Федеральное агентство по образованию
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Л.И. Магазинников, Ю.П. Шевелев

Математика для гуманитарных, экологических и экономико-юридических специальностей

Часть 1

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М12

Магазинников Л.И.

М12 Математика для гуманитарных, экологических и экономико-юридических специальностей : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Л.И. Магазинников, Ю.П. Шевелев. — Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. — 260 с.

ISBN 978-5-86889-326-1

ISBN 978-5-86889-327-8 (Ч. 1)

Изложены начальные сведения из теории множеств, комбинаторики, теории вероятностей, алгебры логики, теории графов, линейной алгебры в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта по математике для экологических, гуманитарных, экономико-юридических и родственных им специальностей. Изложение теоретического материала сопровождается многочисленными упражнениями. Все ответы к ним закодированы (всего более 1100 кодов), что обеспечивает возможность работы над упражнениями в режиме автоматизированного самоконтроля, реализуемого при помощи устройств «Символ» либо их компьютерных аналогов, разработанных в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Для студентов очного, вечернего, заочного и дистанционного обучения, а также для лиц, желающих путем самостоятельной работы освоить начала вышеперечисленных разделов современной математики.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86889-326-1
ISBN 978-5-86889-327-8 (Ч. 1)

Когда студент изучает учебник,
он усваивает чужие мысли;
когда решает задачу, он думает сам.

П.В. Грес

Предисловие

Все специальности, по которым ведется обучение в российских вузах, условно можно разделить на естественно-технические и гуманитарные (лат. *humanitas* — человеческая природа, образованность). Разработка программ курса математики для естественно-технических специальностей особых затруднений никогда не вызывала, так как содержание программ в основном определяется потребностями других дисциплин данной специальности, то есть подбор тем для обязательного изучения осуществляется в значительной мере утилитарно. Иное дело программы гуманитарного направления. К ним пока нет устоявшихся требований, а возможность использования утилитарного подхода хотя и просматривается, но недостаточно четко. Поэтому выбор тем для обязательного изучения определяется не только потребностями других дисциплин. Во-первых, современный специалист с высшим образованием должен хорошо разбираться хотя бы в прикладных вопросах информатики применительно к своей профессии. А для этого крайне желательно иметь четкое представление о содержании таких разделов современной математики, как теория множеств, комбинаторика, теория графов, алгебра логики, теория вероятностей. Во-вторых, специалисту в любой области приходится иметь дело с какими-либо процессами (явлениями). Изучать их можно двумя способами: путем непосредственного наблюдения и при помощи математических моделей, отражающих наиболее существенные стороны исследуемых явлений. Прямое наблюдение доступно лишь в редких случаях, поэтому основным является второй способ. При помощи математического моделирования обеспечивается возможность изучения процессов как медленных, так и быстропротекающих, с большим числом переменных величин, с различными исходными данными, при заданных ограничениях и т.д. Для квалифицированного построения математических моделей и их изучения с применением компьютеров необходимы знания из таких разделов математики (дополнительно к вышеперечисленным), как линейная алгебра и аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды.

Разумеется, не всем специалистам придется разрабатывать и исследовать математические модели, поскольку можно пользоваться и готовыми компьютерными программами. Однако чтобы их быстро освоить и квалифицированно применять на практике, также необходима математическая эрудиция. Возможно, что будущему специалисту вообще не придется ни разрабатывать, ни использовать математические модели. Изучение математики и в этом случае не будет бесполезным занятием. Во-первых, известно, что математика, по выражению М.В. Ломоносова, «ум в порядок приводит», то есть ее изучение благотворно влияет на мышление человека, оберегает его от скоропалительных выводов и решений обывателя, не утруждающего себя строгостью рассуждений и привыкшего обо всем судить на уровне своих эмоций. Во-вторых, математика является частью общечеловеческой культуры, поэтому приобретенные математические знания сами по себе представляют большую ценность, так как значительно расширяют кругозор человека.

Необходимость изучения математики гуманитариями подтверждается Государственным образовательным стандартом (ГОС) высшего профессионального образования, согласно которому математика предусмотрена в учебных программах по таким направлениям, как «Социальная работа», «Юриспруденция», «Культурология», «Политология», «Лингвистика», «Книговедение», «Психология», «Теология», «Филология», «Связи с общественностью», «Физическая культура», «Социология» и многие другие.

ГОС появился недавно, поэтому апробированных учебников, в которых были бы отражены все его требования, пока нет. Из учебных же пособий заслуживает внимания книга П.В. Греса «Математика для гуманитариев» [8], где сделана попытка изложить весь материал в соответствии со стандартом и с ориентацией только на гуманитарные специальности. Существуют и другие пособия, написанные в разное время для гуманитарных и им родственных факультетов. Однако все они отличаются тем, что содержат недостаточное количество упражнений и задач. Это затрудняет как проведение практических занятий, так и организацию самостоятельной работы студентов. Кроме того, возможность самоконтроля в них представлена традиционным способом — при помощи открытых ответов, что значительно снижает дидактическое значение задач, поскольку открытые ответы существенно меняют характер учебной деятельности. Если ответ известен заранее, то искать его не нужно, его требуется лишь обосновать, что можно сделать и неверными рассуждениями, а в случае простых задач не требуется и обосновывать, то есть делать вообще ничего не надо. Очевидно, что дидактическое значение таких задач снижается до нуля.

Таким образом, проблема учебной литературы по математике для специальностей, не являющихся естественно-техническими, остается актуальной. Особенно это относится к заочникам и студентам, обучающимся по дистанционной технологии образования: если студентам-очникам, в принципе, достаточно информации, получаемой ими на лекционных и практических занятиях, то заочникам и «дистанционникам» необходимы учебники (учебные пособия), но не любые. Пособия, предназначенные для самостоятельного изучения, должны удовлетворять двум основным требованиям: предельная доступность изложения учебного материала и наличие достаточно большого числа упражнений для самостоятельного выполнения с возможностью самоконтроля. Среди традиционных таких пособий нет. Их подготовка и выпуск осуществляются только в информационно-дидактической системе «Символ» (разработка Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники). В идеологических рамках этой системы написано и данное пособие. В него входят все вышеназванные разделы математики. Пособие представлено двумя частями. Первая из них посвящена тем математическим разделам, которые по современным представлениям относятся к дискретной математике. Здесь же рассматриваются элементы линейной алгебры и приложения линейной алгебры к задачам аналитической геометрии. Эта часть написана в основном по материалам пособий [32, 33] с использованием [6, 7, 15, 17, 18], в которых соответствующие темы представлены более полно. Во второй части изложен материал, традиционно считающийся классическим. В нем доминируют разделы математики, основанные на понятии предела. Более полные сведения по этим темам можно найти в учебных пособиях [16, 19].

Современная математика достигла такого развития, что отразить в небольшой книге хотя бы самые главные ее достижения совершенно невозможно. Поэтому по объему материала каждая тема пособия представляет собой лишь введение в соответствующие разделы математики. В то же время все темы достаточно наполнены фактическим материалом: даны вводные понятия и определения, сформулированы наиболее важные теоремы, приведены образцы задач с решениями. Кроме того, многие подразделы сопровождаются списками упражнений для самостоятельной работы. Ими задана минимально необходимая глубина освоения материала, поэтому выполнять их рекомендуется все без исключения, как простые, так и те, которые могут показаться сложными.

Упражнения для самостоятельной работы большей частью закодированы, то есть перед их условиями записаны буквенно-цифровые коды. Они указаны в круглых скобках после номеров упражнений. Примеры кодов: (32К), (ПТН), (386), (МТ.ПК), (К9Ш.ЖК) и т.д. Их главное назначение — самоконтроль, то есть проверка того, верным является найденный ответ или неверным.

Правильность ответов определяется при помощи специализированного устройства «Символ-ВУЗ» либо его компьютерного аналога

«Символ-КОМ» (разработки Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники). Самоконтроль осуществляется просто: сначала на клавиатуре устройства (либо компьютера) посимвольно набирается код, а затем также посимвольно вводится ответ, после чего нажимается кнопка «Контроль». Индикаторы с надписями «Правильно» и «Неправильно» покажут, верным является введенный ответ или неверным.

При наборе ответов необходимо придерживаться следующих правил:

а) если в конце упражнения написано (обыкн.), то это значит, что ответ необходимо вводить в виде обыкновенной несократимой дроби без выделения целой части (например, $\frac{7}{3}$, а не $\frac{14}{6}$ и не $2\frac{1}{3}$): сначала набирается числитель, затем — черта (знак деления), после этого вводится знаменатель;

б) если в конце упражнения написано (дес.), то ответ вводится в виде десятичной дроби: сначала набирается целая часть, затем — запятая и после нее — цифры дробной части;

в) при вводе степени используется знак «↑» (стрелка, направленная вверх), например выражение a^3 набирается в виде a↑3;

г) если после кода стоит знак «!», например (35Н)!, то это значит, что закодировано более одного ответа и после набора кода надо ввести их все.

В первой части пособия коды приведены почти ко всем задачам, во второй же части к некоторым задачам вместо кодов даны открытые ответы. Это относится к тем случаям, когда ответ отличается неоднозначностью его записи либо является слишком громоздким. В принципе, и громоздкие ответы нетрудно закодировать, но при их наборе (во время самоконтроля) легко допустить ошибку, пропустив какой-либо знак или введя не тот символ, вследствие чего правильный ответ устройство оценит как неправильный.

Данное пособие рассчитано на широкий круг специальностей. Его могут использовать студенты не только экологических, гуманитарных, экономико-юридических, но и родственных им специальностей по критериям Государственного образовательного стандарта, например «Государственное и муниципальное управление» и др.

Известно, что такие характеристики учебника по математике, как строгость и популярность изложения материала, плохо сочетаются: в популярно написанной книге не удается сохранить математическую строгость, а если главной считать строгость, то теряется популярность, а с нею и читатели (останутся одни математики-профессионалы). При подготовке данного двухтомника авторы стремились в целом к «золотой середине», но с уклоном в сторону простоты и доступности изложения материала за счет некоторого снижения уровня строгости. Это является вполне оправданным, поскольку каждый раздел пособия изначально планировался как вводно-ознакомительный курс, рассчитанный на первое знакомство с соответствующей темой. Увлечение же строгостью в ущерб популярности с дидактической точки зрения представляется весьма сомнительным.

Простота и доступность изложения материала не означают легкость его изучения. Любая книга по математике, как бы популярно она ни была написана, — «не для трамвайного чтения» (по выражению Ю.А. Гастева [14, с. 5]). И данное пособие — не исключение. Работа над ним, как и над всяким учебником математики, требует сосредоточенности, напряжения ума, внимательного осмысливания каждой фразы, тщательного разбора каждой задачи.

Изучение материала пособия должно быть завершено выполнением четырех контрольных работ. Из них две работы приведены в первой части и две — во второй. Предназначены они в основном для студентов-гуманитариев очной и дистанционной форм образования, но могут быть использованы и при обучении другим специальностям. Кроме контрольных работ, обе части пособия содержат списки экзаменационных вопросов.

Список сокращений, использованных в пособии:

см. — смотрите; упр. — упражнение; т.д. — так далее; т.е. — то есть; с. — страница; подразд. — подраздел; лат. — перейти на латинский алфавит; дес. — десятичная дробь; обыкн. — обыкновенная несократимая дробь, в которой не выделена целая часть.

Авторы

1. Элементы теории множеств

1.1. Вводные понятия

Основные положения теории множеств разработаны чешским философом, математиком, профессором теологии (г. Прага) Бернардом Больцано (1781–1848), немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831–1916) и немецким математиком, профессором (с 1872 г.) Галльского университета Георгом Кантором (1845–1918). Георг Кантор внес в теорию множеств наибольший вклад, поэтому теория множеств тесно связана с его именем. Официально теория множеств была признана в 1897 г., когда Ж. Адамар (1865–1963) и Гурвиц в своих докладах на Первом международном конгрессе математиков привели многочисленные примеры применения канторовской теории множеств в различных разделах математики.

Понятию множества невозможно дать точное определение, поскольку оно является первичным, предельно широким по содержанию. Его можно лишь пояснить. Например, сам Георг Кантор вкладывал в это понятие следующий смысл: «Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью» [7, с. 6].

Теория множеств — это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных множеств.

Главным в теории множеств является вопрос о том, как определить множество, т.е. указать способ, при помощи которого можно было бы однозначно установить, принадлежит данный объект заданному множеству или не принадлежит.

Объекты, из которых состоят множества, называются их элементами. Принадлежность элемента a множеству P записывают так:

$$a \in P.$$

Читается эта запись: «a есть элемент множества P», либо «a является элементом множества P», либо «элемент a принадлежит множеству P». (Знак $\in$ является стилизацией первой буквы греческого слова εστι — есть, быть.)

При необходимости указать несколько элементов, принадлежащих множеству P, все их перечисляют перед знаком $\in$. Например, запись $a, b, c \in P$ говорит о том, что все три элемента a, b, c принадлежат множеству P.

Если же элемент a не принадлежит множеству P, то пишут: $a \notin P$. Если множеству P не принадлежит несколько элементов, например a, b, c, то записывают: a, b, $c \notin P$.

Множество может содержать любое число элементов 0, 1, 2, 3, ... Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Множество, содержащее один элемент, называется синглетоном (англ. *single* — одиночный). Множество называется конечным, если в нем конечное число элементов, и бесконечным, если число его элементов бесконечно велико.

Задавать множества можно двумя основными способами:

а) путем прямого перечисления его элементов, которые заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми. Например, запись

$$P = \{a, b, c, d\}$$

говорит о том, что множество P состоит из четырех элементов a, b, c, d;

б) при помощи специально сформулированного правила или свойства, в соответствии с которым всякий объект либо входит в множество, либо не входит. Например, множество десятичных цифр можно записать следующим образом:

$$P = \{x \mid 0 \le x \le 9 \;\wedge\; x \text{ — целое число}\},$$

где слева от вертикальной черты записана переменная x, а справа приведено правило, указывающее, какие значения x образуют элементы, принадлежащие множеству P. Читается запись так: «Множество P — это все те значения x, которые больше нуля или равны ему, но меньше или равны девяти и являются целыми числами». Знак $\wedge$ обозначает союз И, показывающий, что должны выполняться оба условия: $0 \le x \le 9$ и x — целое число.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Например:

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}.$$

Элементы этих множеств записаны в различных последовательностях, но наборы элементов совпадают, поэтому множества равны, так как порядок записи элементов, образующих множество, не имеет значения.

Для обозначения множеств в общем случае можно использовать любые знаки, но в основном их обозначают прописными буквами латинского алфавита.

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют кардинальным числом, показывающим, сколько элементов содержит множество. Обозначается кардинальное число следующим образом:

$$\text{если } P = \{a, b, c\}, \text{ то } |P| = |\{a, b, c\}| = 3.$$

Множества с одинаковыми кардинальными числами называются эквивалентными. Очевидно, что эквивалентные множества могут быть не равными, то есть эквивалентность и равенство множеств — это не одно и то же.

Завершим подраздел замечанием о повторяемости элементов в множестве. Могут ли в множество входить одни и те же элементы более одного раза? Нет, не могут. Все элементы множества должны отличаться один от другого, поэтому каждый элемент может входить в множество только один раз. Тогда возникает вопрос, можно ли считать множеством, например, $P = \{1,1,2\}$? Это множество, но состоящее не из трех элементов, а только из двух, и его кардинальное число равно двум. Таким образом, в записи множества некоторые элементы, в принципе, могут быть указаны многократно, но учитываться они должны только по одному разу.

Упражнения

1. (ВХМ). Укажите верные записи, если A — множество простых чисел (простые числа имеют только два различных делителя: самого себя и единицу):

1) $1 \in A$; 2) $2 \in A$? 3) $0 \in A$? 4) $19 \in A$? 5) $23 \in A$.

2. (ШИВ)! Сколько элементов в следующих множествах:

а) $\{a, b, c, aa, bc\}$; в) $\{1, 2, 3, 123, 12\}$; д) $\{11, 22, 11, 12\}$;
б) $\{a, b, c, a, b, c\}$; г) $\{111, 22, 2, 33\}$; е) $\{1, 11, 111, 1\}$?

3. (С31). Элементами множества $S = \{P, Q, R\}$ являются множества вида $P = \{a, b, c\}$; $Q = \{1, 2, 3\}$; $R = \{11, 12, 13\}$.

Укажите верные записи:

а) $P \in S$; б) $a \in S$; в) $\{a, b, c\} \in \{Q, R\}$; г) $11 \notin S$; д) $\{1, 2, 3\} \in P$; е) $\{P, Q\} \subset S$.

4. Укажите (ВР8) пустые множества, (ЕГО) синглетоны:

а) $\{x \mid x \geq 1 \ \wedge \ x \leq 0\}$; в) $\{\varnothing\}$; д) $\{x \mid x < 0 \ \wedge \ x = 1\}$;
б) $\{x \mid x > 0 \ \wedge \ x = 0\}$; г) $\{x \mid x > 2 \ \wedge \ x = 5\}$; е) $\{x \mid x \geq 0 \ \wedge \ x = 1\}$.

5. (УЖИ). Укажите верные равенства:

а) $\{\{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$;

б) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$;

в) $\{0\} = \{x \mid x$ — целое неотрицательное число $\wedge$ x — ненатуральное число$\}$;

г) $\{1, 2, 3, 5, 7\} = \{x \in A \mid x < 10 \wedge A$ — множество простых чисел$\}$;

д) $\{0, 2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x < 9,\ x$ — неотрицательное четное число$\}$;

е) $\{2, 4\} = \{x \mid x$ — решение уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0\}$.

ж) $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$;

з) $\{\varnothing\} = \{\varnothing\varnothing, \varnothing\varnothing\}$.

1.2. Подмножества

Множество B называется подмножеством множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A. Записывается это следующим образом: $B \subseteq A$, где символ $\subseteq$ обозначает знак включения. Запись $B \subseteq A$ читается так: «Множество B включено в множество A и множество A является подмножеством самого себя» (по аналогии со знаком $\leq$, известным из школьного курса математики: если $a \leq b$, то сюда включается и случай, когда $a = b$, где a и b — некоторые числа). Очевидно, что если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то $A = B$. Существует и другой знак включения: $\subset$, где нет знака равенства. Запись $B \subset A$ говорит о том, что множество A не является своим подмножеством (по аналогии со знаком <: если $a < b$, то это значит, что $a \neq b$).

Полагают, что пустое множество является подмножеством любых множеств.

Подмножества бывают двух видов: собственные и несобственные. Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называются несобственными подмножествами. Все остальные подмножества называются собственными.

Множество всех подмножеств множества A называют булеаном множества A и обозначают $B(A)$. Например, булеан множества $A = \{a, b, c\}$ имеет вид

$$B(A) = \{\varnothing, \{c\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}.$$

Упражнения

1. Дано множество вида $A = \{a, b, c, d\}$. Укажите верные записи.

(ОАП) а) $a \in A$; б) $d \subset A$; в) $\varnothing \in A$; г) $\{a, b, c, d\} \subseteq A$; д) $\varnothing \subset A$; е) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.

(БЫР) а) $\{a\} \subset \{a, b\}$; б) $\{c\} \subseteq \{c\}$; в) $\varnothing \in \{a, b, c\}$; г) $\varnothing \in \{a\}$; д) $A \subseteq \{a, b, c, d\}$.

(ЖВК) а) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; б) $\{b, c, d\} \subseteq A$; в) $A \subseteq \{a, b, c\}$; г) $A \subset \{a, b, c, d\}$; д) $\{a, b, c, d\} \subset A$; е) $A \subseteq A$.

2. (ЗОМ). Сколько собственных подмножеств имеет множество

$$M = \{x \mid x \text{ — натуральное число} \wedge x < 6\}?$$

3. (800). В множестве R отсутствуют собственные подмножества. Определите кардинальное число множества R и кардинальное число булеана множества R.

4. (ЯТН)! Сколько собственных подмножеств имеет синглетон? Сколько несобственных подмножеств имеет синглетон?

1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество

Джон Венн (1834–1923) — английский логик, профессор, член Лондонского Королевского общества.

Чтобы повысить наглядность представления множеств и отношений между ними, используют диаграммы Венна (иногда их называют кругами Эйлера, а также кругами Эйлера — Венна) в виде замкнутых кривых, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств. На рис. 1.1 показаны два множества: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $K = \{1, 2, 3\}$.

Непосредственно по диаграмме видно, что $K \subset P$.

Если требуется показать, что множества не имеют общих элементов, то эти множества изображают непересекающимися кругами. На рис. 1.2 непересекающимися являются множества B и C, где $B = \{a, b\}$; $C = \{e, f\}$.

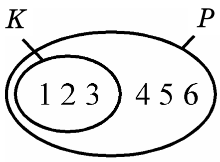


Рис. 1.1

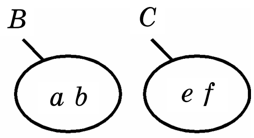


Рис. 1.2

Одним из важнейших понятий теории множеств является понятие универсального множества. Обозначается оно символом I (иногда U). Множество I — это непустое множество тех элементов, которые участвуют в данном рассуждении. Любое рассматриваемое при этом множество является подмножеством универсального множества. На диаграммах Венна универсальные множества изображаются в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги, обозначающие подмножества (рис. 1.3, 1.4). На рис. 1.3 показан пример универсального множества

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и двух его подмножеств

$$P = \{2\} \quad \text{и} \quad Q = \{2, 3, 5, 7),$$

где P — множество четных простых чисел; Q — множество всех простых чисел, меньших 10.

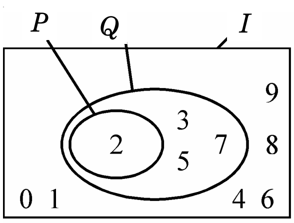


Рис. 1.3

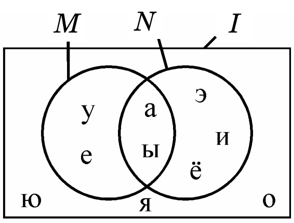


Рис. 1.4

Упражнения

1. (РУ.ШК). На рис. 1.3 укажите элементы универсального множества, не входящие в множество Q.

2. (ОМ). Найдите кардинальное число множества I на рис. 1.3.

3. (XX). Перечислите все элементы, которые останутся в множестве I, если из него удалить все элементы, не входящие в множество Q (рис. 1.3).

4. (ЖУ). Перечислите буквы (в алфавитном порядке), которые останутся в множестве M (рис. 1.4), если все элементы множества N удалить.

1.4. Объединение множеств

Объединением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых входит хотя бы в одно из этих множеств:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

где знак $\cup$ обозначает операцию объединения множеств.

Например, пусть даны множества:

$$A_1 = \{a, b, c\}; \quad A_2 = \{4\}; \quad A_3 = \{b, 54\}.$$

Применив к ним операцию объединения, получим новое множество

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, 4, 54\}.$$

Заметим, что $b \in A_1$ и $b \in A_3$, однако в множество A элемент b входит только один раз.

На диаграммах Венна объединение множеств обозначают сплошной штриховкой областей, соответствующих этим множествам. На рис. 1.5 заштрихована область множества $P \cup Q$. На рис. 1.6 изображены три множества и показана штриховкой область, относящаяся к множеству $(P \cup Q) \cup R$. На рис. 1.7 штриховкой отмечено множество $Q \cup R$.

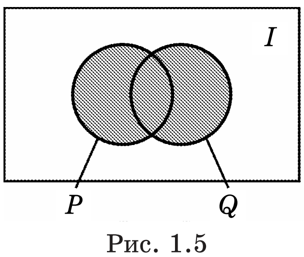


Рис. 1.5

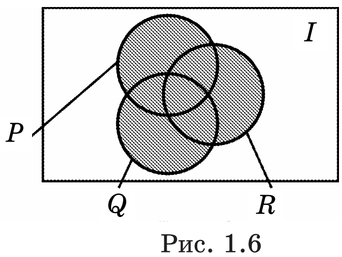


Рис. 1.6

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

а) $A \cup B = B \cup A$ — объединение коммутативно;

б) $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = A \cup B \cup C$ — объединение ассоциативно. Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком $\cup$, скобки можно не использовать;

в) $A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup I = I$.

Если $B \subseteq A$, то $A \cup B = A$. На рис. 1.8 приведена диаграмма Венна для этого случая. Заштрихована область множества A, которая одновременно относится и к множеству $A \cup B$.

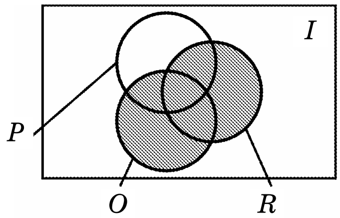


Рис. 1.7

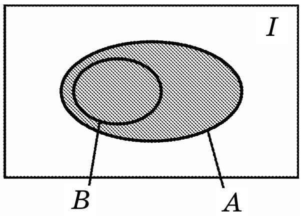


Рис. 1.8

Упражнения

1. (РВ). Найдите элементы множества $A \cup B$, если

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{b, c, d\}.$$

2. (ОР)! На рис. 1.9 приведена диаграмма Венна для трех множеств. Найдите элементы множеств $A \cup B$, затем — $A \cup C$.

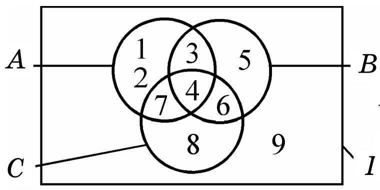


Рис. 9

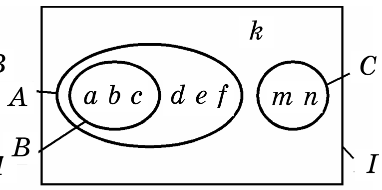


Рис. 10

3. (НЕ). Укажите элементы множества M (рис. 1.9), если $M = \{x \mid x \notin A \wedge x \in I\}$.

4. (5Б). Укажите элементы множества N (рис. 1.9), если $N = \{x \mid x \in A \cup B,\ x > 4\}$.

5. (63). Укажите элементы множества T (рис. 1.9), если $T = \{x \mid x \notin A \cup C,\ x \in I\}$.

6. (ЯРР). Найдите кардинальные числа множеств $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ (рис. 1.10).

7. (НТО). Найдите кардинальное число множества $A \cup B$, если

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \quad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

1.5. Пересечение множеств

Пересечением множеств A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется множество A, каждый элемент которого принадлежит каждому из множеств A_1, A_2, ..., A_n:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n,$$

где знак $\cap$ обозначает операцию пересечения множеств.

В общем случае в результате применения операции пересечения получается новое множество. Например, пусть даны множества:

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{b, c, d, e\}; \quad C = \{c, d, e, f\}.$$

Применив к ним операцию пересечения, получим новое множество K:

$$K = A \cap B \cap C = \{c, d\}.$$

Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается сплошной штриховкой. На рис. 1.11 заштрихована область, относящаяся одновременно к обоим множествам P и Q, где

$$P = \{1, 3, 5, 7\}; \quad Q = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Из диаграммы видно, что $P \cap Q = \{5, 7\}$.

Операции пересечения множеств присущи те же свойства, что и операции объединения:

а) $A \cap B = B \cap A$ — пересечение коммутативно;

б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — пересечение ассоциативно;

в) $A \cap A = A$; $A \cap I = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком пересечения, скобки можно не ставить.

Если $A \subseteq B$ либо $A \subset B$, то $A \cap B = A$. На рис. 1.12 приведена диаграмма Венна для случая, когда $A \subset B$. Штриховкой отмечена область, относящаяся одновременно к множествам A и B. Поскольку $A \subseteq B$, то все элементы множества A являются также и элементами множества B.

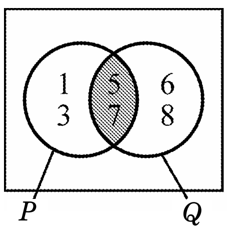


Рис. 1.11

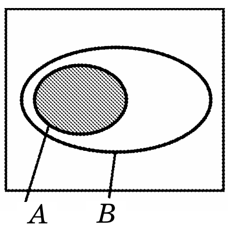


Рис. 1.12

В литературе по математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем — объединения. Благодаря такому соглашению многие формулы можно записывать без скобок и использовать их лишь тогда, когда порядок действий необходимо изменить.

Проиллюстрируем это на примере формулы

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cap B \cup B \cap C.$$

Если учесть принятое соглашение, то обе части этого выражения будут восприниматься однозначно.

Если же потребуется указать, что сначала должна быть выполнена операция объединения, а затем — пересечения, то необходимо воспользоваться скобками. Например:

$$(A \cup B \cup C) \cap D.$$

Здесь сначала выполняется операция объединения, а затем — пересечения.

Операции пересечения и объединения обладают свойствами дистрибутивности:

а) дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C;$$

б) дистрибутивность объединения относительно пересечения:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

В справедливости этих свойств нетрудно убедиться при помощи диаграмм Венна.

1.6. Дополнение множества

Если I — универсальное множество, то дополнением множества A называется множество всех тех элементов множества I, которые не входят в множество A. Обозначается дополнение чертой над символом множества: $\overline{A}$. Например, если I — множество десятичных цифр и $A = \{1, 3, 4\}$, то $\overline{A} = \{0, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

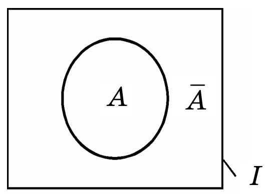


Рис. 1.13

Из диаграммы Венна для операции дополнения (рис. 1.13) видно, что $A \cup \overline{A} = I$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\overline{\overline{A}} = A$ (свойство инволюции).

Если $A = \varnothing$, то $\overline{A} = I$, т.е. $\overline{\varnothing} = I$; если $A = I$, то $\overline{A} = \varnothing$, т.е. $\overline{I} = \varnothing$.

1.7. Разность и симметрическая разность множеств

Кроме основных операций — объединения, пересечения и дополнения, в теории множеств используются еще две операции: разность (вычитание) и симметрическая разность. Разностью $A - B$ множеств A и B называется новое (в общем случае) множество C, содержащее все те элементы множества A, которых нет в множестве B. Например, если

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

то $C = A - B = \{1, 2\}$, где знак «–» (минус) обозначает операцию разности (вычитания) множеств. Очевидно, что разность множеств можно выразить через основные операции:

$$A - B = A \cap \bar{B}.$$

Симметрическая разность $A \oplus B$ — это новое множество C. В него входят все те элементы множества A, которых нет в множестве B, а также все те элементы множества B, которых нет в множестве A. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, то

$$C = A \oplus B = \{1, 2, 6, 7\},$$

где знак $\oplus$ обозначает симметрическую разность множеств. Как и разность множеств, симметрическая разность может быть выражена через основные операции:

$$A \oplus B = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B.$$

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A \cap B$, если

(БК) $A = \{b, c, d$ $B = \{c, d, e\}$; (ЦК) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$;

(МБМ) $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$; (БАР) $A = \{$март, май$\}$, $B = \{$май, июнь$\}$.

2. (ОТ)! Найдите элементы множеств $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$, если $X = \{3, 4, 5, 7\}$; $Y = \{5, 7, 8\}$; $Z = \{7, 8, 9\}$.

3. (КЕН)! На рис. 1.14 найдите элементы множеств: сначала $A \cap B$, затем $B \cap C$.

4. (АИМ). На рис. 1.14 найдите элементы множества $A \cup B \cap C$.

5. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите элементы множества $\bar{A}$, если

(ШУЛ) $A = \{3, 4\}$; (950) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; (ЛВВ) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

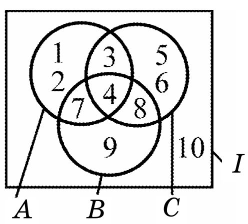


Рис. 1.14

6. (361). Найдите элементы множества $\bar{A}$, если A — множество всех простых чисел, не превышающих 7; $I = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

7. (А28). Найдите элементы множества $\overline{\overline{A}}$, если $A = \{1, 4, 7\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

8. Дано: $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$; $C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Найдите элементы множеств:

(ОВР) $A - B$; (КБК) $B - C$; (ПАС) $(A - C)$; (ВИЛ) $C - B$;
(ИВШ) $A \oplus B$; (ШЕТ) $B \oplus C$; (БОЛ) $(A \oplus C)$; (МЕК) $C \oplus B$.

1.8. Основные теоремы теории множеств

Теоремы де Моргана. Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

Теоремы (законы, правила) де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \tag{1.1}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.2}$$

Закон (1.1) формулируется следующим образом: дополнение объединения есть пересечение дополнений. Закон (1.2): дополнение пересечения есть объединение дополнений.

Теоремы де Моргана применимы не только к двум, но и к большему числу множеств. Например, в случае трех множеств A, B, C имеем:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}; \quad \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

При четырех множествах A, B, C, D:

$$\overline{A \cup B \cup C \cup D} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}; \quad \overline{A \cap B \cap C \cap D} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}.$$

Теорема поглощения. Теорема поглощения (частный случай закона дистрибутивности) имеет две формы записи:

$$A \cup A \cap B = A \text{ (дизъюнктивная форма)}; \tag{1.3}$$

$$A \cap (A \cup B) = A \text{ (конъюнктивная форма)}. \tag{1.4}$$

Теоремы поглощения дают возможность упрощать аналитические выражения, описывающие множества. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1. Пусть множество P задано формулой

$$P = A \cap B \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C \cap D.$$

Пересечение $A \cap B \cap C$ встречается в этом выражении два раза. Обозначим его

$$Q = A \cap B \cap C.$$

Тогда заданное множество P примет вид

$$P = A \cap B \cup Q \cup Q \cap D.$$

Согласно выражению (1.3) имеем: $Q \cup Q \cap D = Q$, следовательно,

$$P = A \cap B \cup Q = A \cap B \cup A \cap B \cap C.$$

Снова введем обозначение: $A \cap B = R$, тогда $P = R \cup R \cap C = R$.
В результате получаем окончательно $P = A \cap B$.

Рассмотрим еще один пример.

П р и м е р 2. Упростить выражение $S = P \cap \bar{Q} \cap (P \cap \bar{Q} \cup R)$.

Введем обозначение: $P \cap \bar{Q} = V$, тогда $S = V \cap (V \cup R)$.
Воспользовавшись формулой (1.4), получаем

$$S = V \cap (V \cup R) = V = P \cap \bar{Q}.$$

Теорема склеивания. Теорема склеивания также имеет две формы:

$$A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A \text{ (дизъюнктивная форма);} \tag{1.5}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \text{ (конъюнктивная форма).} \tag{1.6}$$

Теорема склеивания используется при упрощении аналитических выражений, описывающих множества. Например:

$$A \cap B \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C = A \cap C \cap (B \cup \bar{B}) \cup C \cap (B \cup \bar{B}) =$$
$$= A \cap C \cap I \cup C \cap I = A \cap C \cup C = C \cap (A \cup I) = C \cap I = C.$$

Упражнения

1. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите элементы множеств:

(ИНА) $\overline{A \cup B}$; (РОВ) $\overline{A \cap B}$; (УВД) $\overline{\bar{A} \cap B}$; (ТВВ) $\overline{\bar{A} \cup B}$;

2. Упростите выражения, если $\underline{A \subseteq B}$:

(861) $\overline{A \cup B}$; (ОИЗ) $\overline{A \cap B}$; (737) $\overline{\bar{A} \cup B}$; (РТК) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$; (438) $\overline{A \cup \bar{B}}$.

3. Упростите выражения. При самоконтроле знак $\cap$ не набирать, т.е. вместо $A \cap B$ надо набирать AB (лат.):

(ХСС) $A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{B}$; (539) $\bar{A} \cap B \cap C \cup \bar{A} \cap B$;
(ДИР) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A}$; (ОИО) $A \cap B \cap \bar{D} \cup \bar{D}$;
(АЧА) $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap C$; (ЖИВ) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{C}$.

4. Найдите элементы множеств:

(962) $A \cap B \cap C \cup A \cap C$, (НАЖ) $B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{C}$,

если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$; $D = \{2, 5, 6, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

5. Упростите выражения (лат.):

(АСС) $A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap D$; (438) $B \cap (\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap B)$;
(РВР) $B \cap C \cap D \cup C \cap D \cup A \cap C \cap D$; (ЕГО) $(\bar{A} \cup B) \cap B \cap (B \cup \bar{C})$.

6. Упростите выражения (лат):

(449) $A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}$; (У65) $\bar{A}\cap B\cup\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{B}$;

(В66) $A\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap B\cap C$; (ДАЧ) $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{B}$;

(9А2) $A\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cup\bar{A}\cap B$; (693) $\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap D\cup\bar{A}\cap B\cap C\cap D$.

7. При $A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 6, 7\}$, $C=\{2, 3, 6, 7\}$ найдите элементы множеств:

(ВВ) $A\cap B\cap C\cup B\cap C\cup B\cap\bar{C}$; (76) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\bar{C})$;

(221) $(A\cap B\cup C)\cap(A\cap B\cup\bar{C})$; (ТТ) $(A\cup\bar{B}\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)\cap B$,

8. Упростите выражения, если $A\subset B\subset C$:

(РИС) $A\cup B\cup A\cap C\cup\bar{A}\cap C$; (ЯГО) $(B\cap\bar{C}\cup\bar{B}\cap\bar{C})\cap A$.

(ЦК) $B\cap C\cup B\cap\bar{C}\cup A\cup\bar{C}$; (УВД) $(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup B)\cup(A\cap C)$.

1.9. Теоретико-множественные преобразования

Обычно под теоретико-множественными преобразованиями понимают выполнение таких операций над множествами, в результате которых получается новое аналитическое выражение, тождественно равное исходному, но отличающееся от него набором символов, их числом и др. Все подобные преобразования осуществляются на основе операций объединения и пересечения с применением теорем поглощения и склеивания.

Пример. Упростить формулу P для случая, когда $C\subset D$ и если $B=\varnothing$.

$$P=A\cap B\cup A\cap\bar{B}\cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Сначала упростим заданное выражение без учета условия $C\subset D$:

$$P=A\cap(B\cup\bar{B})\cup B\cap D\cup C\cap D=A\cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Найдем заданное выражение P при $C\subset D$:

$$P=A\cup B\cap D\cup C.$$

Найдем заданное выражение P при $B=\varnothing$ и $C\subset D$:

$$P=A\cup D\cap\varnothing\cup C=A\cup C.$$

Это и есть искомый результат упрощения.

Упражнения

1. Упростите выражения:

(556) $A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap B\cap C\cup C$; (ЦАМ) $B\cap\bar{C}\cup\bar{B}\cap\bar{C}\cup B\cap C$;

(УЭЛ) $A\cap C\cup A\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap C$; (ТИН) $\bar{A}\cap\bar{B}\cup A\cap B\cup\bar{A}\cap B$.

2. Упростите выражения, если $C=I$, $D=\varnothing$:

(УТТ) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$; (МКП) $A\cap C\cup\bar{B}\cap C\cup A\cap D$;

(ХТБ) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$; (826) $\bar{A}\cap(B\cup C\cup D)\cap B\cap C$;

(ШАВ) $(\bar{A}\cup B\cup C)\cap(C\cup D)$; (МИН) $(A\cup B\cup C)\cap(\bar{B}\cup D)$.

3. Даны множества:

$A=\{1, 3, 7\}$; $B=\{1, 2, 5, 7\}$; $C=\{1, 2, 4\}$; $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Найдите элементы множеств, заданных следующими аналитическими выражениями (сначала рекомендуется каждое аналитическое выражение упростить):

а) (ЕМА) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

б) (ЮКУ) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap B\cap C$;

в) (ПЛО)

$\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap B\cap C$;

г) (БУШ)

$\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap B\cap C$;

д) (А34) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap B\cap C$.

4. Найдите элементы множества P, если

$A=\{0, 2, 3, 7, 8\}$; $B=\{1, 3, 6, 7, 9\}$; $C=\{0, 1, 4, 7, 8, 9\}$; $I=\{0, 1, 2, ..., 9\}$.

1. (ЗЕР) $P=A\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cup B\cap C$. 10. (256) $P=B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B$.
2. (ЗАГ) $P=\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup\bar{A}\cap B$. 11. (ЗАЙ) $P=B\cap C\cup\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$.
3. (830) $P=B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$. 12. (ЛУР) $P=A\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{C}\cup B\cap\bar{C}$.
4. (039) $P=B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup\bar{A}\cap B$. 13. (977) $P=\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap B$.
5. (ЕЛО) $P=\bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{C}\cup A\cap B$. 14. (332) $P=B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}$.
6. (ВОВ) $P=\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{B}$. 15. (ЭГО) $P=B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup A\cap B$.
7. (ТОЧ) $P=\bar{B}\cap C\cup A\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap B$. 16. (154) $P=\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap B$.
8. (537) $P=B\cap C\cup\bar{A}\cap C\cup A\cap B$. 17. (296) $P=\bar{B}\cap C\cup\bar{A}\cap B\cup A\cap\bar{B}$.
9. (РИФ) $P=B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cup A\cap\bar{C}$. 18. (ВАН) $P=\bar{B}\cap\bar{C}\cup A\cap C\cup A\cap\bar{B}$.

1.10. Бесконечные множества

Существует два подхода к понятию бесконечности. Основой первого является актуальная бесконечность, второго — потенциальная. В первом случае бесконечность рассматривается как множество, содержащее бесконечно много элементов, но предполагается, что оно задано в готовом, сформированном виде и его можно рассматривать как некоторый объект. Именно так представлял себе бесконечное множество Г. Кантор. Потенциальная же бесконечность рассматривается не как нечто завершенное, а как процесс, у которого нет последнего шага, как процесс непрерывного увеличения числа элементов. Нам при дальнейшем изложении материала вполне достаточно представления о бесконечности как о множестве, число элементов которого больше любого наперед заданного числа.

В подразделе 1.1 сказано, что конечное множество в общем случае может быть задано двумя способами — прямым перечислением и описанием свойств его элементов. В случае бесконечных множеств прямое перечисление элементов исключено, поэтому задавать их можно только описанием признаков, характерных для элементов данного множества. Например:

$$A = \{x \mid x > 1,\ x \text{ — натуральное число, делящееся только на себя и на единицу}\}.$$

Согласно этой записи элементами множества A являются простые числа. Так как их количество не ограничено, то A — бесконечное множество.

Свойства конечных множеств хорошо согласуются с нашей интуицией и приобретенным опытом. Например, нам кажется совершенно очевидным, что всякое собственное подмножество множества A не является эквивалентным множеству A. В случае сомнений можно поставить «эксперимент» — взять множество A, для каждого его подмножества найти кардинальное число и сравнить его с числом $|A|$. Если не обнаружится ни одного случая равенства сравниваемых кардинальных чисел, то мы получим экспериментальное подтверждение того, что среди подмножеств данного множества A нет ни одного эквивалентного ему подмножества.

Иное дело, когда мы переходим к бесконечным множествам. Никакого эксперимента здесь поставить не удастся. При изучении бесконечных множеств нашим инструментом могут служить только логически правильные рассуждения, и если результаты этих рассуждений придут в противоречие со здравым смыслом, то нам придется выполнить определенную психологическую работу, принимая истинным то, что интуитивно кажется ложным.

1.11. Сравнение бесконечных множеств

В случае сравнения конечных множеств A и B достаточно знать их кардинальные числа. Если кардинальные числа найти не удается, то можно выяснить, нет ли между элементами множеств A и B взаимно однозначного соответствия. Например, какое множество больше — множество A кресел в зале театра или множество B зрителей в этом зале? В данном случае нет необходимости находить числа $|A|$ и $|B|$. Если все кресла заняты, в проходах нет ни одного зрителя и каждое кресло занимает лишь один зритель, то ясно, что между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, а это доказывает, что $|A| = |B|$, т.е. множества A и B эквивалентны.

Так как понятие взаимно однозначного соответствия позволяет определить, являются ли заданные множества эквивалентными, то Г. Кантор предложил распространить это понятие и на бесконечные множества: если найдется способ показать, что каждому элементу бесконечного множества A соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества B и каждому элементу множества B соответствует вполне определенный элемент бесконечного множества A, то бесконечные множества A и B являются эквивалентными. Если же взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B не установлено, то нет оснований считать, что эти множества эквивалентны. Например, пусть A — множество всех натуральных чисел, делящихся без остатка на 50, B — множество всех четных натуральных чисел. Эквивалентны ли эти множества?

Представим множества A и B в виде (напомним, что число 0 не является натуральным):

$$A = \{50, 100, 150, 200, 250, ...\}; \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}.$$

Из этих записей видно, что множество A составляет часть элементов множества B, т.е. является его подмножеством: $A \subset B$.

Но с другой стороны, если элементы множеств A и B записать в порядке возрастания, то эквивалентность множеств устанавливается очень легко, так как между их элементами хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{llllllll} A = & \{50, & 100, & 150, & 200, & 250, & \ldots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = & \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \ldots\}. \end{array}$$

Элементу $2 \in B$ соответствует элемент $50 \in A$, элементу $4 \in B$ соответствует элемент $100 \in A$, элементу $6 \in B$ соответствует элемент $150 \in A$ и т.д. Следовательно, множества A и B эквивалентны. Говоря языком конечных множеств, четных натуральных чисел ровно столько же, сколько натуральных чисел, делящихся без остатка на 50. Таким образом, положение «часть меньше целого», справедливое для конечных множеств, в случае бесконечных множеств перестает быть безусловно верным.

Важной характеристикой конечного множества является понятие кардинального числа. Аналогичную характеристику Г. Кантор предложил и для бесконечных множеств, введя понятие мощности множества. Представление о содержании этого понятия можно получить из следующего утверждения. Два бесконечных множества A и B имеют одну и ту же мощность, если между их элементами существует взаимно однозначное соответствие. Очевидно, что для конечных множеств кардинальное число и мощность — одно и то же.

Рассмотрим три примера.

Пример 1. Являются ли эквивалентными множество A простых чисел и множество B нечетных чисел?

Запишем в порядке возрастания простые числа и каждому из них поставим в соответствие элемент из множества B следующим образом:

$$\begin{array}{llllllll} A = & \{2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & \ldots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = & \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 13, & \ldots\}, \end{array}$$

откуда видно, что между элементами множеств A и B существует взаимно однозначное соответствие и, следовательно, бесконечные множества A и B эквивалентны.

Пример 2. Пусть дано: $N = \{x \mid x$ — натуральное число$\}$;

$M = \{x \mid x > 8,\ x$ — натуральное число$\}$.

Являются ли эти множества эквивалентными?

В множестве M отсутствуют семь элементов, которые есть в множестве N. Остальные числа 8, 9, 10, 11, ... являются элементами обоих множеств. Следовательно, $M \subset N$. Чтобы выяснить, эквивалентны ли эти множества, запишем их элементы один под другим:

$$\begin{array}{llllll} N = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots\}; \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ M = & \{8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \ldots\}. \end{array}$$

Между элементами хорошо просматривается взаимно однозначное соответствие, следовательно, множества A и B равномощны, т.е. эквивалентны.

Пример 3. Найти элементы множества $N \cap \bar{M}$, где M и N — множества, указанные в примере 1.

Очевидно, что множество $N \cap \bar{M}$ образуют те числа множества N, которые отсутствуют в множестве M, т.е.

$$N \cap \bar{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Упражнения

1. Укажите элементы множества $A \cap \bar{B}$, если

(ЯШО) $A = \{x \mid x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $B = \{x \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;

(ЗАМ) $A = \{x \mid x > 28,\ x$ — натуральное число$\}$, $B = \{x \mid x \geq 30,$ x — натуральное число$\}$;

(ТОН) $A = \{x \mid x = n^2,\ n$ — натуральное число$\}$, $B = \{x \mid x$ — натуральное число, $x > 9\}$.

2. (КИЛ) Укажите элементы множества $A \cap B$, если

$A = \{x \mid x > 10,\ x$ — натуральное число$\}$, $B = \{x \mid x \leq 14,\ x$ — натуральное число$\}$.

3. (236) Укажите номера множеств, являющихся бесконечными:

1) $A = \{x \mid x < 100,\ x$ — натуральное число$\}$;

2) $B = \{x \mid x < 100,\ x$ — целое отрицательное число$\}$;

3) $C = \{x \mid 20 < x \le 120,\ x$ — целое неотрицательное число$\}$;

4) $D = \{x \mid x = n^n,\ n$ — натуральное число$\}$;

5) $E = \{x \mid x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2\}$;

6) $F = \{x \mid x$ — число, при котором выполняется равенство $x^2 = 2x\}$;

7) $K = \{x \mid x = n^{1000},\ n$ — натуральное число, $n < 1000\}$.

4. (303) В упр. 3 укажите множества, эквивалентные множеству $\{1, 2, ..., 100\}$.

5. (723) Укажите номера множеств, эквивалентных множеству натуральных чисел (см. упр. 3):

1) $A \cup B \cup K$; 3) $C \cup F \cup K$; 5) $D \cap E \cup B$; 7) $F \cup K \cup A \cap D$;

2) $B \cup E \cup F$; 4) $C \cap D \cap F$; 6) $C \cap D \cup E \cap F$; 8) $D \cap E \cup C$.

6. (ОЙР) Найдите элементы множества $A \cap D$ (см. упр. 3).

7. (ОЯР) Найдите кардинальное число множества $A \cap E$ (см. упр. 3).

1.12. Счетные множества

Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется счетным. Согласно этому определению всякое бесконечное множество является счетным, если найдется способ показать, как нумеровать его элементы.

Мощность счетного множества обозначается символом $\aleph_0$, читается: алеф нуль (ударение на букву *а*). Алеф — первая буква финикийского (древнесемитского) алфавита. В подразд. 1.1 сказано, что кардинальное число конечного множества A обозначается $|A|$. Это обозначение будем использовать и в случае бесконечных множеств. Например, если E — счетное множество, то $|E| = \aleph_0$.

Приведем некоторые теоремы о счетных множествах.

Теорема 1. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Докажем это утверждение. Пусть задано некоторое бесконечное множество E. Выберем среди его элементов, например, элемент e_1. В множестве E останется еще бесконечно много элементов. Выберем из них элемент e_2. Останется по-прежнему бесконечно много элементов. Выберем элемент e_3 и т.д. до бесконечности. Выбранные элементы образуют подмножество B, причем это подмножество счетно, поскольку, выбирая его элементы, мы тем самым их нумеруем.

Таким образом, для всякого бесконечного множества справедливо: $B \subset E$, где B — счетное подмножество, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Для доказательства теоремы запишем натуральный ряд и каждому натуральному числу поставим во взаимно однозначное соответствие элементы заданного счетного множества K. Отметим какимлибо способом элементы бесконечного множества $T \subset K$. Очевидно, что отмеченные элементы можно пронумеровать, следовательно, множество $T \subset K$ является счетным, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Множество всех целых чисел счетно.

Чтобы доказать это утверждение, целые числа расположим следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots \end{array}$$

В этой матрице бесконечное число колонок. Нумеруя ее элементы по колонкам сверху вниз и переходя от колонки к колонке слева направо, мы каждому целому числу поставим во взаимно однозначное соответствие натуральное число, что и доказывает теорему.

Теорема 4. Объединение счетного множества A и конечного множества B счетно.

Для доказательства достаточно пронумеровать элементы множества B, а остальные натуральные числа поставить во взаимно однозначное соответствие элементам счетного множества.

Теорема 5. Объединение конечного множества счетных множеств счетно.

Пусть дано конечное множество $\{A, B, ..., L\}$, где $A, B, ..., L$ — счетные множества. Найдем их объединение: $Q = A \cup B \cup \ldots \cup L$.

Запишем элементы множеств $A, B, ..., L$ один под другим:

$$\begin{array}{lccccc} A = & \{a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots\}; \\ B = & \{b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \ldots\}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ L = & \{l_1, & l_2, & l_3, & l_4, & \ldots\}. \end{array}$$

Получилась матрица с конечным числом строк и бесконечным числом колонок. Пронумеруем элементы первой колонки, затем продолжим нумерацию элементов второй колонки, третьей и т.д. до бесконечности. При такой нумерации каждый элемент множества Q получит порядковый номер, следовательно, множество Q счетно, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Объединение счетного множества счетных множеств A, B, C, ... счетно.

Запишем элементы множеств A, B, C, ... в виде матрицы (рис. 15), после чего элементы множества $Z = A \cup B \cup C \cup \ldots$ пронумеруем методом треугольника так, как показано на рис. 1.15.

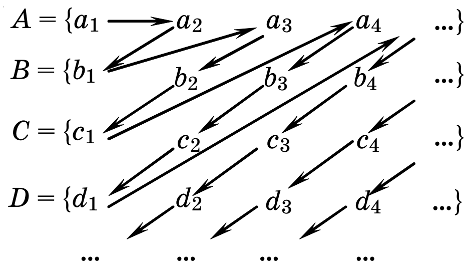


Рис. 1.15

При таком обходе элементов матрицы в нумерацию будут вовлекаться элементы все новых и новых множеств, и рано или поздно каждый элемент множества Z получит свой порядковый номер, что и доказывает теорему.

Теорема 6 является, вероятно, самой впечатляющей из всех рассмотренных. Трудно согласиться с тем, что если взять бесконечно много элементов множества A, добавить к ним бесконечно много элементов множества B, затем туда же включить бесконечно много элементов множества C и так бесконечно много раз, то в результате получится всего лишь счетное множество.

Получается, что мощность счетного множества нисколько не изменится, если количество его элементов увеличить в бесконечное число раз.

Упражнения

1. (ЛКС). Укажите номера множеств, мощность которых равна $\aleph_0$:

1) множество всех простых чисел;
2) $\{x \mid x < 1000,\ x$ — целое число$\}$;
3) множество атомов, из которых состоит Солнце;
4) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[3]{1331}$;
5) $\{x \mid x < 10^{1000},\ x$ — натуральное число$\}$;
6) множество натуральных чисел, без остатка делящихся на $\sqrt[4]{1441}$;
7) $\{x \mid x > 1000^{1000},\ x$ — натуральное число$\}$.

2. (ЖАО). Укажите номера конечных множеств в предыдущем упражнении.

3. (УШС). Укажите элементы множества $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, если множества A, B, C являются счетными и имеют вид $A = \{1, 2, 3, ...\}$; $B = \{6, 7, 8, ...\}$; $C = \{11, 12, 13, ...\}$.

4. (96). Укажите элементы множества $A \cap B \cap \overline{C}$, где A, B, C — множества, указанные в предыдущем упражнении.

5. (Е46). Найдите элементы множества $\{x \mid x$ — число, без остатка делящееся на 23, x — простое число$\}$.

1.13. Несчетные множества

Если A — конечное множество, то $|A| < |B(A)|$, т.е. булеан всякого конечного множества A содержит больше элементов, чем множество A, так как

$$|B(A)| = 2^{|A|}.$$

Всякое бесконечное множество также имеет подмножества, и можно говорить о мощности его булеана. Пусть дано счетное множество E. Чтобы найти все его подмножества, поставим в соответствие каждому элементу множества E двоичный разряд. Тогда всякому подмножеству множества E будет соответствовать двоичное число бесконечной длины. Пусть единица в записи двоичного числа обозначает вхождение в подмножество соответствующего элемента $e \in E$, а нуль говорит о том, что соответствующий элемент в подмножество не входит. Тогда по аналогии с конечными множествами можно утверждать, что мощность булеана $B(E)$, т.е. множество всех двоичных чисел бесконечной длины, представится кардинальным числом

$$|B(E)| = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Теорема 1. Мощность булеана бесконечного множества E превышает мощность множества E. (Доказательство можно найти в [29].)

Если E — счетное множество, то согласно приведенной теореме

$$|B(E)| > |E|,$$

т.е. $\aleph_1 > \aleph_0$.

Множество $B(E)$ несчетно, и его мощность равна мощности континуума (лат. *continuum* — непрерывное). Примером континуума может служить множество точек отрезка.

Несчетным является и множество всех действительных чисел x, где $0 \le x < 1$. (Напомним, что действительным числом называется всякая десятичная дробь.) Для доказательства этого сначала допустим, что действительные числа можно пронумеровать. Запишем одна под другой бесконечные десятичные дроби:

$$\begin{array}{llllll} 0, & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ 0, & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\ 0, & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\ 0, & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \end{array}$$

Получили матрицу, содержащую счетное множество строк, в каждой из которых бесконечное число десятичных цифр. (Для строгости изложения десятичные цифры следовало бы заменить символами Кенига [29, с. 48], однако для простоты мы пожертвуем этой строгостью.) Допустим, что в матрице нет ни одной пары равных между собой чисел. Все ли действительные числа окажутся в матрице? Нет, не все. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся диагональным методом, разработанным Г. Кантором, и найдем число, которое отсутствует в матрице, т.е. оказалось не занумерованным. Суть метода Г. Кантора состоит в следующем. Если в первом числе первая после запятой цифра (цифра a_1) не равна, например, 3, то в искомое число после запятой записываем цифру 3. Если же $a_1 = 3$, то записываем, допустим, 2. Переходим ко второму числу матрицы. Если $b_2 \neq 3$, то записываем на втором месте искомого числа цифру 3. Если $b_2 = 3$, то записываем 2, и т.д. Очевидно, что получившееся число отличается от первого числа первой цифрой (после запятой), от второго — второй цифрой, от третьего — третьей и т.д. Таким образом, полученное число отсутствует в списке, но принадлежит множеству действительных чисел интервала $0 \leq x < 1$.

Полученное число не является единственным, отсутствующим в списке. Достаточно вместо цифр 3 и 2 взять другие, и мы получим еще одно число.

Булеан $B(E)$ и множество всех действительных чисел интервала $0 \leq x < 1$ эквивалентны. Они являются несчетными и оба характеризуются кардинальным числом $\aleph_1$. Такие множества условимся называть $\aleph_1$-множествами.

Мощность континуума — не самая большая мощность среди бесконечных множеств. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся двоичными числами так же, как и в случае счетных множеств. Поставим в соответствие каждому элементу $\aleph_1$-множества двоичный разряд. Если единица обозначает вхождение элемента в подмножество, а нуль — отсутствие в подмножестве данного элемента, то каждому двоичному числу будет соответствовать некоторое подмножество

$\aleph_1$-множества. Мощность множества всех таких подмножеств обозначим буквой $\aleph_2$:

$$\aleph_2 = 2^{\aleph_1},$$

откуда следует, что мощность булеана $\aleph_1$-множества (т.е. мощность множества всех подмножеств $\aleph_1$-множества) превышает мощность $\aleph_1$-множества: $\aleph_2 > \aleph_1$.

Точно так же можно утверждать, что

$$\aleph_3 = 2^{\aleph_2},\ \aleph_4 = 2^{\aleph_3},\ \aleph_5 = 2^{\aleph_4},\ \ldots,\ \aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}},\ \ldots,$$

откуда следует, что множества с наибольшей мощностью не существует.

Приведем без доказательства еще одну теорему о несчетных множествах.

Теорема 2. Объединение множества мощности континуума и счетного множества имеет мощность континуума.

Упражнения

1. (ВУК). Какие выражения являются кардинальными числами несчетных множеств:

1) $2^{\aleph_0}$; 3) $680^{\aleph_0}$; 5) $\aleph_1^{200}$; 7) $\left(2^{200}\right)^{\aleph_0}$;

2) $\aleph_1^2$; 4) $\aleph_0^{200}$; 6) ${\aleph_0}^{\aleph_0}$; 8) $\aleph_0^3$?

2. (178). Укажите множества мощности континуума:

1) объединение счетного и несчетного множеств;

2) объединение счетных множеств, множество которых счетно;

3) разность несчетного и счетного множеств;

4) $A - B$, где A и B — несчетные множества;

5) $A \cup B$, где A — счетное множество, B — множество мощности континуума;

6) $A - B$, где A — несчетное множество, B — счетное множество;

7) $A - B$, где $|A| = \aleph_1$, $|B| = \aleph_0$.

3. (279). Укажите номера множеств, мощность которых превышает $\aleph_3$:

1) $A \cup B$, где $|A| = \aleph_3$; $|B| = \aleph_0$;

2) $A \cup B$, где $|A| = \aleph_5$; $|B| = \aleph_8$;

3) $A - B$, где $|A| = \aleph_6$; $|B| = \aleph_4$;

4) $A \cup B \cup C$, где $|A| = \aleph_0$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

5) $A \cup B \cup C$, где $|A| = \aleph_1$; $|B| = 2^{|A|}$; $|C| = 2^{|B|}$;

6) $(A - B) \cup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{|A|}$;

7) $A \cup B \cup C$, где $|A| = |B| = \aleph_2$; $|C| = 2^{2^{|B|}}$.

1.14. Гипотеза континуума

В 1878 г. Г. Кантор высказал предположение о том, что всякое множество действительных чисел либо конечно, либо счетно, либо несчетно (т.е. эквивалентно множеству всех действительных чисел). Оставим в стороне конечные множества, тогда по Г. Кантору всякое бесконечное десятичное число принадлежит либо счетному множеству N, либо несчетному множеству M с кардинальным числом

$$|M| = \aleph_1 = 2^{|N|} = 2^{\aleph_0}.$$

Несчетное множество M с большей мощностью получено по аналогии с конечными множествами путем нахождения булеана счетного множества N. Очень уж непохожи свойства конечных и бесконечных множеств, поэтому вполне естественно задать вопрос: верно ли, что мощность множества всех подмножеств счетного множества есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел? Это и есть знаменитая гипотеза континуума.

Несмотря на простоту формулировки, эта гипотеза десятки лет оставалась удивительно неподатливой, хотя над ней работали лучшие математики мира. В 1900 г. на втором Международном конгрессе в Париже немецкий математик профессор Геттингенского университета Давид Гильберт (1862–1943) опубликовал обращение к математикам мира, в котором сформулировал более двух десятков наиболее важных и не решенных в то время проблем. В этом списке проблему (гипотезу) континуума Д. Гильберт поставил на первое место. До 30-х годов прошлого столетия все попытки решить первую проблему Гильберта оканчивались нулевым результатом. Лишь в 1938 г. Курт Гедель (1906–1978) — австрийский логик и математик — показал, что континуум гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств.

Более существенный результат получил в 1966 г. профессор Стэнфордского университета (США, штат Иллинойс) П. Коэн. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств. Согласно его выводам можно считать, что между счетным множеством и множеством всех его подмножеств существует промежуточное множество, но можно считать, что его не существует. В любом случае это не противоречит всем остальным аксиомам теории множеств. Здесь можно провести аналогию с пятым постулатом о параллельных прямых. Его можно принять, можно и отвергнуть. В любом случае он не противоречит всем остальным аксиомам геометрии.

Следует отметить, что не все математики одинаково формулируют гипотезу континуума. Например, согласно [29, с. 52] гипотезой континуума называют утверждение

$$\aleph_1 = 2^{(\aleph_0)} = C,$$

где C — мощность континуума. Иными словами эту гипотезу можно сформулировать так: между элементами булеана счетного множества и точками некоторого интервала, например

$$0 \le x < 1,$$

существует взаимно однозначное соответствие.

1.15. Трансцендентные числа

Множество всех действительных чисел делится на два непересекающихся класса. Первый класс образуют алгебраические числа, второй — трансцендентные. Алгебраическими называются числа, которые являются корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

А что такое трансцендентные числа? В [12, с. 616] дается такое определение: «Трансцендентные числа (лат. *transcendens* — выходящий за пределы) — числа, которые не могут быть корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами; например, число $\pi = 3{,}14159...$».

Понятие трансцендентного числа в этой цитате поясняется единственным примером — числом π. В [27, с. 1342] приводится число π и еще два примера: «Трансцендентными числами являются: число $\pi = 3{,}14159...$; десятичный логарифм любого целого числа, не изображаемого единицей с нулями; число $e = 2{,}71828$ и др.». Складывается впечатление, что трансцендентные числа представляют собой величайшую редкость в множестве действительных чисел по отношению к алгебраическим (им даже имена дают!). На самом же деле все наоборот. Если E — множество всех действительных чисел, R — множество алгебраических чисел, то $E \cap \bar{R}$ — множество трансцендентных чисел. Но множество R счетно, следовательно, множество $E \cap \bar{R}$, т.е. множество трансцендентных чисел, несчетно. Это рассуждения Г. Кантора. Ими он доказал существование трансцендентных чисел, не приводя ни одного их примера, что в свое время (1873 г.) произвело на математиков мира большое впечатление.

1.16. Об эквивалентности множеств точек геометрических объектов

Выше показано, что множество действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$ несчетно. Так как любому числу из этого интервала соответствует точка на отрезке [0; 1) числовой оси, то множество точек отрезка [0; 1) эквивалентно множеству всех действительных чисел в интервале $0 \le x < 1$.

Пусть даны два отрезка AB и CD различной длины. Эквивалентны ли множества их точек? Интуиция нам подсказывает, что в отрезке длиной, равной, например, одному сантиметру, содержится гораздо меньше точек по сравнению с отрезком, допустим, метровой длины. Кантор предложил очень остроумный способ доказательства того, что между точками отрезков различной длины существует взаимно однозначное соответствие.

Расположим отрезки AB и CD так, как показано на рис. 1.16.

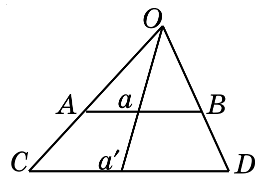


Рис. 1.16

Проведем из точки O прямую, пересекающую оба отрезка. Получим точки a и a'. Если сместить прямую, выходящую из точки O, то получим новую пару точек b и b' (на рис. 1.16 они не показаны). При этом если точка b не совпадает с точкой a, то не совпадают и точки b' и a'. Таким способом любой точке отрезка AB можно однозначно поставить в соответствие точку отрезка CD и наоборот: всякой точке отрезка CD однозначно соответствует точка отрезка AB. Следовательно, множества точек отрезков AB и CD эквивалентны, а это значит, что (говоря языком конечных множеств) число точек на отрезке, равном расстоянию от Земли до Солнца, точно такое же, что и на отрезке, равном, например, радиусу атомного ядра. Подобным образом Г. Кантор доказал, что множество точек конечного отрезка AB и множество точек всей числовой оси эквивалентны.

Следующий результат Г. Кантора является еще более удивительным. Он доказал, что множество точек отрезка эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого равна этому отрезку. Вообще-то Г. Кантор искал доказательство того, что мощность множества точек квадрата не эквивалентна множеству точек отрезка, и когда нашел доказательство прямо противоположного утверждения, то был настолько изумлен своим открытием, что в письме математику Р. Дедекинду писал: «Я вижу это, но не верю этому».

Принцип доказательства Г. Кантора состоит в следующем. Проведем оси декартовых координат x и y и отложим на обеих координатах отрезки [0; 1). Тогда каждая точка квадрата может быть представлена двумя бесконечными десятичными дробями:

$$x_A = 0,a_1a_2a_3a_4\ldots;$$
$$y_A = 0,b_1b_2b_3b_4\ldots$$

Образуем на их основе новую дробь, вставив цифры числа y_A между цифрами числа x_A: $V_A = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$

Очевидно, что число V_A принадлежит отрезку [0; 1).

Рассмотренным способом каждой точке квадрата можно поставить в однозначное соответствие определенную точку отрезка [0; 1). Если же взять какую-нибудь точку отрезка, то, представив соответствующую ей десятичную дробь в виде чисел x_A и y_A, мы найдем точку квадрата, находящуюся в однозначном соответствии с заданной точкой отрезка.

Таким образом, множество точек отрезка [0; 1) эквивалентно множеству точек квадрата, сторона которого совпадает с заданным отрезком.

Пользуясь приемом Г. Кантора, нетрудно убедиться в следующем:

а) множество точек любого конечного отрезка эквивалентно множеству точек куба, ребро которого равно данному отрезку. Для доказательства этого достаточно к числам x_A и y_A добавить число z_A (третья координата) и так же, как и в случае квадрата, найти число V_A, принадлежащее отрезку [0; 1). Аналогичное утверждение справедливо и для четырехмерного пространства, и вообще n-мерного;

б) множество точек отрезка длиной в 1 микрон эквивалентно множеству точек куба, длина ребра которого равна расстоянию от Земли до Полярной звезды (сначала множество точек микронного отрезка отобразим на ребро куба, а после этого — на весь куб);

в) множество точек микронного отрезка эквивалентно множеству точек не только трехмерного бесконечного мирового пространства (Вселенной), но и многомерного.

Подобных утверждений можно доказать сколько угодно.

1.17. Числовые множества

Как уже отмечалось, элементами множества могут быть любые объекты, числовые и нечисловые. Здесь же мы ограничимся классом числовых множеств.

Прежде всего выделим множество R всех действительных чисел. Действительным числом называется всякая десятичная дробь. Множество R содержит положительные и отрицательные, десятичные и обыкновенные дроби и все целые числа, поскольку любое целое число можно представить в виде десятичной дроби, если правее запятой записывать только нули.

Подмножествами множества R являются:

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех целых чисел;

Q — множество рациональных чисел (лат. *rationalis* — разумный, целесообразный, обоснованный). В него входят все периодические десятичные дроби. Любое рациональное число можно представить как отношение двух целых чисел m/n, где $n \neq 0$.

Все числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными (лат. *irrationalis* — неразумный), например

$$\pi^3, \sqrt{31}, \ln 17, e^3, e^{1/3}$$

и так далее, поскольку ни одно из них невозможно представить в виде обыкновенной дроби, у которой и числитель и знаменатель — целые числа, положительные или отрицательные.

Геометрически действительные числа удобно представлять точками числовой оси, если выбрать единицу масштаба. Расставим на числовой оси точки, например, так, чтобы расстояние между любыми соседними точками было равно 1 сантиметру. Одну точку примем за начало координат. Это точка номер 0. Пронумеруем точки справа от нуля. Получим множество N. Пронумеруем точки слева от нуля. Это будут те же номера, но со знаками минус, то есть получим отрицательные числа. Все номера, положительные и отрицательные, вместе с числом 0 образуют множество Z. Остальным точкам числовой оси соответствуют десятичные дроби, у которых справа от запятой имеется хотя бы одна цифра, отличная от нуля. При таком моделировании действительных чисел имеет место взаимно однозначное соответствие между множеством R и множеством всех точек числовой оси.

В дальнейшем будут использоваться следующие типы числовых множеств:

а) множество X чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a \leq x \leq b, \text{ где } x \in R,$$

которое называется закрытым интервалом (сегментом, отрезком) и обозначается $[a, b]$, где a и b — границы отрезка, квадратные скобки говорят о том, что $a, b \in X$;

б) множество X чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a \leq x < b,$$

которое называется полуинтервалом (полуоткрытым интервалом) и обозначается $[a, b)$, круглая скобка говорит о том, что $b \notin X$;

в) множество X чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a < x \leq b,$$

также полуинтервал, обозначается $(a, b]$, где круглая скобка говорит о том, что $a \notin X$;

г) множество X чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a < x < b,$$

что обозначает открытый интервал.

Кроме этих четырех типов множеств будем рассматривать ограниченные и неограниченные числовые множества. Пусть множество

$A \subset R$ задано отрезком $[a, b]$ на числовой оси. Выберем на той же оси, но вне этого отрезка точку c. Если $b \le c$, то число c называется верхней границей множества A. Если $c \le a$, то число c называется нижней границей множества A. Очевидно, что обе границы определены неоднозначно. Для устранения неоднозначности введены понятия точной верхней границы и точной нижней границы.

Наименьшая из всех верхних границ множества A называется точной верхней границей и обозначается $\sup A$, читается: супремум A (лат. *supremus* — высший). Наибольшая из нижних границ множества A называется точной нижней границей и обозначается $\inf A$, читается: инфимум A (лат. *infimum* — наинизшее).

Для обозначения неограниченных числовых множеств дополним R знаками ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Если множество A не ограничено сверху, то полагают

$$\sup A = +\infty.$$

Если же оно не ограничено снизу, то принимают

$$\inf A = -\infty.$$

Символ ∞ (без знаков) используют в тех случаях, когда множество не ограничено ни сверху, ни снизу.

С символами ∞, $+\infty$, $-\infty$ нельзя обращаться как с числами. Арифметические операции над ними определены следующими соотношениями ($a \in R$):

$a \pm (+\infty) = \pm\infty$; $a + (-\infty) = -\infty$; $a - (+\infty) = -\infty$;

$a \cdot (+\infty) = +\infty$ при $a > 0$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

$a \cdot (-\infty) = +\infty$ при $a < 0$; $a \cdot (-\infty) = -\infty$ при $a > 0$;

$a \cdot (+\infty) = -\infty$ при $a < 0$;

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$; $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;

$\infty / a = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $a/(+\infty) = a/(-\infty) = 0$.

Операции $(\pm\infty) - (\pm\infty)$; $(\pm\infty)/(\pm\infty)$; $0 \cdot (\pm\infty)$ не определены.

Символами $+\infty$ и $-\infty$ обозначают неограниченные промежутки. Если $x \in R$, то

$[a, +\infty) = \{x \mid x \ge a\}$; $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$; $(-\infty, a] = \{x \mid x \le a\}$;
$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$; $(-\infty, +\infty) = R$.

Упражнения

1. Укажите номера верных выражений:

а) (ИАФ) 1) $N \subset Q$, 2) $\pi/2 \in R$, 3) $2\pi \in Q$, 4) $0{,}333... \in Q$, 5) $-2 \in Z \cap \bar{N}$, 6) $1/3 \in R \cap \bar{Q}$, 7) $R = Z \cup Q \cup N$, 8) $R = Q \cup Z \cup \bar{Q}$;

б) (АКК) 1) $N \subset Z$, 2) $-4 \in Q$, 3) $\lg 100 \in N$, 4) $4 \in \bar{N} \cap Z$, 5) $0{,}81 \in Q \cap \bar{Z}$, 6) $14 \in Z \cap \bar{N}$, 7) $R = N \cup Z \cup \bar{N}$, 8) $0 \in Z \cap \bar{N}$;

в) (ПАТ) 1) $4\pi \in R \cap \bar{Q}$, 2) $0 \subset N$, 3) $3{,}14 \in \bar{Q} \cap R$, 4) $0 \in Q$, 5) $0 \in \bar{R}$, 6) $R \cap N = N$, 7) $Q \subset R$, 8) $Z \subset R$.

2. (НУМ). Укажите верные равенства:

1) $(-\infty)^2 = +\infty$;	4) $(-\infty)^3 - (-\infty)^2 = \infty$;	7) $0 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = 0$;
2) $2(-\infty) + (+\infty) = -\infty$;	5) $3 \cdot \infty - \infty = 2 \cdot \infty$;	8) $(+\infty)^3 \cdot (-\infty)^2 = +\infty$;
3) $(-\infty)^2 - (-\infty)^3 = \infty$;	6) $(-\infty)/(-2) = +\infty$;	9) $(+\infty)^3/(-\infty)^2 = +\infty$.

1.18. Множество комплексных чисел

Начнем с примера. Найдем корни уравнения

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Дискриминант его отрицателен. Следовательно, как известно из школьного курса алгебры, это уравнение не имеет решения, то есть не найдется ни одного действительного числа, которое в результате подстановки его вместо переменной x обратило бы левую часть уравнения в нуль. Если все же найти корни уравнения по известным правилам, то получим:

$$x_1 = 1 + 2\sqrt{-1};\;\; x_2 = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения x_1 и x_2 также являются корнями заданного уравнения. Для этого достаточно подставить их вместо x и выполнить необходимые преобразования. Проверим, например, первый корень:

$$\left(1+2\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1+2\sqrt{-1}\right) + 5 = 1 + 4\sqrt{-1} - 4 - 2 - 4\sqrt{-1} + 5 = 0.$$

Тот же результат получится, если вместо x подставить второй корень.

Какое бы мы ни взяли квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом, всегда будут получаться корни в виде

$$x_1 = a + b\sqrt{-1},\;\; x_2 = a - b\sqrt{-1},$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Итальянский математик, философ и врач Джероламо Кардано (1506–1576) в 1545 г. предложил выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$ считать числами новой природы и производить действия над ними по правилам обычной алгебры. Он называл их «чисто отрицательными», «софистически отрицательными», не видел им применения и считал их бесполезными, поскольку по его представлениям они не годились ни для каких измерений. В 1637 г. французский математик и философ Р. Декарт ввел для них специальное название: мнимые числа. В 1777 г. Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимая единица), то есть по Эйлеру $i=\sqrt{-1}$. Благодаря немецкому математику К. Гауссу (1777–1855) символ i вошел во всеобщее употребление в математической среде [26, с. 145]. И с тех пор мнимые числа, получившие в дальнейшем название комплексных, стали записывать в виде $a+bi$, где a и b — действительные числа. Это алгебраическая форма комплексного числа.

Следует отметить, что название «мнимые числа» не очень удачно, так как слово «мнимый» обозначает «воображаемый, кажущийся». Применительно к комплексным числам такое толкование слова «мнимый» может вызвать сомнение в их существовании [11, с. 10]. На самом же деле комплексные числа являются не менее реальными, чем действительные. Однако термин «мнимые числа» прижился, давно используется в математической литературе, и нам ничего не остается, как принять к сведению, что слово «мнимый» в математике обозначает квадратный корень из отрицательного числа, а не «воображаемый, кажущийся».

Число a называется действительной частью комплексного числа $c=a+bi$ и обозначается $\operatorname{Re} c$. Число b называется мнимой частью и обозначается $\operatorname{Im} c$.

Для комплексных чисел приняты следующие равенства:

$$a+0\cdot i=a;\ 0+b\cdot i=b\cdot i;\ 1\cdot i=i;\ (-1)\cdot i=-i;\ i\cdot i=i^2=-1.$$

Два комплексных числа $c_1=a_1+b_1i$ и $c_2=a_2+b_2i$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то числа называются неравными. Выражения $c_1\ge c_2$ и $c_1\le c_2$ не имеют смысла, то есть множество комплексных чисел не является упорядоченным.

Если числа c_1 и c_2 отличаются только знаком мнимой части, то они называются комплексно-сопряженными. Например, $3+5i$ и $3-5i$. Заметим, что в результате решения квадратного уравнения, дискриминант которого является отрицательным, всегда получаются комплексно-сопряженные числа. Если c — комплексное число, то соответствующее комплексно-сопряженное число будем обозначать символом $\overline{c}$.

Сложение и вычитание комплексных чисел определено следующим образом:

$$c_1+c_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;\ c_1-c_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

Пример 1. Если $c_1=3+6i$ и $c_2=6+4i$, то $c_1+c_2=9+10i$.

Умножение комплексных чисел выполняется по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой i^2 числом -1:

$$c_1c_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i.$$

Пример 2. Найти произведение комплексных чисел из предыдущего примера.

$$c_1 c_2 = (3+6i)(6+4i) = 18 + 12i + 36i - 24 = -6 + 48i.$$

Если сомножителями являются комплексно-сопряженные числа, то их произведение всегда является действительным числом. Для доказательства этого найдем произведение чисел $c = a + bi$ и $\overline{c} = a - bi$:

$$c\overline{c} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2.$$

Чтобы найти частное комплексных чисел c_1 и c_2, достаточно найти комплексно-сопряженное число $\overline{c}_2$ (для знаменателя), умножить числитель и знаменатель на $\overline{c}_2$ и выделить действительную и мнимую части.

Пример 3. Найти c_1/c_2, где $c_1 = -2 + 5i$, $c_2 = 4 + 6i$.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2+5i}{4+6i} = \frac{(-2+5i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{-8+12i+20i+30}{16+36} = \frac{22+32i}{52} = \frac{11}{26} + \frac{8}{13}i.$$

Комплексные числа могут иметь не только аналитическое представление, но и геометрическое. Действительные числа изображаются точками на числовой оси. Но комплексные числа состоят из двух частей, поэтому для их изображения необходимо две оси, тогда комплексные числа будут изображаться точками на плоскости. Впервые эта идея появилась более 200 лет назад в трудах датчанина Г. Весселя, француза Ж. Аргана и немецкого математика К. Гаусса.

На рис. 1.17 буквой x обозначена действительная ось. На ней указываются значения действительной части комплексного числа. Ось y называется мнимой. На ней отмечаются значения мнимой части комплексного числа. Очевидно, что между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

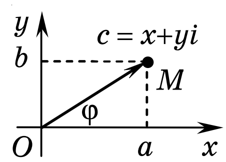


Рис. 1.17

Плоскость, где изображаются комплексные числа, называют комплексной плоскостью.

Если $b = 0$, то $c = a + 0i = a$. Это также комплексное число, но поскольку его мнимая часть равна нулю, то оно одновременно является и действительным числом. Отсюда следует, что множество действительных чисел представляет собой подмножество множества комплексных чисел, то есть действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Если $a = 0$, то $c = 0 + bi = bi$. Это чисто мнимое число.

Если $a = b = 0$, то $c = 0$. Число «0» также является комплексным числом.

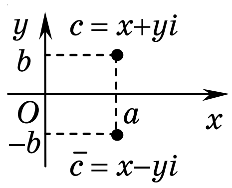


Рис. 1.18

Комплексно-сопряженные числа $c = a + bi$ и $\bar{c} = a - bi$ изображаются на плоскости точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 1.18).

Действительное число $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем или абсолютной величиной комплексного числа c. Величина $|c|$ равна расстоянию от начала координат до точки, изображающей комплексное число (см. рис. 1.17).

Кроме алгебраической применяются и другие формы записи комплексных чисел: тригонометрическая и показательная.

Пусть $c \neq 0$. Угол φ между осью Ox и вектором OM (см. рис. 1.17) называют аргументом комплексного числа c и обозначают $\varphi = \operatorname{Arg} c$. Его величина определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение аргумента, находящееся в промежутке $(-\pi;\ \pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg c$, то есть $-\pi < \arg c \leq \pi$.

Введем обозначение $|c| = r$. Непосредственно из рис. 1.17 и правил тригонометрии следует, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\,i\sin\varphi$, то есть $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эту форму комплексного числа называют тригонометрической.

Показательная форма комплексного числа имеет вид $c = re^{i\varphi}$. Таким образом, комплексное число c можно записывать в трех видах:

$$c = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Формула, связывающая показательную и тригонометрическую формы комплексного числа, найдена Л. Эйлером. Она имеет вид

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Пример 4. Записать число $c = 1 + \sqrt{3}\,i$ в тригонометрической и показательной формах.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, то $\varphi = \pi/3$, а $|c| = \sqrt{1+3} = 2$, следовательно,

$$1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3\right) = 2e^{\pi/3}.$$

При умножении и делении двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно применять следующую теорему.

Теорема. При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы суммируются. При делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, то есть если

$$c_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ c_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то произведение и частное этих чисел имеют вид соответственно:

$$c_1c_2 = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$c_1/c_2 = (r_1/r_2)\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Из первой части теоремы следует правило возведения комплексного числа в целую положительную степень:

$$c^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула справедлива не только для натуральных n, но и для дробей вида $n = 1/m$ (m — натуральное число), что соответствует операции извлечения корня степени m из комплексного числа. Пусть дано некоторое комплексное число c. Для нахождения его корня w m-й степени можно пользоваться следующей формулой:

$$w = \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{+2\pi k}{m} + i\sin\frac{+2\pi k}{m}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$. При $k \geq m$ значения аргумента будут повторяться. Это говорит о том, что аргумент может принимать только m различных значений.

Пример 5. Найти все значения $w = \sqrt{-16}$ [11, с. 32].

Под знаком корня записано комплексное число $c = -16 + 0i$. На комплексной плоскости соответствующая точка M расположена слева от нуля на оси Ox со значением -16. Очевидно, что аргумент, то есть угол между осью Ox и вектором OM, равен π. Модуль числа $c = -16 + 0i$ равен 16. На основе этих сведений запишем число c в тригонометрической форме:

$$c = -16 + 0i = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Возведем его в степень $1/4$, то есть извлечем корень четвертой степени:

$$w = \sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. В зависимости от значения k получаем четыре комплексных числа w_0, w_1, w_2, w_3, каждое из которых является результатом извлечения корня четвертой степени из числа (-16):

если $k = 0$, то $w_0 = 2\left[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

если $k = 1$, то $w_1 = 2\left[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

если $k = 2$, то $w_2 = 2\left[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\right] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$;

если $k = 3$, то $w_3 = 2\left[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

При дальнейшем увеличении числа k новых корней не получим. Например, если $k=4$, то

$$w_3=2\left[\cos(9\pi/4)+i\sin(9\pi/4)\right]=2\left[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right]=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=w_0.$$

Найденные решения можно проверить. Возведем в четвертую степень, например, комплексное число w_0. Сначала возводим в квадрат: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2=2+4i-2=4i.$

Результат снова возводим в квадрат: $(4i)^2=-16$. Получилось подкоренное выражение заданного числа $\sqrt{-16}$, следовательно, решение $w_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ является верным.

Если комплексное число записано в алгебраической форме, то при возведении его в целую положительную степень можно пользоваться известными из школьного курса математики правилами возведения в степень многочленов, например:

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi;\ (a+bi)^3=\left(a^3-3ab^2\right)\left(a^2b-b^3\right)i \text{ и т.д.}$$

При этом тождественные преобразования выражений, содержащих число i, выполняются с учетом следующих соотношений:

$$i^{4m}=1,\quad i4^{m+1}=i,\quad i4^{m+2}=-1,\quad i4^{m+3}=-i.$$

П р и м е р 6. Записать в алгебраической форме число $c=\dfrac{i^{82}+3i^{37}}{i^{44}-2i^{51}}$.

Так как $i^{82}=i^{2\cdot 20+2}=-1$, $i^{37}=i^{4\cdot 9+1}=i$, $i^{44}=i^{4\cdot 11}=1$, $i^{51}=i^{4\cdot 11+3}=-i$, то

$$c=\frac{i^{82}+3i^{37}}{i^{44}-2i^{51}}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{1+4}=\frac{(-1+6)+(3+2)}{5}=1+i.$$

Операции умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корня над комплексными числами, представленными в показательной форме, выполняются значительно проще по сравнению с тригонометрическими формами чисел. Пусть

$$c_1=r_1e^{i\varphi}\quad \text{и}\quad c_2=r_2e^{i\psi},$$

тогда произведение и частное этих чисел находятся следующим образом:

$$c_1c_2=r_1r_2e^{i(\varphi+\psi)};\ c_1/c_2=\left(r_1/r_2\right)e^{i(\varphi-\psi)}.$$

Для возведения в натуральную степень n используется формула $\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}$.

Формула для нахождения всех значений корня натуральной степени n имеет вид

$$w = \sqrt[n]{re^{i}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

На базе комплексных чисел в настоящее время построен один из красивейших разделов современной математики — теория функций комплексного переменного. О комплексных числах существует обширная литература. В данном подразделе эта тема лишь слегка затронута: приведены начальные сведения о комплексных числах и об основных операциях над ними. Более подробные сведения о комплексных числах и вообще о функциях комплексного переменного можно найти, например, в учебном пособии [16].

Упражнения

1. Найдите произведение комплексных чисел (ответ в виде $a + bi$, например: $-12 + 19i$):

а) (ЯГО) $(2-5i)(2-5i)$; б) (ППН) $4i(-3+2i)$;
в) (ОТК) $(2+2i)(-2-2i)$; г) (ЯМЫ) $(1+3i)(2+4i)$;
д) (ТАУ) $(1+i)(2-i)$; е) (ШИН) $(-2-3i)(2+3i)$.

2. Найдите частное двух комплексных чисел (ответ вводить как в примере 1, обыкновенную дробь сократить, целую часть не выделять):

а) (КПД) $(1-3i)/(2+5i)$; б) (УТА) $(1-3i)/(1+i)$;
в) (ТАШ) $(2i)/(1-i)$; г) (МЫХ) $(2+3i)/(4+i)$;
д) (ВИМ) $(2-3i)/(3-i)$; е) (САВ) $(3+6i)/(3i)$.

3. Упростите (ответы вводить как в предыдущих примерах):

а) (ФТФ) $2i^{18} - 3i^{19}$; б) (АЮР) $\left(2-3i^{17}\right)\left(2-4i^{20}\right)$;
в) (6Н5) $\left(3i^{15}+3i^{57}\right)\left(2-39i^{29}\right)$; г) (22Е) $\left(3-i^{16}\right)\left(3-i^{32}\right)$;
д) (ШУГ) $2\left(3i^{31}\cdot i^{7}-i^{6}\right)i^{10}$; е) (ЮАН) $\left(-3i^{14}+4i^{30}\right)^{41}+i^{6}$.

4. Возведите в степень (ответы вводить как в предыдущих примерах):

а) (61К) $(1+3i)^2$; б) (ЛЕС) $\left(-3+i^{3}\right)^{2}$; в) (СНГ) $(2+3i)^3$;
г) (ЯЯН) $(-2+3i)^3$; д) (ОСК) $(1+i)^4$; е) (Ю71) $\left(3i^{46}+2i^{50}+2\right)^{4}$.

5. Найдите корни уравнений:

а) (Я8.ЧА) $x^2 - 4x + 29 = 0$; б) (ДИ.ИА) $x^2 - 4x + 8 = 0$;
в) (ОМ.4А) $x^2 - 2x + 2 = 0$; г) (ТУ.ЧА) $x^2 + 49 = 0$.

2. Комбинаторика

2.1. Вводные понятия

Комбинаторика — это область дискретной математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных элементов (объектов) с учетом тех или иных условий. Как самостоятельная ветвь математики комбинаторика возникла в XVII веке в связи с развитием теории вероятностей, хотя отдельные комбинаторные задачи были сформулированы еще в древности. Название этому математическому направлению дал немецкий языковед, философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), опубликовавший в 1666 г. свою работу «Об искусстве комбинаторики», где впервые появился термин «комбинаторика».

Исходным в комбинаторике является интуитивно ясное понятие выборки (синонимы — расстановки, комбинации, соединения) как набора m элементов из некоторого исходного множества, причем наборы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными, с повторениями элементов и без повторений.

В комбинаторике широко применяется функция, называемая факториалом. Она представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается точно один раз. Обозначается факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)n.$$

Пример 1. Записать со знаком факториала $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Это произведение чисел натурального ряда, но число 4 в нем встречается два раза, следовательно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6!$$

Пример 2. Записать с использованием знака факториала $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

В этом ряду отсутствует цифра 6. Умножим и разделим на 6 все выражение, тогда получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \frac{10!}{6}.$$

Пример 3. Записать со знаком факториала $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Здесь пропущены числа 2 и 4. Умножим и разделим на 2 и 4 весь ряд, тогда получим

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 7!$$

Пример 4. Упростить

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)}.$$

Представим выражение в виде

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)(k-1)k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)(k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)}.$$

В числителе вынесем за скобки $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)$:

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)\left[(k-1)k + (k-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)}.$$

После сокращения получаем ответ: $N = (k-1)k + k - 1 = k^2 - 1$.

Пример 5. Упростить

$$K = \frac{n!^2 + (n-1)!(n-2)!}{(n-2)!^2}.$$

Запишем выражение в развернутом виде и в числителе вынесем за скобки произведение:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2).$$

Сократим его со знаменателем, тогда получим $K = n^4 - 2n^3 + n^2 + n - 1$.

Упражнения

1. Запишите следующие произведения с использованием знака факториала:

(796) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$; (717) $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;

(8РЕ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-4)(n-3)$; (Т72) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$;

(2Я.РЕ) $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$; (2П2) $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$;

(378) $1 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 23 \cdot 24$; (485) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)$;

(АМИ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(n+1)n$; (Р31) $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;

(АХО) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdots 18 \cdot 20$; (ДЕН) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15$.

2. Упростите и результат запишите с использованием знака факториала:

(ОЯС) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$; (2Р4) $\dfrac{(n-2)! - 2(n-1)!}{3 - 2n}$;

(257) $\dfrac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k)^2}{\left[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)\right] \cdot k^2}$.

3. Упростите:

(ЕУ5) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k(k+1)}$; (57С) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)}$;

(833) $\dfrac{(n-2)! + (n-1)! + n!}{(n-1)!}$.

2.2. Правило произведения в комбинаторике

Если один элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент — m способами, то выбор того и другого элемента в заданном порядке может быть осуществлен $N = nm$ способами.

В общем случае если один элемент множества A_1 можно выбрать $|A_1|$ способами, элемент множества A_2 — $|A_2|$ способами и так далее до множества A_n, один элемент которого можно выбрать $|A_n|$ способами, то выбрать все n элементов в заданном порядке можно N способами:

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Пример 1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Один элемент из этого множества можно выбрать $n = 5$ способами. Останется четыре элемента. Один элемент из них можно выбрать $m = 4$ способами. Следовательно, выбор двух элементов возможен $5 \cdot 4 = 20$ способами, список которых имеет вид

$$12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.$$

Заметим, что в каждой выборке цифры разные.

Пример 2. В урне пять шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимают один шар и записывают его номер. Шар возвращают в урну, наугад снова выбирают один шар и его номер записывают справа от первой цифры. Получится двухразрядное число. Сколько возможно таких чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, т.е. $n = 5$. На втором месте — также одна из пяти цифр. Следовательно, $m = 5$ и искомое число $nm = 5 \cdot 5 = 25$. Среди всех этих 25 выборок (в отличие от предыдущего примера) существуют пары с одинаковыми цифрами.

Пример 3. Вернемся к примеру 2. Пусть шары извлекают три раза и каждый раз шары возвращают в урну. Сколько получится трехзначных чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, на втором — также одна из пяти и на третьем — одна из пяти. Следовательно: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Пример 4. Сколько существует трехразрядных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру можно выбрать пятью способами, поскольку нуль на место старшего разряда ставить нельзя, так как число, начинающееся с нуля, не является трехразрядным. Вторая цифра может быть любой, в том числе и нулем, следовательно, ее можно выбрать шестью способами. То же самое относится и к цифре младшего разряда. Искомое число равно $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

Упражнения

1. (ДЕЗ). Имеется 10 карточек. На каждой записана гласная буква. Выбирают наугад карточку и к ней справа приставляют вторую, наугад выбранную после первой. Сколько возможно таких двухбуквенных слов?

2. (ТР2). Сколько трехразрядных чисел можно образовать из цифр 3, 4, 5, 6?

3. (АКИ). Сколько семизначных чисел можно образовать из цифр 3, 7, 9?

4. (АРМ). Из пятизначных десятичных чисел удалили все числа, в которые входит хотя бы одна из цифр 0, 3, 7, 8, 9. Сколько чисел осталось?

5. (УФ5). Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр не повторяется в числе более одного раза?

6. (927). Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифра младшего разряда каждого числа является четной, а старшего — нечетной?

7. (296). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, которые делятся на 5?

2.3. Правило суммы в комбинаторике

Пусть даны множества P_1 и P_2. Выясним, сколько элементов содержит множество $P_1 \cup P_2$.

Если $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2|$, т.е. если элемент множества P_1 может быть выбран $|P_1|$ способами, а элемент множества P_2 — $|P_2|$ способами, то выбор «либо элемент множества P_1, либо элемент множества P_2» может быть осуществлен $|P_1| + |P_2|$ способами. Это и есть правило суммы для случая, когда множества P_1 и P_2 не пересекаются.

П р и м е р 1. В тарелке 6 яблок и 5 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Если P_1 — множество яблок, P_2 — множество груш, то $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| = 6 + 5 = 11$.

Рассмотрим случай, когда $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$. Правило суммы при этом имеет вид

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

Эту формулу иногда называют формулой включений и исключений.

Пример 2. Дано: $P_1 = \{1,2,4,7,9\}$; $P_2 = \{1,4,5,6,8\}$. Требуется определить число элементов, содержащихся в множестве $P_1 \cup P_2$.

По правилу суммы $|P_1 \cup P_2| = 5 + 5 - 2 = 8$.

Упражнения

1. (ОМН). Тридцать учащихся сдавали экзамен по физике и химии. По две отличные оценки получили 9 человек. На «отлично» физику сдали 12 человек, химию — 16. Сколько учащихся не получили ни одной отличной оценки?

2. (МОК). Двенадцать туристов взяли с собой по коробке спичек, 19 туристов — по зажигалке. Ни спичек, ни зажигалок не взяли 6 человек. Всего в отряде 27 человек. Сколько человек взяли с собой и спички, и зажигалки?

2.4. Правило суммы и диаграммы Эйлера — Венна

С помощью диаграммы Эйлера — Венна очень удобно иллюстрировать правило сложения. На рис. 2.1 приведена диаграмма для множеств

$$P_1 = \{1,2,4,5,6\}, \quad P_2 = \{3,4,5,6,7,8\},$$
$$I = \{1,2,\ldots,9\}.$$

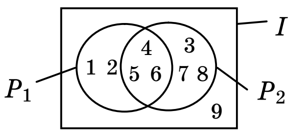


Рис. 2.1

Непосредственно из диаграммы видно, что число элементов множества $P_1 \cup P_2$ равно:

$$|P_1 \cup \bar{P}_2| = |P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| + |\bar{P}_1 \cap P_2|.$$

Прибавим и вычтем число $|P_1 \cap P_2|$:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| + |\bar{P}_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_2|. \qquad (2.1)$$

Из диаграммы (см. рис. 2.1) видно, что

$$|P_1 \cap \bar{P}_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_1|, \quad |\bar{P}_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_2|. \qquad (2.2)$$

Подставим выражения (2.2) в (2.1), тогда получим

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

Следовательно:

$$|P_1 \cup P_2| = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}.$$

Аналогичным образом, используя диаграмму Эйлера — Венна, можно вывести правило сложения для трех множеств (рис. 2.2), а также для четырех, пяти и т.д.

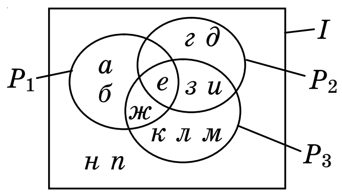


Рис. 2.2

Упражнения

1. Укажите элементы множеств (рис. 2.1): (ТПО) $\bar{P}_2$; (ЯНК) $P_1 \cup P_1 \cap \bar{P}_2$; (ЭМТ) $\overline{P_1 \cap P_2}$.

2. Определите число элементов множеств (рис. 2.2):

(ЛБК) $P_1 \cap P_2 \cup P_3$; (ОХН) $(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cap I$; (ММО) $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

3. (ЦАП). Укажите все элементы множества $P_1 \cup P_2$ на рис. 2.2, если элементы *в* и *е* из множества P_2 удалены (при вводе ответа буквы упорядочить по алфавиту).

2.5. Перестановки без повторений

Пусть дано множество вида $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Затем переставим местами некоторые элементы. Получим новую последовательность. Снова переставим некоторые элементы и т.д. Сколько существует таких последовательностей (различных!)?

Указанные последовательности называются перестановками без повторений и обозначаются P_n, где n — число элементов множества A.

Формулу для числа перестановок без повторений можно вывести на основе правила произведения. Первый из n элементов можно выбрать n способами. Останется $n-1$ элементов. Второй элемент можно выбрать $n-1$ способами, третий — $n-2$ способами и так далее до последнего элемента, который выбирается единственным способом. Таким образом:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{2.3}$$

П р и м е р 1. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих повторяющихся цифр, если используются только цифры 3, 5, 9?

В данном случае $n = 3$, следовательно, искомое число равно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Все эти перестановки имеют вид 359, 395, 539, 593, 953, 935.

П р и м е р 2. Сколько различных слов можно составить из букв слова «километр», если под словом понимать всякую последовательность этих букв?

В заданном слове все буквы разные, следовательно, искомое число равно

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

Упражнения

1. (2PE). Сколько различных пятизначных чисел можно образовать, используя по одному разу цифры 3, 4, 5, 7, 9?

2. (НВИ). Известно, что операция арифметического сложения коммутативна. Например, выражение $a+b+c+d$ можно записать иначе: $b+c+a+d$ либо $c+a+d+b$ и т.д. Сколько существует способов записи этого выражения?

3. (ДИХ). Составляют буквенно-цифровой код: записывают в некотором порядке четыре буквы a, b, c, d, затем справа приписывают три цифры 1, 2, 3, также в некотором порядке, например $bcda132$. Сколько существует таких кодов?

2.6. Перестановки с повторениями

Дано n_1 элементов a, n_2 элементов b, ..., n_k элементов x. Из этих элементов образуют n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы, т.е. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Одна из последовательностей имеет вид

$$\underbrace{aaa\cdots a}_{n_1}\,\underbrace{bbb\cdots b}_{n_2}\,\underbrace{ccc\cdots c}_{n_3}\,\underbrace{xxx\cdots x}_{n_k}.$$

Сколько существует таких перестановок этих элементов?

Если все n элементов различны, то число перестановок равно $n!$ Однако в данном случае $n_1!$ перестановок неразличимы. Неразличимы и $n_2!$ перестановок и т.д. Следовательно:

$$\dot{P}_n = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}, \qquad (2.4)$$

где точка над P_n говорит о том, что в перестановках есть повторяющиеся элементы.

Пример 1. Сколько существует четырехбуквенных слов, в которых три буквы «а» и одна буква «в»?

Здесь $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = 4$. Искомое число $\dot{P}_4 = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$.

Это «слова» *ааав*, *аава*, *аваа*, *вааа*.

Пример 2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «ротор»?

В слове «ротор» 5 букв. Из них две буквы «р», две буквы «о», одна буква «т». Следовательно: $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Искомое число различных слов $\dot{P}_5 = \dfrac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30.$

В формуле (2.4) k — это число различных элементов. Если повторяющихся элементов нет, то $n = k$, и тогда формула (2.4) превращается в формулу (2.3), т.е. выражение (2.3) — это частный случай более общей формулы (2.4).

Упражнения

1. (ЦАФ). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, в каждом из которых три цифры 4 и три цифры 5?

2. (ПИФ). Сколько чисел можно образовать, переставляя цифры 1, 2, 3, 5, если в каждом числе три единицы, одна двойка, две тройки и две пятерки?

3. (КМЕ). Сколько различных слов можно образовать путем перестановки букв в слове «территория»?

4. (ГАЗ). Сколько слов можно образовать, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово начинается с согласной буквы?

2.7. Размещения без повторений

Дано множество, которое содержит n элементов. Из них образуют упорядоченные последовательности длины m, не содержащие повторов элементов. Эти последовательности называют размещениями без повторений. Сколько существует таких последовательностей?

Заметим, что размещения могут отличаться одно от другого не только элементами, но и порядком записи элементов. Пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (2.5)$$

Размещения длины 3, такие как 135 и 136, являются различными, поскольку отличаются одно от другого наборами цифр. Размещения 356 и 365, состоящие из одних и тех же элементов, отличаются одно от другого порядком записи цифр, поэтому также различны.

Сколько существует размещений длины 3 в случае множества (2.5)? Так как размещения — это упорядоченные последовательности, то для нахождения их количества можно воспользоваться правилом произведения. Первый элемент выбираем шестью способами. Останется пять элементов. Для выбора второго элемента существует 5 способов, для третьего — 4. Таким образом, искомое число размещений равно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

В общем случае, если множество содержит n элементов, а длина размещения равна m, то число всех размещений без повторений равно $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$, где A_n^m — символ, обозначающий число размещений из n элементов по m без повторений.

Формула числа размещений без повторений имеет более удобную запись:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2.6}$$

П р и м е р 1. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр и не содержащих одинаковых цифр?

Нечетные цифры — 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, $n = 5$, $m = 3$. По формуле (2.6) получаем:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

П р и м е р 2. Имеется 12 ролей. Четыре артиста могут играть любую роль. Сколькими способами можно распределить роли между ними?

Пронумеруем роли: 1, 2, 3, ..., 9, A, B, C. Тогда задачу можно переформулировать: сколько существует четырехразрядных чисел, которые могут быть образованы из 12 цифр (без повторов)?

Каждое такое число будет соответствовать некоторому выбору ролей, если принять, что первому артисту ставится в соответствие первый разряд, второму — второй, третьему — третий и четвертому — четвертый. Согласно условию имеем $n = 12$, $m = 4$, тогда

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Упражнения

1. (ИЗЯ). Сколько существует пятиразрядных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 1, 2, 3 и в каждом нет повторяющихся цифр?

2. (510). Сколько четырехбуквенных последовательностей можно образовать из всех гласных букв русского алфавита, если в каждой последовательности повторяющихся букв нет? (В русском алфавите 10 гласных букв.)

3. (ПОК). Сколько существует двухразрядных чисел семеричной системы счисления, в каждом из которых нет повторяющихся цифр?

4. (427). В тире 10 мишеней. Сколькими способами могут выбрать себе по одной мишени три стрелка, если каждую выбирает не более чем один стрелок?

5. (ТВП). Три ученика выбирают по одной книге из 11 предложенных. Все книги разные. Сколькими способами может быть осуществлен выбор?

2.8. Размещения с повторениями

Дано множество, содержащее n элементов. Из них образуют размещения с повторениями, т.е. упорядоченные последовательности длины m, причем одни и те же элементы в любую последовательность могут входить многократно. Сколько всего существует таких последовательностей?

Как и в предыдущем случае, размещения с повторениями отличаются одно от другого и элементами и порядком записи элементов, следовательно, для нахождения числа размещений с повторениями можно воспользоваться правилом произведения. Если множество содержит n элементов, то первый элемент можно выбрать n способами, второй — n способами и т.д. В результате получаем

$$\dot{A}_n^m = nnn \cdots n = n^m, \tag{2.7}$$

где $\dot{A}_n^m$ — число размещений из n элементов по m с повторениями.

Пример 1. Сколько существует четырехразрядных чисел, которые можно составить, используя цифры 3, 7, 8, 9?

Согласно условию $n=4$, $m=4$, следовательно: $\dot{A}_4^4=4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$.

Пример 2. Сколько всего существует трехразрядных десятичных чисел, которые могут быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8?

На месте каждого из трех разрядов десятичного числа может находиться одна из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8 — всего их шесть. Следовательно:

$$\dot{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Пример 3. Дано множество букв $A = \{а, б, в, г, д, е\}$. Сколько двух- и трехбуквенных слов можно составить из этих букв?

Искомое число $R = \dot{A}_6^2 + \dot{A}_6^3 = 6^2 + 6^3 = 252$.

Упражнения

1. (215). Сколько двухбуквенных слов можно образовать из 10 гласных букв русского алфавита?

2. (328). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел?

3. (МЯЛ). Сколько существует пятиразрядных четверичных чисел?

4. (ВИК). Сколько слов длины 3 можно составить из букв a, b, c, d, e, f?

5. (УРФ). Сколько слов длины 10 можно составить из двух букв a и b?

6. (221). Сколько слов длины 12 можно составить из одной буквы d?

2.9. Сочетания без повторений

Пусть множество A содержит n элементов. Выделим из него некоторое подмножество, содержащее m элементов ($m \le n$). Сколько существует таких подмножеств?

Каждое подмножество множества A, содержащее m элементов, называется сочетанием из n элементов по m, где $n = |A|$. Обозначается число сочетаний символом C_n^m. Формула для числа сочетаний без повторений имеет вид

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания отличаются от размещений тем, что в размещениях учитывается порядок записи элементов, а в сочетаниях не учитывается.

Пример 1. Сколько существует 6-значных двоичных чисел, содержащих по 3 единицы?

В данном случае $n = 6$, $m = 3$, следовательно, искомое число

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Пример 2. Требуется закодировать 30 букв некоторого алфавита двоичными кодами, содержащими по две единицы. Определить длину кода.

Пусть n — длина кода (то есть число знаков в коде). Тогда должно выполняться неравенство $C_n^2 \ge 30$. Представим это неравенство в виде $n(n-1) \ge 60$.

Ближайшее число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 9. Таким образом, для кодирования 30 букв необходимы 9-значные двоичные коды, содержащие по две единицы.

Числа вида C_n^m обладают многими очень интересными свойствами. Запишем некоторые из них:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$;

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_m^m = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$;

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1}$ при четном n;

6) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^n$ при нечетном n.

Упражнения

1. (АЯМ). Сколько существует 8-значных двоичных кодов, содержащих по три единицы?

2. (ОЙТ). Сколько существует 9-значных двоичных кодов, содержащих по 6 нулей?

3. (ФЕМ). Сколько существует 10-значных двоичных кодов, начинающихся с нуля, если в каждом коде четыре единицы?

4. (2НН). Сколько существует 8-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых четное число единиц?

5. (ДОК). Шестьдесят шесть символов некоторого алфавита закодированы двоичными кодами, содержащими по две единицы каждый. Определите наименьшую длину кода.

6. (НОР). В восьмизначном числе вида $k = 3\ 2\ 5\ 1\ 4\ 7\ 6\ 8$ три цифры заменили нулями. Получилось новое число. Если в числе k нулями заменить другие какие-либо три цифры, получится еще одно число. Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, если каждый раз нулями заменять какие-либо три цифры?

7. (ЕРД). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

8. (ЕНЕ). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

9. (ШИН). Двоичное число содержит 9 нулей и 5 единиц, причем рядом стоящих единиц в числе нет. Сколько существует таких чисел?

2.10. Сочетания с повторениями

Дано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Сколько существует выборок по m элементов, если в каждую выборку могут входить повторяющиеся элементы и если порядок элементов в выборках безразличен?

Такие выборки называют сочетаниями с повторениями.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, то существует 10 выборок длины $m = 2$:

$$aa \quad bb \quad cc \quad dd \quad ab \quad bc \quad cd \quad ac \quad bd \quad ad.$$

Нахождение числа сочетаний с повторениями поясним на примере. В магазине имеется 4 вида конфет: «Пилот», «Ромашка», «Весна», «Снежинка». Требуется купить 10 конфет в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

При покупке возможны варианты:

— купили 10 конфет «Весна»;

— купили 5 конфет «Пилот», 3 конфеты «Ромашка» и 2 конфеты «Весна»;

— купили 6 конфет «Весна» и 4 конфеты «Ромашка»;

— купили 9 конфет «Весна» и одну конфету «Снежинка» и т.д.

Закодируем покупку. Допустим, что решено купить 3 конфеты «Пилот», 2 конфеты «Ромашка», 1 конфету «Весна» и 4 конфеты «Снежинка». Запишем три единицы (это конфеты «Пилот»), после которых поставим нуль. Затем запишем две единицы (это конфеты «Ромашка») и нуль. Далее поставим одну единицу и нуль. В конце запишем четыре единицы (конфеты «Снежинка»), но нуль после них не ставим. Получилась последовательность:

$$\underbrace{111}_{\text{«Пилот»}} \quad 0 \quad \underbrace{11}_{\text{«Ромашка»}} \quad 0 \quad \underbrace{1}_{\text{«Весна»}} \quad 0 \quad \underbrace{1111}_{\text{«Снежинка»}}$$

Нули в этой последовательности отделяют один вид конфет от других.

Очевидно, что всякое распределение трех нулей в 13-разрядном двоичном коде дает некоторый вариант покупки. Например:

1111001011111 — куплены четыре конфеты «Пилот», ни одной конфеты «Ромашка», одна конфета «Весна» и пять конфет «Снежинка»;

0001111111111 — куплено 10 конфет «Снежинка»;

0101111111110 — куплены одна конфета «Ромашка» и девять конфет «Весна».

Таким образом, число вариантов покупок равно числу всех возможных 13-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых десять единиц (либо три нуля):

$$\dot{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286,$$

где символом $\dot{C}_4^{10}$ обозначено число сочетаний с повторениями из четырех элементов по 10.

В общем случае если из n элементов составляются выборки по m элементов с повторениями, то число всех таких выборок равно:

$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}.$$

Упражнения

1. (УЯД). В магазине 4 вида конфет. Сколькими способами можно купить 15 конфет?

2. Продаются тетради с синей обложкой, фиолетовой, красной, зеленой и оранжевой.

(ЮСЕ). Скольким способами можно купить 10 тетрадей любого цвета?

(ВШВ). Требуется купить 15 тетрадей. Пять из них должны быть с фиолетовой обложкой, а обложки всех остальных тетрадей могут быть любого цвета, кроме фиолетового. Сколькими способами возможна такая покупка?

(ДДБ). Требуется купить 16 тетрадей, среди которых 4 тетради должны быть с зеленой обложкой и 5 тетрадей — с оранжевой. Цвет обложки остальных тетрадей значения не имеет. Сколькими способами возможна покупка?

2.11. Задачи для самостоятельной работы

1. (МТ6). Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составили пятизначное число, в котором цифра младшего разряда является четной, а старшего — нечетной. Сколько существует таких чисел, если цифры могут повторяться?

2. (382). См. условие предыдущего упражнения. Сколько существует чисел, в которых все цифры разные?

3. (ЕСП). Сколько существует шестизначных троичных чисел, в которых нет нулей и в каждом имеется точно три единицы?

4. (5ПК). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные и нет цифры «нуль»?

5. (ПТМ). Из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 составили множество всех возможных трехразрядных чисел. Затем из этого множества удалили все числа, в которых нет повторяющихся цифр. Сколько чисел осталось?

6. (985). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифра 5 встречается три раза, а цифра 8 встречается четыре раза?

7. (АШО). Русский алфавит содержит 10 гласных букв. Сколькими способами можно составить группы по четыре гласной буквы в каждой, если буквы во всех группах расположены в алфавитном порядке?

8. (ЦАО). В классе n человек. На дежурство необходимо выделить двух человек. Это можно сделать 300 способами. Найдите n.

9. (256). Некто подбросил 15 раз монету. Исход эксперимента он представил в виде ряда нулей и единиц, где единица обозначает, что монета упала гербом вниз, а нуль — монета упала гербом вверх. Сколько возможно различных исходов эксперимента?

10. (55С). Дано множество $P = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Сколько существует различных подмножеств, в каждое из которых входят две буквы и две цифры (вспомним, что в множествах повторяющихся элементов нет)?

11. (62Н). Сколько существует трехэлементных подмножеств множества всех шестнадцатеричных цифр?

12. (ЦНТ). Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выбрать по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

13. (578)! На ферме 20 кроликов и 15 овец. Сколькими способами можно выбрать кролика и овцу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами его можно сделать еще раз?

14. (ХРУ). Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный (на шахматной доске 64 квадрата)?

15. (ЗУИ). Сколько пятизначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что ни в одном из чисел повторяющихся цифр нет?

16. (ГАС). Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что в каждом из чисел все цифры разные?

17. (ЛЕП). Шестизначное десятичное число может начинаться с цифры 2 либо с цифры 3 и может оканчиваться либо нулем, либо пятеркой, либо девяткой. Сколько существует таких чисел, если в них нет цифры 1 и все цифры разные?

18. (ОЦЛ). Сколько существует четных пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, а цифры четырех старших разрядов представляют собой простые числа?

19. (ФАХ). Из цифр 1,4,6,7,8,9 путем их перестановок образовали все возможные шестизначные числа. Сколько среди них нечетных чисел?

20. (ШОТ). Укажите все значения x, при которых справедливо равенство $x! = (x!)!$

21. (ПТТ). Укажите все цифры, которыми может оканчиваться число $n!$ (цифры ответа упорядочить по возрастанию).

22. (ЛАК). Сколько существует двузначных двенадцатеричных чисел?

23. (ТАУ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, делящихся без остатка на десятичное число 1000?

24. (00И). Найдите наименьшее значение n, при котором число $n!$ делится на десятичное число 100.

25. (520). У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен без повторений?

26. (ЛЛГ). Сколько существует различных инициалов имени и отчества, если считать, что с букв Ё, Ы, Ъ, Ь, Й имена не начинаются?

27. (УХС). Найдите наименьшее n, если известно, что число $n!$ делится без остатка на число 990.

28. (ЗАЕ). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков — русского, английского, французского, немецкого, итальянского — на любой другой из этих же языков?

29. (КЛК). В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

30. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по трем мишеням. Каждый стрелок самостоятельно выбирает мишень и делает один выстрел без промаха. Ответьте на вопросы, в скольких случаях:

(ХОФ) все стрелки попадут в одну мишень?

(УУ2) в одну мишень попадут точно два стрелка?

(983) все три мишени будут поражены?

(ЮЖИ) точно в одну из мишеней не будет ни одного попадания?

31. (265). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера. Помнит только, что среди них есть два нуля, а остальные цифры разные. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до абонента путем проб и ошибок? (Минимальное число проб — единица: если очень повезет, то можно дозвониться сразу).

32. (ЛОС)! Дано равенство $55|_6 = 50|_x$. Число 55 записано в шестеричной системе счисления. Найдите основание x системы, в которой записано число 50. То же самое для равенства $55|_6 = 11|_x$.

33. (ЮМТ). Дано равенство $19|_x = 23$. Число 23 записано в десятичной системе. Найдите основание x системы счисления, в которой записано число 19.

34. (ОЛЕ). Сколько существует шестизначных троичных чисел, содержащих цифру 0 в младшем разряде и цифру 2 — в старшем (в остальных четырех разрядах могут находиться любые троичные цифры)?

3. Теория вероятностей

3.1. Случайные события

Событие — это результат какого-либо испытания, опыта, эксперимента либо наблюдения за явлениями природы. События бывают достоверными, невозможными и случайными.

Событие называется достоверным, если при одних и тех же условиях оно всегда происходит. Например, при нагревании медного слитка до температуры, превышающей 1083 °C, из твердого состояния он всегда переходит в жидкое.

Событие называется невозможным, если при заданных условиях оно никогда не происходит. Например, если в урне нет черных шаров, то событие «вынут черный шар» является невозможным. Обозначается невозможное событие знаком $\varnothing$ (как и пустое множество).

Достоверность и невозможность — это две крайности, между которыми располагаются случайные события. Событие называется случайным, если при одинаковых условиях оно может произойти, но может и не произойти, вследствие чего точно предсказать его невозможно. Примером может служить спортивная стрельба. Стрелок, как бы ни стремился попасть в центр мишени, попадает в него не всегда. Объясняется это тем, что на результат стрельбы оказывает влияние много внешних факторов, которые стрелок не может учесть. Масса пули, ее форма, объем заряда и скорость его сгорания от патрона к патрону не являются постоянными. Ствол винтовки под действием выстрелов подвергается температурным деформациям. Сам стрелок никогда не остается неподвижным, следовательно, и винтовка в его руках всегда совершает некоторые (хаотические) движения и т.д. Все подобные причины, влияющие на результат стрельбы, являются неустранимыми. Каждая из них в отдельности может быть незначительной, но все вместе они дают большое число неблагоприятных сочетаний, чем и вызывается отклонение точки попадания винтовочной пули от центра мишени.

Примеров, иллюстрирующих случайные события, можно привести бесчисленное множество. Даже те события, которые мы считаем невозможными или достоверными, при внимательном рассмотрении нередко оказываются случайными. Например, при подбрасывании монеты мы полагаем, что она упадет либо цифрой вверх, либо гербом вверх, хотя в принципе она может встать и на ребро. Поставив с вечера будильник на определенный час, мы уверены, что в заданное время будильник «сработает», хотя будильник, как и всякое техническое устройство, может сломаться в совершенно непредсказуемый момент.

Таким образом, случайные события характеризуются неопределенностью, причем в одних случаях она может быть незначительной (например, падение монеты на ребро) и ею можно пренебречь, в других же случаях степень неопределенности может быть гораздо более высокой и не учитывать ее нельзя. Вопросами количественной оценки этой неопределенности и занимается теория вероятностей.

Первыми исследователями задач теории вероятностей были итальянский математик Лука Пачоли (1445–1509); итальянский ученый Никколо Тарталья (1499–1557); итальянский математик, философ и врач Джероламо Кардано (1501–1576); французский математик Пьер Ферма (1601–1665); французский религиозный философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623–1662) и многие другие.

Более обстоятельно теорией вероятностей занимались английский математик Абрахам де Муавр (1667–1754); швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705); французский астроном, математик, физик, иностранный почетный член Петербургской академии наук (с 1802 г.) Пьер Симон Лаплас (1749–1827); французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской академии наук (с 1826 г.) Симеон Дени Пуассон (1781–1840).

Над различными вопросами теории вероятностей работали и русские ученые: математик, академик Петербургской академии наук (с 1856 г.) Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894); математик, академик Петербургской академии наук (с 1890 г.) Андрей Андреевич Марков (1856–1922); математик и механик, академик Петербургской академии наук (с 1901 г.) Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918); математик, академик Петербургской академии наук (с 1939 г.) Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) и многие другие.

3.2. Пространство элементарных событий

Достоверные и невозможные события предсказуемы однозначно. Иное дело случайные события. Всякий эксперимент со случайным исходом (случайный эксперимент) может закончиться одним из нескольких возможных результатов, не менее чем из двух. При этом необходимо иметь в виду, что при построении математической модели случайного эксперимента приходится абстрагироваться от несущественных исходов и учитывать только те, которые в реальных условиях действительно могут состояться. Поясним это на примерах.

Пример 1. При подбрасывании монеты возможны следующие исходы: монета упала гербом вверх; монета упала цифрой вверх;

монета встала на ребро; монета куда-то укатилась; монета при падении разрушилась и т.д. Реальными же являются только два события: «монета упала гербом вверх» и «монета упала цифрой вверх». Все остальные события считаются невозможными либо сводящимися к первым двум, например укатившуюся монету можно отыскать и посмотреть, как она упала — гербом вверх или вниз.

Пример 2. Если вместо монеты подбросить игральную кость (кубик с шестью пронумерованными гранями), то имеем шесть реальных исходов, если отвлечься от таких событий, как падение кубика на ребро или вершину и др.

Пример 3. В результате выстрела по спортивной мишени, разделенной на 10 концентрических кругов, можно выбить i очков ($i = 0, 1, 2, \ldots, 10$). Это эксперимент с 11 реальными исходами, где к случаю, когда $i = 0$ (не выбито ни одного очка), сводятся все нулевые результаты выстрела, например: выстрел произведен, но заряд оказался подпорченным и пуля, едва покинув ствол, тут же упала на землю; стрелок поразил соседнюю мишень, а не свою и т.д.

Из этих примеров видно, что всякий случайный эксперимент, если исключить несущественные и практически невозможные события, характеризуется определенным числом взаимоисключающих исходов. Каждый отдельный исход называется элементарным событием или точкой, а множество всех взаимоисключающих исходов — пространством элементарных событий. Это множество обычно обозначают знаком Ω, то есть прописной буквой «омега» греческого алфавита. В дальнейшем пространство элементарных событий будем называть Ω-множеством или Ω-пространством.

Например, если монета подброшена три раза, то Ω-множество имеет вид

$$\Omega = \{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\},$$

где Г — монета упала гербом вверх; Ц — монета упала цифрой вверх.

В общем случае пространство элементарных событий может быть дискретным и непрерывным, а дискретное пространство элементарных событий может быть с конечным и бесконечным числом точек. В дальнейшем будут рассматриваться случайные события как с дискретными, так и с непрерывными Ω-множествами. В данном же разделе ограничимся дискретными Ω-пространствами.

Упражнения

1. (ДОМ). Монета подброшена четыре раза. Сколько возможно исходов такого эксперимента?

2. (382). Игральная кость подброшена два раза. Определите число исходов эксперимента.

3. (ЗАН). Некто задумал трехразрядное число в системе счисления с основанием 7 (числа с нуля не начинаются). Определите число точек пространства элементарных событий.

4. (АЛЕ). В урне 10 разноцветных шаров. Событие: наугад вынули два шара. Сколько точек имеет пространство элементарных событий?

5. (АЯМ). В урне 8 разноцветных шаров. Наугад вынули три шара. Сколько точек имеет пространство элементарных событий?

6. (ПХВ). В колоде 36 карт. Из них несколько карт взяли наугад (не менее одной, но не все). Число взятых карт — случайная величина. Найдите число точек пространства элементарных событий.

3.3. Поле событий

Всякое подмножество Ω-множества называется случайным событием, или просто событием. Множество всех подмножеств (то есть булеан) множества Ω, называется полем событий. Известно, что

$$\left|B(\Omega)\right| = 2^{|\Omega|},$$

где $|\Omega|$ — число элементов множества Ω, то есть число точек пространства элементарных событий; $B(\Omega)$ — булеан множества Ω (поле событий), множество всех подмножеств Ω-множества; $|B(\Omega)|$ — число элементов булеана, то есть число точек поля событий.

Если Ω-множество конечно, то все его подмножества, каждое из которых представляет собой некоторое событие, можно пронумеровать. Для этого достаточно все элементы множества Ω расположить в определенном порядке и каждому элементу $\omega \in \Omega$ поставить в соответствие двоичный разряд. Пусть единица в двоичном разряде обозначает вхождение соответствующего элемента в подмножество, а нуль говорит о том, что этот элемент в подмножество не входит. Тогда всякое $|\Omega|$-значное двоичное число будет обозначать некоторое событие. Проиллюстрируем это тремя примерами.

Пример 1. Пусть Ω-множество задано выражением

$$\Omega = \{Г, Ц\}, \text{ где } Г \text{ — герб; } Ц \text{ — цифра.}$$

Это множество состоит из двух элементов Г и Ц (исходы при однократном броске монеты). Поставим им в соответствие двоичные разряды так, как показано в табл. 3.1. Нулевому номеру соответствует невозможное событие, так как согласно двоичному числу 00 монета упала ни цифрой вверх, ни гербом вверх, то есть встала на ребро. Но это событие считается невозможным.

Таблица **3.1**

№	Г	Ц
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

Двоичному числу 01 соответствует случай, когда монета падает цифрой вверх, а числу 10 — гербом вверх. Число 11 говорит о том, что монета упала либо гербом вверх, либо цифрой вверх. Это достоверное событие.

Для рассматриваемого случая имеем:

$|\Omega| = 2$ — число точек Ω-пространства;

$B(\Omega) = \{\varnothing, \{Г\}, \{Ц\}, \Omega\}$ — множество элементов поля событий, то есть булеан множества Ω;

$|B(\Omega)| = 4$ — число элементов поля событий.

Пример 2. Пусть монета подброшена два раза. Тогда возможно четыре взаимоисключающих исхода:

$$\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}.$$

Число точек этого Ω-множества $|\Omega| = 4$.

Множество элементов поля событий имеет вид

$$B(\Omega) = \{\varnothing, \{ЦЦ\}, \{ЦГ\}, \{ЦГ, ЦЦ\}, \{ГЦ\}, \{ГЦ, ЦЦ\}, \ldots, \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}, \Omega\},$$

число элементов которого равно 16. Все они приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

№	ГГ	ГЦ	ЦГ	ЦЦ
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Рассмотрим некоторые события из множества элементов поля событий, воспользовавшись табл. 3.2.

Строка 0. Это невозможное событие, то есть исход, когда оба раза монета упала ни цифрой вверх, ни гербом вверх (то есть встала на ребро либо в первом случае, либо во втором, либо в обоих), невозможен.

Строка 1. Исход ЦЦ, т.е. в обоих случаях монета упала цифрой вверх.

Строка 2. Исход ЦГ. Это значит, что после первого броска монета упала цифрой вверх, а после второго — гербом вверх.

Строка 3. Событие ЦГ или ЦЦ. Это значит, что после первого броска монета упала цифрой вверх. Как упала монета после второго броска, не имеет значения.

Строка 5. Событие ГЦ или ЦЦ. Во втором случае монета упала цифрой вверх.

Строка 7. Событие ГЦ, или ЦГ, или ЦЦ. Хотя бы один раз выпала цифра.

Строка 10. Событие ГГ или ЦГ. При втором броске выпал герб.

Строка 11. Либо в первом случае выпала цифра, либо во втором случае выпал герб.

Строка 14. Событие ГГ, или ГЦ, или ЦГ обозначает: хотя бы один раз выпал герб.

Строка 15. Хотя бы один раз выпал герб или хотя бы один раз выпала цифра. Это достоверное событие.

П р и м е р 3. Пусть подброшена игральная кость. Возможные при этом исходы представлены выражением $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Так как пространство элементарных событий состоит из шести точек, то имеем:

$|\Omega| = 6;$

$B(\Omega) = \{\varnothing, \{6\}, \{5\}, \{5, 6\}, \{4\}, \{4, 6\}, \ldots, \Omega\};$

$|B(\Omega)| = 64$ — число точек булеана Ω-множества,
то есть при однократном подбрасывании игральной кости Ω-пространство содержит 6 исходов, а всего различных событий 64.

Упражнения

1. (ВВМ)! Монета подброшена три раза. Найдите $|\Omega|$ и $|B(\Omega)|$.

2. (629)! Задумано двухразрядное троичное число, начинающееся не с нуля. Найдите $|\Omega|$ и $|B(\Omega)|$.

3. (ЯШО)! Некто задумал трехразрядное троичное число (которое не может начинаться с нуля), без остатка делящееся на два. Найдите $|\Omega|$ и $|B(\Omega)|$.

4. (АЦП)! В урне 10 пронумерованных в последовательности 1, 2, 3, ..., 10 шаров. Случайное событие — вынут один шар с некоторым номером. Найдите $|\Omega|$ и $|B(\Omega)|$.

3.4. Операции над событиями

С математической точки зрения всякое событие — это некоторое множество точек пространства элементарных событий. Следовательно, операции над событиями выполняются так же, как и в теории множеств Г. Кантора, но с учетом содержательной интерпретации применительно к событиям.

Суммой событий A_1 и A_2 называется новое событие A, состоящее из всех элементов событий, входящих хотя бы в одно из событий A_1 или A_2.

Отсюда следуют частные утверждения:

$$A + A = A; \quad A + \Omega = \Omega, \quad A + \varnothing = A.$$

Операция суммы распространяется и на большее число событий:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$

где n — число событий, сумма которых есть событие A.

Аналогично вводится операция произведения событий. Пусть A_1 и A_2 — некоторые события. Тогда их произведение — это новое событие A, состоящее из всех тех точек Ω-пространства, которые принадлежат одновременно и событию A_1, и событию A_2:

$$A = A_1 \cap A_2.$$

Например, пусть A_1 обозначает «выбито четное число очков» при однократном выстреле, A_2 — «выбито более пяти очков». Тогда

$$A_1 = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}, \quad A_2 = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

Произведением этих событий является событие A, состоящее из точек 6, 8, 10:

$$A = A_1 \cap A_2 = \{6, 8, 10\}.$$

Знак пересечения множеств является неудобным в применении. Поэтому вместо него часто используется знак арифметического умножения в виде точки. Можно и вообще не указывать никакого знака, что также будет обозначением произведения событий:

$$A = A_1 \cap A_2 = A_1 \cdot A_2 = A_1 A_2.$$

Для операции произведения событий справедливы утверждения:

$$A \cdot A = A; \quad A \cdot \varnothing = \varnothing; \quad A \cdot \Omega = A.$$

Операция произведения распространяется и на большее число событий:

$$A = A_1 A_2 A_3 \cdots A_n.$$

В теории вероятностей используется еще одна операция — отрицание события, что соответствует операции дополнения в теории множеств. Отрицание события A — это новое событие, состоящее из всех точек Ω-пространства, не входящих в множество точек события A. Очевидно, что событие A и его отрицание — это противоположные события. Обозначается отрицание чертой над буквой, обозначающей событие: $\overline{A}$. Например, пусть A обозначает «выбито не менее 5 очков» при одном выстреле: $A = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Тогда событие $\overline{A}$ «выбито менее 5 очков» — это множество точек $\overline{A} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Для операции отрицания справедливы следующие утверждения:

$$\overline{\overline{A}} = A; \quad \overline{\varnothing} = \Omega; \quad \overline{\Omega} = \varnothing.$$

Рассмотренные операции являются основными. Используя их, можно представить и другие операции, например разность событий. В теории множеств — это разность множеств. Разность событий A_1 и A_2 — это новое событие A, включающее в себя все те точки Ω-множества, которые принадлежат событию A_1, но не принадлежат событию A_2:

$$A = A_1 \setminus A_2,$$

где наклонная черта обозначает операцию разности событий.

Пример. Пусть A_1 обозначает «выбито более пяти очков» при однократном выстреле по спортивной мишени, A_2 — «выбито нечетное число очков»:

$$A_1 = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}; \quad A_2 = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}.$$

Тогда разность событий A_1 и A_2 представится в виде

$$A = A_1 \setminus A_2 = \{6,\ 8,\ 10\}.$$

В общем случае для разности событий нет необходимости в использовании специального знака (в виде наклонной черты), поскольку разность событий можно выразить через операции произведения и отрицания:

$$A_1 \setminus A_2 = A_1\bar{A}_2.$$

Так как операции над событиями — это те же операции, что и над множествами, то к событиям можно применять законы склеивания, поглощения и де Моргана.

В заключение еще раз отметим: операции над событиями выполняются только при одном и том же пространстве элементарных событий. Если же событие A берется из одного Ω-множества, а событие B — из другого, то, вообще говоря, рассмотренные операции смысла не имеют.

Упражнения

1. Один раз подбрасывают игральную кость, грани которой пронумерованы: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Укажите исходы эксперимента, удовлетворяющие событию $C = A + B$, если

(ЮЙ2) A — выпало четное число, B — выпавшее число делится на 3;

(21У) A — выпало не более 3 очков, B — число очков является простым числом;

(УШО) A — выпало четное число, B — число очков является простым или составным.

2. В урне 10 пронумерованных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти точки Ω-множества, удовлетворяющие событию $C = AB$:

(719) A — номер шара не делится на 5, B — номер шара не делится на 6;

(СТИ) A — номер шара — простое число, B — номер — нечетное число.

3.5. Совместные и несовместные события

Если события A и B имеют хотя бы одну общую точку из Ω-пространства, то они называются совместными. Произведение совместных событий всегда непусто. Если же события A и B не имеют общих точек, то они называются несовместными. Примером могут служить противоположные события. Однако несовместными могут быть и события, не являющиеся противоположными. Например, пусть A обозначает «выбито четное число очков», B — «выбито 5 или 7 очков» при однократном выстреле по спортивной мишени. Тогда

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}; \quad B = \{5, 7\},$$

откуда видно, что события A и B несовместны и не являются противоположными, поскольку точки 1, 3, 9, 10 принадлежат Ω-множеству, но не входят ни в одно из событий A и B.

Очевидно, что произведение несовместных событий всегда пусто.

Упражнения

1. (КСС). Некто задумал натуральное двузначное десятичное число $N \leq 20$. Событие A состоит в том, что задуманное число делится на 3 или на 5. Какие из следующих событий являются совместными с событием A:

1) число N делится на 6;
2) число N является простым;
3) в старшем разряде числа N находится четная цифра;
4) число N есть квадрат некоторого числа;
5) если N разложить на простые множители, то наименьшим множителем будет число 5;
6) абсолютная величина разности цифр равна 4;
7) число N является нечетным?

2. (398). В урне 10 пронумерованных шаров. Наугад вынимают один шар. Событие A состоит в том, что номер извлеченного шара является четным. Какие из следующих событий являются совместными с событием A:

1) номер шара — простое число;
2) номер шара делится на 3;
3) номер шара не превышает 1;
4) номер шара не превышает 10;
5) номер шара является нечетным;
6) номер шара — составное число;
7) номер шара делится на 4;
8) шар имеет номер 10?

3.6. Полная группа событий

Пусть A_1, A_2, ..., A_n — некоторые события. Если $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$, то они образуют полную группу событий. При этом события A_1, A_2, ..., A_n могут быть как совместными, так и несовместными. Если эти события попарно несовместны, то они называются гипотезами.

П р и м е р 1. Монету подбрасывают два раза. События $A_1 = \{ГГ\}$, $A_2 = \{ГЦ\}$, $A_3 = \{ЦГ\}$ и $A_4 = \{ЦЦ\}$, где Г — герб, Ц — цифра, являются гипотезами, так как они попарно несовместны и образуют полную группу событий.

П р и м е р 2. Монету подбрасывают два раза. События A_1 и A_2, где $A_1 = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$, $A_2 = \{ЦЦ, ГЦ, ЦГ\}$, образуют полную группу, но гипотезами не являются, так как они совместны, поскольку имеют две общие точки ГЦ и ЦГ.

Упражнения

1. (Т79). Монету подбрасывают 4 раза. Укажите наборы событий, образующие гипотезы:

1) A — ни разу не выпал герб, B — герб выпал один раз, C — герб выпал более двух раз;

2) A — в результате первого и второго бросков монеты выпал герб, B — в результате второго броска выпал герб, C — в результате первого и второго бросков монеты выпала цифра;

3) A — цифра выпала четное число раз, B — герб выпал четное число раз;

4) A — в результате первого броска выпала цифра, B — в результате второго, третьего и четвертого бросков хотя бы один раз выпала цифра, C — ни разу не выпала цифра;

5) A — ни разу не выпал герб, B — ни разу не выпала цифра;

6) A — цифра выпала два или три раза, B — цифра выпала не более одного раза, C — четыре раза выпала цифра;

7) A — цифра выпала более двух раз, B — цифра выпала не менее двух раз;

8) A — герб выпал четыре раза или ни разу, B — цифра выпала один или два раза, C — герб выпал один раз.

2. (6ТТ). Какие из наборов событий в упражнении 1 образуют полную группу?

3.7. Понятие вероятности события

Выше было сказано, что для количественной оценки степени возможности случайного события в математической литературе используется специальный термин — вероятность события. Как математическая модель случайного события вероятность определяется тремя способами: классическим, статистическим и геометрическим.

Исторически первым был классический способ. Он применим только к дискретным случайным событиям, когда удается подсчитать общее число n всех равновозможных исходов эксперимента и число m исходов, благоприятствующих ожидаемому событию A. Вероятность события A в этом случае определяется как отношение величин m и n:

$$p(A) = m/n,$$

где $p(A)$ — вероятность события A. Очевидно, что вероятность $p(A)$ — это дробь, значение которой находится в пределах $0 \le p(A) \le 1$, где случаю $p(A) = 0$ соответствует невозможное событие, а случаю $p(A) = 1$ — достоверное событие.

Основой классического определения вероятности является понятие равновозможности всех исходов эксперимента. Например, вероятность того, что выпадет 5 очков, если один раз подбросить игральную кость, равна $1/6$. Но верно это только в том случае, если кость представляет собой геометрически абсолютно правильный куб, а плотность вещества, из которого изготовлен куб, одинакова по всему его объему. Если же условия равновозможности исходов не выполняются, то классический подход к определению вероятности использовать нельзя. Например, деревянный кубик, в одну из граней которого вмонтирована свинцовая пластинка, при многократном подбрасывании будет падать вниз этой стороной гораздо чаще, чем другими сторонами. В этом случае вероятность падения кубика «свинцовой» стороной вверх не будет равной $1/6$.

Суть статистического определения вероятности поясним на следующем примере. Пусть стрелок произвел 200 выстрелов и из них 160 раз попал в мишень, а 40 — промахнулся. Обозначим буквой A событие «попадание в мишень». Отношение числа попаданий к общему числу выстрелов называется относительной частотой события A. Обозначим ее символом $p'(A)$:

$$p'(A) = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}.$$

Если сделать 400 выстрелов, то относительная частота может измениться. Еще увеличим число выстрелов. Если каждый выстрел производится при одних и тех же условиях, то относительная частота примет устойчивый характер и с ростом числа выстрелов будет меняться, стремясь в бесконечности к некоторому числу q, которое и является истинной вероятностью попадания в мишень. Следовательно, строго говоря, статистическим путем мы в принципе не можем определить истинную вероятность ни одного события, так как никакой эксперимент мы не можем повторять бесконечное число раз. Однако для практических целей абсолютная точность и не требуется. На практике обычно ограничиваются некоторым числом испытаний и полученную относительную частоту приближенно принимают за вероятность события.

Если пространство элементарных событий представляет собой бесконечное множество точек, то классический способ определения вероятности использовать невозможно. В таких случаях применяется геометрический подход. Проиллюстрируем его на следующем примере. Допустим, что в круг радиуса R вписан меньший круг радиуса r. В пределах площади большого круга наугад ставится точка, которая может попасть или не попасть в малый круг. Если попадание в каждую точку большого круга является равновозможным, то вероятность события A, обозначающего «попадание в малый круг», определяется как отношение площади малого круга к площади большого круга:

$$p(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Таким образом, вероятностные задачи делятся на два больших класса:

а) задачи, решаемые классическим путем. К ним относятся задачи с конечным числом точек Ω-пространства. Для их решения используются в основном методы комбинаторики;

б) задачи, решаемые геометрическим путем. К ним относятся задачи с бесконечным числом точек Ω-пространства. Классический подход к задачам этого класса неприменим.

Статистический же подход, в сущности, является универсальным. Он применим к любым классам вероятностных задач.

3.8. Классический подход. Задачи с решениями

В данном подразделе приведены образцы решения несложных задач с дискретными вероятностными пространствами.

1. Эксперимент состоит в шестикратном подбрасывании монеты. Найти вероятность того, что герб выпадет точно два раза.

Решение. Условимся обозначать единицей падение монеты гербом вверх и нулем падение монеты гербом вниз. Тогда всякий исход эксперимента представится шестизначным двоичным кодом и задачу можно переформулировать: найти вероятность того, что в этом коде будут точно две единицы.

Всего существует 64 двоичных числа: $|\Omega| = 64$. Это знаменатель искомой вероятности. Чтобы найти числитель, выясним, сколько существует шестизначных двоичных кодов, в каждом из которых точно две единицы. По формуле числа сочетаний из 6 по 2 находим:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

Таким образом, искомая вероятность $p = 15/64$.

2. Монету подбрасывают 8 раз. Найти вероятность того, что монета 5 раз упадет гербом вверх и 3 раза цифрой вверх. При этом первый бросок и последний заканчиваются падением монеты гербом вверх.

Решение. Как и в предыдущей задаче, условимся обозначать единицей падение монеты гербом вверх и нулем падение монеты гербом вниз. Всего существует 256 восьмизначных двоичных кодов. Следовательно, $|\Omega| = 256$. Это знаменатель искомой вероятности. Переходим к числителю. Так как старший и младший разряды восьмизначного двоичного числа заняты единицами и нули там стоять не могут, то задача сводится к отысканию количества шестизначных двоичных чисел, в каждом из которых содержится точно три единицы. По формуле числа сочетаний из 6 по 3 находим: всего существует 20 таких чисел. Тогда искомая вероятность $p = 20/256$. Результат необходимо представить в виде несократимой дроби, следовательно, окончательно получаем $p = 5/64$.

3. Монету подбросили 100 раз, и все 100 раз монета упала гербом вверх. Найти вероятность того, что если монету подбросить еще один раз, то она также упадет гербом вверх.

Решение. Интуиция говорит нам, что длинные серии одинаковых исходов маловероятны, и чем длиннее серия, тем вероятнее ее прерывание на следующем исходе эксперимента. На самом же деле вероятность того, что в очередной раз выпадет герб, не зависит от того, как падала монета в предыдущих экспериментах. Следовательно, искомая вероятность $p = 1/2$.

4. В тире 5 мишеней. На огневой позиции три стрелка. Каждый стрелок выбирает мишень независимо от других и делает один выстрел без промаха. Найти вероятность событий:

а) все стрелки выберут разные мишени;
б) все стрелки выберут одну и ту же мишень;
в) все стрелки выберут последнюю мишень;
г) три мишени окажутся без пробивок.

Решение. Пронумеруем мишени в последовательности 0, 1, 2, 3, 4 и каждому стрелку поставим в соответствие определенный разряд трехзначного пятеричного числа. Тогда все исходы стрельбы окажутся закодированными. Например, код 000 говорит о том, что все стрелки выбрали мишень с нулевым номером; 322 — первый стрелок выбрал третью мишень, а второй и третий — вторую; 142 — первый стрелок выбрал первую мишень, второй — четвертую, третий — вторую и т.д. Общее число исходов эксперимента равно числу всех трехразрядных пятеричных чисел, которые могут начинаться с нуля. Согласно формуле числа размещений из 5 по 3 с повторениями существует 5^3 таких чисел, тогда $|\Omega| = 125$. Это знаменатель для всех четырех пунктов данной задачи. Находим числители и соответствующие вероятности:

а) исходу, когда стрелки выбрали разные мишени, соответствует трехзначное пятеричное число, в котором нет повторяющихся цифр. Следовательно, задача сводится к тому, чтобы определить, сколько существует таких чисел, которые могут начинаться и с нуля. Их количество можно найти по формуле числа размещений из 5 по 3 без повторений:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$$

Таким образом, вероятность того, что все стрелки выберут разные мишени, равна $p = 60/125 = 12/25$;

б) вероятность того, что все пули попадут в одну мишень, равна $5/125$, так как всего существует пять чисел, в которых все цифры одинаковые: 000, 111, 222, 333, 444. Сократив полученную дробь, получаем $p = 1/25$;

в) вероятность того, что все пули попадут в последнюю мишень, равна $1/125$, так как существует единственное число 444, обозначающее выбор четвертой мишени всеми стрелками;

г) если три мишени остались без пробивок, значит, поражены две мишени. Этим исходам соответствуют пятеричные трехразрядные числа, в каждом из которых одна цифра встречается точно два раза. Следовательно, в каждом числе содержатся две различные цифры. Две цифры из пяти можно выбрать 10 способами (по формуле числа сочетаний без повторений). Выберем одну их этих пар, например 0 и 1. Из них можно составить 6 трехзначных чисел, в каждом из которых две одинаковые цифры: 001, 010, 011, 100, 101, 110. Если взять другую пару, например 2 и 3, то получим еще 6 новых чисел: 223, 232, 233, 322, 323, 332. Так как всего имеется 10 пар, то общее количество искомых чисел равно $6 \cdot 10 = 60$. Следовательно, $p = 60/125 = 12/25$.

5. В библиотеке имеется по одному экземпляру шести новых книг о приключениях. Пронумеруем их 0, 1, 2, 3, 4, 5. Четверо посетителей независимо друг от друга сделали заявки каждый на одну из этих книг. Найти вероятность того, что никто не выберет последнюю книгу.

Решение. Так как книги пронумерованы, то каждый вариант их выбора можно представить четырехразрядным шестеричным числом. Всего существует 6^4 таких чисел. Следовательно, $|\Omega| = 1296$. Это знаменатель искомой вероятности. Переходим к числителю. Он равен 5^4. Столько существует четырехразрядных шестеричных чисел, в каждом из которых нет цифры 5 (поскольку пятую книгу никто не выбрал). Искомая вероятность $p = 625/1296$.

6. Некто задумал двухразрядное пятеричное число, при этом числа могут начинаться с нуля: 00, 01, 02, 03, 04, 10, 12, ..., 44. Найти вероятность того, что это число четное.

Решение. Всего существует 25 двухразрядных пятеричных чисел, следовательно, знаменатель найден. Переходим к числителю. В любой системе счисления четные и нечетные числа чередуются. Если основание системы счисления четно, то нечетных n-разрядных чисел столько же, сколько и четных. При нечетном же основании четных n-разрядных чисел на единицу больше. Следовательно, искомая вероятность $p = 13/25$.

7. Игральную кость подбрасывают три раза и каждый раз записывают число выпавших очков. Например, 436 — это значит, что при первом броске выпало 4 очка, при втором — 3, при третьем — 6. Последовательность полученных чисел рассматривается как трехразрядное число. Найти вероятность того, что это число является симметричным, т.е. одинаково читается как слева направо, так и справа налево.

Решение. Всего цифр 6, следовательно, знаменатель искомой вероятности равен $6^3 = 216$. Находим числитель. Число является симметричным, если оно начинается и оканчивается одной и той же цифрой. В середине может стоять любая цифра. Следовательно, всего таких симметричных чисел существует 36. Искомая вероятность $p = 36/216 = 1/6$.

8. Задумано пятизначное десятичное число, не начинающееся с нуля. Найти вероятность того, что цифры в числе идут в порядке убывания слева направо, например: 75321, 98640 и т.д.

Решение. Цифры убывают, следовательно, повторяющихся цифр в числе нет. Для нахождения количества таких чисел можно использовать формулу числа сочетаний из 10 по 5 без повторений. Получится 252. Это числитель искомой вероятности. Знаменатель равен

90000 — общее количество всех пятизначных десятичных чисел, начинающихся не с нуля. Тогда $p = 252/90000 = 7/2500$.

9. Из коробки, в которой 8 конфет «Весна» и 5 конфет «Ромашка», наугад берут 6 конфет. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется точно 3 конфеты «Весна».

Решение. Три конфеты «Весна» можно выбрать 56 способами (число сочетаний из 8 по 3). Кроме того, среди выбранных должно быть 3 конфеты «Ромашка». Их можно выбрать 10 способами (число сочетаний из 5 по 3). Тогда 6 конфет, среди которых 3 конфеты «Весна» и 3 конфеты «Ромашка», можно выбрать $56 \cdot 10 = 560$ способами. Это числитель искомой вероятности. Знаменатель ее равен числу способов выбрать 6 конфет из 13, т.е. из общего числа конфет. Оно равно 1716 (число сочетаний из 13 по 6). Тогда $p = 560/1716 = 140/429$.

10. В урне 6 белых шаров и 4 черных. Наугад берут 3 шара. Найти вероятность того, что шары:

а) все белые;
б) все черные;
в) один белый и два черных;
г) один черный и два белых.

Решение. Находим число точек Ω-пространства: $|\Omega| = 120$ (число сочетаний из 10 по 3). Это знаменатель для каждого из четырех пунктов данной задачи. Находим для них числители и соответствующие вероятности:

а) три белых шара из 6 можно выбрать 20 способами, тогда $p = 20/120 = 1/6$;

б) три черных шара из 6 можно выбрать 4 способами, тогда $p = 4/120 = 1/30$;

в) один белый шар можно выбрать 6 способами, два черных шара из четырех можно выбрать 6 способами. Тогда один белый и два черных шара могут быть выбраны $6 \cdot 6 = 36$ способами. Искомая вероятность $p = 36/120 = 3/10$;

г) один черный шар из 4 можно выбрать 4 способами, 2 белых из шести — 15 способами. Один черный и два белых шара могут быть выбраны 60 способами. Тогда $p = 60/120 = 1/2$.

11. Из колоды, в которой 36 карт, наугад вынимают две карты. Найти вероятность того, что среди выбранных карт нет ни одного туза.

Решение. Две карты из 36 можно выбрать 630 способами (число сочетаний из 36 по 2). Это знаменатель искомой вероятности. Находим числитель. Существует 496 пар карт, среди которых нет тузов (число сочетаний из 32 по 2). Искомая вероятность $p = 496/630 = 248/315$.

12. Некто задумал десятизначное двоичное число, которое может начинаться и с нуля. Найти вероятность того, что в нем точно три единицы, причем рядом стоящих единиц в числе нет?

Решение. В задуманном числе три единицы и 7 нулей. Запишем в ряд 7 нулей. Единицы могут располагаться только между нулями, а также слева и справа от нулей. Поскольку нулей всего 7, то для размещения трех единиц имеется 8 мест. Три единицы по этим восьми местам могут быть расположены 56 способами (число сочетаний из 8 по 3). Всего десятизначных двоичных чисел существует $2^{10} = 1024$. Следовательно, искомая вероятность $p = 56/1024 = 7/128$.

13. На полку в случайном порядке поставили 3 книги по физике и 6 книг по химии. Какова вероятность того, что слева и справа окажутся книги по химии?

Решение. Так как слева и справа находятся книги по химии, то между ними в произвольном порядке могут быть расположены 3 книги по физике и 4 — по химии. Всего существует 35 вариантов их расположения (число сочетаний из 7 по 4). Это числитель искомой вероятности. Общее число всех возможных вариантов размещения девяти книг равно 84 (по формуле числа перестановок с повторениями). Следовательно, искомая вероятность $p = 35/84 = 5/12$.

14. Два раза подбрасывают игральную кость. В результате первого броска выпадает число $0 < a < 7$, в результате второго — число $0 < b < 7$. Найти вероятность событий:

а) число $a - b$ будет положительным, не равным нулю;

б) число $a + b$ будет не больше 7;

в) число $|a - b|$ будет не равным нулю и не равным единице.

Решение. Всего существует 36 исходов эксперимента. Это знаменатель искомой вероятности для всех трех случаев. Находим числители:

а) существует 6 исходов, когда $a = b$. Из оставшихся 30 исходов половина соответствует случаю, когда $a > b$, то есть число $a - b$ будет положительным. Следовательно, числитель равен 15. Тогда искомая вероятность $p = 15/36 = 5/12$;

б) перебором легко установить, что существует 15 случаев, когда $a + b > 7$:

$2 + 6 = 8$, $6 + 2 = 8$, $4 + 4 = 8$, $3 + 5 = 8$, $5 + 3 = 8$,
$4 + 5 = 9$, $5 + 4 = 9$, $3 + 6 = 9$, $6 + 3 = 9$, $4 + 6 = 10$,
$6 + 4 = 10$, $5 + 5 = 10$, $5 + 6 = 11$, $6 + 5 = 11$, $6 + 6 = 12$.

Следовательно, число исходов, когда $a + b$ не больше 7, равно 21. Это искомый числитель. Тогда $p = 21/36 = 7/12$;

в) существует 15 исходов эксперимента, когда $a > b$ и $a - b$ является не равным нулю положительным числом. Удалим из них 5 случаев, для которых сумма равна единице: $2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5 - 4 = 6 - 5 = 1$. Останется 10 исходов. Прибавим к ним еще 10, которым соответствует неравенство $a < b$. Получим 20 исходов для случая, когда число $|a - b|$ не равно нулю и не равно единице. Следовательно, числитель искомой вероятности равен 20 и $p = 20/36 = 5/9$.

3.9. Теорема умножения для независимых событий

События A и B называются независимыми, если появление одного из них не приводит к изменению вероятности другого. Теорема умножения в этом случае имеет вид

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B),$$

т.е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей. Эта теорема распространяется и на n событий:

$$p(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdots p(A_n) \cdot$$

Пример 1. Монету подбрасывают два раза. Найти вероятность того, что в первом броске выпадет герб (это событие A), а во втором — цифра (событие B).

Решение. Находим вероятности отдельных событий: $p(A) = 0{,}5$; $p(B) = 0{,}5$. Тогда $p(AB) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$, так как события A и B независимы.

Пример 2. Три раза подбрасывают игральную кость. Найти вероятность того, что сначала выпадет четное число (событие A), затем — нечетное число, не превышающее 3 (событие B), после чего — число, кратное 5 (событие C).

Решение. $p(A) = 1/2$, так как $A = \{2, 4, 6\}$; $p(B) = 1/3$, так как $B = \{1, 3\}$; $p(C) = 1/6$, так как $B = \{5\}$.

Все события независимы, следовательно, $p(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Упражнения

1. (НАФ). Из колоды, в которой 36 карт, наугад берут одну карту, смотрят, какая это карта, и возвращают ее в колоду. Затем снова наугад вынимают карту. Найдите вероятность того, что первая карта — туз, вторая — король.

2. Стрелок производит два выстрела по мишени. Вероятность попадания при однократном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность поражения мишени выстрелами:

(ШЕР) только первым; (ТПО) только вторым; (ММ7) двумя выстрелами.

3. Три орудия производят один залп по мишени. Вероятность попадания первого орудия равна 0,5, второго — 0,6, третьего — 0,7. Найдите вероятность попадания в мишень:

(ТОР) только первого орудия; (РОН) только второго орудия;
(АЛИ) только третьего орудия; (БЕГ) всех трех орудий.

3.10. Теорема умножения для зависимых событий

Теорему поясним на примере. В урне 3 черных шара и 5 белых. Наугад вынимают один шар, затем — второй. Найти вероятность того, что оба они белые.

Рассмотрим два случая, полагая, что событие A — первый шар белый, B — второй шар белый:

а) перед тем как вынуть второй шар, первый возвращается в урну. В этом случае события A и B независимы, и вероятность вынуть два белых шара определяется по теореме умножения для независимых событий: $p(A) = 5/8$; $p(B) = 5/8$; $p(AB) = 25/64$;

б) первый шар не возвращается в урну. В этом случае события A и B являются зависимыми, так как после события A условия для события B изменились: теперь в урне осталось 7 шаров, среди которых 4 белых. Искомая вероятность определяется по формуле, представляющей собой теорему умножения для зависимых событий: $p(AB) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$, где $p(B/A)$ — условная вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A состоялось; $p(A/B)$ — условная вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B состоялось. Находим $p(AB)$: $p(A) = 5/8$; $p(B/A) = 4/7$; $p(AB) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$.

Упражнения

1. В урне 10 шаров: 5 белых и 5 черных. Из урны наугад вынули один шар (без возврата) — оказался белый. Вынули второй (также без возврата) — снова белый. Найдите вероятность того, что если последовательно без возврата вынуть еще два шара, то оба они будут: а) (ЧТЗ) белыми; б) (345) черными.

2. Из букв разрезной азбуки составлено слово МАТЕМАТИКА. Это слово рассыпали. Затем по одной наугад выбрали 4 карточки и сложили их в один ряд. Найти вероятность того, что получится слово: а) (898) КАМА; б) (АЙС) КЕТА; в) (МИК) ТЕМА.

3.11. Теорема сложения вероятностей

Если события A и B, относящиеся к одному и тому же Ω-множеству, несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Пример 1. Игральная кость подброшена один раз. События: A — выпало число 3; B — выпало число 4. Найти вероятность того, что выпадет 3 или 4.

Решение. Согласно приведенной теореме $p(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, поскольку в данном случае события A и B несовместны и $p(A) = 1/6$; $p(B) = 1/6$.

Если события A и B совместны, то вероятность их суммы определяется с использованием другой теоремы:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Пример 2. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность того, что выпавшее число будет четным (событие A) или превышающим 3 (событие B).

Решение. По условию $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{4, 5, 6\}$; $AB = \{4, 6\}$. Находим их вероятности: $p(A) = 1/2$; $p(B) = 1/2$; $p(AB) = 1/3$. Искомая вероятность $p(A + B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Обе теоремы распространяются и на большее число событий. Например, в случае трех событий A, B и C теорема для несовместных событий имеет вид

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C).$$

В случае трех совместных событий A, B и C получается более сложное выражение:

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC).$$

3.12. Формула полной вероятности

Рассмотрим задачу. Допустим, что известно: если спортсмен поедет на соревнования в Новосибирск, то он победит там с вероятностью 0,3, а если поедет в Омск, то победит с вероятностью 0,6. Какова вероятность победы?

В такой постановке задача не имеет решения, поскольку чтобы где-либо победить, туда надо поехать, а вероятности поездок ни в Омск, ни в Новосибирск в условии не указаны. Дополним задачу этими сведениями. Пусть H_1 обозначает событие: поездка в Новосибирск, H_2 — поездка в Омск. Предположим, что $p(H_1) = 0,6$, $p(H_2) = 0,4$.

Тогда вероятность победы в Новосибирске равна:

$$p(H_1) \cdot p(A/H_1) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18,$$

где $p(A/H_1)$ — вероятность победы при условии поездки в Новосибирск.

Аналогично находим:

$$p(H_2)\cdot p(A/H_2) = 0,4\cdot 0,6 = 0,24,$$

где $p(A/H_2)$ — вероятность победы при условии поездки в Омск.

События H_1 и H_2 несовместны (так как спортсмен не может поехать одновременно и в Новосибирск, и в Омск), следовательно, искомая вероятность победы равна:

$$p(A/H_1+H_2) = p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) =$$

$$= 0,18 + 0,24 = 0,42.$$

Особенность рассмотренного примера в том, что событие A может состояться только с одним из несовместных событий H_1 и H_2, образующих полную группу событий. Как сказано выше, такие события называются гипотезами.

В общем случае если событие A может произойти только с одним из n несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, ..., H_n, то вероятность события A определяется по формуле

$$p(A) = p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + \ldots + p(H_n)\cdot p(A/H_n).$$

В математической литературе ее обычно называют формулой полной вероятности.

Пример 1. В ящике три типа диодов: 25 диодов первого типа, 35 — второго и 40 — третьего. Вероятность того, что 10000 часов проработает диод первого типа, равна 0,1; для диода второго типа эта вероятность равна 0,2; для диода третьего типа — 0,3. Наугад вынимают один диод. Найти вероятность того, что он проработает 10000 часов.

Решение. Обозначим буквой A событие: диод проработал 10000 часов. Введем гипотезы: H_1 — извлечен диод первого типа; H_2 — извлечен диод второго типа; H_3 — извлечен диод третьего типа.

Согласно условию их вероятности равны:

$$p(H_1) = 0,25;\quad p(H_2) = 0,35;\quad p(H_3) = 0,4.$$

Условные вероятности также заданы в условии примера:

$$p(A/H_1) = 0,1;\ \ p(A/H_2) = 0,2;\ \ p(A/H_3) = 0,3.$$

По формуле полной вероятности получаем ответ:

$$p(A) = 0,25\cdot 0,1 + 0,35\cdot 0,2 + 0,4\cdot 0,3 = 0,215.$$

Пример 2. В урне 5 белых шаров и 3 черных. Наугад вынимают один шар и, не глядя, удаляют его. После этого вторично вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот вторично извлеченный шар — белый?

Решение. Вводим гипотезы: H_1 — был удален белый шар; H_2 — был удален черный шар. Вероятности гипотез: $p(H_1) = 5/8$; $p(H_2) = 3/8$. Пусть A обозначает: вторично извлечен белый шар. Тогда $p(A/H_1) = 4/7$, $p(A/H_2) = 5/7$. Искомая вероятность

$$p(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}.$$

Упражнения

1. (ШЕХ). Спортсмен может поехать на соревнования в Новосибирск с вероятностью 0,2, в Омск — с вероятностью 0,3, никуда не поехать — с вероятностью 0,5. Если спортсмен поедет на соревнования в Новосибирск, то он победит там с вероятностью 0,3, а если поедет в Омск, то победит с вероятностью 0,6. Какова вероятность победы?

2. (ИАМ). Даны 3 урны. В первой — 6 белых шаров и 4 черных, во второй — 8 белых и 4 черных, в третьей — 10 белых и 5 черных. Наугад выбирают урну и наугад вынимают из нее один шар. Найдите вероятность того, что он белый.

3. В первой урне 3 белых и 4 черных шара, во второй — 5 белых и 3 черных. Из первой урны наугад вынимают один шар и, не глядя, перекладывают его во вторую урну. Снова вынимают один шар. Найдите вероятность того, что он белый, если его извлечь:

(ЗЗН) из первой урны; (ДМШ) из второй урны.

3.13. Формула Байеса

В предыдущем подразделе рассмотрена формула полной вероятности. Согласно этой формуле для нахождения вероятности события A необходимо знать вероятности гипотез $p(H_1)$, $p(H_2)$, ..., $p(H_n)$ и условные вероятности $p(A/H_1)$, $p(A/H_2)$, ..., $p(A/H_n)$. Теперь предположим, что событие A состоялось. Вероятности гипотез при этом изменятся. Новые значения вероятностей гипотез, вычисленные при условии, что событие A произошло, определяются по формуле Байеса. Выводится эта формула очень просто.

Допустим, что известны вероятности гипотез $p(H_1)$, $p(H_2)$, ..., $p(H_n)$ и известны условные вероятности $p(A/H_1)$, $p(A/H_2)$, ..., $p(A/H_n)$. Тогда можно найти и полную вероятность $p(A)$. Теперь предположим, что опыт произведен и событие A произошло. Найдем вероятность того, что при этом состоялось событие H_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$):

$$p(A \cdot H_i) = p(A) \cdot p(H_i/A) = p(H_i) \cdot p(A/H_i).$$

Эти соотношения получены согласно теореме умножения для зависимых событий. Отсюда находим:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)\cdot p(A/H_i)}{p(A)}.$$

Это и есть формула Байеса (Томас Байес (1702–1761), или Бейес, — английский математик).

Таким образом, вероятности $p(H_i)$ являются априорными. Они вычисляются до опыта. Вероятности $p(H_i/A)$ — это апостериорные вероятности тех же гипотез. Они вычисляются после проведения опыта, когда результат его известен, то есть событие A состоялось.

Пример 1. Даны три внешне одинаковые урны. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй — 2 белых и 3 черных шара, в третьей — все шары белые. Наугад выбирают урну и так же наугад вынимают из нее один шар. Оказалось, что это белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут: а) из первой урны; б) из второй; в) из третьей.

Решение. Обозначим буквой A событие: вынут белый шар. Прежде чем вынуть шар, необходимо выбрать урну. Вводим гипотезы: H_1 — выбор первой урны; H_2 — выбор второй урны; H_3 — выбор третьей урны. Так как выбор урн равновозможен, то

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = 1/3.$$

Находим условные вероятности:

$$p(A/H_1) = 3/7;\ \ p(A/H_2) = 2/5;\ \ p(A/H_3) = 1.$$

Находим априорную вероятность события A:

$$p(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{64}{105}.$$

До извлечения шара вероятность выбора первой урны равнялась 1/3. Но после опыта, когда вынутым оказался белый шар, вероятность того, что он был вынут из первой урны, изменилась. Согласно формуле Байеса она равна

$$p(H_1/A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{105}{64} = \frac{15}{54}.$$

Вероятности того, что шар был вынут из второй и из третьей урн, находим точно таким же образом по формуле Байеса:

$$p(H_2/A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{105}{64} = \frac{7}{32};\quad p(H_3/A) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{105}{64} = \frac{15}{54}.$$

Пример 2. Обратимся к условию предыдущего примера. В нем рассмотрен случай, когда в результате эксперимента вынутым оказался белый шар. Но вынуть можно и черный шар. Это значит, что событие «вынут белый шар» не состоялось и необходимо рассматривать событие «вынут черный шар». Обозначим его той же буквой A. Очевидно, что априорные вероятности гипотез не изменились. Находим условные вероятности:

$$p(A/H_1) = 4/7; \; p(A/H_2) = 3/5; \; p(A/H_3) = 0.$$

Находим полную вероятность события A:

$$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{41}{105}.$$

Вероятности того, что черный шар был вынут из первой, второй и третьей урн, соответственно равны:

$$p(H_1/A) = 20/41; \; p(H_2/A) = 21/41; \; p(H_3/A) = 0.$$

Пример 3. Батарея из трех орудий готовит залп по мишени. Известно, что вероятность попадания при каждом выстреле первого орудия равна 0,6; второго — 0,7; третьего — 0,8. Известно также, что при одном попадании (любым орудием) мишень будет разрушена с вероятностью 0,1; при двух попаданиях — с вероятностью 0,4; при трех — с вероятностью 0,9. В результате произведенного залпа мишень оказалась разрушенной. Найти вероятность того, что это произошло в результате:

а) попадания только первого орудия (событие C_1);

б) попадания только второго орудия (событие C_2);

в) попадания только третьего орудия (событие C_3);

г) одного попадания любым орудием (событие $C_1\bar{C}_2\bar{C}_3 + \bar{C}_1C_2\bar{C}_3 + \bar{C}_1\bar{C}_2C_3$);

д) двух попаданий любых орудий (событие $C_1C_2\bar{C}_3 + C_1\bar{C}_2C_3 + \bar{C}_1C_2C_3$);

е) трех попаданий (событие $C_1C_2C_3$).

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Байеса, необходимо найти полную вероятность $p(A)$, где A — событие «мишень разрушена». Событие A может произойти только вместе с другими событиями — попаданиями орудий в мишень. Поэтому вводим гипотезы и находим их вероятности:

H_0 — все орудия промахнулись;
H_1 — попадание орудия 3, промах орудий 1 и 2;
H_2 — попадание орудия 2, промах орудий 1 и 3;
H_3 — попадание орудий 2 и 3, промах орудия 1;
H_4 — попадание орудия 1, промах орудий 2 и 3;
H_5 — попадание орудий 1 и 3, промах орудия 2;
H_6 — попадание орудий 1 и 2, промах орудия 3;
H_7 — попадание всех трех орудий;

$$p(H_0) = p(\bar{C}_1) \cdot p(\bar{C}_2) \cdot p(\bar{C}_3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024;$$

$p(H_1) = p(\bar{C}_1) \cdot p(\bar{C}_2) \cdot p(C_3) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,096;$
$p(H_2) = p(\bar{C}_1) \cdot p(C_2) \cdot p(\bar{C}_3) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,056;$
$p(H_3) = p(\bar{C}_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,224;$
$p(H_4) = p(C_1) \cdot p(\bar{C}_2) \cdot p(\bar{C}_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,036;$
$p(H_5) = p(C_1) \cdot p(\bar{C}_2) \cdot p(C_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144;$
$p(H_6) = p(C_1) \cdot p(C_2) \cdot p(\bar{C}_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,084;$
$p(H_7) = p(C_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$

Условные вероятности известны (они заданы):
$p(A/H_0) = 0$ (ни одного попадания);
$p(A/H_1) = 0,1$ (одно попадание);
$p(A/H_2) = 0,1$ (одно попадание);
$p(A/H_3) = 0,4$ (два попадания);
$p(A/H_4) = 0,1$ (одно попадание);
$p(A/H_5) = 0,4$ (два попадания);
$p(A/H_6) = 0,4$ (два попадания);
$p(A/H_7) = 0,9$ (три попадания).

Находим полную вероятность:

$$p(A) = 0 \cdot 0{,}024 + 0{,}1 \cdot 0{,}096 + 0{,}1 \cdot 0{,}056 + 0{,}4 \cdot 0{,}224 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}036 + 0{,}4 \cdot 0{,}144 + 0{,}4 \cdot 0{,}084 + 0{,}9 \cdot 0{,}336 = 0{,}502.$$

Переходим к нахождению апостериорных вероятностей гипотез:

а) вероятность того, что мишень оказалась разрушенной в результате попадания только первого орудия (орудия 2 и 3 при этом оба промахнулись), равна:

$$p(H_4/A) = \frac{p(H_4) \cdot p(A/H_4)}{p(A)} = \frac{0,036 \cdot 0,1}{0,502} = 0,00717;$$

б) вероятность того, что мишень оказалась разрушенной от попадания только второго орудия (орудия 1 и 3 промахнулись), равна:

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2) \cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{0,056 \cdot 0,1}{0,502} = 0,011155;$$

в) аналогично находим вероятность разрушения мишени третьим орудием (орудия 1 и 2 промахнулись):

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,096 \cdot 0,1}{0,502} = 0,01912;$$

г) находим вероятность того, что мишень разрушена одним попаданием. Так как попасть могло либо первое орудие, либо второе, либо третье, то

$$p\left[(H_1+H_2+H_4)/A\right]=\frac{\left[p(H_1)+p(H_2)+p(H_4)\right]\cdot p\left[A/(H_1+H_2+H_4)\right]}{p(A)}=$$

$$=\frac{(0,036+0,056+0,096)\cdot 0,1}{0,502}=0,03745;$$

д) находим вероятность того, что в мишень было два попадания:

$$p\left[(H_3+H_5+H_6)/A\right]=\frac{\left[p(H_3)+p(H_5)+p(H_6)\right]\cdot p\left[A/(H_3+H_5+H_6)\right]}{p(A)}=$$

$$=\frac{(0,224+0,144+0,084)\cdot 0,4}{0,502}=0,036016;$$

е) вероятность того, что мишень разрушена от попадания всех трех орудий, равна:

$$p(H_7/A)=\frac{p(H_7)\cdot p(A/H_7)}{p(A)}=\frac{0,336\cdot 0,9}{0,502}=0,60239.$$

Упражнения

1. Даны две внешне неразличимые урны. Известно, что в первой из них 4 белых и 2 черных шара, во второй — 5 белых и 4 черных. Наугад выбирают урну и извлекают из нее один шар. Он оказался белым. Найдите вероятность событий:

а) (ВАХ) шар извлечен из первой урны;

б) (НИН) шар извлечен из второй урны.

2. Три станка-автомата штампуют гайки. Все изготовленные ими гайки ссыпаются в один ящик. Производительность станков такова, что в наполненном ящике четвертая часть всех гаек изготовлена первым станком, 35 % всех гаек изготовлены вторым станком, остальные гайки изготовлены третьим станком. Известно, что в среднем первый станок выпускает 5 % бракованных гаек, второй — 4 %, третий — 2 %. Из ящика наугад выбирают гайку. Найдите:

а) вероятность того, что эта гайка изготовлена (ДМИ) первым станком, (АМБ) вторым станком, (613) третьим станком;

б) вероятность того, что случайно выбранная из ящика гайка оказалась бракованной, если она изготовлена (8ТП) первым станком, (ОЛЛ) вторым станком, (Л20) третьим станком;

в) (20А) вероятность того, что случайно выбранная из ящика гайка является бракованной;

г) вероятность того, что бракованная гайка изготовлена (7Р8) первым станком, (ЛАД) вторым станком, (РУТ) третьим станком.

3. Имеются две урны. В первой из них 3 черных и 6 белых шаров. Во второй — 5 черных и 4 белых. Из первой урны наугад выбрали один шар, не глядя, переложили его во вторую урну и все шары во второй урне перемешали. После этого из второй урны наугад вынимают один шар. Найти вероятность событий:

а) (ТАФ) шар белый;

б) (МА) из первой урны во вторую переложен белый шар, если наугад извлеченный из второй урны (после перекладывания) шар оказался белым;

в) (С72) переложен черный шар, если из второй урны (после перекладывания) был извлечен шар белого цвета.

3.14. Схема испытаний Бернулли

Пусть некоторый эксперимент (испытание, опыт), в результате которого случайное событие A может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$, повторяется n раз. Предполагается, что вероятность события A в каждом испытании остается неизменной, а исходы каждого эксперимента на результаты других испытаний никакого влияния не оказывают. Спрашивается, какова вероятность того, что событие A произойдет m раз ($m \le n$)? Такие задачи решаются с применением частной теоремы о повторении опытов [30, с. 53], известной также под названием схемы испытаний Бернулли [1, с. 420; 17, с. 23]:

$$p_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p_n(m)$ — вероятность того, что из п испытаний событие A состоится m раз. (С интегральной теоремой о повторении опытов можно ознакомиться по [17].)

П р и м е р 1. Монету подбрасывают 4 раза. Какова вероятность того, что она два раза упадет гербом вверх?

Решение. Всего возможно 16 исходов опыта: 0000, 0001, 0010, ..., 1111, где нуль обозначает «монета упала гербом вниз», единица — «монета упала гербом вверх». Из них согласно условию примера нас интересуют только те исходы, когда монета падает гербом вверх точно два раза. Число таких исходов равно 6 (число сочетаний из 4 по 2): 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. Вероятность каждого отдельного исхода равна $p^2(1-p)^2$, где p — вероятность того, что монета упадет гербом вверх, а $(1 - p)$ — вероятность противоположного события, то есть того, что монета упадет гербом вниз. В случае подбрасываемой монеты $p = 0{,}5$, следовательно, вероятность каждого отдельного исхода равна 0,0625, а вероятность того, что из четырех экспериментов два завершатся падением монеты гербом вверх, равна $0{,}0625 \cdot 6 = 0{,}375$.

П р и м е р 2. У стрелка 8 патронов. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что стрелок попадет в мишень точно три раза.

Решение. Если закодировать исходы стрельбы точно так же, как и в предыдущем примере, то каждый исход можно представить восьмиразрядным двоичным числом. Всего существует 256 таких чисел и столько же исходов стрельбы. Из них 56 исходов (число сочетаний из 8 по 3) соответствуют событию A — три попадания в мишень. Согласно вышеприведенной частной теореме о повторении опытов получаем:

$$p_8(3) = 56 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}15 = 0{,}0004052,$$

где $p_8(3)$ — вероятность трех попаданий в результате восьми выстрелов.

Упражнения

1. (ЛЕЙ). Монету подбрасывают 10 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет 3 раза.

2. (АОМ). Монету подбрасывают 8 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет 6 или 7 раз.

3. (ТПИ). В ящике 4 белых и 5 черных шаров. Из ящика наугад вынимают шар, записывают его цвет, а шар возвращают в ящик и все шары перемешивают. Так поступают 6 раз. Найдите вероятность того, что белый шар был вынут два раза (дес.).

4. Семерым участникам эксперимента предложено задумать по одному числу. При этом числа должны быть простыми (то есть имеющими точно два различных делителя) и не превышающими 7. Найдите вероятность:

(МММ) что трое из участников эксперимента задумают число 5;

(АЛУ) никто не задумает число 7.

5. Вероятность своевременного (без опоздания) прибытия электропоезда на станцию равна $3/5$. Найдите вероятность того, что электропоезд:

(К62) опоздает три раза за семь дней недели;

(ПТУ) ни разу не опоздает за всю неделю;

(651) ни разу не придет вовремя за всю неделю;

(ТТС) в течение первых пяти дней опоздает точно два раза.

3.15. Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли

Обратимся к примеру 2 предыдущего подраздела, где показано, что вероятность трех попаданий из восьми выстрелов равна 0,0004052. Аналогичным образом вычислим вероятность того, что стрелок попадет в мишень 5 раз. Получим другое число: 0,0121. Таким образом, вероятность пятикратного попадания в мишень больше, чем трехкратного. Спрашивается, какое число попаданий имеет наибольшую вероятность, то есть является наивероятнейшим?

Пусть n — число опытов, k — число, показывающее, сколько раз опыт заканчивается событием A, p — вероятность события A в каждом отдельном опыте, $q = 1 - p$ — вероятность события $\bar{A}$ в каждом отдельном опыте. Очевидно, что величина k может меняться в пределах от 0 до n. Если вычислить вероятности для каждого значения k, то окажется, что одно из них (возможно и два) будет иметь наибольшую вероятность. Обозначим его символом k_0. Для нахождения числа k_0 прежде всего необходимо определить, чему равно произведение np. Оно может быть целым или дробным. Если np — целое число, то $k_0 = np$.

Пример 1. Допустим, что стрелок делает 10 выстрелов, при этом будем считать, что вероятность попадания в мишень равна 0,8 для каждого выстрела. Найти наивероятнейшее число попаданий в мишень.

Решение. В данном случае имеем: $np = 0{,}8 \cdot 10 = 8$.

Получилось целое число, следовательно $k_0 = 8$, то есть вероятнее всего, что стрелок попадет в мишень 8 раз.

Полученный результат можно проверить. Для этого найдем вероятность того, что стрелок попадет в мишень 8 раз из 10 выстрелов:

$$p_{10}(8) = C_{10}^{8} p^8 q^2 = 45 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}3.$$

Если 8 — наивероятнейшее число попаданий, то любые отклонения от величины 8 приведут к уменьшению соответствующих вероятностей. Например, вероятность того, что стрелок попадет в мишень 7 раз, равна 0,2. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень 9 раз, равна 0,268. В обоих случаях вероятность меньше, чем 0,3, следовательно, 8 — это наивероятнейшее число попаданий.

В тех случаях, когда число np является дробным, необходимо найти число $np - q$, которое может быть дробным или целым. Если $np - q$ является дробным числом, то k_0 определяется из соотношения

$$np - q < k_0 < np + p,$$

где числа $np - q$ и $np + p$ отличаются одно от другого на единицу, вследствие чего между ними находится единственное целое число, которое и является значением величины k_0.

Если же число $np - q$ является целым, то получаем два наивероятнейших числа k_1 и k_2, где

$$k_1 = np - q; \quad k_2 = np - q + 1.$$

Пример 2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найти наивероятнейшее число попаданий в мишень при восьми выстрелах.

Решение. Согласно условию $n = 8$; $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$. Так как число $np = 4{,}8$ является дробным, то находим число $np - q$, которое также является дробным: $np - q = 4{,}4$. Следовательно, $4{,}4 < k_0 < 5{,}4$, откуда находим $k_0 = 5$, то есть наиболее вероятно пять попаданий в мишень.

Пример 3. У стрелка 9 патронов. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,7. Найти наивероятнейшее число попаданий в мишень при девяти выстрелах.

Решение. Исходные данные: $n = 9$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$. Находим: $np = 6{,}3$. Так как это число является дробным, то находим число $np - q$: $np - q = 6{,}3 - 0{,}3 = 6$.

Получилось целое число, следовательно, существует два наивероятнейших числа $k_1 = 6$, $k_2 = 7$ с одинаковыми вероятностями:

$$p_9(6) = p_9(7) = 0{,}267.$$

Упражнения

1. (Х2)! Шесть раз подбрасывают тетраэдр с гранями, пронумерованными в последовательности 1, 2, 3, 4 (напомним, что у тетраэдра всего 4 грани, из которых каждая представляет собой равносторонний треугольник). Найдите наивероятнейшее число бросков, в результате которых тетраэдр упадет четвертой гранью вниз; третьей гранью вниз.

2. (НЕМ). Из ящика наугад взяли 19 гаек. Вероятность быть годной для каждой гайки равна 0,9. Найдите наивероятнейшее число годных гаек среди 19 проверяемых.

3. (К56). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,78. Найдите наивероятнейшее число попаданий для 60 выстрелов.

4. (И55). Поступило 50 сообщений. В каждом из них вероятность искажения равна 0,1. Найдите наивероятнейшее число сообщений, переданных без искажений.

5. (ТТИ). В цех поступила партия кинескопов, всего 305 штук. Вероятность того, что случайно выбранный кинескоп исправен, равна 0,9. Найдите наивероятнейшее число исправных кинескопов во всей партии.

6. (МЕЧ). В цехе 100 станков. Вероятность того, что взятый наугад станок исправен, равна 0,95. Найдите наивероятнейшее число исправных станков.

7. (ИТА). Орудие с автоматической наводкой попадает в быстро движущуюся цель с вероятностью 0,9. Найдите наивероятнейшее число попаданий в цель при 50 выстрелах.

3.16. О формулах Лапласа и Пуассона

Запишем формулу Бернулли, приведенную в подразделе 3.14, в виде

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Из этой формулы видно, что с ростом значений величин m и n быстро увеличиваются вычислительные трудности. Разумеется, для современного компьютера вычисления по формуле Бернулли особой проблемы не составляют даже в тех случаях, когда значения m и n достигают нескольких сотен. Но это сейчас. В прежние времена ситуация была совершенно иной. Иоган Бернулли нашел свою формулу более 300 лет назад. Первая вычислительная машина появилась раньше. Ее создал в 1642 г. Блез Паскаль. Но она не могла выполнять операции деления и умножения, поэтому для расчетов по формуле Бернулли не годилась. Машина, способная умножать и делить, появилась спустя 200 лет. Ее создал русский математик Пафнутий Львович Чебышев. В принципе, машину Чебышева можно было использовать для расчетов по формуле Бернулли, но лишь в принципе, не более, так как она не могла обеспечить достаточно высокое быстродействие. Потребовалось еще около сотни лет, прежде чем появились компьютеры, обладающие реальными возможностями по выполнению громоздких вычислений. Таким образом, в течение длительного времени (около 300 лет) расчеты выполнялись только вручную, а это значит, что использование формулы Бернулли ограничивалось значениями m и n лишь в пределах первого десятка. На практике же встречались задачи с гораздо большими значениями m и n. Поэтому потребовалось заменить формулу Бернулли другой формулой, более простой и дающей не слишком большое отклонение от формулы Бернулли. Такую формулу нашел Пьер Симон Лаплас. Она имеет вид

$$p_n(m) = \frac{1}{\sigma}\varphi(x),$$

где $\sigma = \sqrt{npq}$, $x = \dfrac{m - np}{\sigma}$.

Функция $\varphi(x)$ табулирована, т.е. представлена в виде таблицы различных ее значений в зависимости от x.

Приведенная формула известна в математической литературе под названием локальной теоремы Лапласа. Ее частный случай (для $p = 1/2$) доказал в 1730 г. Муавр, а Лаплас обобщил теорему до любых $0 < p < 1$, поэтому ее иногда называют локальной теоремой Муавра — Лапласа.

Необходимо отметить, что формула Муавра — Лапласа дает достаточно хорошую точность вычисления, причем точность возрастает с увеличением значений величин m и n. Благодаря этому обстоятельству формула Муавра — Лапласа не потеряла своего значения и в настоящее время, поскольку вычисления по этой формуле как вручную, так и с применением компьютера осуществляются намного проще по сравнению с формулой Бернулли.

Однако формула Муавра — Лапласа имеет свои ограничения на значения m и n. Она бесполезна при необходимости вычисления вероятностей редких событий, то есть когда значение n велико, а m мало. В этих случаях используется приближенная формула вида

$$p_n(m) \approx \lambda^m e^{-\lambda} \frac{1}{m!},$$

где $\lambda = np$, при этом точность вычислений тем выше, чем больше n и меньше p. Данная формула дает хорошую точность, если $\lambda = np \leq 10$ [20 с. 378]. Эту формулу нашел Пуассон, поэтому в математической литературе она известна под названием формулы Пуассона.

3.17. Дискретная случайная величина

Понятие случайной величины. Переменная величина X называется случайной, если в результате эксперимента она случайно принимает одно из возможных значений (не менее чем из двух).

Пример 1. Один раз подбрасывают игральную кость. Случайная величина X — число выпавших очков. Она может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, если этими числами пронумерованы грани игральной кости. Если же грани пронумерованы каким-либо другим способом, то значения случайной величины изменятся, например: –3, –2, –1, 1, 2, 3.

Пример 2. Два раза подбрасывают игральную кость. В результате первого броска может выпасть число a, в результате второго — число b:

а) случайная величина X — сумма выпавших очков. Эта случайная величина может принимать значения 2, 3, 4, ..., 11, 12;

б) X — абсолютная величина разности чисел a и b. Величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, так как $1 \leq a \leq 6$ и $1 \leq b \leq 6$;

в) X — произведение чисел a и b. Возможные значения случайной величины: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36.

Пример 3. Из ящика, в котором восемь 100-ваттных ламп и четыре 60-ваттных, наугад выбирают 5 ламп. Случайная величина

X — число 100-ваттных ламп в выборке. Она может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Если случайная величина X — число 60-ваттных ламп в выборке, то значениями ее являются числа 0, 1, 2, 3, 4.

Пример 4. Монету подбрасывают 6 раз. Если случайная величина X — число выпавших гербов, то X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если X — номер броска, когда первый раз выпадет герб, то случайная величина X принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Герб может и ни разу не выпасть. Это также является значением случайной величины и его необходимо добавить к шести перечисленным.

Упражнения

Укажите значения, которые может принимать случайная величина X.

1. (ТПК). Три раза подброшена игральная кость. X — число бросков, в результате которых выпало число 5.

2. (ПКО). Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад вынули 6 карт. X — число вынутых тузов.

3. (ТЗО). Четыре раза подбрасывают монету. При этом герб выпал m раз и цифра — n раз. X — абсолютная величина разности чисел m и n.

4. (У65). Монету подбрасывают 5 раз. Герб выпал m раз и цифра — n раз. X — абсолютная величина разности чисел m и n.

5. (ЛЕЛ). Из четырех патронов вывернули лампочки, прочистили контактные соединения и все лампочки в случайном порядке снова ввернули в патроны. Случайная величина X — число лампочек, попавших в «свои» патроны, то есть в те патроны, в которых они находились до чистки.

Закон распределения случайной величины. Случайная величина считается заданной, если известны все ее значения и для каждого значения указана его вероятность. Перечень всех значений случайной величины и соответствующих вероятностей называется законом или рядом распределения дискретной случайной величины. Задается этот закон обычно таблицей. Ее построение проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. Случайная величина X — число выпавших гербов в результате четырехкратного подбрасывания монеты. Построить ряд распределения случайной величины.

Искомый ряд распределения представлен табл. 3.3. В этой таблице две строки, обозначенные X и $P(X)$, где X — значения случайной величины (согласно условию примера это числа 0, 1, 2, 3, 4), а $P(X)$ — вероятности соответствующих значений.

Таблица 3.3

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Первое значение случайной величины равно нулю, что обозначает событие: герб не выпал ни разу. Вероятность его равна $1/16$. Эта дробь записана во второй строке под числом «0». Следующее значение случайной величины X равно единице. Это событие: один раз выпал герб (следовательно, цифра выпала три раза). Вероятность этого события $P(1)=4/16=1/4$. Аналогично вычислены вероятности всех остальных значений случайной величины: $P(2)=6/8=3/8$; $P(3)=1/4$; $P(4) = 1/16$. Результаты вычисления можно проверить, воспользовавшись свойством ряда распределения: сумма вероятностей всех значений случайной величины равна единице. Разумеется, несколько ошибок могут скомпенсировать друг друга так, что сумма всех вероятностей окажется равной единице. Поэтому, строго говоря, результат, равный единице, нельзя считать абсолютным критерием правильности вычислений. Иное дело, если сумма вероятностей получилась не равной единице. В этом случае необходимо искать ошибку.

Пример 2. В ящике 10 диодов. Из них 4 одноамперных диода и 6 пятиамперных. Наугад берут 5 диодов. Случайная величина X — число одноамперных диодов среди выбранных. Построить ряд распределения случайной величины X.

Хотя в выборке 5 диодов, величина X значение 5 принять не может, поскольку в ящике только 4 одноамперных диода. С учетом этого строим ряд распределения (табл. 3.4).

Таблица 3.4

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	1/42	5/21	10/21	5/21	1/42

Пример 3. Задумано простое число в пределах 0—20. Случайная величина X — количество единиц в двоичном коде задуманного числа. Построить ряд распределения случайной величины X.

В диапазоне 0—20 имеется 8 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Представим их в двоичном коде и для каждого кода укажем, сколько в нем единиц:

2 — 00010 (одна единица); 11 — 01011 (три единицы);
3 — 00011 (две единицы); 13 — 01101 (три единицы);
5 — 00101 (две единицы); 17 — 10001 (две единицы);
7 — 00111 (три единицы); 19 — 10011 (три единицы).

Таблица 3.5

X	1	2	3
$P(X)$	1/8	3/8	1/2

Согласно этому списку случайная величина принимает три значения: 1, 2, 3. Соответствующие вероятности указаны в табл. 3.5.

Упражнения

Постройте ряд распределения случайной величины X.

1. Монету подбрасывают 5 раз. X — число выпавших гербов:

а) (ПЭЙ) укажите значения случайной величины;

б) (Е37)! укажите вероятности $P(2)$, $P(3)$.

2. В урне 4 шара. Наугад берут несколько шаров, но не менее одного. X — случайная величина, число извлеченных шаров:

а) (ЖНИ) укажите значения величины X;

б) (ИИТ) укажите вероятности $P(1)$, $P(3)$.

3. В урне 3 белых шара и 5 черных. Наугад берут 4 шара. X — случайная величина, число белых шаров в выборке:

а) (Л98) укажите значения случайной величины;

б) (НЫЖ)! найдите вероятности $P(0)$, $P(1)$;

в) (223)! укажите вероятности $P(2)$, $P(3)$.

4. Задумано кратное трем десятичное число, не превышающее 15. X — число единиц в двоичном представлении задуманного числа:

а) (Ц38) укажите значения случайной величины;

б) (ХВИ)! укажите вероятности наименьшего и наибольшего значений случайной величины.

5. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. У стрелка 4 патрона. Стрелок прекращает стрельбу после первого промаха. X — число попаданий в мишень:

а) (ЯОК) укажите значения случайной величины;

б) (ОСЯ)! укажите вероятность наименьшего значения случайной величины и вероятность следующего за ним значения (дес.);

в) (ОЙК)! укажите вероятность наибольшего и предыдущего значений случайной величины (дес.).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Ряд распределения предельно полно характеризует случайную величину. Однако непосредственное его использование возможно лишь в наиболее простых случаях, например, когда число значений случайной величины невелико — в пределах первого десятка, либо вероятности ее отдельных значений являются одинаковыми. В общем же случае непосредственное использование ряда распределения сопряжено со значительными трудностями, причем трудности растут с удлинением ряда значений случайной величины. Поэтому на практике используются более простые характеристики, отражающие лишь отдельные особенности закона распределения. Важнейшей из таких характеристик является математическое ожидание, представляющее собой среднее значение случайной величины, вокруг которого группируются все остальные ее значения.

Аналитически математическое ожидание записывается в виде следующей формулы:

$$M(X) = m_x = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_kp_k,$$

где $M(X)$ — математическое ожидание случайной величины X (используется также и другое обозначение: m_x); k — число значений случайной величины X; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ — значения случайной величины X; $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ — вероятности значений случайной величины X, при этом

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Как найти математическое ожидание, покажем на примерах.

Пример 1. В табл. 3.3 приведен ряд распределения случайной величины X, где X — число выпавших гербов в результате 4-кратного подбрасывания монеты. Согласно формуле математического ожидания получаем:

$$m_x = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2.$$

Пример 2. Воспользуемся рядом распределения, приведенным в табл. 3.4. Действуя точно так же, как и в первом примере, получаем:

$$m_x = 0 \cdot \frac{1}{42} + 1 \cdot \frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{10}{21} + 3 \cdot \frac{5}{21} + 4 \cdot \frac{1}{42} = 2.$$

Если подобным образом вычислить математическое ожидание для ряда, представленного табл. 3.5, то получим $m_x = 19/8$.

Различные случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание, могут отличаться одна от другой степенью разброса значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. Чтобы учесть эту особенность закона распределения случайной величины, вводится еще одна характеристика — дисперсия. Дисперсией называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left[(X - m_x)^2\right],$$

где $D(X)$ — дисперсия случайной величины X; $X - m_x$ — отклонение величины X от ее математического ожидания; $(X - m_x)^2$ — квадрат отклонения случайной величины X от ее математического ожидания.

Формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-m_x)^2\,p_i,$$

где k — число значений величины X; x_i — i-е значение случайной величины X; p_i — вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i.

Нахождение дисперсии проиллюстрируем на примере.

Пример 3. Математическое ожидание случайной величины X, заданной табл. 3.3, равно 2. В табл. 3.6 представлен ряд распределения для квадрата отклонения величины X от ее математического ожидания. Находим дисперсию:

$$D(X)=4\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=1.$$

Математическое ожидание случайной величины, заданной табл. 3.4, также равно 2. Найдем дисперсию (табл. 3.7):

$$D(X)=4\cdot\frac{1}{42}+1\cdot\frac{5}{21}+0\cdot\frac{10}{21}+1\cdot\frac{5}{21}+4\cdot\frac{1}{42}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}.$$

Таблица 3.6

$(X-m_x)^2$	4	1	0	1	4
$P(X)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Таблица 3.7

$(X-m_x)^2$	4	1	0	1	4
$P(X)$	1/42	5/21	10/21	5/21	1/42

Таким образом, при одинаковых математических ожиданиях дисперсия принимает различные значения.

Мода случайной величины. Для тех же целей, что и математическое ожидание, служит еще одна характеристика — *мода*. Модой называют то значение случайной величины, вероятность которого является наибольшей. Различают унимодальное и полимодальное распределения случайной величины. Унимодальное распределение характеризуется единственным значением X, имеющим наибольшую вероятность. Например, законы распределения, представленные табл. 3.3, 3.4, 3.5, являются унимодальными. В случае полимодального распределения таких значений X несколько (более одного). Примером полимодального распределения может служить ряд, построенный для случайной величины X, где X — число, выпавшее при однократно подброшенной игральной кости. В этом ряду вероятность каждого значения X равна $1/6$. Другим примером полимодального распределения является ряд для величины X, где X — число гербов, выпавших при пятикратном подбрасывании монеты. В этом случае $p(0)=1/32$, $p(1)=5/32$, $p(2)=10/32$, $p(3)=10/32$, $p(4)=5/32$, $p(5)=1/32$, откуда видно, что имеется два значения $X=2$ и $X=3$, вероятности которых являются наибольшими и равными $10/32=5/16$.

Упражнения

1. Монету подбрасывают два раза. Величина X — число выпавших гербов:

а) (50Т) найдите все значения случайной величины;

б) (Т2Т) найдите математическое ожидание.

2. Случайная величина X — число, выпавшее при однократном подбрасывании игральной кости:

а) (ТАМ) найдите все значения случайной величины;

б) (СОО) найдите математическое ожидание (дес.).

3. Два раза подбрасывают игральную кость. Сначала выпало число n_1, затем — число n_2. Найдите математическое ожидание случайной величины X, если:

а) (ИВШ) X — абсолютная величина разности чисел n_1 и n_2;

б) (Ы78) X — сумма выпавших очков; в) (КШИ) X — разность вида $n_1 - n_2$.

4. У стрелка 4 патрона. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,7. После первого попадания стрельба прекращается. Случайная величина X — число промахов. Найдите:

а) (ШИТ) $P(X=0)$, то есть вероятность того, что стрелок не сделает ни одного промаха (обыкн.);

б) (ЦПМ) $P(X=1)$, то есть вероятность одного промаха (обыкн.);

в) (ГОФ) $P(X=2)$, то есть вероятность двух промахов (обыкн.);

г) (КСУ) $P(X=3)$ (обыкн.); д) (МИХ) $P(X=4)$ (обыкн.);

е) (ПКК) математическое ожидание случайной величины X (обыкн.).

5. В коробке 8 разноцветных кубиков: один зеленый, три красных и четыре оранжевых. Наугад берут 4 кубика. Случайная величина X — число оранжевых кубиков среди выбранных. Найдите:

а) (ЛЮ7) все значения случайной величины;

б) (ВМБ) математическое ожидание;

в) (С95) моду; г) (ШМЛ) дисперсию.

6. В урне 3 зеленых шара, 3 синих и 4 белых. Наугад вынимают 4 шара. Случайная величина X — число белых шаров среди вынутых. Найдите:

а) (К71) все значения величины X; б) (28Е) моду; в) (УФЫ) математическое ожидание; г) (ВУЧ) дисперсию.

3.18. Задачи для самостоятельной работы

1. Монету подбросили два раза. Найдите вероятность событий:

а) (ЕНН) оба раза выпадет герб;

б) (АМК) оба раза выпадет цифра;

в) (КАС) герб выпадет точно 1 раз;

г) (ОРД) цифра выпадет точно 1 раз.

2. Монету подбросили 4 раза. Найдите вероятность событий:

а) (ЦП1) ни разу не выпадет герб;

б) (АЙХ) герб выпадет точно 2 раза;

в) (Е51) герб выпадет точно 1 раз;

г) (УМИ) герб выпадет точно 3 раза.

3. Монету подбросили 5 раз, и все 5 раз монета падала гербом вверх. Найдите вероятность того, что:

а) (ТИТ) если монету подбросить еще 3 раза, то все 3 раза выпадет герб;

б) (ДЕЛ) если монету подбросить еще 5 раз, то герб не выпадет ни разу.

4. Монету подбрасывают 10 раз. Найдите вероятность событий:

а) (591) герб выпадет точно 3 раза;

б) (512) герб выпадет точно 5 раз;

в) (РУЛ) герб и цифра будут чередоваться;

г) (МТЗ) цифра выпадет не менее 3 раз;

д) (8Т4) цифра выпадет не менее 5 раз;

е) (0А) герб выпадет четное число раз.

5. Монету подбрасывают 10 раз. Найдите вероятность событий:

а) (ВМК) в результате трех последних бросков ни разу не выпадет цифра;

б) (ЕНШ) герб выпдет не менее одного раза;

в) (499) сначала 5 раз выпадет герб, а затем 5 раз выпадет цифра;

г) (ГОЮ) среди первых 7 бросков 3 раза выпадет герб.

6. Игральную кость подбрасывают 1 раз. Найдите вероятность событий:

а) (К10) выпавшее число будет простым;

б) (Ж21) выпавшее число будет не менее единицы;

в) (АУК) выпавшее число будет делиться на 4;

г) (МОИ) выпавшее число не будет делиться на 3.

7. Игральную кость подбрасывают 2 раза. Найдите вероятность событий:

а) (ФУШ) выпавшие цифры будут одинаковыми;

б) (ПАЧ) в первом броске выпавшее число будет меньше, чем во втором;

в) (Р63) в первом броске выпавшее число будет не меньше, чем во втором;

г) (199) обе выпавшие цифры будут четными;

д) (ФИР) первое выпавшее число будет четным, а второе — нечетным;

е) (ИСС) выпавшие цифры будут разными.

8. Некто задумал двузначное десятичное число N (с нуля число не начинается). Найдите вероятность вариантов:

а) (ЛАТ) число N четное;

б) (39) цифры в числе одинаковы;

в) (ЕЛЕ) в числе N содержится хотя бы одна цифра 5;

г) (ЧОК) обе цифры в числе N простые числа;

д) (339) первая цифра в числе N меньше второй;

е) (ЭХП) число N начинается с цифры 6 и цифрой 6 оканчивается;

ж) (ЦКМ) обе цифры в числе нечетные;

з) (АЗО) каждая цифра не превышает 4.

9. Задумано троичное число N, не превышающее трех знаков (то есть оно может начинаться с нуля и выбирается из диапазона 0–222). Найдите вероятность того, что число N:

а) (ЦНВ) четное;

б) (ЯЗН) простое;

в) (ВИС) нечетное;

г) (ВОК) делится на 13;

д) (А8Д) делится на 4;

е) (ВИО) не превосходит 9.

10. Задумано четырехзначное десятичное число N (с нуля числа не начинаются). Найдите вероятность того, что в числе N:

а) (МЦР) все цифры простые числа;

б) (УРС) есть хотя бы одна цифра 5;

в) (БКБ) цифры идут в порядке возрастания;

г) (65Т) имеются точно две цифры 5.

11. Подбрасывают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма очков:

а) (МЯХ) равна 2;

б) (ПФИ) равна 10;

в) (ВЛЖ) равна 5;

г) (ЦФК) не превысит 3.

12. Подбрасывают две игральные кости. Найдите вероятность того, что:

а) (ТЫЛ) среди выпавших чисел хотя бы одно является простым числом;

б) (ФЭН) оба выпавших числа являются простыми числами;

в) (АНО) оба выпавших числа не являются простыми числами;

г) (1ТТ) абсолютная величина разности выпавших очков не превышает 4.

13. (ЛЕП). В партии, состоящей из 10 деталей, три детали являются дефектными. Из этой партии наугад взяли 4 детали. Найдите вероятность того, что точно одна из них будет дефектной.

14. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Наугад берут два шара. Найдите вероятность того, что они:

а) (ПВР) оба черные;

б) (ИЦВ) оба белые;

в) (ХБФ) разного цвета.

15. Три раза подбрасывают игральную кость, грани которой пронумерованы в последовательности 1, 2, 3, 4, 5, 6. Найдите вероятность событий:

а) (ЕЛЬ) выпадут числа 3, 3, 5;

б) (ЦЭЭ) все три раза выпадут четные цифры;

в) (117) первой выпадет цифра 3, последней — четная цифра;

г) (ЦВО) первой выпадет нечетная цифра, последней — не пятерка;

д) (0А5) первой выпадет не двойка, второй — двойка, третьей — не пятерка.

16. В тире три мишени. Перед мишенями три стрелка. Каждый стрелок самостоятельно, независимо от других, выбирает мишень и производит один выстрел без промаха. Найдите вероятность событий:

а) (ХТ5) все стрелки выберут первую мишень;

б) (ЕНУ) ни один стрелок не выберет первую мишень;

в) (ЦНЕ) никто не выберет вторую мишень;

г) (139) в каждой мишени окажется по одной пробивке;

д) (СЯО) в двух мишенях не будет ни одной пробивки;

е) (АСС) во второй мишени окажется две пробивки;

ж) (ПАР) в третьей мишени окажется одна пробивка.

17. Перед 4 мишенями 4 стрелка. Каждый стрелок самостоятельно выбирает мишень и производит один выстрел без промаха. Найдите вероятность событий:

а) (СЯХ) все мишени будут поражены;

б) (Р70) поражена будет только первая мишень;

в) (ИКО) все четыре стрелка выберут одну и ту же мишень;

г) (ЛАП) в четвертой мишени не окажется ни одной пробивки;

д) (ВСЕ) три мишени окажутся без пробивок;

е) (МТТ) точно две мишени окажутся без пробивок;

ж) (ЭЙС) первую мишень выберет хотя бы один стрелок.

18. В урне 7 пронумерованных шаров. Их номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из урны наугад вынимают один шар, записывают его номер, а шар возвращают в урну и все шары перемешивают. Точно так же поступают еще два раза, последовательно записывая номера шаров. Получится трехразрядное число. Найдите вероятность:

а) (ТПИ) что цифры в числе образуют возрастающую последовательность;

б) (ЛЯК) цифры в числе идут в порядке уменьшения;

в) (ШАН) в числе нет одинаковых цифр;

г) (7РО) каждая из цифр в числе меньше 5;

д) (ДДР) в числе имеется точно две одинаковые цифры;

е) (УРГ) в числе ни разу не встречается цифра 1;

ж) (ОТК) в числе имеется хотя бы одна цифра 1.

19. (ФЕЙ). Ребенок, не умеющий читать, рассыпал составленное из букв разрезной азбуки слово АКСИОМА и все карточки снова расположил в один ряд. Найдите вероятность того, что у него получилось то же самое слово АКСИОМА.

20. Каждая из 33 букв русского алфавита записана на отдельной карточке. Из этих 33 карточек наугад выбирают две. (Среди 33 букв русского алфавита 10 букв гласные, 21 — согласная. Твердый и мягкий знаки не являются ни гласными, ни согласными.) Найдите вероятность того, что на двух выбранных карточках:

а) (ПВЗ) обе буквы гласные;

б) (5Т1) обе буквы согласные;

в) (92В) одна буква гласная и одна согласная;

г) (НИС) нет ни гласных, ни согласных букв.

21. В колоде 36 карт. Найдите вероятность того, что среди двух случайно вынутых:

а) (ЗЯМ) пиковая дама;

б) (058) туз пик и дама пик;

в) (НОН) точно один туз;

г) (ТАП) один туз и один король;

д) (ЗУЛ) хотя бы один туз;

е) (Т73) нет ни королей, ни тузов;

ж) (ТИР) два короля;

з) (201) нет королей.

22. В урне 5 шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Наугад вынимают один за другим все шары и кладут один к другому в ряд. Найдите вероятность событий:

а) (ЕЖЖ) шары расположатся в последовательности 5, 4, 3, 2, 1;

б) (ПЕК) сначала в ряду будут шары с четными номерами (в любом порядке), а затем — с нечетными (также в любом порядке);

в) (Ю58) четные и нечетные номера будут чередоваться начиная с четного.

23. Монету подбрасывают 10 раз. Найдите вероятность того, что:

а) (ТИГ) в результате второго, третьего и четвертого бросков выпадет герб;

б) (АПО) сначала 5 раз выпадет герб, а затем 5 раз выпадет цифра;

в) (Ы39) сначала 4 раза подряд выпадет герб, а последний раз (то есть десятый) — цифра.

24. Из букв разрезной азбуки составлено слово АВТОМАТИЗАЦИЯ. Это слово рассыпали. Затем, случайно выбирая рассыпанные буквы, составили четырехбуквенное слово. Найдите вероятность того, что получится слово:

а) (454) вата;

б) (ГУД) зима;

в) (ДОФ) состоящее только из гласных букв;

г) (БУМ) состоящее только из согласных букв.

25. Два раза подбрасывают игральную кость. Число, выпавшее в результате первого броска, обозначим буквой a, в результате второго — буквой b. Найдите вероятность:

а) (ПИА) что число $a - b$ будет положительным, не равным нулю;

б) (ШИР) число $a + b$ будет не больше 7;

в) (КИС) число $|a - b|$ будет не равным нулю и не равным единице.

26. В стопе 7 тетрадей с желтой обложкой и 4 тетради с синей. Из стопы случайно вынимают две тетради. Найдите вероятность:

а) (ЧЕК) что обе тетради будут с желтой обложкой;

б) (НУН) тетради будут с обложками разных цветов;

в) (НУЖ) обе тетради будут одного цвета (обе желтые либо обе синие).

27. Группа студентов в период сессии решила сдавать экзамены в следующем порядке: математика, физика, география, история. Деканат также предложил свой вариант последовательности сдачи экзаменов. Найдите вероятность:

а) (ОРТ) что вариант деканата полностью совпадет с решением группы;

б) (Л27) вариант деканата совпадет с решением группы только по одному предмету;

в) (УЧА) вариант деканата не совпадет с решением группы ни по одному предмету.

28. Некто задумал десятичное число из диапазона 1—19 включительно (числа с нуля не начинаются). Найдите вероятность вариантов:

а) (ЕРШ) в задуманном числе нет четных цифр;

б) (1А1) в задуманном числе есть и четная цифра и нечетная;

в) (УФИ) задуманное число является нечетным или простым.

29. Монету подбрасывают 8 раз. Найдите вероятность событий:

а) (789) герб выпадет столько же раз, сколько и цифра;

б) (НЕК) начиная с четвертого броска герб и цифра будут чередоваться (а что было до четвертого броска — не имеет значения);

в) (АЯС) сначала выпадет герб, а затем герб не выпадет ни разу.

30. На полке 8 учебников. На эту полку поставили двухтомник А.П. Чехова. Место для каждого тома выбиралось случайно. Найдите вероятность:

а) (РКТ) что оба тома окажутся рядом;

б) (КНО) между томами А.П. Чехова будет четное число учебников;

в) (РАД) тома А.П. Чехова расположатся не рядом и ни одного из его томов не будет ни в начале, ни в конце всего ряда книг.

31. Дано 8 карточек с номерами 1, 2, 3, ..., 8. Карточки перемешали, после чего в случайном порядке все их расположили в один ряд. Найдите вероятность:

а) (ФАР) что цифры 2, 3, 4 в полученном ряду расположатся в порядке возрастания, но не обязательно рядом;

б) (185) рядом окажутся карточки с номерами 5 и 6;

в) (Т53) цифры 2 и 5 нигде в последовательности не окажутся рядом.

32. Грани кубика пронумерованы следующим образом: –3, –2, –1, 1, 2, 3. Кубик подбрасывают два раза. Найдите вероятность событий:

а) (5ИР) сумма выпавших очков неотрицательное число;

б) (ФИТ) первое выпавшее число меньше второго;

в) (М38) сумма выпавших очков не равна нулю.

33. На полке 12 книг. Из них 7 справочников и 5 учебников. Наугад берут 4 книги. Найдите вероятность:

а) (85К) что на полке останется 5 справочников и 3 учебника;

б) (ФРИ) среди выбранных будет только один справочник;

в) (ТТА) все выбранные книги справочники.

34. Задумано 8-значное двоичное число (числа могут начинаться с нуля). Найдите вероятность:

а) (ДВС) что в нем 4 единицы и две из них занимают два старших разряда;

б) (ПЕЛ) четыре средних разряда занимают единицы;

в) (ЛУШ) в первой половине числа единиц столько же, сколько во второй.

35. В ящике четыре М-гайки (с метрической резьбой) и десять Д-гаек (с дюймовой резьбой). Наугад берут n гаек. Найдите вероятность:

а) (ХХХ) что при $n = 8$ половина из них М-гайки;

б) (АЯЦ) при $n = 6$ число М-гаек будет больше числа Д-гаек;

в) (Ш51) при $n = 7$ будет две М-гайки и пять Д-гаек.

36. Игральную кость, шесть граней которой пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, подбрасывают 3 раза. Обозначим: a — число, выпавшее в результате первого броска; b и c — в результате второго и третьего бросков соответственно. Найдите вероятность того, что выполнится условие:

а) (КША) $a + b = c$;

б) (ЭХТ) $a + b > c$;

в) (5ТХ) $a + b < c$.

37. Некто задумал десятичное число N, где $0 \le N \le 36$. Найдите вероятность:

а) (ВКБ) что число может быть представлено в виде произведения трех простых множителей;

б) (БАМ) это число является квадратом натурального числа (число 0 не относится к натуральным числам);

в) (245) сумма цифр задуманного числа есть простое число.

38. Из букв слова АВТОБУС случайно берут 4 буквы. Найдите вероятность того, что среди выбранных не будет:

а) (ЯМЗ) букв А, О, Б, У;

б) (ДВА) букв Т и О;

в) (С26) буквы С.

39. Перед пятью мишенями 5 стрелков. Каждый стрелок случайно выбирает мишень и делает один выстрел без промаха. Найдите вероятность событий:

а) (НУМ) в каждой мишени будет пробивка;

б) (ТЕД) точно две мишени окажутся без пробивок;

в) (794) точно три мишени будут без пробивок.

40. Четверо выпускников средней школы независимо друг от друга выбирают вуз. В их распоряжении 6 вузов. Найдите вероятность:

а) (АОТ) что все четверо выберут один и тот же вуз;

б) (ЯКО) все четверо окажутся в разных вузах;

в) (КИН) точно четыре вуза из шести не выберет никто.

41. Два раза подбрасывают игральную кость. Обозначим: a — число, выпавшее в результате первого броска; b — в результате второго. Найдите вероятность событий:

а) (ЕМШ) a — простое число, b не является простым числом;

б) (НИР) $a+b$ — простое число; в) (56Я) a/b — целое число.

42. Некто задумал 9-значное троичное число, не содержащее нулей. Найдите вероятность того, что в этом числе:

а) (УСС) три двойки, с двойки оно не начинается и не оканчивается единицей;

б) (ПЫЛ) единиц вдвое больше, чем двоек;

в) (9Р1) двойки нигде не стоят рядом.

43. На карточках разрезной азбуки записаны цифры 1, 2, 3, 4, а на других карточках записаны буквы А, Б, В, Г. Все 8 карточек перемешали, затем случайно выбрали 4 карточки и положили их в ряд. Найдите вероятность:

а) (ВАЛ) что среди выбранных 2 карточки будут с цифрами и 2 — с буквами:

б) (63Т) первыми в ряду будут две цифры, а затем — две буквы;

в) (ТВР) цифры и буквы в ряду чередуются.

44. В ящике 6 исправных диодов. Случайно туда положили 5 неисправных диодов. Из ящика наугад берут n диодов. Найдите вероятность:

а) (85Р) что при $n = 4$ все диоды окажутся исправными;

б) (ИОФ) при $n = 4$ исправных диодов среди вынутых будет больше, чем неисправных;

в) (ШУО) при $n = 5$ в ящике исправных диодов останется столько же, сколько и неисправных.

45. В тире 6 мишеней. Перед мишенями 4 стрелка. Каждый стрелок самостоятельно выбирает мишень и делает один выстрел без промаха. Найдите вероятность событий:

а) (КАЙ) точно четыре мишени окажутся без пробивок;

б) (ЮМИ) в одной из них будет две пробивки, а в двух других — по одной;

в) (ЛТЗ) в одной из мишеней будет 3 пробивки и одна — в другой.

46. Задумано пятиразрядное троичное число (с нуля числа не начинаются). Найдите вероятность:

а) (ОРД) что на месте старшего разряда окажется цифра 2;

б) (КУК) задуманное число будет четным;

в) (Д2Т) в задуманном числе не будет единиц.

47. Игральную кость подбрасывают 5 раз. Найдите вероятность событий:

а) (489) цифра 5 выпадет точно два раза;

б) (Н32) цифра 5 выпадет только в результате четвертого броска;

в) (БЫЛ) в результате первого и последнего бросков выпадет четная цифра.

48. На пути движения автомобиля 5 светофоров, каждый из которых пропускает автомобиль с вероятностью, равной 0,7. Найдите вероятность:

а) (ЛЕА) что первый светофор пропустит, а второй задержит (дес.);

б) (РА.ДК) автомобиль будет задержан только пятым светофором (дес.);

в) (72.ДК) ни один светофор не задержит автомобиль (дес.).

49. Наугад записано трехразрядное троичное число (с нуля числа не начинаются). Найдите вероятность вариантов:

а) (ФИШ) это число является простым;

б) (5ЯЯ) одна цифра в записи повторяется точно два раза (например, 112, 212);

в) (У29) в десятичном представлении число является двухразрядным.

50. Стрелок ведет стрельбу до первого попадания в мишень, после чего стрельбу прекращает. У стрелка 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 3/5. Найдите вероятность событий:

а) (РОИ) у стрелка останутся неизрасходованными 2 патрона;

б) (ЯОС) стрелок поразит мишень лишь последним выстрелом;

в) (РЕМ) стрелку не удастся поразить мишень.

51. В колоде 36 карт. Из нее наугад вынимают две карты. Найдите вероятность вариантов:

а) (ВОН) обе они не тузы;

б) (ФУТ) хотя бы одна из них король;

в) (568) хотя бы одна из них пиковой масти.

52. На пустую полку в случайном порядке ставят 4 книги с желтой обложкой и 5 книг с зеленой обложкой. Найдите вероятность:

а) (714) что на полке не будет рядом стоящих книг с желтой обложкой;

б) (ВВЛ) на полке не будет рядом стоящих книг с зеленой обложкой;

в) (ЖВК) цвета обложек будут чередоваться.

53. В урне 6 белых и 7 черных шаров. Наугад вынимают n шаров. Найдите вероятность событий:

а) (РВЗ) при $n = 4$ черных шаров среди вынутых будет больше, чем белых;

б) (АУС) при $n = 5$ в урне останется поровну белых и черных шаров;

в) (С11) при $n = 4$ в урне останется 6 черных шаров и 3 белых.

54. В урне 6 пронумерованных шаров. Их номера 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поочередно вынимают (без возврата) 4 шара и записывают их номера. Найдите вероятность:

а) (Г32) что получится число 4632;

б) (УКА) среди записанных будет одна четная цифра и три нечетных (в любом порядке);

в) (939) номера шаров будут только возрастать или только убывать.

55. Слово «авиация», составленное из букв разрезной азбуки, рассыпали и наугад взяли две карточки. Найдите вероятность событий:

а) (19Я) в выборке нет одинаковых и нет согласных букв;

б) (ЧУК) одна буква гласная и одна — согласная;

в) (НУТ) среди выбранных согласных букв нет.

56. В русском алфавите 33 буквы: гласных — 10, согласных — 21 и два знака — твердый и мягкий. Случайно выбирают одну букву и записывают ее. Затем также наугад выбирают еще одну букву. Очевидно, что при этом возможен повтор. Найдите вероятность:

а) (МЯР) вторая буква твердый знак;

б) (210) обе буквы одинаковые;

в) (Е23) обе буквы гласные.

57. Наугад записано десятичное число $9 < a \le 99$. Найдите вероятность того, что в числе:

а) (ЭРФ) нет цифры 5;

б) (ДОП) имеется точно одна цифра 6 (и какая-либо другая);

в) (917) и первая и вторая цифры превышают 6.

58. В ящике 6 гаек с резьбой М3 и 5 гаек с резьбой М4. Наугад берут 5 гаек. Найдите вероятность событий:

а) (ДИЙ) в ящике останутся только гайки с резьбой М3;

б) (482) среди выбранных будет 2 гайки М3 и 3 гайки М4;

в) (ДВК) среди выбранных будет больше гаек М3, чем гаек М4.

59. В магазине 6 видов шоколадных конфет. Четыре покупателя независимо от других выбирают по одной конфете. Найдите вероятность событий:

а) (ЦК8) все они купят разные конфеты;

б) (Р79) все выберут конфету одного и того же вида;

в) (ИИ1) точно 4 вида конфет никто не выберет.

60. Два раза подбрасывают игральную кость. Найдите вероятность событий:

а) (ЦИС) если из суммы выпавших чисел вычесть 7, то получится отрицательное число (то есть $a + b < 0$, где a — первое выпавшее число, b — второе);

б) (ОКА) если к сумме выпавших чисел прибавить 7, то получится двузначное десятичное число (не начинающееся с нуля);

в) (БУЛ) если сумму выпавших чисел удвоить, то получится одноразрядное десятичное число.

61. В урне 7 белых и 5 черных шаров. По одному наугад вынимают 5 шаров без возвращения их в урну. Найдите вероятность событий:

а) (НИР) все вынутые шары будут белыми;

б) (510) среди вынутых будет хотя бы один черный шар и хотя бы три — белых;

в) (АРО) первым будет черный шар, а все остальные — белые.

62. На 10 карточках записаны 10 цифр: на каждой одна цифра. Из них по одной наугад выбирают 4 карточки и приставляют одну к другой. Получится четырехзначное десятичное число (очевидно, что оно может начинаться с нуля). Найдите вероятность того, что в числе:

а) (65И) точно 2 нуля;

б) (Х55) цифры идут в порядке возрастания;

в) (Ц23) все цифры разные.

63. В колоде 36 карт. По одной наугад вынимают 4 карты. Найдите вероятность:

а) (Т39) что это будут валет, дама, король, туз;

б) (ЭЙХ) сначала будут вынуты 2 туза, а затем — 2 короля;

в) (ШЕИ) две первые карты будут пиками, а остальные — бубновой масти.

64. У двух стрелков по 2 патрона. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7, второй — с вероятностью 0,8. Стрельба ведется поочередно по одной и той же мишени: сначала делает выстрел первый стрелок, после него — второй, затем снова первый и заканчивает стрельбу второй. Найдите вероятность того, что после четырех выстрелов:

а) (БУК) в мишень будет 3 попадания (дес.);

б) (ТИК) в мишень будет 4 попадания (дес.);

в) (А26) в мишень не будет ни одного попадания (дес.).

65. Некто случайно записал пять десятичных чисел, каждое из диапазона 0–9 включительно. Случайная величина X — число четных чисел среди пяти записанных. Найдите:

а) (ТТЗ) $M(X)$; б) (344) моду; в) (НОЙ) дисперсию.

66. На полку поставлены пять учебных пособий по физике. На эту же полку случайным образом поставлены два справочника. Случайная величина X — число учебников, которые расположены между справочниками. Найдите:

а) (ВДК) $M(X)$; б) (КЫР) моду; в) (КЛЯ) дисперсию.

67. Некто произвольным образом записал троичное пятизначное число. Случайная величина X — число двоек в записанном пятизначном числе. Найдите:

а) (ЗЕН) $M(X)$; б) (ДОК) моду; в) (Я57) дисперсию.

68. Для зачета приготовлено 10 вопросов. Студент знает ответы только на 7 вопросов. Преподаватель произвольно выбрал из 10 вопросов три и предложил их студенту. Случайная величина X — число вопросов среди выбранных, на которые студент не знает ответов. Найдите:

а) (ПШС) $M(X)$; б) (239) моду; в) (МВ1) дисперсию.

69. В ящике 5 стальных заклепок, 5 медных и 5 алюминиевых. Наугад берут 4 заклепки. Случайная величина X — число медных заклепок в выборке. Найдите:

а) (ЦНН) $M(X)$; б) (ТГ6) моду; в) (ЯВЦ) дисперсию.

70. В коробке 4 красных карандаша и 4 синих. Наугад вынимают 4 карандаша. Случайная величина X — число красных карандашей среди вынутых. Найдите:

а) (СЫР) $M(X)$; б) (ВЭШ) моду; в) (587) дисперсию.

71. У тетраэдра грани пронумерованы следующим образом: 1, 2, 3, 4. Тетраэдр подбрасывают 2 раза. Случайная величина X — сумма выпавших очков. Найдите:

а) (ЭТО) $M(X)$; б) (43Ш) моду; в) (224) дисперсию.

72. На столе лежит стопа тетрадей. Среди них 4 тетради в клетку и 6 — в линейку. Наугад берут 4 тетради. Случайная величина X — число тетрадей в клетку среди взятых. Найдите:

а) (ДЕМ) $M(X)$; б) (ХМЕ) моду; в) (ВДИ) дисперсию.

73. Два раза подбрасывают игральную кость. Случайная величина X — разность выпавших очков (по абсолютной величине). Найдите:

а) (ШВР) $M(X)$; б) (ТВС) моду; в) (ВЖК) дисперсию.

74. В тарелке 3 конфеты «Ласточка» и 5 конфет «Весна». Наугад берут 4 конфеты. Случайная величина X — число конфет «Весна» в выборке. Найдите:

а) (ВТЖ) $M(X)$; б) (962) моду; в) (РВН) дисперсию.

75. Некто задумал десятичное число из диапазона 0–80 включительно. Случайная величина — число знаков в троичном представлении задуманного числа (троичные числа с нуля не начинаются, исключение — одноразрядное число «0»). Найдите:

а) (ГДШ) $M(X)$; б) (МАУ) моду; в) (ВКБ) дисперсию.

76. В корзине 7 грибов: 5 подберезовиков и 2 подосиновика. Наугад берут 4 гриба. Случайная величина X — число подберезовиков в выборке. Найдите:

а) (КШС) $M(X)$; б) (ЦК2) моду; в) (КУР) дисперсию.

77. Перед одной мишенью 3 стрелка. Каждый из них делает один выстрел с вероятностью попадания в мишень, равной 2/5. Случайная величина X — число попаданий в мишень. Найдите:

а) (ЛБЦ) $M(X)$; б) (ТЦЛ) моду; в) (ТУТ) дисперсию.

78. В ящике 4 винта с полной резьбой и 3 — с неполной. Наугад берут 4 винта. Случайная величина X — число винтов с полной резьбой в выборке. Найдите:

а) (НТН) $M(X)$; б) (ТМТ) моду; в) (ОЕР) дисперсию.

79. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад выбирают 3 карты. Случайная величина X — число тузов в выборке. Найдите:

а) (НБ11) $M(X)$; б) (ЦТ90) моду; в) (170) дисперсию.

80. У стрелка 3 патрона. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 3/5. Случайная величина X — число попаданий в мишень в результате трех выстрелов. Найдите:

а) (9721) $M(X)$; б) (НУЗЗ) моду; в) (СБН) дисперсию.

81. Задумано десятичное число из диапазона 0–31 включительно. Случайная величина X — количество единиц в двоичном представлении задуманного числа. Найдите:

а) (ТВТ) $M(X)$; б) (146) моду; в) (905) дисперсию.

82. В ящик, где лежали 4 исправных диода, случайно положили 3 неисправных. Чтобы удалить их, поочередно вынимают по одному диоду и проверяют, исправен он или нет. Случайная величина X — число вынутых неисправных диодов до первого исправного. Найдите:

а) (СЯО) $M(X)$; б) (ОМ1) моду; в) (ЖАН) дисперсию.

83. В урне 3 белых шара и 4 черных. Наугад вынимают по одному шару без возврата. Случайная величина X — число вынутых белых шаров до появления черного. Найдите (дес.):

а) (ТОП) $M(X)$; б) (ЛИС) моду; в) (Е88) дисперсию.

84. Два раза подбрасывают тетраэдр с пронумерованными гранями: 1, 2, 3, 4. Случайная величина X — сумма выпавших чисел. Найдите (обыкн.):

а) (И35) $M(X)$; б) (Ш37) моду; в) (Ц25) дисперсию.

85. Задумано десятичное число из диапазона 11–20 включительно. Случайная величина X — число единиц в двоичном представлении задуманного десятичного числа. Найдите (обыкн.):

а) (Г27) $M(X)$; б) (ПАН) моду; в) (РОО) дисперсию.

86. Производятся два независимых выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Пусть x — число попаданий, y — число промахов. Случайная величина X — число $|x-y|$. Найдите (дес.):

а) (85.РП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (УС) математическое ожидание;

в) (УР) дисперсию.

87. У стрелков A и B по 2 патрона. Они ведут стрельбу по мишени до первого попадания одним из них (или до израсходования патронов). Стрелок A попадает в мишень с вероятностью 0,2, стрелок B — с вероятностью 0,4. Стрельбу начинает стрелок A. Случайная величина X — общее число промахов. Найдите (дес.):

а) (45.РЛ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (ДА) математическое ожидание;

в) (80) дисперсию (ответ округлить до тысячных).

88. Пассажир может ждать летной погоды только трое суток, после чего едет поездом. По прогнозам метеорологов вероятность летной погоды в первые сутки равна 0,5, во вторые — 0,6, в третьи — 0,8. Случайная величина X — число полных суток, которые пассажиру придется ждать. Найдите (дес.):

а) (ДТ.БЛ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (1С) математическое ожидание;

в) (44) дисперсию (ответ округлить до тысячных).

89. В ящике 4 детали первого сорта и 16 деталей второго сорта. Наугад берут 4 детали. Случайная величина X — число деталей первого сорта среди вынутых из ящика. Найдите (дес.):

а) (5П.БЯ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (1С1) математическое ожидание;

в) (ЗУ1) дисперсию.

90. В ящике 9 дефектных изделий и 21 без дефектов. Из ящика наугад выбирают три изделия. Случайная величина X — число дефектных деталей среди выбранных. Найдите (дес.):

а) (2А.Р7) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (АА2) математическое ожидание;

в) (302) дисперсию.

91. В урне 4 черных и 6 белых шаров. Из нее наугад вынимают 3 шара. Случайная величина X — число белых шаров среди вынутых. Найдите (обыкн.):

а) (1А.БП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (Р53) математическое ожидание;

в) (ТРЗ) дисперсию.

92. У стрелка 4 патрона. Стрельба ведется до первого попадания в мишень. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина X — число израсходованных патронов. Найдите (дес.):

а) (8Д.б7) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (814) математическое ожидание;

в) (684) дисперсию (ответ округлить до сотых).

93. Из 10 изделий 3 являются стандартными. Наугад берут 3 изделия. Случайная величина X — число стандартных изделий среди выбранных. Найдите (обыкн.):

а) (7Р.РП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (ПД5) математическое ожидание;

в) (СД5) дисперсию.

94. Проводятся испытания трех приборов. Вероятности того, что приборы выдержат испытания, равны 0,9; 0,8; 0,7 соответственно. Случайная величина X — число приборов, выдержавших испытания. Найдите (дес.):

а) (8А.РП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (2Р.Д8) математическое ожидание;

в) (ДО.У7) дисперсию.

95. Производят 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина X — число промахов. Найдите (дес.):

а) (4А.РЯ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (ДР.У8) математическое ожидание;

в) (А6.У7) дисперсию.

96. В урне 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4. Наугад вынимают два шара. Случайная величина X — сумма номеров вынутых шаров. Найдите (обыкн.):

а) (01.РП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (9С2) математическое ожидание;

в) (СР2) дисперсию.

97. Монету подбрасывают 4 раза. Случайная величина X — модуль разности числа выпавших гербов и числа выпавших цифр. Найдите (обыкн.):

а) (55.БП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (4АС) математическое ожидание;

в) (66С) дисперсию.

98. В урне 4 черных и 6 белых шаров. Из урны наугад вынимают один шар, записывают его цвет («черный» или «белый») и шар возвращают в урну. Так поступают 4 раза. Случайная величина X — число записей «белый». Найдите (дес.):

а) (36.БЛ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (2Р.48) математическое ожидание;

в) (А6.У7) дисперсию.

99. Три стрелка делают по одному выстрелу по мишени с вероятностями попадания 0,6, 0,7 и 0,8. Случайная величина X — число попаданий. Найдите (дес.):

а) (3П.БЯ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (8Т.Д8) математическое ожидание;

в) (ПД.Д7) дисперсию.

100. Известно, что в поступившей партии, состоящей из 6 изделий, два изделия являются неисправными. Наугад берут три изделия. Найдите (обыкн.):

а) (Р2.Р7) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (33П) математическое ожидание;

в) (Т3П) дисперсию.

101. Стрелки A и B, имеющие по два патрона, поочередно стреляют по одной мишени. Стрельба прекращается при попадании одного из стрелков. Стрелок A попадает в мишень при однократном выстреле с вероятностью 0,8, стрелок B — с вероятностью 0,6. Стрельбу начинает стрелок A. Случайная величина X — общее число израсходованных патронов. Найдите (дес.):

а) (6Р.РЯ) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (ДОУ) математическое ожидание;

в) (П1У) дисперсию (ответ округлить до тысячных).

102. Дано 10 карточек. На трех из них записана цифра 2, на одной — 3, на двух — 4, на четырех — 5. Наугад берут одну карточку. Случайная величина X — число, записанное на карточке. Найдите (дес.):

а) (73.БП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (3ТР) математическое ожидание;

в) (ДР.Д8) дисперсию.

103. Стрелок A делает два выстрела по мишени. По другой мишени делает два выстрела стрелок B. У стрелка A — m попаданий, у стрелка B — n попаданий. Случайная величина X — число $|m-n|$. Найдите (дес.):

а) (07.Б7) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (Т7Т) математическое ожидание;

в) (2Р.У8) дисперсию (ответ округлить до тысячных).

104. В коробке 7 белых шаров и 3 цветных. Наугад берут 5 шаров. Случайная величина X — число цветных шаров среди взятых. Найдите (обыкн.):

а) (ОС.РП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (5АТ) математическое ожидание;

в) (Р4Т) дисперсию.

105. Из четырех карточек, на каждой из которых записана одна цифра, составлено число 2413. Это число рассыпали и наугад взяли две карточки. Случайная величина X — сумма чисел, записанных на извлеченных карточках. Найдите (обыкн.):

а) (ОФ.БП) ряд распределения (набрать первую строку, затем — вторую);

б) (НВХ) математическое ожидание;

в) (ВРХ) дисперсию.

4. Алгебра логики (булева алгебра)

4.1. Вводные понятия

Двоичные числа. Всякое число N в позиционной системе счисления с основанием q можно представить в виде полинома

$$N = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + a_{n-2} q^{n-2} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0.$$

Коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ изображают цифры системы счисления. Количество цифр равно q, т. е. каждый из коэффициентов может принимать значения 0, 1, 2, ..., $q-1$. Для десятичной системы $q = 10$.

В настоящее время используется и двоичная система счисления. Ее основание $q = 2$, следовательно, в ней имеется только две цифры: 0 и 1.

Перевод десятичного числа в двоичное поясним на примере числа 37:

$$\begin{array}{cccccc} 37 & 18 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Здесь две строки. В первой каждое следующее число меньше предыдущего вдвое. Если число не делится на два, то его уменьшаем на единицу. Во второй строке единицами отмечены нечетные числа, нулями — четные. Читая эти цифры слева направо (то есть так, как они записаны), получаем искомое двоичное число: $37|_{10} = 100101|_2$.

Для перевода $(n+1)$-разрядного двоичного числа в десятичное можно воспользоваться развернутой записью числа двоичной системы:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Запишем в десятичной системе двоичное число 100101. Согласно его записи:

$$n = 5; \quad a_0 = a_2 = a_5 = 1; \quad a_1 = a_3 = a_4 = 0.$$

Тогда $100101|_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37|_{10}$.

Над двоичными числами можно выполнять те же операции, что и над десятичными. Главной из них является операция сложения.

Сложение двоичных чисел осуществляется поразрядно, с запоминанием единиц переноса, точно так же, как и в десятичной системе. Поясним это на примере. Пусть $a = 101011$, $b = 101110$, найдем их сумму $a + b$.

Запишем числа a и b одно под другим, совместив младшие разряды:

	1	0	1	0	1	1	— число a;
	1	0	1	1	1	0	— число b;
1	0	1	1	0	0	1	— число $a + b$;
	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	— переносы.

Как и в десятичной системе, суммирование начинаем с младшего разряда:

а) $1 + 0 = 1$, переноса нет, под цифрой 1 записываем в скобках нуль;

б) во втором разряде $1 + 1 = 10$, т.е. сумма равна нулю и есть единица переноса. Записываем ее под результирующим нулем второго разряда суммы;

в) в третьем разряде $0 + 1 = 1$, но еще надо прибавить единицу переноса из второго разряда, тогда $0 + 1 + 1 = 10$. Сумма равна нулю и есть единица переноса;

г) в четвертом разряде суммируются две единицы с единицей переноса из третьего разряда: $1 + 1 + 1 = 11$. Сумма равна 1 и есть единица переноса;

д) в пятом разряде $0 + 0 + 1 = 1$, т.е. сумма равна единице, переноса нет;

е) в шестом разряде $1 + 1 = 10$. Сумма равна нулю, а единица переноса образует седьмой разряд суммы $a + b$.

Другие арифметические операции рассматривать не будем, так как в дальнейшем изложении материала они не понадобятся.

Упражнения

1. Переведите в десятичную систему счисления двоичные числа:
(МОЛ) 10010; (ТМЕ) 10011110;
(КВК) 1110001; (АУТ) 10001000;
(БВХ) 11010001; (59Р) 11111100;
(ЗОИ) 10000001; (ХЦС) 11111111.

2. Переведите в двоичную систему десятичные числа:
(УСЕ) 12; (ЛВ5) 25; (149) 64; (353) 16;
(АХ7) 30; (ШНБ) 31; (992) 10; (ПВК) 32;
(АХА) 60; (624) 17; (968) 49; (ШЛВ) 63.

3. Представте сумму двоичных чисел в двоичной системе:
(891) 1010 + 1101; (ПТ5) 1111 + 100; (5Г8) 1111 + 11111;
(РТ2) 1100 + 1000; (ПВ6) 11111 + 1; (344) 100 + 10100.

4. (ГАР). Перечислите все двоичные 4-значные числа, содержащие точно одну единицу. Их десятичные эквиваленты наберите в порядке возрастания.

5. Представьте в десятичной системе двоичные числа:

(ОСС)!	0110;	0111;	1001;	0001;	1110;
(МХТ)!	1101;	1010;	0100;	1000;	0011;
(ВММ)!	0001;	1000;	0100;	1011;	0101.

6. Укажите из нижеперечисленных десятичные числа, двоичные эквиваленты которых содержат точно две единицы:

(ТЗС) 3 7 9 12 15;	(ЛЕЮ) 3 8 9 14 18;
(ТЗИ) 3 10 20 24 28;	(ММЕ) 1 4 6 13 14;
(КАЯ) 6 10 13 17 19;	(ТЗА) 2 3 5 8 12.

7. (ОХО). Введите в устройство двоичные эквиваленты одноразрядных десятичных чисел, являющихся простыми числами.

8. В результате замены крестиков единицами или нулями будут получаться различные двоичные числа. Все их десятичные эквиваленты введите в устройство в порядке возрастания (например: запись 1××0 дает числа 8, 10, 12, 14).

(ШЛА) 11×	(ЕКТ) ××0×	(ОУФ) ×11×	(ОХС) 0×××
(КР4) ×××0	(ИРИ) 010×	(ШАК) ××11	(КМ2) ×00×
(ИЛМ) ×0×1	(НС5) ××1×	(РЯО) 01××	(УМР) 0××0
(ШУЗ) 0××1	(МЛУ) 1×××	(ТЕП) ××00	

Понятие высказывания. Высказывание — это некоторое утверждение в виде повествовательного предложения, по содержанию которого можно сказать, истинно оно или ложно. Примеры истинных высказываний: «Река Волга впадает в Каспийское море»; «Существуют четные числа, делящиеся на 3»; «Луна — спутник Земли». Примеры ложных высказываний: «В Томске водятся кентавры»; «Варшава — столица Японии»; «$2 \times 3 = 7$»; «Все простые числа нечетны».

Существуют утверждения, которые со временем меняли свою истинность по мере развития науки. Например: «Солнце вращается вокруг Земли». Это высказывание длительное время считалось истинным. Теперь же оно ложно.

Встречаются утверждения, относительно истинности которых невозможно сказать что-либо определенное ввиду отсутствия способов их доказательства или опровержения. Например: «Существует телепатическая связь». По мере развития науки это утверждение может стать либо истинным, либо ложным.

Иногда утверждения объявляются истинными без доказательств. Например: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данной». Это утверждение Евклида. А Н.И. Лобачевский о том же утверждает совсем другое: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данной». Во втором высказывании утверждается нечто, противоположное первому. Однако оба высказывания истинны! Возможно ли это? Да. Оба они являются аксиомами, которые, как известно, принимаются истинными без доказательств.

Таким образом, утверждения могут быть истинными, ложными и не истинными и не ложными одновременно. Мы в дальнейшем будем рассматривать только такие утверждения, которые являются либо истинными, либо ложными. Для удобства высказывания условимся обозначать латинскими буквами. Например, можно считать, что A — это высказывание «Идет дождь». Если оно истинно, то пишут $A = 1$. Тогда запись $A = 0$ обозначает: высказывание «Идет дождь» ложно.

Буква, обозначающая высказывание, — это переменная, принимающая одно из двух значений — либо 0, либо 1. Такую переменную называют двоичной.

Упражнения

1. (ОАВ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) если оно упадет, то оно разобьется;
2) река Лена впадает в море Лаптевых;
3) широкая лента шире узкой;
4) А.С. Пушкин — русский поэт XIX века;
5) случается, что стреляет и незаряженное ружье;
6) знание только тогда знание, когда оно приобретено усилием мысли, а не памятью.

2. (ЗШМ). Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) в нашей Галактике, кроме планеты Земля, существуют другие планеты, на которых есть жизнь;
2) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;
3) операция арифметического сложения коммутативна;
4) все делать честно — выгоднее;
5) существует целое число, которое делится на число π без остатка;
6) любое четное число в нечетной степени четно.

3. (БМК). Укажите номера утверждений, которые не являются истинными и не являются ложными:

1) человек произошел от обезьяны;
2) мы с вами все — очень хорошие люди;
3) и куда это тебя занесло?
4) инопланетяне когда нибудь посетят нашу Землю;
5) в ночь на 1 января всегда идет снег;
6) хорошее лучше плохого.

4. (УКР). Укажите номера утверждений, которые могут быть истинными (при определенных условиях):

1) на улице идет дождь;

2) $101 + 11 = 1000$;

3) все простые числа не делятся на 2;

4) и заяц научится спички зажигать, если его долго бить;

5) площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей.

4.2. Аксиомы булевой алгебры

Джордж Буль — ирландский математик и логик (1815–1864), впервые сформулировал основные положения алгебры логики, вследствие чего алгебру логики называют также булевой алгеброй.

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется аксиомами вида

$$A = 1, \text{ если } A \neq 0; \quad A = 0, \text{ если } A \neq 1.$$

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения и т.д. В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют дизъюнкцией, конъюнкцией, инверсией.

Операция дизъюнкции обозначается знаком $\vee$: $A \vee B$. Однако если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака $\vee$ можно писать «+», не забывая, разумеется, что знак плюс обозначает дизъюнкцию: $A + B$. Этим знаком мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Операция дизъюнкции, называемая иногда логическим сложением, определена следующими аксиомами:

$$0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1; \quad 1 + 0 = 1; \quad 1 + 1 = 1.$$

Первые три аксиомы согласуются с обычной арифметикой. А четвертая может вызвать недоумение. Здесь необходимо иметь в виду, что единица обозначает не количество, а тот факт, что некоторое утверждение является истинным. Например, пусть A обозначает: «На улице тепло»; B — «Светит солнце». Что будет обозначать $A + B$? Это сложное высказывание: «На улице тепло или светит солнце». Оно истинно, если $A = 1$, или $B = 1$, или $A = B = 1$. В связи с тем, что в сложном высказывании два простых высказывания соединены союзом ИЛИ, дизъюнкцию иногда называют операцией ИЛИ.

Вторая операция — конъюнкция. Она обозначается знаками $\wedge$, &. Но, как и в случае дизъюнкции, этими знаками лучше не пользоваться. Конъюнкция — «родня» арифметическому умножению, поэтому вместо знака $\wedge$ будем использовать точку: $A \cdot B$ либо вообще не указывать никакого знака: $A \wedge B = A \cdot B = AB$.

Операция конъюнкции (логическое умножение) определяется аксиомами:

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Вернемся к предыдущему примеру и рассмотрим сложное высказывание AB. В отличие от дизъюнкции конъюнкция AB читается так: «На улице тепло и светит солнце». Два простых высказывания соединены союзом И, поэтому конъюнкцию нередко называют операцией И.

Третья операция — инверсия, или отрицание. Обозначается чертой над буквой: $\overline{A}$. Например, если A — «На улице темно», то $\overline{A}$ — «На улице не темно».

Инверсия определяется следующими аксиомами: $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$, т.е. отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь.

Таким образом, полный список аксиом имеет вид:

1) $0 + 0 = 0$; 3) $1 + 0 = 1$; 5) $0 \cdot 0 = 0$; 7) $1 \cdot 0 = 0$; 9) $\overline{0} = 1$;
2) $0 + 1 = 1$; 4) $1 + 1 = 1$; 6) $0 \cdot 1 = 0$; 8) $1 \cdot 1 = 1$; 10) $\overline{1} = 0$.

Упражнения

1. (1ПЛ). Укажите номера аксиом, относящихся к дизъюнкции:
1) $0 + 0 = 0$; 2) $1 \cdot 1 \neq 0$; 3) $\overline{1} = 0$;
4) $1 + 0 = 1$; 5) $1 + 1 = 1$; 6) $1 \cdot 0 = 0$.

2. (ЛКК). Укажите номера верных записей:
1) $1 + 0 = 1$; 2) $1 \cdot 0 = 0$; 3) $0 + 1 = 0$;
4) $1 + 1 = 1$; 5) $1 \cdot 1 = 1$; 6) $0 \cdot 1 \neq 0$.

3. (АДМ). Укажите номера аксиом, относящихся к конъюнкции:
1) $0 \cdot 1 = 0$; 2) $1 + 0 = 1$; 3) $\overline{1} = 0$;
4) $0 \cdot 0 = 0$; 5) $0 + 0 = 0$; 6) $1 \cdot 1 = 1$.

4.3. Свойства дизъюнкции и конъюнкции

Приведем основные свойства дизъюнкции и конъюнкции:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции коммутативны:

$$A + B = B + A; \quad AB = BA;$$

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством ассоциативности:

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (AB)C = A(BC);$$

в) конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции:

$$A(B+C) = AB + AC;$$

г) дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции:

$$A + BC = (A+B)(A+C);$$

д) дизъюнкция и конъюнкция обладают свойством идемпотентности:

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A,$$

откуда следует, что в булевых многочленах нет ни коэффициентов, ни степеней.

4.4. Теоремы одной переменной

Список основных теорем одной переменной имеет вид:

1) $A + 0 = A$; 4) $A \cdot 1 = A$; 7) $A + \overline{A} = 1$;
2) $A \cdot 0 = 0$; 5) $A + A = A$; 8) $A \cdot \overline{A} = 0$;
3) $A + 1 = 1$; 6) $A \cdot A = A$; 9) $\overline{A} = A$.

Все они доказываются при помощи аксиом путем сплошного перебора значений переменной. Докажем первую теорему. Если $A = 0$, то $0 + 0 = 0$, что является верным утверждением согласно первой аксиоме. Пусть теперь $A = 1$. Получаем $1 + 0 = 1$. Согласно второй аксиоме также получаем верный результат. В обоих случаях результаты не противоречат аксиомам, следовательно, теорема верна.

Упражнения

1. (РЭХ). С помощью аксиом найдите номера выражений, равных единице:

1) $0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot \overline{\overline{0}} + \overline{1} + \overline{\overline{1}} \cdot \overline{0}$; 4) $0 \cdot 0 \cdot \overline{1} + 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}}$;
2) $1 \cdot 1 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} + 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot 0$; 5) $0 \cdot 1 \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{1}$;
3) $1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} + \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} + \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{1}$; 6) $1 \cdot 1 \cdot \overline{\overline{0}} + 0 \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 0 + \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot \overline{1}$.

2. (ТРЮ). Найдите в списке номера выражений, равных нулю:

1) $\overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 0 + 1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot 1$; 4) $0 \cdot 1 \cdot 1 + \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0}$;
2) $1 \cdot 0 + \overline{0} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot \overline{1}$; 5) $\overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 + \overline{1} \cdot \overline{0} \cdot \overline{1} \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} \cdot \overline{1}$;
3) $1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{1} + \overline{\overline{0}} \cdot \overline{1} + \overline{\overline{1}} \cdot \overline{\overline{0}}$; 6) $1 \cdot 1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{\overline{0}} + \overline{1} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 1 + \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{\overline{1}} \cdot 1$.

3. (2ДЯ). Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $A \cdot \overline{A} \cdot A + 1 \cdot \overline{0} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{0} \cdot 1$; 4) $0 + 1 \cdot 0 + A \cdot 0 + \overline{A} \cdot 0 + A \cdot \overline{A}$;
2) $A \cdot \overline{A} \cdot 1 + A \cdot \overline{A} \cdot \overline{\overline{A}} + A \cdot \overline{1}$; 5) $A \cdot \overline{A} + \overline{\overline{A}} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot \overline{1}$;
3) $1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{A} + \overline{0} \cdot \overline{A} \cdot 1 + A \cdot \overline{\overline{A}} \cdot \overline{0}$; 6) $\overline{0} \cdot A \cdot A \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot A \cdot 1 \cdot \overline{A} + \overline{1} \cdot A \cdot A$.

4.5. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Если булева формула записана в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо конъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула представлена в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Например, выражения

$$AB + AC;\quad A + BC + AC;\quad B + \overline{A} + \overline{A}BC$$

записаны в ДНФ, а формула $A + B(C + \overline{D})$ к ДНФ не относится, так как второе слагаемое не является ни отдельным аргументом, ни конъюнкцией переменных.

Если булева формула записана в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула представлена в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Например, выражение $(A + B)(B + C)$ записано в КНФ, а формула $(A + BC)(B + D + E)$ КНФ не является, поскольку первый сомножитель (в скобках) содержит конъюнкцию.

Выражение, представленное отдельным аргументом, его инверсией или их конъюнкцией, одновременно входит в класс ДНФ и КНФ.

4.6. Основные теоремы булевой алгебры

Теорема поглощения. Теорема поглощения записывается в двух формах — одну из них называют дизъюнктивной, вторую — конъюнктивной:

$$A + AB = A;\quad A(A + B) = A.$$

Первое выражение получается из второго, если знаки дизъюнкции и конъюнкции поменять местами. Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву A: $A + AB = A(1 + B)$.

Так как $1 + B = 1$, то $A(1 + B) = A \cdot 1 = A$. Следовательно, теорема верна.

Чтобы доказать вторую теорему, сначала раскроем скобки:

$$A(A + B) = A \cdot A + AB = A + AB.$$

Получилось выражение, только что доказанное.

Теорема поглощения применяется для упрощения булевых формул, то есть для уменьшения числа входящих в них букв. Проиллюстрируем это на примерах:

$ABC + BC = BC(A + 1) = BC$ — вместо пяти букв стало две;

$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}B\overline{C}(1 + D) = \overline{A}B\overline{C}$ — вместо семи букв стало три.

Теорема склеивания. Теорема склеивания также имеет две формы — дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB + A\overline{B} = A; \quad (A + B)(A + \overline{B}) = A.$$

Вторая теорема получается из первой, если в ней знак конъюнкции заменить знаком дизъюнкции, а знак дизъюнкции заменить знаком конъюнкции.

Теорема склеивания применяется также при упрощении булевых формул, например:

$$\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B = \overline{A}\,(\overline{B} + B) = \overline{A};$$

$$A\overline{B}C + ABC = AC(\overline{B} + B) = AC.$$

Теорема де Моргана. Теорема де Моргана связывает все три основные операции булевой алгебры — дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}; \quad \overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

Первая теорема читается так: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий. Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий.

Инвертирование сложных выражений. Теорема де Моргана применима не только к отдельным конъюнкциям или дизъюнкциям, но и к более сложным выражениям. Мы будем рассматривать инвертирование выражений, представленных в ДНФ или КНФ.

Пример 1. Найдем инверсию вида $\overline{AB + CD}$.

Инвертирование будем считать законченным, если знаки отрицания стоят только над переменными. Введем обозначения: $AB = X$; $CD = Y$, тогда

$$\overline{AB + CD} = \overline{X + Y} = \overline{X}\overline{Y}.$$

Найдем $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ и подставим в это выражение:

$$\overline{X} = \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B};$$

$$\overline{Y} = \overline{CD} = \overline{C} + \overline{D};$$

$$\overline{AB + CD} = \overline{X}\;\overline{Y} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + \overline{D}).$$

Пример 2. Найдем инверсию $\overline{(A + B)(C + D)}$.

Введем обозначения: $A + B = X$; $C + D = Y$, тогда

$$\overline{(A + B)(C + D)} = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}.$$

Найдем $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ и подставим их в это выражение:

$$\overline{(A + B)(C + D)} = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}.$$

При инвертировании сложных выражений можно пользоваться следующим правилом: чтобы найти инверсию, необходимо знаки конъюнкции заменить знаками дизъюнкции, а знаки дизъюнкции — знаками конъюнкции и поставить инверсии над каждой переменной:

$$\overline{AB+\overline{B}C+\overline{D}E} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{\overline{B}}+\overline{C})(\overline{\overline{D}}+\overline{E}) = (\overline{A}+\overline{B})(B+\overline{C})(D+\overline{E});$$

$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(D+\overline{E})P} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}+\overline{D}\,\overline{\overline{E}}+\overline{P} = \overline{A}BC+\overline{D}E+\overline{P}.$$

Упражнения

1. (153)! Примените теорему поглощения: $\overline{A}+\overline{A}B$; $K+KP$.

2. Упростите: (ФЕА) $PQ+SPQ+PQRST$; (Н0Б) $XYZ+XZ+XZV$; (ВМВ) $ABC\overline{D}+ABCD+\overline{A}BC$; (РХГ) $(B+C)(B+\overline{C})$; (ИМД) $(BC+\overline{D})(BC+D)$; (ИЖЕ) $(B+C)(B+\overline{C})D$.

3. Найдите инверсию: (УЮК) $\overline{\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$; (ДЖЛ) $\overline{\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}$.

4. Упростите: (ЕЖМ) $\overline{A+\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}+D}\cdot\overline{A}\cdot C$; (ОНН) $\overline{P+Q}\cdot(P+Q)$; (ФЭР) $\overline{\overline{P}+\overline{Q}}+PQRS$; (ПНП) $\overline{RST}\cdot(\overline{R}+\overline{S}+\overline{T})\cdot RST$.

5. (ОВР). Дано выражение $AB+C\overline{D}+\overline{E}$. Укажите его инверсии в списке:

1) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)E$; 3) $E(\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B})$; 5) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}$;
2) $(\overline{A}+\overline{B})E(\overline{C}+D)$; 4) $(A+B)(C+\overline{D})E$; 6) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+E$.

6. Найдите инверсию выражения и упростите:
(ВУТ) $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$;
(ФУУ) $(\overline{X}+\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(T+\overline{X}+\overline{Y})$.

4.7. Понятие булевой функции

В общем случае функция (лат. *functio* — исполнение, соответствие, отображение) — это «некоторое правило, закон, дающий возможность каждому элементу множества M, под которым понимается область значений независимого переменного x, ставить в соответствие определенный элемент множества N, под которым понимается область значений зависимого переменного y» [12, с. 655]. В булевой алгебре все переменные, как зависимые (функции), так и независимые (аргументы), принимают значения из одного и того же множества {0, 1}. Чтобы определить значение функции, в общем случае необходимо знать значения всех аргументов, от которых она зависит. Например, функция $f=A\overline{B}+C$ зависит от трех аргументов. Если принять $A=1$, то получим выражение $f=1\cdot\overline{B}+C=\overline{B}+C$, не равное ни нулю, ни единице. Пусть теперь $B = 1$. Тогда $f = \overline{1} + C = 0 + C = C$, т.е. и в этом случае неизвестно, чему равна функция, нулю или единице. Примем, наконец, $C = 0$, тогда $f = 0$. Таким образом, если $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, то $f = 0$.

Если всем аргументам, от которых зависит функция, присвоены некоторые значения, то говорят о наборе значений аргументов, который можно называть просто набором. Набор значений аргументов — это последовательность нулей и единиц, например 110, где первая цифра соответствует первому аргументу, вторая — второму и третья — третьему. Очевидно, что необходимо заранее договориться, что такое первый аргумент, второй, третий и т.д. Для этого удобно пользоваться алфавитным расположением букв. Например, если $f = XY + P\overline{Q}$, то согласно алфавиту первым является аргумент P, вторым — Q, третьим — X, четвертым — Y. Тогда по набору значений аргументов легко найти значение функции. Пусть, например, дан набор 1001, тогда $P = 1$, $Q = 0$, $X = 0$, $Y = 1$; $f = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \overline{0} = 1$, т.е. на наборе 1001 заданная функция равна единице.

Еще раз отметим, что набор значений аргументов — это совокупность нулей и единиц. Двоичные числа также являются наборами нулей и единиц. Отсюда возникает вопрос — нельзя ли наборы рассматривать как двоичные числа? Можно, и во многих случаях это очень удобно, особенно, если двоичное число перевести в десятичную систему. Например, если

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 0,$$

то набор примет вид 0110. Если его считать двоичным числом, то имеем:

$$0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6,$$

т.е. заданный набор имеет номер 6 в десятичной системе.

Если по десятичному номеру требуется найти значения аргументов, то поступаем в обратной последовательности: сначала десятичное число переводим в двоичное, затем слева дописываем столько нулей, чтобы общее число разрядов равнялось числу аргументов, после чего находим значения аргументов. Пусть, например, требуется найти значения аргументов A, B, C, D, E, F по набору с номером 23. Переведем число 23 в двоичную систему:

$$23|_{10} = 10111|_2 .$$

Это число пятизначное, а всего аргументов шесть, следовательно, слева необходимо записать один нуль:

$$23|_{10} = 010111|_2 .$$

Отсюда находим:

$$A = 0, \; B = 1, \; C = 0, \; D = 1, \; E = 1, \; F = 1.$$

Сколько всего существует наборов, если известно число *n* аргументов? Очевидно, столько же, сколько существует *n* разрядных двоичных чисел, т.е. 2*n*.

Упражнения

1. Найдите значения функций, если $A = 1$, $C = 0$:

(75К) $f = \overline{A} + BC + AC$; (33П) $f = A + BCD$; (ЯНЯ) $f = BC + AC$.

2. Введите в устройство десятичные эквиваленты наборов, на которых функция принимает единичное значение (числа упорядочить по возрастанию):

(ЕХН) $f = \overline{A}BC + AB\overline{C}$; (НБС) $f = AB + AC$;

(РТА) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$; (Т50) $f = BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(УНР) $f = \overline{A}C + B\overline{C}$; (ТВУ) $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

3. Булева функция зависит от шести аргументов. Найдите наборы значений аргументов, если десятичные номера их имеют вид:

(С5) 16; (РЖ) 22; (ЫН) 55; (КЛ) 4; (АХ) 60.

4. (ЕМ). Укажите номера функций, равных единице на наборе 12:

1) $f = A\overline{B} + B\overline{D} + \overline{A}C$; 4) $f = \overline{C} + BD + \overline{A}\,\overline{B}$;

2) $f = BD + AC + CD$; 5) $f = ABC + BD$;

3) $f = \overline{D} + \overline{A}C + \overline{B}D$; 6) $f = \overline{A}\,\overline{C} + AC + BD$.

5. (ТБС). Функция, зависящая от четырех аргументов, принимает единичное значение на наборах 0, 1, 2, .., 12, а на остальных — нулевое. На каких наборах функция принимает нулевое значение? (Наборы представить в десятичной системе.)

6. (КАА). Функция четырех аргументов на половине наборов принимает нулевое значение, а на остальных — единичное. Сколько существует наборов, на которых функция принимает нулевое значение?

7. (ФИ). Функция трех аргументов принимает единичное значение на трех наборах, в двоичных изображениях которых только одна единица. Найдите десятичные номера наборов, на которых функция равна единице.

8. (БМТ). Считая, что $A = 0$, упростите формулу

$$f = AB + \overline{A}C + BC + AD.$$

4.8. Как задать булеву функцию ?

Один способ задания булевой функции мы уже знаем. Это аналитический. Кроме него существуют и другие способы, важнейшим из которых является табличный. В таблице перечисляются все возможные наборы значений аргументов и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют таблицей соответствия (истинности). На примере функции $f = A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}B\overline{C}$ выясним, как построить для нее таблицу соответствия. Функция зависит от трех аргументов A, B, C. Следовательно, в таблице предусматриваем три колонки для аргументов A, B, C и одну колонку для значений функции (табл. 4.1). Слева от колонки A следует разместить еще одну колонку. В ней будем записывать десятичные числа, которые соответствуют наборам, если их рассматривать как трехразрядные двоичные номера.

Таблица 4.1

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Эта колонка вводится для удобства работы с таблицей, поэтому, в принципе, ею можно пренебречь. Заполняем таблицу. В строке с двоичным номером 000 указано: $A = B = C = 0$. Определим значение функции на этом наборе: $f = 0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 0 \cdot \overline{0} = 0$. Так как $f = 0$ на наборе 000, то в колонке f записываем нуль в строке 000.

Следующий набор 001, т.е. $A = B = 0$, $C = 1$. Находим значение функции на этом наборе: $f = 0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 \cdot \overline{1} = 1$. На наборе 001 функция равна 1, следовательно, в колонке f во второй сверху строке (с номером 1) записываем единицу. И так далее до конца таблицы.

Упражнения

1. (МУБ). Сколько строк имеет таблица соответствия четырех аргументов?

2. (КРВ)! Функцию $f = A\overline{B} + B\overline{C}$ представьте в виде таблицы соответствия. Сколько единиц в колонке f? Сколько нулей в колонке f?

3. (ПАГ). Функция $f = AB$ представлена в виде таблицы соответствия трех аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в колонке f?

4. (00Д). В таблице соответствия пяти аргументов колонка f содержит 19 единиц. Сколько нулей в этой колонке?

5. (0МЕ). В колонке f таблицы соответствия шести аргументов содержится 64 единицы. Сколько в этой колонке нулей?

6. (ТРЖ). В таблице соответствия семи аргументов колонка f содержит поровну единиц и нулей. Сколько в ней нулей?

7. (2ЮИ)! Дана таблица соответствия четырех аргументов A, B, C, D. Сколько единиц содержится в колонке A? В колонке B? В колонке C? В колонке D?

4.9. Минтермы

Существуют булевы функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе значений аргументов, а на всех остальных — нулевое. В таблице соответствия эта единственная единица может быть в любой строке, следовательно, таких функций существует 2^n. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n аргументов, которые могут быть с инверсией или без инверсии, причем распределение инверсий находится в строгом соответствии с распределением нулей в двоичной записи того набора, на котором функция принимает единичное значение. Поясним это на примере. Пусть функция зависит от четырех аргументов и равна единице на наборе 0101, а на всех остальных наборах равна нулю. Представим ее в аналитической форме. Для этого запишем аргументы (в алфавитном порядке), а под ними — цифры набора:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Буквы, под которыми находятся нули, снабжаем знаком инверсии, в результате получаем искомое выражение функции: $f = \overline{A}B\overline{C}D$.

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе значений аргументов, имеют настолько большое значение, что они получили специальное обозначение. Называют их минимальными термами, а коротко — минтермами (минтермы нередко называют конституентами единицы). У минтермов существует и определение: минтермом n переменных называется такая конъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма. Двоичный эквивалент номера — это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трех аргументов A, B, C, то

$$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\quad m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C,\quad m_2 = \overline{A}B\overline{C},\quad m_3 = \overline{A}BC.$$

В случае четырех аргументов минтермы с теми же индексами примут вид

$$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D},\quad m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D,\quad m_2 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D},\quad m_3 = \overline{A}\,\overline{B}CD.$$

Минтермы обладают свойством: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. Справедливость этого утверждения следует из того, что два таких минтерма могут отличаться только инверсиями аргументов, т.е. если минтермы не равны, то всегда найдется переменная, которая в один минтерм входит в прямой форме (без инверсии), а в другой — с отрицанием, конъюнкция которых равна нулю.

Упражнения

1. Запишите двоичные наборы, на которых минтермы равны единице:

(КХФ) $AB\overline{C}\,\overline{D}E$; (УВЛ) $VX\overline{Y}Z$; (ЛТК) $P\overline{Q}R\overline{S}T\overline{U}$;

(УЛМ) $\overline{B}C\overline{D}$; (ЕСЕ) $A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\,\overline{A}_5$; (ПШН) $\overline{X}_1X_2$.

2. Ниже даны наборы, на которых минтермы принимают единичное значение. Запишите алгебраические выражения минтермов, располагая буквы в алфавитном порядке и всякий раз начиная с буквы A:

(БЦА) 0011; (ЫЛБ) 1100; (ВШС) 00011; (ЖФИ) 000;

(АУД) 111000; (ДАЕ) 11111; (ТАФ) 1111; (МХК) 01.

3. (БОС). Укажите номера, где записаны минтермы:

1) $AB\overline{C}$; 3) $A+B+C$; 5) $PQRS$; 7) $AK\overline{K}B$;

2) $ABA\overline{C}$; 4) $BC\overline{D}$; 6) $AC\overline{M}$; 8) $AB\overline{B}C$.

4. Запишите в аналитической форме минтермы, если известно, что все они зависят от пяти аргументов A, B, C, D, E:

(ЦКУ) m_{10}; (НКФ) m_1; (ЛЭХ) m_0; (БЕЩ) m_{31};

(КЛЦ) m_{20}; (ЕМЧ) m_{16}; (КАШ) m_{15}; (ЧАЭ) m_{30}.

5. Найдите десятичные индексы минтермов:

(ОХ1) $A\overline{B}\overline{C}D$; (НВ2) $B\overline{C}D$; (ЦМ3) $C\overline{D}$; (ЖТ8) Q;

(ВТЧ) A; (КН5) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; (ЛЭ7) $\overline{P}$; (ЙЙ6) $\overline{X}_1X_2X_3\overline{X}_4$.

6. (ПД1). Сколько существует минтермов пяти аргументов?

4.10. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Если таблица соответствия содержит одну единицу в колонке f, то функция представляет собой отдельный минтерм. Если же в колонке f записано несколько единиц, то это значит, что функция состоит из дизъюнкции соответствующих минтермов.

Функция, представленная дизъюнкцией (суммой) минтермов n аргументов, называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой, сокращенно СДНФ.

Пусть дана функция, принимающая единичное значение на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}.$$

Ее можно записать и иначе, через обозначения минтермов:

$$f = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Букву m можно удалить и указывать только номера минтермов, т.е. номера наборов, на которых функция равна единице: $f=(1, 2, 4, 5, 6)$.

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда стандартной формой, а также канонической.

Сколько существует булевых функций n аргументов? Две функции совпадают только в том единственном случае, когда они состоят из одних и тех же минтермов. Это значит, что всякому набору минтермов соответствует отдельная булева функция. Всего существует 2^n минтермов n аргументов. Следовательно, общее число N всех функций равно:

$$N = 2^{2^n},$$

т.е. общее количество функций равно числу всех возможных 2^n разрядных двоичных чисел. Например, существует 256 функций трех аргументов, 65 536 функций четырех аргументов, 4 294 967 296 функций пяти аргументов и т.д.

Упражнения

1. Сколько минтермов содержат функции, зависящие от четырех аргументов:

(ИКА) $f = AB + CD$; (ЛХГ) $f = A + \bar{B}CD$; (ХХЕ) $f = VXYZ$;

(МОБ) $f = A + \bar{B} + \bar{C} + D$; (ЖСД) $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$; (ЛВВ) $f = P + QRS$?

2. Представьте в аналитическом виде СДНФ функций, зависящих от аргументов A, B, C (минтермы упорядочить по возрастанию их десятичных номеров):

(ЖУЖ) $f = AB$; (ВЮЗ) $f = A\bar{B}C$; (КПЛ) $f = BC + \bar{A}C$;

(ККИ) $f = A\bar{B} + AC$; (МВК) $f = A\bar{C}$; (ГЭМ) $f = \bar{B}C + AC$.

3. (ДЕЙ). Укажите номера функций, представленных в СДНФ:

1) $f = A$; 4) $f = ABC\bar{} + AC\bar{D} + BC\bar{D}$;

2) $f = ABCD$; 5) $f = AB\bar{C} + A\bar{B}D + \bar{A}CD + \bar{B}C\bar{D}$;

3) $f = A\bar{B} + \bar{A}B$; 6) $f = XYZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$.

4. (РЭХ). Укажите номера функций, записанных в СДНФ:

1) $f = X$; 3) $f = A + \bar{A}$; 5) $f = PQ + P + \bar{Q}$;

2) $f = A \cdot \bar{A} + B \cdot \bar{B}$; 4) $f = \bar{X}$; 6) $f = X\bar{X}$.

5. Запишите десятичные номера минтермов, образующих функции четырех аргументов (номера упорядочить по возрастанию):

(НЕИ) $f = m_0 + m_1 + m_4 + m_7 + m_{10}$; (УПО) $f = CD + \bar{C}\bar{D}$;

(ТАК) $f = \bar{A}BCD + A\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + AB\bar{C}D$; (НАН) $f = C$;

(МТМ) $f = A\bar{B}$; (ЗНЛ) $f = ABC$.

4.11. Карта Вейча

Карта Вейча (ее модификацию называют диаграммой Карно) — это замечательное изобретение, позволяющее легко осуществлять различные преобразования булевых функций до пяти шести аргументов. Строго говоря, булеву функцию, если она задана, преобразовать невозможно, так как при любых ее изменениях будут получаться другие функции. Если же функция неизменна, то преобразованию подлежит не функция, а представляющая ее формула. Поэтому в дальнейшем во всех случаях, когда говорится о минимизации булевых функций, об их упрощении и вообще о каких-либо преобразованиях, предполагается, что все это относится только к формуле, при помощи которой задана функция, а сама функция при любых преобразованиях остается неизменной. Преобразования в таких случаях называются тождественными.

Сначала рассмотрим карту двух аргументов (рис. 4.1). В ней четыре клетки. Левая половина карты, состоящая из двух клеток, обозначена буквой A, правая — той же буквой, но со знаком инверсии: $\bar{A}$. По горизонтали карта также разделена на две части. Верхняя половина обозначена буквой B, нижняя — буквой $\bar{B}$.

Левая верхняя клетка находится на пересечении областей A и B — записываем в нее минтерм AB. Правая верхняя клетка находится на пересечении областей $\bar{A}$ и B — записываем $\bar{A}B$. Аналогично записываем $A\bar{B}$ и $\bar{A}\bar{B}$ в оставшиеся клетки. На рис. 4.2 приведена та же карта, но с десятичными номерами минтермов.

Рассмотрим карту Вейча трех аргументов (рис. 4.3). В ней также для каждого минтерма отведена отдельная клетка, и, как и в случае карты двух аргументов, алгебраическая запись минтермов строго соответствует системе расположения букв вокруг карты.

	A	$\bar{A}$
B	AB	$\bar{A}B$
$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$

Рис. 4.1

	A	$\bar{A}$
B	3	1
$\bar{B}$	2	0

Рис. 4.2

	A		$\bar{A}$	
B	$AB\bar{C}$	ABC	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
$\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Рис. 4.3

На рис. 4.4 изображена та же карта, но в клетках записаны десятичные номера минтермов. Кроме того, на ней указаны только неинверсные аргументы. Это значит, что, например, буква $\bar{A}$ на карте не пишется, но подразумевается. То же самое относится и к буквам B и C. На рис. 4.5 приведена карта четырех аргументов, где в клетках указаны минтермы в их аналитической записи. На рис. 4.6 изображена та же карта, но с десятичными номерами минтермов. На рис. 4.7 изображена карта пяти аргументов.

	A	A		
B	6	7	3	2
	4	5	1	0
		C	C	

Рис. 4.4

	A	A			
B	$AB\bar C\bar D$	$ABC\bar D$	$\bar ABC\bar D$	$\bar AB\bar C\bar D$	
B	$AB\bar CD$	$ABCD$	$\bar ABCD$	$\bar AB\bar CD$	D
	$A\bar B\bar CD$	$A\bar BCD$	$\bar A\bar BCD$	$\bar A\bar B\bar CD$	D
	$A\bar B\bar C\bar D$	$A\bar BC\bar D$	$\bar A\bar BC\bar D$	$\bar A\bar B\bar C\bar D$	
		C	C		

Рис. 4.5

	A	A			
B	12	14	6	4	
B	13	15	7	5	D
	9	11	3	1	D
	8	10	2	0	
		C	C		

Рис. 4.6

	E	E	E	E					
	A	A			A	A			
B	25	29	13	9	24	28	12	8	
B	27	31	15	11	26	30	14	10	D
	19	23	7	3	18	22	6	2	D
	17	21	5	1	16	20	4	0	
		C	C			C	C		

Рис. 4.7

Аналогичным образом можно построить карту Вейча на любое число аргументов. Практически же дело ограничивается картами пяти, реже шести и уже совсем редко семи и восьми аргументов, так как с увеличением числа аргументов быстро возрастает сложность карты и соответственно снижается эффективность ее использования. Например, карта восьми аргументов состоит из 256 клеток.

Упражнения

1. Какой номер клетки занимает на карте Вейча минтерм:
(ИОБ) ABC; (Д0В) $AB\bar{C}D$; (ГХГ) $\bar{A}B$;
(0СД) $A\bar{B}\bar{C}D$; (20Е) $A\bar{B}\bar{C}DE$?
2. (ЕЮК). Сколько клеток имеет карта Вейча пяти аргументов?
3. (УЦЛ). Сколько клеток имеет карта Вейча n аргументов?

4.12. Нанесение функций на карту Вейча

Если функция представлена в виде суммы минтермов, т.е. в стандартной форме, то нанесение ее на карту сводится к отысканию клеток, в которые необходимо записать единицы. Поясним это на примере функции трех аргументов, представленной в СДНФ:

$$f = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\,\bar{C} + ABC.$$

Переведем минтермы в их номера: $f = (2,\ 3,\ 4,\ 7)$.

Воспользуемся картой, изображенной на рис. 4.4. В ее клетках записаны числа. Однако их можно не писать, поскольку система расположения букв вокруг карты точно определяет место каждого минтерма. Удалим с карты номера, тогда она станет пустой. Нанесем на нее функцию (рис. 4.8). Единицы на карте обозначают номера минтермов, взятых из заданного выражения $f = (2,\ 3,\ 4,\ 7)$.

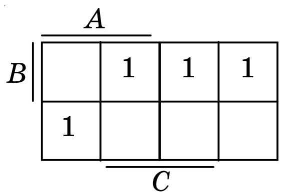


Рис. 4.8

Самая правая единица (верхний ряд) занимает клетку с номером 2. Это постоянное место минтерма $m_2 = \bar{A}B\bar{C}$. Поскольку он входит в заданную функцию, то в этой клетке и поставлена единица. То же самое относится и ко всем остальным единицам карты.

Одно из достоинств карты Вейча состоит в том, что на нее нетрудно нанести функцию, представленную не только в СДНФ, но и в виде дизъюнкции конъюнкций, не являющейся СДНФ. Покажем это на примере следующей функции:

$$f = AB + \bar{A}C + A\bar{B}C.$$

Эта функция зависит от трех аргументов. Соответствующая карта Вейча приведена на рис. 4.9. Первая конъюнкция, входящая в функцию, равна AB. Находим на карте эту область. Она располагается на пересечении зоны буквы A и зоны буквы B. Образуют ее две клетки, расположенные в верхней строке в левой половине карты. В этих клетках ставим единицы (на рис. 4.9 они обведены).

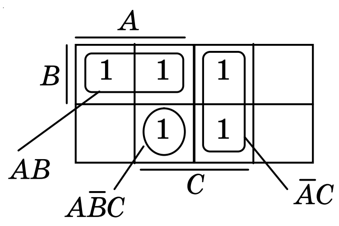


Рис. 4.9

Вторая конъюнкция имеет вид $\bar{A}C$. Находим область на карте, являющуюся общей для зон $\bar{A}$ и C. Это две клетки, расположенные вертикально. Они на рис. 4.9 также обведены. Наконец, наносим на карту конъюнкцию $A\bar{B}C$. Она на карте занимает единственную клетку на пересечении зон A, $\bar{B}$ и C. Заметим, что эта конъюнкция является минтермом $m_5 = A\bar{B}C$.

Мы рассмотрели случай, когда каждая конъюнкция занимает на карте области, не пересекающиеся с другими. Рассмотрим другой пример. Нанесем на карту функцию $f = A + BC$.

Первая конъюнкция состоит из одной буквы. Конечно, это не конъюнкция, но для общности и одиночную переменную, входящую в функцию, удобно называть конъюнкцией. Нанесем эту одиночную переменную на карту (рис. 4.10). Ей соответствует зона A, следовательно, всю ее заполняем единицами.

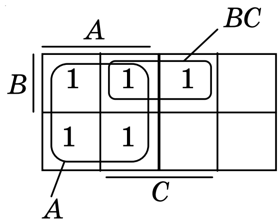


Рис. 4.10

Конъюнкция BC частью занимает новую клетку, а частью — уже занятую буквой A. Это значит, что на наборе значений аргументов 111 единице равна и «конъюнкция» A и конъюнкция BC. Функция при этом равна единице, так как $f = 1 + 1 \cdot 1 = 1$. Следовательно, если в клетке уже стоит единица, то вторую единицу ставить нет необходимости.

Упражнения

1. Нанесите функцию на карту Вейча четырех аргументов, записывая в клетках не более чем по одной единице. Определите число клеток, занятых единицами:

(МЮ1) $f = AB + C\bar{D}$; (НХ3) $f = ABCD + \bar{A}\,\bar{D}$;
(ЖУ2) $f = A + \bar{B} + C$; (ХХ5) $f = A + \bar{D}$;
(ХЫЧ) $f = AB + C + \bar{D}$; (УЮ6) $f = A + C$.

2. Сколько пустых клеток останется на карте Вейча четырех аргументов, если на нее нанести функцию:

(ЦВХ) $f = A + \bar{B} + \bar{C} + D$; (ЭЛЮ) $f = ABC + \bar{D}$;
(ЦОЦ) $f = A + \bar{B} + CD$; (ИИА) $f = A + \bar{B}C$;
(ЖУО) $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$; (ОУФ) $f = AB$?

3. (НШК)! Сколько клеток займет функция $f = A\bar{B}$, если ее нанести на карту трех аргументов; четырех аргументов; пяти аргументов; шести аргументов?

4.13. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча

Пусть дана функция $f = A + BC$. Чтобы найти ее СДНФ, достаточно функцию нанести на карту Вейча (см. рис. 4.10).

Если карту с нанесенной на нее функцией мысленно совместить с картой, где записаны номера минтермов (см. рис. 4.4), то единицы покажут номера минтермов, образующих данную функцию: $f = (3, 4, 5, 6, 7)$.

Рассмотрим еще один пример:

$$f = A\overline{B} + BC\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D.$$

Нанесем эту функцию на карту Вейча (рис. 4.11). Затем обратимся к карте на рис. 4.6. Совместим эти карты одну с другой, тогда единицы покажут номера минтермов искомой СДНФ:

$$f = (1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 14).$$

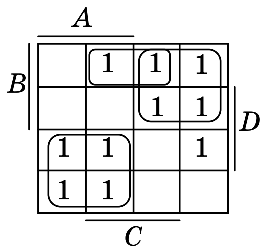


Рис. 4.11

С помощью карт Вейча легко выявить равенство двух функций. Две функции являются тождественно равными, если они состоят из одних и тех же минтермов, т.е. если их СДНФ совпадают. Например, функции

$$f_1 = AB\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{B}CD + A\overline{C}D,$$

$$f_2 = AB\overline{C} + BC\overline{D} + \overline{A}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD$$

внешне не имеют ничего общего, но если их нанести на карты Вейча четырех аргументов, то карты совпадут, следовательно, эти функции тождественно равны.

Карты Вейча позволяют легко находить СДНФ инверсий различных функций. Чтобы найти СДНФ инверсии заданной функции f, достаточно ее нанести на карту. Номера минтермов, которым соответствуют пустые клетки, дадут искомую СДНФ инверсии функции f. Например, СДНФ функции $f = A + D$ имеет вид

$$f = (1,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13).$$

Если же выписать все минтермы, соответствующие пустым клеткам, то получим

$$\overline{f} = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 15).$$

Чтобы найти СДНФ конъюнкции двух функций, достаточно нанести на карту Вейча сначала первую функцию, затем вторую. В некоторых клетках могут оказаться по две единицы. Это значит, что на соответствующих наборах значений аргументов обе функции принимают единичное значение. Выписав номера клеток с двумя единицами, получим СДНФ конъюнкции двух заданных функций.

Упражнения

1. (ГШЦ). Сколько минтермов содержит СДНФ функции $f = AB$, если она нанесена на карту восьми аргументов?

2. Сколько минтермов в СДНФ следующих функций шести аргументов:

(АЙ2) $f = B + AC$; (РШ1) $f = A + \overline{A}$;

(ЕЧ3) $f = AB + AC + AD$; (НВЧ) $f = A\overline{B} + ABC$;

(ПШ0) $f = A \cdot \overline{A}$; (К37) $f = A + B + D$.

4.14. Алгебраическое упрощение булевых функций

Выше упоминался термин «упрощение», но без раскрытия его содержания. Теперь уточним это понятие. Под упрощением (минимизацией) булевой функции будем понимать такие тождественные преобразования ее формулы, в результате которых число вхождений аргументов уменьшается до предела.

Выясним, что понимается под числом вхождений аргументов и чем оно отличается от числа аргументов. Рассмотрим пример: $f = A\bar{B} + \bar{A}\,\bar{C}D$. Эта функция зависит от четырех аргументов A, B, C, D, но имеет пять вхождений аргументов, то есть число вхождений аргументов — это общее число букв, образующих функцию.

Как уже упоминалось, минимизация основана на теоремах поглощения и склеивания. Проиллюстрируем их применение на примере функции вида $f = AB\bar{C} + ABC + AC + \bar{B}C$.

К первым двум конъюнкциям применима теорема склеивания:

$$AB\bar{C} + ABC = AB\left(\bar{C} + C\right) = AB.$$

В результате получилось выражение $f = AB + AC + \bar{B}C$.

Запишем конъюнкцию AC в виде $AC = ABC + A\bar{B}C$.

Подставим это выражение в заданную функцию:

$$f = AB + AC + \bar{B}C = AB + ABC + A\bar{B}C + \bar{B}C.$$

К первым двум и к двум последним конъюнкциям применима теорема поглощения:

$$AB + ABC = AB(1 + C) = AB; \quad A\bar{B}C + \bar{B}C = \bar{B}C(A + 1) = \bar{B}C.$$

В результате получаем искомую минимальную ДНФ заданной функции:

$$f = AB + \bar{B}C.$$

4.15. Метод Квайна

Суть метода Квайна поясним на примере функции

$$f = ABD + \bar{A}BC + \bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

Сначала функцию представляем в СДНФ:

$$f = (3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 15).$$

Затем берем какую-либо пару минтермов и выясняем, применима ли к ним теорема склеивания. Если применима, то их общую часть записываем в отдельную строку. Например:

$$m_3 + m_7 = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD = \bar{A}CD.$$

Общей частью является конъюнкция $\bar{A}CD$. Берем другую пару, например

$$m_3 + m_{11} = \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}CD = \bar{B}CD.$$

Эту конъюнкцию записываем рядом с первой. Так поступаем по отношению к каждой паре минтермов. Если какая-либо конъюнкция повторяется, то оставляем только одну. Минтермы, к которым применялась теорема склеивания, вычеркиваем, а оставшиеся (не вычеркнутые) минтермы и все выписанные конъюнкции объединяем знаками дизъюнкции. В данном случае оказалось, что минтерм m_{11} не склеивается ни с одним из минтермов заданной функции, а в результате склеивания остальных получилось 8 различных произведений по три переменных каждое. Очевидно, что получившееся выражение тождественно равно заданной функции:

$$f = ABD + BCD + \bar{A}BD + \bar{A}BC + \bar{A}CD + ACD + \bar{B}CD + B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

К этому выражению снова применяем тот же прием, то есть для каждой пары конъюнкций выясняем, применима ли к ним теорема склеивания. Если применима, то общую часть записываем в отдельную строку. Новое выражение заданной функции имеет вид

$$f = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + BD + CD + \bar{A}BC.$$

Здесь нет склеивающихся конъюнкций, следовательно, на этом упрощение заканчивается. В результате метода Квайна получается сокращенная ДНФ (нередко она является и минимальной). Каждая отдельная конъюнкция сокращенной ДНФ называется простой импликантой.

4.16. Минимизация булевых функций при помощи карт Вейча

Сокращенная форма булевой функции не всегда является минимальной. Поэтому для нахождения минимальных форм обычно применяют метод Петрика, при помощи которого можно найти все тупиковые формы, то есть формы, не содержащие лишних простых импликант. Тупиковые формы могут отличаться одна от другой числом вхождений аргументов. Тупиковая форма, содержащая наименьшее число вхождений аргументов, называется минимальной. Таким образом, найдя все тупиковые формы, мы найдем и все минимальные. Подробности о методах Квайна и Петрика, о сокращенных и тупиковых формах можно найти, например, в [32]. Здесь мы их рассматривать не будем, а сразу перейдем к картам Вейча.

При помощи карт Вейча упрощение булевых функций выполняется гораздо легче и быстрее по сравнению с методом Квайна, особенно если число аргументов минимизируемой функции невелико, в пределах 2–6. Главное, что требуется уметь при нахождении минимальных форм по картам Вейча, — это выявлять простые импликанты. Каждая простая импликанта объединяет наибольшую группу единиц (минтермов), которую можно представить одной конъюнкцией. Например, на рис. 4.12 в левой половине карты стоят 8 единиц. Все они занимают зону A. Это простая импликанта, но никакая часть ее, ни AB, ни AC и т.д., простой импликантой не является.

1	1		
1	1	1	1
1	1	1	
1	1		

Рис. 4.12

Вторая сверху строка вся занята единицами, которые объединяются конъюнкцией BD. Это еще одна простая импликанта. Заметим, что минтермы 13 и 15 использованы дважды: они входят в обе простые импликанты, и в A, и в BD. Осталась одна единица, соответствующая минтерму 3. Этот минтерм входит в простую импликанту CD. Таким образом, дизъюнкция найденных простых импликант дает искомую минимальную форму

$$f = A + BD + CD.$$

На рис. 4.13 приведено десять примеров минимизации булевых функций. Некоторые из функций имеют несколько минимальных форм, например

$$f_7 = D + AB + \bar{A}\bar{C} + AC = D + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}\bar{B} = D + B\bar{C} + AC + \bar{A}\bar{B}.$$

1	1		
1	1		1
1	1	1	
	1		

$f_1 = AB+\bar{B}CD+$ $+AD+AC+\bar{B}CD$

	1		
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

$f_2=D+AC+\bar{B}C$

1	1		1
1	1	1	1
1	1	1	
1	1		1

$f_3 = A+CD+$ $+BD+\bar{C}\bar{D}$

1	1		1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1		1

$f_4 = A+D+\bar{C}$

1			1
1	1	1	1
1		1	1
1		1	1

$f_5 = \bar{C}+BD+\bar{A}\bar{B}$

1	1	1	1
1		1	
1			1
1	1	1	1

$f_6 = \bar{D}+\bar{A}BC+$ $+A\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$

1	1		1
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	1

$f_7 = D+AB+$ $+\bar{B}C+\bar{A}\bar{C}$

			1
1	1		
1	1	1	1
		1	

$f_8 =AD+\bar{B}D+$ $+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1		1
1	1	1	1

$f_9 = A+B+\bar{C}+\bar{D}$

	1	1	
1	1		
	1	1	
1	1		

$f_{10}=BC\bar{D}+ABD+$ $+\bar{B}CD+A\bar{B}\bar{D}$

Рис. 4.13

Начинать минимизацию по картам Вейча следует с тех минтермов, которые входят в единственную простую импликанту. Проиллюстрируем это на примере функции f_{10} (см. рис. 4.13). Если начать поиск простых импликант с одного из минтермов m_{10}, m_{11}, m_{14}, m_{15}, каждый из которых входит в две простые импликанты, то минимальную форму можно не получить. Это произойдет в том случае, если в искомое выражение включить простую импликанту AC.

Упражнение

Найдите минимальные формы функций. Для самоконтроля укажите число простых импликант и число вхождений аргументов для найденных минимальных форм:

1) (985) $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15)$;
2) (905) $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$;
3) (МТМ) $f = (6, 8, 9, 10, 15)$;
4) (365) $f = (0, 1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)$;
5) (ЦК5) $f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)$;
6) (ПДЛ) $f = (0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13)$;
7) (432) $f = (0, 1, 7, 10, 13, 14)$;
8) (ФУ1) $f = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 15)$;
9) (343) $f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 13)$;
10) (ГПЗ) $f = (4, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$;
11) (ВЛО) $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)$;
12) (СКК) $f = (2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15)$;
13) (926) $f = (0, 1, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$;
14) (ЕД2) $f = (2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13)$;
15) (32М) $f = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13)$;
16) (38Ф) $f = (1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14)$;
17) (ЭМИ) $f = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 15)$;
18) (СЛО) $f = (0, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)$.

4.17. Конъюнктивные формы булевых функций

Конъюнктивная форма, как и дизъюнктивная, может быть совершенной и минимальной. Перевод ДНФ в КНФ состоит в двойном инвертировании заданной функции. Первое инвертирование осуществляется на уровне минтермов, в результате чего получается СДНФ инверсии исходного выражения. Инверсная СДНФ затем подвергается тем или иным преобразованиям и результат инвертируется по теореме де Моргана.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Если задана СДНФ булевой функции f, то найти ее СКНФ очень легко. Сначала находим СДНФ инверсии заданной функции. В $\overline{f}$ войдут все минтермы, отсутствующие в f, и ни один минтерм не войдет одновременно в f и $\overline{f}$. Затем записываем аналитическое выражение для $\overline{f}$ и результат инвертируем по теореме де Моргана. Рассмотрим пример. Пусть дана функция $f(A, B, C) = (0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5)$. В эту функцию не входят минтермы с номерами 3, 6, 7. Следовательно, они войдут в инверсию функции f: $\overline{f} = (3,\ 6,\ 7)$.

Представим $\overline{f}$ в виде $\overline{f} = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$. Инвертируем по теореме де Моргана: $f = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$.

Это и есть искомая СКНФ заданной функции f.

Нахождение минимальных КНФ. Чтобы найти минимальную КНФ, действуем следующим образом:

а) на основе заданной функции находим СДНФ ее инверсии;

б) для инверсии заданной функции методом Квайна находим сокращенную ДНФ, а методом Петрика находим все тупиковые ДНФ, среди которых отыскиваем все минимальные формы. По карте Вейча можно сразу найти минимальную ДНФ;

г) результат инвертируем по теореме де Моргана.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти минимальную КНФ функции

$$f = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{D} + ABC\overline{D}.$$

Допустим, что эта функция зависит от четырех аргументов, тогда ее СДНФ представится в виде $f = (3, 4, 6, 8, 12, 14)$. Находим СДНФ ее инверсии:

$$\overline{f} = (0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15).$$

После минимизации получаем минимальную ДНФ функции $\overline{f}$:

$$\overline{f} = BD + AD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

В результате инвертирования по теореме де Моргана этого выражения получаем искомую минимальную КНФ:

$$f = \left(\overline{B} + \overline{D}\right)\left(\overline{A} + \overline{D}\right)\left(B + \overline{C} + D\right)\left(A + B + C\right).$$

Упражнения

1. Сколько вхождений аргументов в СКНФ следующих функций четырех аргументов:

(ЦМХ) $f = AB + CD$; (ШРК) $f = A + \overline{B} + C + \overline{D}$;

(НКК) $f = (A + B + C)(C + D)$; (ЛИС) $f = 1$;

(ВТН) $f = (A + B)C$; (ЦУР) $f = \overline{D}$?

2. Сколько вхождений инверсных аргументов в СКНФ следующих функций, зависящих от трех аргументов:

(МУЦ) $f = 0$; (ИШИ) $f = A\bar{B} + \bar{A}C$; (ЛУГ) $f = \bar{A}$;

(УХП) $f = A\bar{B}C$; (00Ф) $f = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \overline{B + C}$; (ЗКХ) $f = A + \bar{B}C$?

3. Даны минимальные ДНФ. Найдите минимальные КНФ. Определите число вхождений аргументов и число инверсий:

(КТЕ) $f = \bar{B}\,\bar{C} + A\bar{D} + A\bar{C} + \bar{B}\,\bar{D}$; (БТЛ) $f = B\bar{C} + A\bar{B}D$;

(ИЯЖ) $f = AB + \bar{C} + B\bar{D}$; (АЯК) $f = A\bar{D} + C + \bar{B}\,\bar{D}$;

(ОЙМ) $f = AB + AC + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + B\bar{C}D$.

4. Заданную КНФ функции представьте в минимальной ДНФ. В устройство введите общее число вхождений аргументов минимальной ДНФ, число простых импликант и число инверсий:

(031) $f = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + \bar{C})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$;

(732) $f = (B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})$;

(АН3) $f = (\bar{B} + \bar{C})(\bar{C} + D)(A + B + D)$.

5. Заданную КНФ представьте в СДНФ. В устройство введите номера минтермов в порядке возрастания:

(РК4) $f = (\bar{A} + \bar{B})(A + B)(\bar{C} + \bar{D})(C + D)$;

(145) $f = (A + B + C)(\bar{A} + C + D)(B + C + D)$;

(396) $f = A(B + C)(\bar{B} + \bar{C})(B + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + \bar{D})$.

4.18. Две задачи на применение булевой алгебры

Задача о расписании занятий. Составляется расписание на один день (пять уроков). Преподаватели подали заявки: историк изъявил желание вести 1-й урок, либо 4-й, либо 5-й; литератор — 1-й либо 2-й; физик — 2-й либо 3-й; математик — 2-й либо 5-й; химик — когда угодно, но не первый и не последний. Требуется найти все варианты расписания, удовлетворяющие поданным заявкам.

Введем обозначения: И — историк, Л — литератор, Ф — физик, М — математик, Х — химик. Согласно поданным заявкам составляем формулы:

$$\varphi_1 = И_1 + И_4 + И_5; \quad \varphi_2 = Л_1 + Л_2;$$
$$\varphi_3 = Ф_2 + Ф_3; \quad \varphi_4 = М_2 + М_5; \quad \varphi_5 = Х_2 + Х_3 + Х_4.$$

Здесь цифры обозначают номера уроков, например: $И_1$ обозначает высказывание «историк ведет первый урок», $Ф_2$ — «физик ведет второй урок» и т.д.; φ_1 обозначает сложное высказывание «историк ведет либо первый урок, либо четвертый, либо пятый», то есть φ_1 — это заявка историка. Аналогично: φ_2 — заявка литератора, φ_3 — заявка физика, φ_4 — заявка математика, φ_5 — заявка химика. Все заявки будут удовлетворены, если выполнится условие

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = (\text{И}_1 + \text{И}_4 + \text{И}_5)(\text{Л}_1 + \text{Л}_2) \times$$
$$\times (\Phi_2 + \Phi_3)(\text{М}_2 + \text{М}_5)(\text{Х}_2 + \text{Х}_3 + \text{Х}_4) = 1,$$

то есть если все сложные высказывания будут истинными.

Раскрыв скобки, выполнив все операции поглощения и исключив случаи, когда два преподавателя одновременно ведут один и тот же урок, получим:

$$\text{Л}_1\text{Х}_2\Phi_3\text{И}_4\text{М}_5 + \text{Л}_1\Phi_2\text{Х}_3\text{И}_4\text{М}_5 +$$
$$+ \text{Л}_1\text{М}_2\Phi_3\text{Х}_4\text{И}_5 + \text{И}_1\text{Л}_2\Phi_3\text{Х}_4\text{М}_5 = 1.$$

Таким образом, при заданных заявках преподавателей существует четыре варианта расписания. Каждому из них соответствует отдельная конъюнкция в полученном логическом уравнении. Расшифруем первую конъюнкцию. Если принять

$$\text{Л}_1\text{Х}_2\Phi_3\text{И}_4\text{М}_5 = 1,$$

то это значит, что первый урок ведет литератор, второй — химик, третий — физик, четвертый — историк, пятый — математик. Аналогично расшифровываются и остальные три конъюнкции логического уравнения.

Задача о подборе экипажа космического корабля [4, с. 20]. Для космического полета составляют экипаж из трех человек: командира, инженера и врача. Командира можно выбрать из четырех человек: a_1, a_2, a_3, a_4, инженера — из трех: b_1, b_2, b_3, врача — также из трех: c_1, c_2, c_3. При этом известно, что инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3, инженер b_2 несовместим с врачом c_1, инженер b_3 несовместим с врачом c_2. Кроме того, известно, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3, командир a_2 совместим с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами, командир a_3 совместим с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1 и c_3, командир a_4 совместим со всеми инженерами и врачом c_3. Требуется найти все возможные варианты экипажа.

Введем логические переменные: A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3.

Эти переменные интерпретируются следующим образом: высказывание A_1 «командир a_1 включен в состав экипажа» является истинным, то есть $A_1 = 1$, если командир a_1 действительно включен в состав экипажа, и $A_1 = 0$, если в состав экипажа командир a_1 не включен. Аналогично интерпретируются остальные переменные.

На основе сведений о совместимости составляем булево уравнение:

$$A_1(B_1 + B_3)(C_2 + C_3) + A_2(B_1 + B_2)(C_1 + C_2 + C_3) +$$
$$+ A_3(B_1 + B_2)(C_1 + C_3) + A_4(B_1 + B_2 + B_3)\, C_3 = 1.$$

Раскроем скобки:

$$A_1B_1C_2 + A_1B_1C_3 + A_1B_3C_2 + A_1B_3C_3 + A_2B_1C_1 + A_2B_1C_2 +$$
$$+ A_2B_1C_3 + A_2B_2C_1 + A_2B_2C_2 + A_2B_2C_3 + A_3B_1C_1 + A_3B_1C_3 +$$
$$+ A_3B_2C_1 + A_3B_2C_3 + A_4B_1C_3 + A_4B_2C_3 + A_4B_3C_3 = 1.$$

В этом уравнении представлено 17 вариантов экипажа, но условиям задачи они удовлетворяют не все. Например, конъюнкция $A_1B_1C_3$ говорит о том, что в экипаж включен командир a_1, инженер b_1 и врач c_3. Но инженер b_1 несовместим с врачом c_3. Следовательно, конъюнкцию $A_1B_1C_3$, а также $A_2B_1C_3$, $A_3B_1C_3$ и $A_4B_1C_3$ из уравнения необходимо удалить. Удаляем и конъюнкции $A_2B_2C_1$, $A_3B_2C_1$ (так как инженер b_2 несовместим с врачом c_1), а также конъюнкцию $A_1B_3C_2$ (инженер b_3 несовместим с врачом c_2).

Таким образом, существует 10 вариантов экипажа для космического корабля. Все они представлены в булевом уравнении

$$A_1B_1C_2 + A_1B_3C_3 + A_2B_1C_1 + A_2B_1C_2 + A_2B_2C_2 +$$
$$+ A_2B_2C_3 + A_3B_1C_1 + A_3B_2C_3 + A_4B_2C_3 + A_4B_3C_3 = 1.$$

Этими двумя задачами раздел, посвященный булевой алгебре, завершим.

В течение последних десятилетий булева алгебра превратилась в стройную математическую теорию с разветвленными прикладными направлениями и богатейшим содержанием. В данном же пособии из всего многообразия достижений алгебры логики приведены лишь начальные сведения, необходимые для первого знакомства с логическим исчислением. Учитывая важность этого математического направления, рекомендуется не ограничиваться изложенными в пособии сведениями, а обратиться к соответствующей литературе для более глубокого изучения вопросов математической логики, которые могут оказаться полезными при изучении специальности.

5. Теория графов

5.1. Вводные замечания

Первые сведения о графах как о схемах в виде наборов точек, соединенных между собой какими-либо линиями, появились в XVIII веке. Сначала эти сведения были разрозненными и относились главным образом к головоломкам, играм и развлечениям. Но в конце XIX века в связи с развитием топологии интерес к теории графов значительно возрос. В то время она рассматривалась как одна из глав топологии. Однако вскоре теория графов стала самостоятельной наукой, так как обнаружилось, что ее методы успешно могут применяться и в других науках — социологии, экономике, биологии, медицине, химии, психологии и др., а также в различных областях дискретной математики, таких как программирование, теория логических схем и многотактных дискретных автоматов, теория бинарных отношений и т.д.

В настоящее время теория графов, благодаря ее ярко выраженному прикладному характеру, применяется для решения многих вопросов практики, например в задачах составления расписаний, при отыскании наиболее рациональной схемы перевозок каких-либо грузов, в расчетах электрических схем и многих других практических задачах.

Из всей богатейшей теории графов, существующей в настоящее время, в данное пособие включены лишь ознакомительные понятия. Изложение материала сопровождается упражнениями. Ими задан необходимый уровень изучения темы, поэтому выполнять их следует все.

5.2. Граф. Псевдограф. Мультиграф

В общем случае граф — это множество V точек, определенным образом соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества V называются вершинами графа, а соединяющие их линии — ребрами. Вершины обычно нумеруют десятичными числами. Если вершины пронумерованы, то ребра обозначают неупорядоченными парами номеров вершин. Каждую пару образуют номера тех вершин, которые соединены ребром.

Граф называется простым (или линейным), если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример простого графа приведен на рис. 5.1.

Всякий простой граф может быть представлен не только в виде рисунка, но и аналитически. Пусть E — множество ребер графа, тогда согласно рис. 5.1 можно записать:

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\};$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\},$$

где E — множество двухэлементных подмножеств множества V, каждое из которых определяет ребро, соединяющее вершины $v \in V$ и $w \in V$, при этом $v \neq w$.

Существуют графы, в которых имеются пары вершин, соединенные несколькими ребрами. Такие ребра называют кратными (параллельными). Граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину саму с собой. Такие ребра называются петлями. Вершина называется изолированной, если у нее нет петель и из нее не выходит ни одно ребро.

Граф, содержащий петли или кратные ребра, называется псевдографом (рис. 5.2). Псевдограф без петель называется мультиграфом (рис. 5.3).

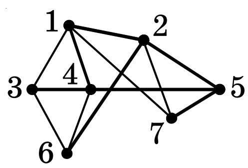


Рис. 5.1

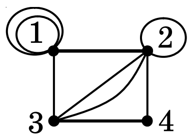


Рис. 5.2

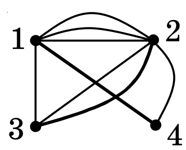
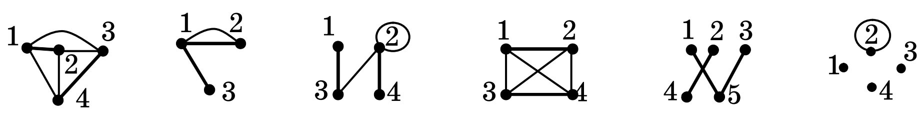


Рис. 5.3

Упражнения

1. (ЦПО). Укажите псевдографы на рис. 5.4.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 5.4

2. (У39). Укажите мультиграфы на рис. 5.4.

3. (ЖРП). Укажите простые графы на рис. 5.4.

4. (ПКК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли быть простым граф, содержащий 4 вершины и 8 ребер;

2) может ли граф с одним ребром быть псевдографом;

3) может ли граф быть псевдографом, если в нем нет кратных ребер;

4) может ли граф с одним ребром быть мультиграфом;

5) граф содержит одну вершину, может ли он быть мультиграфом;

6) граф содержит одну вершину, может ли он быть псевдографом;

7) граф содержит одну вершину, может ли он быть простым графом?

5.3. Подграф. Надграф. Частичный граф

Если из графа G удалить одну или несколько вершин, то будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют подграф графа G. Всякий граф является подграфом самого себя. Подграф называется собственным, если он не совпадает с исходным графом. Подграф, совпадающий с графом G, называется его несобственным подграфом.

Обратимся к рис. 5.1. Удалим из графа вершину 1. Вместе с ней удалятся и четыре ребра: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,7\}$. Получится подграф, изображенный на рис. 5.5. Удалим из графа на рис. 5.1 вершины 4 и 7 (вершину 1 не удаляем). Получим подграф, приведенный на рис. 5.6.

Удалить из графа G можно и все вершины. Тогда от графа ничего не останется. Граф, не содержащий вершин, называется пустым графом. Очевидно, что пустой граф является подграфом любого графа.

Пусть задан некоторый граф G на n вершинах. Добавим к нему еще одну вершину и соединим ее каким-либо образом с вершинами графа G. Получившийся граф с $n+1$ вершинами называется надграфом графа G. Например, граф, изображенный на рис. 5.1, является надграфом графа, приведенного на рис. 5.5.

По заданному графу подграф находится однозначно, то есть, удалив из графа одну или несколько вершин, мы получим единственный подграф. Обратная операция неоднозначна. Пусть в простом графе имеется четыре вершины с номерами 1, 2, 3, 4. Найдем его надграфы, добавив к графу вершину с номером 5. Ее можно соединить с четырьмя вершинами графа различными способами. Чтобы найти их все, поставим в соответствие двоичный разряд каждому ребру из множества $K=\{\{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$. Пусть ребру $\{1,5\}$ соответствует старший разряд, ребру $\{4,5\}$ — младший. Условимся считать, что если в i-м разряде двоичного числа записана единица, то ребро $\{i,5\}$ содержится в надграфе. Если же записан нуль, то ребра $\{i,5\}$ в надграфе нет ($i=1$, 2, 3, 4). Тогда все надграфы окажутся пронумерованными в двоичной системе: 0000, 0001, ..., 1111, откуда следует, что всего существует 16 надграфов. Например, двоичному числу 0000 соответствует надграф, состоящий из заданного графа и изолированной вершины с номером 5. Числу 0101 соответствует надграф, состоящий из заданного графа, к которому добавлены два ребра {2,5} и {4,5}, и т.д.

Если в графе G все вершины оставить на своих местах и удалить одно или несколько ребер, то получится частичный граф. Будем считать, что всякий граф является частичным по отношению к самому себе.

Из графа G можно удалить и все ребра, останутся одни вершины. Граф, в котором нет ни одного ребра, называется нуль-графом. Удалим из графа на рис. 5.1 ребра {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,7}, {2,7}, {5,7}. Тогда останется частичный граф (рис. 5.7).

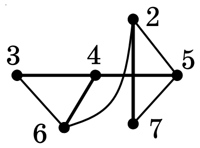


Рис. 5.5

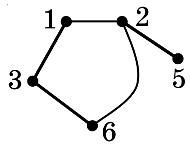


Рис. 5.6

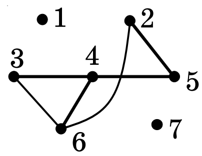


Рис. 5.7

Как и в случае подграфа, все частичные графы заданного графа можно пронумеровать в двоичной системе счисления, если каждому ребру поставить в соответствие двоичный разряд. Всего существует 2^k k-разрядных двоичных чисел. Столько же существует и частичных графов, при этом k — число ребер заданного графа.

Упражнения

1. Определите число вершин и число ребер подграфа, построенного на основе графа G (см. рис. 5.1) путем удаления из него: (Т51) вершины 4; (452) вершин 1, 5, 6.

2. (384). Сколько различных подграфов можно получить на основе графа на рис. 5.1?

3. Сколько собственных подграфов имеет граф: (ТТ5) на рис. 5.5? (РУК) на рис. 5.7?

4. (С87). Сколько надграфов имеет граф, содержащий 7 вершин, если в каждом надграфе 8 вершин?

5. (ДИМ). Граф содержит 5 вершин. К этому графу добавили 2 вершины. Получился надграф, содержащий 7 вершин. Сколько возможно таких надграфов?

6. Сколько частичных графов имеет граф, изображенный:
(853) на рис. 5.1; (В54) на рис. 5.5; (575) на рис. 5.7?

5.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины

Две вершины $v \in V$ и $w \in V$, где V — множество вершин графа G, называются смежными, если они соединены ребром. На рис. 5.7 смежными являются вершины 3 и 4, 3 и 6, 4 и 6 и др.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. На рис. 5.7 смежными являются ребра $\{3, 4\}$ и $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ и $\{2, 5\}$ и др.

Если вершина является концом ребра, то эта вершина и ребро называются инцидентными. На рис. 5.7 ребро $\{3, 4\}$ инцидентно вершинам 3 и 4.

Число $\rho(v)$ ребер, инцидентных вершине v, называется ее степенью. Например, степень вершины 3 (см. рис. 5.7) равна 2, степень вершины 4 равна 3.

Степень изолированной вершины равна нулю. Степень изолированной вершины, содержащей одну петлю, равна 2.

Вершина называется висячей, если степень ее равна 1. Пример: вершина 5 на рис. 5.6.

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа (любого, в том числе псевдографа и мультиграфа). Этим свойством можно пользоваться для определения числа ребер графа. Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рис. 5.7, равна:

$$\rho(1) + \rho(2) + \ldots + \rho(7) = 0 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12,$$

откуда следует, что в графе шесть ребер.

Вершина называется четной, если ее степень есть четное число. Вершина называется нечетной, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе число нечетных вершин четно. Например, на рис. 5.1 нечетными являются вершины 3, 5, 6, 7, то есть всего нечетных вершин 4 (четное число). Число четных вершин в графе может быть любым — как четным, так и нечетным. Например, на рис. 5.2 граф имеет четыре четные вершины: 1, 2, 3, 4, а на рис. 5.7 — пять четных вершин: 1, 2, 3, 5, 7.

Упражнения

1. (48Ф). Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными (см. рис. 5.1):

1) 1 и 2;	3) 3 и 4;	5)1 и 7;	7) 6 и 7;
2) 1 и 5;	4) 3 и 5;	6) 2 и 7;	8) 2 и 1.

2. (ОС2). Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными (см. рис. 5.1):

1) {1, 4} и {2, 5}; 3) {4, 6} и {2, 6}; 5) {2, 6} и {5, 7};
2) {3, 4} и {4, 5}; 4) {1, 7} и {2, 7}; 6) {2, 6} и {2, 5}.

3. (ЦАЗ). Укажите номера вершин, инцидентных ребру {2, 6} (см. рис. 5.7).

4. (ТМИ). На рис. 5.4 укажите графы, имеющие висячие вершины.

5. (СЕШ)! Сумма степеней всех вершин некоторого графа равна 20. К этому графу добавили три ребра. Чему равна сумма степеней всех вершин нового графа? Сколько в нем ребер?

6. Сколько четных и сколько нечетных вершин в графе, изображенном:

(ПТ6) на рис. 5.4,*г*; (ИГ7) на рис. 5.4,*е*; (УХ8) на рис. 5.4,*д*; (ЯС9) на рис. 5.3?

5.5. Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа

Граф называется однородным, если степени всех его вершин равны между собой:

$$\rho(1) = \rho(2) = \ldots = \rho(n),$$

где n — число вершин графа; $\rho(i)$ — степень i-й вершины графа ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Примеры однородных графов приведены на рис. 5.8.

Сумма степеней всех вершин однородного графа равна ρn, где ρ — степень вершины, n — число вершин. Следовательно, число T его ребер равно: $T = \dfrac{\rho n}{2}$.

Граф без петель называется полным, если каждая пара его вершин соединена одним ребром. Примеры полных графов приведены на рис. 5.9.

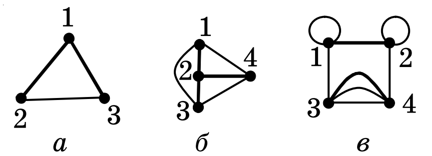


Рис. 5.8

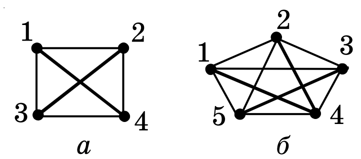


Рис. 5.9

Степень любой вершины полного графа равна $n - 1$, где n — число его вершин, так как каждая вершина соединена ребрами с $n - 1$ остальными вершинами графа. Отсюда следует, что число K ребер полного графа равно:

$$K = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Полные графы нередко называют турнирами.

Пусть дан неполный граф. Построим на его вершинах полный граф, а затем из полного графа удалим все те ребра, которые входят в заданный граф. Получится граф, являющийся дополнением заданного графа до полного.

На рис. 5.10 пунктирными линиями показано дополнение графа G до полного. На рис. 5.11 дополнение представлено сплошными линиями в виде отдельного графа на тех же вершинах.

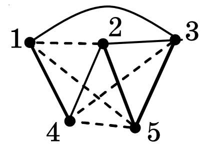


Рис. 5.10

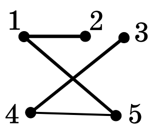


Рис. 5.11

Упражнения

1. (НАО). Сколько ребер в однородном графе, если $n = 7$ и $\rho = 6$?

2. (ЮМ.ИА). Найдите числа n и ρ однородного графа, если он содержит 19 ребер. При этом $n \neq 1$, $\rho \neq 1$.

3. (ФА1). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Возможен ли однородный граф, в котором:

1) пять вершин и степень каждой вершины равна 3;
2) шесть вершин и степень каждой из них равна 4;
3) четыре вершины и шесть ребер;
4) пять вершин и шесть ребер;
5) семь вершин и степень каждой вершины равна 5;
6) шесть вершин и девять ребер;
7) восемь вершин и степень каждой из них равна 3?

4. (МУШ). В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

5. (6Р6). Сколько ребер имеет полный граф на 10 вершинах?

6. (ОД6). Полный граф имеет 105 ребер. Найдите число его вершин.

7. (УХ7). Частичный граф полного графа, насчитывающего 12 вершин, имеет 54 ребра. Сколько ребер имеет дополнение частичного графа?

8. (1А2). В полном графе степень вершины равна 7. Сколько в нем ребер?

9. (ЗВ8). В графе 9 вершин и 8 ребер. Сколько ребер в дополнении графа?

10. (ППЗ)! Из полного графа на 20 вершинах часть вершин удалили. В оставшемся подграфе 66 ребер. Сколько вершин удалено? Сколько ребер удалено?

11. (ХПН)! Степень вершины полного графа равна 7. Из графа удалили несколько ребер так, что степень каждой вершины получившегося частичного графа стала равной 5. Сколько ребер удалили? Сколько ребер осталось?

12. (802). Найдите степень вершины полного графа, имеющего 91 ребро.

13. (УЫФ). В однородном графе степень вершины равна 5. Число ребер равно 35. Найдите число вершин.

5.6. Матрица смежности

Матрица смежности — это еще один способ задания графов. Матрица смежности представляет собой квадратную таблицу размерами $n \times n$, где n — число вершин графа. Строкам и колонкам матрицы ставятся в соответствие вершины, а на пересечениях строк и колонок записываются числа, показывающие, сколько ребер соединяют соответствующие вершины графа.

На рис. 5.12 граф содержит шесть вершин, следовательно, матрица смежности имеет шесть строк и шесть колонок (рис. 5.13). В первой строке слева записан нуль. Это значит, что вершина с номером 1 не имеет петли. Справа от нуля записано число 3. Оно говорит о том, что вершины 1 и 2 соединены тремя кратными ребрами, и т.д.

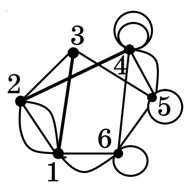


Рис. 5.12

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	0	0	2
2	3	0	1	1	0	0
3	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	2	2	1
5	0	0	1	2	1	1
6	2	0	0	1	1	1

Рис. 5.13

При помощи матрицы смежности легко определить степень любой вершины. Для этого достаточно сложить все числа в соответствующей строке (или колонке) и добавить к результату число, находящееся на пересечении данной строки с главной диагональю. Определим, например, степень вершины 4. Она равна $(1+2+2+1)+2$, где выражение в скобках представляет собой сумму всех чисел четвертой строки, а последнее слагаемое — это диагональное число строки 4.

Непосредственно по матрице смежности легко определить, какой это граф — простой, мультиграф или псевдограф. Если в матрице кроме нулей и единиц нет никаких других чисел и всю главную диагональ занимают нули, то граф является простым. Если во всей главной диагонали записаны нули, а в других позициях матрицы встречаются числа, превосходящие единицу, то граф является мультиграфом. Если в главной диагонали имеются числа, не равные нулю, то граф содержит петли и, следовательно, является псевдографом.

Упражнения

1. (795). Укажите номера простых графов (рис. 5.14).

2. (РЦХ). Укажите степени вершин графа 2 (рис. 5.14) в порядке их нумерации.

	1	2	3	4
1	1		1	1
2		1	1	1
3	1	1	1	
4	1	1		1

1

	1	2	3	4
1				2
2			3	
3		3		
4	2			

2

	1	2	3	4
1	1			
2		2		
3			2	
4				1

3

	1	2	3	4
1		1	1	1
2	1		1	1
3	1	1		1
4	1	1	1	

4

	1	2	3	4
1		1		1
2	1		1	
3		1		1
4	1		1	

5

	1	2	3	4
1		1	1	
2	1			1
3	1			1
4		1	1	

6

	1	2	3	4
1			1	
2				1
3	1			
4		1		

7

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

8

	1	2	3	4
1	1		1	
2		1		1
3	1		1	
4		1		1

9

	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

10

Рис. 5.14

3. (731). Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 4 (рис. 5.14).

4. (153). Укажите номера псевдографов, представленных на рис. 5.14.

5. (В54). Укажите номера мультиграфов на рис. 5.14.

6. (АЙК). Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 8 (рис. 5.14).

5.7. Маршруты. Цепи. Циклы

Пусть граф G содержит множество V вершин и множество E ребер. Маршрутом длины n называется непустая последовательность n ребер вида

$$v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ v_3,\ e_3,\ ...,\ v_n,\ e_n,\ v_{n+1}, \tag{5.1}$$

где ребро e_j ($j = 1, 2, ..., n$) соединяет вершины v_j и v_{j+1}. Очевидно, что в последовательности (5.1) одни и те же вершины могут повторяться.

Примерами маршрутов являются следующие последовательности вершин и ребер графа, приведенного на рис. 5.15:

$$1\ e_1\ 2\ e_4\ 3\ e_6\ 3\ e_2\ 2\ e_1\ 1; \tag{5.2}$$

$$2\ e_2\ 3\ e_3\ 2\ e_4\ 3\ e_7\ 4; \qquad (5.3)$$
$$4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_6\ 3\ e_7\ 4\ e_7\ 3$$

и т.д. В каждой из этих последовательностей вершины обозначены цифрами, ребра — буквой e с числовыми индексами.

Маршрут называется цепью, если в нем нет повторяющихся ребер. Примером может служить маршрут (5.3).

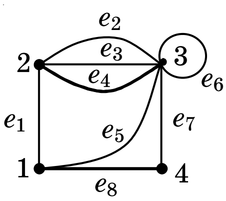


Рис. 5.15

Цепь называется простой, если в ней нет повторяющихся вершин. Примеры простой цепи (рис. 5.15): $1\ e_5\ 3\ e_4\ 2$; $2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1$.

Маршруты, цепи и простые цепи могут быть замкнутыми и разомкнутыми. В замкнутых маршрутах (а также цепях и простых цепях) начальная и конечная вершины совпадают, в разомкнутых — не совпадают. Примером замкнутого маршрута является (5.2).

Замкнутая цепь называется циклом. Пример (см. рис. 5.15): $2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_4\ 2$.

Простая замкнутая цепь называется простым циклом. Примеры (см. рис. 5.15):

$$2\ e_2\ 3\ e_5\ 1\ e_1\ 2; \quad 3\ e_2\ 2\ e_3\ 3; \quad 3\ e_6\ 3.$$

В случае простых графов (не содержащих петель и кратных ребер) для обозначения маршрутов, цепей и циклов можно использовать только номера вершин. Такое представление маршрутов называется вершинным. Поясним это при помощи графа (рис. 5.16).

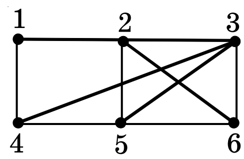


Рис. 5.16

Маршрут: 1, 2, 6, 3, 6, 5;
цепь: 2, 3, 6, 5, 2, 1, 4;
простая цепь: 1, 2, 3, 5, 6;
цикл: 6, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 6;
простой цикл: 2, 3, 5, 6, 2.

Число ребер, входящих в цепь, называется длиной цепи (цикла).

Упражнения

1. В нижеприведенном списке укажите (рис. 5.15) (600) маршруты, (794) циклы, (961) замкнутые маршруты, (627) простые цепи, (Г52) цепи, (569) простые циклы:

1) $2\ e_3\ 3$;	4) $3\ e_7\ 4\ e_8$;	7) $e_4\ 3\ e_7\ 2\ e_4$;
2) $1\ e_8\ 4\ e_8\ 1$;	5) $3\ e_6\ 3$;	8) $1\ e_5\ 3\ e_7\ 4$;
3) $2\ e_2\ 3\ e_6\ 3$;	6) $2\ e_4\ 3\ e_2\ 2$;	9) $1\ e_5\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1$.

2. (В72). В упр. 1 укажите последовательности, не являющиеся маршрутами.

3. (885). В упр. 1 укажите простые цепи длины 1.

4. (196). В упр. 1 укажите цепи длины 2.

5. В нижеприведенном списке укажите (рис. 5.16) (РЕФ) маршруты, (УЗС) циклы, (УТК) простые циклы, (У92) замкнутые маршруты, (88Ш) простые цепи, (ОЖУ) цепи:

1) 3, 4, 5, 3, 6, 3;	4) 2, 6;	7) 2, 3, 6, 2, 3, 6, 2;
2) 1, 2, 3, 4, 1;	5) 3, 5, 4, 3;	8) 3, 3;
3) 5;	6) 2, 6, 2;	9) 3, 4, 5, 2, 3.

5.8. Связность графа

Две вершины v и w графа называются связными, если существует соединяющая их цепь. Если же в графе нет цепи, соединяющей вершины v и w, то вершины v и w называются несвязными. Например, вершины 1 и 5 (рис. 5.17) связны, так как их соединяет цепь 1, 7, 6, 5, а вершины 2 и 3 связными не являются, поскольку соединяющая их цепь отсутствует.

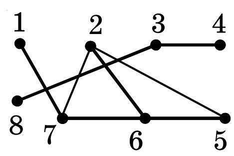


Рис. 5.17

Граф называется связным (однокомпонентным), если каждые две его вершины связны. Если же в графе имеется хотя бы одна пара вершин, не соединенных цепью, то граф называется несвязным (многокомпонентным). Согласно этим определениям граф на рис. 5.16 является связным, а граф, приведенный на рис. 5.17, — несвязным.

Он распадается на два графа так, что ни одна из вершин одного графа не соединена ни с одной вершиной другого графа. Такие изолированные графы называются компонентами. Необходимо заметить, что согласно нормам современного русского языка это слово относится к категории мужского рода: компонент. Однако в литературе по теории графов и в некоторых других разделах математики оно считается словом женского рода: компонента. В данном пособии принято считать, что слово «компонента» относится к женскому роду. Но вне профессиональной среды его следует считать словом мужского рода.

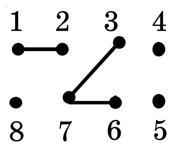


Рис. 5.18

Число компонент, из которых состоит граф, называется степенью связности. Граф на рис. 5.17 имеет степень связности, равную 2. Степень связности графа, приведенного на рис. 5.18, равна 9.

Упражнения

1. (ОЖФ). Укажите степень связности графа на рис. 5.19.

2. (ВРХ)! Определите степень связности подграфа, построенного на основе рис. 5.17 путем удаления из графа вершин 3 и 7; удаления вершин 2, 3, 6, 7.

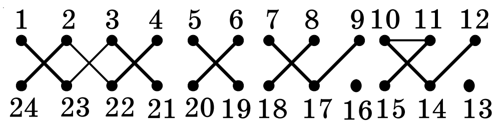


Рис. 5.19

3. Ниже дан список графов, заданных множествами их ребер. Каждый граф содержит 6 вершин. Укажите номера (ЭЕЕ) трехкомпонентных графов, (ФС9) четырехкомпонентных:

1) {{1,2}, {2,6}, {3,4}};
2) {{1,5}, {3,5}};
3) {{1,2}, {2,3}, {5,6}};
4) {{1,6}, {2,3}, {3,4}};
5) {{1,2}, {2,5}, {3,6}};
6) {{2,3}, {5,6}};
7) {{1,2}, {2,5}, {3,4}};
8) {{1,2}, {2,3}, {4,5}}.

4. (К66). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли нуль-граф быть однокомпонентным;

2) может ли граф быть однокомпонентным, если в нем 10 вершин и 8 ребер;

3) верно ли, что граф на n вершинах, не содержащий ни одного ребра, имеет степень связности, равную n;

4) относится ли пустой граф к однокомпонентным;

5) относится ли пустой граф к многокомпонентным;

6) может ли граф, содержащий n вершин и n ребер, иметь степень связности, равную n;

7) в графе 20 ребер, степень каждой вершины равна 2, может ли граф иметь степень связности, равную 15?

5. (335)! В графе 20 вершин. Степень каждой вершины равна 1. Сколько в графе компонент? Сколько ребер?

5.9. Эйлеровы цепи и циклы. Уникурсальная линия

Леонард Эйлер (1707–1783), швейцарский математик, механик, физик и астроном, является звездой первой величины на небосклоне науки. Он много лет работал в Петербургской Академии наук. За свою жизнь он издал более 800 научных работ. Творческая активность Л. Эйлера оставалась на высочайшем уровне и в преклонном возрасте, хотя в последние 17 лет его жизнь была омрачена потерей зрения. Очень непросто перечислить даже основные результаты научной деятельности Л. Эйлера. Он доказал великую теорему Ферма для показателей 3 и 4, положил начало топологии, построил точную теорию движения Луны с учетом притяжения не только Земли, но и Солнца. У него много трудов по теории комплексных чисел, вариационному исчислению, гидравлике, кораблестроению, геометрической оптике, механике твердого тела, теории музыки, теории графов и др.

В первой работе Эйлера по теории графов, опубликованной в 1736 г., дано решение головоломки о Кенигсбергских мостах. Город Кенигсберг (на современных географических картах это город Калининград) расположен на берегах реки Преголи (ударение на букву «о») и двух ее островах. Острова и берега в те времена были связаны семью мостами (рис. 5.20). Горожане любили гулять по этим мостам и пытались найти такой путь, чтобы, выйдя из одной точки, пройти точно по одному разу по всем мостам и вернуться в исходную точку.

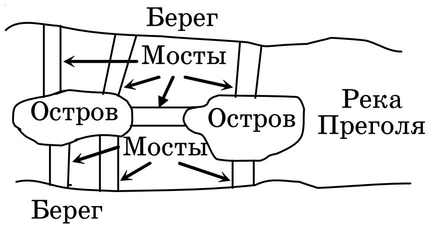


Рис. 5.20

Однако, несмотря на многочисленные попытки, обойти по одному разу все семь мостов никому не удавалось, что очень удивляло горожан. Леонард Эйлер, занявшись этой головоломкой, показал, что такого пути не существует. Невозможен и облегченный вариант обхода мостов, когда требуется пройти по каждому мосту один раз, но без возврата в исходную точку.

В честь Л. Эйлера цикл, содержащий все ребра графа, назван эйлеровой линией (эйлеровым циклом, эйлеровой цепью). Граф, содержащий эйлеров цикл, получил название эйлерова графа. Если граф содержит разомкнутую цепь и в нее входят все ребра этого графа, то такой граф называется полуэйлеровым.

Приведем две теоремы об эйлеровых графах.

Теорема 1. Если в связном графе все вершины четны, то этот граф содержит эйлеров цикл.

Доказательство можно найти в [1, с. 37; 30, с. 61]. Верно и обратное утверждение: если граф содержит эйлеров цикл, то все его вершины четны.

Построим граф по рис. 5.20. Получим рис. 5.21. Вершины 1 и 4 этого графа обозначают берега, вершины 2 и 3 — острова на реке, а ребра — мосты. Степени всех вершин графа нечетны, следовательно, в графе нет эйлерова цикла и нет эйлеровой цепи.

На рис. 5.22 приведен граф, в котором степени всех вершин четны. Обход его ребер можно начать с любой вершины. Обозначим ребра буквами a, b, c, d, e, f, k, m, n. Тогда примером эйлерового цикла может служить следующая последовательность:

$$4,\ c,\ 1,\ a,\ 1,\ b,\ 2,\ f,\ 3,\ n,\ 5,\ m,\ 4,\ k,\ 3,\ e,\ 2,\ d,\ 4. \qquad (5.4)$$

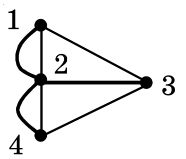


Рис. 5.21

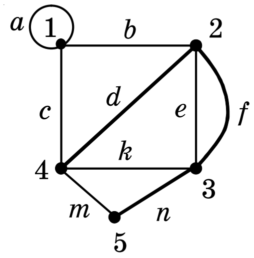


Рис. 5.22

Теорема 2. Если в связном графе две вершины нечетны, а все остальные — четны, то этот граф содержит эйлерову разомкнутую цепь. Доказательство можно найти в [1, с. 62].

Если на рис. 5.22 удалить вершину 5, то получится подграф с нечетными вершинами 3 и 4 и четными — 1 и 2. Примером эйлеровой цепи в этом подграфе может служить следующая последовательность вершин и ребер:

$$4,\ c,\ 1,\ a,\ 1,\ b,\ 2,\ d,\ 4,\ k,\ 3,\ e,\ 2,\ f,\ 3. \qquad (5.5)$$

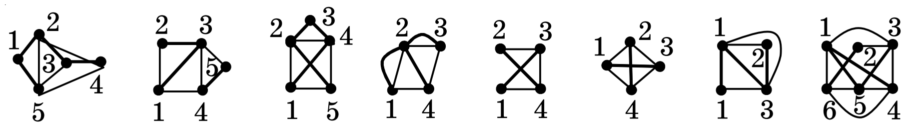
Всякую линию, которую можно провести, проходя по ребрам точно по одному разу, называют уникурсальной. Провести уникурсальную линию — это значит пройти по всем ребрам графа по одному разу, не отрывая карандаша от бумаги. Например, последовательность (5.4) представляет собой замкнутую уникурсальную линию, а примером разомкнутой уникурсальной линии является последовательность (5.5). Заметим, что разомкнутая уникурсальная линия всегда начинается с нечетной вершины и заканчивается в другой нечетной вершине.

Эйлеровы графы иногда называют уникурсальными.

Упражнения

1. (Т91). Укажите номера графов на рис. 5.23, содержащих эйлеров цикл (замкнутую уникурсальную линию).

2. (813). Укажите номера графов на рис. 5.23, содержащих разомкнутую уникурсальную линию.



1 2 3 4 5 6 7 8

Рис. 5.23

3. (ПИЛ). Укажите номера вершин, с которых следует начать обход ребер графа (рис. 5.24), чтобы получить разомкнутую уникурсальную линию (при самоконтроле номера вершин упорядочить по возрастанию).

(ТЕХ). Укажите номера вершин на графе 3 (см. рис. 5.23), которые не могут быть началом (и концом) разомкнутой уникурсальной линии (номера вершин упорядочить по возрастанию).

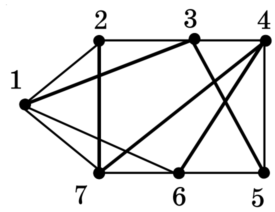


Рис. 5.24

(ЛИЙ). Укажите номера вершин, с которых можно начать обход графа 8 (см. рис. 5.23), чтобы получить замкнутую уникурсальную линию (номера вершин упорядочить по возрастанию).

5.10. Задача о коммивояжере

Коммивояжер (фр. *commisvoyageur*) — разъездной представитель крупной торговой фирмы, предлагающий покупателям товары по образцам, каталогам, прейскурантам. В слове «коммивояжер» два ударения — на первый слог и на последний.

Задача о коммивояжере (о странствующем торговце согласно [24]) имеет две формулировки. В первой вопрос ставится следующим образом: «Коммивояжер желает посетить n определенных городов; как он должен двигаться, чтобы заехать в каждый из них хотя бы один раз, проделав путь наименьшей общей длины?». Согласно этой формулировке коммивояжер может те или иные города посещать неоднократно. По второй же формулировке «он обязан побывать в каждом пункте в точности по одному разу и заинтересован затратить на поездку как можно меньше времени» [1, с. 47]. Мы в дальнейшем будем пользоваться второй формулировкой, но в предположении, что коммивояжер оптимизирует не время, а пройденный путь.

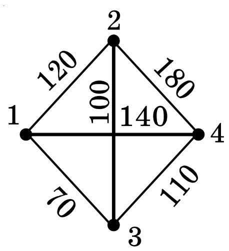


Рис. 5.25

Рассмотрим граф, приведенный на рис. 5.25. Вершины в этом графе обозначают города, ребра — расстояние между городами. В каком порядке коммивояжер должен обойти все города, преодолев наименьшее расстояние, если исходным является город 1? (Задача взята из [24].)

Сначала найдем циклы, содержащие все вершины графа (рис. 5.25). Всего существует три таких цикла: 1-2-4-3-1, 1-2-3-4-1, 1-3-2-4-1.

Вычислим для каждого из них общую длину пути.

Цикл 1-2-4-3-1: 120 + 180 + 110 + 70 = 480.

Цикл 1-2-3-4-1: 120 + 100 + 110 + 140 = 470.

Цикл 1-3-2-4-1: 70 + 100 + 180 + 140 = 490.

Таким образом, кратчайшим является путь 1-2-3-4-1.

Упражнения

1. (НЛО). Известно, что охотник за мертвыми душами Павел Иванович Чичиков побывал у помещиков в следующем порядке: Манилов, Коробочка, Ноздрев, Собакевич, Плюшкин, Тентетников, генерал Бетрищев, Петух, Костанжогло, полковник Кошкарев.

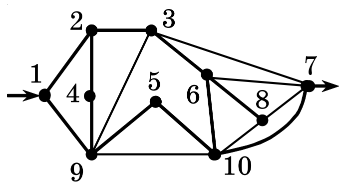


Рис. 5.26

Схема, в соответствии с которой Чичиков посещал помещиков, приведена на рис. 5.26 в виде графа, где вершины обозначают имена помещиков, а ребра — дороги; входной стрелке соответствует начало, выходной — конец пути. Укажите номера имений, принадлежащих помещикам: Манилову; Коробочке; Ноздреву; Собакевичу; Плюшкину; Тентетникову; генералу Бетрищеву; Петуху; Костанжогло; полковнику Кошкареву [1, с. 6].

2. (780). Коммивояжер выезжает из города 1, посещает по одному разу все города и останавливается в городе 5 (рис. 5.27). Укажите последовательность городов, в которых побывал коммивояжер, при условии, что города 1 и 5 в последовательность также входят.

3. (ТЯК). Сколько километров проехал коммивояжер (см. предыдущую задачу), если длины дорог, соединяющих города, все одинаковы и равны по 100 км?

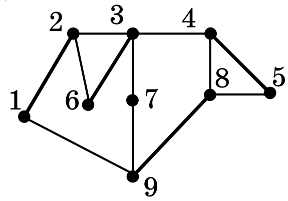


Рис. 5.27

5.11. Двудольные графы

Пусть множество V вершин некоторого графа G состоит из двух непустых множеств V_1 и V_2 так, что $V = V_1 \cup V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Если каждое ребро графа G соединяет какую-либо вершину множества V_1 с одной из вершин множества V_2, то такой граф называется двудольным.

Пример двудольного графа приведен на рис. 5.28. В этом графе

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\};\quad V_1 = \{1,\ 2,\ 3\};\quad V_2 = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}.$$

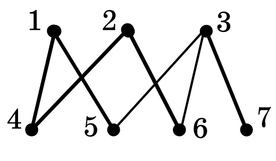


Рис. 5.28

Двудольный граф называется полным, если каждая вершина множества V_1 соединена с каждой вершиной множества V_2. Полный двудольный граф имеет k ребер, где $k = |V_1| \cdot |V_2|$. Степень любой вершины множества V_1 полного двудольного графа равна $|V_2|$. Степень каждой вершины множества V_2 равна . Дополнение полного двудольного графа есть несвязный граф, состоящий из двух компонент — полного графа G_1 и полного графа G_2.

Упражнения

1. (ЕА2). Сколько ребер имеет полный двудольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 7$?

2. (ЦП6). Известно, что в полном двудольном графе 143 ребра. Определите $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1| > 1$ и $|V_2| > 1$.

3. (675). В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, степень каждой вершины множества V_2 равна 8. Сколько ребер в графе?

4. (КА1). В двудольном графе $|V_1| = 18$, $|V_2| = 10$, число ребер равно 18. Найдите число ребер дополнения до полного двудольного графа.

5. (594). В полном двудольном графе 49 вершин. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1| \neq 1$ и $|V_2| \neq 1$.

6. (713). В полном двудольном графе содержится 119 ребер. Найдите величины $|V_1|$ и $|V_2|$, если известно, что $|V_2| > 15$, $|V_1| > 1$.

$|V_1|$

5.12. Плоские графы

Граф называется плоским, если на плоскости его ребра пересекаются только в вершинах. Граф на рис. 5.29 является плоским, а тот же граф на рис. 5.30 плоским не является.

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется гранью. Граф на рис. 5.29 имеет три внутренних грани — *а*, *б*, *в*, и одну внешнюю (бесконечную), обозначенную буквой *г*. Бесконечную грань имеет любой плоский граф.

Всякая петля образует отдельную грань. Два кратных ребра также ограничивают отдельную грань. Например, граф на рис. 5.31 содержит шесть граней, из которых грани *а* и *б* образованы петлями, а *г* и *д* — кратными ребрами.

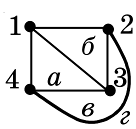


Рис. 5.29

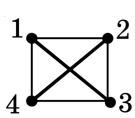


Рис. 5.30

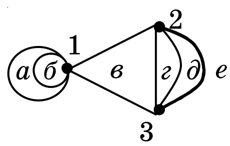


Рис. 5.31

5.13. Деревья и лес

Термин «дерево» для особой разновидности графов ввел в 1857 г. английский математик Артур Кэли (1821–1895), с 1870 г. иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук.

Несвязный граф, не содержащий циклов, называется лесом. Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом. На рис. 5.32 приведен трехкомпонентный лес. Первую компоненту образует дерево с вершинами 1, 2, 3, 4, вторую — 5, 6, 7, 8, 9, третью — 10, 11.

Приведем несколько теорем о деревьях.

Теорема 1. Всякое дерево содержит $n-1$ ребер, где n — число вершин.

Теорема 2. Всякий лес содержит $n-k$ ребер, где k — число компонент связности.

Теорема 3. Любые две вершины дерева соединены точно одной простой цепью.

Теорема 4. Если в дереве любые две вершины соединить ребром, то в графе появится один цикл.

Если связный граф содержит цикл, то после удаления любого ребра, входящего в цикл, этот цикл разрушается, но связность графа сохраняется. Применим операцию разрушения циклов к каждому циклу графа. Получится связный частичный граф, являющийся деревом. Это дерево называется остовом, т.е. остовом называется связный частичный граф данного связного графа G, содержащий все вершины графа G, но не содержащий циклов.

Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 5.33. Удалим из него ребра $\{1,4\}$ и $\{3,4\}$. Получим остов, приведенный на рис. 5.34. Если из того же графа (рис. 5.33) удалить ребра $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$, то получим другой остов (рис. 5.35), и т.д.

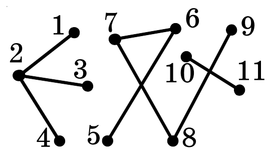


Рис. 5.32

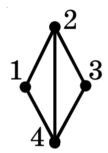


Рис. 5.33

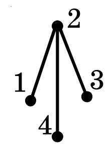


Рис. 5.34

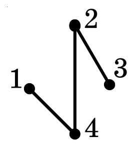


Рис. 5.35

Наименьшее число z, показывающее, сколько ребер необходимо удалить из графа, чтобы получить его остов, называется цикломатическим числом графа. Если n — число вершин, m — число ребер, k — число компонент, то $z=m-n+k$.

В случае связного графа $k=1$, следовательно, $z=m-n+1$.

5.14. Понятие ориентированного графа. Матрица смежности

Если в графе каждому ребру дать ориентацию при помощи стрелки, то получится ориентированный граф (орграф). Ориентированные ребра принято называть дугами.

Заменим в орграфе все дуги ребрами — получим граф, который называется основанием данного орграфа. Например, для орграфа, приведенного на рис. 5.36, основанием является граф без стрелок на рис. 5.37.

Всякий орграф может быть представлен матрицей смежности. Условимся считать, что первым элементам пар, обозначающих дуги, соответствуют строки матрицы, вторым элементам — колонки. На рис. 5.38 приведена матрица смежности, построенная для графа, изображенного на рис. 5.36.

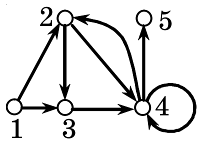


Рис. 5.36

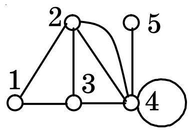


Рис. 5.37

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	0

Рис. 5.38

Орграф может содержать и кратные дуги. Пример такого графа приведен на рис. 5.39. Его матрица смежности изображена на рис. 5.40.

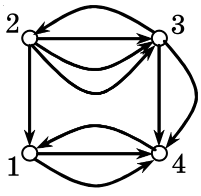


Рис. 5.39

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	1	0	3	0
3	0	1	0	2
4	1	0	0	0

Рис. 5.40

Всякий неориентированный граф может быть представлен в виде орграфа. Для этого достаточно все его ребра заменить парами встречных дуг.

Если в орграфе две вершины соединены парой встречных дуг, то пару можно заменить одним неориентированным ребром. Граф, содержащий дуги и неориентированные ребра, называется смешанным графом.

Упражнения

1. (ХХН). Сколько ребер имеет основание орграфа на рис. 5.39?

2. На рис. 5.41 изображены восемь матриц смежности, каждая из которых задает некоторый орграф на четырех вершинах.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

1

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

3

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

4

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

5

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

6

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

7

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

8

Рис. 5.41

Укажите:

(УМБ) несвязные орграфы;

(УТВ) орграфы, содержащие петли;

(ЛЯТ) орграфы, содержащие кратные дуги;

(ЦАД) орграфы, основания которых — полные графы.

5.15. Степень вершины орграфа

Степени вершин орграфа определяются сложнее по сравнению с неориентированными графами, поскольку необходимо учитывать, сколько дуг входит в каждую вершину и сколько выходит. Степень входа вершины равна числу входящих в нее дуг. Степень выхода вершины равна числу выходящих из нее дуг. Например, для графа на рис. 5.39 имеем:

$$\rho(1)_{\text{вх}} = 2; \quad \rho(1)_{\text{вых}} = 2; \quad \rho(2)_{\text{вх}} = 1; \quad \rho(2)_{\text{вых}} = 4;$$

$$\rho(3)_{\text{вх}} = 3; \quad \rho(3)_{\text{вых}} = 3; \quad \rho(4)_{\text{вх}} = 4; \quad \rho(4)_{\text{вых}} = 1.$$

Если в орграфе n вершин, то число K его дуг равно:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho(i)_{\text{вх}} + \sum_{i=1}^{n} \rho(i)_{\text{вых}}}{2}. \tag{5.6}$$

Например, для графа на рис. 5.39 имеем:

$$K = \frac{2+1+3+4+2+4+3+1}{2} = 10.$$

Степени входа и выхода орграфа обладают следующим свойством: сумма степеней входа всех вершин равна сумме степеней выхода всех вершин, т.е. $\sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вх}} = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вых}}$.

Следовательно, формулу (5.6) можно упростить: $K = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вх}}$ либо $K = \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{\text{вых}}$.

Упражнения

1. (АИЮ). Определите степень входа каждой из вершин графа на рис. 5.36.

2. Орграфы на рис. 5.41 заданы матрицами смежности. Укажите номера графов:

(ЭЭТ) содержащих хотя бы одну вершину со степенью входа, равной трем;

(ШЛК) содержащих хотя бы одну вершину со степенью выхода, равной трем.

5.16. Маршруты, цепи, циклы в орграфах

Маршруты, цепи и циклы в орграфах определяются так же, как и в случае неориентированных графов, но с учетом того, что движение возможно лишь в направлении стрелок. Например, последовательность вершин 1-3-2-4 (см. рис. 5.36) маршрутом не является, поскольку движение от вершины 3 к вершине 2 осуществлено навстречу стрелке. Примеры «правильных» маршрутов (см. рис. 5.36): 1-2-3-4-2; 1-3-4-2-4-5; 1-3-4-2-3-4 и др.

Если в маршруте нет повторяющихся дуг, то маршрут называется ориентированной цепью. Если в ориентированной цепи нет повторяющихся вершин, то цепь называется простой ориентированной цепью. Замкнутая простая ориентированная цепь называется простым ориентированным циклом.

5.17. Нахождение максимальной пропускной способности транспортной сети

Транспортной сетью называется орграф, в котором имеется точно одна вершина со степенью входа, равной нулю (источник), точно одна вершина со степенью выхода, равной нулю (сток), и в котором

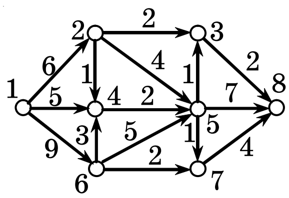


Рис. 5.42

каждой дуге поставлено в соответствие некоторое число, называемое пропускной способностью дуги. Примером является орграф на рис. 5.42, где вершина 1 — источник, вершина 8 — сток. Все остальные вершины называются промежуточными. Каждой дуге поставлена в соответствие ее пропускная способность.

Для каждой из промежуточных вершин справедливо утверждение: суммарный входной поток равен суммарному выходному потоку, т.е. ни в одной вершине проходящая через сеть субстанция не накапливается (это может быть вода в водопроводной сети, автомобили на разветвленной сети дорог и т.д.).

Если ориентированная цепь состоит из нескольких последовательных дуг, то ее максимальная пропускная способность определяется той дугой, пропускная способность которой имеет наименьшее значение по сравнению с другими дугами данной цепи. На этом очевидном положении основан метод нахождения максимальной пропускной способности сети, который мы рассмотрим на примере орграфа, приведенного на рис. 5.42.

Этап 1. Рассмотрим цепь 1-2-3-8. Ее пропускная способность равна двум. Уменьшим на 2 пропускные способности всех дуг цепи 1-2-3-8. Дуги (2-3) и (3-8) удаляем, так как их пропускная способность равна нулю. Таким образом, результатом первого этапа является число $n_1 = 2$, представляющее собой ту часть пропускной способности сети, которую дает цепь 1-2-3-8.

Этап 2. Рассмотрим цепь 1-2-5-8 (рис. 5.43). Ее максимальная пропускная способность равна 4 ($n_2 = 4$). Уменьшим на 4 пропускные способности дуг (1-2), (2-5), (5-8). После удаления дуг с нулевой пропускной способностью получим орграф, изображенный на рис. 5.44.

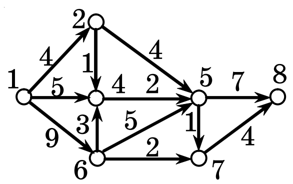


Рис. 5.43

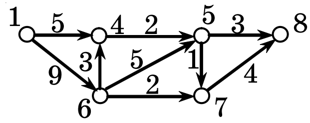


Рис. 5.44

Этап 3. Пропускная способность цепи 1-4-5-8 (рис. 5.44) равна двум, т.е. $n_3 = 2$. Удалив дугу (4-5), получаем орграф, приведенный на рис. 5.45.

Этап 4. Пропускная способность цепи 1-6-5-8 (рис. 5.45) равна единице, то есть $n_4 = 1$. После удаления дуги (5-8) получим орграф, представленный на рис. 5.46.

Этап 5. Пропускная способность цепи 1-6-5-7-8 равна единице, т.е. $n_5 = 1$.

Этап 6. Осталась единственная цепь (рис. 5.47), для которой получаем $n_6 = 2$.

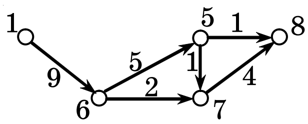


Рис. 5.45

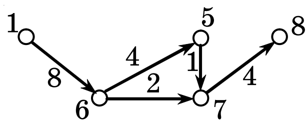


Рис. 5.46

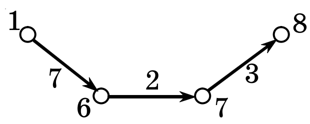


Рис. 5.47

Таким образом, максимальная пропускная способность N сети, приведенной на рис. 5.42, равна сумме шести составляющих:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 = 12,$$

где каждое слагаемое обозначает пропускную способность соответствующей цепи, соединяющей источник со стоком.

Упражнения

1. (ОЛ1)! Определите максимальную пропускную способность цепи: 1-2-3-7; 1-4-6-7; 1-3-6-7 (рис. 5.48).

2. (ЧЕХ)! Определите максимальную пропускную способность участка сети (рис. 5.48):

а) если вершина 1 — источник, вершина 3 — сток;

б) вершина 1 — источник, вершина 6 — сток.

3. (983). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 5.48), если вершина 1 — источник, вершина 7 — сток.

4. (2ПИ)! Определите максимальную пропускную способность участка сети (рис. 5.49):

а) если источник — вершина 1, сток — вершина 4 (дуги (4-6) и (4-7) не учитываем);

б) источник — вершина 1, сток — вершина 6 (дугу (6-7) не учитываем).

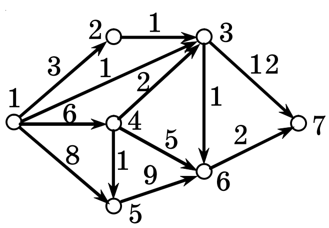


Рис. 5.48

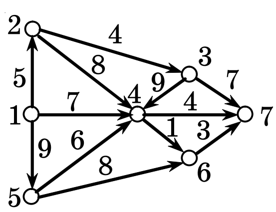


Рис. 5.49

5. (285). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 5.49), если вершина 1 — источник, вершина 7 — сток.

На этом краткое знакомство с элементами теории графов завершим. В настоящее время по теории графов существует обширнейшая литература, в которой отражены и теоретические вопросы, и многочисленные прикладные аспекты этого очень красивого направления современной дискретной математики. Поэтому каждый, у кого возникнет потребность в более глубоком изучении каких-либо вопросов теории графов, в существующей литературе всегда найдет ответы на свои вопросы.

6. Элементы линейной алгебры

6.1. Матрицы и действия над ними

В некоторых случаях информацию удобно представлять в виде таблиц чисел. Предположим, например, что четыре завода 1, 2, 3, 4 производят пять наименований продукции, которые также можно пронумеровать числами 1, 2, 3, 4, 5. Символом

$$a_k^i \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

обозначим количество продукции с номером k, выпускаемой заводом с номером i. Например, число a_3^4 означает количество продукции с номером 3, произведенной заводом с номером 4. Тогда выпуск продукции всеми заводами можно представить таблицей вида

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{bmatrix},$$

содержащей полную информацию о результатах работы всех четырех заводов. Сумма

$$a_1^1 + a_2^1 + a_3^1 + a_4^1 + a_5^1$$

показывает количество всей продукции, произведенной первым заводом, сумма

$$a_2^1 + a_2^2 + a_2^3 + a_2^4$$

равна количеству продукции с номером 2, произведенной всеми четырьмя заводами. Подобные таблицы широко встречаются в математике (а также на практике) и получили название матриц.

Матрицей размера $m \times n$ называется любая прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов (колонок). Произвольную матрицу размера $m \times n$ будем записывать в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Кратко матрицу A записывают так: $A = \left[a_k^i\right] \; \left(i = \overline{1, m}; \; k = \overline{1, n}\right)$, где запись $i = \overline{1, m}$ означает, что индекс i принимает значения 1, 2, ..., m (нумерация строк), а запись $k = \overline{1, n}$ — индекс k принимает значения

1, 2, ..., n (нумерация столбцов). Числа a_k^i называются элементами матрицы. Ими могут быть любые числа: целые, дробные, положительные, отрицательные, комплексные, а также нуль.

Каждый элемент a_k^i матрицы (6.1) снабжен двумя индексами. Верхний индекс (i) означает номер строки, а нижний (k) — номер столбца, где расположен этот элемент, например элемент a_2^3 находится в третьей строке и втором столбце. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

Две матрицы $A = \left[a_k^i\right]$ и $B = \left[b_k^i\right]$ одного размера называются равными, если равны их элементы, расположенные на одинаковых местах. В случае когда матрицы A и B равны (при этом пишут $A = B$), то

$$a_1^1 = b_1^1,\ \ a_1^2 = b_1^2,\ \ \ldots,\ \ a_k^i = b_k^i.$$

Если хотя бы одно из этих равенств нарушается, то $A \neq B$.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется квадратной, а число ее строк называется порядком матрицы. Запишем квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Элементы $a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n$ образуют главную диагональ, а $a_1^n, a_2^{n-1}, \ldots, a_n^1$ — побочную. Если в квадратной матрице все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, то такую матрицу называют треугольной. Квадратную матрицу называют треугольной и в том случае, если нулю равны все элементы, расположенные ниже главной диагонали.

Квадратная матрица вида

$$B = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_n^n \end{bmatrix},$$

где хотя бы один элемент на главной диагонали отличен от нуля, а все элементы, расположенные выше и ниже главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Диагональную матрицу, где все элементы главной диагонали равны единице, называют единичной:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу размера $m \times n$ вида

$$C = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & \dots & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & \dots & \dots & a_n^2 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \dots & \dots & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_m^m & a_{m+1}^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix},$$

где хотя бы одно из чисел $a_1^1, a_2^2, \dots, a_m^m$ отлично от нуля и $m < n$, называют ступенчатой или трапецеидальной. Очевидно, что если $m = n$, то ступенчатая матрица превращается в треугольную.

Рассмотрим следующие операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц.

Пусть даны две матрицы $A = \left[a_k^i\right]$ и $B = \left[b_k^i\right]$ одного размера. Суммой матриц A и B называется матрица

$$C = A + B = \left[c_k^i\right],$$

где $c_k^i = a_k^i + c_k^i$, т.е. чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах. Например:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Запомним, что складывать можно только матрицы одинакового размера.

Произведением матрицы $A = \left[a_k^i\right]$ на число λ называется матрица $B = \left[b_k^i\right]$, если $b_k^i = \lambda a_k^i$. Чтобы умножить матрицу A на число λ, нужно умножить все ее элементы на это число. В результате получится новая матрица, которую обозначают $B = \lambda A = \left[\lambda a_k^i\right]$.

Пример 1. Пусть $\lambda = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix}$. Найдем матрицу $3A$:

$$3A = 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -12 & 18 & 3 \\ 15 & -21 & -6 \end{bmatrix}.$$

Будем говорить, что размер матрицы A согласован с размером матрицы B, если число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B. Иными словами: размер матрицы A согласован с размером матрицы B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Если матрица A имеет размер $m \times n$, то согласованная с ней по размеру матрица B должна иметь размер $n \times k$. При этом числа m и k могут быть произвольными, в том числе и равными. Заметим, что в общем случае из согласованности размера матрицы A с размером матрицы B не следует согласованность размера матрицы B с размером матрицы A. Лишь в случае когда матрица A имеет размер $m \times n$, а B — $n \times m$, то согласованным является размер не только матрицы A с размером матрицы B, но и матрицы B с размером матрицы A.

Пусть даны две матрицы A и B, где матрица A имеет размер $m \times n$, а матрица B — $n \times l$, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матриц $A = \left[a_k^i\right]$ и $B = \left[b_j^s\right]$ называется матрица $C = \left[c_p^q\right]$ (записывают $C = A \cdot B$) размера $m \times l$, элемент c_p^q (стоящий в строке с номером q и столбце с номером p) которой равен сумме всех произведений элементов строки с номером q матрицы A на соответствующие элементы столбца с номером p матрицы B, т.е.

$$c_p^q = a_1^q b_p^1 + a_2^q b_p^2 + \ldots + a_n^q b_p^n = \sum_{i=1}^{n} a_i^q b_p^i, \quad q = \overline{1,m};\ p = \overline{1,l}. \qquad (6.2)$$

П р и м е р 2. Найти произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Размеры матриц A и B согласованы, так как в матрице A четыре колонки, а в матрице B четыре строки. По формуле (6.2) находим:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot 1-2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 4 & 1\cdot 2-2\cdot 2+3\cdot 3-3\cdot 4 \\ -1\cdot 1-3\cdot 1-2\cdot 2+3\cdot 4 & -1\cdot 2-3\cdot 2-2\cdot 3-3\cdot 3 \\ 4\cdot 1-5\cdot 1+6\cdot 2-3\cdot 4 & 4\cdot 2-5\cdot 2+6\cdot 3+3\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & -5 \\ 4 & -23 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}.$$

Получили матрицу размера 3×2.

В рассмотренном примере произведение матриц $B \cdot A$ не определено, так как размеры матриц B и A не согласованы.

Из определения произведения матриц следует, что если размеры матриц A, B и B, A согласованы, то в общем случае $AB \neq BA$. Если же A — квадратная, а E — единичная матрица того же порядка, что и A, то $AE = EA = A$.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A); \\ &(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A; \\ &A + B = B + A; \\ &\lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B; \\ &A(BC) = (AB)C; \\ &A(\lambda_1 B + \lambda_2 C) = \lambda_1 AB + \lambda_2 AC; \\ &(\lambda_1 B + \lambda_2 C)A = \lambda_1 BA + \lambda_2 CA; \\ &A(B + C) = AB + AC; \\ &(A + B)C = AC + BC. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

Свойства (6.3) справедливы для любых действительных чисел λ_1 и λ_2 и любых матриц A, B и C, для которых определены соответствующие операции.

Пример 3. Найти матрицу $(2A + 3B)C$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя правила умножения матрицы на число и сложения матриц, находим:

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем:

$$(2A + 3B)C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2+20-10 & -4-5-2 & 0+15+4 \\ -9+32-10 & -18-8-2 & 0+24+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -11 & 19 \\ 13 & -28 & 28 \end{bmatrix}.$$

Получена матрица размера (2×3).

Операция замены строк матрицы A ее столбцами, а столбцов строками с теми же номерами называется транспонированием матрицы. Полученная матрица обозначается A^{T} и называется транспонированной по отношению к матрице A.

Легко доказать, что

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A,\;\; (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}},\;\; (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}},\;\; (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

Упражнения

1. (201). Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $C = 2A - 3B$. Для самоконтроля вычислите сумму элементов матрицы C.

2. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Найдите матрицы:

(С51.РП) $C = AB$;

(041.РП) $D = BA$.

3. (СШФ.РП). Дано произведение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Укажите значения x_2, x_3, y_1.

4. (АО1.РП). Дано произведение матриц

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 16 & 24 & 8 \\ 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите элементы матрицы C: c_2^4, c_3^1, c_1^3.

6.2. Определители порядка n

Перестановки. Всякое расположение чисел 1, 2, ..., n в некотором определенном порядке называется перестановкой из n чисел. Перестановку будем обозначать $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Здесь каждое из α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ является одним из чисел 1, 2, ..., n и среди α_k нет одинаковых. Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Выберем в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ два числа α_i, α_j. Если большее из чисел α_i и α_j расположено левее меньшего, то говорят, что числа α_i и α_j образуют инверсию, или беспорядок. Перестановка называется четной, если в ней имеется четное число инверсий, и нечетной, если это число нечетно.

Например, перестановка (4, 3, 1, 5, 2) является четной, так как в ней 6 инверсий: единица образует две инверсии (с четверкой и тройкой), двойка образует три инверсии (с четверкой, тройкой и пятеркой), тройка — одну инверсию (с четверкой), числа 4 и 5 инверсий не образуют. Всего имеем $2 + 3 + 1 = 6$ инверсий. Перестановка (3, 4, 1, 5, 2) нечетна. В ней имеется 5 инверсий (подсчитайте самостоятельно).

Можно доказать, что если в перестановке поменять местами два любых элемента, оставив все остальные на месте, то четность перестановки изменится на противоположную.

Понятие определителя порядка n. Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим произведение n элементов матрицы A, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_n}^{\alpha_n}. \tag{6.4}$$

Обозначим число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ через s, а в перестановке $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — через t. Заметим, что четность числа $s + t$ не зависит от порядка сомножителей в произведении (6.4), так как при перестановке двух сомножителей каждая из перестановок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ перейдет в перестановку противоположной четности.

Два произведения вида (6.4) будем считать совпадающими, если они отличаются лишь порядком сомножителей, и различными, если они отличаются хотя бы одним сомножителем. Ясно, что число различных произведений вида (6.4) равно $n!$, т.е. числу всевозможных перестановок из числа 1, 2, ..., n.

Определителем, или детерминантом, квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$ всех возможных произведений ее элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца, в которой каждое произведение умножается на $(-1)^{s+t}$, где s — число инверсий в перестановке номеров строк, в которые входят сомножители, а t — число инверсий в перестановке номеров столбцов.

Обозначается определитель следующим образом:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_n}^{\alpha_n}.$$

Слагаемые этой суммы называются членами определителя, а числа a_i^j — его элементами.

Замечание. Как видим, определитель — это число. Если говорят о строках или столбцах определителя, то имеют в виду строки или столбцы матрицы, которой соответствует этот определитель.

Определители второго порядка. Из элементов квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$ можно образовать всего два различных произведения: $a_1^1 a_2^2$ и $a_2^1 a_1^2$. Так как перестановка (1, 2) четна, а (2, 1) нечетна, то

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2.$$

Пример 1. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22.$

Определители третьего порядка. Из чисел 1, 2, 3 можно образовать $3! = 6$ различных перестановок, три из них четны, а три — нечетны. Поэтому

$$D=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}=a_1^1a_2^2a_3^3+a_2^1a_3^2a_1^3+a_3^1a_1^2a_2^3-a_3^1a_2^2a_1^3-a_2^1a_1^2a_3^3-a_1^1a_3^2a_2^3,$$

поскольку перестановки (1, 2, 3), (2, 3, 1) и (3, 1, 2) — четны, (3, 2, 1), (2, 1,3) и (1, 3, 2) — нечетны, а перестановка (1, 2, 3) инверсий не имеет.

Сумма D построена по правилу «треугольников»: первое слагаемое есть произведение элементов, расположенных на главной диагонали, второе и третье — произведение элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, четвертое слагаемое является произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, а два последних состоят из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. Три последних слагаемых взяты со знаком «минус».

Пример 2. Вычислить определитель $D=\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$

Решение. $D=13+17+49+91+17-7=180.$

Свойства определителей. Отметим без доказательства свойства определителей. Предлагается самостоятельно проверить их для определителей второго и третьего порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняет своего значения, т.е. $\det A=\det A^{\mathrm{T}}$.

Из этого свойства следует, что любое свойство, доказанное для строк, справедливо и для столбцов (и наоборот).

2. Свойство антисимметрии. При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак.

3. Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

4. Линейное свойство. Если все элементы i-й строки матрицы A представлены в виде $a_j^i=\lambda b_j+\mu c_j$, где $j=1, 2, \ldots, n$; i — фиксировано, то

$$\det A=\lambda\det B+\mu\det C,$$

где матрица B получена из A заменой i-й строки числами b_j, а C — числами c_j.

5. Если матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A умножением всех ее элементов i-й строки на число λ: $\tilde{a}_i^j = \lambda a_i^j$, $j = \overline{1, n}$, i — фиксировано, то $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

Заметим, что $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

6. Определитель матрицы, содержащей две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженной на некоторое число, то получим матрицу с тем же определителем.

8. Если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Понятия алгебраического дополнения и минора. Вычисление определителей произвольного порядка. С ростом порядка матрицы очень быстро возрастает число членов ее определителя. Так, при $n = 4$ это число равно 24, при $n = 5$ — 120, при $n = 6$ — 720 и т.д. По этой причине вычислять определитель порядка выше третьего исходя из определения затруднительно. Используются другие приемы. Одним из них является метод понижения порядка определителя. Дадим определения следующих важных двух понятий.

Дан определитель матрицы порядка n. Определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из данной вычеркиванием ее строки с номером j и столбца с номером i, называется минором $(n-1)$-го порядка и обозначается M_i^j.

Например, для определителя третьего порядка имеем:

$$M_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_2^2 a_3^2 - a_2^3 a_3^2; \quad M_2^3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_3^2 - a_1^2 a_3^1.$$

Алгебраическим дополнением A_i^j элемента a_i^j определителя называется число

$$A_i^j = (-1)^{i+j} M_i^j. \qquad (6.5)$$

Как видим, алгебраическое дополнение может отличаться от минора лишь знаком.

Справедливы следующие теоремы, легко проверяемые для определителей второго и третьего порядков.

Теорема 1. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы:

$$D = a_i^j A_i^j + a_2^j A_2^j + \ldots + a_n^j A_n^j, \tag{6.6}$$

где j — фиксировано.

Теорема 2. Сумма всех произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Используя свойство 7 и формулы (6.5) и (6.6), вычисление определителя порядка n можно свести к вычислению одного определителя порядка $n-1$, для чего в какой-либо строке (или столбце) следует получить $n-1$ нулей, а затем разложить определитель по этой строке или столбцу. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 3. Найти определитель $D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение: $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ (прибавили ко второй строке третью, умноженную на 2, а из первой вычли третью, умноженную на 2). Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$D = 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 0 & -9 & -16 \\ 0 & -27 & -42 \end{vmatrix} = 20(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -16 \\ -27 & -42 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 \cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = -360 \cdot (21 - 24) = 1080.$$

Упражнения

1. Вычислите определители:

(ДД2) $D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; (692) $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

(902) $D_3 = \begin{vmatrix} 13542 & 13642 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

2. Вычислите определители:

(П92) $D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 14 & 10 & 27 \\ 21 & -25 & -18 \end{vmatrix}$; (Д42) $D_2 = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

3. Вычислите определители:

(342) $D_1 = \begin{vmatrix} 2/3 & 3/8 & -3 & 4 \\ 2/3 & 1/8 & -1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 2/3 & 3/8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; (3A2) $D_2 = \begin{vmatrix} 8/3 & 7/5 & 2/5 & 0 \\ -8/3 & 2/5 & 7/5 & 10 \\ 4/3 & 4/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 & 2 \end{vmatrix}$.

6.3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Матрица A^{-1} называется обратной к заданной квадратной матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{6.7}$$

Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель $\det \mathrm{A} \neq 0$.

Из равенства (6.7) и по свойству 9 определителей находим: $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$. Следовательно, $\det \mathrm{A} \neq 0$. Таким образом, только невырожденные матрицы могут иметь обратные.

Теорема. Всякая невырожденная матрица $A = \left[a_i^j\right]$ имеет единственную обратную матрицу $B = \left[b_i^j\right]$, причем

$$b_i^j = \frac{A_j^i}{D}, \tag{6.8}$$

где A_j^i — алгебраическое дополнение элемента a_j^i определителя $D = \det A$.

Матрицу $A^* = \left[A_i^{*j}\right]$, где $A_i^{*j} = A_j^i$, называют присоединенной для матрицы A.

Доказательство единственности матрицы A^{-1} опустим, проверим лишь справедливость формулы (6.8). Через c_p^q обозначим элементы матрицы AB. По определению произведения матриц (см. формулу (6.2)) находим

$$c_p^q = \sum_{i=1}^{n} a_i^q b_p^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^q A_i^p}{D} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} a_i^q A_i^p. \tag{6.9}$$

В формуле (6.9) записана сумма произведений элементов строки с номером q определителя $\det A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов строки с номером p. Если $p \neq q$, то по теореме 2 из подразд. 6.2 эта сумма равна нулю, т.е. $c_p^q = 0$ при $p \neq q$. Если $p = q$, то по формуле (6.6) сумма (6.9) равна определителю $D = \det A$, следовательно, $c_p^p = 1$. Таким образом:

$$c_p^q = \begin{cases} 0, \text{ если } p \neq q, \\ 1, \text{ если } p = q, \end{cases}$$

т.е. матрица $C = AB$ единичная. Поэтому матрица $B = \left[b_i^j \right]$ является обратной к матрице A. Аналогично можно показать, что $BA = E$.

Пример 1. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Находим сначала определитель этой матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Матрица A не вырождена, а потому имеет обратную матрицу. Находим элементы присоединенной матрицы A^*:

$$\begin{aligned} &A_1^1 = 2, \quad &&A_1^2 = -12, \quad &&A_1^3 = 10, \\ &A_2^1 = -2, \quad &&A_2^2 = 17, \quad &&A_2^3 = -14, \\ &A_3^1 = 0, \quad &&A_3^2 = -2, \quad &&A_3^3 = 2. \end{aligned}$$

Используя формулу (6.8), записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & \dfrac{17}{2} & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности вычисления матрицы A^{-1} нужно перемножить матрицы A и A^{-1}. Если в результате получится единичная матрица, то обратная матрица найдена верно.

Пусть матрица A является невырожденной. Найдем матрицы X и Y из следующих уравнений:

$$AX = B; \tag{6.10}$$

$$YA = B. \tag{6.11}$$

Так как матрица A не вырождена, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим слева обе части матричного равенства (6.10) на матрицу A^{-1}. Получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B,$$

$$EX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B.$$

Аналогично из равенства (6.11) находим

$$Y = BA^{-1}.$$

Заметим, что в силу некоммутативности операции умножения матриц решения матричных уравнений (6.10) и (6.11) различны. Если матрица A не вырождена, то каждое из уравнений имеет единственное решение.

П р и м е р 2. Дано матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X.

Решение. Находим

$$\det A = 1 \neq 0.$$

Так как матрица A не вырождена, то $X = A^{-1}B$.

Для отыскания A^{-1} находим элементы присоединенной матрицы:

$$A_1^1 = 3, \quad A_1^2 = -4, \quad A_1^3 = -11,$$

$$A_2^1 = -2, \quad A_2^2 = 3, \quad A_2^3 = 9,$$

$$A_3^1 = 0, \quad A_3^2 = 0, \quad A_3^3 = 1.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Предлагаем самостоятельно убедиться в правильности решения, найдя произведение матриц A и X. В результате должна получиться матрица B.

Упражнения

1. Докажите, что матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ имеет обратную A^{-1} и найдите ее.

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, причем $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$. Докажите, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

3. Решите матричные уравнения $AX_1 = B$ и $X_2A = B$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $X_1 = \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; $X_2 = \begin{bmatrix} -22 & 13 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} X = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $X\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -40 & 27 & 8 \end{bmatrix}$.

6.4. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Матрицу $\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)^{\mathrm{T}}$ размера $n \times 1$ либо матрицу $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ размера $1 \times n$, где $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа, назовем n-мерным вектором.

Обозначают векторы следующим образом: $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ или $\mathbf{b}=\left(\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^n\right)^{\mathrm{T}}$.

Мы ввели векторы двух типов. Они отличаются тем, что преобразуются по разным законам при переходе от одной системы координат к другой. В вопросах, не связанных с преобразованием систем координат, мы их различать не будем и для краткости и те и другие будем записывать в виде строки, опуская знак транспонирования.

Над векторами введем операции сложения и умножения на число таким же способом, как и над матрицами, т.е. если $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$, то

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\left(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n\right), \tag{6.12}$$

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n). \tag{6.13}$$

Множество всех векторов $\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\right)$, для которых введены операции сложения и умножения на число по формулам (6.12) и (6.13), называется n-мерным линейным пространством и обозначается R_n.

Вектор $(0,0,\dots,0)$ обозначают $\mathbf{0}$ и называют нулевым.

Пример. Допустим, что в R_3 даны три вектора:

$$\mathbf{a}=(1;2;-2),\quad \mathbf{b}=(0;-1;3),\quad \mathbf{c}=(-2;3;-4).$$

Найти вектор $\mathbf{d}=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-3\mathbf{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем:

$$2\mathbf{a}=(2;4;-4);\quad 4\mathbf{b}=(0;-4;12);$$

$$-3\mathbf{c}=(6;-9;12);\quad \mathbf{d}=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-3\mathbf{c}=(8;-9;20).$$

Важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Вектор $\mathbf{b}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\dots+\lambda_n\mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

Вектор $\mathbf{d}$ в примере является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ с коэффициентами 2; 4; –3.

Система векторов $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\dots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}. \tag{6.14}$$

Если же соотношение (6.14) выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, то система векторов $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них был линейной комбинацией других.

Докажем эту теорему. Пусть система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима. Тогда имеет место соотношение (6.14), причем среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть не нули. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Из (6.14) находим

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_3 + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_n,$$

т.е. вектор $\mathbf{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ — линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$, т.е. $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ или $(-1)\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$.

Так как среди чисел $-1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть ненулевые, то система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независима.

По доказанной теореме векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ в приведенном выше примере линейно зависимы, так как вектор $\mathbf{d}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Теорема 2. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Теорема 3. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Теоремы 2 и 3 предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Для того чтобы определить линейно зависима данная система векторов или нет, применяется понятие ранга матрицы, к изучению которого мы и переходим.

6.5. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Пусть дана ненулевая матрица A размера $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Ее строки являются векторами из R_n, а столбцы — из R_m.

Выделим в этой матрице какие-либо k строк и k столбцов. Определитель матрицы, составленной из элементов, находящихся на их пересечении, называется минором k-го порядка данной матрицы.

Число r называется рангом матрицы A при выполнении следующих условий:

1) в матрице A имеется минор порядка r, отличный от нуля;

2) все миноры порядка $r+1$ и выше, если они существуют, равны нулю.

Пишут $\operatorname{rang} A = r$ или $r_A = r$.

Другими словами, ранг матрицы — это наивысший порядок миноров матрицы, отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению полагается равным нулю.

Любой минор порядка r, отличный от нуля, матрицы ранга r называется базисным, составляющие его столбцы и строки также называются базисными. Матрица может иметь несколько базисных миноров. Заметим, что говорить о базисных строках и столбцах можно лишь после выбора базисного минора.

Теорема (о базисном миноре). Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

Теорему примем без доказательства.

Следствиями теоремы о базисном миноре являются следующие утверждения.

1. Если ранг r матрицы меньше числа ее строк (столбцов), то ее строки (столбцы) линейно зависимы. Если же число r равно числу строк, то строки линейно независимы.

2. Определитель $\det A$ равен нулю тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно зависимы или, что то же самое, одна из ее строк (столбцов) является линейной комбинацией других.

Рассмотрим пример отыскания ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Решение. Получим в первом столбце матрицы A нули, вычитая первую ее строку, умноженную на соответствующие числа, из всех остальных:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В матрице A_2 вторая и четвертая строки пропорциональны, поэтому вычеркивание одной из них не изменит ранг матрицы. Вычеркнем четвертую строку. Пятая строка лишь знаком отличается от суммы второй и третьей, а потому ее также можно вычеркнуть, не изменив ранг матрицы. Приходим к матрице вида

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Так как минор третьего порядка отличен от нуля, то $\operatorname{rang} A_3 = \operatorname{rang} A = 3$.

Пример 2. Доказать, что третья строка матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух строк. Найти коэффициенты этой комбинации.

Решение. Ранг матрицы A не меньше двух, так как ее минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$. Вычислим детерминант:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -12 & -39 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -4 & -13 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы A равен двум и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ — ее базисный минор. Третья строка является линейной комбинацией первых двух строк. Обозначим коэффициенты этой комбинации через λ_1 и λ_2. Тогда $(17; 22; 29) = \lambda_1(1; 2; 4) + \lambda_2(5; 6; 7)$, следовательно:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 17, \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 22, \\ 4\lambda_1 + 7\lambda_2 = 29. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Упражнения

1. Докажите, что ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ при любых значениях a, b, c, d не меньше двух.

2. Докажите, что столбцы матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

3. Докажите, что третья строка матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 13 & 17 & -9 \end{bmatrix}$ является комбинацией первых двух, и (П04.РП) найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

4. (С54). Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.6. Системы линейных уравнений

Формы записи систем линейных уравнений. Классификация систем. Система линейных уравнений с n неизвестными может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n = b^m, \end{cases} \tag{6.15}$$

где a_i^j — коэффициенты, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; x^i — неизвестные; b^j — свободные члены.

Коэффициенты системы a_i^j записаны с двумя индексами. Верхний индекс (j) означает номер уравнения, в котором находится коэффициент, а нижний индекс (i) означает номер неизвестного, при котором находится коэффициент.

Если использовать знак суммирования, то систему (6.15) можно записать короче:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j,\ j = \overline{1, m}. \tag{6.16}$$

Альберт Эйнштейн предложил в выражениях, подобных (6.16), когда имеется индекс сверху и снизу, по которому производится суммирование, знак суммы опускать и писать

$$a_i^j x^i = b^j,\ \ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

имея в виду, что по i производится суммирование от 1 до n.

Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (6.15) можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \tag{6.17}$$

Если обозначить $\mathbf{a}_j = \left(a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^m\right)^{\mathrm{T}},\ j = \overline{1, n},$ — векторы, являющиеся столбцами матрицы A, то систему (6.15) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{a}_1 x^1 + \mathbf{a}_2 x^2 + \ldots + \mathbf{a}_n x^n = \mathbf{b} \ \text{ или } \ \mathbf{a}_j x^j = \mathbf{b},\ j = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{b}$ — вектор, соответствующий столбцу свободных членов.

Матрица A называется основной матрицей системы, а матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{array}\right]$$

называется расширенной. Совокупность чисел $\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)$ называется решением системы, если она обращает все уравнения системы в тождества:

$$a_i^j \alpha^i = b^j,\ \ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Система называется совместной или непротиворечивой, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если решений более одного.

Основные задачи теории систем линейных уравнений:

1) установить, совместна система или нет;

2) если система совместна, то выяснить, определенная она или нет;

3) если система определенная, то найти ее единственное решение, а если неопределенная, то описать совокупность всех решений.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если любое решение первой из них является решением второй, и наоборот. В ходе решения систему приходится преобразовывать каким-либо способом. При этом нужно следить за тем, чтобы в ходе преобразования получались системы, эквивалентные данной.

Теорема Кронекера — Капелли (о совместности системы линейных уравнений). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Если $r_A = r_C$, то существует базисный минор, общий для матриц A и C, в который не входит столбец свободных членов. По теореме о базисном миноре этот столбец является линейной комбинацией остальных столбцов, т.е. существуют числа $\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)$ такие, что $a_i^j \alpha^i = b^j$, следовательно, система совместна и $\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)$ — ее решение.

Обратно, если система совместна и $\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)$ — ее решение, то столбец из свободных членов системы является линейной комбинацией остальных столбцов $\left(b^j = a_i^j \alpha^i\right)$, а потому его вычеркивание из расширенной матрицы не изменит ранг. Так как после такого вычеркивания получим основную матрицу A, то $\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} A$.

Решение системы в случае $m = n$, $D = \det A \neq 0$. Рассмотрим три способа решения системы.

Способ 1. Матричный метод. Систему запишем в форме (6.17): $AX = B$.

По условию задачи матрица A не вырождена, а поэтому существует единственная обратная матрица A^{-1}. Матричное уравнение вида (6.17) мы уже решили (см. подразд. 6.3) и получили

$$X = A^{-1}B. \tag{6.18}$$

Пример 1. Систему $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ решить матричным способом.

Решение. Записываем матрицу A системы и находим ее определитель:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то применима формула (6.18). Находим обратную матрицу A^{-1} способом, указанным в подразд. 6.3.

$$A_1^1 = 3, \quad A_1^2 = -2, \quad A_1^3 = 2,$$
$$A_2^1 = -4, \quad A_2^2 = 3, \quad A_2^3 = -3,$$
$$A_3^1 = -11, \quad A_3^2 = 9, \quad A_3^3 = -8.$$

Получаем:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

По формуле (6.18) находим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -4+3 \\ -11+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Мы нашли решение системы:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -2.$$

Поскольку матрица A^{-1} единственна, то данная система имеет единственное решение, т.е. является определенной.

Способ 2. Применение формул Крамера. Матричное равенство (6.17) запишем в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & \cdots & A_1^n \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & \cdots & A_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_i^1 & A_i^2 & \cdots & \cdots & A_i^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \cdots & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^i \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix},$$

где A_i^k есть алгебраическое дополнение элемента a_i^k определителя $\det A = D$. По правилу умножения матриц (см. подразд. 6.1), записывая покоординатно, находим

$$x^i = \frac{A_i^1 b^1 + A_i^2 b^2 + \ldots + A_i^n b^n}{D}.$$

В числителе стоит разложение определителя D_i по столбцу с номером i; определитель D_i получен из D заменой его i-го столбца столбцом свободных членов. Следовательно,

$$x^i = \frac{D_i}{D}.$$

Полагая $i = 1, 2, \ldots, n$, находим решение системы в виде

$$x^1 = \frac{D_1}{D},\ \ x^2 = \frac{D_2}{D},\ \ \ldots,\ \ x^n = \frac{D_n}{D}. \qquad (6.19)$$

Формулы (6.19) называют формулами Крамера. Проиллюстрируем их применение, воспользовавшись системой из предыдущего примера.

Находим:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $D = 1$, то

$$x^1 = \frac{1}{1} = 1, \quad x^2 = \frac{-1}{1} = -1, \quad x^3 = \frac{-2}{1} = -2.$$

Способ 3. Метод Гаусса (метод исключения). Проиллюстрируем этот метод на том же примере.

Записываем расширенную матрицу системы:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Действуя только со строками, приводим ее к виду, чтобы ниже (или выше) главной диагонали стояли нули. Находим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 1, \\ \qquad - 8x_2 + 3x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\quad - x_3 = 2, \end{cases}$$

эквивалентная данной. Так как $x_3 = -2,$ то из второго уравнения находим $-8x_2 = 8, \quad x_2 = -1.$

Из первого уравнения теперь получаем $3x_1 = 3, \quad x_1 = 1.$

Мы нашли решение: $(1, -1, -2).$

Исследование и решение системы в общем случае. Процесс исследования системы и ее решения разобьем на этапы.

Этап 1. Находим ранги основной и расширенной матриц системы. Если они не равны, то система несовместна и на этом исследование заканчивается.

Этап 2. $r_A = r_C = r.$ Система оказалась совместной. В матрице A выделяем базисный минор. Те уравнения, коэффициенты которых не попали в состав базисного минора, вычеркиваем из системы, так как они по теореме о базисном миноре являются линейными комбинациями уравнений, попавших в состав базисного минора.

Этап 3. Все неизвестные системы делим на два класса: те неизвестные, коэффициенты при которых попали в состав базисного минора, назовем зависимыми, а остальные — свободными. Перепишем систему, оставив слева члены, содержащие зависимые переменные, а направо перенесем члены, содержащие свободные неизвестные. Объявляем правые части новыми свободными членами. В результате получаем систему, эквивалентную данной, состоящую из r уравнений с r неизвестными, определитель которой отличен от нуля.

Этап 4. Решаем полученную систему одним из способов, рассмотренных в подразд. 6.3. В итоге мы найдем соотношения, выражающие зависимые переменные через свободные. Такие соотношения называются общим решением системы. Всякое решение, которое получается из общего при фиксированных значениях свободных неизвестных, называется частным.

Заметим, что если $r_A = r_C = r < n$ (n — число неизвестных), то система неопределенна, если же $r_A = r_C = n,$ то система определенна.

Обычно в случае $m \neq n$ применяют метод Гаусса, позволяющий провести исследование системы и найти ее общее решение. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Найти общее и какое-нибудь частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = -5, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 3x_1 - 20x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу системы и, действуя только со строками, приводим ее к удобному для исследования виду:

$$C = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & -4 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -20 & -7 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right], \quad \tilde{C} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Первую строку, умноженную на два, вычли из второй, из третьей строки вычли первую, а из четвертой вычли первую, умноженную на 3. Мы получили матрицу с тремя одинаковыми строками. В состав базисного минора может войти только одна из них, например вторая. Третью и четвертую строки можно вычеркнуть из матрицы, не меняя ее ранг. Видим, что ранг основной и расширенной матриц равен двум. Система совместна.

В качестве базисного минора матрицы $\tilde{C}$ можно взять обведенный минор. Соответствующий минор исходной матрицы расположен в левом верхнем углу. Третье и четвертое уравнения, коэффициенты которых не попали в состав выбранного базисного минора, можно вычеркнуть из системы. Так как мы работали только со строками, то исходная система эквивалентна системе, расширенной матрицей которой служит матрица $\tilde{C}$. Согласно выбору базисного минора неизвестные x_1 и x_2 приняты в качестве зависимых, а x_3, x_4, x_5 оставлены свободными.

Матрице $\tilde{C}$ после вычеркивания из нее двух последних строк, соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Перенесем члены, содержащие свободные неизвестные, вправо:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 = -3 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases}$$

Выражаем зависимые переменные через свободные. Получаем

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 11x_3 + 17x_4 - 9x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases}$$

Последнее соотношение является общим решением системы. Из него можно получить любое число частных решений, придав свободным неизвестным какие-либо значения. Например, положив $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = -1$, получим решение (2, 0, 1, 0, –1).

Упражнения

1. Дана система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$

Докажите, что она имеет единственное решение. Неизвестное найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

Ответ: (0; –3; 3; 1).

2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна, найдите ее общее решение.

6.7. Алгебра геометрических векторов

Пусть дано трехмерное точечное пространство с введенным в нем расстоянием между точками. Взяв за исходное понятие точки, мы построим еще один пример линейного пространства, элементами которого являются упорядоченные пары точек или направленные отрезки.

Линейные операции над векторами. Вектором (геометрическим вектором) в данном точечном пространстве называется упорядоченная пара точек (A,B). Обозначают такой вектор **AB**.

Точка A называется началом вектора, а B — его концом. Вектор, начало которого совпадает с концом, называется нулевым и обозначается **0**.

Упорядоченную пару точек (A,B) можно трактовать как направленный отрезок AB, за начало которого принята точка A.

Ненулевой вектор $\mathbf{AB}$ изображают в виде направленного отрезка, указывая направление от начала к концу стрелкой (рис. 6.1).

Расстояние между точками A и B называется модулем вектора $\mathbf{AB}$ и обозначается $|\mathbf{AB}|$.

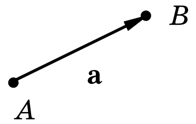


Рис. 6.1

Как видим, чтобы задать вектор, нужно задать его направление и модуль.

Величины, которые характеризуются числом и направлением, называются векторными. В физике — это сила, скорость, ускорение, различного рода моменты сил и т.д. Величины, характеризующиеся только числом, называют скалярными, например температура, масса, площадь и т.д.

Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называют коллинеарными (пишут $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{MN}$).

Два коллинеарных вектора $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ могут быть одинаково ориентированными (записывают $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$) или противоположно ориентированными (пишут $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{MN}$).

Строгое определение этих понятий мы опускаем.

Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ называются равными, если одновременно выполняются два условия:

1) $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$;

2) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{MN}|$.

Как видим, векторы могут быть равными независимо от положения их начала. Такие векторы называются свободными.

В дальнейшем будем обозначать векторы малыми буквами: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т.д.

Отложить вектор $\mathbf{a}$ от точки A означает построить вектор $\mathbf{AB}$, равный $\mathbf{a}$. На множестве всех векторов определим две операции:

1) внутреннюю — сложение векторов;

2) внешнюю — умножение вектора на число.

Пусть даны векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$. От произвольной точки O отложим вектор $\mathbf{OA}_1$, равный $\mathbf{a}_1$, от точки A_1 отложим вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, равный $\mathbf{a}_2$, и т.д. (рис. 6.2).

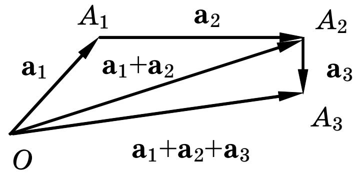


Рис. 6.2

От точки A_{n-1} отложим вектор $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_n$, равный $\mathbf{a}_n$. Вектор $\mathbf{OA}_n$ называется суммой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число α называется вектор $\mathbf{b}$, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ и определяемый условиями:

а) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$; в) $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$;

б) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$; г) $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Верно и обратное утверждение, т.е. если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то существует число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Действительно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ оба нулевые, то $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ при любом значении λ. Если же $\mathbf{b} \neq 0$, то условие $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ выполняется при $\lambda = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$ и $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, если же $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, то при $\lambda = -\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Легко показать, что для любых векторов и любых чисел справедливы утверждения:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4) для всякого вектора $\mathbf{x}$ найдется вектор $\mathbf{y}$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (действительно, если $\mathbf{x} = \mathbf{AB}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{BA}$);
5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{x}$;
7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

В общем случае произвольное множество, на котором определены операции сложения элементов и умножения элемента на число, если эти операции удовлетворяют соотношениям пп. 1—8, называется линейным пространством.

Через V_3 обозначим множество всех геометрических векторов пространства, через V_2 — множество геометрических векторов, параллельных одной плоскости, через V_1 — множество векторов, параллельных некоторой прямой. Множества V_3, V_2 и V_1 образуют линейные пространства, так как на них определены операции сложения векторов и умножения на число, удовлетворяющие соотношениям пп. 1—8.

Систему трех и более векторов называют компланарной, если все они параллельны одной плоскости. Если же такой плоскости не существует, то система называется некомпланарной.

Базис и координаты. Понятия линейной комбинации векторов в V_3, V_2 и V_1, линейной зависимости и линейной независимости вводят так же, как и в линейном пространстве R_n.

Понятию линейной зависимости вектора в V_3 можно дать следующую геометрическую характеристику: система из двух векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависима тогда и только тогда, когда они коллинеарны; система из трех векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда они компланарны.

Любая некомпланарная тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ из V_3 называется базисом линейного пространства V_3. Легко доказать, что любой вектор $\mathbf{a}$ из V_3 может быть представлен, и при том единственным образом, в виде линейной комбинации $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$.

Коэффициенты линейной комбинации $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$, с помощью которой вектор $\mathbf{a}$ выражается через базисные, называются координатами вектора $\mathbf{a}$ относительно этого базиса. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — это координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пишут $\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, или $\mathbf{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, или $\mathbf{a}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении вектора на число — умножаются на это число.

Конструкция, состоящая из точки O и приложенного к ней векторного базиса, называется аффинной системой координат (рис. 6.3).

Вектор $\mathbf{OM}$ называется радиусом-вектором точки M. Координатами точки M называют координаты ее радиуса-вектора.

Даны координаты точек $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$.

Найдем координаты вектора $\mathbf{AB}$. Видим, что $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$, т.е.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

Чтобы найти координаты вектора $\mathbf{AB}$, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Векторный базис называют декартовым, если его векторы попарно ортогональны и единичны. Векторы декартового базиса обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (рис. 6.4).

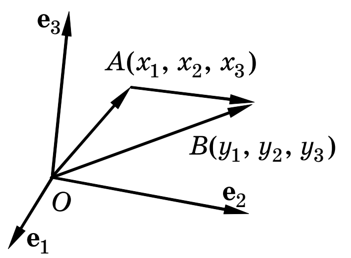


Рис. 6.3

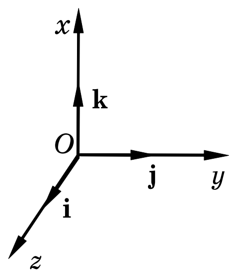


Рис. 6.4

Конструкция, состоящая из произвольной точки O и приложенного к ней декартова базиса, называется декартовой системой координат. Ее оси получили специальные названия: ось Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

Пример 1. Дан вектор $\mathbf{AB} = (2, -5, 4)$.

Известны координаты точки $B(-4, 4, 3)$. Найти координаты точки $A(x, y, z)$.

Решение. Имеем

$$\mathbf{AB} = (-4 - x,\quad 4 - y,\quad 3 - z) = (2, -5, 4).$$

Следовательно:

$$-4 - x = 2,\ \ x = -6;\ \ 4 - y = -5,\ \ y = 9;\ \ 3 - z = 4,\ \ z = -1.$$

Таким образом, искомые координаты $(-6, 9, -1)$.

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A(4, 3, 5)$, $B(2, 7, 9)$, $C(6, 1, 1)$.

Найти координаты вектора **CM**, направленного по медиане треугольника.

Решение. Находим координаты точки M, равные полусуммам координат точек A и B: $M\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{3+7}{2},\ \dfrac{5+9}{2}\right)$, т.е. $M(3, 5, 7)$. Координаты вектора **CM** находим, вычитая из координат точки M соответствующие координаты точки C:

$$\mathbf{CM} = (3 - 6, 5 - 1, 7 - 1),\quad \mathbf{CM} = (-3, 4, 6).$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть дан отрезок AB и точка M, лежащая на прямой AB. Говорят, что точка M делит отрезок AB в отношении λ $(\lambda \neq -1)$, если $\mathbf{AM} = \lambda\mathbf{MB}$. При $\lambda > 0$ точка M лежит внутри отрезка AB, если же $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB.

Выберем некоторую систему координат, и пусть относительно этой системы даны координаты точек A и B:

$$A(x_1, y_1, z_1),\ \ B(x_2, y_2, z_2).$$

Найдем координаты (x_0, y_0, z_0) точки M, которая делит отрезок AB в отношении λ $(\lambda \neq -1)$. Так как

$$\mathbf{AM} = \lambda\mathbf{MB},\ \ \mathbf{AM} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\},$$

$$\mathbf{MB} = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\},$$

то

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0),\ \ y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0),\ \ z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0).$$

Следовательно:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\qquad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\qquad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{6.20}$$

Отсюда, в частности, следует известное из средней школы положение, уже использованное нами: координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов (в этом случае $\lambda = 1$).

Пример 3. Пусть задан треугольник ABC координатами своих вершин: $A(1, -3, -2)$, $B(3, 5, 7)$, $C(-1, 5, -3)$.

Найти координаты (x_0, y_0, z_0) точки D пересечения его медиан.

Решение. Как известно, точка D делит медиану AM в отношении $\lambda = 2$. Так как точка M имеет координаты (1, 5, 2), то по формулам (6.20) находим:

$$x_0 = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1, \quad y_0 = \frac{-3 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{7}{3}, \quad z_0 = \frac{-2 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}.$$

Проекция вектора на ось. Прямая с заданными на ней точкой и единичным базисным вектором $\mathbf{e}$ называется осью.

Ортогональной проекцией точки A на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A.

Проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось называется координата вектора $\mathbf{A'B'}$ относительно единичного вектора $\mathbf{e}$ оси, где A' и B' — проекции точек A и B на ось l, т.е. если $\mathbf{A'B'} = \alpha\mathbf{e}$, то число α называется проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось l. Обозначают $\alpha = \text{Пр}_\mathbf{e}\mathbf{AB}$.

Из правил сложения и умножения на число векторов, заданных своими координатами, следует, что $\text{Пр}_\mathbf{e}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\,\text{Пр}_\mathbf{e}\mathbf{a} + \beta\,\text{Пр}_\mathbf{e}\mathbf{b}$, где α и β — любые числа.

Легко показать, что $\text{Пр}_\mathbf{e}\alpha = |\alpha|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{a}$, отсчитанный по правилам тригонометрии: от вектора $\mathbf{e}$ против часовой стрелки до вектора $\mathbf{a}$.

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, обозначаемое $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение равно нулю.

Из определения скалярного произведения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны.

Легко доказать следующие свойства скалярного произведения:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;
2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$;
3) $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Скалярное произведение двух векторов, заданных декартовыми координатами, равно сумме произведений одноименных декартовых координат. Действительно,

$$(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},\ x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

так как $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = (\mathbf{j}, \mathbf{j}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1$.

С помощью скалярного произведения можно находить:

1) длину вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по формуле

$$\sqrt{(\mathbf{a},\ \mathbf{a})} = |\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

2) расстояние d между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ по формуле

$$d = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

3) проекцию одного вектора на направление другого по формуле

$$\text{Пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|};$$

4) косинус угла между векторами по формуле $\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$;

5) косинусы углов α, β, γ между векторами и осями координат, называемые направляющими косинусами, по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

6) координаты орта вектора $\mathbf{a}$, т.е. координаты вектора $\mathbf{a}_0$, направленного так же, как и вектор $\mathbf{a}$, но по длине равного единице. Координаты орта вектора совпадают с его направляющими косинусами.

Пример 4. Найти $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45°$.

Решение. $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (4\mathbf{p} + \mathbf{r}) = 16(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 8(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 16 \cdot 1 +$

$$+8 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 16 + 8 + 2 = 26;\quad |\mathbf{a}| = \sqrt{26}.$$

Пример 5. Даны три вектора:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k},\quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k},\quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Найти $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Решение. Находим $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dfrac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{4, -2, -6\}$,

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 12 + 8 - 72 = -52$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$;

$$\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\frac{52}{13} = -4.$$

Векторное и смешанное произведения векторов. Векторным произведением двух непараллельных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, при этом:

1) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ отложены от одной точки O, то с конца вектора $\mathbf{c}$ поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ на меньший угол виден совершающимся против часовой стрелки. В этом случае тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называется правой;

3) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, то полагается $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Отметим свойства векторного произведения:

1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$;

2) $[\lambda\, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;

3) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$;

4) величина $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

5) если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы в правой декартовой системе координат (поворот от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ с конца вектора $\mathbf{k}$ виден совершающимся против часовой стрелки), то

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Смешанным произведением трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий. Обозначается смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. По определению $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})$.

Отметим свойства смешанного произведения:

1) модуль смешанного произведения $|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|$ трех некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. При этом $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$, если тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ правая, и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$, если эта тройка левая;

2) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$;

3) если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ заданы декартовыми координатами $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

4) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Пример 6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$ и $\varphi = (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45°$.

Решение

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[2\mathbf{p} + \mathbf{r},\ \mathbf{p} + 3\mathbf{r}]| = |2[\mathbf{p}, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 3[\mathbf{r}, \mathbf{r}]| =$$
$$= 5|[\mathbf{p}, \mathbf{r}]| = 5|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\sin\varphi,$$

так как $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = -[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$.

Таким образом, $S = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10$.

Пример 7. Дано: $A(0, -3, -2)$; $B(0, -2, -3)$, $C(-2, -5, -1)$; $D(-2, 1, 2)$. Найти:

а) площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\dfrac{1}{3}\mathbf{DA}$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{DC}$;

б) объем V пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{AB} + \mathbf{DB}$, $\mathbf{DA}$ и $\mathbf{DC}$.

Решение:

а) $S = \left|\dfrac{1}{6}[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}]\right|$, $\mathbf{DA} = (2, -4, -4)$, $\mathbf{DC} = (0, -6, -3)$,

$$[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}),$$

$$S = \frac{1}{6}|6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = |6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3;$$

б) $V = \dfrac{1}{6}|(\mathbf{AB} + \mathbf{DB}, \mathbf{DA}, \mathbf{DC})|$, $\mathbf{AB} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{DB} = (2, -3, -5)$,

$$\mathbf{AB} + \mathbf{DB} = (2, -2, -6),\quad V = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 2\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Упражнения

1. В треугольнике ABC дано: $\mathbf{AB} = 2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, $\mathbf{AC} = 8\mathbf{p} - 7\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — произвольные неколлинеарные векторы. Выразите через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ вектор $\mathbf{BC}$.

Ответ: $6\mathbf{p} - 12\mathbf{q}$.

2. В треугольнике ABC сторона BC точками M_1, M_2, M_3 разделена на четыре равные части так, что $\mathbf{BM_1} = \mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_2M_3} = \mathbf{M_3C}$, при этом $\mathbf{AM_1} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AM_2} = \mathbf{b}$. Выразите через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AC}$.

Ответ: $\mathbf{AB} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{BC} = 4(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\mathbf{AC} = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.

3. Найдите числа α и β, если известно: $\mathbf{AB} = \alpha\mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{BC} = 2\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}$, $\mathbf{AC} = \beta\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — неколлинеарные векторы.

Ответ: 1; 3.

4. Вектор $\mathbf{a} = (2, -4, 3)$ отложен от точки $A(3, -5, -2)$. Найдите координаты точки B — его конца.

Ответ: $B(5, -9, 5)$.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: 33.

6. Найдите квадрат длины вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ — единичные векторы, составляющие между собой углы, равные $\dfrac{2}{3}\pi$.

Ответ: 37.

7. Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{a} = (3, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 1, -3)$.

Ответ: 9/19.

8. Найдите координаты орта вектора $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Ответ: $(6/7, -3/7, -2/7)$.

9. Найдите проекцию вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Ответ: 2.

10. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: 92.

7. Приложение линейной алгебры к задачам аналитической геометрии

7.1. Уравнение линии на поверхности

Возможность характеризовать положение точки на плоскости и в пространстве с помощью пары или тройки чисел позволяет применять для изучения кривых и поверхностей аппарат линейной алгебры и математического анализа.

Пусть на плоскости задана некоторая кривая L, выбрана декартова система координат $(0,x,y)$.

Уравнение $F(x,y)=0$ называется уравнением кривой L в выбранной системе координат, если координаты (x,y) любой точки кривой L удовлетворяют этому уравнению и любое решение (x,y) уравнения $F(x,y)=0$ определяет точку $M(x,y)$, принадлежащую L.

Совершенно аналогично можно определить уравнение поверхности S относительно декартовой системы координат: уравнением поверхности S относительно данной декартовой системы координат называется уравнение $F(x,y,z)=0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащие на этой поверхности, но не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

Кривую L в пространстве можно задать как линию пересечения двух поверхностей, т.е. в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

где уравнения $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$ определяют некоторые поверхности, проходящие через кривую L.

Задание кривой в виде системы двух уравнений не всегда удобно ввиду неоднозначности этой системы. Часто более удобным оказывается параметрическое задание кривой:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \\ z=\eta(t), \end{cases}$$

при котором положение точки на кривой характеризуется значением некоторого параметра t (в физике в качестве парааметра t, как правило, принимается время).

Параметрические уравнения кривой можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\varphi(t)\mathbf{i}+\psi(t)\mathbf{j}+\eta(t)\mathbf{k},$$

или в матричной:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

Параметрически можно также задать и поверхность:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \eta(u, v), \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \eta(u, v)\mathbf{k},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ \eta(u, v) \end{bmatrix}.$$

При этом положение точки на поверхности определяется значением двух параметров: u и v.

Задачи аналитической геометрии:

1) по известным геометрическим свойствам кривой L или поверхности S записать их уравнения;

2) исходя из известных уравнений кривых или поверхностей, изучить геометрические свойства кривых или поверхностей.

Рассмотрим примеры задания некоторых кривых и поверхностей уравнениями.

Окружность. Запишем уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ радиуса R.

Как известно, окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки этой плоскости.

Точка $M(x,y)$ лежит на данной окружности тогда и только тогда, когда $|\mathbf{CM}| = R$, т.е.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \tag{7.1}$$

есть уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ радиуса R. Уравнение (7.1) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{7.2}$$

Параметрически окружность (7.1) можно задать в виде системы

$$\begin{cases} x = a + R\cos t, \\ y = b + R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Мы решили первую задачу аналитической геометри: по известным свойствам кривой получили ее уравнение.

Выясним, в каких случаях произвольное уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0, \qquad (7.3)$$

где $a_{ik} = \text{const}$, относительно декартовых координат точки определяет окружность, найдем ее центр и радиус.

Сравнивая (7.2) и (7.3), видим, что уравнение (7.3) может определять окружность, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$. В этом случае уравнение (7.3) можно записать в виде

$$x^2 + y^2 + \frac{2a_{01}}{a_{11}}x + \frac{2a_{02}}{a_{11}}y + \frac{a_{00}}{a_{11}} = 0,$$

или после выделения полных квадратов

$$\left(x + \frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{02}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}{a_{11}^2}. \qquad (7.4)$$

Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$, то уравнение (7.4) определяет окружность, радиус которой равен $\dfrac{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}$, а центр ее имеет координаты $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, то уравнению (7.4) удовлетворяют координаты единственной точки $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если же $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} < 0$, то уравнению (7.4) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. Говорят, что в этом случае уравнение (7.4) определяет мнимую окружность. Таким образом, уравнение (7.3) является уравнением окружности и только в том случае, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$.

Частично мы решили и вторую задачу аналитической геометрии: зная уравнение (7.3), выяснили, при каких условиях оно определяет окружность. Полное решение этой задачи, т.е. исследование случаев, когда $a_{12} \neq 0$, $a_{11} \neq a_{22}$, будет произведено позднее, после изучения эллипса, гиперболы и параболы.

Пример 1. Найти центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0. \qquad \text{(а)}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, уравнение (а) можно записать в виде

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9. \qquad \text{(б)}$$

Сравнивая (7.1) и (б), видим, что центр имеет координаты (–1,2), а радиус $R = 3$.

Парабола. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F и данной прямой этой же плоскости.

Данная точка F называется фокусом параболы, а данная прямая — директрисой параболы. Выберем декартову систему координат следующим образом: ось Ox проведем через фокус F перпендикулярно директрисе (рис. 7.1). Начало координат поместим в точку, равноудаленную от фокуса и директрисы. Обозначим расстояние между фокусом и директрисой через p. Величину p называют параметром параболы.

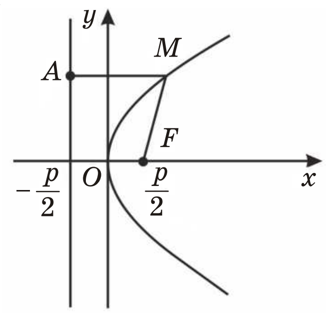


Рис. 7.1

При таком выборе системы координат для всех точек директрисы $x = -\frac{p}{2}$, а фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Тогда по определению параболы имеет место равенство **AM** = **FM**, где $A\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ — точка директрисы.

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}.$$

Из равенства корней следует равенство подкоренных выражений, т.е. $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$, или $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2$, или $y^2 = 2px$. Это соотношение равносильно условию **AM** = **FM**, так как мы не совершали операций, которые могли бы привести к потере решений и к появлению других решений. Таким образом, мы получили искомое уравнение параболы $y^2 = 2px$, называемое каноническим.

Легко доказать, что уравнение (7.3) может определять параболу, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. При выполнении условия $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ кривая, задаваемая уравнением (7.3), может распасться на пару параллельных или совпавших прямых.

П р и м е р 2. Доказать, что уравнение $y^2-6y+6+x=0$ определяет параболу. Найти значение ее параметра p и координаты вершины.

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем $(y-3)^2+x-3=0$. Если положить $y_1=y-3$, $x_1=-x+3$, то уравнение приводится к виду $y_1^2=x_1$. Сравнивая последнее уравнение с каноническим уравнением параболы, находим, что $2p=1$ и $p=\dfrac{1}{2}$. Вершина параболы находится в точке (3,3).

Сфера. Запишем уравнение сферы с центром в точке $C(a,b,c)$ радиуса R.

Как известно, сферой называется множество всех точек пространства, равноудаленных от данной фиксированной точки.

Если $M(x,y,z)$ — произвольная точка сферы, то $|\mathbf{MC}|=R$, следовательно,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{7.5}$$

есть уравнение сферы.

Аналогично тому как это сделано для окружности, можно доказать, что произвольное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+ \\ +2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

определяет сферу, если $a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, $a_{01}^2+a_{02}^2+$ $+a_{03}^2-a_{00}a_{11}>0$, с центром в точке $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}},-\dfrac{a_{02}}{a_{11}},-\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$ радиуса

$$R=\frac{\sqrt{a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2-a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}.$$

Если $a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2-a_{00}a_{11}=0$, то уравнению (7.6) удовлетворяют только координаты точки C. При $a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2-a_{00}a_{11}<0$ уравнению (7.6) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства — имеем так называемую мнимую сферу.

Цилиндрическая поверхность. Пусть дана некоторая кривая L и ненулевой вектор $\mathbf{l}$. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, паралельными вектору $\mathbf{l}$ и пересекающими кривую L. При этом кривую L называют направляющей, а соответствующие прямые — образующими цилиндрической поверхности. Покажем, что уравнение $F(x,y)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является кривая в координатной плоскости Oxy, определяемая уравнеием $F(x,y)=0$. Действительно, если координаты точки $M_0(x_0,y_0)$ удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, то этому уравнению удовлетворяют координаты точки $M(x_0,y_0,z)$ при любом z, т.е. все точки прямой, проходящей через точку $M(x_0,y_0,0)$ параллельно оси Oz. Например, уравнение $x^2+y^2=1$ в пространстве определяет круговой цилиндр, а уравнение $y^2=2px$ — параболический цилиндр.

Аналогично уравнение $F(y,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с направляющей $\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ и образующей, параллельной оси Ox.

Коническая поверхность. Пусть дана в пространстве некоторая кривая L и точка $M(x_0,y_0,z_0)$. Поверхность, образованная движением прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей кривую L, называется конической поверхностью. Точка M_0 называется вершиной конической поверхности.

Пусть дано уравнение $F(x,y,z)=0$. Функция $F(x,y,z)$ называется однородной степени m ($m>0$), если при любом t выполняется условие $F(tx,ty,tz)=t^m F(x,y,z)$. Соответствующее уравнение $F(x,y,z)=0$ также называется однородным. Например, уравнение $F(x,y,z)=$ $=x^2+y^2-z^2=0$ однородное степени 2. Можно доказать, что однородное уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат. (Докажите самостоятельно после изучения подразд. 7.5.)

Поверхность вращения. Пусть на плоскости xOy задана линия $F(x,y)=0$. При вращении кривой вокруг оси Ox мы получим поверхность, называемую поверхностью вращения. Если точка $M_0(x,y,0)$ лежит на кривой $F(x,y)=0$, то при вращении вокруг оси Ox она опишет окружность с центром в точке $C(x,0,0)$, радиус которой равен $|y|$. Пусть $M(X,Y,Z)$ — точка поверхности. Тогда $x=X$, $y=\pm\sqrt{Y^2+Z^2}$. Поэтому уравнение поверхности вращения будет иметь вид $F\left(X,\pm\sqrt{Y^2+Z^2}\right)=0$. Например, вращая параболу $y^2=2px$ вокруг оси Ox, получим поверхность $y^2+z^2=2px$, называемую эллиптическим параболоидом вращения.

7.2. Полярная система координат

Кроме декартовой системы координат в математике применяется ряд других. В этом подразделе познакомимся с одной из них.

Полярная система координат состоит из точки, называемой полюсом, и проходящей через нее оси, называемой полярной осью.

Числа (r, φ) называются полярными координатами точки M, если $r = |\mathbf{OM}|$, а φ — угол между полярной осью и вектором $\mathbf{OM}$, отсчитанный по правилам тригонометрии (рис. 7.2). Будем считать, что $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Поместим начало декартовой системы в полюс O, а ось Ox направим по полярной оси. Тогда можно выразить декартовы координаты через полярные формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этом же случае соотношения $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

Многие кривые удобно изучать в полярной системе координат, задавая их уравнением $F(r,\varphi) = 0$. Запишем уравнения некоторых кривых:

$r = a$ — окружность радиуса a с центром в полюсе;

$r = 2a\cos\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(a,0)$;

$r = a\sin\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(0,a)$;

$r = a\varphi$ — спираль Архимеда;

$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската Бернулли;

$r = a(1 + \cos\varphi)$ — кардиоида.

Построим кардиоиду (рис. 7.3).

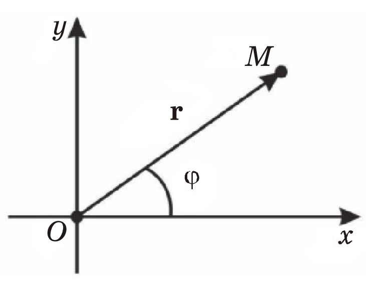


Рис. 7.2

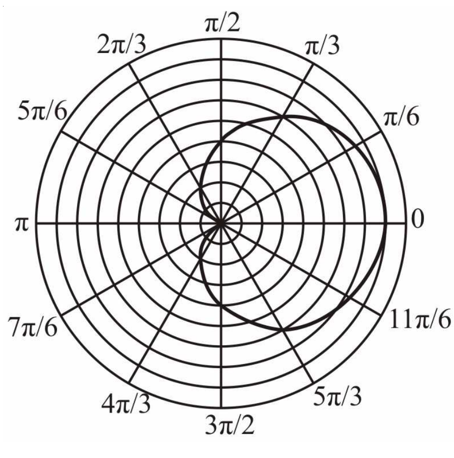


Рис. 7.3

Полагая $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ и вычисляя r, построим соответствующие точки. Соединяя их гладкой кривой, получим дугу кардиоиды, лежащую выше полярной оси. В силу четности косинуса, строим ей симметричную относительно полярной оси часть кардиоиды. Ее вид объясняет название.

Предлагается самостоятельно построить остальные из указанных кривых.

7.3. Уравнения прямой на плоскости

Задача 1. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A,B)$.

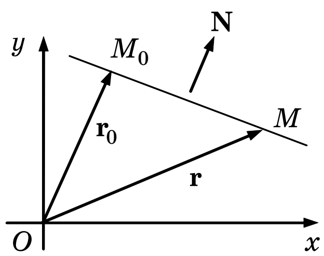


Рис. 7.4

Произвольная точка M (рис. 7.4) лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{M_0M} \perp \mathbf{N}$, т.е. когда $(\mathbf{M_0M}, \mathbf{N}) = 0$. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ радиусы-векторы точек M и M_0, то $(\mathbf{M_0M}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0$ есть векторная форма уравнения прямой.

Выражение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (7.7)$$

является координатной формой уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}$. Обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$. Тогда (7.7) приводится к виду

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7.8)$$

Это общее уравнение прямой. Подчеркнем, что в общем уравнении прямой коэффициенты A, B определяют вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный данной прямой, который называется вектором нормальной прямой.

Пусть $B \neq 0$. Обозначая $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, уравнение (7.8) перепишем в виде $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом. Величина k равна тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, а величина b по модулю равна длине отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Задача 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно заданному вектору $\mathbf{l}(m,n)$. Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.

Произвольная точка $M(x,y)$ (ее радиус-вектор обозначим $\mathbf{r}(x,y)$) лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, т.е. если $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 \parallel t\mathbf{l}$, или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l} \tag{7.9}$$

есть параметрическое уравнение прямой в векторной форме. В координатной форме уравнение (7.9) имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn. \end{cases} \tag{7.10}$$

Это параметрические уравнения прямой в координатной форме. Уравнения (7.10) можно переписать в виде

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}. \tag{7.11}$$

Это каноническое уравнение прямой. В частности, если прямая проходит через точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор (x_1-x_0, y_1-y_0) и уравнение (7.11) записать в виде

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Получили уравнение прямой, проходящей через точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1).

З а д а ч а 3. Задана прямая L общим уравнением $Ax+By+C=0$. Найти расстояние от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой.

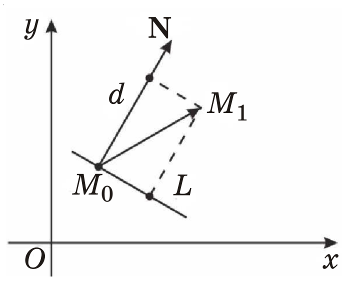


Рис. 7.5

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — любая точка на прямой L (рис. 7.5).

Очевидно,

$$d = \left|\text{Пр}_{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\right| = \frac{\left|(\mathbf{N}_1, \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1)\right|}{|\mathbf{N}|} =$$

$$= \frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)\right|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Итак,

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{7.12}$$

П р и м е р 1. Найти расстояние от точки (2,3) до прямой $3x+4y+10=0$.

Решение. По формуле (7.12): $d=\dfrac{|6+12+10|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{28}{5}$.

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$, $\mathbf{N}_1(A_1,B_1)\not\parallel \mathbf{N}_2(A_2,B_2)$, то прямые пересекаются и их точку пересечения можно найти, решая систему

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны. Они различны, если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$, и совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Задача 5. Найти угол между прямыми. Пусть прямые пересекаются, т.е. $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$. В качестве угла φ между прямыми примем угол между их нормалями. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то тангенс одного из углов между прямыми можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Пример 2. На отрезке [1,4] задана функция, график которой приведен на рис. 7.6. Записать аналитическое выражение этой функции.

Решение. Для решения задачи необходимо найти уравнения прямых *AB*, *BC* и *AD*. Будем искать их в виде $y=k_1x+b_1$. На прямой *AB* лежат точки *A*(1,0) и *B*(2,4). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 0&=k_1+b_1, \\ 4&=2k_1+b_1. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $k_1=4$, $b_1=4$. Уравнение *AB* имеет вид $y=4x-4$. Прямая *BC* имеет уравнение $y=4$. Уравнение прямой *CD* также ищем в виде $y=k_2x+b_2$.

Из условия принадлежности этой прямой точек $C(3,4)$ и $D(4,2)$ получаем систему $\left.\begin{aligned} 4 &= 3k_2 + b_2, \\ 2 &= 4k_2 + b_2, \end{aligned}\right\}$ из которой находим: $k_2 = -2$, $b_2 = 10$. Следовательно, прямая CD имеет уравнение $y = -2x + 10$. Аналитически функцию $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & \text{если } \ 1 \le x \le 2; \\ 4, & \text{если } \ 2 < x \le 3; \\ -2x + 10, & \text{если } \ 3 < x \le 4. \end{cases}$$

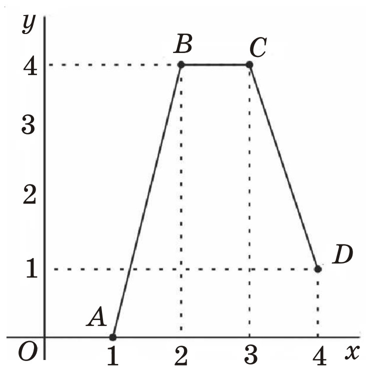


Рис. 7.6

Пример 3. Треугольник (рис. 7.7) задан координатами своих вершин: $A(1,-1)$, $B(4,-5)$, $C(-5,-9)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат: а) высота AH; б) медиана AM; в) биссектриса AN.

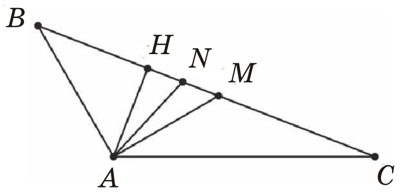


Рис. 7.7

Решение. а) Так как прямая AH перпендикулярна BC, то в качестве вектора нормали к прямой AH можно взять любой параллельный BC вектор: $\mathbf{BC} = (-9,-4)$ □ $(9,4)$. Уравнение прямой AH можно записать в виде $9x + 4y + C = 0$. Так как точка A лежит на прямой AH, то $9 - 4 + C = 0$, $C = -5$. Получаем уравнение прямой AH в виде $9x + 4y - 5 = 0$.

б) Середина M отрезка BC имеет координаты $\left(-\dfrac{1}{2}, -7\right)$, а вектор $\mathbf{AM}$ имеет координаты $\left(-\dfrac{3}{2}, -6\right)$. Очевидно, вектор $(1,4)$ коллинеарен вектору $\mathbf{AM}$. Уравнение прямой AM запишем в каноническом виде $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4}$, или $4x - y - 5 = 0$.

в) Направляющий вектор прямой AN можно получить как сумму ортов векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BC}$. Так как $\mathbf{AB} = (3,-4)$, а $\mathbf{AC} = (-6,-8)$, то их ортами являются векторы $\mathbf{a}_1 = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ и $\mathbf{a}_2 = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$; $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \left(0, -\dfrac{8}{5}\right)$. Таким образом, прямая AN параллельна оси Oy, а так как она проходит через точку $A(1,-1)$, то ее уравнение $x = 1$.

7.4. Уравнение плоскости

Задача 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A,B,C)$. (Вектор $\mathbf{N}$ называется вектором нормали плоскости.)

Как и при решении задачи 1 из подразд. 7.3, получаем

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{N})=0, \qquad (7.13)$$

т.е. векторную форму уравнения плоскости, где $\mathbf{r}=(x,y,z)$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости. В координатной форме (7.13) можно записать в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или, обозначая $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, получим общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Задача 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно векторам $\mathbf{l}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\mathbf{l}_2=(m_2,n_2,p_2)$, $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$.

В этом случае можно положить $\mathbf{N}=[\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2]$, из (7.13) получить искомое уравнение в векторной форме

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=0 \qquad (7.14)$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (7.15)$$

В частности, если плоскость проходит через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то можно в (7.14) и (7.15) положить $\mathbf{l}_1=\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$, $\mathbf{l}_2=\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$, т.е. $m_1=x_1-x_0$, $n_1=y_1-y_0$, $p_1=z_1-z_0$; $m_2=x_2-x_0$, $n_2=y_2-y_0$, $p_2=z_2-z_0$.

Задача 3. Охарактеризовать взаимное расположение трех различных плоскостей $A_ix+B_iy+C_iz=D_i$, $i=1,2,3$.

Три плоскости пересекаются в одной точке, если их векторы нормалей $\mathbf{N}_i(A_i,B_i,C_i)$, $i=1,2,3$, компланарны, т.е. $(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3)\neq 0$. Если же $(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3)=0$ и среди векторов $\mathbf{N}_i$ нет параллельных, то эти плоскости пересекаются либо по трем параллельным прямым, либо по одной прямой.

Предлагается самостоятельно охарактеризовать случай, когда среди векторов $\mathbf{N}_i$ есть параллельные.

Задача 4. Найти расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Совершенно аналогично, как и при выводе формулы (7.12), получаем

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7.5. Уравнение прямой в пространстве

З а д а ч а 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно вектору $\mathbf{l}(m,n,p)$. (Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.) Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой. Тогда $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, поэтому

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{l}$$

есть параметрическое уравнение прямой в векторной форме. Выражая через координаты, получаем параметрические уравнения прямой в координатной форме

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn, \\ z=z_0+tp. \end{cases}$$

Воспользовавшись условием параллельности двух векторов (их координаты пропорциональны), находим

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

т.е. каноническое уравнение прямой. Если прямая проходит через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, т.е. $m_1=x_1-x_0$, $n_1=y_1-y_0$, $p_1=z_1-z_0$.

Прямую линию можно задать так же, как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{7.16}$$

если векторы $\mathbf{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\mathbf{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ непараллельны. Соотношения (7.16) называют общими уравнениями прямой.

Чтобы перейти от общих уравнений прямой (7.16) к каноническим и параметрическим, нужно найти направляющий вектор и точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащую на прямой. В качестве $\mathbf{l}$ можно принять вектор, параллельный $[\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2]$, а точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ определить из системы (7.16), найдя ее частное решение.

Задача 2. Найти расстояние d от точки M_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$ (рис. 7.8).

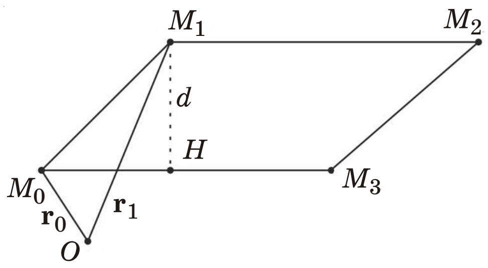
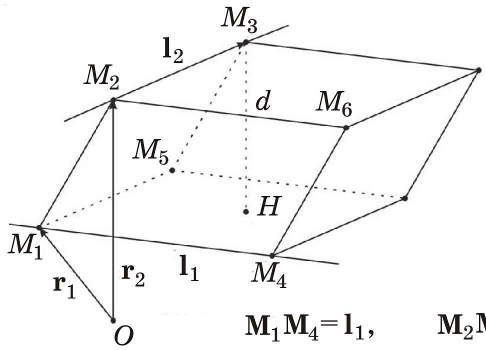


Рис. 7.8

Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_1H параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{l}$, а потому

$$d = \frac{\left|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]\right|}{|\mathbf{l}|}.$$

Задача 3. Найти расстояние d между двумя непараллельными прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_1 \not\parallel \mathbf{l}_2$ (рис. 7.9).



$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4 = \mathbf{l}_1$, $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3 = \mathbf{l}_2$,
$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_5 = \mathbf{l}_2$

Рис. 7.9

Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_3H параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, а потому

$$d = \frac{\left|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]\right|}{\left|[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]\right|}. \tag{7.17}$$

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Если векторы $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ параллельны, то прямые (7.18) либо параллельны, либо совпадают. Если прямые совпадают, то вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ параллелен общему направляющему вектору этих прямых. Если $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$, то прямые либо пересекаются, либо являются скрещивающимися. Если прямые пересекаются, то расстояние d между ними равно нулю. Из (7.17) получаем условие пересечения прямых

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0, \ \ \mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2.$$

Если прямые скрещиваются, то $d \neq 0$, т.е.

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) \neq 0$$

является условием того, что прямые (7.18) скрещиваются.

Как видим, прямые и плоскости задаются линейными уравнениями относительно декартовых координат. В последующих подразделах изучим кривые, задаваемые уравнением второго порядка относительно декартовых координат:

$$a_{11}z^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0, \tag{7.19}$$

где a_{ik} — константы. Такие кривые называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола. К изучению этих кривых мы и переходим.

7.6. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Получим уравнение эллипса.

Пусть F_1 и F_2 — фокусы (рис 7.10). Положим $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. Декартову систему координат выберем следующим образом: ось Ox направим по прямой F_1F_2, а начало поместим в середину отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| + |\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = 2a$ (величина a дана, причем $a > c$). Имеем $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид

$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Числа r_1 и r_2 называют фокальными радиусами эллипса.

Упростим это уравнение. Так как $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, $r_1 + r_2 = 2a$, то $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$, $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$, т.е. $a \pm \dfrac{c}{a}x = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}$. Возведем обе

части этого равенства в квадрат. Получим $\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$.
Так как $a>c$, то можно обозначить $a^2-c^2=b^2$ и записать $\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7.20)$$

т.е. получили каноническое уравнение эллипса. Можно доказать, что при возведении в квадрат мы получили уравнение, эквивалентное исходному.

Оси Ox и Oy являются осями симметрии, а точка $O(0,0)$ — центром симметрии. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ называются вершинами эллипса. Так как $|x|\le a$, $|y|\le b$, то эллипс — кривая, расположенная внутри прямоугольника, сторонами которого являются прямые $x=\pm a$, $y=\pm b$ (рис. 7.11).

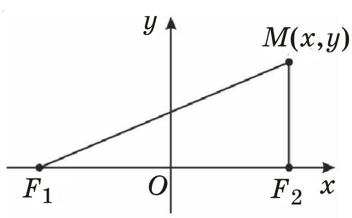


Рис. 7.10

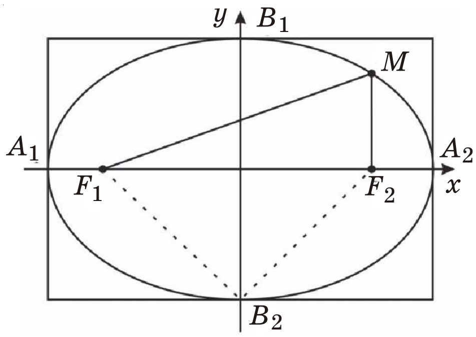


Рис. 7.11

Число a в уравнении (7.20) называют большой, а b — малой полуосью эллипса. Прямую, на которой расположены фокусы эллипса, называют фокальной осью.

Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Так как $c<a$, то $\varepsilon<1$.

Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называют директрисами эллипса. Предлагается доказать, что $\frac{r_1}{d}=\varepsilon$, где d — расстояние от точки M эллипса до ближайшей от фокуса F_1 директрисы $x=-\frac{a}{\varepsilon}$, и что $\frac{r_2}{d}=\varepsilon$, где d —

расстояние от точки M эллипса до директрисы $x = \frac{a}{\varepsilon}$, а $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ — фокальные радиусы точки M. Если $c = 0$, то $a^2 = b^2$ и эллипс превращается в окружность, при этом $\varepsilon = 0$.

Пример. Доказать, что уравнение $x^2+4x+4y^2-16y-4=0$ определяет эллипс. Найти координаты его центра и эксцентриситет.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты: $(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4+4+16 = 24$. Введем новые переменные $x_1 = x+2$, $y_1 = y-2$. Тогда $x_1^2 + 4y_1^2 = 24$, или $\frac{x_1^2}{24} + \frac{y_1^2}{6} = 1$. Последнее уравнение определяет эллипс, причем $a^2 = 24$, $b^2 = 6$. Центр его находится в точке $(-2,2)$. Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то в нашем случае $c = \sqrt{24-6} = \sqrt{18}$, а поэтому $\varepsilon = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.7. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы.

Получим уравнение гиперболы.

Положим $|\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2| = 2c$. Систему координат выберем так же, как и в случае эллипса. Тогда $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Если $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы, то

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

$a = \text{const}$, $c > a$. Последнее уравнение и определяет гиперболу. Проведя его упрощение, как и в случае эллипса, обозначив $b^2 = c^2 - a^2$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола — кривая, симметричная относительно осей координат (рис. 7.12). Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ называются вершинами гиперболы. Так как $|x| \geq a$, то гипербола находится вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$. Ось Oy называют мнимой осью гиперболы, а ось Ox — действительной. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы. Число a называют действительной полуосью гиперболы, а число b — мнимой полуосью.

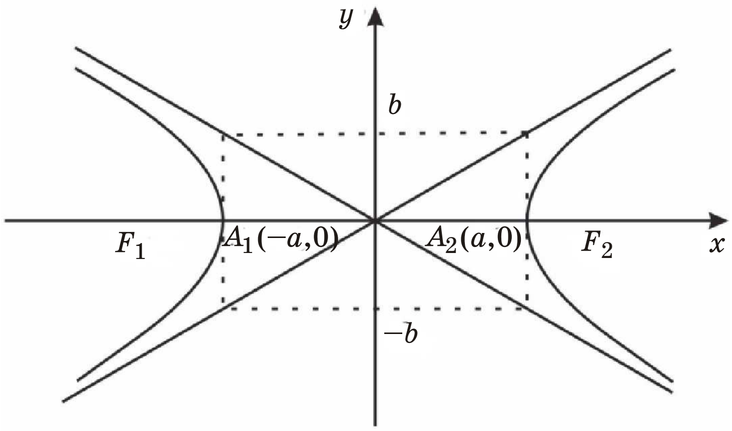


Рис. 7.12

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы, $\varepsilon > 1$, а прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ — ее директрисами. Они обладают теми же свойствами, что и для эллипса.

П р и м е р. Доказать, что уравнение $4x^2 - 24x - 9y^2 + 36y = 36$ определяет гиперболу. Найти ее центр симметрии и асимптоты.

Решение. Выделяя полные квадраты, данное уравнение можно записать в виде $4(x-3)^2 - 9(y-2)^2 = 36$ или $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

Положим $x_1 = x - 3$, $y_1 = y - 2$. Тогда $\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{4} = 1$. Данная кривая — гипербола с центром в точке $x_1 = x - 3 = 0$, $y_1 = y - 2 = 0$, т.е. в точке (3,2). Уравнение асимптот гиперболы имеет вид $y - 2 = \pm \frac{2}{3}(x-3)$, или $2x - 3y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Итак, мы рассмотрели кривые второго порядка: эллипс, эксцентриситет которого меньше единицы, гиперболу, эксцентриситет которой больше единицы. Кривая второго порядка, эксцентриситет которой равен единице, является параболой (рассмотрена в подразд. 7.1).

7.8. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, которая в декартовой системе координат описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0, \qquad (7.21)$$

где a_{ik} — константы. Путем специального выбора декартовой системы координат уравнение (7.21) можно значительно упростить и привести к одному из видов, которые рассмотрим ниже.

1. Сфера с центром в точке (a,b,c) радиуса R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(рассмотрена в подразд. 7.1).

2. Эллипсоид. Поверхность, определяемая относительно какой-либо декартовой системы координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

называется эллипсоидом (рис. 7.13), а величины a, b, c — его полуосями.

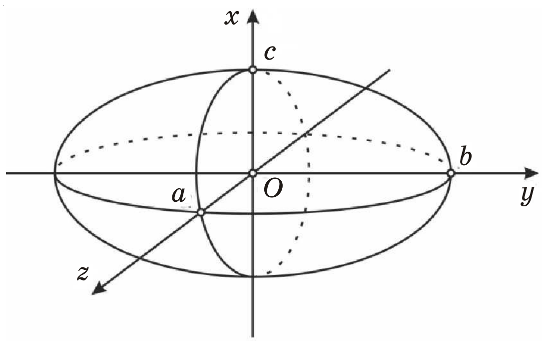


Рис. 7.13

Исследуем эту поверхность с помощью сечений. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ будет эллипс (при $|h| < c$)

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Полуоси этого эллипса $a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ будут наибольшими при $h=0$. Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным, также являются эллипсами.

Если две полуоси эллипсоида равны, то это эллипсоид вращения. При $a=b=c$ имеем сферу.

3. Однополостной гиперболоид. Если гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскости zOy вращать вокруг оси Oz, то мы получим поверхность $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, называемую однополостным гиперболоидом вращения.

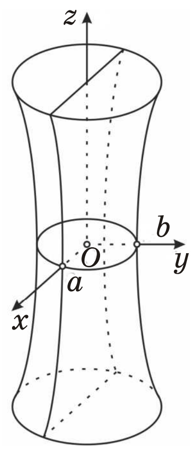


Рис. 7.14

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называется однополостным гиперболоидом (рис. 7.14).

В сечениях этой поверхности плоскостями $z=h$ получим эллипсы $\begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ с полуосями $a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

В сечениях плоскостями $x=h$ или $y=h$ получим гиперболы.

4. Двуполостной гиперболоид. Вращая гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскости yOz вокруг оси Oz, получим поверхность $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

называется двуполостным гиперболоидом (рис. 7.15).

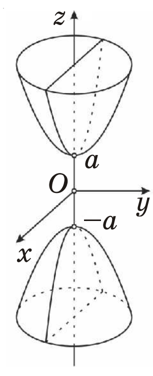


Рис. 7.15

Сечениями этой поверхности плоскостями $z = h$ будут эллипсы

$$\begin{cases} z = h \quad (|h| > c), \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

В сечении плоскостью $x = 0$ получим гиперболу $\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$

5. Эллиптический параболоид. При вращении параболы $y^2 = 2pz$ плоскости yOz вокруг оси Oz получим поверхность $x^2 + y^2 = 2pz$. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p > 0),$$

называется эллиптическим параболоидом (рис. 7.16). При сечении эллиптического параболоида плоскостями $z = h > 0$ получим эллипсы, а плоскостями, параллельными плоскостям xOz и yOz, — параболы.

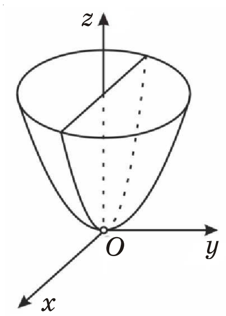


Рис. 7.16

6. Гиперболический параболоид. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p > 0),$$

называется гиперболическим параболоидом (рис. 7.17).

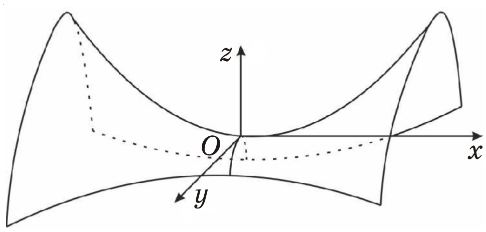


Рис. 7.17

Его сечения $\begin{cases} z = h \neq 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2ph \end{cases}$ — гиперболы; $\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} + 2pz \end{cases}$ — параболы; $\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{b^2} = -2pz + \dfrac{y^2}{a^2} \end{cases}$ — параболы.

7. Конусы второго порядка. Поверхность, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

называется конусом второго порядка (рис. 7.18). Это уравнение является однородным второй степени. В сечении плоскостями $z=h$ получим эллипсы

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases}$$

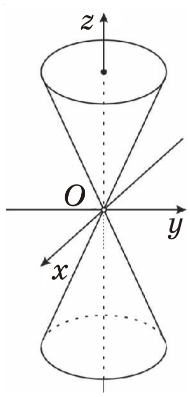


Рис. 7.18

В сечении плоскостью $x=0$ получим две пересекающиеся прямые $\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{y}{b}=\pm\dfrac{z}{c}. \end{cases}$

8. Цилиндры второго порядка. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ y^2=2px,\ \ \frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

на плоскости xOy определяют эллипс, параболу и гиперболу, а в пространстве — эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры, показанные на рис. 7.19, 7.20, 7.21 соответственно.

Образующие цилиндров параллельны оси аппликат, а направляющими служат названные кривые.

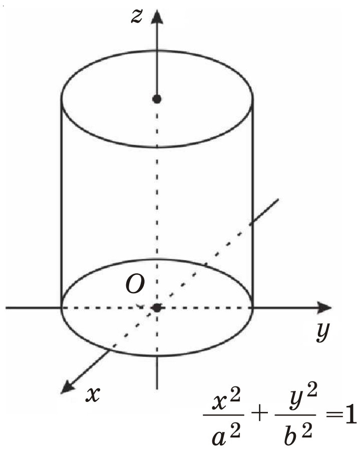


Рис. 7.19

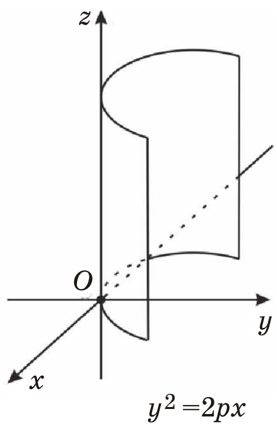


Рис. 7.20

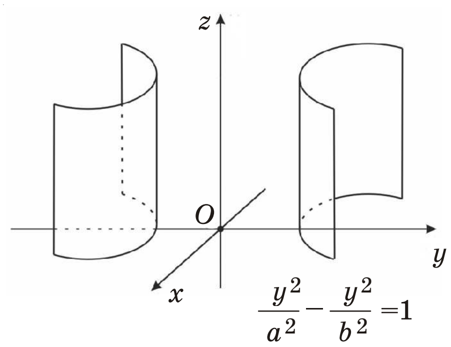


Рис. 7.21

Если уравнение второй степени распадается на два уравнения первой степени, то они будут определять пару либо пересекающихся, либо параллельных, либо слившихся плоскостей.

Упражнения

1. Укажите координаты точек пересечения прямой $2x - 5y + 10 = 0$ с осями координат.

Ответ: (–5,0), (0,–2).

2. Дана прямая $3x - 2y + 1 = 0$. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,-4)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

Ответ: а) $3x - 2y - 17 = 0$; б) $2x + 3y + 6 = 0$.

3. Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,2)$, $M_2(3,-7)$.

Ответ: $9x + 2y - 13 = 0$.

4. Даны вершины треугольника $A(2,1)$, $B(-4,-1)$, $C(-6,2)$. Запишите уравнения прямых, на которых расположены:

а) высота AH треугольника ABC;

б) медиана BM.

Ответ: а) $10x + 3y - 23 = 0$; б) $5x - 16y + 4 = 0$.

5. Определите величину угла, образованного прямыми $3x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 7 = 0$.

Ответ: 45°.

6. Определите площадь квадрата, две стороны которого расположены на прямых $2x - 3y - 6 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$.

Ответ: 13.

7. Даны вершины треугольника $A(-10,-13)$, $B(-2,-3)$, $C(2,1)$. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану CM.

Ответ: 4.

8. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,-3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(3,-2,5)$.

Ответ: $3x-2y+5z+22=0$.

9. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,-1,2)$, $M_2(2,0,3)$, $M_3(-3,4,0)$.

Ответ: $7x-y-13z+25=0$.

10. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2,1,4)$, $M_2(0,3,1)$ перпендикулярно плоскости $4x+3y-5z+4=0$.

Ответ: $x+2y+2z-8=0$.

11. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,4,3)$ параллельно векторам $\mathbf{e}_1=\{2,-3,4\}$, $\mathbf{e}_2=\{1,4,-1\}$.

Ответ: $13x-6y-11z+40=0$.

12. Найдите расстояние от точки $M_0(1,4,5)$ до плоскости $x-2y-2z+3=0$.

Ответ: $14/3$.

13. Запишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2,-1,4)$, $M_2(3,5,2)$.

Ответ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-4}{-2}$; $x=t+2$, $y=6t-1$, $z=-2t+4$.

14. Запишите параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x-2y+3z-8=0; \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=7t-1, \\ z=4t. \end{cases}$

15. Докажите, что прямые $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$, $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$ пересекаются, и запишите уравнение плоскости, в которой они расположены.

Ответ: $22x-8y-17z+61=0$.

16. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Ответ: $(2,-3,6)$.

17. Найдите точку Q, симметричную точке $P(1,3,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Ответ: $(-5,1,0)$.

18. Найдите точку Q, симметричную точке $P(2,-5,7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5,4,6)$, $M_2(-2,-17,-8)$.

Ответ: $(4,1,-3)$.

19. Найдите расстояние от точки $P(2,3,-1)$ до прямой

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}.$$

Ответ: 21.

20. Найдите расстояние между прямыми $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

Ответ: 13.

21. Докажите, что уравнение $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ определяет окружность, найдите координаты ее центра и радиус.

Ответ: $C(1,-2)$, $R=5$.

22. Докажите, что уравнение $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ определяет эллипс и найдите:

а) координаты его центра;

б) полуоси;

в) эксцентриситет.

Постройте данный эллипс.

Ответ: а) $(3,-1)$; б) $3, \sqrt{5}$, в) $2/3$.

23. Докажите, что уравнение $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ определяет гиперболу и найдите:

а) координаты ее центра;

б) полуоси;

в) эксцентриситет;

г) уравнения асимптот.

Ответ: а) $(2,-3)$; б) 3,4; в) $5/3$; г) $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$.

24. Докажите, что уравнение $y=4x^2-8x+7$ определяет параболу, и найдите координаты ее вершины и величину ее параметра.

Ответ: $A(1,3)$, $p=2$.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Задача 1

Найдите элементы множества P, если

$A = \{0,2,3,7,8\}$; $B = \{1,3,6,7,9\}$; $C = \{0,1,4,7,8,9\}$; $I = \{0,1,2,\ldots,9\}$.

1.1 (ЗАГ). $P = \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B$.

1.2 (977). $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup A \cap B$.

1.3 (ЕЛО). $P = \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{C} \cup A \cap B$.

1.4 (ВОВ). $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.5 (ТОЧ). $P = \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B$.

1.6 (154). $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup A \cap B$.

1.7 (296). $P = \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap B \cup A \cap \bar{B}$.

1.8 (ВАН). $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup A \cap \bar{B}$.

1.9 (Д87). $P = B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap C$.

1.10 (ЗАЙ). $P = B \cap C \cup \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B}$.

1.11 (ЗЕР). $P = A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap C$.

1.12 (830). $P = B \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B}$.

1.13 (039). $P = B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B$.

1.14 (332). $P = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B}$.

1.15 (ЭГО). $P = B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap B$.

1.16 (256). $P = B \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B$.

1.17 (537). $P = B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap B$.

1.18 (РИФ). $P = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C}$.

1.19 (372). $P = A \cap B \cup \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B}$.

1.20 (ЛУР). $P = A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup B \cap \bar{C}$.

Задача 2

Найдите элементы множества P, если

$$A = \{0,\ 3,\ 4,\ 9\},\quad C = \{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9\},$$
$$B = \{1,\ 3,\ 4,\ 7\},\quad I = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

2.1 (БВК). $\bar{P} = A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$.

2.2 (ЭХИ). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C$.

2.3 (280). $\bar{P} = A \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup A \cap C \cup \bar{B} \cap C.$

2.4 (Я81). $\bar{P} = \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C.$

2.5 (РЗХ). $\bar{P} = A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}.$

2.6 (ФОЗ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B.$

2.7 (ТБ5). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C.$

2.8 (236). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{C} \cup A \cap C.$

2.9 (ТЯЛ). $\bar{P} = A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C.$

2.10 (8Р8). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}.$

2.11 (А39). $\bar{P} = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C.$

2.12 (БББ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}.$

2.13 (7СС). $\bar{P} = \bar{A} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}.$

2.14 (АУТ). $\bar{P} = \bar{B} \cap \bar{C} \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C.$

2.15 (ТУФ). $\bar{P} = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B \cup B \cap C \cup \bar{A} \cap C.$

2.16 (ЗУХ). $\bar{P} = \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B}.$

2.17 (ЭЛЛ). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap C.$

2.18 (569). $\bar{P} = A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{B} \cap C.$

2.19 (ЕТМ). $\bar{P} = A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}.$

2.20 (ХВП). $\bar{P} = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap \bar{C}.$

Задача 3

Сколько существует n-разрядных десятичных чисел, в которых цифра a встречается k раз (числа могут начинаться с нуля), при следующих значениях чисел n, a, k соответственно?

3.1 (75Г). 5, 3, 2.
3.2 (ЕЕФ). 6, 5, 4.
3.3 (ББ7). 7, 9, 6.
3.4 (168). 8, 5, 6.
3.5 (А60). 8, 1, 5.
3.6 (917). 4, 6, 0.
3.7 (ТОГ). 5, 8, 3.
3.8 (ИЕР). 6, 7, 3.
3.9 (АЙН). 5, 4, 4.
3.10 (ИЯК). 4, 4, 2.
3.11 (ДИА). 7, 4, 5.
3.12 (ТЕР). 8, 3, 7.
3.13 (873). 9, 5, 8.
3.14 (НАР). 10, 4, 8.
3.15 (КОЗ). 6, 6, 2.
3.16 (АОН). 7, 6, 4.
3.17 (С99). 9, 2, 7.
3.18 (КРЕ). 9, 4, 6.
3.19 (ИРА). 11, 9, 9.
3.20 (ИФА). 6, 3, 5.

Задача 4

4.1 (2БФ). Сколько слов длины 3 можно составить из букв слова «диффузия», если в каждом из слов все буквы разные?

4.2 (НАТ). Из алфавита выделили k знаков. Известно, что из них три знака можно выбрать 1140 способами. Найдите k.

4.3 (ИЦК). Множество содержит семь цифр. Из булеана этого множества удалили все те его элементы, которые содержат три цифры, и удалили все элементы, содержащие по четыре цифры. Сколько элементов осталось?

4.4 (ЦАИ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры расположены в порядке возрастания или в порядке убывания (с нуля числа начинаться не могут)?

4.5 (521). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0 и 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

4.6 (АММ). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0, 8, 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

4.7 (ТУК). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры расположены в порядке убывания?

4.8 (ААТ). Сколько существует подмножеств, содержащих по пять элементов из множества P, если известно, что существует 84 подмножества, каждое из которых состоит из трех элементов множества P?

4.9 (ОНА). Сколько существует различных булевых функций четырех аргументов, СДНФ которых содержит не более трех минтермов?

4.10 (ВРТ). Сколькими способами можно расположить на шашечной доске черную и белую шашки, если ни одно из четырех крайних полей не занимать?

4.11 (ТРЖ). Множество A состоит из десяти цифр, множество B — из семи букв. Из множества A взяли три цифры, из множества B — две буквы и образовали из них множество C. Сколько существует таких множеств?

4.12 (304). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет четных цифр и нет цифр, являющихся простыми числами?

4.13 (ВЯЛ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, начинающихся с какой-либо из цифр 5, 6, 7, 8 и оканчивающихся нулем либо цифрой 9?

4.14 (РАЦ). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры двух старших разрядов являются четными, а все остальные — нечетными?

4.15 (65У). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно переводить с любого из семи языков на любой другой из этих же семи языков?

4.16 (С23). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера фирмы, но помнит, что в номере нет нулей и девяток и есть одна цифра 5. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до фирмы путем проб и ошибок?

4.17 (ЮВЗ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, если в каждом из них три раза встречается цифра 3, три раза - цифра 5 и два раза - цифра 9?

4.18 (ЭХА). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, если в каждом числе цифры расположены в порядке возрастания и если каждое число начинается с единицы и оканчивается девяткой?

4.19 (А8В). По окружности расположено 12 точек. Выбрали пять рядом стоящих точек и каждую из них соединили прямыми линиями с каждой из остальных семи точек. Найдите число точек пересечения, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые.

4.20 (ТР5). Сколько различных восьмизначных кодов можно получить, используя нечетные десятичные цифры и шесть букв некоторого алфавита, если каждый код представляет собой сочетание четырех цифр и четырех букв, где цифры не повторяются и упорядочены по возрастанию, а буквы также не повторяются и упорядочены по алфавиту?

Задача 5

5.1. Из букв разрезной азбуки составлено слово «цивилизация». Из этого слова случайным образом выбрали 4 буквы и расположили их в ряд. Найдите вероятность того, что получится:

а) **(РОО)** слово «виза»;

б) **(ХТМ)** последовательность, в которой все буквы одинаковые;

в) **(АОО)** слово «заяц».

5.2. В урне 10 шаров, пронумерованных в последовательности 0, 1, 2, ..., 9. Наугад вынимают одновременно 2 шара. Найдите вероятность:

а) **(К13)** что номера обоих шаров будут простыми числами;

б) **(Ж38)** сумма номеров будет представлять собой простое число;

в) **(ЖЖЕ)** номера шаров будут различными.

5.3. Абонент, набирая номер телефона, забыл последние три цифры, но помнит, что среди них нет четных цифр и одна из цифр встречается точно два раза. Найдите вероятность:

а) **(4СП)** что случайно выбирая цифры, абонент с первой попытки наберет правильный номер;

б) **(463)** правильный номер он наберет с последней попытки из возможных;

в) **(У29)** правильный номер будет угадан в результате второй попытки.

5.4. Для готовых изделий поставили 5 ящиков. Каждое готовое изделие кладут в случайно выбираемый ящик. Найдите вероятность того, что после изготовления трех изделий:

а) **(ТЕД)** 3 ящика будут пустыми;

б) **(МТС)** 4 ящика будут пустыми;

в) **(ХАЛ)** в каждом ящике будет не более одного изделия.

5.5. Игральную кость подбрасывают 6 раз и каждый раз записывают выпавшие цифры. Получится последовательность шести цифр. Найдите вероятность того, что в последовательности:

а) **(ДЭТ)** четные и нечетные цифры чередуются;

б) **(ИИК)** сначала идут две четные цифры, затем — две нечетные и после этого — снова две четные;

в) **(БАР)** содержатся только цифры 3 и 5, встречающиеся не менее одного раза каждая.

5.6. Датчик случайных чисел поочередно выдает десятичные цифры. Датчик запускают, и после того как он выдаст четыре цифры, останавливают. Найдите вероятность того, что среди выданных четырех цифр:

а) **(ХТО)** точно две кратны трем;

б) **(ЖИК)** точно два нуля и нет нечетных цифр;

в) **(Т54)** нет цифр 7 и 8, а имеющиеся цифры идут в порядке возрастания.

5.7. Некто наугад называет три гласные буквы. Найдите вероятность того, что он:

а) **(ЕЛС)** ни разу не назовет букву А;

б) **(ЛБК)** точно один раз назовет букву А;

в) **(УВН)** точно два раза назовет букву А.

5.8. Из колоды, насчитывающей 36 карт, удалили все карты пиковой масти. Из оставшихся карт случайным выбором извлекают 4 карты. Найдите вероятность того, что среди них:

а) **(С27)** точно два туза;

б) **(АГУ)** точно три короля;

в) **(КЫР)** нет карт одинаковой масти.

5.9. Имеется десять 100-ваттных осветительных ламп и пять — 200-ваттных. Наугад берут 5 ламп. Найдите вероятность того, что выбранные лампы:

а) **(МОЯ)** все являются 100-ваттными;

б) **(УУЗ)** все являются 200-ваттными;

в) **(ГЕК)** 3 — 100-ваттные и 2 — 200-ваттные.

5.10. В ящике 6 стальных заклепок, 4 медных и 5 алюминиевых. Наугад берут 3 заклепки. Найдите вероятность того, что возьмут:

а) **(ВЕП)** все не стальные;

б) **(ИЕС)** две стальные и одну медную;

в) **(АВИ)** точно одну из них стальную.

5.11. Некто случайно выбирает и записывает цифру из множества $\{0,1\}$. Так поступает 12 раз. В результате получает 12-значное двоичное число. Найдите вероятность:

а) **(ВИЙ)** что число будет начинаться с трех единиц и оканчиваться тремя нулями;

б) **(329)** в числе будет 4 единицы, причем число начинается с единицы и оканчивается единицей, и в числе нет рядом стоящих единиц;

в) **(МВЗ)** среди старших шести разрядов единиц будет больше, чем среди шести младших.

5.12. В коробке 20 осветительных ламп. Из них 6 — 100-ваттных и 14 — 200-ваттных. Во время перевозки три лампы были повреждены. Найдите вероятность того, что повреждены:

а) **(ЛОТ)** только 100-ваттные лампы;

б) **(ТЫМ)** только 200-ваттные лампы;

в) **(561)** одна 100-ваттная лампа и две 200-ваттные.

5.13. Для зачета приготовлено 20 вопросов. На 15 из них студент знает ответы, а на 5 — не знает. Преподаватель задал студенту 5 вопросов. Чтобы получить зачет, достаточно правильно ответить не менее чем на три вопроса. Найдите вероятность того, что студент:

а) **(6Г7)** сдаст зачет (правильно ответит более чем на два вопроса);

б) **(859)** правильно ответит только на 2 вопроса;

в) **(ЦЕХ)** не ответит ни на один вопрос.

5.14. На полке 10 книг: 4 книги — учебники по физике, 4 — по химии и 2 — по астрономии. Наугад берут 4 книги. Найдите вероятность того, что среди них:

а) **(ДРУ)** есть учебники по химии, физике и астрономии;

б) **(ОСА)** нет учебников по астрономии;

в) **(ХХЧ)** точно два учебника по химии.

5.15. В урне 6 белых и 5 черных шаров. Наугад последовательно вынимают все шары. Найдите вероятность событий:

а) **(ДЫН)** сначала будут вынуты все белые шары, а затем — все черные;

б) **(167)** первым будет вынут черный шар;

в) **(ЕСТ)** предпоследним будет вынут черный шар.

5.16. Кубик, грани которого окрашены одним цветом, распилили на 64 одинаковых кубика. Затем все кубики перемешали и наугад берут один кубик. Найдите вероятность того, что у кубика:

а) **(УЧА)** точно две грани окрашены;

б) **(ТЭП)** три грани окрашены;

в) **(78Т)** четыре грани окрашены.

5.17. В корзине 6 белых грибов и 5 подосиновиков. Наугад без возврата вынимают по одному грибу. Найдите вероятность:

а) **(НАН)** что первым будет белый гриб, вторым и третьим — подосиновики;

б) **(ОЛУ)** первые 4 будут белые грибы;

в) **(ВИР)** первые 4 гриба будут подосиновики.

5.18. В ящике 4 одноамперных диода, 6 — двухамперных и 5 — пятиамперных. Наугад берут 3 диода. Найдите вероятность того, что возьмут:

а) **(АЯЦ)** точно два из них одного типа;

б) **(ЮЛК)** все три диода одного типа;

в) **(ГЕН)** все диоды разных типов.

5.19. На 25 экзаменационных вопросов студент знает ответы, а на 5 — не знает. На экзамене студент получил 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент:

а) **(260)** на все три вопроса знает ответы;

б) **(ИЛЬ)** на два вопроса знает ответы, а на один — не знает;

в) **(Ю44)** не знает ответов ни на один вопрос.

5.20. Три пассажира покупают билеты на один и тот же поезд, в котором 10 пассажирских вагонов. Каждый пассажир выбирает вагон по своему усмотрению, ни с кем не советуясь. Найдите вероятность того, что пассажиры:

а) **(932)** только двое из трех окажутся в одном вагоне;

б) **(ЕВА)** все окажутся в одном вагоне;

в) **(ВАП)** все окажутся в разных вагонах.

5.21. В тарелке 3 конфеты «Весна», 4 конфеты «Пилот» и 5 конфет «Снежинка». Наугад берут 4 конфеты. Найдите вероятность того, что среди них:

а) **(ЮК8)** точно две конфеты «Пилот»;

б) **(25И)** хотя бы одна конфета «Пилот»;

в) **(2ЕЕ)** нет конфет «Весна».

5.22. В пакет в случайном порядке сложили 11 репродукций. Из них 6 репродукций с картин И.И. Шишкина, 3 — И.Е. Репина и 2 — А.А. Пластова. Из пакета наугад берут 5 репродукций. Найдите вероятность того, что среди них будут:

а) **(ХИТ)** две репродукции с картин И.И. Шишкина, две — И.Е. Репина и одна А.А. Пластова;

б) **(ННН)** точно две репродукции с картин И.И. Шишкина;

в) **(ОТА)** хотя бы одна репродукция с картин А.А. Пластова.

5.23. Два раза подбрасывают игральную кость. Пусть a — число, выпавшее при первом броске, b — при втором. Найдите вероятность варианта:

а) **(КВС)** число $|a-b|$ делится на 3 без остатка;

б) **(ЛЕП)** $|a-b|$ — простое число;

в) **(ДРУ)** произведение $a \cdot b$ является простым числом.

5.24. На 9 карточках записаны цифры: 1, 2, 3, ..., 9, по одной цифре на каждой карточке. Наугад извлекли одну карточку, запомнили ее цифру, а карточку вернули в пачку и все карточки перемешали. Наугад вынули еще одну карточку. Найдите вероятность вариантов:

а) **(ГУЛ)** цифры на извлекавшихся карточках не совпадают;

б) **(ДНЯ)** цифры на извлекавшихся карточках в сумме равны 15;

в) **(ПРЕ)** число на первой карточке меньше, чем на второй.

5.25. В ящике 3 шестигранных гайки, 6 квадратных и 4 круглых. Из ящика наугад берут 6 гаек. Найдите вероятность того, что среди выбранных:

а) **(АУШ)** не будет квадратных гаек;

б) **(ШЛО)** не будет ни шестигранных, ни круглых гаек;

в) **(НЫР)** будет хотя бы одна шестигранная гайка и хотя бы одна круглая.

5.26. В коробке 3 синих карандаша, 3 зеленых и 5 красных. Наугад берут 4 карандаша. Найдите вероятность:

а) **(КАМ)** что все они будут не синие;

б) **(НАФ)** точно два из них будут красные;

в) **(РЕП)** хотя бы два карандаша будут красные.

5.27. В наборе 12 шариковых ручек. Из них 7 ручек с синей пастой и 5 — с зеленой. Поочередно наугад берут 5 ручек. Найдите вероятность:

а) **(ШНХ)** что цвета ручек будут чередоваться, начиная с зеленой;

б) **(УЗЫ)** все пять ручек будут одного цвета;

в) **(МИШ)** сначала будут взяты две синие ручки, а затем — три зеленые.

5.28. В пакете 7 ножовочных полотен с мелкой насечкой и 5 с крупной. Наугад из пакета вынули 5 полотен. Найдите вероятность того, что среди вынутых полотен:

а) **(АЛЕ)** с мелкой насечкой будет больше, чем с крупной;

б) **(МЕВ)** с крупной насечкой будет больше, чем с мелкой;

в) **(ППО)** хотя бы одно будет с мелкой насечкой и хотя бы одно — с крупной.

5.29. Десять различных учебников, среди которых один учебник по химии, один — по физике и один — по истории, в случайном порядке поставили на полку. Найдите вероятность:

а) **(УЛУ)** что учебники по физике и химии окажутся рядом;

б) **(903)** рядом будут стоять три учебника: слева — учебник по химии, справа от него — по физике, еще правее — по истории;

в) **(ГИН)** учебники по физике, химии и истории нигде не будут стоять рядом.

5.30. В урне 7 белых шаров, 1 синий, 1 красный и 1 зеленый — всего 10 шаров. Все их наугад вынули из урны и расположили в один ряд. Найдите вероятность:

а) **(129)** что слева окажется синий шар, справа — зеленый;

б) **(Е22)** все небелые шары расположатся слева;

в) **(ОЗО)** первые три шара и последние три будут белыми.

5.31. Из разрезной азбуки взяли 3 карточки с буквой А и 7 карточек с цифрой 6. Из них путем случайного выбора составили последовательность из 6 карточек. Найдите вероятность того, что в последовательности:

а) **(РУЛ)** будут 3 буквы и 3 цифры;

б) **(7ИВ)** букв будет больше, чем цифр;

в) **(214)** не будет букв.

5.32. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал собранное из букв разрезной азбуки слово «барабан». После этого из тех же букв он стал составлять свои слова, рассыпая и составляя новые. Найдите вероятность:

а) **(УЗА)** что взяв 3 карточки, он получит слово, в котором все буквы гласные;

б) **(ТРР)** взяв 4 карточки, он получит слово, где две гласные буквы и две согласные;

в) **(ИМП)** взяв все карточки, он снова наберет слово «барабан».

5.33. В коробку в беспорядке сложили 6 пятиамперных тиристоров и 4 двухамперных. Случайно вынимают 5 тиристоров. Найдите вероятность:

а) **(ШКЕ)** что все извлеченные тиристоры будут пятиамперными;

б) **(32Ц)** среди извлеченных хотя бы один будет пятиамперный тиристор;

в) **(ШРШ)** будет извлечено четное число двухамперных тиристоров.

5.34. В инструментальный ящик в беспорядке сложили тупые и острые сверла: 5 тупых и 8 острых. Наугад берут 5 сверл. Найдите вероятность:

а) **(ШУМ)** что тупых сверл среди взятых будет больше, чем острых;

б) **(ПЭР)** острых сверл будет больше, чем тупых;

в) **(В22)** в ящике останутся 3 тупых сверла и 5 острых.

5.35. Два человека наугад записали по одному двоичному числу из диапазона 0000–1111 (то есть от 0 до 15 в десятичном представлении) включительно. Затем одно число приставили к другому. Получилось восьмизначное двоичное число. Найдите вероятность:

а) **(Л27)** что в восьмизначном числе будут 4 единицы и 4 нуля;

б) **(НЕ6)** восьмизначное число будет симметричным, то есть одинаково читаться как слева направо, так и справа налево;

в) **(ЭНС)** записанные четырехзначные числа будут равными.

5.36. Дети ходили за грибами и нашли 3 белых гриба, 6 подосиновиков и 4 подберезовика. Все грибы в беспорядке сложили в одну корзину. Дома из корзины наугад извлекли 6 грибов. Найдите вероятность:

а) **(КОЖ)** что среди извлеченных не будет подосиновиков;

б) **(ЛОЙ)** среди извлеченных не будет белых грибов, а подосиновиков будет больше, чем подберезовиков;

в) **(АОИ)** среди извлеченных не будет белых грибов, а подосиновиков будет меньше, чем подберезовиков.

5.37. Шурупы бывают с полной нарезкой (условимся их называть П-шурупами) и неполной (Н-шурупы). В ящик в случайном порядке положили 5 П-шурупов и 8 Н-шурупов. Затем наугад берут из ящика 4 шурупа. Найдите вероятность:

а) **(ПС1)** что половина из них будут П-шурупы и половина — Н-шурупы;

б) **(Х86)** П-шурупов будет больше, чем Н-шурупов;

в) **(УМ7)** в ящике останется П-шурупов больше, чем Н-шурупов.

5.38. Приготовили 7 карточек. На каждой из них записали ее порядковый номер. Все карточки перемешали и по одной наугад вынимают, записывают их номера и каждый раз карточку возвращают в пачку и перемешивают. Карточки извлекают 5 раз. В результате получится последовательность 5 цифр, в которой могут быть любые повторы. Найдите вероятность того, что в последовательности:

а) **(БЭН)** первые три цифры возрастают;

б) **(МЭТ)** нет ни одной цифры, являющейся простым числом;

в) **(79Я)** первая и последняя цифры не равны.

5.39. Из колоды карт, насчитывающей 36 листов, наугад вынимают 4 карты. Найдите вероятность того, что среди вынутых карт:

а) **(ОДА)** имеется только один туз;

б) **(83Д)** имеется пиковый туз (других тузов нет);

в) **(ПАЖ)** имеются два короля, один валет и один туз.

5.40. Набор, состоящий из 4 зеленых, 3 красных и 5 синих карандашей, рассыпали, после чего наугад берут 4 карандаша. Найдите вероятность того, что среди них:

а) **(КИМ)** будут карандаши всех трех цветов;

б) **(ГРЯ)** будут точно два красных карандаша;

в) **(ББФ)** синих карандашей не будет.

5.41. Ребенку подарили пачку листов цветного картона. В пачке 7 красных листов и 5 зеленых. Ребенок наугад вынул из пачки один за другим 6 листов и расположил их в один ряд. Найдите вероятность того, что в ряду:

а) **(АИЧ)** первые три листа будут красные, остальные — зеленые;

б) **(АОЗ)** первый и второй листы будут красные;

в) **(НЯШ)** три листа будут красные и три — зеленые (в любом порядке).

5.42. В ящике 11 теннисных мячей. Среди них 6 новых и 5 старых (побывавших в игре). Наугад берут 7 мячей. Найдите вероятность:

а) **(УШТ)** что в ящике останутся только новые мячи;

б) **(БУН)** новых мячей среди выбранных будет больше, чем старых;

в) **(5ЛЛ)** в ящике новых мячей останется больше, чем старых.

5.43. В наборе 12 декоративных гаек. Из них 6 круглых и 6 шестигранных. Наугад берут 6 гаек. Найдите вероятность того, что среди выбранных:

а) **(КРР)** точно две гайки шестигранные;

б) **(ЭФА)** шестигранных гаек больше, чем круглых;

в) **(МТХ)** содержатся хотя бы три круглые гайки.

5.44. Наугад записано четырехзначное шестеричное число (с нуля числа не начинаются). Найдите вероятность того, что в числе:

а) **(АФО)** первая и последняя цифры совпадают;

б) **(УЙД)** вторая и третья цифры четные, остальные — любые;

в) **(873)** первая и последняя цифры четные, а вторая и третья — нечетные.

5.45. Некто произвольно записывает шестизначное десятичное число, которое может начинаться с нуля. Найдите вероятность того, что в записанном числе:

а) **(ОСШ)** точно три цифры будут одинаковыми, а все остальные — разными;

б) **(ОРА)** цифры идут в порядке возрастания;

в) **(КИЛ)** не будет четных цифр.

5.46. Монету подбрасывают 12 раз и каждый раз записывают единицу, если монета падает гербом вверх. Если же монета падает гербом вниз, то записывают нуль. В результате получится 12-значное двоичное число. Найдите вероятность варианта:

а) **(2НВ)** число делится без остатка на 32;

б) **(Ш51)** единиц в числе столько же, сколько и нулей;

в) **(Т54)** единиц в числе на 2 больше, чем нулей.

5.47. Четырем выпускникам вуза предлагают работу 5 заводов. Обозначим эти заводы буквами A, B, C, D, E. Каждый из выпускников выбирает завод по своему усмотрению, ни с кем не советуясь. Найдите вероятность:

а) **(2ЦК)** что никто не выберет завод E;

б) **(КАМ)** точно два завода не получат выпускников;

в) **(Ш95)** на завод B распределятся точно три выпускника из четырех.

5.48. В пакете лежат семена фасоли — 6 шт., и семена бобов — 5 шт. Наугад берут 5 семян. Найдите вероятность:

а) **(НАП)** что среди выбранных будут и бобы, и фасоль;

б) **(МЕГ)** в пакете останется поровну бобов и фасоли;

в) **(ЧЕР)** бобов будет взято больше, чем фасоли.

5.49. На кухонном столе в беспорядке лежат 5 серебряных ложек и 4 золотых. Наугад последовательно выбирают 5 ложек без возврата и записывают букву З, если ложка золотая, и С, если серебряная. В результате получится пятибуквенная последовательность букв З и С. Найдите вероятность того, что в последовательности:

а) **(МИХ)** буквы чередуются;

б) **(ЫЛЕ)** буквы С нигде не стоят рядом;

в) **(КАС)** букв С больше, чем букв З.

5.50. В пакет в беспорядке сложили 5 черно-белых фотоснимков и 7 цветных. Найдите вероятность того, что если наугад:

а) **(ГРУ)** вынуть 4 снимка, то все они будут цветные;

б) **(ТКЛ)** вынуть 5 снимков, то цветными из них будут только 2;

в) **(РКА)** вынуть 6 снимков, то среди них будут и цветные, и черно-белые.

5.51. Стрелок производит 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок:

а) **(ЦПУ)** два раза попадет в мишень, при этом промахнется при первом и последнем выстрелах;

б) **(32С)** попадет в мишень точно три раза;

в) **(Н35)** только один раз попадет в мишень.

5.52. В коробке 12 разноцветных кубиков: 4 фиолетовых, 5 красных и 3 желтых. Из коробки наугад вынимают 2 кубика. Найдите вероятность:

а) **(АЕР)** что извлеченные кубики будут разного цвета;

б) **(26Ф)** кубики будут одного цвета;

в) **(ВКК)** среди взятых не будет желтых кубиков.

5.53. В коробке 4 алюминиевых заклепки, 5 стальных и 4 медных. Наугад вынимают 3 заклепки по одной. Найдите вероятность:

а) **(ОША)** что первой будет алюминиевая заклепка, второй — медная, третьей — стальная;

б) **(ИИЙ)** первой будет не стальная заклепка, второй — не медная;

в) **(599)** среди них будет и медная заклепка, и стальная, и алюминиевая.

5.54. В корзине 4 груши и 9 яблок. Наугад берут 6 плодов. Найдите вероятность:

а) **(ВЯТ)** что среди взятых будут 3 груши и 3 яблока;

б) **(АЕЖ)** в корзине не останется ни одной груши;

в) **(Л88)** яблок будет взято больше, чем груш.

5.55. Абонент забыл 4 последние цифры телефонного номера и начал набирать его, произвольно выбирая цифры. Найдите вероятность:

а) **(Р23)** что два раза он наберет цифру 8 (остальные любые, но не восьмерки);

б) **(ХНЫ)** два раза наберет цифру 8, один раз — цифру 7 и один раз другую, но не 7 и не 8;

в) **(ЗЗН)** ни разу не наберет четную цифру.

5.56. Из 10 студентов, сдавших экзамен, 3 отличника, 4 хорошиста и 3 троечника. Из них произвольно выбрали 5 человек. Найдите вероятность того, что среди них:

а) **(ЙОГ)** будет хотя бы один отличник;

б) **(ПАР)** будет хотя бы один хорошист;

в) **(ЕЕЛ)** не окажется ни одного троечника.

Контрольная работа № 2

Задача 1

Найдите все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 6 графа. В фигурных скобках приведены номера вершин, соединенных ребрами. Для самоконтроля укажите число простых цепей, содержащих два ребра; три ребра; четыре ребра; пять ребер.

1.1 (СУХ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

1.2 (ОВН). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.3 (АСК). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

1.4 (ЕЩЁ). {{1,2}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

1.5 (ИФО). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.6 (КАН). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

1.7 (КАС). {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

1.8 (ИЕЛ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.9 (ГЛУ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.10 (КУБ). {{1,2}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}}.

1.11 (ПВО). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.12 (ОСЭ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.13 (АСС). {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.14 (ИЭХ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.15 (ДАК).{{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.16 (ВАП).{{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.17 (НАЛ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.18 (ИЯС). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

1.19 (ХВТ). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,6}, {5,6}}.

1.20 (ЖУЗ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,5}, {2,6}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

Задача 2

Найдите минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевых функций, представленных в СДНФ в виде наборов номеров минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число простых импликант, содержащих точно по две буквы. Например, пусть в результате минимизации получилось выражение

$$f = AB + AC + BCD + AD.$$

В этом выражении четыре импликанты, девять вхождений аргументов и три простые импликанты, каждая из которых содержит две буквы. Следовательно, при самоконтроле ответом является последовательность вида 4 9 3.

2.1 (ЕУР). $f = (1,5,6,7,11,12,13,15)$.
2.2 (НОО). $f = (1,3,5,6,7,8,9,10,11,13,15)$.
2.3 (ЕЕТ). $f = (0,1,3,4,5,10,11,13,14,15)$.
2.4 (Э63). $f = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,15)$.
2.5 (ОКО). $f = (0,2,3,5,6,7,9,10,11,12,14,15)$.
2.6 (93Ш). $f = (0,1,3,4,5,6,7,8,10,12,14)$.
2.7 (ЦОН). $f = (0,1,2,3,6,7,8,9,10,11,12,15)$.
2.8 (С56). $f = (1,3,4,5,6,7,9,10,11,13,14)$.
2.9 (ЦНБ). $f = (1,3,4,5,9,10,11,12,13,15)$.
2.10 (ОДД). $f = (1,2,4,5,6,7,8,9,11,13,15)$.
2.11 (Н20). $f = (0,1,3,4,5,7,8,10,11,12,14,15)$.
2.12 (5ТА). $f = (0,4,5,6,7,8,9,11, 12,13,15)$.

2.13 (Т36). $f = (1,3,6,7,8,10,11,13,15)$.
2.14 (Л5И). $f = (2,4,5,7,9,11,13,14,15)$.
2.15 (ОЧУ). $f = (3,4,5,7, 8,9,10,11,12)$.
2.16 (396). $f = (0,1,3,4,5,9,10,11,15)$.
2.17 (75У). $f = (3,5,6,7,9,10,13,15)$.
2.18 (Р93). $f = (0,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$.
2.19 (РЕГ). $f = (0,2,3,5,6,7,10,11,12)$.
2.20 (5ЯН). $f = (0,3,6,7,9,10,11,13,15)$.

Задача 3

Найдите минимальные ДНФ инверсий булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант и число вхождений аргументов.
3.1 (КРА). $f = (6,7,10,15)$.
3.2 (864). $f = (0,1,6,10,13,14)$.
3.3 (ЦОБ). $f = (0,1,4,5,8,9,10,12,15)$.
3.4 (ИВК). $f = (0,4,5,6,8,9,10,15)$.
3.5 (ЧТ5). $f = (3, 15)$.
3.6 (120). $f = (2,5,6,9,10,11,13,14,15)$.
3.7 (ТАЛ). $f = (0,2,4,8,9,11,12,14)$.
3.8 (МЯУ). $f = (2,5,6,8,9,14)$.
3.9 (БЕЗ). $f = (0,1,4,5,7,8,9,10,11,12,14,15)$.
3.10 (ЭВА). $f = (0,1,2,3,4,6,9,11,12,14)$.
3.11 (КОВ). $f = (0,6,7,8,10,15)$.
3.12 (НИР). $f = (0,1,2,4,5,6,8,9,10)$.
3.13 (9МИ). $f = (0,4,7,8,11,12,15)$.
3.14 (ФОМ). $f = (4,5,8,9,12)$.
3.15 (Э26). $f = (1,2,3,5,6,10,13,14)$.
3.16 (Я79). $f = (1,3,4,7,8,12)$.
3.17 (ЦОХ). $f = (1,3,7,11,13,15)$.
3.18 (470). $f = (5,6,8,10,11,13)$.
3.19 (Ц20). $f = (0,1,4)$.
3.20 (ПД7). $f = (0,1,8,10,14,15)$.

Задача 4

Найдите минимальные КНФ функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число знаков дизъюнкции. Например, если минимальная КНФ имеет вид $f = (A + D)(A + C)(D + C + D)$, то ответом при самоконтроле является последовательность вида 74, так как полученное выражение содержит семь вхождений аргументов и четыре знака дизъюнкции.
4.1 (УФФ). $f = (0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14)$.

4.2 (736). $f = (0, 1, 4, 8, 9, 11, 12, 14)$.
4.3 (ББЛ). $f = (5, 7, 8, 10, 12, 14)$.
4.4 (232). $f = (3, 6, 7, 8, 12)$.
4.5 (534). $f = (1, 2, 3, 9, 10, 13, 14)$.
4.6 (В53). $f = (0, 1, 2, 6, 8, 10, 11, 12)$.
4.7 (ОРК). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13)$.
4.8 (УНН). $f = (1, 2, 6, 10, 11, 14)$.
4.9 (РЕД). $f = (2, 6, 9, 10, 11, 13, 14)$.
4.10 (ДАФ). $f = (0, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$.
4.11 (ФУМ). $f = (1, 5, 6, 7, 9, 10)$.
4.12 (855). $f = (0, 1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15)$.
4.13 (АХС). $f = (1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 15)$.
4.14 (АРТ). $f = (0, 3, 4, 8, 11, 12, 14)$.
4.15 (СПИ). $f = (1, 5, 8, 11, 13, 14, 15)$.
4.16 (ААЗ). $f = (0, 4, 7, 8, 11, 12)$.
4.17 (550). $f = (0, 1, 2, 8, 9, 10, 12, 14)$.
4.18 (232). $f = (1, 2, 6, 7, 9, 10)$.
4.19 (УА1). $f = (1, 4, 8, 10, 11, 12, 14)$.
4.20 (ТОН). $f = (0, 4, 6, 10, 12, 13, 15)$.

Задача 5

Найдите минимальные ДНФ булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов (они перечислены в круглых скобках). В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите десятичные номера наборов, на которых Вы доопределите функцию единицами, и число вхождений аргументов минимальной ДНФ.

5.1 (ТАВ). $f = (4, 6, 10, 11)$, [0, 2, 7, 13, 15].
5.2 (ШИФ). $f = (3, 5, 7, 11)$, [2, 4, 6, 10, 14].
5.3 (Т15). $f = (3, 4, 5, 10, 11, 12)$, [0, 2, 9, 13].
5.4 (62Т). $f = (1, 6, 7, 9, 11)$, [0, 5, 10, 13, 15].
5.5 (Х14). $f = (0, 7, 11, 15)$, [1, 2, 4, 8, 12].
5.6 (351). $f = (1, 3, 12, 14)$, [5, 9, 10, 11, 15].
5.7 (Х64). $f = (5, 6, 7, 15)$, [3, 10, 11, 13, 14].
5.8 (ЯРК). $f = (1, 9, 14, 15)$, [3, 5, 6, 7].
5.9 (479). $f = (2, 13, 15)$, [5, 6, 7, 8, 9, 12].
5.10 (СТМ). $f = (1, 2, 6, 7, 14)$, [3, 5, 10, 11, 13, 15].
5.11 (АЗУ). $f = (4, 7, 11, 14)$, [1, 3, 9, 10, 15].
5.12 (К95). $f = (1, 4, 7, 10, 15)$, [5, 13].
5.13 (9МТ). $f = (7, 9, 11, 14, 15)$, [0, 3, 4, 5].
5.14 (БЦК). $f = (7, 10, 14, 15)$, [2, 3, 5, 6, 13].
5.15 (ХАО). $f = (3, 6, 7, 13, 15)$, [2, 5, 11].
5.16 (ШЕИ). $f = (5, 10, 11, 13, 15)$, [3, 6, 7].

5.17 (РЕ1). $f = (3, 4, 9, 11)$, $[5, 7, 10, 15]$.
5.18 (67Р). $f = (3, 7, 12, 15)$, $[0, 4, 5, 6, 9]$.
5.19 (ПХВ). $f = (0, 4, 15)$, $[1, 2, 3, 7, 8, 12]$.
5.20 (ТАЮ). $f = (11, 13, 14, 15)$, $[3, 5, 7, 10]$.

Задача 6

Найдите минимальные конъюнктивные нормальные формы булевых функций, заданных наборами минтермов. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов минимальной КНФ и число знаков дизъюнкции.

6.1 (К78). $f = (0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$, $[1, 2, 7, 15]$.
6.2 (ГТО). $f = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13)$, $[14, 15]$.
6.3 (ОТС). $f = (1, 2, 6, 9, 10, 13, 14, 15)$, $[7, 11, 12]$.
6.4 (УРМ). $f = (2, 5, 8, 13, 14)$, $[6, 7, 12, 15]$.
6.5 (РТТ). $f = (2, 4, 8, 12)$, $[3, 5, 6, 14]$.
6.6 (2ТО). $f = (0, 4, 9, 10, 12, 14)$, $[3, 7, 8, 15]$.
6.7 (213). $f = (1, 2, 8, 10, 12, 15)$, $[0, 4, 6, 9, 11]$.
6.8 (ИЛО). $f = (3, 7, 8, 9, 11, 13)$, $[0, 1, 5, 12, 15]$.
6.9 (ТЕХ). $f = (6, 8, 10, 12, 13)$, $[0, 1, 2, 5, 7]$.
6.10 (ФСУ). $f = (1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 12)$, $[3, 5, 11, 14, 15]$.
6.11 (ТБШ). $f = (2, 4, 10, 12, 13)$, $[0, 3, 11, 14, 15]$.
6.12 (ФУМ). $f = (2, 3, 4, 9, 10, 12)$, $[1, 7, 13, 15]$.
6.13 (АТ7). $f = (6, 9, 10, 11, 13, 14)$, $[2, 3, 5, 7, 15]$.
6.14 (Р38). $f = (1, 2, 6, 9, 10, 13, 14)$, $[0, 3, 12, 15]$.
6.15 (ЗЫШ). $f = (3, 7, 9, 13)$, $[1, 2, 11, 15]$.
6.16 (273). $f = (2, 7, 9, 13, 14)$, $[1, 4, 5, 6, 8, 10]$.
6.17 (УДЭ). $f = (0, 2, 4, 8, 14)$, $[3, 5, 7, 13, 15]$.
6.18 (У51). $f = (3, 6, 9, 13)$, $[5, 7, 15]$.
6.19 (8ЯР). $f = (0, 4, 10, 12, 15)$, $[5, 7, 14]$.
6.20 (АЕТ). $f = (0, 2, 12, 14)$, $[1, 5, 7, 9, 10, 13]$.

Задача 7

Найдите определитель произведения матриц:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ -3 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

7.1 (ИВН). AB.
7.2 (ВММ). BC.
7.3 (35Д). CD.
7.4 (БВЦ). DE.
7.5 (ЙКК). EF.
7.6 (ВЕС). FK.
7.7 (УНУ). KL.
7.8 (ОВГ). LM.
7.9 (52Т). BE.
7.10 (ХЫН). AE.
7.11 (ЗШИ). CE.
7.12 (ЛАН). DF.
7.13 (ААП). EK.
7.14 (ЖТД). FL.
7.15 (ЛИЛ). KM.
7.16 (КВМ). LN.
7.17 (БШВ). CM.
7.18 (ЛТХ). DN.
7.19 (ШИК). AC.
7.20 (ШШШ). DM.
7.21 (ШШШ). EN.
7.22 (ШШШ). BK.
7.23 (ШШШ). CN.
7.24 (ШШШ). MN.

Задача 8

Решите системы линейных уравнений методом Крамера. Ответ представьте в виде:

$$x = \ldots;\quad y = \ldots;\quad z = \ldots$$

При самоконтроле укажите числа, которые будут подставлены вместо точек.

8.1 (29С). $3x + 2y - 4z = -1;\ 5x - 3y + 3z = 20;\ 4x + 4y - 3z = -14.$
8.2 (СКК). $3x - 6y + 2z = -21;\ 2x + 3y - 4z = -2;\ 3x - 3y + 2z = -9.$
8.3 (ТТН). $3x - 2y - 4z = -14;\ x - 3y + 3z = 26;\ 2x + 2y - 3z = -18.$
8.4 (39Л). $4x - 5y - 3z = -30;\ x - 3y + 7z = 32;\ 8x - 3y - z = -2.$
8.5 (ИИИ). $2x + y - 3z = -8;\ x + 2y - 5z = -5;\ 3x + 2y - 6z = -13.$
8.6 (ИХХ). $3x + 2y - 7z = 14;\ 4x + 3y - 2z = 5;\ 5x + 2y - 6z = 8.$
8.7 (КВЕ). $2x + 2y - 3z = 0;\ x + 3y + 4z = -9;\ 3x + 4y - 5z = 2.$
8.8 (ЖКТ). $-2x - y - 2z = 9;\ -3x + 2y - 3z = 24;\ x + 3y + 4z = -9.$
8.9 (ЕНУ). $6x - 3y - z = 2;\ -5x + 4y - 2z = -23;\ 4x + 4y + 3z = -21.$
8.10 (75В). $-3x - 2y - 5z = 5;\ 2x - 4y + 4z = -22;\ -2x + 3y - 2z = 11.$
8.11 (ИВВ). $-3x + 3y + 2z = 11;\ -4x + 2y + 4z = 6;\ -6x + 3y - 5z = 31.$
8.12 (КШК). $3x + 3y + 2z = 4;\ -4x - 4y + 2z = -24;\ 2x + 5y - 4z = 30.$
8.13 (УРП). $6x - 5y - 4z = 4;\ 5x + 3y - 5z = -16;\ -4x + 2y + 2z = -2.$
8.14 (ИЛО). $-3x + 2y + 3z = -1;\ -3x - 3y - 4z = -19;\ 4x - 2y - 2z = 8.$
8.15 (МИС). $-2x - 5y + 2z = -9;\ 2x - 6y + 3z = 10;\ 3x - 2y + 5z = 7.$
8.16 (ТЕН). $2x + 3y - 3z = 3;\ 4x + 4y + 2z = 2;\ -2x + 5y - 5z = -11.$
8.17 (МНН). $-2x - 3y + 2z = -5;\ -4x - y + 3z = 6;\ -3x - 2y + z = 2.$
8.18 (ШКИ). $5x + 2y - 4z = -2;\ 2x + 3y - 5z = 9;\ 2x + 2y - 3z = 5.$
8.19 (МВР). $-2x + 3y + 2z = -17;\ 3x + 4y + 2z = 5;\ -2x + 5y - 3z = -28.$
8.20 (КОФ). $3x + 2y + 4z = -6;\ -2x + 3y - 5z = -5;\ 3x - 2y + 3z = -4.$
8.21 (РЯН). $2x + 3y + 6z = 0;\ -3x - 4y - 7z = -3;\ 6x - 2y + 5z = 5.$
8.22 (НУМ). $3x + 2y + 3z = 10;\ -2x + y - 2z = -2;\ 2x + 3y + 4z = 4.$
8.23 (ДИИ). $3x + 5y - 3z = -12;\ -2x + 2y + 3z = -4;\ -3x + 3y + 4z = -8.$
8.24 (ИЦХ). $-4x + 4y + 3z = 0;\ -3x + 2y - 2z = -16;\ -2x - 3y - 3z = -13.$

Задача 9

Найдите координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями y_1 и y_2. Ответ представьте в виде:

$$x = ...; \quad y = ...$$

При самоконтроле укажите числа, которые будут поставлены вместо точек. Дробные числа вводите в виде обыкновенной несократимой дроби без выделения целой части, например: $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{14}{5}$ и т.д.

9.1 (ЯРС). $y_1 = -2x + 4$; $y_2 = -3x + 4$.
9.2 (ЛАТ). $y_1 = 3x - 5$; $y_2 = 2x - 4$.
9.3 (ЭЙР). $y_1 = -6x + 4$; $y_2 = -3x + 4$.
9.4 (РПМ). $y_1 = -5x + 3$; $y_2 = 7x - 5$.
9.5 (219). $y_1 = 2x + 4$; $y_2 = -3x + 2$.
9.6 (ИЕС). $y_1 = 3x + 2$; $y_2 = -8x = 4$.
9.7 (ТЗУ). $y_1 = -3x + 6$; $y_2 = 5x - 1$.
9.8 (576). $y_1 = -3x + 5$; $y_2 = 6x + 4$.
9.9 (ЛХТ). $y_1 = 3x + 4$; $y_2 = 2x + 3$.
9.10 (ЛЭУ). $y_1 = 3x + 1$; $y_2 = -3x + 5$.
9.11 (ВВВ). $y_1 = -6x - 4$; $y_2 = 3x - 4$.
9.12 (ХХР). $y_1 = 5x - 4$; $y_2 = -7x + 4$.
9.13 (ЕЛЕ). $y_1 = 4x + 4$; $y_2 = -3x + 7$.
9.14 (63Д). $y_1 = -2x - 4$; $y_2 = -8x + 1$.
9.15 (ИЕИ). $y_1 = -3x + 4$; $y_2 = 2x - 4$.
9.16 (ЕНШ). $y_1 = -7x - 4$; $y_2 = -3x - 3$.
9.17 (ТКФ). $y_1 = 6x + 4$; $y_2 = 4x - 4$.
9.18 (ОДО). $y_1 = 6x - 4$; $y_2 = -5x + 2$.
9.19 (УМБ). $y_1 = -7x + 4$; $y_2 = 3x - 4$.
9.20 (МВТ). $y_1 = 3x + 4$; $y_2 = 6x - 1$.

Задача 10

Найдите уравнение прямой, проходящей через точку (5; 7) параллельно заданной прямой. Ответ представьте в виде

$$y = ...,$$

где вместо точек записывается правая часть искомого уравнения прямой. При самоконтроле набирайте только правую часть. Например, если $y = -2x + 9$, то набираем: $-2x + 9$.

10.1 (77Р). $y = -2x + 4$.
10.2 (55В). $y = 3x - 5$.
10.3 (АЛО). $y = -6x + 4$.
10.4 (АРК). $y = -5x + 3$.
10.5 (ИЛИ). $y = 2x + 4$.
10.6 (БРИ). $y = 3x + 2$.
10.7 (632). $y = -3x + 6$.
10.8 (КЕД). $y = -3x + 5$.
10.9 (ПЕШ). $y = 8x + 4$.
10.10 (ЕКП). $y = 9x + 1$.

10.11 (СТС). $y = -6x - 4$.
10.12 (ЕМГ). $y = 5x - 4$.
10.13 (ДБН). $y = 4x + 4$.
10.14 (579). $y = -2x - 4$.
10.15 (ИНИ). $y = -3x + 4$.
10.16 (ЭХИ). $y = -7x - 4$.
10.17 (ХХЦ). $y = 6x + 4$.
10.18 (ВВС). $y = 6x - 4$.
10.19 (ФУЛ). $y = -7x + 4$.
10.20 (ЭДО). $y = x + 8$.

Задача 11

Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно заданной прямой. Ответ представьте в виде

$$y = \ldots,$$

где вместо точек записывается правая часть искомого уравнения прямой. При самоконтроле набирайте только правую часть. Например, если $y = -\frac{1}{2}x$, то набираем $-\frac{1}{2}x$, но не $-\frac{x}{2}$.

11.1 (ЖЛВ). $y = -2x + 4$.
11.2 (КМГ). $y = 3x - 5$.
11.3 (НЫФ). $y = -9x + 4$.
11.4 (БМЦ). $y = -5x + 3$.
11.5 (ЛШШ). $y = 2x + 4$.
11.6 (КНЛ). $y = 9x + 2$.
11.7 (НАН). $y = -8x + 6$.
11.8 (ДЕП). $y = -3x + 5$.
11.9 (75Т). $y = 8x + 4$.
11.10 (ЮНК). $y = 9x + 1$.
11.11 (ИКР). $y = -6x - 4$.
11.12 (ЛИД). $y = 5x - 4$.
11.13 (87Х). $y = 4x + 4$.
11.14 (ЯВИ). $y = -8x - 4$.
11.15 (23К). $y = -3x + 4$.
11.16 (КУМ). $y = -7x - 4$.
11.17 (ЛЭО). $y = 6x + 4$.
11.18 (ЯМБ). $y = 5x - 4$.
11.19 (М51). $y = -2x + 4$.
11.20 (ЛИМ). $y = 7x + 8$.

Список вопросов для экзамена

1. Теория множеств

1. Какой смысл вкладывается в термин «множество» по Г. Кантору?
2. Что такое пустое множество и как оно обозначается?
3. Что называется синглетоном?
4. Какие два способа задания множеств являются основными?
5. Какие множества называются равными?
6. Чем отличаются понятия «равенство множеств» и «эквивалентность множеств»?
7. Что называется кардинальным числом множества?
8. Что называется подмножеством заданного множества?
9. Что такое непустое множество?
10. Что называется булеаном множества?
11. Как найти все элементы булеана?
12. Какие множества называются универсальными?
13. Операции объединения, пересечения и дополнения множеств проиллюстрируйте при помощи диаграмм Эйлера — Венна.
14. В чем отличие операций разности множеств и симметрической разности множеств?
15. Сформулируйте теоремы поглощения, склеивания и де Моргана.
16. Чем отличается актуальная бесконечность от потенциальной?
17. В каких случаях бесконечные множества называются эквивалентными?
18. Что такое мощность множества?
19. Какие множества называются счетными?
20. Что называется несчетным множеством?
21. Сформулируйте теоремы о счетных множествах?
22. Что такое континуум?
23. Как формулируется гипотеза континуума?
24. Как доказать, что множества точек отрезков различной длины эквивалентны?
25. Что такое точная верхняя и точная нижняя границы числового множества?
26. Какие числа называют мнимыми?
27. Какие числа называют комплексными? Приведите пример.
28. Какие корни получаются в результате решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом?
29. Какие числа называют комплексно-сопряженными? Приведите пример.

30. В каких случаях комплексные числа считаются равными?

31. Поясните примерами операции сложения и вычитания комплексных чисел.

32. Поясните примером операцию умножения комплексных чисел.

33. Как найти частное комплексных чисел?

34. Как представляются комплексные числа геометрически?

35. Что такое модуль комплексного числа?

36. Что такое аргумент комплексного числа?

37. Поясните примерами запись комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

38. Поясните примером операцию возведения в степень комплексного числа.

2. Комбинаторика

39. Что такое факториал?

40. Сформулируйте правило произведения и правило суммы.

41. Запишите формулы для нахождения числа перестановок, размещений и сочетаний с повторениями и без повторений.

42. Как можно вывести формулу числа сочетаний с повторениями?

43. Как решаются задачи о прямоугольниках, о расписании, о числе точек пересечения?

44. В чем суть задачи о разбиении множества на подмножества?

3. Теория вероятностей

45. Какие события называются достоверными, невозможными, случайными? Приведите примеры.

46. Что называется элементарным событием? Полем событий?

47. Что называется произведением событий? Суммой событий?

48. Что называется отрицанием события?

49. Какие события называются совместными, несовместными, противоположными?

50. При каких условиях события образуют полную группу?

51. Какие события называются гипотезами?

52. Как определяется вероятность классическим способом? Геометрическим? Статистическим?

53. Что называется относительной частотой события?

54. Какие события называются зависимыми и какие — независимыми?

55. Как формулируются теоремы умножения для зависимых и независимых событий?

56. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.

57. Что такое условная вероятность?

58. Запишите формулу полной вероятности.

59. Запишите формулу Байеса. Какую вероятность находят при помощи этой формулы?

60. Вероятность каких событий находят при помощи схемы испытаний Бернулли? Запишите формулу этой вероятности.

61. Как определить наивероятнейшее число появления события в схеме Бернулли?

62. В каких случаях используются формулы Лапласа и Пуассона в теории вероятностей?

63. Что такое случайная величина?

64. Как задается случайная величина?

65. Что такое закон распределения случайной величины? Поясните на примере.

66. Что такое среднее значение случайной величины?

67. Что такое математическое ожидание случайной величины?

68. Что такое дисперсия и мода случайной величины?

4. Алгебра логики (булева алгебра)

69. Что такое высказывание?

70. Как определяется двоичная переменная?

71. Что такое дизъюнкция, конъюнкция, инверсия?

72. Перечислите аксиомы булевой алгебры для конъюнкции, дизъюнкции и инверсии.

73. Перечислите основные теоремы одной переменной.

74. Что такое дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ)?

75. Сформулируйте теоремы поглощения, склеивания, де Моргана.

76. Что такое булева функция?

77. Назовите способы задания булевой функции. Приведите примеры.

78. Что такое минтерм?

79. Что такое СДНФ?

80. В чем суть метода Квайна? Применение метода проиллюстрируйте примером.

81. Что такое импликанта булевой функции?

82. Что такое простая импликанта?

83. Что такое сокращенная, тупиковая и минимальная ДНФ?

84. Как найти СДНФ, если функция задана в виде булевой формулы?

85. Как найти СКНФ, сокращенную, тупиковую и минимальную КНФ на основе заданной СДНФ либо произвольной ДНФ?

86. Приведите пример нахождения минимальной КНФ.

87. Какие булевы функции называют неполностью определенными?

88. Как находятся минимальные ДНФ и минимальные КНФ булевых функций с учетом неопределенных состояний?

5. Теория графов

89. Что такое граф в общем случае?

90. Приведите примеры псевдографа и мультиграфа.

91. Как определить число подграфов? Надграфов? Частичных графов?

92. Что называется нуль-графом? Пустым графом?

93. Что такое смежность? Инцидентность?

94. Что такое степень вершины?

95. Какие вершины графа называются висячими?

96. Какие вершины называются четными? Нечетными?

97. Какие графы называются однородными? Полными?

98. Какие графы называют турнирами?

99. Выведите формулу для нахождения числа ребер однородного графа.

100. Выведите формулу для нахождения числа ребер полного графа.

101. Что такое дополнение графа? Приведите примеры.

102. Как построить матрицу смежности? Поясните примером.

103. Что называется маршрутом? Цепью? Циклом?

104. Что такое простая цепь? Простой цикл?

105. Что такое вершинное представление цепи?

106. Что называется длиной цепи?

107. Какие графы называются связными? Несвязными?

108. Какие графы называются многокомпонентными?

109. Что такое степень связности графа?

110. Какие графы называют эйлеровыми? Полуэйлеровыми?

111. Что такое уникурсальная линия? Как определить, есть ли в данном графе уникурсальная линия?

112. Какие графы называют гамильтоновыми?

113. Сформулируйте задачу о коммивояжере.

114. Какие графы называются двудольными? Приведите примеры.

115. Что такое полный двудольный граф? Приведите пример.

116. Приведите формулу для нахождения числа ребер в полном двудольном графе, содержащем n вершин.

117. Какой граф называется деревом?

118. Какие графы называют лесом?

119. Какое дерево называется остовом?

120. Что называется цикломатическим числом графа?

121. Что такое ориентированный граф?

122. Сколько существует полных орграфов? Приведите формулу.

123. Что называется основанием ориентированного графа?

124. Как определяется степень вершины ориентированного графа?

125. Что называется транспортной сетью?

6. Элементы линейной алгебры

126. Приведите пример числовой матрицы.

127. Что такое порядок матрицы?

128. Какие матрицы называются ступенчатыми, треугольными, квадратными?

129. Поясните на примерах понятия главной и побочной диагоналей матрицы.

130. Какие матрицы называются согласованными?

131. Поясните на примерах, как выполняются операции над матрицами: сложение, умножение на число, произведение.

132. Какая матрица называется единичной?

133. Что такое транспонированная матрица?

134. Поясните на примерах понятия четной и нечетной перестановок.

135. Что называется инверсией (беспорядком)?

136. Что называется определителем (детерминантом) матрицы?

137. Как найти определитель второго порядка, третьего порядка? Приведите примеры.

138. Перечислите свойства определителей.

139. В чем отличие минора от алгебраического дополнения? Поясните на примерах.

140. Что такое обратная матрица? Приведите пример.

141. Какая матрица называется присоединенной? Приведите пример.

142. Что называется n-мерным линейным пространством?

143. Что такое линейная комбинация векторов?

144. Какие системы векторов называются линейно независимыми и какие — линейно зависимыми?

145. Что такое ранг матрицы?

146. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

147. Перечислите виды систем линейных уравнений.

148. Что такое основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений?

149. Какие системы линейных уравнений называются совместными и какие — несовместными?

150. Какие системы линейных уравнений называются эквивалентными?

151. Сформулируйте теорему Кронекера — Капелли о совместности систем линейных уравнений.

152. Проиллюстрируйте на примерах решение системы линейных уравнений формулами Крамера и методом Гаусса.

153. Что называется векторной величиной?

154. Что называется геометрическим вектором?

155. На примере поясните, как найти модуль вектора.

156. Какие векторы называются коллинеарными и какие — компланарными?

157. Что такое базис линейного пространства?

158. Какая система координат называется аффинной?

159. Что такое радиус-вектор?

160. Что такое декартова система координат?

161. Что называется скалярным произведением векторов? Поясните на примере.

162. Что такое векторное и смешанное произведения векторов? Поясните на примерах.

7. Приложения линейной алгебры к аналитической геометрии

163. Сформулируйте определения уравнений кривой и поверхности относительно данной системы координат.

164. Перечислите способы задания кривых в пространстве.

165. Запишите параметрическое уравнение кривой в векторной форме.

166. Дайте определение окружности. Запишите ее уравнение.

167. Дайте определение параболы. Что такое фокус параболы? Запишите уравнение параболы.

168. Дайте определение сферы. Запишите ее уравнение.

169. Дайте определение цилиндрической поверхности. Запишите ее уравнение.

170. Дайте определение конической поверхности. Запишите ее уравнение.

171. Как получить поверхность вращения? Запишите уравнение поверхности вращения, если осью является одна из осей координат.

172. Запишите уравнение прямой на плоскости в канонической форме.

173. Запишите общее уравнение прямой на плоскости.

174. Запишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку.

175. Запишите все виды уравнений прямой в пространстве.

176. Дайте определение эллипса. Запишите его уравнение.

177. Дайте определение гиперболы. Запишите ее уравнение.

178. Перечислите классы поверхностей второго порядка.

179. Запишите уравнения цилиндрических и конических поверхностей второго порядка.

Библиографический список

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение / Л.Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1969. – 366 с.

3. Математика / Н.Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 351 с.

4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.

5. Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – М. : Наука, 1977. – 368 с.

6. Горбанева Г.В. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Г.В. Горбанева, Л.И. Магазинников, В.А. Трофименко. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1991. – 239 с. – ISBN 5-7511-0198-7.

7. Горбатов В.А. Основы дискретной математики / В.А. Горбатов. – М. : Высшая школа, 1986. – 311 с.

8. Грес П.В. Математика для гуманитариев / П.В. Грес. – М. : Юрайт, 2000. – 112 с. – ISBN 5-85294-091-7.

9. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – М. : Наука, 1977. – 80 с.

10. Зайцев И.Л. Элементы высшей математики / И.Л. Зайцев. – М. : Наука, 1974. – 416 с.

11. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа : учебник. Ч. 2 / М.И. Каченовский [и др.]. – М. : Наука, 1988. – 272 с.

12. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник / Н.И. Кондаков. – М. : Наука, 1975. – 720 с.

13. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 472 с.

14. Линдон Р. Заметки по логике / Р. Линдон. – М. : Мир, 1968. – 128 с.

15. Магазинников Л.И. Высшая математика 1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление / Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 1998. – 191 с. – ISBN 5-86889-027-2.

16. Магазинников Л.И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования / Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 1998. – 204 с.

17. Магазинников Л.И. Высшая математика 4. Теория вероятностей / Л.И. Магазинников. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2000. – 152 с. – ISBN 5-86889-042-6.

18. Магазинников Л.И. Курс лекций по теории вероятностей / Л.И. Магазинников. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1989. – 212 с.

19. Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2005. – 109 с. – ISBN 5-86889-258-5.

20. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики / Э.С. Маркович. – М. : Высшая школа, 1972. – 480 с.

21. Микиша А.М. Толковый математический словарь / А.М. Микиша, В.Б. Орлов. – М. : Русский язык, 1989. – 244 с.

22. Надеев А.И. Сборник задач по теории вероятностей / А.И. Надеев, А.С. Чумаков. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1982. – 134 с.

23. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

24. Оре О. Графы и их применение / О. Оре. – М. : Мир, 1965. – 174 с.

25. Рывкин А.А. Справочник по математике / А.А. Рывкин, А.З. Рывкин, Л.С. Хренов. – М. : Высшая школа, 1970. – 554 с.

26. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика / А.П. Савин. – М. : Педагогика, 1989. – 352 с.

27. Советский энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Сов. энциклопедия, 1985. – 1600 с.

28. Соснина Э.Г. Типовой расчет по линейной алгебре / Э.Г. Соснина. – Новосибирск : НЭТИ, 1990. – 32 с.

29. Фор Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. – М. : Мир, 1966. – 271 с.

30. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. – М. : Радио и связь, 1984. – 240 с.

31. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М. : Наука, 1987. – 240 с.

32. Шевелев Ю.П. Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч. 1 : Теория множеств. Булева алгебра / Ю.П. Шевелев. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2000. – 114 с. – ISBN 5-86889-063-9.

33. Шевелев Ю.П. Автоматизация самоконтроля в системе обучения СИМВОЛ / Ю.П. Шевелев. – Томск : Томск. гос. академия систем упр. и радиоэлектроники, 1996. – 111 с. – ISBN 5-86889-026-4.

Оглавление

Учебное издание

Магазинников Леонид Иосифович
Шевелев Юрий Павлович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ, ЭКОЛОГИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИКО-ЮРИДИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Редактор Л.И. Кирпиченко
Компьютерная верстка Е.Н. Ворониной

Подписано в печать 17.08.07. Формат 70x100/16.
Усл. печ. л. 21,13. Тираж 100. Заказ 1008.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.