или расходятся данные ряды. Если ряд сходится, то определите, сходится он условно или абсолютно.

17.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^3 + 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n + 5}{2^n}$.

17.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{1/n} - 1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2 + \sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

17.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{n^2 + 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n - 4}{3^n}$.

17.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+5}$.

17.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$.

17.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{3n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{3^n}$.

17.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-3}{5n^3+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.

17.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2n^3+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n\sqrt{n}+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$.

17.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n-4}{2n^2-3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}$.

17.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{2^n}$.

17.11 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cos\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{3^n}$.

17.12 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\arcsin\frac{1}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

17.13 а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\sin\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$.

17.14 а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sin n$.

17.15 а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+5}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$.

17.16 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-4}\right)^n$.

17.17 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

17.18 а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

17.19 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\cos n}$.

17.20 а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{-n}(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

Задача 18

Найдите область сходимости рядов. Ответ запишите в виде промежутков и их объединений в порядке следования на числовой оси. В этой задаче нецелые рациональные числа записывайте в виде обыкновенной несократимой дроби, не выделяя целой части. Число e вводите символом e (латинское).

18.1 а) **(5Р2.Б7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{arctg}\dfrac{3x}{n}$; б) **(285.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$.

18.2 а) **(С55.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \arcsin\dfrac{x}{4\sqrt{n}}$; б) **(ПБ4.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{n}{x+1}}{e^{n\sqrt{x}}}$.

18.3 а) **(947.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{xn^x}$; б) **(648.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{3n} \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{3n}$.

18.4 а) **(679.Б7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}$; б) **(3Т5.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+2)}$.

18.5 а) **(Т83.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{-n^2(x-1)^2}$; б) **(914.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

18.6 а) **(4А5.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(\dfrac{x}{e}\right)$; б) **(8С6.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

18.7 а) **(Д97.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} \dfrac{1}{\left(3x^2+4x+2\right)^n}$; б) **(788.Р7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 16^n x^{4n}}{n}$.

18.8 а) **(859.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{3^n (2n+1)}$; б) **(АД1.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{25}{9}\right)^n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^{2n}$.

18.9 а) **(880.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{3^n} \left(x^2-4x+6\right)^n$; б) **(А82.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2 (5x+9)^{2n-1}}$.

18.10 а) **(733.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$; б) **(6П4.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{3n} x^{3n}$.

18.11 а) **(Р25.Б7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\left(1-x\sqrt{n}\right)^2}$; б) **(Т46.Р7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(27x^2+12x+2\right)^n}$.

18.12 а) **(6Т7.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (36)^n}{n} x^{2n}$; б) **(ОС8.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) 3^{\frac{n}{x-1}}$.

18.13 а) **(А19.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$; б) **(1ТО.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{25^n (-1)^n x^{2n}}{\sqrt[4]{3n}}$.

18.14 а) **(С22.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-n^2} \sin \frac{x^2+1}{n}$;

б) **(А91.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)\left(3x^2+8x+6\right)^n}$.

18.15 а) **(493.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n x^{2n}}{\sqrt{5n+3}}$; б) **(102.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}$.

18.16 а) **(Т83.Р7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$; б) **(С74.РП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \sin \frac{x}{n}$.

18.17 а) **(Т23.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{x}{7^{nx}}$; б) **(836.РЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n \left(n^2+1\right)}$.

18.18 а) **(Р97.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin \frac{x}{2^n}$; б) **(1С8.БЛ)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n 3^{-\frac{n}{x^2}}$.

18.19 а) **(Т19.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2x+1}}$; б) **(Т10.Б7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin \frac{2x}{n}$.

18.20 а) **(2Т4.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(x^2+n\right)^2}$; б) **(5С6.БП)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n \left(n^2+5\right)}$.

Контрольная работа № 4

Часть задач данной работы взята из [22]. Задачи 11 и 12 взяты из [23].

Задача 1

Найдите данные неопределенные интегралы.

1.1 а) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; в) $\int x\cdot 4^{x/2}dx$;

г) $\int (2x+3)^{10}dx$; д) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$; е) $\int \sin^3 5x dx$.

1.2 а) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; в) $\int x^2e^{3x}dx$;

г) $\int (5-3x)^8 dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$; е) $\int \cos^3 4x dx$.

1.3 а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$; б) $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$; в) $\int x^2 \sin 2x dx$;

г) $\int x(2x+3)^9 dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; е) $\int \cos^2 7x dx$.

1.4 а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^6}}$; б) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; в) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

г) $\int (x+3)(3x+4)^{10}dx$; д) $\int \frac{dx}{8x-x^2-14}$; е) $\int \sin^2 5x dx$.

1.5 а) $\int \frac{\ln^4 x+3}{x\ln x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; в) $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$;

г) $\int (1+\sqrt{x})^{10}dx$; д) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2+4x+20}$; е) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.

1.6 а) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} 4x}}{1+16x^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx$;

г) $\int \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^9 dx$; д) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; е) $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$.

1.7 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$; б) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x}}$; в) $\int \left(x^2+4\right)\ln x$;

г) $\int \left(1+\sqrt{x+2}\right)^{10} dx$; д) $\int \frac{(2x+5)dx}{6x-x^2-5}$; е) $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$.

1.8 а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; б) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; в) $\int (x+2)e^{3x} dx$;

г) $\int \left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)^7 dx$; д) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$; е) $\int \sin^4 3x dx$.

1.9 а) $\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x+3}\, dx}{4+\sqrt{x+3}}$; в) $\int \arcsin x dx$;

г) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$; д) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}$; е) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

1.10 а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+4}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}\right)}$; в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

г) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$; д) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; е) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

1.11 а) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x - x}{1+4x^2} dx$; б) $\int \frac{5+\sqrt{x+2}}{4-\sqrt{x+2}} dx$; в) $\int x^4 \ln x dx$;

г) $\int \frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$; д) $\int \frac{5x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx$; е) $\int \sin^4 3x dx$.

1.12 а) $\int \frac{(\arccos x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\left(2+3\sqrt[4]{x}\right)\sqrt{x}}$; в) $\int (1-3x)e^{2x} dx$;

г) $\int \frac{(x+5)dx}{3x-4}$; д) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; е) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

1.13 а) $\int \frac{\operatorname{tg}^3(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; б) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; в) $\int \operatorname{arctg}(3x+1) dx$;

г) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+16}$; д) $\int \frac{x-10}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$; е) $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$.

1.14 а) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x+2}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{x+2}\right)\sqrt[6]{(x+2)^3}}$; в) $\int (x-2)\sin 3x dx$;

г) $\int \frac{(x+2)^2 dx}{x^2+25}$; д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$; е) $\int \sin 5x \cos 7x dx$.

1.15 а) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^4}$; б) $\int \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)dx}{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}$; в) $\int (4x+3)e^{2x}dx$;

г) $\int (7x+3)^{15}dx$; д) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$; е) $\int \cos 3x \cos 9x dx$.

1.16 а) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int x\sin^2 x dx$;

г) $\int x(5x+4)^{10}dx$; д) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; е) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

1.17 а) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

г) $\int (x+4)(2x+3)^{10}dx$; д) $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$; е) $\int \mathrm{ctg}^2 3x dx$.

1.18 а) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+\sqrt[4]{x^3}}$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{x^2+3x+4}{x+1}dx$; д) $\int \frac{(4x+10)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; е) $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

1.19 а) $\int \mathrm{tg}\, x \ln\cos x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$; в) $\int \ln(x+5)dx$;

г) $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1}dx$; д) $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; е) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

1.20 а) $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^5}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x}\right)}$; в) $\int x\cos^2 x dx$;

г) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$; д) $\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; е) $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

Задача 2

Вычислите определенные интегралы. Числа π и e округлите до 0,001, положив $\pi \approx 3{,}142$, $e \cong 2{,}718$.

2.1 а) **(20А)** $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) **(Т2Б)** $\int\limits_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx$;

в) **(5ТС.Д8)** $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$.

2.2 а) **(79Т)** $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}$; б) **(86Д.Д7)** $\int\limits_{-1}^0 \left(x^2-5x-6\right)\cos 2x\,dx$;

в) **(961.ДМ)** $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2.3 а) **(423)** $\int\limits_0^1 \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x-x}{1+x^2}dx$; б) **(9А2)** $\int\limits_{-2\pi}^2 \left(x^2-4\right)\cos 3x\,dx$;

в) **(БП4)** $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

2.4 а) **(985)** $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}$; б) **(Т96)** $\int\limits_{-1}^0 (x+1)^2\cos 3x\,dx$;

в) **(457)** $\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}$.

2.5 а) **(308)** $\int\limits_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) **(089)** $\int\limits_0^1 \left(x^2+7x-8\right)\cos x\,dx$;

в) **(СТО)** $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2.6 а) **(11П)** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; б) **(БЗА)** $\int\limits_0^\pi \left(2x^2+4x\right)\cos 2x\,dx$;

в) **(1ТБ.Д8)** $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{100x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

2.7 а) **(8СС)** $\int\limits_0^{1/2} \frac{8x-\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}dx$; б) **(12Т)** $\int\limits_0^\pi \left(x^2-2x\right)\cos 3x\,dx$;

в) **(24Д.Д8)** $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

2.8 а) **(571)** $\int\limits_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx$; б) **(П12)** $\int\limits_0^{\pi}\left(3x^2+2x\right)\cos 4xdx$;

в) **(663.ДМ)** $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$.

2.9 а) **(Т54)** $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$; б) **(1П5.Д8)** $\int\limits_0^{2\pi}\left(3x^2+5x\right)\cos 2xdx$;

в) **(856.Д7)** $\int\limits_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

2.10 а) **(717.Д8)** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) **(308)** $\int\limits_0^{2\pi}\left(2x^2+4x\right)\cos 3xdx$;

в) **(529)** $\int\limits_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$.

2.11 а) **(А20.Д8)** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) **(2БП)** $\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2x^2\right)\cos 2xdx$;

в) **(Б4Б.Д7)** $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

2.12 а) **(8БА.Д8)** $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; б) **(3ТС)** $\int\limits_0^{2\pi}\left(1-x^2\right)\cos 4xdx$;

в) **(72Т)** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$.

2.13 а) **(ОПД)** $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$; б) **(531)** $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)^2\sin 3xdx$;

в) **(6Б2)** $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.14 а) **(563.Д8)** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) **(694)** $\int\limits_0^3 \left(x^2-3x\right)\sin 2x dx$;

в) **(335.Д8)** $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2.15 а) **(676)** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; б) **(357.Д8)** $\int\limits_0^{\pi} \left(x^2+3x\right)\sin x dx$;

в) **(2Т8)** $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

2.16 а) **(Д49)** $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln\cos x dx$; б) **(СТО)** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(x^2-5x\right)\sin 3x dx$;

в) **(ТДП.Д8)** $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2.17 а) **(1ДА.Д8)** $\int\limits_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) **(23Б)** $\int\limits_{-3}^{0} (x+3)^2 \sin 2x dx$;

в) **(71С)** $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

2.18 а) **(ДБТ)** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; б) **(ТТД)** $\int\limits_0^{\pi/4} \left(x^2+x\right)\sin 2x dx$;

в) **(Т31)** $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

2.19 а) **(С62.ДМ)** $\int\limits_1^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx$; б) **(713.ДЛ)** $\int\limits_0^{\pi/2} \left(x^2+2x\right)\sin x dx$;

в) **(244)** $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin^4 x dx$.

2.20 а) **(2А5)** $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^3+x\right)dx}{x^4+1}$; б) **(СС6)** $\int\limits_{\pi/4}^{3} \left(3x-x^2\right)\sin 2x dx$;

в) **(9П7)** $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

Задача 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми.

3.1 а) **(361.Д7)** $y = x^2 - x + 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(ОД1)** $y = (x-1)^3,\ \ y = 4(x-1).$

3.2 а) **(ТП1.Д7)** $y = x^2 + 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(021)** $y = x\sqrt{9 - x^2},\ \ 0 \le x \le 3.$

3.3 а) **(Т01.Д7)** $y = x^2 + 3,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(ПС2)** $y = 4 - x^2,\ \ y = x^2 - 2x.$

3.4 а) **(5ДТ)** $y = 3x^2 - 6x + 4,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(711)** $y = x\sqrt{36 - x^2},\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le 6.$

3.5 а) **(ДОО)** $y = 3x^2 - 4x + 5,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(ПА1.Д8)** $y = x \operatorname{arctg} x,\ \ y = 0,\ \ x = \sqrt{3}.$

3.6 а) **(ЗП1.Д7)** $y = x^2 + 2,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(941.Д8)** $y = \sin x \cos^2 x,\ \ y = 0,\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

3.7 а) **(461.Д7)** $y = 2x^2 - 2x + 3,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 2;$

б) **(ЦК1.Д8)** $y = \sqrt{4 - x^2},\ \ x = 0,\ \ x = 1.$

3.8 а) **(021)** $y = x^2 - 4x + 6,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 3;$

б) **(462.Д8)** $y = x^2\sqrt{4 - x^2},\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le 2.$

3.9 а) **(737)** $y = (x-3)^2,\ \ x = 0,\ \ y = 0;$

б) **(Т72.Д7)** $y = \cos x \sin^2 x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}.$

3.10 а) **(СА2.Д7)** $y = 2x^2 - 8,\ \ y = 0;$

б) **(СС2.Д8)** $y = \sqrt{e^x - 1},\ \ y = 0,\ \ x = \ln 2.$

3.11 а) **(472.Д7)** $y = x^2 + 3x + 2,\ \ y = 0;$

б) **(342)** $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}},\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = e^3.$

3.12 а) **(6С2.Д8)** $y = x^2 - 1,\ \ y = 0;$

б) **(ЗС2)** $y = \arccos x,\ \ y = 0,\ \ x = 0.$

3.13 а) **(П42.Д7)** $y=x^2-4,\ \ y=0;$

б) **(Б73.Д7)** $y=(x+1)^2,\ \ y^2=x+1.$

3.14 а) **(ПИЖ.Д7)** $y=x^2+4x,\ \ y=0;$

б) **(ОТ8)** $y=2x-x^2+3,\ \ y=x^2-4x+3.$

3.15 а) **(ПИХ.Д7)** $y=x^2-2x-3,\ \ y=0;$

б) **(323)** $x=\arccos y,\ \ x=0,\ \ y=0.$

3.16 а) **(КСЖ.Д8)** $y=(x-3)(x-1),\ \ y=0;$

б) **(9Д3)** $x=\dfrac{1}{\pi}x^2\sqrt{8-x^2},\ \ y=0,\ \ 0\le x\le 2\sqrt{2}.$

3.17 а) **(673.Д7)** $y=(x-5)(x-4),\ \ y=0;$

б) **(ТС3.Д8)** $x=\sqrt{e^y-1},\ \ x=0,\ \ y=\ln 2.$

3.18 а) **(943.Д7)** $y=4-x^2,\ \ y=0;$

б) **(П63.Д7)** $y=x\sqrt{4-x^2},\ \ y=0,\ \ 0\le x\le 2.$

3.19 а) **(3Д3)** $y=9-x^2,\ \ y=0;$

б) **(513.Д7)** $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}},\ \ y=0,\ \ x=1.$

3.20 а) **(3А5.Д7)** $y=(x-2)^2,\ \ y=0,\ \ x=0;$

б) **(383)** $y=\dfrac{1}{1+\cos x},\ \ y=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2},\ \ x=-\dfrac{\pi}{2}.$

Задача 4

Разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням x, вычислите приближенно с точностью $x=0{,}001$ интегралы.

4.1 (5Т1.ДЛ). $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx.$ **4.2 (722.Д7).** $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx.$

4.3 (523.ДЛ). $\int\limits_0^1 e^{-6x^2}dx.$ **4.4 (С54.Д7).** $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

4.5 (А55.ДЛ). $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)dx}{x}.$ **4.6 (Д21.Д7).** $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

4.7 (022.ДЛ). $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$ **4.8 (656.Д7).** $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx.$

4.9 (Т81.Д7). $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx.$ **4.10 (822.Д7).** $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx.$

4.11 (823.ДЛ). $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$ **4.12 (С78.Д7).** $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^x}{x}dx.$

4.13 (8Д3.ДЛ). $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$ **4.14 (284.Д7).** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}.$

4.15 (457.ДЛ). $\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)dx}{x^2}.$ **4.16 (Т74.Д7).** $\int\limits_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}dx.$

4.17 (4Т5.ДЛ). $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$ **4.18 (086.Д7).** $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^2}}.$

4.19 (С78.ДЛ). $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)dx}{x}.$ **4.20 (Д09.Д7).** $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}}dx.$

Задача 5

Вычислите двойные интегралы по области D, ограниченной указанными кривыми.

5.1 а) **(341.Д8)** $\iint\limits_D xdxdy,\ D:\{y=x,\ \ y=0,\ \ x=2\};$

б) **(А5А.Д7)** $\iint\limits_D xydxdy,\ D:\left\{y=x^2,\ \ x=0,\ \ y=1,\ \ x>0\right\}.$

5.2 а) **(34Б.Д7)** $\iint\limits_D ydxdy,\ D:\{y=x,\ \ y=2,\ \ x=0\};$

б) **(7ДС.Д7)** $\iint\limits_D \sqrt{x}ydxdy,\ D:\left\{y=x^2,\ \ x=1,\ \ y=0\right\}.$

5.3 а) **(СА3.Д8)** $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy,\ D:\{y=-x,\ \ y=1,\ \ x=0\};$

б) **(8АД)** $\iint\limits_D xdxdy,\ D:\left\{y=-x^2,\ \ x=2,\ \ y=0\right\}.$

5.4 а) **(ПС1.ДМ)** $\iint\limits_D ydxdy,\ D:\{y=-x,\ \ x=-2,\ \ y=0\};$

б) **(7Д2.ДЛ)** $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D:\left\{y=x^2,\ \ y=-x^2,\ \ x=1\right\}.$

5.5 а) **(5А3.Д8)** $\iint\limits_D y\sqrt[3]{x}dxdy,\ D:\{y=x,\ \ y=0,\ \ x=-1\};$

б) **(8C4.Д7)** $\iint\limits_D x\sqrt[3]{y}\,dxdy$, $D\colon \left\{y=x^2,\ \ x=0,\ \ y=1,\ \ x<0\right\}$.

5.6 а) **(3П5.ДМ)** $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, $D\colon \{y=x,\ \ y=-2,\ \ x=0\}$;

б) **(ДА6.ДЛ)** $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D\colon \left\{y=-x^2,\ \ x=-1,\ \ y=0\right\}$.

5.7 а) **(597.Д8)** $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, $D\colon \{y=-x,\ \ y=-1,\ \ x=0\}$;

б) **(6T8.ДЛ)** $\iint\limits_D x^2dxdy$, $D\colon \left\{y=-x^2,\ \ y=-1,\ \ x<0,\ \ x=0\right\}$.

5.8 а) **(129.Д8)** $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$, $D\colon \{y=-x,\ \ x=1,\ \ y=0\}$;

б) **(400.Д8)** $\iint\limits_D y^2dxdy$, $D\colon \left\{y=-x^2,\ \ y=-1,\ \ x=0,\ \ x>0\right\}$.

5.9 а) **(П2П.Д7)** $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$, $D\colon \{y=x,\ \ y=-x,\ \ x=1\}$;

б) **(8БА.ДМ)** $\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)dxdy$, $D\colon \left\{y=-x^2,\ \ y=0,\ \ x=1\right\}$.

5.10 а) **(38Б.Д7)** $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$, $D\colon \{y=x,\ \ y=-x,\ \ y=1\}$;

б) **(6БС.Д7)** $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D\colon \left\{y=x^2,\ \ y=1\right\}$.

5.11 а) **(ДСД.Д8)** $\iint\limits_D \sqrt[3]{x}\,dxdy$, $D\colon \{y=x,\ \ y=-x,\ \ x=-1\}$;

б) **(241.Д7)** $\iint\limits_D (3x+y)dxdy$, $D\colon \left\{y=x^2,\ \ y=-x^2,\ \ x=-1\right\}$.

5.12 а) **(842)** $\iint\limits_D (x+3y)dxdy$, $D\colon \{y=x,\ \ y=-x,\ \ y=-1\}$;

б) **(323)** $\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}\,dxdy$, $D\colon \left\{x=0,\ \ y=\sqrt{\pi},\ \ y=\dfrac{x}{2}\right\}$.

5.13 а) **(AP4.Д7)** $\iint\limits_D xdxdy$, $D\colon \{x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0\}$;

б) **(C35)** $\iint\limits_D y^2\cos xydxdy$, $D\colon \left\{x=0,\ \ y=\sqrt{\pi},\ \ y=x\right\}$.

5.14 а) **(4Б6.Д7)** $\iint\limits_D ydxdy$, $D\colon \{x-y=-1,\ \ x=0,\ \ y=0\}$;

б) **(T97)** $\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_D 4y^2\sin 2xydxdy$, $D\colon \left\{x=0,\ \ y=\sqrt{2\pi},\ \ y=2x\right\}$.

5.15 а) **(Д78.Д7)** $\iint\limits_D (x+4y)dxdy,\ D\colon\left\{x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-\,x^2\right\};$

б) **(299)** $e\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}}dxdy,\ D\colon\left\{x=0,\ \ y=\sqrt{2},\ \ y=x\right\}.$

5.16 а) **(А00.Д8)** $\iint\limits_D \left(2x^2+3y^2\right)dxdy,\ D\colon\left\{x=1,\ \ y=-\sqrt{x},\ \ y=x^2\right\};$

б) **(5ДП.Д8)** $\iint\limits_D 3x^2dxdy,\ D\colon\{y=x,\ \ y=2x,\ \ y=1,\ \ y=2\}.$

5.17 а) **(87А.Д8)** $\iint\limits_D (2x+4y)\,dxdy,\ D\colon\left\{y=x^3,\ \ y=1,\ \ x=0\right\};$

б) **(97Б.Д8)** $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy,\ D\colon\left\{y=x^2,\ \ y^2=x\right\}.$

5.18 а) **(47С.Д8)** $\iint\limits_D \left(x+y^2\right)dxdy,\ D\colon\left\{y=x^3,\ \ y=0,\ \ x=1\right\};$

б) **(УАТ)** $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy,\ D\colon\{x=0,\ \ y=\pi,\ \ y=x\}.$

5.19 а) **(Т1Д.Д6)** $\iint\limits_D \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)dxdy,\ D\colon\left\{y=0,\ \ x=-1,\ \ y=x^3\right\};$

б) **(3С1.Д7)** $\iint\limits_D (x+4y)dxdy,\ D\colon\{y=x,\ \ y=5x,\ \ x=1\}.$

5.20 а) **(ПС2)** $\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy,\ D\colon\{y=x,\ \ y=2x,\ \ x=2,\ \ x=4\};$

б) **(6С2.Д8)** $45\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dxdy,$

$D\colon\left\{x^3+y^3=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ x>0,\ \ y>0\right\}.$

Задача 6

Вычислите криволинейные интегралы по указанным кривым. Нецелые числа вводите в виде десятичных дробей, округлив до 0,01.

6.1 а) **(П03.Д7)** $\int\limits_L \left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy,$

$L\colon\{\text{отрезок } MN, M(-1;0), N(0;1)\};$

б) **(СТ4)** $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_L ydx-xdy+z^2dz,$

$L\colon\{x=\sin t,\ \ y=\cos t,\ \ z=1,\ \ 0<t<\pi\}.$

6.2 а) **(6Д4.Д7)** $\int\limits_L 2\left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy,$

L: $\{$отрезок $MN, M(1;0), N(0;1)\}$;

б) **(865.Д7)** $\int\limits_L y^2dx-x^2dy+z^3dz,$

L: $\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=3,\ 0<t<\pi\}$.

6.3 а) **(045)** $\int\limits_L \left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy,$

L: $\left\{\text{часть кривой } y=4-x^2 \text{ от точки } M(0;4) \text{ до точки } N(1;3)\right\}$;

б) **(345)** $\int\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz,$

L: $\{$отрезок $MN,\ M(2;4;3), N(3;5;4)\}$.

6.4 а) **(066.Д7)** $\int\limits_L x^2ydx-ydy,$ L: $\{$отрезок $MN, M(-1;0), N(0;1)\}$;

б) **(066)** $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz,$

L: $\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2(1-\cos t),\ 0<t<2\pi\}$.

6.5 а) **(Т56)** $\int\limits_L (x+y)\,dx+(x-y)\,dy,$

L: $\left\{\text{часть кривой } y=x^2 \text{ от точки } M(-1;1) \text{ до точки } N(1;1)\right\}$;

б) **(067)** $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_L 2zdx-xdy+ydz,$

L: $\{x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=1,\ \ 0<t<2\pi\}$.

6.6 а) **(867)** $\int\limits_L ydx-xdy,$

L: $\left\{\text{часть кривой } y=x^3 \text{ от точки } M(0;0) \text{ до точки } N(2;8)\right\}$;

б) **(1А7)** $3\int\limits_L xydx+4zdy+xdz,$

L: $\left\{x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ z=2,\ \ 0<t<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.7 а) **(597)** $30\int\limits_L \left(xy+y^2\right)dx+xdy,$

L: $\left\{\text{дуга } MN \text{ кривой } y=2x^2, M(0;0),\ N(1;2)\right\}$;

б) **(2Т8)** $\frac{1}{\pi}\int\limits_L xzdx+xdy+z^2dz$,

L: $\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sin t,\ 0<t<2\pi\}$.

6.8 а) **(2Д8)** $3\int\limits_L xydx+ydy$, L: {отрезок MN, $M(1;2)$, $N(2;3)$};

б) **(ОТ8)** $2\int\limits_L ydx+xdy+zdz$,

L: $\left\{x=t^4+1,\ y=t^3+1,\ z=t^2+1,\ 0<t<1\right\}$.

6.9 а) **(208)** $3\int\limits_L y^2dx+\sqrt{x}dy$,

L: {дуга MN кривой $y=\sqrt{x}$, $M(0;0)$, $N(4;2)$};

б) **(278)** $\int\limits_L zdx+xdy+ydz$,

L: {отрезок MN, $M(1;0;2)$, $N(3;-1;4)$}.

6.10 а) **(СТ9)** $\int\limits_L y^3dx+3\sqrt[3]{x^2}dy$,

L: {дуга MN кривой $y=\sqrt[3]{x}$, $M(0;0)$, $N(8;2)$}.

б) **(019)** $3\int\limits_L zdx+y^2dy-xdz$,

L: $\left\{\sqrt{2}\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=\sqrt{2}\cos t,\ \ 0<t<\frac{\pi}{2}\right\}$.

6.11 а) **(299)** $3\int\limits_L \left(y^2-2x\right)dx+\left(x^2-2y\right)dy$,

L: {отрезок MN, $M(0;2)$, $N(1;3)$}.

б) **(ДД9)** $3\int\limits_L z^2dx+x^2dy+y^2dz$,

L: $\left\{x=e^t,\ \ y=e^{2t},\ \ z=e^{-t},\ \ 0<t<\ln 2\right\}$.

6.12 а) **(ДТ9)** $6\int\limits_L (xy+1)dx-(y+x)dy$,

L: {отрезок MN, $M(0;3)$, $N(1;5)$}.

б) **(ДО9)** $3\int\limits_L z^2dx+x^2dy-y^2dz$,

L: $\left\{y=2,\ x=\sin 2t,\ z=\cos 2t,\ 0<t<\frac{\pi}{4}\right\}$.

6.13 а) **(С59)** $30\int\limits_L \left(x+y^2\right)dx-\left(x^2+y\right)dy$,

L: $\left\{\text{часть кривой } y=\sqrt{x}+1 \text{ от точки } M(0;1) \text{ до точки } N(1;2)\right\}$.

б) **(899)** $\int\limits_L (2y+z)dx+(2x+z)dy+(x+y)dz$,

L: $\{\text{отрезок } MN, M(0;0;0), N(1;1;2)\}$.

6.14 а) **(ПБО)** $3\int\limits_L xy^2dx-xdy$, L: $\{\text{отрезок } MN,\ M(0;-4),\ N(1;-2)\}$.

б) **(ОС9)** $3\int\limits_L \left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$,

L: $\left\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\cos t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.15 а) **(819)** $\int\limits_L (x+2y)dx+(2x-y)dy$,

L: $\left\{\text{часть кривой } y=x^2+2 \text{ от точки } M(0;2) \text{ до точки } N(1;3)\right\}$.

б) **(860)** $\int\limits_L ydx-zdy+xdz$,

L: $\left\{x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=2\sin t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.16 а) **(С70)** $\int\limits_L (y+x)dx+(y-x)dy$,

L: $\left\{\text{часть кривой } y=x^3+2 \text{ от точки } M(0;2) \text{ до точки } N(2;10)\right\}$;

б) **(ТТО.Д7)** $\int\limits_L yzdx+xzdy+2xydz$,

L: $\left\{x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\sin t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.17 а) **(420.Д7)** $\int\limits_L ydx+\left(x^2-xy\right)dy$,

L: $\left\{\text{дуга } MN \text{ кривой } y=x^2+4,\ M(0;4),\ N(1;5)\right\}$;

б) **(600.Д6)** $\int\limits_L yzdx+x^2dy+xydz$,

L: $\left\{x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.18 а) **(860.Д7)** $\int\limits_L x^2 y dx - y^2 x dy$,

L: $\{$отрезок MN, $M(0;-4)$, $N(1;-1)\}$;

б) **(ТДО.Д7)** $\int\limits_L z dx + x dy + y dz$, L: $\left\{x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 < t < 1\right\}$.

6.19 а) **(ДДО)** $6\int\limits_L y dx + \sqrt{x} dy$,

L: $\left\{\right.$дуга MN кривой $y = \sqrt{x} + 2$, $M(0;2)$, $N(1;3)\left.\right\}$;

б) **(А70)** $6\int\limits_L y^2 dx + zx dy - x^2 dz$,

L: $\{$отрезок MN, $M(1;3;2)$, $N(3;4;5)\}$.

6.20 а) **(А20.Д8)** $\int\limits_L y^5 dx + \sqrt[3]{x} dy$,

L: $\left\{\right.$дуга MN кривой $y = \sqrt[5]{x}$, $M(0;0)$, $N(1;1)\left.\right\}$;

б) **(ДСО)** $9\int\limits_L yz dx + xz dy + yx dz$,

L: $\left\{x = e^{-t},\ y = e^t,\ z = e^{-2t},\ 0 < t < \ln 3\right\}$.

Задача 7

Найдите общее решение дифференциальных уравнений. В задачах (а) и (б) решение представьте в виде $\varphi(x,y) = c$, а в задаче (в) — в виде $y = f(x,c)$. Для уравнения (в) решите задачу Коши, т.е. найдите частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ при заданных значениях x_0 и y_0.

7.1 а) $(y+2)x dx + (x+4) y dy = 0$; б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1$; в) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.

7.2 а) $x\sqrt{4+y^2} + yy'\sqrt{3+x^2} = 0$; б) $xy' = \dfrac{2y^3 + 2yx^2}{2y^2 x + x^2}$;

в) $y' - y \operatorname{ctg} x = x \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

7.3 а) $\sqrt{4+y^2}\, dx - y\left(1 + x^2\right) dy = 0$; б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

в) $y' + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$, $y(0) = 0$.

7.4 а) $\sqrt{5+y^2}\, dx - y dy = x^2 y dy$; б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

в) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

7.5 а) $3x\left(2+y^2\right)dx - 2\left(3+x^2\right)ydy = 0;$ б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 4;$

в) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2}.$

7.6 а) $x\sqrt{2+y^2}\,dx + y\sqrt{3+x^2}\,dy = 0;$ б) $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+2x^2};$

в) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1),\ y(0) = 1.$

7.7 а) $\left(e^{3x}+5\right)dy + ye^{3x}dx = 0;$ б) $y' = \frac{x+2y}{2x-y};$

в) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

7.8 а) $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0;$ б) $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y;$ в) $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

7.9 а) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx;$ б) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4;$

в) $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1.$

7.10 а) $x\sqrt{5+y^2}\,dx + \sqrt{4+x^2}\,dy = 0;$ б) $xy' = \frac{2y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2};$

в) $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0) = \frac{2}{3}.$

7.11 а) $y\left(4+e^x\right)dy - e^x dx = 0;$ б) $xy' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy};$

в) $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5,\ y(2) = 4.$

7.12 а) $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0;$ б) $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y;$

в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e.$

7.13 а) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx;$ б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6;$

в) $y'-\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x},\ y(1)=1.$

7.14 а) $x\sqrt{4+y^2}+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; б) $2xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$;

в) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3},\ y(1)=4.$

7.15 а) $\left(e^x+8\right)dy-ye^x dx=0$; б) $y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$;

в) $y'+\frac{2}{x}y=x^3,\ y(1)=-\frac{5}{6}.$

7.16 а) $\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$; б) $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $y'+\frac{y}{x}=3x,\ y(1)=1.$

7.17 а) $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$; б) $2y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+8$;

в) $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2,\ y(1)=3.$

7.18 а) $y\ln y+xy'=0$; б) $xy'=\frac{3y^3+10yx^2}{3y^2+5x^2}$;

в) $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1,\ y(1)=1.$

7.19 а) $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$; б) $y'=\frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$; в) $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3},\ y(1)=1.$

7.20 а) $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0$; б) $xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$;
в) $y'+2xy=+\,2x,\ y(0)=2.$

Задача 8

Найдите общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

8.1 а) $y''-3y'+2y=2x+3$; б) $y''-8y'+32y=5xe^{4x}$.

8.2 а) $y''+2y'+y=xe^{-x}$; б) $y''-8y'+25y=4xe^{4x}$.

8.3 а) $y''-4y'+3y=4x+2$; б) $y''-8y'+20y=3xe^{4x}$.

8.4 а) $y''-5y'+4y=4x+3$; б) $y''-8y'+17y=2xe^{4x}$.

8.5 а) $y''-3y'+2y=4x+4$; б) $y''-10y'+41y=e^{5x}(3x+4)$.

8.6 а) $y''+4y'+4y=e^{-2x}(x+2)$; б) $y''-10y'+34y=e^{5x}(3x+3y)$.

8.7 а) $y''-5y'+6y=x+3$; б) $y''-10y'+29y=e^{5x}(3x+2)$.

8.8 а) $y''-6y'+8y=x+4$; б) $y''-10y'+26y=e^{5x}(3x+1)$.

8.9 а) $y''-4y'+3y=2x+1$; б) $y''-6y'+25y=e^{3x}(2x+4)$.

8.10 а) $y''-5y'+6y=2x+2$; б) $y''-6y'+18y=e^{3x}(2x+3)$.

8.11 а) $y''+6y'+9y=e^{-3x}(2x+3)$; б) $y''-6y'+13y=e^{3x}(2x+2)$.

8.12 а) $y''-7y'+12y=2x+4$; б) $y''-6y'+10y=e^{3x}(2x+1)$.

8.13 а) $y''-y'=3x+1$; б) $y''-4y'+18y=e^{2x}(x+4)$.

8.14 а) $y''-2y'=3x+2$; б) $y''-4y'+13y=e^{2x}(x+3)$.

8.15 а) $y''-3y'=3x+3$; б) $y''-4y'+8y=e^{2x}(x+2)$.

8.16 а) $y''-4y'=3x+4$; б) $y''-4y'+5y=e^{2x}(4x+4)$.

8.17 а) $y''-5y'+4y=2x$; б) $y''+y'=\sin x$.

8.18 а) $y''-6y'+7y=3x$; б) $y''+y'=\cos x$.

8.19 а) $y''-7y'+12y=4x$; б) $y''+4y'=\sin 2x$.

8.20 а) $y''+8y'+16y=5xe^{-4x}$; б) $y''-2y'+17y=e^{x}(4x+3)$.

Задача 9

Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Найдите значения констант A и B и вычислите вероятности $P(a \le X \le b)$ для указанных значений a и b.

Ответы записывайте в виде несократимых обыкновенных дробей.

9.1. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 2; \\ Ax+B, \text{ если } 2<x\le 5; \\ 1, \text{ если } x>5. \end{cases}$

Вычислите: а) **(ПТ1)** $P(3<X\le 4)$; б) **(6Т2)** $P(1<X\le 3)$; в) **(971)** $P(3<X\le 4)$; г) **(472)** $P(X>3)$.

9.2. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 1; \\ Ax^2+B, \text{ если } 1<x\le 4; \\ 1, \text{ если } x>4. \end{cases}$

Вычислите: а) **(7Т3)** $P(2<X\le 3)$; б) **(171)** $P(0<X\le 2)$; в) **(ТА1)** $P(3<X\le 5)$; г) **(9Б1)** $P(X\ge 2)$.

9.3. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -4;\\ A+\dfrac{B}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{4}, \text{ если } -4<x\le 4;\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(024)** $P(-2<X\le 2)$; б) **(351)** $P\left(-5<X\le 2\sqrt{2}\right)$;
в) **(151)** $P\left(2\sqrt{2}<X\le 5\right)$; г) **(1Б1)** $P\left(X\ge 2\sqrt{3}\right)$.

9.4. $F(x)=A+\dfrac{B}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}, \quad -\infty<x<+\infty.$

Вычислите: а) **(ПБ1)** $P(-2<X\le +2)$; б) **(9Т1)** $P\left(X<2\sqrt{3}\right)$;
в) **(П25)** $P\left(X>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

9.5. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 2;\\ Ax^2+Bx, \text{ если } 2<x\le 5;\\ 1, \text{ если } x>5.\end{cases}$

Вычислите: а) **(626)** $P(3<X\le 4)$; б) **(А72)** $P(1<X<3)$;
в) **(4Р2)** $P(3<X\le 6)$; г) **(5Р3)** $P(X\ge 3)$.

9.6. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 1;\\ Ax^3+Bx, \text{ если } 1<x\le 4;\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(7П2)** $P(2<X<3)$; б) **(ПП2)** $P(-1<X\le 2)$;
в) **(С72)** $P(3<X\le 5)$; г) **(Т73)** $P(X\ge 3)$.

9.7. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 1;\\ Ax^3+Bx^2, \text{ если } 1<x\le 5;\\ 1, \text{ если } x>5.\end{cases}$

Вычислите: а) **(2Д2)** $P(2<X\le 4)$; б) **(762)** $P(-2<X<3)$;
в) **(СД2)** $P(4<X\le 7)$; г) **(ТР2)** $P(X\ge 3)$.

9.8. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -2;\\ Ax^3+B, \text{ если } -2<x\le 4;\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(7С2)** $P(-1<X\le 3)$; б) **(АТ2)** $P(-4<X\le 2)$;
в) **(452)** $P(2<X\le 6)$; г) **(ДО2)** $P(X\ge 3)$.

9.9. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -1;\\ Ax^2+Bx+\dfrac{1}{8}, \text{ если } -1<x\le 4;\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(П72)** $P(0<X<2)$; б) **(772)** $P(-3<X\le 3)$;
в) **(БА2)** $P(1<X\le 5)$; г) **(312)** $P(X\ge 2)$.

9.10. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0;\\ A+Be^{-x}, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Вычислите: а) **(АБ2)** $P(\ln 2<X<\ln 3)$; б) **(А52)** $P(X\ge \ln 4)$;
в) **(573)** $P(X<\ln 3)$.

9.11. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0;\\ \dfrac{x^2+A}{1+Bx^2}, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Вычислите: а) **(5П3)** $P(1<X<2)$; б) **(992)** $P(X\ge 4)$;
в) **(П72)** $P(X<3)$.

9.12. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 2;\\ \dfrac{x^2}{8}+Ax-2A-\dfrac{1}{2}, \text{ если } 2<x\le 4;\\ \dfrac{1}{2}, \text{ если } x=4;\\ -\dfrac{x^2}{8}+Bx+\dfrac{5}{2}-4B, \text{ если } 4<x\le 6;\\ 1, \text{ если } x>6.\end{cases}$

Вычислите: а) **(573)** $P(2<X\le 5)$; б) **(Т53)** $P(1<X\le 3)$;
в) **(804)** $P(3<X\le 8)$; г) **(284)** $P(3<X\le 5)$.

9.13. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 2;\\ \dfrac{x^2}{32}+Ax-\dfrac{1}{8}-2A, \text{ если } 2<x\le 6;\\ \dfrac{1}{2}, \text{ если } x=6;\\ Bx+\dfrac{1}{2}-6B, \text{ если } 6<x\le 8;\\ 1, \text{ если } x>8.\end{cases}$

Вычислите: а) **(773)** $P(4<X\le 7)$; б) **(ДП3)** $P(-1<X<3)$;
в) **(4П3)** $P(3<X\le 6)$; г) **(А52)** $P(X\ge 7)$.

9.14. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}x, \text{ если } 0<x\le 2;\\ \dfrac{1}{3}+Ax^2, \text{ если } 2<x\le 4;\\ B, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(С23)** $P(1<X\le 3)$; б) **(2Т3)** $P(-1<X<3)$;
в) **(623)** $P(3<X\le 6)$; г) **(385)** $P(X\ge 1)$.

9.15. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0;\\ \dfrac{1}{18}x^2+Ax, \text{ если } 0<x\le 3;\\ B, \text{ если } x>3.\end{cases}$

Вычислите: а) **(727)** $P(1<X\le 2)$; б) **(БТ3)** $P(-1<X<1)$;
в) **(7Б3)** $P(2<X\le 5)$; г) **(553)** $P(X\ge 1)$.

9.16. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -1;\\ A\left(4x-\dfrac{x^3}{3}\right)+B, \text{ если } -1<x\le 2;\\ 1, \text{ если } x>2.\end{cases}$

Вычислите: а) **(С83)** $P(0<X\le 1)$; б) **(354)** $P(-2<X\le 1)$;
в) **(353)** $P(1<X\le 4)$; г) **(С84)** $P(X\ge 0)$.

9.17. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -2;\\ -\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{1}{2}, \text{ если } -2<x\le 0;\\ Ax^2+B, \text{ если } 0<x\le 2;\\ 1, \text{ если } x>2.\end{cases}$

Вычислите: а) **(185)** $P(-1<X\le +1)$; б) **(Р87)** $P(-3<X\le -1)$;
в) **(А86)** $P(1<X\le 4)$; г) **(П05)** $P(X\ge -1)$.

9.18. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0;\\ A\left(\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\right), \text{ если } 0<x\le 4;\\ B, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Вычислите: а) **(325)** $P(1<X<3)$; б) **(3А5)** $P(-3<X\le 2)$;
в) **(СП5)** $P(2<X\le 5)$; г) **(206)** $P(X\ge 2)$.

9.19. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le -2; \\ \dfrac{1}{8}\left(4-\dfrac{x^4}{4}\right), \text{ если } -2<x\le 0; \\ A\left(4+\dfrac{x^4}{4}\right), \text{ если } 0<x\le 2; \\ B, \text{ если } x>2. \end{cases}$

Вычислите: а) **(916)** $P(-1<X\le +1)$; б) **(7Б3)** $P(-3<X\le 0)$;
в) **(976)** $P(1<X\le 4)$; г) **(ОД4)** $P(X\ge 0)$.

9.20. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<1; \\ A+\dfrac{B}{x^2}, \text{ если } x>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(2А5)** $P(2<X\le 3)$; б) **(3Д5)** $P(-2<X<3)$;
в) **(305)** $P(X\ge 3)$.

Задача 10

Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X. Найдите значения указанных в заданиях величин.

Нецелые рациональные числа записывайте в виде обыкновенной несократимой дроби, не выделяя целой части.

10.1. $\rho(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le -1; \\ \dfrac{A}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } -1<x\le -1; \\ 0, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(ССА)** константу A; б) **(ПБ1)** $F(0)$;
в) **(ПТ1)** $P\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$; г) **(П9П)** m_x; д) **(ОД4)** D_x.

10.2. $\rho(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0; \\ Ax, \text{ если } 0<x\le 2; \\ 0, \text{ если } x>2. \end{cases}$

Вычислите: а) **(71П)** константу A; б) **(Р9П)** $F(1)$;
в) **(59С)** $P\left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)$; г) **(С4С)** m_x; д) **(АСС)** D_x.

10.3. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(2-|x|\right), \text{ если } |x|\le 2; \\ 0, \text{ если } |x|>2. \end{cases}$

Вычислите: а) **(Б4Т)** константу A; б) **(56Т)** $F(+1)$; в) **(С4С)** $P(-1<x<1)$; г) **(74С)** m_x; д) **(46С)** D_x.

10.4. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(x+3\right), \text{ если } 0\le x\le 2; \\ 0 \text{ вне } [0;2]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(Т4Т)** константу A; б) **(74Т)** $F(1)$; в) **(С2Т)** $P\left(1<x<\dfrac{3}{2}\right)$; г) **(90Т)** m_x; д) **(ТСТ)** D_x.

10.5. $\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x<1; \\ \dfrac{A}{x^4}, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(3ПП)** константу A; б) **(99Т)** $F(3)$; в) **(5ПП)** $P(1<x<2)$; г) **(51П)** m_x; д) **(Т9П)** D_x.

10.6. $\rho(x) = \begin{cases} A+x, \text{ если } 1\le x\le 2; \\ 0 \text{ вне } [1;2]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(2Т2)** константу A; б) **(Д5Д)** $F(3/2)$; в) **(07Д)** $P\left(\dfrac{3}{2}\le x\le 2\right)$; г) **(9ПД)** m_x; д) **(22Д)** D_x.

10.7. $\rho(x) = \begin{cases} Ax, \text{ если } 0\le x\le 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(24Д)** константу A; б) **(151)** $F(1/2)$; в) **(РПД)** $P\left(\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}\right)$; г) **(87Д)** m_x; д) **(33Д)** D_x.

10.8. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(1-x^2\right), \text{ если } |x|\le 1; \\ 0, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(Т4Т)** константу A; б) **(86А)** $F(0)$; в) **(ТОТ)** $P\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$; г) **(78Т)** m_x; д) **(Б6Т)** D_x.

10.9. $\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0; \\ A, \text{ если } 1<x\le 2; \\ -\dfrac{1}{4}x+1, \text{ если } 2<x\le 4; \\ 0, \text{ если } x>4. \end{cases}$

Вычислите: а) **(7Д7)** константу A; б) **(8П8)** $F(3)$;

в) **(707)** $P\left(\frac{3}{2}<x\leq 3\right)$; г) **(С77)** m_x; д) **(957)** D_x.

10.10. $\rho(x)=\begin{cases} Ax^2(1-x), \text{ если } 0\leq x\leq 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(008)** константу A; б) **(1С8)** $F(1/2)$;

в) **(278)** $P\left(\frac{1}{2}<x\leq 1\right)$; г) **(2П8)** m_x; д) **(Д58)** D_x.

10.11. $\rho(x)=\begin{cases} a|x|, \text{ если } |x|\leq 1; \\ 0, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(239)** константу A; б) **(ПП9)** $F(1/2)$;

в) **(199)** $P\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$; г) **(099)** m_x; д) **(П19)** D_x.

10.12. $\rho(x)=\begin{cases} A\left|x^3\right|, \text{ если } |x|\leq 1; \\ 0, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(Т97)** константу A; б) **(577)** $F(-1/2)$;

в) **(3П1)** $P\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$; г) **(797)** m_x; д) **(971)** D_x.

10.13. $\rho(x)=\begin{cases} \frac{2}{A}\left(1-\frac{x}{A}\right), \text{ если } 0\leq x\leq 2; \\ 0 \text{ вне } [0;2]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(350)** константу A; б) **(351)** $F(1)$;

в) **(151)** $P(1\leq x\leq 2)$; г) **(971)** m_x; д) **(1Т1)** D_x.

10.14. $\rho(x)=\begin{cases} A(1-|x|), \text{ если } |x|\leq 1; \\ 0, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(3С2)** константу A; б) **(С52)** $F(-1/2)$;

в) **(351)** $P\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$; г) **(П42)** m_x; д) **(ББ3)** D_x.

10.15. $\rho(x)=\begin{cases} A\left(x^2+2x\right), \text{ если } 0\leq x\leq 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(385)** константу A; б) **(4А5)** $F(1/2)$;

в) **(ССО)** $P\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$; г) **(СП5)** m_x; д) **(ЖИ5)** D_x.

10.16. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(1-x^2\right), \text{ если } |x|\le 1; \\ 0, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$

Вычислите: а) **(С86)** константу A; б) **(6Д6)** $F(0)$;

в) **(906)** $P\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$; г) **(756)** m_x; д) **(А06)** D_x.

10.17. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(2x^2+1\right), \text{ если } 0\le x\le 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(ТО7)** константу A; б) **(4Д7)** $F(1/2)$;

в) **(167)** $P\left(\dfrac{1}{2}<x<2\right)$; г) **(2П8)** m_x; д) **(Б58)** D_x.

10.18. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(x^2+1\right), \text{ если } 0\le x\le 2; \\ 0 \text{ вне } [0;2]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(БП8)** константу A; б) **(2П8)** $F(1)$;

в) **(818)** $P(1\le x\le 3)$; г) **(Д18)** m_x; д) **(358)** D_x.

10.19. $\rho(x) = \begin{cases} A\left(4x^2+1\right), \text{ если } 0\le x\le 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(339)** константу A; б) **(3П9)** $F(1/2)$;

в) **(919)** $P\left(\dfrac{1}{2}\le x\le 4\right)$; г) **(379)** m_x; д) **(759)** D_x.

10.20. $\rho(x) = \begin{cases} Ax^2+\dfrac{3}{5}, \text{ если } 0\le x\le 1; \\ 0 \text{ вне } [0;1]. \end{cases}$

Вычислите: а) **(610)** константу A; б) **(620)** $F(1/2)$;

в) **(РОО)** $P\left(\dfrac{1}{2}\le x\le 2\right)$; г) **(СПО)** m_x; д) **(550)** D_x.

Задача 11

Дана матрица распределения двумерной дискретной случайной величины (X,Y). Найдите указанные в заданиях величины. Все нецелые ответы записывайте в виде десятичной дроби, округлив до 0,01.

11.1.

Y	X		
	2	4	6
5	0,12	0,15	0,20
8	0,13	0,25	0,15

Вычислите: а) **(27А.Д8)** m_x; б) **(БПА.Д7)** D_x; в) **(2БА.Д7)** m_y; г) **(БТА.Д7)** D_y; д) **(86А.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(Т2А.Д6)** r_{xy}; ж) **(33А.Д7)** $M[X/Y=8]$.

11.2.

Y	X		
	2	4	5
3	0,15	0,25	0,10
4	0,10	0,10	0,30

Вычислите: а) **(17Б.Д8)** m_x; б) **(Д1Б.Д7)** D_x; в) **(37Б.Д8)** m_y; г) **(Т1Б.Д7)** D_y; д) **(СББ.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(Б1А.Д7)** r_{xy}; ж) **(2ДБ.Д7)** $M[Y/X=5]$.

11.3.

Y	X		
	1	2	4
–1	0,13	0,12	0,25
0	0,12	0,18	0,20

Вычислите: а) **(9АС.Д7)** m_x; б) **(АБС.Д8)** D_x; в) **(ОАС.Д7)** m_y; г) **(51С.Д7)** D_y; д) **(БЗС.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(БПС.Д6)** r_{xy}; ж) (80С.Д7) $M[X/Y=0]$.

11.4.

Y	X		
	1	4	5
2	0,12	0,18	0,22
4	0,13	0,10	0,25

Вычислите: а) **(ДОТ.Д7)** m_x; б) **(ПСТ.Д7)** D_x; в) **(60Т)** m_y; г) **(Т2Т.ДО)** D_y; д) **(П3Т.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(73С.Д6)** r_{xy}; ж) **(Т7Т.Д8)** $M[Y/X=4]$.

11.5.

Y	X		
	2	3	5
1	0,13	0,12	0,25
4	0,12	0,22	0,10

Вычислите: а) **(345.Д7)** m_x; б) **(БСД.Д7)** D_x; в) **(535.Д7)** m_y; г) **(75Д.Д7)** D_y; д) **(БЗД.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(ОС5.Д7)** r_{xy}; ж) **(2С5.Д7)** $M[X/Y=1]$.

11.6.

Y	X		
	2	4	5
1	0,12	0,30	0,13
0	0,10	0,15	0,20

Вычислите: а) **(Р45.Д7)** m_x; б) **(ПА1.Д8)** D_x; в) **(245.Д7)** m_y; г) **(Т31.Д7)** D_y; д) **(1С1.Д6)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(225.Д6)** r_{xy}; ж) **(315.Д8)** $M[Y/X=2]$.

11.7.

Y	X		
	2	3	4
1	0,07	0,05	0,25
4	0,13	0,15	0,35

Вычислите: а) **(С96.Д8)** m_x; б) **(906.Д7)** D_x; в) **(646.Д7)** m_y; г) **(9С1.Д8)** D_y; д) **(ОС1.Д7)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(С16.Д6)** r_{xy}; ж) **(496.Д7)** $M[X/Y=2]$.

11.8.

Y	X		
	1	2	4
–1	0,12	0,14	0,15
2	0,16	0,30	0,13

Вычислите: а) **(776.Д7)** m_x; б) **(236.Д7)** D_x; в) **(9А6.Д7)** m_y; г) **(6П6.Д7)** D_y; д) **(ДС6.Д7)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(746.Д6)** r_{xy}; ж) **(846.Д7)** $M[Y/X=2]$.

11.9.

Y	X		
	1	2	3
2	0,15	0,25	0,20
5	0,20	0,10	0,10

Вычислите: а) **(986.Д7)** m_x; б) **(385.Д7)** D_x; в) **(416.Д8)** m_y; г) **(436.Д7)** D_y; д) **(ДС6.Д7)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(041.Д7)** r_{xy}; ж) **(486.Д7)** $M[X/Y=5]$.

11.10.

Y	X		
	2	4	5
1	0,10	0,25	0,15
2	0,12	0,13	0,25

Вычислите: а) **(727.Д7)** m_x; б) **(877.Д7)** D_x; в) **(РП7.Д8)** m_y; г) **(797.Д7)** D_y; д) **(РД7.Д7)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(787.Д7)** r_{xy}; ж) **(АА7.Д7)** $M[Y/X=5]$.

11.11.

Y	X		
	–1	0	2
1	0,12	0,25	0,25
3	0,13	0,10	0,15

Вычислите: а) **(047.Д7)** m_x; б) **(522.Д7)** D_x; в) **(627.Д7)** m_y; г) **(4А2.Д7)** D_y; д) **(ТБ2.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(Б72.Д6)** r_{xy}; ж) **(187.Д7)** $M[X/Y=1]$.

11.12.

Y	X		
	–1	0	2
2	0,12	0,25	0,10
5	0,13	0,15	0,25

Вычислите: а) **(087.Д7)** m_x; б) **(5С2.Д7)** D_x; в) **(987.Д7)** m_y; г) **(5Б2.Д7)** D_y; д) **(7Т2.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(Т92.Д7)** r_{xy}; ж) **(462.Д8)** $M[Y/X=0]$.

11.13.

Y	X		
	–2	–1	0
1	0,13	0,10	0,30
3	0,15	0,12	0,20

Вычислите: а) **(СД9.Д6)** m_x; б) **(163.Д7)** D_x; в) **(389.Д7)** m_y; г) **(323.ДО)** D_y; д) **(023.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(ПП9.Д6)** r_{xy}; ж) **(3С9.Д6)** $M[X/Y=3]$.

11.14.

Y	X		
	1	4	5
2	0,17	0,25	0,20
4	0,15	0,13	0,10

Вычислите: а) **(С99.Д7)** m_x; б) **(104.Д7)** D_x; в) **(3Д9.Д7)** m_y; г) **(А64.Д7)** D_y; д) **(8С4.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(П99.Д6)** r_{xy}; ж) **(149.Д7)** $M[Y/X=4]$.

11.15.

Y	X		
	–1	2	3
2	0,16	0,23	0,20
5	0,15	0,14	0,12

Вычислите: а) **(ДП9.Д7)** m_x; б) **(305.Д7)** D_x; в) **(6Т8.Д7)** m_y; г) **(СП4.Д7)** D_y; д) **(А14.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(069.Д7)** r_{xy}; ж) **(ПД9.Д8)** $M[X/Y=5]$.

11.16.

Y	X		
	0	1	2
–2	0,10	0,20	0,20
2	0,10	0	0,10
3	0,20	0,10	0

Вычислите: а) **(115.Д8)** m_x; б) **(185.Д7)** D_x; в) **(995.Д8)** m_y; г) **(595.Д7)** D_y; д) **(А65.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(Д65.Д7)** r_{xy}; ж) **(5Б5.Д7)** $M\left[X/Y=3\right]$.

11.17.

Y	X		
	–2	–1	0
1	0	0,20	0,20
2	0,20	0,10	0,20
4	0	0	0,10

Вычислите: а) **(ОА6.Д7)** m_x; б) **(187.Д7)** D_x; в) **(С96.Д8)** m_y; г) **(9С6.Д7)** D_y; д) **(526.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(786.Д7)** r_{xy}; ж) **(А16.Д8)** $M\left[Y/X=0\right]$.

11.18.

Y	X		
	1	2	4
–2	0,10	0,10	0
0	0,10	0,20	0,10
–1	0,20	0,10	0,10

Вычислите: а) **(С4А)** m_x; б) **(6БС.Д8)** D_x; в) **(68Б)** m_y; г) **(7БТ.Д8)** D_y; д) **(57Т.Д8)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(65Т.Д7)** r_{xy}; ж) **(С8Б)** $M\left[X/Y=1\right]$.

11.19.

Y	X		
	2	4	6
1	0,10	0,10	0,10
0	0,10	0,20	0,30
2	0,10	0	0

Вычислите: а) **(С7С.Д8)** m_x; б) **(90С.Д7)** D_x; в) **(СБС.Д8)** m_y; г) **(8ДС.Д7)** D_y; д) **(ОАС.Д7)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; е) **(8АС.Д7)** r_{xy}; ж) **(51С.Д7)** $M\left[Y/X=6\right]$.

11.20.

Y	X		
	–2	–1	0
2	0,10	0,20	0,10
3	0	0,30	0,10
4	0	0,10	0,10

Вычислите: а) **(2А1.Д7)** m_x; б) **(Т51.Д7)** D_x; в) **(1А1.Д8)** m_y; г) **(241.Д7)** D_y; д) **(Д91.Д6)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; е) **(191.Д6)** r_{xy}; ж) **(ДС1.Д7)** $M[X/Y=4]$.

Задача 12

Дана плотность распределения $\rho(x,y)$ системы непрерывных случайных величин (X,Y) в заданной области D. Найдите указанные в заданиях величины.

В задачах 12.1–12.12 все рациональные нецелые числа записывайте в виде обыкновенной несократимой дроби, не выделяя целой части; в задачах 12.13–12.20 — в виде десятичной дроби, округлив до 0,001.

12.1. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(-5;0), B(0;1); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(ЗТ1)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(ДТ1)** m_x; г) **(П39)** m_y; д) **(721)** D_x; е) **(997)** D_y; ж) **(261)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(4216)** r_{xy}; и) **(СТ2)** $M[Y/X=-1]$.

12.2. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(1;0), B(1;-5); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(ТТ3)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(406)** m_x; г) **(ОТ2)** m_y; д) **(ЗП8)** D_x; е) **(П32)** D_y; ж) **(А01)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(855)** r_{xy}; и) **(П82)** $M[Y/X=3/4]$.

12.3. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(5;0), B(0;2); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(171)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(СР2)** m_x; г) **(507)** m_y; д) **(733)** D_x; е) **(Д24)** D_y; ж) **(Т21)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(256)** r_{xy}; и) **(573)** $M\ [X/Y=1]$.

12.4. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(2;0), B(2;5); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(Б73)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(284)** m_x; г) **(ТБ3)** m_y; д) **(125)** D_x; е) **(ОС4)** D_y; ж) **(9С3)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(5217)** r_{xy}; и) **(АР2)** $M\ [X/Y=3]$.

12.5. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(5;0), B(0;-3); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(С11)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(2Д4)** m_x; г) **(863)** m_y; д) **(6С5)** D_x; е) **(8318)** D_y; ж) **(961)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(9319)** r_{xy}; и) **(371)** $M\left[Y/X=4\right]$.

12.6. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(-3;0), B(-3;5); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(412)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(264)** m_x; г) **(3Д5)** m_y; д) **(С320)** D_x; е) **(ОТ6)** D_y; ж) **(7П3)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(Д57)** r_{xy}; и) **(ТД3)** $M\left[X/Y=3\right]$.

12.7. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(-5;0), B(0;4); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(1П1)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(8Т3)** m_x; г) **(284)** m_y; д) **(6Т7)** D_x; е) **(3Д5)** D_y; ж) **(084)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(3Т21)** r_{xy}; и) **(4Р2)** $M\left[Y/X=-3\right]$.

12.8. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(4;0), B(4;-5); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(ПП2)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(753)** m_x; г) **(254)** m_y; д) **(СД6)** D_x; е) **(028)** D_y; ж) **(Д73)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(078)** r_{xy}; и) **(3Т2)** $M\left[X/Y=-3\right]$.

12.9. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(1;0), B(0;6); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(4110)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(9Б11)** m_x; г) **(383)** m_y; д) **(1П9)** D_x; е) **(С54)** D_y; ж) **(2Т1)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(879)** r_{xy}; и) **(4Р12)** $M\left[X/Y=2\right]$.

12.10. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(6;0), B(6;1); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(5Р13)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(9А2)** m_x; г) **(8Д14)** m_y; д) **(С95)** D_x; е) **(7710)** D_y; ж) **(1Д5)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(СТ22)** r_{xy}; и) **(9Д15)** $M\left[Y/X=4\right]$.

12.11. $\rho(x,y)=\begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0;0),\ A(6;0), B(0;-5); \\ 0 \text{ в других точках.} \end{cases}$

Найдите: а) **(1П4)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(Т56)** m_x; г) **(Д55)** m_y; д) **(Т97)** D_x; е) **(629)** D_y; ж) **(824)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(ТТ23)** r_{xy}; и) **(Д84)** $M\left[X/Y=-2\right]$.

12.12. $\rho(x,y)=\begin{cases}Cxy, \text{ если } 0<x<1,\ 0<y<1;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(4АА)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(971)** m_x; г) **(472)** m_y; д) **(131)** D_x; е) **(П32)** D_y; ж) **(081)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(04Д)** r_{xy}; и) **(573)** $M\left[X/Y=1/2\right]$.

12.13. $\rho(x,y)=\begin{cases}C(2x+y), \text{ если } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(3С1.Д6)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(921.Д7)** m_x; г) **(2С1.Д7)** m_y; д) **(Т01.Д7)** D_x; е) **(РД1.Д7)** D_y; ж) **(341.Д5)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(3А1.Д6)** r_{xy}; и) **(361.Д8)** $M\left[X/Y=1/3\right]$.

12.14. $\rho(x,y)=\begin{cases}C(2x+y), \text{ если } x+y\le 1,\ x>0,\ y>0;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(342)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(222.Д7)** m_x; г) **(Т72.Д7)** m_y; д) **(582.Д7)** D_x; е) **(612.Д6)** D_y; ж) **(912.Д5)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(042.Д7)** r_{xy}; и) **(732.Д7)** $M\left[X/Y=1/2\right]$.

12.15. $\rho(x,y)=\begin{cases}C\left(x^2+y\right), \text{ если } 0\le x\le 1,\ 0<y<1;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(7А3.Д8)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(Т63.Д8)** m_x; г) **(С62.Д8)** m_y; д) **(5Д3.Д7)** D_x; е) **(703.Д7)** D_y; ж) **(ПТ3.Д6)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(003.Д6)** r_{xy}; и) **(323)** $M\left[Y/X=1/2\right]$.

12.16. $\rho(x,y)=\begin{cases}C\left(2x^2+y\right), \text{ если } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(5С4.Д6)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(104.Д7)** m_x; г) **(ДА4.Д7)** m_y; д) **(БД4.Д7)** D_x; е) **(444.Д6)** D_y; ж) **(624.Д6)** $\operatorname{cov}(X;Y)$; з) **(844.Д7)** r_{xy}; и) **(ПД3.Д7)** $M\left[X/Y=1/2\right]$.

12.17. $\rho(x,y)=\begin{cases}Cx^2y^2, \text{ если } x+y\le 1,\ x>0,\ y>0;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(315)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(СП5.Д6)** m_x; г) **(206.Д6)** m_y; д) **(5Д5.Д7)** D_x;

е) **(ТД6.Д7)** D_y; ж) **(ПТ5.Д5)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; з) **(АС5.Д6)** r_{xy};
и) **(995.Д8)** $M\left[Y/X=1/2\right]$.

12.18. $\rho(x,y)=\begin{cases}Cx^2y, \text{ если } x+y\le 1, \; x\ge 0, \; y\ge 0;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(576)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(С16.Д8)** m_x; г) **(ТБ6.Д7)** m_y; д) **(ОА6.Д6)** D_x; е) **(ДА6.Д6)** D_y; ж) **(976.Д5)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; з) **(ДА5.Д7)** r_{xy};
и) **(5Б6.Д7)** $M\left[X/Y=1/2\right]$.

12.19. $\rho(x,y)=\begin{cases}C(x+y), \text{ если } x+y\le 1, \; x> 0, \; y> 0;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(ТП7)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(ОБ7.Д6)** m_x; г) **(П13.Д6)** m_y; д) **(977.Д6)** D_x; е) **(4П2.Д6)** D_y; ж) **(Д17.Д6)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; з) **(8С7.Д7)** r_{xy};
и) **(007.Д7)** $M\left[Y/X=1/2\right]$.

12.20. $\rho(x,y)=\begin{cases}Cxy, \text{ если } x+y\le 1, \; x\ge 0, \; y\ge 0;\\ 0 \text{ в других точках.}\end{cases}$

Найдите: а) **(1С8)** константу C; б) плотности распределения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$; в) **(228.Д8)** m_x; г) **(СТС.Д8)** m_y; д) **(Б88.Д7)** D_x;
е) **(52С.Д7)** D_y; ж) **(978.Д5)** $\mathrm{cov}(X;Y)$; з) **(2А8.Д7)** r_{xy};
и) **(7Т8.Д7)** $M\left[X/Y=1/2\right]$.

Список вопросов для экзамена

1. Функции. Предел. Непрерывность

1. Раскройте понятие величины. Приведите примеры постоянных и переменных величин.

2. Дайте определение функции $f: x \subseteq R^n \to Y \subseteq R^m$, ее области определения и области значений.

3. Опишите классы функций $f: x \subseteq R^n \to Y \subseteq R^m$ в зависимости от значений n и m.

4. Дайте определение графика функции.

5. Опишите классы функций $f: x \subset R \to Y \subset R$ одного аргумента (ограниченные и неограниченные, монотонные, периодические функции).

6. Дайте определение обратной функции. Приведите примеры.

7. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.

8. Опишите класс основных элементарных функций. Укажите их области определения и области значений.

9. Дайте определение последовательности. Приведите примеры последовательностей ограниченных, неограниченных, монотонно убывающих, возрастающих.

10. Сформулируйте определение предела последовательности. Исходя из определения предела, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

11. Сформулируйте теоремы о пределах последовательности. Приведите примеры отыскания пределов.

12. Дайте определения числового ряда и его суммы, сходящихся и расходящихся рядов. Приведите примеры.

13. Сформулируйте необходимый и достаточный признак сходимости. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

14. Сформулируйте и докажите необходимый признак сходимости, достаточный признак расходимости.

15. Дайте определения условной и абсолютной сходимости ряда.

16. Сформулируйте признаки сравнения абсолютной сходимости ряда.

17. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости ряда.

18. Знакочередующиеся ряды. Признаки их сходимости.

19. Дайте определение окрестности точки x_0. Назовите виды окрестностей.

20. Опишите окрестности символов $\infty, +\infty. -\infty$. Односторонние окрестности.

21. Дайте определения предела функции на языке окрестностей и неравенств.

22. Дайте определение предела функции на языке последовательностей (по Гейне).

23. Сформулируйте основные теоремы о пределах функции.

24. Сформулируйте различные определения непрерывности функции.

25. Точки разрыва функции и их классификация.

26. Первый замечательный предел.

27. Второй замечательный предел.

28. Следствия из второго замечательного предела.

29. Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой функций.

30. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Понятие порядка малости и порядка роста.

31. Эквивалентные бесконечно малые. Применение понятия эквивалентности для отыскания пределов.

32. Теоремы о свойствах непрерывных функций на замкнутом множестве $[a,b]$.

33. Дайте определения функционального ряда, его области сходимости и суммы.

34. Степенные ряды, отыскание их радиуса сходимости.

2. Дифференциальное исчисление

35. Примеры физических задач, приводящих к линеаризации функций.

36. Определение дифференцируемой функции в случае $f : X \subset R \to Y \subset R$.

37. Определение дифференцируемой функции в случае $f : X \subset R^n \to Y \subset R$ при $n = 3$. Понятие частных производных.

38. Дифференциал функции $u = f(x,y,z)$.

39. Дайте определения правых и левых производных.

40. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности.

41. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций.

42. Правило дифференцирования сложной функции $f : X \subset R \to Y \subset R$.

43. Правило дифференцирования обратной функции.

44. Правила дифференцирования сложных функций многих переменных.

45. Производные высших порядков.

46. Частные производные высших порядков.

47. Опишите параметрический способ задания функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

48. Опишите неявный способ задания функций.

49. Правило дифференцирования неявно заданных функций одного и многих переменных.

50. Дифференциал функции одного переменного, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

51. Свойство инвариантности формы записи первого дифференциала.

52. Понятие формулы и ряда Тейлора.

53. Запишите ряды Тейлора для основных элементарных функций.

54. Формулировка правил Лопиталя.

55. Теорема Ферма (об обращении производной в нуль в точке наибольшего и наименьшего значения).

56. Теорема Ролля (об обращении производной в нуль, если $f(a) = f(b)$).

57. Теорема Лагранжа (о промежуточных значениях производной $f'(\xi)$).

58. Теорема о постоянстве функции.

59. Теорема о монотонности функции.

60. Дайте определение точек экстремума. Необходимые условия экстремума.

61. Достаточные условия экстремума, связанные с первой производной.

62. Достаточные условия экстремума, связанные со второй производной и производными высших порядков.

63. Дайте определение экстремума функций двух аргументов. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

64. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

65. Выпуклость графика функции. Условия выпуклости вверх и вниз графика функции.

66. Асимптоты графика функции, их виды и отыскание.

67. Общая схема исследования функции и построение графика.

3. Интегральное исчисление

68. Дайте определение первообразной, свойства первообразных.

69. Дайте определение неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

70. Формула интегрирования по частям. Приведите примеры.

71. Формула замены переменных в неопределенном интеграле. Приведите примеры.

72. Способы интегрирования тригонометрических выражений. Приведите примеры.

73. Опишите процесс построения интегральной суммы для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

74. Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами.

75. Свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.

76. Докажите теорему о свойствах функции $J(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

77. Докажите формулу Ньютона — Лейбница вычисления определенного интеграла (ограничиться случаем непрерывных функций).

78. Формула замены переменных в определенном интеграле. Приведите примеры.

79. Формула интегрирования по частям определенного интеграла. Приведите примеры.

80. Дайте определение несобственных интегралов первого рода, их сходимости и расходимости. Приведите примеры.

81. Запишите и поясните формулу Ньютона — Лейбница для несобственных интегралов первого рода. Приведите примеры.

82. Дайте определение несобственных интегралов второго рода, их сходимости и расходимости. Приведите примеры.

83. Запишите и поясните формулу Ньютона — Лейбница для несобственного интеграла второго рода. Приведите примеры.

84. Как строится интегральная сумма от функции $f(M)$ по произвольной фигуре?

85. Укажите типы интегралов в зависимости от строения области интегрирования.

86. Запишите формулы для вычисления двойных интегралов.

87. Запишите формулы для вычисления тройных интегралов.

88. Запишите формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода.

89. Запишите формулы для вычисления криволинейных интегралов второго рода.

4. Элементы теории дифференциальных уравнений

90. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка и решения. Приведите примеры.

91. Дайте определения общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка.

92. Уравнения с разделяющимися переменными и их интегрирование. Приведите примеры.

93. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и их интегрирование. Приведите примеры.

94. Линейные уравнения первого порядка и их интегрирование. Приведите примеры.

95. Приведите примеры задач, сводящихся к решению дифференциальных уравнений.

96. Дайте определения общего и частного решений для уравнений высших порядков.

97. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.

98. Метод вариации интегрирования линейных неоднородных уравнений второго порядка. Приведите примеры.

5. Приложение дифференциального и интегрального исчисления к задачам теории вероятностей

99. Дайте определение случайной величины. Виды случайных величин: дискретные и непрерывные случайные величины. Одномерные и многомерные случайные величины.

100. Дайте определение функции распределения одномерной случайной величины. Свойства функции распределения.

101. Как, зная функцию распределения $F(x)$, вычислить $P\left(a \le x \le b\right)$?

102. Дайте определение матрицы распределения двумерной дискретной случайной величины. Как найти $M[X]$ и $M[Y]$, зная матрицу распределения системы (X,Y)?

103. Дайте определение условных рядов распределения отыскания $M\left[X/Y\right]$ и $M\left[Y/X\right]$.

104. Дайте определение функции распределения двумерной случайной величины. Свойства $F(x,y)$.

105. Дайте определение плотности распределения одномерной случайной величины. Свойства плотности распределения.

106. Вычисление $P(a \le x \le b)$ при известной плотности распределения величины X.

107. Получите формулу для вычисления математического ожидания непрерывной одномерной случайной величины при известной плотности распределения.

108. Дайте определение функции от случайных величин. Вычисление математического ожидания от функции случайных величин.

109. Дисперсия случайной величины и ее вычисление.

110. Равномерно распределенная на отрезке $[a,b]$ случайная величина и ее числовые характеристики.

111. Нормальное распределение и его числовые характеристики.

112. Вычисление вероятностей $P(a < x < b)$ и $P(|x| < \delta)$ для нормально распределенных величин.

113. Показательное распределение и его числовые характеристики.

114. Плотность распределения двумерной случайной величины и ее свойства.

115. Восстановление законов распределения величин X и Y по известной плотности распределения системы.

116. Характеристики связи двух случайных величин. Условные математические ожидания. Функции регрессии одной величины на другую.

117. Коэффициент корреляции и его свойства.

118. Теоремы о свойствах математического ожидания.

119. Теоремы о свойствах дисперсии.

120. Теорема о свойствах коэффициента корреляции.

121. Понятие выборки. Способы обработки выборки. Виды рядов, построенных на основе выборки.

122. Понятие эмпирической функции распределения.

123. Выборочные параметры распределения.

Библиографический список

1. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1983. – 430 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 1962. – 564 с.
3. Вентцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Радио и связь, 1983. – 416 с.
4. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. – М. : Айрис, 1996. – 288 с.
5. Грес П.В. Математика для гуманитариев / П.В. Грес. – М. : Юрайт, 2000. – 112 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1977. – 480 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1979. – 400 с.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И. Головина. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
9. Горбанев Н.Н. Высшая математика I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Н.Н. Горбанев, А.А. Ельцов, Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2001. – 164 с. – ISBN 5-86889-079-5.
10. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М. : Астраль, 2005. – 640 с.
11. Дорофеева А.В. Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов / А.В. Дорофеева. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971. – С. 424.
12. Ельцов А.А. Дифференциальное исчисление / А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2001. – 228 с. – ISBN 5-86889-080-9.
13. Ельцов А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2005. – 204 с. – ISBN 5-86889-232-1.
14. Ельцов А.А. Высшая математика II. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения / А.А. Ельцов. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 1998. – ISBN 5-86889-030-2.
15. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 471 с. – ISBN 5-238-00030-8.
16. Магазинников Л.И. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. –

Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2005. – 103 с. – ISBN 5-86889-258-5.

17. Магазинников Л.И. Практикум по введению в математический анализ и дифференциальное исчисление / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2001. – 168 с. – ISBN 5-86889-082-5.

18. Магазинников Л.И. Теория вероятностей / Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2000. – 150 с. – ISBN 5-86889-072-5.

19. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах / И.А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 400 с.

20. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2006. – 662 с.

21. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2006. – 288 с.

22. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л.А. Кузнецов. – СПб. : Изд-во «Лань», 2006. – 240 с.

23. Расчетные задания по теории вероятностей и математической статистике / сост. Майник И.Ф. [и др.]. – Новосибирск : Новосиб. электротехн. ин-т, 1990. – 40 с.

Приложение А. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение Б. Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left[-\dfrac{z^2}{2}\right] dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,41	0,1591	0,82	0,2939	1,23	0,3907	1,64	0,4495
0,01	0,0040	0,42	0,1628	0,83	0,2967	1,24	0,3925	1,65	0,4505
0,02	0,0080	0,43	0,1664	0,84	0,2995	1,25	0,3944	1,66	0,4515
0,03	0,0120	0,44	0,1700	0,85	0,3023	1,26	0,3962	1,67	0,4525
0,04	0,0160	0,45	0,1736	0,86	0,3051	1,27	0,3980	1,68	0,4535
0,05	0,0199	0,46	0,1772	0,87	0,3078	1,28	0,3997	1,69	0,4545
0,06	0,0239	0,47	0,1808	0,88	0,3106	1,29	0,4015	1,70	0,4554
0,07	0,0279	0,48	0,1844	0,89	0,3133	1,30	0,4032	1,71	0,4564
0,08	0,0319	0,49	0,1879	0,90	0,3159	1,31	0,4049	1,72	0,4573
0,09	0,0359	0,50	0,1915	0,91	0,3186	1,32	0,4066	1,73	0,4582
0,10	0,0398	0,51	0,1950	0,92	0,3212	1,33	0,4082	1,74	0,4591
0,11	0,0438	0,52	0,1985	0,93	0,3238	1,34	0,4099	1,75	0,4599
0,12	0,0478	0,53	0,2019	0,94	0,3264	1,35	0,4115	1,76	0,4608
0,13	0,0517	0,54	0,2054	0,95	0,3289	1,36	0,4131	1,77	0,4616
0,14	0,0557	0,55	0,2088	0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625
0,15	0,0596	0,56	0,2123	0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633
0,16	0,0636	0,57	0,2157	0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641
0,17	0,0675	0,58	0,2190	0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649
0,18	0,0714	0,59	0,2224	1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656
0,19	0,0753	0,60	0,2257	1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664
0,20	0,0793	0,61	0,2291	1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671
0,21	0,0832	0,62	0,2324	1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678
0,22	0,0871	0,63	0,2357	1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686
0,23	0,0910	0,64	0,2389	1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693
0,24	0,0948	0,65	0,2422	1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699
0,25	0,0987	0,66	0,2454	1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706
0,26	0,1026	0,67	0,2486	1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713
0,27	0,1064	0,68	0,2517	1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719
0,28	0,1103	0,69	0,2549	1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726
0,29	0,1141	0,70	0,2580	1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732
0,30	0,1179	0,71	0,2611	1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738
0,31	0,1217	0,72	0,2642	1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744
0,32	0,1255	0,73	0,2673	1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750
0,33	0,1293	0,74	0,2703	1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756
0,34	0,1331	0,75	0,2734	1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761
0,35	0,1368	0,76	0,2764	1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767
0,36	0,1406	0,77	0,2794	1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772
0,37	0,1443	0,78	0,2823	1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783
0,38	0,1480	0,79	0,2852	1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793
0,39	0,1517	0,80	0,2881	1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803
0,40	0,1554	0,81	0,2910	1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812

Окончание приложения Б

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,10	0,4821	2,32	0,4898	2,54	0,4945	2,76	0,4971	2,98	0,4986
2,12	0,4830	2,34	0,4904	2,56	0,4948	2,78	0,4973	3,00	0,49865
2,14	0,4838	2,36	0,4909	2,58	0,4951	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,16	0,4846	2,38	0,4913	2,60	0,4953	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,18	0,4854	2,40	0,4918	2,62	0,4956	2,84	0,4977	3,60	0,499841
2,20	0,4861	2,42	0,4922	2,64	0,4959	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,22	0,4868	2,44	0,4927	2,66	0,4961	2,88	0,4980	4,00	0,499968
2,24	0,4875	2,46	0,4931	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,50	0,499997
2,26	0,4881	2,48	0,4934	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,28	0,4887	2,50	0,4938	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,30	0,4893	2,52	0,4941	2,74	0,4969	2,96	0,4985		

Оглавление

Учебное издание

Магазинников Леонид Иосифович
Шевелев Юрий Павлович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ, ЭКОЛОГИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИКО-ЮРИДИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Редактор Л.И. Кирпиченко
Компьютерная верстка Е.Н. Ворониной

Подписано в печать 06.07.07. Формат 70x100/16.
Усл. печ. л. 19,83. Тираж 100. Заказ 864.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.