Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика
Курс практических занятий
Семестр 2
Учебное пособие

для специальностей
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
09.03.01 « информатика и вычислительная техника»

Томск
ТУСУР
2018

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группах 447-1,2 и 437-1,2,3 весной 2018 года. Даны с подробным разбором задачи, которые решались на каждом практическим занятии. Пособие может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

Для удобства в пособии применяется сквозная нумерация задач. Материал за ту или иную дату можно определить по таблице для каждой группы отдельно. Задачи, которые были решены в классе со всеми 5-ю группами, нумеруются в общем списке, а домашние задачи Д1, Д2, ...

Оглавление по темам

<u>Неопределённый интеграл.</u>

Элементарные преобразования подынтегрального выражения

Задача 1. Вычислить $\int e^{5x}dx$.

Решение. Известно, что $(e^{5x})' = 5e^{5x}$. При дифференцровании функций вида $f(kx)$ происходило умножение на константу, а при интегрировании наоборот, деление. Чтобы понять, почему это так, постараемся сначала сформировать внутри интеграла готовую производную от этой экспоненты, для чего домножим и поделим на 5.

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int (e^{5x})'dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Ответ. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$.

Задача 2. Вычислить $\int \cos 3x dx$.

Решение. Замечая, что $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, преобразуем так:

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x dx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)'dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Ответ. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$.

Задача 3. Вычислить $\int \frac{1}{x+3}dx$.

Решение. Известна формула $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$. Если в знаменателе линейная функция вида $x+a$, то можно добавить константу под знаком дифференциала, от этого ничего не изменилось бы, ведь производная константы это 0. Итак, $\int \frac{1}{x+3}dx = \int \frac{1}{x+3}d(x+3)$.

Теперь интеграл имеет вид $\int \frac{1}{t}dt$ и конечно, равен $\ln|t| + C$.

Фактически применили замену $t = x + 3$. Сделав обратную замену, получаем ответ: $\ln|x+3| + C$.

Ответ. $\ln|x+3| + C$.

Задача 4. Вычислить $\int \frac{x}{x+2} dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, уже и в числителе есть переменная, то есть здесь неправильная дробь. Сначала нужно выделить целую часть дроби и отделить правильную дробь. В данном случае для этого достаточно прибавить и отнять 2 в числителе.

$$\int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx =$$

$= \int dx - 2\int \frac{1}{x+2} dx$ и теперь, когда разбили на сумму или разность табличных интегралов, получаем ответ: $x - 2\ln|x+2| + C$.

Ответ. $x - 2\ln|x+2| + C$.

Задача 5. Вычислить $\int \frac{x^2}{x+5} dx$.

Решение. В данном случае неправильная дробь, причём степень в числителе более высокая. Можно применить общий метод выделения целой части, то есть поделить числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 0x + 0 & x+5 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 + 5x} & x-5 \\ \quad -5x + 0 & \\ \quad \underline{-5x - 25} & \\ \qquad\quad 25 & \end{array}$$

Получили частное $x - 5$, остаток 25. Теперь можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{x^2}{x+5} dx = \int \left(x - 5 + \frac{25}{x+5} \right) dx = \int (x-5) dx + \int \frac{25}{x+5} dx .$$

Впрочем, можно и не делить столбиком, а просто отнять и прибавить 25, тогда $\int \frac{x^2}{x+5} dx = \int \frac{x^2 - 25 + 25}{x+5} dx = \int \left(\frac{(x+5)(x-5)}{x+5} + \frac{25}{x+5} \right) dx$ что тоже приводит к $\int \left(x - 5 + \frac{25}{x+5} \right) dx$.

Теперь, когда свели к сумме табличных интегралов, то с помощью уже ранее изученных действий получаем ответ:

Ответ. $\frac{x^2}{2} - 5x + 25 \ln|x+5| + C$.

Задача 6. Вычислить $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20} dx$.

Решение. Дискриминант знаменателя отрицательный, поэтому здесь невозможно сделать как в прошлой задаче, так как нет корней знаменателя и дробь невозможно свести к виду $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Но при D < 0 можно выделить полный квадрат:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 16} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 4^2} dx.$$

С помощью замены $t = x + 2$ сводится к интегралу:

$\int \frac{1}{t^2 + 4^2} dt = \frac{1}{4} arctg\left(\frac{t}{4} \right) + C$, и далее с помощью обратной замены получаем ответ.

Ответ. $\frac{1}{4} arctg\left(\frac{x+2}{4} \right) + C$.

Задача 7. Вычислить $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx$.

Решение. В предыдущей задаче было D<0, а в этой D=0.

Выделяя полный квадрат, получим $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$.

В этом случае сводится не к арктангенсу, а к степенной функции, потому что получается $\int \frac{1}{t^2}dx = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{x+2}+C$.

Ответ. $-\frac{1}{x+2}+C$.

Тригонометрические преобразования.
Кроме различных арифметических преобразований типа разложения многочленов или дробей, существуют задачи, в которых нужно выполнить тригонометрические преобразования подынтегральной функции.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой понижения степени, чтобы перейти от степеней тригонометрических функций к выражениям типа $\sin(kx)$ или $\cos(kx)$.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

Ответ. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Задача 9 (Э). Вычислить $\int \cos 2x \cos^2 x dx$.

Решение. Здесь можно было бы применить формулу для косинуса двойного угла, но это преобразование бы только увеличило степени. Поэтому в данном случае для удобнее применить формулу понижения степени ко второму множителю и не менять первый.

$$\int \cos 2x \cos^2 x dx = \int \cos 2x \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos^2 2x dx.$$

Первый интеграл вычисляется уже известным способом, а во втором снова понизим степень.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int 1dx+\frac{1}{4}\int\cos 4xdx =$$

$$\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\sin 4x+C.$$

Ответ. $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\sin 4x+C$.

Подведение под знак дифференциала.

Задача 10. Вычислить $\int\sin^4 x\cos xdx$.

Решение. Замечаем, что присутствует множитель $\cos x$, который является производной от $\sin x$. А остальная часть функции как раз зависит только от $\sin x$. Поэтому можно подвести $\cos x$ под знак дифференциала: $\int\sin^4 x\cos xdx = \int\sin^4 xd(\sin x)$

Применяем замену $t=\sin x$: $\int\sin^4 xd(\sin x) = \int t^4dt$.

Далее, $\int t^4dt = \frac{1}{5}t^5+C$, и после обратной замены $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

Ответ. $\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

Задача 11. Вычислить интеграл $\int\frac{x^5dx}{x^6+1}$.

Решение. $\int\frac{x^5dx}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int\frac{6x^5dx}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int\frac{d(x^6)}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int\frac{d(x^6+1)}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int\frac{dt}{t} =$

$= \frac{1}{6}\ln|t|+C = \frac{1}{6}\ln(x^6+1)+C$. Учитывая тот факт, что $x^6+1>0$, знак модуля не нужен.

Ответ. $\frac{1}{6}\ln(x^6+1)+C$.

Задача 12. Вычислить $\int ctgxdx$.

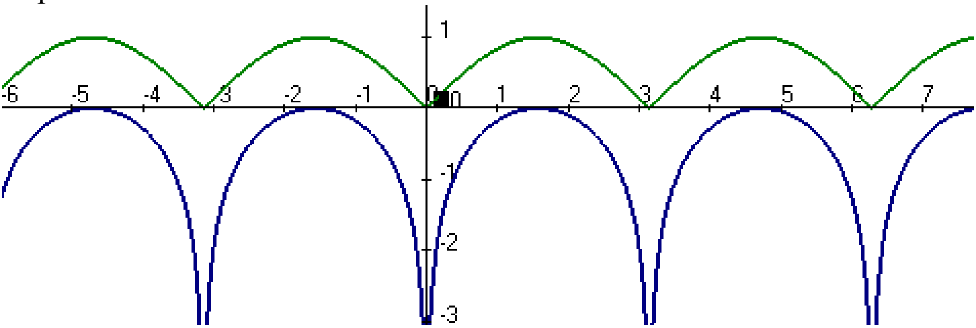
Решение. $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$
$\ln|\sin x| + C$.

Ответ. $\ln|\sin x| + C$.

Для сведения, покажем, как выглядит график функции $y = \ln|\sin x|$.

Зелёным цветом изображён график $|\sin x|$, синим $\ln|\sin x|$.

Вертикальные асимптоты $x = \pi k$.



Задача 13. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t) + C =$
$arctg(\sin x) + C$.

Ответ. $arctg(\sin x) + C$.

Д-1. Вычислить интеграл $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$. **Ответ.** $e^{\sin x} + C$.

Д-2. Вычислить интеграл $\int 3x^2 e^{x^3} dx$. **Ответ.** $e^{x^3} + C$.

Д-3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^6+1}$. **Ответ.** $\frac{1}{3} arctg(x^3) + C$.

Д-4. Вычислить интеграл $\int tgxdx$. **Ответ.** $-\ln|\cos x| + C$.

Задача 14. Вычислить $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$.

Решение. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \frac{1}{4}\arcsin(t) + C = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C$.

Ответ. $\frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C$.

Задача 15 (Э). Вычислить $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

Решение. Если сразу подвести под знак дифференциала то, что есть в числителе, то будет $d(x^{10})$, но тогда в знаменателе получится выражение $\sqrt{\sqrt{x}+1}$. чтобы не происходило такого усложнения и не появились вложенные квадратные корни, надо подводить не весь числитель, а отделить тот множитель, который нам удобнее, чтобы потом всё выражалось через x^5.

$$\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx = \int \frac{x^5 x^4}{\sqrt{x^5+1}} dx = \frac{1}{5}\int \frac{x^5(5x^4 dx)}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 d(x^5)}{\sqrt{x^5+1}}$$

и теперь, после замены $t = x^5$, получится $\frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$.

Далее, сделаем преобразование, котрое позволит оставить только однотипные корни:

$$\frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int \frac{t+1}{\sqrt{t+1}}dt - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt =$$

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{t+1}dt - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int (t+1)^{1/2}dt - \frac{1}{5}\int (t+1)^{-1/2}dt$$

далее уже с помощью обычных действий со степенными функциями:

$$\frac{1}{5}\frac{1}{3/2}(t+1)^{3/2} - \frac{1}{5}\frac{1}{1/2}(t+1)^{1/2} + C = \frac{2}{15}(t+1)^{3/2} - \frac{2}{5}(t+1)^{1/2} + C.$$

После обратной замены получаем ответ, при этом также заодно обратно меняем дробные степени на корни.

Ответ. $\frac{2}{15}\sqrt{x^5+1}^3-\frac{2}{5}\sqrt{x^5+1}+C$.

Задача 16. Вычислить $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{\sin 3x}}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{\sin 3x}}dx = \int (\sin 3x)^{-1/4}\cos 3x dx =$

$= \frac{1}{3}\int (\sin 3x)^{-1/4}(3\cos 3x dx) = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)^{-1/4} d(\sin 3x) = \frac{1}{3}\int t^{-1/4}dt =$

$\frac{1}{3}\frac{1}{3/4}t^{3/4}+C = \frac{4}{9}t^{3/4}+C = \frac{4}{9}(\sin 3x)^{3/4}+C$.

Ответ. $\frac{4}{9}\sqrt[4]{\sin 3x}^3+C$.

Задача 17. Вычислить $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Несмотря на то, что интеграл похож на $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, но, тем не менее, в числителе есть переменная x, поэтому это не табличный интеграл, и ответ здесь вовсе не арксинус. Заметим, что в числителе 1-я степень, а под корнем в знаменателе 2-я. Домножим и поделим так, чтобы в числителе оказалось то выражение, которое под корнем в знаменателе.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

после замены переменной, это можно переписать так: $-\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

а значит, $-\sqrt{t}+C$ и после обратной замены:

Ответ. $-\sqrt{1-x^2}+C$.

Задача 18 (Э). Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+18x-5}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+18x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(-9x^2+18x-9)+4}} =$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-3^2(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(3x-3)^2}}.$$

Для того, чтобы применить формулу, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$

нужно обозначить $t=3x-3$. Но сначала сделаем так, чтобы и в числителе оказался не просто dx а $d(3x-3)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(3x-3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{2^2-(3x-3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-3)}{\sqrt{2^2-(3x-3)^2}}.$$

Теперь интеграл имеет вид $\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}$, и равен $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+C$.

После обратной замены получаем ответ.

Ответ. $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-3}{2}\right)+C$.

Д-5. Вычислить $\int xe^{x^2}dx$. **Ответ.** $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Д-6. Вычислить $\int x\cos(x^2)dx$. **Ответ.** $\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

Д-7. Вычислить $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$ **Ответ.** $\frac{1}{4}arctg(x^4)+C$.

Указание. См. задачу 14.

Д-8. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-18x+9}}$ при $x>1$. **Ответ.** $\frac{1}{3}\ln|3x-3|+C$.

Указание. См. задачу 18.

Задача 19. Вычислить $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Заметим, что в числителе производная того выражения, которое есть в знаменателе. Тогда $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+4x+8\right| + C.$$

Здесь фактически мы применили замену $t = x^2+4x+8$ для упрощения выражения. Кстати, выделение полного квадрата в знаменателе это здесь был бы тупиковый путь, ведь в числителе не константа а многочлен, то есть не удалось бы свести к виду $\frac{1}{t^2+a^2}$.

Ответ. $\ln\left|x^2+4x+8\right| + C$.

Задача 20. Вычислить $\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, в числителе уже произвольный многочлен, не соответствующий производной от знаменателя. Тем не менее, можно путём арифметических операций получить там дифференциал знаменателя:

Домножим и поделим на 2, чтобы исправился коэффициент при x:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx$$

Теперь осталось прибавить и отнять 2, и будет получено $2x+4$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-2}{x^2+4x+8}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+8}dx.$$

В первом слагаемом делается ровно то же самое, что в прошлой задаче, а во втором - выделить полный квадрат, и в итоге сводится к арктангенсу:

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}dx-\int\frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C.$$

Ответ. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$.

Задача 21. Вычислить интеграл $\int\frac{x+1}{x^2+9}dx$.

Решение. $\int\frac{x+1}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2}{x^2+9}dx$

В отличие от прошлой задачи, здесь не надо прибавлять и вычитать, так как полный дифференциал знаменателя это $2xdx$, в знаменателе нет 1-й степени, а его производная поэтому не содержит константу.

Далее, $\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2+9}+\int\frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}+\int\frac{1}{x^2+3^2}dx$, и в итоге:

Ответ. $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+C$.

Интегрирование по частям

Вспомнить формулу $\int uv'dx = uv-\int vu'dx$.

Задача 22. Вычислить $\int xe^{3x}dx$.

Решение. Пусть $u = x$, так надо, чтобы понизилась степень на следующем шаге. Составим таблицу:

$u = x$	$v=\frac{1}{3}e^{3x}$
$u' = 1$	$v' = e^{3x}$

Тогда $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$.

Ответ. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$.

Задача 23. Вычислить интеграл $\int x\cos 5x dx$.

Решение.

$u = x$	$v = \frac{1}{5}\sin 5x$
$u' = 1$	$v' = \cos 5x$

$$\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C.$$

Задача 24 (Э). Вычислить интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Решение. Так как степенная функция 2-й степени, то эта задача решается в 2 шага. На первом шаге, обозначаем $u_1 = x^2$, $v_1' = e^x$.

$u_1 = x^2$	$v_1 = e^x$
$u_1' = 2x$	$v_1' = e^x$

Тогда $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(\int xe^x dx\right)$.

На 2-м шаге, обозначим $u_2 = x$, $v_2' = e^x$.

$u_2 = x$	$v_2 = e^x$
$u_2' = 1$	$v_2' = e^x$

В скобке происходит вычисление как бы для нового примера, выполним это вложенное действие:

$$x^2 e^x - 2\left(\int xe^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C.$$

Итак, ответ: $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

Задача 25 (Э). Вычислить интеграл $\int \arcsin x dx$

Решение. Пусть $u = \arcsin x$, второго множителя нет, но мы формально можем считать, что он есть, только равен 1. Итак, $v' = 1$. Построим таблицу:

$u = \arcsin x$	$v = x$
$u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$v' = 1$

Тогда $\int \arcsin x dx \ = \ x\arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \ =$

$$x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \ = \ x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$x\arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} \ = \ x\arcsin x + \sqrt{t} + C \ .$$

Ответ: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Задача 26 (Э). Вычислить интеграл $\int arctgxdx$

Производная арктангенса это рациональная дробь. И это мы используем, обозначая её u при интегрировании по частям:

$u = arctgx$	$v = x$
$u' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$v' = 1$

Тогда: $\int arctgxdx \ = \ xarctgx - \int \dfrac{x}{x^2+1} dx$.

Второе слагаемое далее уже решается подведением под знак dx.

$$xarctgx - \int \frac{x}{x^2+1} dx \ = \ xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} \ =$$

$$xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \ = \ xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \ =$$

$xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. Знак модуля даже не нужен, т.к. $x^2+1 > 0$.

Замечание. Если при переходе от $v' = 1$ к $v = x$ записать не одну первообразную, а множество всех первообразных, т.е. $v = x + A$, то это не повлияет на ответ, потому что дополнительное слагаемое всё равно сокращается в итоге:

$$(x+A)arctgx-\int\frac{x+A}{x^2+1}dx = (x+A)arctgx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{A}{x^2+1}dx$$

$$= xarctgx + A\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-A\cdot arctgx+C.$$

Задача 27 (Э). Вычислить интеграл $\int e^x\cos xdx$

Решение. Пусть $I=\int e^x\cos xdx$.

. На первом шаге, обозначаем $u_1=e^x$, $v_1'=\cos x$.

$u_1=e^x$	$v_1=\sin x$
$u_1'=e^x$	$v_1'=\cos x$

$I=\int e^x\cos xdx. = \; e^x\sin x-\left(\int e^x\sin xdx\right).$

На 2-м шаге, в том интеграле, который получился, обозначим аналогичным образом: $u_2=e^x$, $v_2'=\sin x$.

$u_2=e^x$	$v_2'=-\cos x$
$u_2'=e^x$	$v_2'=\sin x$

Получается $I=e^x\sin x-\left(\int e^x\sin xdx\right)=$

$e^x\sin x-\left(-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx\right) = \; e^x\sin x+e^x\cos x-I$.

Из равенства $I=e^x\sin x+e^x\cos x-I$ можно выразить I:

$$2I=e^x\sin x+e^x\cos x,\; I=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x).$$

Примечание. Интегралы вида $\int e^x\cos xdx$ и $\int e^x\sin xdx$ называются **«циклические интегралы»**, потому что они решаются таким способом: через 2 цикла вычисления получается сведение к исходному интегралу.

Ответ. $\int e^x \cos x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

Д-9. Вычислить $\int \left(e^{ax} \cos bx\right) dx$. Указание. См. задачу 27.

Ответ. $\int \left(e^{ax} \cos bx\right) dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(b \sin bx + a \cos bx\right) + C$.

Д-10. Вычислить $\int e^x \sin x dx$. Указание. См. задачу 27.

Ответ. $\dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

Интегрирование рациональных дробей

Ситуация 1. Если все корни знаменателя различны.

Задача 28. Вычислить интеграл $\int \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} dx$.

Решение. Разложение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приведём к общему знаменателю: $\dfrac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$.

Приравняем к исходной дроби. Знаменатели у них и так равны, осталось приравнять числители: $A(x-2) + B(x-1) = 1$

из этого следует: $(A+B)x + (-2A - B) = 0x + 1$.

Так как в исходном числителе была только константа 1, то искусственно приписали $0x$, для того, чтобы присутствовали все степени, коэффициенты при которых надо сравнить.

Получается система уравнений: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$

Решаем систему, складывая уравнения между собой, получится

$-A=1$, т.е. $A=-1$, тогда $B=1$. Теперь интеграл можно разбить на два интеграла от таких слагаемых:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx.$$

Ответ. $\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, либо в такой форме: $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

Задача 29. Вычислить интеграл $\int \frac{x+4}{(x+1)(x-5)}dx$.

Решение. $\frac{x+4}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x+1)}{(x+1)(x-5)}$.

$(A+B)x + (-5A+B) = 1x+4$, тогда система уравнений для неопределённых коэффициентов:

$\begin{cases} A+B=1 \\ -5A+B=4 \end{cases}$. Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получим:

$6A=-3$, т.е. $A=-\frac{1}{2}$, тогда $B=\frac{3}{2}$.

Итак, $\int \frac{x+4}{(x+1)(x-5)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx =$

$\frac{3}{2}\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$.

Ответ. $\frac{3}{2}\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$.

Задача 30. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

Решение. В данном случае знаменатель уже разложен в произведение множителей первой степени. Теперь представим дробь в виде суммы:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

После приведения к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Тогда $A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)=1$.

Перегруппируем слагаемые, так, чтобы вынести отдельно вторые степени, первые степени и константы.

$$(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)=0x^2+0x+1.$$

Отсюда строим систему уравнений:

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases}$ чтобы её решить, построим расширенную

матрицу системы и применим метод Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Сначала ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на 5,
затем от 3-й отняли 1-ю, умноженную на 6.
Так мы обнулили всё ниже углового элемента a_{11}.
А теперь к 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уже получилась треугольная основная матрица.
Ей соответствует такая система:

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B+2C=0 \\ 2C=1 \end{cases}$, т.е. $C=\frac{1}{2}$, тогда $B=-1$, а тогда $A=\frac{1}{2}$.

Теперь интеграл сводится к такому виду:

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-3}dx\ ,$$

Ответ. $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C$.

Задача 31. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx$.

Решение. Во-первых, найдём корни знаменателя и разложим его на множители: $\int \frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}dx$.

Далее, $\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$,

$$\frac{A(x^2-4)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}.$$

В числителе уже и так был многочлен, а не просто число 1, поэтому не придётся добавлять $0x^2$, ведь все коэффициенты, к которым надо приравнять, в наличии есть.

Приравняем числители:

$$Ax^2-4A+Bx^2-2Bx+Cx^2+2Cx=x^2+4x-2 \quad \to$$

$$(A+B+C)x^2+(-2B+2C)x-4A=x^2+4x-2.$$

Тогда система принимает вид:

$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2B+2C=4 \\ -4A=-2 \end{cases}$, отсюда $A=\frac{1}{2}$,

тогда с учётом этого система примет вид:

$\begin{cases} B+C=1/2 \\ -B+C=2 \end{cases}$, тогда $2C=\frac{5}{2}$, т.е. $C=\frac{5}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx.$$

Ответ. $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$.

Рациональные дроби. Случай 2. Если есть кратные корни.

Задача 32. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение. Как видим, здесь корень 1 имеет кратность 2. Разложение на простейшие дроби нельзя проводить так, как будто бы здесь три независимых множителя $(x-1)$, $(x-1)$, $(x+2)$, т.е. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$, иначе получится противоречие, ведь общий знаменатель будет содержать всего лишь 1-ю степень $(x-1)$ но никак не вторую. Надо степени знаменателя учитывать по возрастающей, до кратности корня, а именно, так: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$.

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Числитель этой дроби равен числителю исходной, той, которая была в интеграле:

$A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)=x^2+x+3$.

$(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)=x^2+x+3$, система:

$\begin{cases} A \quad +C=1 \\ A+B-2C=1 \\ -2A+2B+C=3 \end{cases}$. Построим расширенную матрицу и решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Система приведена к виду: $\begin{cases} A \quad +C=1 \\ B-3C=0 \\ \quad 3B=5 \end{cases}$

Тогда $B=\frac{5}{3}$, $C=\frac{5}{9}$, $A=\frac{4}{9}$. И теперь интеграл распадается на сумму трёх интегралов: $\frac{4}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{5}{9}\int\frac{1}{x+2}dx$.

В 1 и 3 слагаемых - как раньше, а вот во 2-м логарифм в ответе не получится, ведь тут уже 2-я а не 1-я степень в знаменателе.

Полезно вспомнить, что $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

То есть, интеграл от -2 степени будет содержать -1 степень, и меняется знак.

Ответ. $\frac{4}{9}\ln|x-1|-\frac{5}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{9}\ln|x+2|+C$.

Задача 33 (Э). Вычислить интеграл $\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx$.

Решение. Сначала запишем знаменатель подробнее, с учётом корней:

$$\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx = \int\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}dx.$$

Это тот случай, когда оба корня кратные, кратности 2.

Разложение на простейшие дроби будет иметь такой вид:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}.$$

После приведения к общему знаменателю, в числителе будет такое выражение:

$$A(x+1)(x-1)^2+B(x-1)^2+C(x-1)(x+1)^2+D(x+1)^2 \quad =$$

здесь при A и C можно один множитель отделить от 2-й степени, с тем чтобы образовать выражение типа (x^2-1) тогда привести подобные легче.

$$A(x^2-1)(x-1)+B(x-1)^2+C(x^2-1)(x+1)+D(x+1)^2 \quad =$$

$$= \quad A(x^3-x^2-x+1)+B(x^2-2x+1)+C(x^3+x^2-x-1)+D(x^2+2x+1).$$

перегруппируем слагаемые, чтобы вынести каждую степень отдельно:

$$(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(-A-2B-C+2D)x+(A+B-C+D).$$

Этот многочлен равен $0x^3+0x^2+0x+1$, таким образом, получается система уравнений:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ -A-2B-C+2D=0 \\ A+B-C+D=1 \end{cases}$$

Построим расширенную матрицу и применим метод Гаусса:
Сначала обнулим всё ниже чем a_{11}, затем ниже a_{22}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ниже a_{33} можно уже и не обнулять, ведь идея метода Гаусса состоит в том, чтобы количество неизвестных снижалось, вплоть до одной в последнем уравнении, а здесь уже так и есть, в последнем уравнении всего один элемент. Сначала выразим C, затем через неё D и так далее. Система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+2C+D=0 \\ 4C+4D=0 \\ -4C=1 \end{cases} \Rightarrow C=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4},\ A=\frac{1}{4}.$$

Тогда в интеграле функция распадается на сумму 4 слагаемых:

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

из всех вынесли общий коэффициент $1/4$, и перед третьим слагаемым поставили знак минус. Получается:

$$\frac{1}{4}\left(\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right)+C =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) + C .$$

Ответ. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) + C$.

Задача 34 (Э). Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$.

Решение. $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)} dx = \int \frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} dx$.

Здесь корень 0 имеет кратность 2, остальные корни простые.

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} .$$

После приведения к общему знаменателю, числитель будет такой:

$Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x-1) + Dx^2(x+1)$.

После приведения подобных:

$(A + C + D)x^3 + (B - C + D)x^2 - Ax - B$, это надо приравнять к $0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$. Получится систему с 4 неизвестными:

$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ B - C + D = 0 \\ -A = 0 \\ -B = 1 \end{cases}$ Поскольку A,B определяются сразу же, $A = 0$, $B = -1$, то матрицу 4 порядка для метода Гаусса строить не надо, а останется только маленькая система на C,D.

$\begin{cases} C + D = 0 \\ -C + D = 1 \end{cases}$ тогда $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$.

$A = 0$, то есть, как видим, некоторые слагаемые в некоторых примерах могут и пропадать, однако те, где степень самая высокая, равная кратности - не могут, так, здесь не могло бы быть $B = 0$, иначе возникло бы противоречие при приведении к общему знаменателю.

$$-\int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C .$$

Ответ. $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$

Задача Д-11. Вычислить $\int\frac{x}{(x+2)(x+3)}dx$.

Ответ. $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+C$.

Задача Д-12. Вычислить интеграл $\int\frac{1}{x^2-1}dx$.

Ответ. $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

Рациональные дроби. Случай 3. Если есть комплексные корни.

Задача 35 (Э). Вычислить интеграл $\int\frac{1}{x(x^2+4)}dx$.

Решение. Запишем разложение на простейшие дроби: $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Это равно $\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)}$.

Тогда $Ax^2+4A+Bx^2+Cx=0x^2+0x+1$.

$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=1 \end{cases}$, итого $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$.

Тогда $\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{4}\int\frac{x}{x^2+4}dx$.

Во втором слагаемом, можно подвести под знак дифференциала:

$$\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+C.$$

Ответ. $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+C$.

Задача Д-13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ с помощью рекуррентной формулы $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$.

Ответ. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}arctgx + C$.

Задача Д-14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Ответ. $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

Интегрирование иррациональностей.

Задача 36. Вычислить интеграл $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Здесь есть корни порядка 2 и 3. Наименьшее общее кратное, НОК(2,3) = 6. Поэтому замена $t = \sqrt[6]{x+1}$. При этом,

$x+1 = t^6,\ \ x = t^6 - 1,\ dx = 6t^5dt$,

$\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} = (x+1)^{2/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 = t^2$,

$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} = (x+1)^{3/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 = t^3$.

Тогда $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt = 6\int (t^6-1+t^3)t^3dt =$

$6\int (t^9 - t^3 + t^6)dt = \frac{6}{10}t^{10} - \frac{6}{4}t^4 + \frac{6}{7}t^7 + C$.

Сделаем обратную замену и получим:

Ответ. $\frac{6}{10}\sqrt[6]{x+1}^{10} - \frac{6}{4}\sqrt[6]{x+1}^4 + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x+1}^7 + C$.

Задача 37. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x}^2}dx$.

Решение. Здесь также корни порядка 2 и 3, НОК(2,3) = 6.

Замена $t=\sqrt[6]{x}$. При этом, $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt{x}=t^3$.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}^2}dx = \int\frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt = 6\int\frac{t^8}{t^6-t^4}dt = 6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt =$$

$$6\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}dt = 6\int\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}dt+\int\frac{6}{t^2-1}dt =$$

$$6\int(t^2+1)dt+\int\frac{6}{(t+1)(t-1)}dt.$$

Во втором интеграле надо разложить на простейшие дроби.

$$\frac{6}{3}t^3+6t+\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}\right)dt.$$

$$\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}=\frac{At-A+Bt+B}{(t+1)(t-1)}=\frac{0t+6}{(t+1)(t-1)}$$, откуда получаем

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B=6\end{cases}\qquad 2B=6,$$ то есть $B=3$, $A=-3$.

Тогда $\frac{6}{3}t^3+6t+\int\left(\frac{-3}{t+1}+\frac{3}{t-1}\right)dt = 2t^3+6t+3\ln|t-1|-3\ln|t+1|+C =$

$2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$. После обратной замены:

Ответ. $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

Задача 38. Вычислить интеграл $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Сначала сделаем замену $t=\sqrt{x}$. При этом $x=t^2$, значит, $dx=2tdt$. Тогда $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}dx = \int\sqrt{1+t}\,2tdt$.

Но внешний корень ещё не устранили, поэтому сделаем 2-ю замену: $z=\sqrt{t+1}$. Тогда $t+1=z^2$, $t=z^2-1$, $dt=2zdz$, соответственно:

$$\int\sqrt{1+t}\,2tdt = \int z2(z^2-1)2zdz = 4\int(z^4-z^2)dz.$$

После второй замены, уже получили интеграл от степенных функций!

$$4\int (z^4 - z^2)dz \; = \; \frac{4}{5}z^5 - \frac{4}{3}z^3 + C \; .$$

Сделаем обратную замену:

$\frac{4}{5}z^5 - \frac{4}{3}z^3 + C \; = \; \frac{4}{5}\sqrt{t+1}^5 - \frac{4}{3}\sqrt{t+1}^3 + C$, и после обратной замены:

Ответ. $\frac{4}{5}\sqrt{1+\sqrt{x}}^5 - \frac{4}{3}\sqrt{1+\sqrt{x}}^3 + C$.

Интегрирование тригонометрических функций.

Задача 39. Вычислить интеграл $\int \frac{2+\sin x}{1+\cos x} dx$.

Решение. Функция не обладает свойствами чётности или нечётности, то есть, сменив знак синуса или косинуса, мы не получим, что знак минус будет у всей дроби. Поэтому применяем универсальную тригонометрическую подстановку: $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$. Напомним, что при этом

$$x = 2arctgt \, , \; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \, , \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \, , \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \, .$$

Итак, сделаем замену:

$$\int \frac{2+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dx = \int \frac{\frac{2+2t+2t^2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dx \; = \; \int \frac{2t^2+2t+2}{t^2+1} dx \; =$$

$$2\int 1 + \frac{t}{t^2+1} dx \; = \; 2t + \int \frac{2t}{t^2+1} dx \; = \; 2t + \ln(t^2+1) + C \; .$$

Теперь сделаем обратную замену. $2tg\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$, что ещё можно привести к виду $2tg\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(\cos^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$.

Ответ. $2tg\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$.

Примеры на другие подстановки.

Задача 40. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$.

Решение. Здесь нечётная степень синуса, применяем замену $t = \cos x$.

Тогда $\int \sin^3 x \cos^8 x dx = \int \sqrt{1-t^2}^{\,3} t^8 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \sqrt{1-t^2}^{\,2} t^8 dt =$

$$-\int (1-t^2)t^8 dt = \int (t^{10}-t^8) dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Ответ. $\frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$.

Замечание. Универсальная подстановка здесь приводит к огромным вычислениям. Попробуем применить её:

$$\int \sin^3 x \cos^8 x dx = \int \frac{(2t)^3}{\left(t^2+1\right)^3} \frac{\left(1-t^2\right)^8}{\left(t^2+1\right)^8} \frac{2}{t^2+1} dt = \int \frac{16t^3\left(1-t^2\right)^8}{\left(t^2+1\right)^{12}} dt.$$

Если раскрыть скобки в числителе, и разбить на сумму множества дробей, то в знаменателе каждой из них будет $\left(t^2+1\right)^{12}$, то есть каждое слагаемое надо будет вычислять по рекуррентной формуле в 12 шагов.

Задача 41. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \sin x$.

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2} dt$ вот и свелось к рациональной дроби, и дальше для t можем действовать в рамках прошлой темы «рациональные дроби».

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = -\int \frac{1}{t^2-1} dt = -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt.$$

Приводим к общему знаменателю:

$\frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$, далее $At + A + Bt - B = 0t + 1$,

$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$, отсюда следует $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$.

$$-\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right)dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+C$$

это можно после обратной замены и применения свойств логарифмов, записать так: $\ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|}+C$.

Ответ. $\ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|}+C$.

Задача 42. Вычислить интеграл $\int\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$.

Решение. Здесь тоже суммарная степень чётная, замена $t=tgx$.

$dx=\frac{1}{t^2+1}dt$. $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

$$\int\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}dx = \int\frac{1}{\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}^5}}\frac{1}{t^2+1}dt = \int\frac{\sqrt{1+t^2}^8}{t^3}\frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$\int\frac{(t^2+1)^4}{t^3}\frac{1}{t^2+1}dt = \int\frac{(t^2+1)^3}{t^3}dt = \int\frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3}dt$$

здесь мы воспользовались формулой $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$$\int\left(t^3+3t+3\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+3\ln|t|-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+C.$$

После обратной замены получаем ответ:

Ответ. $\frac{1}{4}tg^4x+\frac{3}{2}tg^2x+3\ln|tgx|-\frac{1}{2}ctg^2x+C$.

Задача 43. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Решение. Здесь суммарная степень чётная, то есть, если сменить знак перед sin и cos, то знак сменится 2 раза, и останется «+». Поэтому надо применить замену $t = tgx$. Тогда (см. в лекции):

$$dx = \frac{1}{t^2+1} dt . \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ , \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} .$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}^2}} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{\sqrt{1+t^2}^4}{t^2} \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int \frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^2} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{t^2+1}{t^2} dt = \int dt + \int \frac{1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + C .$$

После обратной замены получается: $tgx - ctgx + C$.

Ответ. $tgx - ctgx + C$.

Проверка. $(tgx - ctgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} =$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} .$$

Задача Д-15. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$.

Ответ. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C$.

Взаимосвязь иррациональностей и тригонометрических функций. Примеры с интегралами, содержащими $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, решаемые с помощью тригонометрических функций.

Задача 44 (Э). Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

Решение. В интеграле $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ обозначим $t = \sqrt{x}$, при этом $dx = 2tdt$. При этом, правда, второй корень усложняется:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2tdt = 2\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt .$$

Необходима 2-я замена, чтобы устранить корень $\sqrt{a^2 - t^2}$.

У нас здесь $a = 1$. Вводим замену $t = \sin z$. Тогда $\sqrt{1-t^2} = \cos z$.

Итак, $2\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int \frac{\sin^2 z}{\cos z}\cos z dz = 2\int \sin^2 z dz$.

Теперь уже просто по формуле понижения степени.

$$2\int \sin^2 z dz = 2\int \frac{1-\cos 2z}{2}dz = \int (1-\cos 2z)dz = z - \frac{1}{2}\sin 2z + C =$$

$$z - \frac{1}{2}2\sin z \cos z + C = z - \sin z \cos z + C .$$

Обратные замены: сначала обращаем обратно вторую замену, которыу сделали последней: если $t = \sin z$ то $\arcsin t - t\sqrt{1-t^2} + C$.

Далее, обращаем 1-ю замену: $t = \sqrt{x}$, тогда в итоге:

Ответ. $\arcsin\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}\sqrt{1-x} + C$.

Задача 45 (Э). Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}dx$.

Решение. В этом случае нужно замена (см. лекции) $x = \frac{3}{\sin t}$.

При этом корень квадратный исчезает:

$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\sin^2 t}-9} = 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}} = 3\frac{\cos t}{\sin t}$.

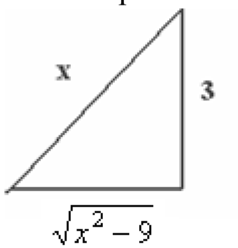
$dx = \left(3\sin^{-1} t\right)' = -3\sin^{-2} t\cos t dt = -3\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$.

Итак, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{3}{\sin t}\frac{\sin t}{3\cos t}(-3)\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt =$

$-3\int \frac{1}{\sin^2 t}dt = 3ctgt + C$.

Для обратной замены, вспомним, что $x = \frac{3}{\sin t}$, то есть $\sin t = \frac{3}{x}$,

$t = \arcsin\left(\frac{3}{x}\right)$. Тогда $3ctgt + C = 3ctg\left(\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)\right) + C$. Получается, что надо найти котангенс того угла, синус которого равен $\frac{3}{x}$. Подпишем соответствующие стороны на чертеже прямоугольного треугольника. Третья сторона вычисляется по теореме Пифагора: $\sqrt{x^2-9}$.



Котангенс этого угла: $\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$.

$3ctg\left(\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)\right) + C = 3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + C = \sqrt{x^2-9} + C$.

Ответ. $\sqrt{x^2-9} + C$.

Задача Д-16. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx$.

Ответ. $\sqrt{x^2+25}+C$.

Определённый интеграл

Задача 46. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}$

здесь мы можем заменить $\sin x$ на t, но тогда нужно сделать пересчёт верхнего и нижнего пределов. Если $x \in [0, \pi/2]$ то $t \in [\sin(0), \sin(\pi/2)]$, т.е. $t \in [0,1]$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t)\Big|_0^1 = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

А можно было сначала вычислять интеграл как неопределённый, тогда надо было бы вернуться к исходной переменной x (то есть сделать обратную замену), но пределы можно не пересчитывать.

$$\int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t) + C = arctg(\sin x) + C$$

$$arctg(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = arctg\left(\sin \pi/2\right) - arctg\left(\sin 0\right) = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Впрочем, как видно, от способа не зависит, получается один и тот же ответ $\frac{\pi}{4}$.

Задача 47. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1 =$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{0^2+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

Задача 48. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Решение. При замене $t = \sqrt{x}$ мы адаптируем границы к новой переменной, то есть, если $x \in [0,4]$, то $t \in [\sqrt{0}, \sqrt{4}] = [0,2]$.

Тогда $\int_0^2 \frac{1+t}{t} 2tdt = \int_0^2 (2+2t)dt = (2t+t^2)\Big|_0^2 = 8.$

Ответ. 8.

Задача Д-17. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx$. **Ответ.** $\ln 4 - 1$.

Задача Д-18. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$. **Ответ.** $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

Рассмотрим 2 задачи на применение интегрирования по частям в определённом интеграле.

Задача 49. Вычислить интеграл $\int_0^2 xe^x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям,

$u = x \quad v = e^x$

$u' = 1 \quad v' = e^x$

Тогда

$$\int_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

Ответ. $e^2 + 1$.

Задача 50. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$.

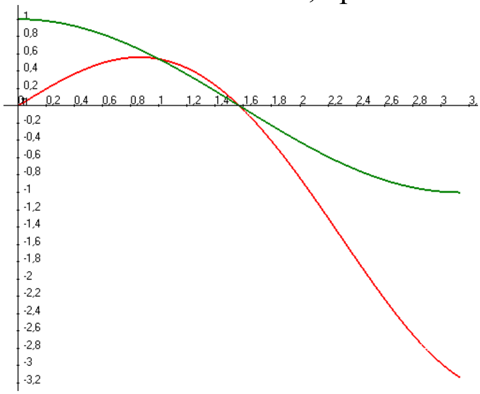
Решение. Тоже решается интегрированием по частям,
$u = x$, $v' = \cos x$, тогда $u' = 1$, $v = \sin x$.

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \pi\sin\pi - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} =$$

$$0 - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Ответ. -2.

Замечание. Из строения графика видно, что ответ и должен был получиться отрицательным: изначально $\cos x$ имеет две одинаковые части площади над и под осью, и его интеграл был бы 0, а если мы умножаем на x, то сильнее увеличится по модулю именно та часть, которая дальше от 0, то есть расположенная ниже горизонтальной оси. Вот эти графики, зелёным показан $\cos x$, красным $x\cos x$.



Задача 51. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{2} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$.

Решение. $\int\limits_1^{2} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -\int\limits_1^{2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} dx\right) = -\int\limits_1^{2} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right)$

используя известное выражение $\int e^t dt = e^t + C$, получим:

$$-e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1\right) = e - \sqrt{e}\ .$$

Задача 52 (Э). Вычислить интеграл $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тогда $t^2 = e^x - 1$, $e^x = t^2 + 1$, $x = \ln(t^2 + 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 + 1}dt$, функция $t = \sqrt{e^x - 1}$ монотонна, так что замена корректная. Теперь найдём новые границы: если $x \in (\ln 2,\ \ln 4)$, то $t \in (1,\ \sqrt{3})$. Тогда $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t}\frac{2t}{1+t^2}\right)dt =$

$$2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt = 2arctgt\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\ .$$

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

Задача 53. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{6x-3}{x^2+1}dx$.

При этом осуществляется повторение темы «элементарные преобразования, подведение под знак дифференциала».

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{6x-3}{x^2+1}dx = 3\int\limits_0^1 \frac{2x-1}{x^2+1}dx = 3\int\limits_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - 3\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx =$

$$3\int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 3\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = 3\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 3arctgx\Big|_0^1 =$$

$$3(\ln 2 - 0) - 3\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 3\ln 2 - 3\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $3\ln 2 - 3\frac{\pi}{4}$.

Задача 54. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{2x^2 - x - 9}{(x-5)(x+1)^2}dx$.

При этом осуществляется повторение темы «рациональные дроби».

Решение. Сначала представим дробь в виде суммы простейших.

$\dfrac{2x^2 - x - 9}{(x-5)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$. При приведении к общему знаменателю, числитель получится такой:

$A(x+1)^2 + B(x-5)(x+1) + C(x-5)$, что равно $2x^2 - x - 9$, $\Rightarrow$

$A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 4x - 5) + C(x-5) = 2x^2 - x - 9 \quad \Rightarrow$

$(A+B)x^2 + (2A - 4B + C)x + (A - 5B - 5C) = 2x^2 - x - 9 \quad \Rightarrow$

система: $\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A - 4B + C = -1 \\ A - 5B - 5C = -9 \end{cases}$ решим её методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -5 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Здесь от 2-й строки отняли удвоенную 1-ю и от 3-й 1-ю, а затем от 3-й строки 2-ю. Основная матрица системы стала треугольной, и C находится сразу же: $C = 1$. Тогда $-6B + 1 = -5$ и тогда $B = 1$. Из 1-го уравнения тогда уже получается $A = 1$.

Значит, исходный интеграл распадается на сумму 3 интегралов:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-5}dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \ln|x-5|\Big|_0^1 + \ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{x+1}\Big|_0^1 =$$

$$(\ln 4 - \ln 5) + (\ln 2 - \ln 1) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \ln 4 - \ln 5 + \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln\frac{8}{5} + \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\ln\dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{2}$.

Задача 55. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

При этом осуществляется повторение темы «интегрирование иррациональностей».

Решение. НОК(2,4) = 4, поэтому замена $t=\sqrt[4]{x}$. При такой замене $x=t^4$, $dx=4t^3dt$, $\sqrt{x}=t^2$. $x\in(0{,}1)\Rightarrow t\in(0{,}1)$.

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1+t}{t^2}4t^3dt = 4\int_0^1(1+t)tdt = 4\int_0^1(t+t^2)dt = \frac{4}{2}t^2\Big|_0^1 + \frac{4}{3}t^3\Big|_0^1 =$$

$2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$. **Ответ.** $\frac{10}{3}$.

Задача 56. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

При этом осуществляется повторение темы «интегрирование тригонометрических функций».

Решение. Суммарная степень чётна, поэтому применяется замена $t=tgx$, тогда $dx=\frac{1}{t^2+1}dt$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пересчитаем границы. $x=0 \Rightarrow t=tg0=0$, $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Итак, подставим всё это в интеграл.

$$\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{\frac{1}{(t^2+1)^2}}\frac{1}{t^2+1}dt = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{t^2+1}\frac{(t^2+1)^2}{1}\frac{1}{t^2+1}dt =$$

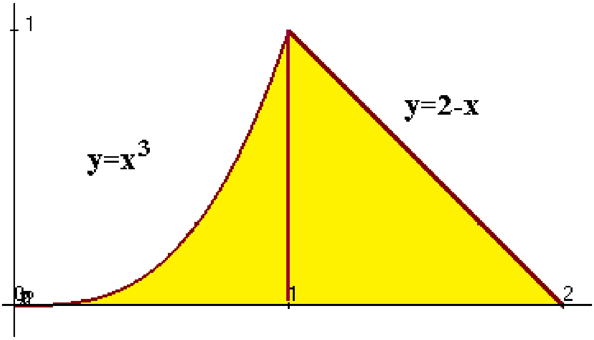
$$= \int_0^{\sqrt{3}}t^2dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}^3}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Приложения определённых интегралов.

Задача 57. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\{y=0, y=x^3, y=2-x\}$.

Решение. Построим чертёж:



Так как верхняя граница после точки 1 переходит с одной кривой на другую, то придётся разбить на сумму двух вычислений по каждой части отдельно: $\int_0^1 x^3dx + \int_1^2 (2-x)dx$. Итак, получим $\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2$

$= \frac{1}{4} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. **Ответ.** $\frac{3}{4}$.

Задача 58. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y_1 = \frac{x^2}{2}$ и $y_2 = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. Рассмотрим чертёж, найдём точки пересечения графиков и увидим, какую часть плоскости они ограничивают.

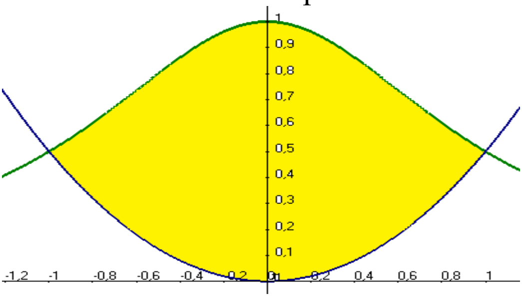


График $y_2 = \frac{1}{x^2+1}$ имеет максимум в точке 0 и проходит выше, чем $y_1 = \frac{x^2}{2}$, у которой, напротив, там минимум. Точки перечечения

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Все функции в интеграле чётные, фигура симметрична, можно вычислить площадь правой половины и удвоить:

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2arctgx\Big|_0^1 - 2\frac{x^3}{6}\Big|_0^1 =$$

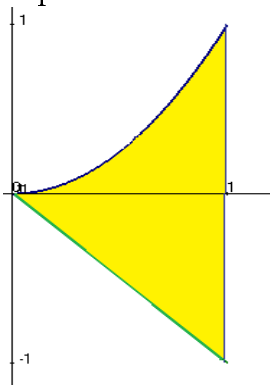
$$2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - 2\left(\frac{1}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$ **Ответ.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

Задача 59. Найти площадь области, ограниченной линиями $\{y = x^2, y = -x, x = 1\}$

Решение.

$$\int_0^1 \left(x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 + x\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Чертёж:



Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача Д-19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\{x = 2, y = \ln x, y = 1 - x\}$. **Ответ.** $2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Задача 60. Найти объём, получающийся при вращении кривой $y=\sqrt{x}$, при условии что $x \in [0,a]$.

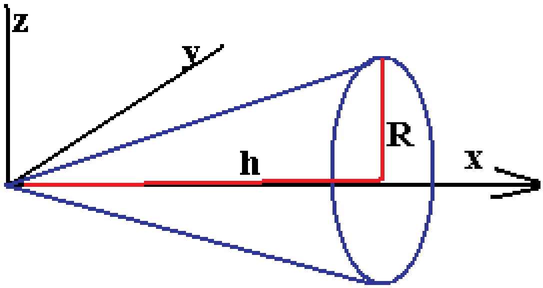
Решение. $V=\int_a^b \pi \; f^2(x)dx = \pi\int_0^a \sqrt{x}^2 dx = \pi\int_0^a xdx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{\pi \; a^2}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi \; a^2}{2}$.

Замечание. Эта задача может быть интерпретирована физическим примером: сколько воды может поместиться в эллиптический параболоид. Ведь если график корня повернуть на 90 градусов, это парабола.

Задача 61. С помощью основной формулы объёмов тел вращения, доказать формулу объёма конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Решение. Для удобства применения основной формулы, повернём конус на 90 градусов, так, чтобы высота лежала на оси $0x$.



На чертеже видно, что два катета имеют длины R и h. Тогда отрезок, вращением которого образована боковая поверхность конуса, находится на прямой $y=f(x)=\frac{R}{h}x$.

$$\int_0^h \pi \; f^2(x)dx = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} =$$

$$\pi\frac{R^2}{1}\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Ответ: формула доказана.

Задача 62. Найти длину 1 витка винтовой линии в пространстве $\{x = R\cos t, y = R\sin t, z = at\}$ $t \in (0,2\pi)$

Решение. В данном случае кривая параметрически задана, в 3-мерном пространстве. Формула $L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.

Производные: $\{x' = -R\sin t, y' = R\cos t, z' = a\}$.

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + a^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\,dt = \sqrt{R^2 + a^2}\int\limits_0^{2\pi} 1dt$$

Ответ. $2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$.

Замечание. Если была бы не винтовая линия, а окружность, а это было бы при параметре $a = 0$, то как раз бы и получалось $2\pi\sqrt{R^2 + 0} = 2\pi R$ длина окружности.

Задача 63 (Э). Найти длину кривой $\{x = 5\cos^3 t, y = 5\sin^3 t\}$ $t \in (0,\pi)$.

Решение. Применяем формулу в плоскости $L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

Производные: $\{x' = 15\cos^2 t(-\sin t), y' = 15\sin^2 t\cos t\}$.

$$L = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{15^2 \cos^4 t \sin^2 t + 15^2 \sin^4 t \cos^2 t}\,dt =$$

$$15\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\,dt = 15\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\,dt.$$

Но здесь важно учесть, что $\cos t$ во 2 четверти отрицателен, поэтому при сокращении корня и квадрата надо учесть знак модуля.

$15\int\limits_0^{\pi} \sin t|\cos t|dt$. Далее придётся разбить на 2 отрезка, чтобы устранить знак модуля на каждом по-своему:

$$15\int_0^{\pi}\sin t\left|\cos t\right|dt = 15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt + 15\int_{\pi/2}^{\pi}\sin t(-\cos t)dt =$$

$$15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt - 15\int_{\pi/2}^{\pi}\sin t\cos t dt = 15\int_0^{\pi/2}\sin t d(\sin t) - 15\int_{\pi/2}^{\pi}\sin t d(\sin t) =$$

$$\frac{15}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{15}{2}\sin^2 t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{15}{2}(1-0) - \frac{15}{2}(0-1) = 15.$$

Ответ. 15.

Замечание. Если бы не учли знак модуля и не разбили на 2 части, тогда получилось бы неверно, ведь эти части бы не складывались, а взаимно уничтожались.

Задача Д-20. Найти длину явно заданной кривой: $y = \sqrt{x^3}, x \in (0,1)$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{13}^3 - 8}{27}$.

Задача Д-21. Найти длину кривой, заданной в полярных координатах: $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in (0,\pi)$. **Ответ.** $4a$.

Несобственный интеграл.

Задача 64. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+4}$.

Решение. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\big(arctg(\infty) - arctg(0)\big) =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}$. Здесь символом $arctg(\infty)$ фактически обозначается такой предел: $\lim\limits_{t\to\infty} arctg(t)$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Задача 65. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. На этом примере мы ещё раз повторим алгоритм выделения полного квадрата. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx =$

$$\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(arctg(\infty)-arctg(1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{8}$.

Задача 66. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int\limits_0^{\infty} e^{-5x}dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\infty} e^{-5x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-5x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\Big|_0^b\right) = -\frac{1}{5}\lim\limits_{b\to\infty}\left(e^{-5x}\Big|_0^b\right)$

$$= -\frac{1}{5}\lim\limits_{b\to\infty}\left(e^{-5b}-1\right) = -\frac{1}{5}(0-1) = \frac{1}{5}.$$

Для краткости в будущем можно не использовать знак lim а просто записывать так: $e^{-\infty}=0$ подразумевая при этом, что промежуточным действием был вычислен данный предел.

Ответ. $\frac{1}{5}$.

Задача 67. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx$.

Решение. На этом примере мы ещё раз вспомним метод интегрирования по частям.

$\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} xe^{-x}dx$. Интегрируем по частям.

Обозначим $u = x,\ \ v' = e^{-x}$. Тогда $u' = 1,\ \ v = -e^{-x}$.

Тогда далее $\lim\limits_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^b\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(\int\limits_0^b e^{-x}dx\right) =$

$\lim\limits_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^b\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = -\lim\limits_{b\to\infty}\left(be^{-b} - 0\right) - \lim\limits_{b\to\infty}\left(e^{-b} - 1\right) =$
$-(0-0) - (0-1) = 1.$

Ответ. 1.

Задача 68. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\limits_e^{\infty}\frac{1}{\ln^3 x}\frac{dx}{x} = \int\limits_e^{\infty}\frac{1}{\ln^3 x}d(\ln x)$

сделаем замену $t = \ln x$, далее $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{t^3}dt = \int\limits_1^{\infty}t^{-3}dt = -\frac{1}{2}t^{-2}\Big|_1^{\infty} =$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}\Big|_1^{\infty}\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$. **Ответ.** $\frac{1}{2}$.

Задача 69. Вычислить несобственный интеграл 2 рода $\int\limits_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Особенность в точке 1, впрочем, первообразная там может быть конечной, и мы даже не заметим, что интеграл несобственный:

$\int\limits_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{2}\frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{2}\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_1^{2}\frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}} =$

Пересчёт границ:

$x = 1 \ \Rightarrow\ t = 1^2 - 1 = 0$

$x = 2 \ \Rightarrow \ t = 2^2 - 1 = 3$.

Далее, $\int\limits_0^3 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_0^3 = \sqrt{3}$. **Ответ.** $\sqrt{3}$.

Задача 70. Выяснить сходимость несобственного интеграла по признакам сравнения: $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^4 + 2}$, не вычисляя его.

Решение. В числителе степень 3, в знаменателе 4. Тогда в качестве эталонной функции, с которой надо сравнить, нужно взять такую: $g(x) = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$. Докажем, что с ней можно сравнивать функцию в этом интеграле, то есть вычислим предел их отношения и получим, что он равен числу, а не 0 или ∞. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^4 + 2} \cdot \frac{x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4 + 2} = 1$.

Это эквивалентные величины, и сходимость исходного интеграла эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$. А этот интеграл расходится, так как степень равна 1 (см. теорию). Либо это видно из того, что первообразная в данном случае логарифм, и она не ограниченная функция.

Ответ. Расходится.

Задача 71. Выяснить сходимость несобственного интеграла по признакам сравнения: $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$, не вычисляя его.

Решение. Так как $\sin x \le 1$, то заменив функцию $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ на $\frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}$,

получим $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \le \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ причём, по признаку сравнения в не-предельной форме, если второй интеграл сходится (обозначим его (II)), то и исходный тоже сходится. А теперь заменим на ещё более простую функцию, но уже по признаку сравнения в предельной форме.

Бесконечно малая величина $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ при $x \to \infty$ эквивалентна $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Докажем это: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} : \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}} = 1.$

Поэтому сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$. Обозначим его (III). А про этот интеграл уже известно, что он сходится, ведь здесь классический случай, рассмотренный в лекциях, а именно $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$ где степень $a = \frac{3}{2} > 1$.

Итак, (III) сходится, что эквивалентно тому, что (II) сходится, а (II) > (I), поэтому исходный интеграл (I) тоже сходится.

Ответ. Сходится.

Задача Д-22. Выяснить сходимость несобственного интеграла по признакам сравнения $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}\sin x}{x^2+3x+5}dx$ не вычисляя его.

Ответ. Сходится.

Задача 72. Выяснить сходимость несобственного интеграла 2-го рода по признакам сравнения $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

Особенность в 0 только у первого корня, второй там не даёт 0 в знаменателе. Заменим на эквивалентную, в качестве которой возьмём функцию только с тем множителем, который стремится к 0 в знаменателе при $x \to 0$. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Докажем, что они эквивалентны:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1.$$

Значит, $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ сходится $\Leftrightarrow \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится.

$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1/2}}$, $a = \frac{1}{2} < 1$, что для интеграла 2 рода влечёт сходимость.

Либо можно рассмотреть $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^{1/2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^{1/2} \neq \infty$.

Ответ. Сходится.

Задача Д-23. Выяснить сходимость: $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (аналогично предыдущей задаче 72). **Ответ.** Сходится.

Задача 73. Выяснить сходимость несобственного интеграла 2-го рода по признакам сравнения $\int_0^1 \frac{\cos x dx}{x \sin x}$.

Решение. Заметим, что в знаменателе x и $\sin x$, который в свою очередь эквивалентен x (по 1 замечательному пределу). Поэтому можно взять $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Обоснуем это с помощью предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x \sin x} \frac{x^2}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Тогда остаётся выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$. Он расходится, степень 2 > 1 что для интеграла 2-го рода влечёт расходимость. Поэтому и исходный интеграл тоже расходится.
Ответ. Расходится.

Задача 74. Выяснить сходимость несобственного интеграла по признакам сравнения $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Здесь эквивалентная величина подбирается по самым старшим степеням, ведь надо будет найти предел в ∞.

$f = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}$, тогда $g = \frac{x^{1/3}}{x^2} = \frac{1}{x^{5/3}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \frac{x^2}{x^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/\sqrt{x}^3} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}dx$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{5/3}}dx$ сходится. А здесь $a = \frac{5}{3} > 1$, то есть он сходится. **Ответ.** Сходится.

Задача 75. Выяснить сходимость несобственного интеграла по признакам сравнения $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Здесь эквивалентная величина подбирается по самым младшим степеням, ведь надо будет найти предел в 0.

$f = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}$, тогда $g = \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1/6}}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} =. \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{3/2}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 .$$

Интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}dx$ сходится $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{1/6}}dx$ сходится.

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/6}}dx = \int_0^1 x^{-1/6}dx$. Так как степень $-\frac{1}{6}$, то первообразная будет иметь степень ровно на 1 больше, то есть $\frac{5}{6}$. Таким образом, у первообразной переменная x в числителе, а не в знаменателе, и когда мы будем подставлять 0 по формуле Ньютона-Лейбница, это даст конечный результат. **Ответ.** Сходится.

Двойные интегралы в декартовых координатах.

Задача 76. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xydxdy$, где D прямоугольник, $x\in[0,1], y\in[0,2]$.

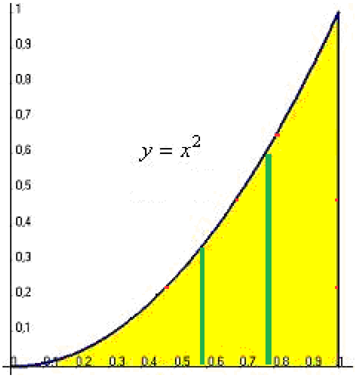
Решение. Есть эквивалентные формы записи в таком случае:

$\int_0^1 dx\int_0^2 xydy = \int_0^1\left(\int_0^2 xydy\right)dx$. Итак, сначала во внутреннем цикле найдём первообразную по переменной y: $\int_0^1\left(x\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2\right)dx = \int_0^1(2x)dx = \left.x^2\right|_0^1 = 1.$

Ответ. 1.

Задача 77. Вычислить интеграл $\iint_D xydxdy$, где D область, ограниченная линиями $y=0$, $x=1$, $y=x^2$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь верхняя граница - парабола. При каждом $x \in [0,1]$ точка движется по вертикали от высоты 0 до высоты $y = x^2$.



Поэтому во вложенном цикле зависимость границ от внешней переменной x.

Вычисление: $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} xydy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$.

Ответ. $\frac{1}{12}$.

Задача 78. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ye^{xy} dxdy$, где D квадрат, $x \in [0,1], y \in [0,1]$.

Решение. У нас есть 2 варианта: сделать внешний цикл по x, а внутренний по y, то есть $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 ye^{xy} dy \right) dx$, либо наоборот, $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 ye^{xy} dx \right) dy$. Несмотря на то, что область квадрат, и казалось бы, всё равно, каков порядок интегрирования, но если сделать внутренний цикл по y то в обоих множителях есть переменная интегрирования, то есть мы сразу столкнёмся с интегрированием по частям, а вот если внутренний цикл по x, то только в одном множителе есть переменная, по которой интегрируем. Более того, y служит коэффициентом при x в степени экспоненты, то есть надо будет разделить на y, и он сократится, останется вообще одна экспонента! Этот путь более рациональный и предпочтительно здесь сделать именно так.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 ye^{xy}dx\right)dy = \int_0^1\left(y\frac{1}{y}e^{xy}\Big|_0^1\right)dy = \int_0^1\left(e^{xy}\Big|_0^1\right)dy = \int_0^1\left(e^y - e^0\right)dy =$$

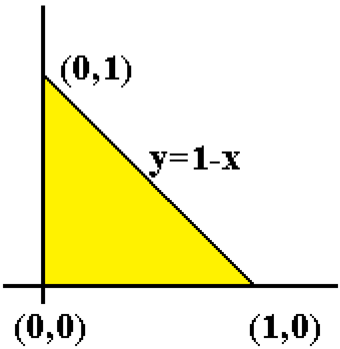
$$\int_0^1\left(e^y - 1\right)dy = \left(e^y - y\right)\Big|_0^1 = \left(e^1 - e^0\right) - (1-0) = e-2.$$

Замечание. А если $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$ то наоборот, надо сделать внутренний цикл по y, а внешний по x.

Ответ. $e-2$.

Задача 79. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по треугольнику D, вершины которого: $(0,0),(1,0),(0,1)$.

Решение. Строение треугольника понятно (см. чертёж).
Наклонная линия задаётся уравнением $y = 1-x$.



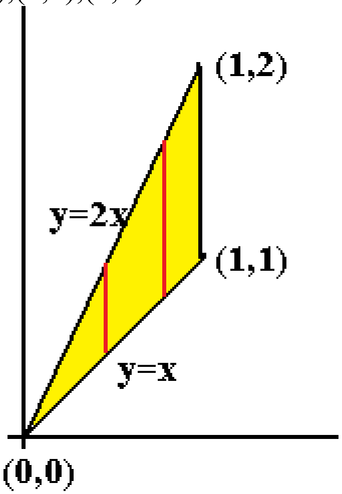
Вычисление: $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy = \int_0^1\left(xy\Big|_0^{1-x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)dx =$

$$\int_0^1\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x-x^2+\frac{1-2x+x^2}{2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$\left.\frac{x}{2}\right|_0^1-\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 80. Вычислить интеграл $\iint\limits_D(3x+2y)dxdy$ по треугольнику D, вершины которого: (0,0),(1,1),(1,2).



Решение. Итак, по чертежу видно, что $x\in[0,1]$, а в свою очередь при каждой фиксированной абсциссе, $y\in[x,2x]$.

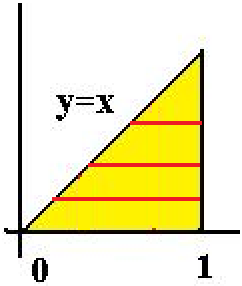
$$\iint\limits_D(3x+2y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{2x}(3x+2y)dy=\int_0^1\left(3xy\Big|_x^{2x}+y^2\Big|_x^{2x}\right)dx=$$

$$\int_0^1\left(6x^2-3x^2+4x^2-x^2\right)dx=\int_0^1 6x^2dx=6\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=2.$$

Ответ. 2.

Задача 81. Сменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$.

Решение. Сначала построим чертёж. При каждом x переменная y растёт от 0 до x, то есть точки образуют треугольник. А теперь проведём не вертикальные, а горизонтальные линии.

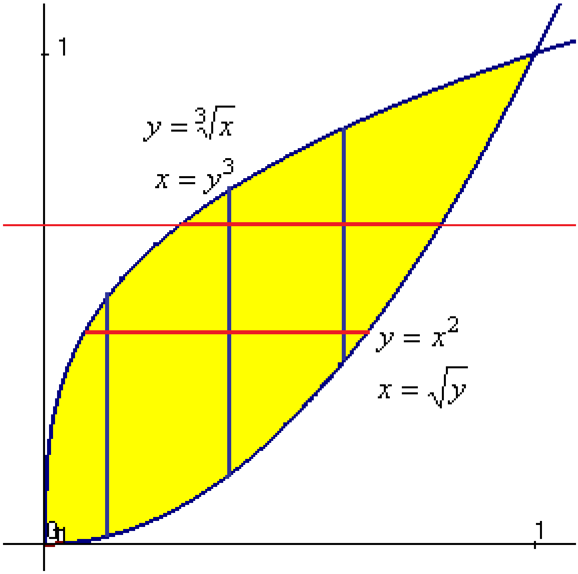


Линия $y = x$, задающая верхнюю границу, для левой границы может быть переписана как $x = y$. Горизонтальный отрезок начинается с этой наклонной линии и завершается при $x = 1$. Таким образом,

Ответ. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$.

Задача 82. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy$.

Решение. Сделаем чертёж, также выразим в каждом уравнении через обратную функцию.



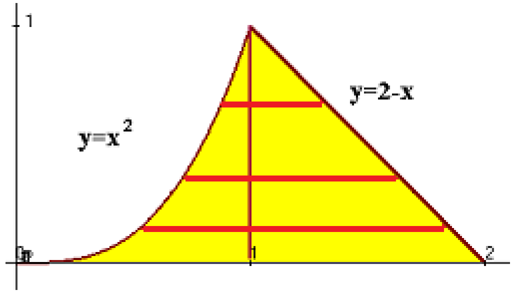
Уравнение $y = x^2$ с помощью обратной функции будет задано в виде $x = \sqrt{y}$, а $y = \sqrt[3]{x}$ соответственно $x = y^3$.

Нижняя граница здесь становится правой, а верхняя граница исполняет роль левой. Ведь если мы проводим вертикальные отрезки внутри фигуры, они начинаются от квадратичной параболы, то есть при движении снизу вверх точка начинает двигаться от этой линии. А по горизонтальным, наоборот, точка при движении слева направо движется **до** этой линии, а не **от** неё (см. красные линии). Тогда после смены порядка, интеграл будет в виде: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^3}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Ответ. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^3}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Задача 83. Сменить порядок интегрирования в двойном интеграле:
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.

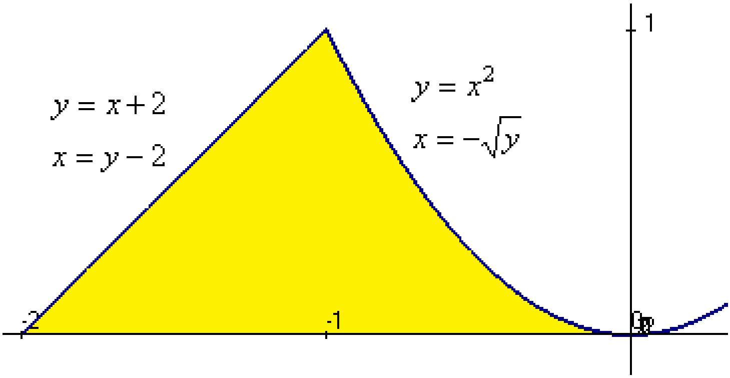
Решение. Построим чертёж.



Видно, что здесь верхняя граница переходит с одной кривой на другую, поэтому от 0 до 1 и от 1 до 2 пришлось разбить на 2 разных слагаемых, если внешняя переменная x. А если внешняя переменная будет y, то надо будет найти левую и правую границы горизонтальных отрезков. А они не переходят на другую кривую: левая всегда на параболе, а правая граница на линии $y = 2 - x$. Если записать через обратные функции, то вместо $y = x^2$ будет $x = \sqrt{y}$, а вместо $y = 2 - x$ соответственно, $x = 2 - y$. Тогда вся область будет учтена сразу, то есть два слагаемых свернутся в одно: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$. **Ответ.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Задача 84. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_0^{x+2} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} fdy$.

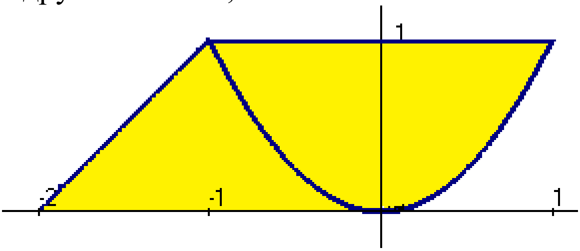
Решение. Построим чертёж.



Перепишем через обратные функции. Уравнение $y = x + 2$ записывается в виде $x = y - 2$, а $y = x^2$ в виде $x = -\sqrt{y}$.

Тогда получим такой ответ. **Ответ.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-2}^{-\sqrt{y}} f\, dx$.

Замечание. Перед корнем квадратным именно минус, потому что $x < 0$, то есть именно отрицательная ветвь корня. Если по ошибке не заметить этого и взять $x = +\sqrt{y}$, то получится продление до правой ветви, и совсем другая область, а именно:



Тройной интеграл в декартовых координатах.

Задача 85. Вычислить $\iiint\limits_D (x + yz)dxdydz$ по кубу $x, y, z \in [0,1]$.

Решение. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + yz)dz$. Здесь уже 3 а не 2 вложенных цикла.

Это также можно записать в виде: $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 (x + yz)dz \right) dy \right) dx$.

Сначала вычислим внутренний интеграл по z и применим формулу Ньютона-Лейбница именно к переменной z, остальные при этом вычислении остаются в роли параметров, вместо них ничего не подставляется.

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(xz\Big|_0^1 + y\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \right) dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(x + \frac{y}{2} \right) dy \right) dx.$$

Теперь первообразная по y и формула Ньютона-Лейбница применяется в этой скобке именно к y.

$\int\limits_0^1 \left(xy\Big|_0^1 + \dfrac{y^2}{4}\Bigg|_0^1 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x + \dfrac{1}{4} \right) dx$. А теперь уже обычный определённый интеграл. $\int\limits_0^1 \left(x + \dfrac{1}{4} \right) dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Ответ. $\dfrac{3}{4}$.

Задача 86. Вычислить тройной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} (x^3 y^3 z) dz$.

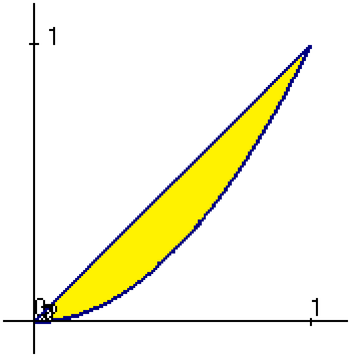
Решение. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} (x^3 y^3 z) dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(\dfrac{x^3 y^3 z^2}{2} \Bigg|_0^{xy} \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \dfrac{x^5 y^5}{2} dy =$

$\int\limits_0^1 \left(\dfrac{x^5 y^6}{12} \Bigg|_0^x \right) dx = \int\limits_0^1 \dfrac{x^{11}}{12} dx = \dfrac{x^{12}}{144}\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{144}$.

Ответ. $\dfrac{1}{144}$.

Задача 87. Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $\{y = x, y = x^2, z = 0, z = x^2 + y^2\}$.

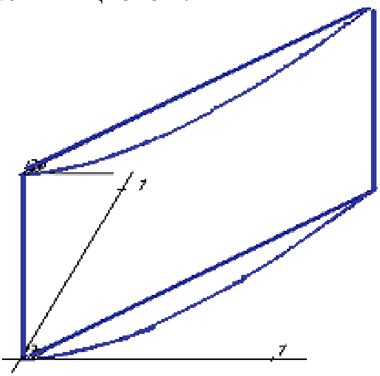
Решение. Метод построения 3-мерного чертежа: сначала выбрать все те уравнения, которые не содержат z, и построить плоскую проекцию (вид сверху) этой фигуры. Строим графики $\{y = x, y = x^2\}$.

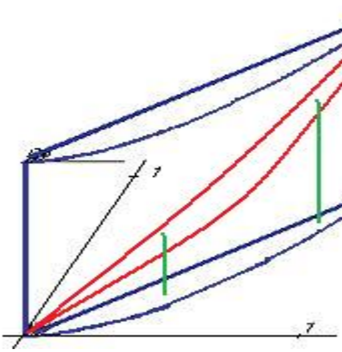


Теперь видно, что $x \in [0,1]$, а при каждом фиксированном x, $y \in [x^2, x]$.

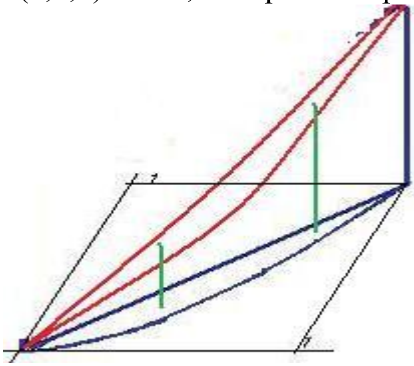
Вообще, $\{y = x, y = x^2\}$ в плоскости это - уравнения кривых, но для пространства это уравнения поверхностей. Отсутствие z означает, что z любое, то есть к прямой и параболе присоединены вертикальные образующие. Представьте, что один вертикально поставленный лист ровный, а второй изогнут по параболе. Внутри такой узкой «шахты» как раз и располагается искомая фигура.

А теперь определим границы по высоте, чтобы окончательно построить чертёж. Для каждой точки, взятой на плоскости в том основании, которое показано на предыдущем чертеже, высота меняется от $z = 0$ до $z = x^2 + y^2$, эти линии отмечены зелёным цветом. Эллиптический параболоид пересекается с каждой из указанных ранее вертикальных стенок, пересечения показаны красным цветом.





Самая верхняя точка (1,1,2). Итак, изобразим каркас этой фигуры:



Так как вычисляется объём, то надо полагать $f \equiv 1$.

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(\int_0^{x^2+y^2} 1dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(z\Big|_0^{x^2+y^2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2 \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\left(x^2 y\Big|_{x^2}^{x} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{x^2}^{x} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 21 - 5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}.$$

Ответ. $V = \dfrac{3}{35}$.

Задача Д-24. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $\{y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, z = 6 - x\}$. **Ответ.** $\dfrac{48}{5}\sqrt{6}$.

Двойные интегралы в полярных координатах.

Задача 88. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$ по полукругу радиуса 1 в правой полуплоскости.

Решение.

Алгоритм: 1) определить границы интегрирования по ρ, φ.

2) пересчитать x, y в функции через ρ, φ, используя $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

3) домножить на определитель Якоби, который равен ρ.

Так как полукруг именно в правой полуплосости, то учитываются 4-я и 1-я четверти, то есть угол от -90 до 90 градусов.

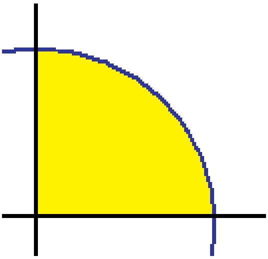
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1 (\rho\cos\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1 (\rho^2\cos\varphi)d\rho\right)d\varphi =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\varphi\ \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\ d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-(-1)) = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задача 89. Вычислить $\iint\limits_D xy^5 dxdy$, где D - четверть круга радиуса 2 (в первой координатной четверти).

Решение. Заменим $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а также умножим на якобиан ρ.



$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 \rho\cos\varphi(\rho\sin\varphi)^5\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 \sin^5\varphi\cos\varphi\ \rho^7 d\rho\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\sin^5\varphi\cos\varphi\left.\frac{\rho^8}{8}\right|_0^2\right)d\varphi = \frac{2^8}{2^3}\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos\varphi\ d\varphi =$$

$$32\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\ d(\sin\varphi) = 32\frac{1}{6}\sin^6\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}.$$ **Ответ.** $\frac{16}{3}$.

Задача 90. Вычислить $\iint\limits_D x^9 y dxdy$, где D - четверть круга радиуса 1 (в первой координатной четверти).

Решение.

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1(\rho\cos\varphi)^9(\rho\sin\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\rho^{11}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\rho\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^9\varphi\sin\varphi\frac{\rho^{12}}{12}\Big|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi$$

Дальше остаётся интеграл от одной переменной, там можно применять обычный способ, подведение под знак дифференциала.

$$\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi = -\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi(-\sin\varphi\ d\varphi) =$$

$$-\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\ d(\cos\varphi) = -\frac{1}{12}\frac{1}{10}\cos^{10}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{120}(0-1) = \frac{1}{120}.$$

Ответ. $\frac{1}{120}$.

Площадь поверхности (с помощью двойного интеграла).

Задача 91. Найти площадь поверхности $z = x^2 + y^2 (z \le 1)$.
Физический смысл задачи: сколько металла потребуется на изготовление параболической антенны.

Решение. Найдём интеграл $S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}dxdy$ где D окружность радиуса 1. Здесь $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$.

$S = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$, перейдём к полярным координатам.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\ d\rho\right)d\varphi \ = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,8\rho\ d\rho\right)d\varphi \ =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,d(1+4\rho^2)\right)d\varphi \ = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(1+4\rho^2\right)^{1/2} d(1+4\rho^2)\right)d\varphi \ =$$

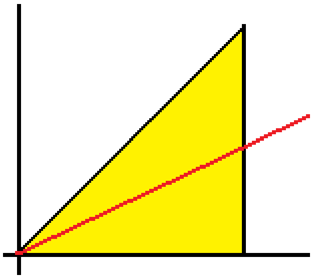
$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1\right)d\varphi \ = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(5^{3/2}-1^{3/2}\right)d\varphi \ = \frac{1}{12}\left(\sqrt{5}^3-1\right)\int_0^{2\pi}d\varphi \ =$$

$$\frac{1}{12}\left(\sqrt{5}^3-1\right)2\pi \ = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi\,.$$

Ответ. $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$.

Задача 92. Записать в полярных координатах двойной интеграл по треугольнику с вершинами (0,0), (1,0), (1,1).

Решение.



В декартовых координатах интеграл был бы в виде: $\int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)dy\right)dx$.

Границы изменения угла от 0 до 45 градусов. Определим верхнюю границу роста радиуса в зависимости от угла поворота. Для этого нужно задать линию $x=1$ в полярных координатах. Подставим выражение x через полярные координаты в уравнение этой линии, получим $\rho\cos\varphi = 1$, тогда $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Ответ. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4}\left(\int\limits_0^{1/\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi$.

Как видим, полярные координаты можно применять далеко не только в случае круговых областей, однако большого преимущества здесь это уже не даёт, пределы внутреннего интеграла здесь тоже зависят от внешнего.

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Задача 93. Вычислить массу шара радиуса 1, если плотность равна квадрату расстояния от центра шара.

Решение. Функция $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, это равно ρ^2, так как $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Кроме этого, умножим на определитель Якоби сферических координат, то есть $\rho^2 \sin\theta$.

Радиус равен 1, так что очевидно, $\rho \in [0,1]$.

$\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $\rho \in [0,1]$.

Итак, $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho^2(\rho^2 \sin\theta) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho^4 \sin\theta d\rho =$

$\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left(\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1\right) d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{5} \sin\theta d\theta = \frac{1}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left.-\cos\theta\right|_0^{\pi}\right) =$

$\displaystyle\frac{2}{5}\int\limits_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{4\pi}{5}$. **Ответ.** $\dfrac{4\pi}{5}$.

Задача 93Б (вариант). Если плотность вещества равна расстоянию от начала координат.

Решение.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \rho\ \rho^2 \sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \rho^3 \sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\sin\theta \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\right)d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\ d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left((-\cos\theta\ )\Big|_0^{\pi}\right)d\varphi =$$

$$\frac{2}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}2\pi = \pi .$$ **Ответ**. π .

Задача Д-25. Вычислить массу 1/8 шара радиуса 1 в первом октанте, если плотность равна квадрату расстояния от центра шара.

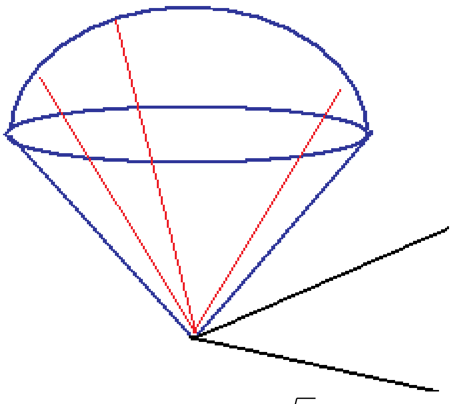
Если часть шара только в 1 октанте, то $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

В конце решения задачи задачи 93 тогда получилось бы так:

$$\frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} d\varphi\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$ **Ответ.** $\frac{\pi}{10}$.

Задача 94. Найти объём тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и сферой радиуса $\sqrt{2}$.

Решение. Чертёж:



Конус пересекается со сферой радиуса $\sqrt{2}$ на высоте $z = 1$.

Отклонение угла θ достигает от 0 до 45 град, чтобы пересечение луча с фигурой существовало. Любой отрезок, проведённый из начала координат (если он упирается в сферу, находится внутри этой фигуры) имеет длину $\sqrt{2}$. Итак,

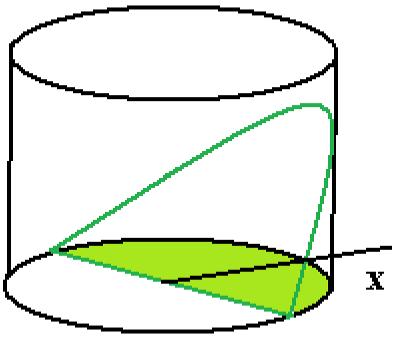
$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho =$$

$$2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{\sqrt{2}^3}{3} = 2\pi\frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3} =$$

$$2\pi\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}-1}{1}\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ. $\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 95. Вычислить объём тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и двумя плоскостями $z = 0, z = x$ в цилиндрических координатах.



Решение. На чертеже показано строение фигуры: 2 среза из цилиндра, один с помощью горизонтальной плоскости $z = 0$, другой с помощью наклонной плоскости $z = x$. Зелёным закрашено основание этой фигуры, а именно, полукруг в правой полуплоскости.

Для того, чтобы точка в плоскости находилась в основании этой фигуры, требуется $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0,1]$. Определим теперь границы последнего из вложенных интегралов, самого внутреннего, который по переменной z. Если $z \in [0, x]$, от горизонтальной до наклонной плоскости. При этом, x нужно выразить в цилиндрических координатах, ведь границы интегрирования внутреннего интеграла должны зависеть от внешних переменных ρ, φ. Поэтому $z \in [0, \rho\cos\varphi]$. Функция тождественная 1, чтобы вычислить объём, но при этом не забываем домножить на якобиан цилиндрических координат, то есть на ρ. Итак, получается $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\rho\cos\varphi}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi$.

Вычислим этот интеграл. Сначала в самом внутреннем из них применяется формула Ньютона-Лейбница по переменной z.

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\left(\rho\ z\Big|_0^{\rho\cos\varphi}\right)d\rho\right)d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\rho^2\cos\varphi\ d\rho\right)d\varphi$$

Теперь уже остался не тройной, а двойной интеграл. Во внутренней скобке применяется формула Ньютона-Лейбница по ρ.

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\varphi\ \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1\right)d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{3}\cos\varphi\ d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\ \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1-(-1)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Задача 96. Решить уравнение $y' = 5y$.

Решение. Запишем $\frac{dy}{dx} = 5y$. Теперь домножим на dx, разделим на y. $\frac{dy}{y} = 5dx$. Особое решение $y \equiv 0$. Далее, $\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow$ $\ln|y| = 5x + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1}e^{5x} = Ce^{5x}$ (где C > 0 так как $C = \pm e^{C_1}$). Но нам надо выразить не $|y|$, а само y, тогда и ограничение на положительность C также исчезает, и в итоге общее решение этого уравнения, что и является ответом: $y = Ce^{5x}$, где $C \in R$.

Ответ. $y = Ce^{5x}$ $(C \in R)$.

Задача 97. Решить дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$, и найти частное решение, удовлетворяющее условию Коши $y(0) = 2$.

Решение. $y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = -\int xdx$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$, умножим на 2: $y^2 = -x^2 + 2C_1$. Константа $2C_1$ не может быть отрицательной, иначе $y^2 < 0$ и не будет существовать корень квадратный. Тогда $2C_1 > 0$, и можно обозначить её в виде C^2.

Итак, $y^2 = C^2 - x^2$, это уравнение окружности.

Но выразим явно функцию $y(x)$: $y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$ общее решение.

Проверка: $y' = \sqrt{C^2 - x^2}\,' = \frac{-2x}{2\sqrt{C^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$.

Теперь применим условие Коши $y(0) = 2$, то это означает, что надо найти среди бесконечного множества кривых именно ту кривую, которая проходит через точку (0,2) на плоскости. Фиксируем $x = 0$,

$y=2$ тогда в уравнении остаётся всего одно неизвестное, а именно C. Тогда $y=\pm\sqrt{C^2-x^2} \Rightarrow 2=\sqrt{C^2-0} \Rightarrow C^2=4$, т.е. $C=\pm 2$. Теперь возвращаемся к общему решению, но там уже фиксируем найденное C. Частное решение: $y=\sqrt{4-x^2}$.

Ответ. Общее решение $y=\pm\sqrt{C^2-x^2}$, частное решение $y=\sqrt{4-x^2}$.

Задача 98. Решить уравнение $xy'=y^2-y$, и найти частное решение для задачи Коши: $y(2)=-1$.

Решение. $xy'=y^2-y \Rightarrow x\dfrac{dy}{dx}=y^2-y \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2-y}=\dfrac{dx}{x}$.

Особые решения: $y\equiv 0$ и $y\equiv 1$. Далее, чтобы найти интеграл левой части, надо разложить на простейшие дроби, а именно

$\dfrac{1}{y^2-y}=\dfrac{1}{y(y-1)}=\dfrac{A}{y}+\dfrac{B}{y-1}$. При приведении к общему знаменателю, получается $\dfrac{Ay-A+By}{y(y-1)}=\dfrac{0y+1}{y(y-1)}$, что приводит к системе уравнений $\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$, тогда $A=-1, B=1$.

$$\int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{-1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)dy=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1|-\ln|y|=\ln|x|+\ln C$$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{y-1}{y}\right|=\ln C|x| \Rightarrow \dfrac{y-1}{y}=Cx \Rightarrow 1-\dfrac{1}{y}=Cx \Rightarrow \dfrac{1}{y}=1-Cx$, и

ответ: $y=\dfrac{1}{1-Cx}$. Это «общее решение», то есть бесконечный набор решений. Теперь найдём частное решение. Применим условие $y(2)=-1$, то есть подставим $x=2, y=-1$ и сможем найти С.

$$y=\frac{1}{1-Cx} \Rightarrow -1=\frac{1}{1-2C} \Rightarrow 1-2C=-1 \Rightarrow C=1.$$

Тогда частное решение: $y=\dfrac{1}{1-x}$.

Ответ. Общее решение $y = \dfrac{1}{1 - Cx}$, частное решение: $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

Задача Д-26. Решить уравнение $xyy' = 1 - x^2$.

Ответ. $y = \pm\sqrt{\ln(Cx^2) - x^2}$.

Задача 99. Решить уравнение $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 + 1}$.

Решение. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 + 1} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 + 1} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dx}{x^2 + 1}$.

Особое решение $y \equiv 0$.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} \Rightarrow 2\sqrt{y} = arctgx + 2C \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2} arctgx + C$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{2} arctgx + C\right)^2.$$

Ответ. $y = \left(\dfrac{1}{2} arctgx + C\right)^2$.

Однородные уравнения

Задача 100. Решить уравнение $y' = \dfrac{y + x}{x}$.

Решение. Уравнение можно рассматривать как «однородное», то есть вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Оно может быть записано в виде $y' = \dfrac{y}{x} + 1$.

Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, при этом $y = ux$, а значит, $y' = u + xu'$. Тогда уравнение приводится к виду $u + xu' = u + 1$, то есть $xu' = 1 \Rightarrow$

$$x\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + C.$$

надо сделать обратную замену, $\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x\ln|x| + Cx$.

Ответ. $y = x\ln|x| + Cx$.

Линейные уравнения 1 порядка.

Линейное однородное:

Задача 101. Решить уравнение $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.

Решение. Линейное однородное фактически является уравнением с разделяющимися переменными.

$$(1+x^2)y' - 2xy = 0 \Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = \ln(x^2+1) + \ln C \Rightarrow y = C(x^2+1).$$

Ответ. $y = C(x^2+1)$.

Проверка: $y = C(x^2+1)$, $y' = 2Cx$, подставим в исходное уравнение, будет $(1+x^2)2Cx - 2xC(1+x^2) = 0$

Задача 102. Решить линейное неоднородное уравнение $xy' - 2y = 3x^5$.

Решение. 1) Решим соответствущее однородное.

$$xy' - 2y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$y = Cx^2$ - общее решение однородного уравнения.

2) Ищем общее решение неоднородного в виде $y = C(x)x^2$, при этом получится $y' = C'(x)x^2 + C(x)2x$, подставляя y и y' в уравнение $xy' - 2y = 3x^5$, получаем:

$C'(x)x^3 + C(x)2x^2 - 2C(x)x^2 = 3x^5 \;\Rightarrow\; C'(x)x^3 = 3x^5 \;\Rightarrow\; C'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow C(x) = x^3 + C$. Тогда $y = (x^3 + C)x^2$ т.е. $y = x^5 + Cx^2$.

Ответ. $y = x^5 + Cx^2$.

Здесь частное решение неоднородного это x^5 . Кстати, можно сделать и проверку этого ответа: $x(x^5)' - 2x^5 = x5x^4 - 2x^5 = 3x^5$.

Задача 103. Решить линейное неоднородное уравнение $2y' + 4xy = x$.

Решение. 1) Сначала решим однородное $2y' + 4xy = 0$.

$$2y' + 4xy = 0 \;\Rightarrow\; y' = -2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2xdx \;\Rightarrow$$

$\ln y = -x^2 + \ln C \;\Rightarrow$ решение однородного $y = Ce^{-x^2}$.

2) Ищем решение неоднородного в виде $y = C(x)e^{-x^2}$.

При этом $y' = C'(x)e^{-x^2} - C(x)2xe^{-x^2}$.

Подставляем y и y' в исходное неоднородное уравнение $\Rightarrow$

$$2C'(x)e^{-x^2} - 4xC(x)e^{-x^2} + 4xC(x)e^{-x^2} = x \;\Rightarrow\; 2C'(x)e^{-x^2} = x \;\Rightarrow$$

$$C'(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2} \;\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{x^2}(2xdx) \;\Rightarrow$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{x^2}(2xdx) \;\Rightarrow C(x) = \frac{1}{4}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{4}e^{x^2} + C \;.$$

Тогда $y = \left(\frac{1}{4}e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = \frac{1}{4} + Ce^{-x^2}$.

Ответ. $y = \frac{1}{4} + Ce^{-x^2}$.

Уравнения Бернулли.

Задача 104. Решить дифференциальное уравнение $y' - 3x^2y = x^2y^4$

Решение. 1) Разделим на y^4 . Получаем $\frac{y'}{y^4} - 3x^2\frac{1}{y^3} = x^2$.

2) Введём замену $\dfrac{1}{y^3} = z$, при этом $z' = -3y^{-4}y' = -3\dfrac{y'}{y^4}$.

Тогда $-\dfrac{1}{3}z' - 3x^2 z = x^2$. Для удобства умножим ещё на -3.

$z' + 9x^2 z = -3x^2$. Это линейное неоднородное уравнение. Оно решается в 2 шага: сначала соответствующее однородное.

3.1) $z' + 9x^2 z = 0$. Однородное является уравнением с разделяющимися переменными. $z' = -9x^2 z \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = -9x^2 z$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = -9x^2 dx$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z} = -\int 9x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = -3x^3 + \ln C \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{-3x^3}$ это общее решение однородного уравнения.

3.2) Метод Лагранжа. Ищем решение неоднородного в виде:

$z = C(x)e^{-3x^3}$. Тогда $z' = C'(x)e^{-3x^3} - 9x^2 C(x)e^{-3x^3}$. Подставим эти выражения в неоднородное уравнение $z' + 9x^2 z = -3x^2$.

$$C'(x)e^{-3x^3} - 9x^2 C(x)e^{-3x^3} + 9x^2 C(x)e^{-3x^3} = -3x^2 \quad \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-3x^3} = -3x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -3x^2 e^{3x^3} \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\int 3x^2 e^{3x^3} dx \quad \Rightarrow$$

$C(x) = -\displaystyle\int e^{3x^3} d(x^3)$. Так как $\displaystyle\int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t} + C$, то $C(x) = -\dfrac{1}{3}e^{3x^3} + C$.

Тогда $z = C(x)e^{-3x^3} \quad \Rightarrow \quad z = \left(-\dfrac{1}{3}e^{3x^3} + C\right)e^{-3x^3} \quad \Rightarrow \quad z = -\dfrac{1}{3} + Ce^{-3x^3}$.

4) Обратная замена: вспомним, что $\dfrac{1}{y^3} = z$, тогда $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}} \quad \Rightarrow$

Ответ. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3} + Ce^{-3x^3}}}$.

Дифференциальные уравнения высшего порядка.

Задача 105. Решить дифференциальное уравнение $y'' = (y')^2$.

Решение. Это уравнение сводится к $z' = z^2$ заменой $z = y'$, $z' = y''$.

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx$$

Особые решения: $z = y' = 0 \Rightarrow y = C$.

Далее, $\int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C_1 \Rightarrow z = -\frac{1}{x + C_1}$.

Провести обратную замену здесь означает вычислить первообразную, ведь у нас было $z = y'$.

$$y = -\int \frac{1}{x + C_1} dx = -\ln|x + C_1| + C_2 .$$

Ответ. $y = -\ln|x + C_1| + C_2$.

Задача 106. Найти общее решение уравнения $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ и частное решение при условиях Коши: $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Решение. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$.

Тогда уравнение сведено к виду $z'(x^2 + 1) = 2xz$.

$$\frac{dz}{dx}(x^2 + 1) = 2xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1(x^2 + 1) .$$

Теперь вспомним, что было $y' = z$ и сделаем обратную замену.

$$y = \int C_1(x^2 + 1)dx = \frac{C_1 x^3}{3} + C_1 x + C_2$$ - это общее решение.

Особые решения: $z = y' = 0 \Rightarrow y = C$, но здесь их не надо указывать отдельно, так как они входят в состав общего решения: при $C_1 = 0$ остаётся только $y = C_2$.

А теперь конкретизируем константы с помщью условий Коши, то есть найдём частное решение. У нас есть информация:

$$y=\frac{C_1x^3}{3}+C_1x+C_2, \quad z=y'=C_1(x^2+1)$$

а также $y(0)=1, y'(0)=3$.

Тогда $y(0)=\frac{C_1 0^3}{3}+C_1 0+C_2=1$, $y'(0)=C_1(0^2+1)=3$, то есть

$C_1=3, C_2=1$. Тогда частное решение: $y_ч=x^3+3x+1$.

Ответ. $y=\frac{C_1x^3}{3}+C_1x+C_2, \quad y_ч=x^3+3x+1$.

Задача 107. Найти общее решение уравнения $xy'''=y''$ и частное решение при условиях Коши: $y(1)=1, y'(1)=0, y''(1)=3$.

Решение. Сделаем замену $y''=z$, тогда уравнение сводится к $xz'=z$, решаем его: $x\frac{dz}{dx}=z \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z=\ln x+\ln C \Rightarrow z=C_1x$.

Теперь вспомним, что z это y'', и сделаем обратную замену, для этого надо 2 раза перейти к первообразной.

$$y''=C_1x \Rightarrow y'=\frac{C_1x^2}{2}+C_2 \Rightarrow y=\frac{C_1x^3}{6}+C_2x+C_3.$$

Особые решения: $z=y''=0 \Rightarrow y=kx+b$, впрочем, они входят в состав общего решения, ведь при $C_1=0$ будет $y=C_2x+C_3$.

Уравнение 3 порядка, и здесь получилось 3 константы. Теперь найдём частное решение. В первом столбце та или иная производная, во втором - что в неё подставить, какое из условий Коши. В третьем запишем, что при этом получается. Везде подставляем $x=1$.

$y=\frac{C_1x^3}{6}+C_2x+C_3$	$y(1)=1$	$\frac{C_1}{6}+C_2+C_3=1$
$y'=\frac{C_1x^2}{2}+C_2$	$y'(1)=0$	$\frac{C_1}{2}+C_2=0$
$y''=C_1x$.	$y''(1)=3$	$C_1=3$

$$\frac{C_1}{6}+C_2+C_3=1, \quad \frac{C_1}{2}+C_2=0, \quad C_1=3$$

Это система из 3 уравнений, но только метод Гаусса в полном объёме здесь не нужен, потому что сразу определено $C_1 = 3$, тогда из второго уравнения получим $C_2 = -\frac{3}{2}$, подставляем в первое $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + C_3 = 1 \Rightarrow$ $C_3 = 2$. Итак, $y_ч = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$.

Ответ. Общее реш. $y = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3$, частное $y_ч = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$.

Линейные однородные уравнения высшего порядка.

Задача 108. Найти общее решение дифф. уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 + r - 2 = 0$, его корни 1 и -2. Тогда ФСР = $\{e^x, e^{-2x}\}$, и общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Задача 109. Найти частное решение дифф. уравнения $y'' - 10y' + 9y = 0$ при условиях Коши: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 10r + 9 = 0$, его корни: $r_1 = 1,\ r_2 = 9$. Тогда ФСР состоит из e^x и e^{9x}, общее решение такое: $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$.

Теперь найдём решение задачи Коши. Сначала запишем функцию и её производную: $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$ и $y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}$.

Кроме того, у нас есть информация: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Тогда $C_1 + C_2 = -1$, $C_1 + 9C_2 = 7$. Получается система уравнений

$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 + 9C_2 = 7 \end{cases}$ вычитая 1-е уравнение из 2-го, находим, $8C_2 = 8$, т.е. $C_2 = 1$, тогда $C_1 = -2$. Тогда частное решение: $y = -2e^x + e^{9x}$.

Ответ. Общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$, частное $y = -2e^x + e^{9x}$.

Задача 110. Найти общее решение дифф. уравнения $2y'' + y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $2r^2 + r - 1 = 0$, его корни -1 и $\frac{1}{2}$. Тогда ФСР = $\{e^{-x}, e^{x/2}\}$, общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}$.

Ответ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}$.

Задача 111. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ при условиях Коши: $y(0) = 4, y'(0) = 3, y''(0) = 5$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow r(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow$ корни: 0, 1, 2.

Фундаментальная система решений состоит из e^{0x}, e^x и e^{2x}.

Общее решение в таком случае $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$.

Теперь надо найти решение задачи Коши. Есть информация, что $y(0) = 4, y'(0) = 3, y''(0) = 5$. Поэтому мы запишем саму функцию, а также 1 и 2 производную, применим условия Коши и получим систему на определение всех трёх констант:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \qquad y(0) = 4 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 4,$$

$$y' = C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}, \qquad y'(0) = 3 \Rightarrow C_2 + 2C_3 = 3,$$

$$y'' = C_2 e^x + 4C_3 e^{2x}, \qquad y''(0) = 5 \Rightarrow C_2 + 4C_3 = 5.$$

Решаем систему методом Гаусса. Можно из 3 уравнения вычесть 2-е.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 4 \\ C_2 + 2C_3 = 3 \\ C_2 + 4C_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 4 \\ C_2 + 2C_3 = 3 \\ 2C_3 = 2 \end{cases}.$$

Итак, $C_3 = 1$, тогда $C_2 = 1$, $C_1 = 2$. Итак, частное решение $y_ч = 2 + e^x + e^{2x}$.

Ответ. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$, частное реш. $y_ч = 2 + e^x + e^{2x}$.

Задача 112. Найти общее решение дифф. уравнения $y^{(5)} - y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^5 - r^3 = 0$, то есть $r^3(r-1)(r+1) = 0$, его 5 корней: $0,0,0,1,-1$.
ФСР состоит из функций $\{1, x, x^2, e^x, e^{-x}\}$, где для кратного корня записали степенные функции (по возрастающей), причём у них из-за корня 0 есть множитель e^{0x}, равный 1, поэтому его не пишем.
Ответ. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x}$.

Задача 113. Найти общее решение дифф. уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ и частное решение при условиях Коши $y(0) = 2, y'(0) = -1$.
Решение. Характеристическое: $r^2 - 2r + 1 = 0$, т.е. $(r-1)^2 = 0$. Здесь корень 1 кратности 2. Поэтому ФСР: $\{e^x, xe^x\}$, общее решение:
$y = C_1 e^x + C_2 xe^x$. Теперь ищем частное решение.
$y = C_1 e^x + C_2 xe^x$, $\qquad y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$
$y' = C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x$, $\quad y'(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1$
Отсюда $C_1 = 2, C_2 = -3$. Частное решение $y = 2e^x - 3xe^x$.
Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$, $\quad y = 2e^x - 3xe^x$.

Задача Д-27. Решить уравнение $y'' - 9y = 0$, найти частное решения для условий Коши: $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
Ответ. $y = e^{3x} + e^{-3x}$.

Задача 114. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' - 9y' + 18y = 0$ при условиях Коши:
$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.
Решение. Характеристическое уравнение: $r^3 - 2r^2 - 9r + 18 = 0$, то есть $r^2(r-2) - 9(r-2) = 0$, то есть $(r^2 - 9)(r-2) = 0$. Корни $2,3,-3$.
Общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$.
Запишем также производные, и применим условия Коши:
$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$, $\qquad y(0) = 1 \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1$,

$y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} - 3C_3e^{-3x}$, $y'(0) = 1 \Rightarrow \quad 2C_1 + 3C_2 - 3C_3 = 1$,

$y'' = 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{3x} + 9C_3e^{-3x}$, $y''(0) = -1 \Rightarrow \quad 4C_1 + 9C_2 + 9C_3 = -1$.

Для решения системы методом Гаусса, запишем и преобразуем расширенную матрицу. Из 2-й строки вычитаем 1-ю, домноженную на 2, а из третьей - 1-ю,домноженную на 4. Затем к 3-й строке прибавляем 2-ю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 9 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Теперь сразу видно, что $C_2 = -1$. Тогда $C_3 = 0$, $C_1 = 2$.

Частное решение: $y_ч = 2e^{2x} - e^{3x}$.

Ответ. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$, $\quad y_ч = 2e^{2x} - e^{3x}$.

Задача 115. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Ищем его корни. $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$. Корни $\dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} =$ $1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$. Найдём действительную и мнимую части функции $\exp((1+i)x) = e^x e^{ix} = e^x(\cos x + i\sin x) = e^x \cos x + ie^x \sin x$.

Две линейно-независимых функции образуют ФСР:

$y = e^x \cos x$ и $y = e^x \sin x$. Общее решение: $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$.

Ответ. $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$.

Проверка. Проверим, например, одно из слагаемых.

$y = e^x \sin x \Rightarrow y' = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow$

$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$.

Подставим в уравнение. $2e^x \cos x - 2e^x(\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x = 0$.

Задача Д-28. Найти общее решение дифф. уравнения $y'' + y' + y = 0$.

Ответ. $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Линейные неоднородные уравнения высшего порядка.

Задача 116 (А,Б). Решить уравнение $y'' - y = e^{2x}$.

А) методом Лагранжа Б) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Шаг I. Сначала решим **однородное** уравнение $y'' - y = 0$.

Характеристическое: $r^2 - 1 = 0$, корни 1 и -1. ФСР: $\{e^x, e^{-x}\}$.

Общее решение однородного: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Шаг II. Решаем **неоднородное.**

А) методом Лагранжа. Ищем решение в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$.

Тогда $y' = C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} + C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x}$.

Если мы продифференцируем 2-й раз и подставим в уравнение, то получится 1 условие на 2 неизвестных функции. То есть, они будут найдены не однозначным образом (условий меньше, чем неизвестных). Поэтому можем на промежуточном шаге добавить ещё одно условие, а именно, фиксировать $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0$. Тогда как раз получится 2 условия на 2 функции, и кроме того, не будет чрезмерно много слагаемых в следующей производной.

Итак, пусть дальше $y' = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x}$. Тогда

$y'' = C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} + C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. А теперь подставим найденные y'' и y в уравнение $y'' - y = e^{2x}$.

$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} + C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} - \left(C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}\right) = e^{2x}$.

3,4 слагаемые в левой части идентичны 5,6. Они сокращаются.

Тогда будет $C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = e^{2x}$.

Итак, получилась система:

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0$$
$$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = e^{2x}$$

Прибавим ко 2-му уравнинию 1-е, получим $2C_1'(x)e^x = e^{2x} \Rightarrow$

$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^x$.

Далее подставим это в 1-е, получим $\frac{1}{2}e^x e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \Rightarrow$

$C_2'(x)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}$

Ищем их первообразные.

$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2}e^x + C_1$.

$C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{6}e^{3x} + C_2$.

Тогда $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$ = $\left(\frac{1}{2}e^x + C_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{6}e^{3x} + C_2\right)e^{-x}$ =

$\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x}\right) + C_1e^x + C_2e^{-x}$ = $\frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Ответ. $y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Б) методом неопределённых коэффициентов.

Однородное уже решено: $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Ищем частное решение неоднородного по виду правой части.

$b(x) = e^{2x} = e^{2x}(1 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x)$.

Число 2 не входит в состав корней левой части, то есть кратность совпадения $k = 0$. Тогда частное решение ищется в виде

$y = x^0 e^{2x}(A \cdot \cos 0x + B \cdot \sin 0x)$, т.е. $y = Ae^{2x}$.

Тогда $y' = 2Ae^{2x}$, $y'' = 4Ae^{2x}$. Подставим их в неоднородное уравнение. $4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow$ частное решение неоднородного $\frac{1}{3}e^{2x}$.

Ответ. $y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Задача Д-29. Уравнение $y'' - y = xe^x$ решить методом неопределённых коэффициентов.

Ответ. $y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$

Задача 117. Решить уравнение: $y'' - 5y' + 4y = e^{3x}$ методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Шаг 1. Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 - 5r + 4 = 0$, его корни 1 и 4. Их можно было как найти через дискриминант, так и просто заметить, что многочлен представляется в виде $(r-1)(r-4)$.

Тогда общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2e^{4x}$.

Шаг 2. Заметим, что $b(x) = 1 \cdot e^{3x}$, число 3 не является характеристическим корнем, т.е. экспонента в правой части не совпадает ни с одной из экспонент, присутствующих в решении однородного уравнения. Тогда кратность $k = 0$, то есть дополнительный множитель в частном решении имеет вид $x^0 = 1$, то есть фактически, его не будет. Многочлен нулевой степени, а именно 1, должны заменить на произвольный многочлен той же степени, то есть константу A. Итак, структура частного решения будет иметь вид $y = x^0 \cdot A \cdot e^{3x} = Ae^{3x}$. Если $y = Ae^{3x}$, то легко установить, что $y' = 3Ae^{3x}$, $y'' = 9Ae^{3x}$. Подставим их в исходное неоднородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = e^{3x}$. Получим $9Ae^{3x} - 15Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x}$, то есть $-2Ae^{3x} = e^{3x}$, откуда $-2A = 1$, $A = -\frac{1}{2}$.

Частное решение $-\frac{1}{2}e^{3x}$. Тогда ответ, то есть общее решение неоднородного уравнения: $y = -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^{x} + C_2e^{4x}$.

Ответ. $y = -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^{x} + C_2e^{4x}$.

В следующих 2 задачах будем варьировать правую часть по сравнению с прошлой задачей, и посмотрим, чем будет отличаться решение. Пусть там будет или умножение на степенную, или другая степень экспоненты.

Задача 118. Решить уравнение: $y'' - 5y' + 4y = xe^{3x}$ методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 5r + 4 = 0$, его корни 1 и 4. Общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^{x} + C_2e^{4x}$.

Шаг 2. $b(x) = x \cdot e^{3x}$, где 3 не является характеристическим корнем, Тогда $k = 0$, Многочлен первой степени должны заменить на произвольный многочлен той же степени, то есть $Ax + B$. Итак, структура частного решения будет иметь вид $y = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot e^{3x} = (Ax + B)e^{3x}$.

$y = (Ax + B)e^{3x}$.

$y' = 3(Ax + B)e^{3x} + Ae^{3x} = (3Ax + 3B + A)e^{3x}$.

$y'' = (9Ax + 9B + 3A)e^{3x} + 3Ae^{3x}$

. Подставим их в исходное неоднородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = xe^{3x}$. , там сразу можно сократить на e^{3x}.

$(9Ax + 9B + 6A) - 5(3Ax + 3B + A) + 4(Ax + B) = x \quad \Rightarrow$

$-2Ax + A - 2B = x + 0 \Rightarrow$ система уравнений:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{4}.$$

Частное решение $\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{3x}$. Тогда ответ, то есть общее решение неоднородного уравнения: $y=-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{3x}+C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Ответ. $y=-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{3x}+C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Задача 119. Решить уравнение: $y''-5y'+4y=e^{4x}$ методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Характеристическое уравнение $r^2-5r+4=0$, его корни 1 и 4. Общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Шаг 2. $b(x)=e^{4x}$, где 4 является характеристическим корнем. Тогда $k=1$. Частное решение ищется в виде $y=Axe^{4x}$. Лишний множитель x из-за того, что $k=1$.

$y=Axe^{4x} \Rightarrow y'=A(4x+1)e^{4x} \Rightarrow y''=A(16x+8)e^{4x}$

Подставим в неоднородное уравнение.

$A(16x+8)e^{4x}-5A(4x+1)e^{4x}+4Axe^{4x}=e^{4x} \quad \Rightarrow$

$A(16x+8)-5A(4x+1)+4Ax=1 \quad \Rightarrow \quad 16Ax-20Ax+4Ax+8A-5A=1$

$\Rightarrow \ 3A=1 \Rightarrow \ A=\frac{1}{3}$.

Ответ. $y=\frac{1}{3}xe^{4x}+C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Задача 120. Решить уравнение $y''-3y'+2y=e^{2x}$.

Решение. Шаг 1. Характеристическое уравнение $r^2-3r+2=0$, корни 1 и 2, общее решение однородного: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

Шаг 2. Решение неоднородного. $b(x)=e^{2x}$. Здесь, в отличие от прошлого примера, экспонента 2 степени, а число 2 совпадает с корнем 2 (кратности 1). Другими словами, в ФСР однородного уравнения встречается точно такая же экспонента, как и в правой части. Поэтому кратность совпадения здесь $k=1$.

$y = Axe^{2x}$. $y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = A(1+2x)e^{2x}$

$y'' = 2A(1+2x)e^{2x} + 2Ae^{2x} = A(4+4x)e^{2x}$. Тогда

$A(4+4x)e^{2x} - 3A(1+2x)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}$.

$Ae^{2x} = e^{2x}$. , $A=1$, частное решение $y = xe^{2x}$

общее решение неоднородного $y = xe^{2x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Ответ. $y = xe^{2x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Задача 121. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = (2x+1)e^{3x}$.

Решение. Шаг 1. Характеристические корни 1 и 2, общее решение однородного $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Шаг 2. Справа степень 3, то есть кратность совпадения 0. Ещё в правой части есть многочлен 1-й степени, в структуре частного решения надо будет записать произвольный многочлен 1-й степени, то есть в итоге, $y = (Ax+B)e^{3x}$.

Найдём производные 1-го и 2-го порядка, чтобы подставить их в уравнение.

$y = (Ax+B)e^{3x}$

$y' = (Ax+B)'e^{3x} + (Ax+B)(e^{3x})' = (3Ax+3B+A)e^{3x}$.

$y'' = (9Ax+9B+3A+3A)e^{3x}$.

Подставим в уравнение, причём можно сразу сократить на экспоненту, которая там получается во всех слагаемых.

$(9Ax+9B+3A+3A) - 3(3Ax+3B+A) + 2(Ax+B) = 2x+1$.

После приведения подобных:

$2Ax+3A+2B = 2x+1$, из чего следует $2A=2$ и $3A+2B=1$, тогда $A=1$, $B=-1$. Частное решение неоднородного уравнения $y=(x-1)e^{3x}$, тогда окончательный ответ, т.е. общее решение неоднородного уравнения: $y = (x-1)e^{3x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Ответ. $y = (x-1)e^{3x} + C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Задача 122. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = e^x$.

Решение. Шаг 1. Найдём решение однородного $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристическое: $r^2 - 2r + 1 = 0$, то есть $(r-1)^2 = 0$. Два корня совпадают, $r_{1,2} = 1$. Тогда ФСР состоит из функций e^x, xe^x, а общее решение однородного: $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Шаг 2. Правая часть $b(x) = e^x$ содержит экспоненту степени 1, но число 1 является корнем кратности 2 левой части. Тогда $k = 2$.

Тогда структура частного решения будет такая: $y = Ax^2 e^x$.

Если $y = Ax^2 e^x$, то $y' = A(x^2 + 2x)e^x$, $y'' = A(x^2 + 2x + 2x + 2)e^x$.

Подставляяя в неоднородное уравнение, и сразу сокращая на одну и ту же экспоненту, которая есть во всех слагаемых, получим:

$A(x^2 + 2x + 2x + 2) - 2A(x^2 + 2x) + Ax^2 = 1$, следовательно

$(A - 2A + A)x^2 + (4Ax - 4Ax) + 2A = 1$, то есть $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$.

Итак, частное решение неоднородного: $\frac{1}{2}x^2 e^x$. Прибавим общее решение однородного, которое было получено на 1 шаге.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 xe^x$.

В следующей задаче оставим ту же левую часть, и изменим правую.

Задача 123. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$ методом неопределённых коэффициентов.

Шаг 1. Характеристическое уравнение для однородного:

$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2$, кратный корень 1, общее решение однородного $C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Шаг 2. В правой части нет экспоненты, то есть можно записать так:

$b(x) = (x^2 + 1)e^{0x}$. Корень 0 не присутствует в решении левой части, $k = 0$, так что домножать ни на какую степень не надо. Вместо данного многочлена степени 2, подставим произвольный, и тогда

$y = Ax^2 + Bx + C$. Далее, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$. Подставим всё это в исходное неоднородное уравнение.

$2A - 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$, после приведения подобных $Ax^2 + (Bx - 4Ax) + (2A - 2B + C) = x^2 + 1$. получается система уравнений

$$\begin{cases} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ 2A - 2B + C = 1 \end{cases}$$

откуда $A = 1, B = 4, C = 7$, и ответ: $x^2 + 4x + 7 + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Ответ. $x^2 + 4x + 7 + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Задача Д-30. Решить уравнение. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$.

Ответ. $y = (x-2)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Задача Д-31. Решить уравнение $y'' - y' = x^2 + 1$.

Ответ. $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C_1 + C_2 e^x$.

Задача Д-32. Решить уравнение $y'' + y = \sin x$.

Ответ. $y = -\dfrac{1}{2}x\cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Комплексные числа

Задача 124. Умножить и поделить в алгебраической форме числа $7 + i$ и $2 + 4i$.

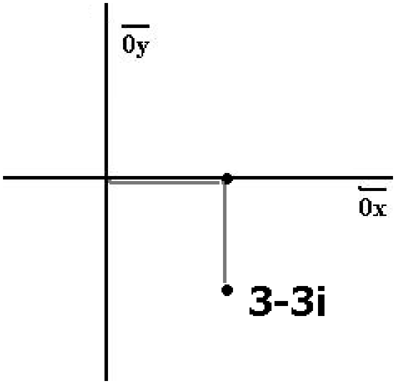
Решение. Умножим эти числа. $(7+i)(2+4i)$ = $14 + 2i + 28i + 4i^2$ = $14 - 4 + 30i$ = $10 + 30i$.

Поделим, с помощью умножения на сопряжённое:

$$\frac{7+i}{2+4i}=\frac{(7+i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{14-4i^2+2i-28i}{4-16i^2+8i-8i}=\frac{14+4-26i}{4+16}=\frac{18-26i}{20}$$

$$=\frac{9}{10}-\frac{13i}{10}=0{,}9-1{,}3i.$$

Задача 125. Запишите число $z=3-3i$ в тригонометрической и показательной формах.



Решение. Здесь первая координата x положительна, вторая координата y отрицательна, то есть от начала координат к данной точке нужно двигаться вправо и вниз, т.е. точка расположена в четвёртой четверти.

Вычислим модуль и аргумент данного числа. $\rho=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

$\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)=arctg\left(\frac{-3}{3}\right)=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$. Впрочем, также будет верно принять $\varphi=\frac{7\pi}{4}$, что отличается на полный оборот 2π.

Тригонометрическая форма числа $z=3-3i$:

$$\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Показательная форма: $z = \rho e^{i\varphi} = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

Задача 126. Разделить $\dfrac{-2+2i}{1+i}$ двумя способами:

1) с помощью умножения на сопряжённое число.

2) в показательной форме.

Решение. 1) $\dfrac{-2+2i}{1+i} = \dfrac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{4i}{2} = 2i$.

2) $\dfrac{-2+2i}{1+i} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 2\cdot e^{i\left(3\pi/4-\pi/4\right)} = 2\cdot e^{\pi i/2} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$

Ответ. $2i$.

Задача Д-33. Умножить $(6+3i)(7+4i)$. Ответ. $30+45i$.

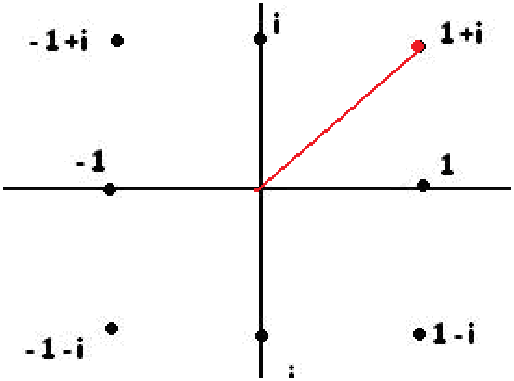
Задача 127. Возвести в степень: $(1+i)^4$.

Решение. Перейдём к показательной форме, для этого сначала найдём модуль и аргумент числа $(1+i)$ с помощью чертежа. Число в 1-й четверти, угол 45 градусов.

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. По формуле Муавра, $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 =$

$\left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 2^2 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1+0i) = -4$.

Чертёж, показывающий, расположение $(1+i)$ на плоскости, это число выделено красным цветом:



Ответ. -4.

Задача 128. Возвести в степень в показательной форме: $(-1+i)^6$.

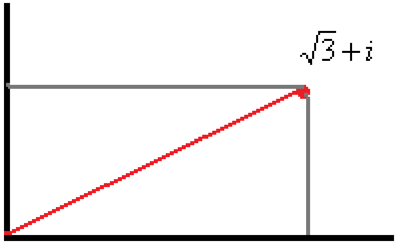
Решение. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\rho = \sqrt{2}$. Тогда $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, $z^6 = \sqrt{2}^6\left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^6 =$

$2^3 e^{\frac{3\pi}{4}6} = 8e^{\frac{9\pi}{2}} = 8\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$, мы можем отбросить 1 или более полных оборотов, при этом синус и косинус не изменятся, то есть отнять $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$, либо $\frac{8\pi}{2} = 4\pi$. Тогда угол $\frac{9\pi}{2}$ эквивалентен $\frac{\pi}{2}$, и остаётся вычислить: $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+1i) = 8i$.

Ответ $8i$.

Задача 129. Возвести в степень $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$.

Решение. Аналогично прошлой задаче, сначала переводим в показательную форму. Угол здесь 30 градусов, то есть $\frac{\pi}{6}$, модуль $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$. Итак, $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.



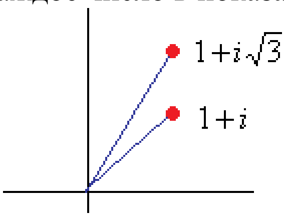
Тогда $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12} = 2^{12}e^{i\frac{\pi}{6}12} = 2^{12}e^{i2\pi} = 2^{12}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

Теперь можем отнять полный оборот 2π , косинус и синус при этом не меняются. тогда получим $2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}(1+i0) =$ $2^{10}2^{2} = 1024\cdot 4 = 4096$.

Ответ. 4096.

Задача 130. Вычислить $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{(1+i)^{12}}$

Решение. Представим каждое число в показательной форме.



$\rho_1 = 2$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\rho_2 = \sqrt{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}} = \frac{2^6 e^{i\frac{\pi}{3}6}}{\sqrt{2}^{12} e^{i\frac{\pi}{4}12}} = \frac{2^6 e^{i2\pi}}{2^6 e^{i3\pi}} = e^{i(2\pi-3\pi)} = e^{i(-\pi)} =$$

$\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)$ но можно произвольно прибавить 2π, ведь от этого не изменятся синус и косинус, поэтому

$\cos(\pi)+i\sin(\pi) = -1+0i = -1$. **Ответ.** -1.

Задача 131. Вычислить $\sqrt[6]{-64}$.

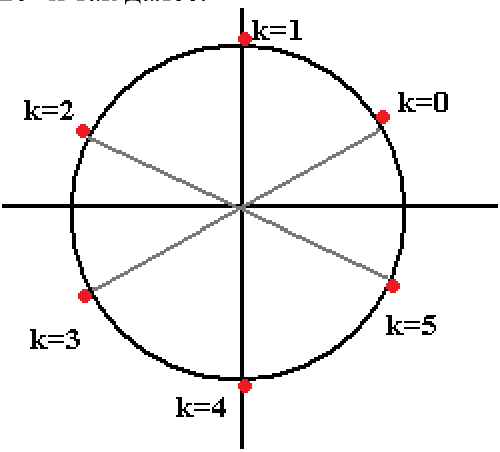
Решение. По формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$.

Сначала запишем число в тригонометрической форме.

$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. Тогда

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right) =$$

$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$. Начертим окружность радиуса 2 и отметим там 6 точек, первой соответствует угол 30^0, остальные больше на 60^0 , 120^0 и так далее.



$$k=0 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \quad z=\sqrt{3}+i$$

$$k=1 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow \quad z=2i$$

$$k=2 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \quad z=-\sqrt{3}+i$$

$$k=3 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \quad z=-\sqrt{3}-i$$

$$k=4 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \quad z=-2i$$

$$k=5 \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \quad z=\sqrt{3}-i.$$

Ответ. $\pm\sqrt{3}\pm i$ и $\pm 2i$.

Задача Д-34. Начертить область, удовлетворяющую условиям: $\{\mathrm{Im}(z)>1, |z-i|<2\}$.

Числовые ряды.
Выяснить сходимость.

Задача 132. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$.

Решение. Заметим, что $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=0$, тогда $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\cos 0=1$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, то есть слагаемые не уменьшаются и не стремятся к нулю, тогда по необходимому признаку ряд расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости (слагаемые должны уменьшаться к 0 при росте n).
Ответ. Расходится.

Выяснить сходимость по признаку Даламбера:

Задача 133. Выяснить, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Решение. Запишем предел отношения последующего (n+1) члена ряда к предыдущему (n). Модули здесь не особо нужны, так как все члены ряда и так положительны, т.е. если сходимость есть, то она заодно и абсолютная.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$$

Итак, $q=0<1$, ряд сходится (абсолютно).

Ответ. Сходится абсолютно.

Задача 134. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n n!}$

Решение. Запишем предел отношения модуля (n+1) члена ряда к модулю n-го. При этом мы отбрасываем знакочередование.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}:\frac{(n+1)}{2^n n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{(n+1)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=1\cdot 0=0.$$

Итак, $q=0<1$, ряд сходится (абсолютно).

Ответ. Сходится абсолютно.

Задача 135. Выяснить сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)}{7^{2n-1}(5n^2-4)}$.

Решение. По признаку Даламбера.

$$a_n=\frac{(2n+3)}{7^{2n-1}(5n^2-4)},\ a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+3)}{7^{2(n+1)-1}(5(n+1)^2-4)}=\frac{(2n+5)}{7^{2n+1}(5n+10n+1)}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+5)}{7^{2n+1}(5n+10n+1)}\dfrac{7^{2n-1}(5n^2-4)}{(2n+3)} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{2n+3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4}{5n+10n+1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{2n-1}}{7^{2n+1}} = 1\cdot1\cdot\dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$.

$q=\dfrac{1}{49}<1$ ряд сходится (абсолютно).

Ответ. Сходится абсолютно.

Задача 136. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n n!}$.

Решение. По признаку Даламбера.

$a_n=\dfrac{n^n}{2^n n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\dfrac{2^n n!}{n^n} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^{n+1}}\dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\dfrac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n =$

$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{2}>1$, ряд расходится.

Ответ. Расходится.

Задача 137. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Здесь можно действовать по радикальному признаку Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n}\right)^{-1} =$

$\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$ используя 2-й замечательный предел, получаем $\dfrac{1}{e}<1$.

$q=\dfrac{1}{e}<1$, ряд сходится (абсолютно).

Ответ. Сходится абсолютно.

Задача 138. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

Решение. По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2+\frac{1}{n}}.$$

Здесь даже не надо использовать 2-й замеч. предел, так как нет неопределённости: и числитель, и знаменатель стремятся каждый к конечному числу.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2+\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1,$$ абсолютно сходится.

Так как мы изначально рассматривали модуль, то сходимость абсолютная.

Ответ. Сходится абсолютно.

Задача 139. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. По интегральному признаку Коши, можем рассмотреть несобственный интеграл, эквивалентный данному ряду по сходимости. $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}dx\right) = \int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x}d(\ln x) = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$.

Интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

Ответ. Расходится.

Задача 140. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3\ln n}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n^3\ln n} < \frac{1}{n^3}$ для любого $n \geq 3$. Тогда ряд (по признаку сравнения) можно ограничить сверху другим рядом, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3\ln n} < \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который, в свою очередь, сходится, так сходится

эквивалентный ему несобственный интеграл $\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$ (заменяем по интегральному признаку Коши). Итак, ответ: ряд сходится (добавим, что сходится абсолютно, так как все слагаемые и так положительны).
Ответ. Сходится.

Задача 141. Выяснить, сходимость ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Решение. По признаку сравнения в непредельной форме, $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, таким образом, этот ряд получается больше, чем некоторый расходящийся $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n} > \sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, это было доказано в лекциях ранее. Поэтому ответ: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходится.
Замечание. Здесь есть и 2-й способ - по интегральному признаку Коши. Ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ эквивалентен интегралу $\int\limits_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_3^{\infty}\ln x d(\ln x) =$ $\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_3^{\infty} = \infty$.
Ответ. Расходится.

Задача 142. Найти сумму ряда. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{2}{n^2-6n+8}$.

Решение. Чтобы разбить на группы слагаемых, часть из которых будет взаимно сокращаться, сначала разложим знаменатель на множители: $\frac{2}{n^2-6n+8} = \frac{2}{(n-2)(n-4)}$ затем надо разбить на простейшие дроби. $\frac{2}{(n-2)(n-4)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n-4} = \frac{A(n-4)+B(n-2)}{(n-2)(n-4)}$,

откуда $A(n-4)+B(n-2) = 0n+2$, $An + Bn - (4A+2B) = 0n+2$,

получаем систему $\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=2 \end{cases}$, отсюда $A=-1, B=1$.

Тогда ряд можно представить так: $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{n^2-6n+8} = \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-2}\right) =$

$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$ Здесь для любого знаменателя, начиная от 3 и выше, всегда есть отрицательная дробь с таким знаменателем, а через 2 шага точно такая же положительная. Таким образом, сокращается всё, кроме $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Функциональные ряды.

Задача 143. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Решение. По признаку Даламбера, надо найти отношение модуля следующего слагаемого к модулю предыдущего, причём здесь мы это делаем для произвольного параметра x.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = |x|.$$

Теперь надо решить неравенство $q(x)=|x|<1$. Если $|x|<1$, то $x\in(-1,1)$ есть область гарантированной абсолютной сходимости. За пределами этого интервала расходимость. А вот поведение ряда в граничных точках -1 и 1 надо исследовать вручную, подставляя каждую точку и получая числовой ряд.

При $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, такой ряд сходится, так как степень 2, больше 1, (про это был факт в лекциях).

При $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, такой ряд тем более сходится, причём абсолютно, так как по модулю было бы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а этот ряд сходится (только что заметили, на 1 строку выше).

Таким образом, точки -1 и 1 здесь тоже войдут в область сходимости, и ответ: ряд абсолютно сходится в [-1,1].

Ответ. Сходится абсолютно в [-1,1].

Задача Д-35. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Ответ. область сходимости $x\in[-1,1)$.

Задача 144. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n}{7^n}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-10|^n}{7^n}} = \frac{|x-10|}{7}<1 \Rightarrow |x-10|<7 \Rightarrow$

$-7<x-10<7 \Rightarrow 3<x<17 \Rightarrow x\in(3,17)$.

В граничных точках получим $\sum_{n=1}^{\infty}1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, эти ряды расходятся.

Ответ. Ряд абсолютно сходится в интервале $(3,17)$.

Задача 145. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(x-2)^n}$.

Решение. По признаку Коши, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{|x-2|^n}} = \frac{3}{|x-2|}<1$, Замечание: есть и 2-й способ: по признаку Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}}{|x-2|^{n+1}} \dfrac{|x-2|^n}{3^n} = \dfrac{3}{|x-2|} < 1$, то есть в итоге всё равно пришли к тому же неравенству.

$|x-2| > 3$, что равносильно: $x > 5$ или $x < -1$, т.е. $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

Для граничных точек получаются числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, для которых нет сходимости (по необходимому признаку, т.к. слагаемые не стремятся к 0).

Ответ. Ряд абсолютно сходится в $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

Задача 146. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$.

Решение. По признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ln x|^n} = |\ln x| < 1$, тогда $-1 < \ln x < 1$. Из правого неравенства следует $e^{\ln x} < e^1$, т.е. $x < e$.

Из левого неравенства, $\ln x > -1$, $e^{\ln x} > e^{-1}$, $x > \dfrac{1}{e}$.

Проверяем граничные точки. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln e)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ расходится,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \dfrac{1}{e}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, тоже расходится.

Ответ. Ряд абсолютно сходится в интервале $\left(\dfrac{1}{e}, e\right)$.

Задача 147. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2+3x+2)^n}{2^n}$.

Решение. По радикальному признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\left|x^2+3x+2\right|^n}{2^n}}$ =

$\dfrac{\left|x^2+3x+2\right|}{2}<1$, тогда $\left|x^2+3x+2\right|<2$, аналогичное неравенство можно получить и по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^2+3x+2\right|^{n+1}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{\left|x^2+3x+2\right|^n}=\frac{\left|x^2+3x+2\right|}{2}<1\ \Rightarrow\ \left|x^2+3x+2\right|<2.$$

Это равносильно выполнению одновременно двух неравенств:
$-2<x^2+3x+2<2$.

Для правого неравенства, получаем $x^2+3x<0$, корни $0,-3$, оно верно для $x\in(-3,0)$.

Для левого неравенства, $x^2+3x+4>0$, но это выполняется на всей числовой прямой, т.к. корней нет, а ветви этой параболы направлены вверх. Верно для $x\in(-\infty,\infty)$. Пересечением этих двух множеств является интервал $(-3,0)$.

Также легко заметить, что в граничных точках ряд принимает вид
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, расходится.

Ответ. абсолютно сходится в $(-3,0)$.

Задача 148. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^{2n}9^n$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x-1\right|^{2n}9^n}=9\left|x-1\right|^2=9(x-1)^2<1\ \Rightarrow\ (x-1)^2<\dfrac{1}{9}\ \Rightarrow$

$$(x-1)^2<\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ \left|x-1\right|<\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{3}<x-1<\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}.$$

В обеих граничных точках получим $\sum_{n=1}^{\infty} 9^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, расходится.

Ответ. Ряд абсолютно сходится в интервале $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Степенные ряды
Поиск радиуса сходимости.

Вспомним формулы из лекций: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Задача 149. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Решение. Запишем коэффициенты с номерами n и n+1.

$a_n = \frac{1}{n2^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} \frac{(n+1)2^{n+1}}{1}$ =

$2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$ = 2.

Ответ. $R = 2$.

Задача 150. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n}$. Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)}$ =

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = 1$.

Ответ. $R = 1$.

Задача 151. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2n-1)3^n}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{(2n-1)3^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)3^{n+1}}{(2n-1)3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = 3.$$

Ответ. $R=3$.

Задача 152. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$.

Решение. $a_n=\frac{1}{4^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{4^{n+1}}$, $R=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n}=4$.

Ответ. $R=4$.

Задача 153. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n!}$.

Решение. $a_n=\frac{10^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $R=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$.

Ответ. $R=\infty$, то есть сходимость на всей числовой оси.

Задача 154. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2^n}x^n}{n}$.

Решение. $a_n=\frac{3^{2^n}}{n}$, $a_{n+1}=\frac{3^{2^{n+1}}}{n+1}$. Тогда $R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2^n}}{n}\frac{n+1}{3^{2^{n+1}}} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2^n}}{3^{2^n 2}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2^n}}{\left(3^{2^n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{2^n}}{3^{2^n}3^{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2^n}}=0.$$

Ответ. $R=0$, т.е. сходимость только в точке $x=0$.

Поиск суммы степенного ряда.

Задача 155. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$

Решение. Если $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$ то первообразная от $S(x)$ равна

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n} = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots$ а это уже геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{x}{3}$, её сумма равна $\frac{x}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3x}{3-x}$. После дифференцирования получим $S(x) = \left(\frac{3x}{3-x}\right)' = \frac{3(3-x)-(-1)3x}{(3-x)^2} = \frac{9}{(3-x)^2}$. **Ответ.** $S(x) = \frac{9}{(3-x)^2}$.

Задача 156. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$.

Решение. Эта задача решается в 2 шага. Видно, что только 2-я первообразная здесь не будет иметь коэффициентов, так, чтобы можно было использовать прогрессию.
$(n+2)\left((n+1)x^n\right) \to (n+2)x^{n+1} \to x^{n+2}$.

Найдём $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{x^2}{1-x}$.

Тогда $S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$. Найдём поочерёдно 2 производных.

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

$\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(2-2x)(1-x)^2-2(1-x)(-1)(2x-x^2)}{(1-x)^4}$ сократим на (1-x)

$$\frac{(2-2x)(1-x)-2(-1)(2x-x^2)}{(1-x)^3} = \frac{2(1-x)^2+2(2x-x^2)}{(1-x)^3} =$$

$$\frac{2(1-2x+x^2)+4x-2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2-4x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ответ. $S(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Задача 157. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

Решение. $\int S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1} = -x^2+x^3-x^4+\ldots = \dfrac{-x^2}{1-(-x)} =$

$-\dfrac{x^2}{1+x}$. Знакочередование приводит к тому, что в знаменателе появилась сумма, а не разность.

$$S(x) = -\left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = -\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} = -\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} =$$

$-\dfrac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = -\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$. **Ответ.** $S(x) = -\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$.

Задача 158. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Решение. Здесь степень не соответствует коэффициенту, то есть прямое интегрирование или дифференцирование не избавит от наличия коэффициента. Производная равна n^2x^{n-1} а первообразная $\dfrac{n}{n+1}x^{n+1}$. Но вот если бы степень была (n-1) то всё бы получилось. Так вот, мы можем сделать сдвиг степени, и получить более удобное выражение, если вынести x за скобку, то есть за знак ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x+2x^2+3x^3+\ldots = x\left(1+2x+3x^2+\ldots\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Теперь обозначим новое выражение через S_1 и для него уже задача вполне решаема тем методом, который изучили ранее.

$S(x) = xS_1(x)$, где $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Первообразная от S_1 это

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + ... = \frac{x}{1-x}.$$

$S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Вспомним про то, что мы отделили одну степень, чтобы улучшить функцию. А сейчас мы нашли $S_1(x)$. При этом $S(x) = xS_1(x)$. Тогда ответ $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ответ. $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ряды Тейлора.

Задача 159. Разложить в ряд Тейлора: $f(z) = \frac{z}{z+2}$ по степеням z.

Решение. Сначала определим круг сходимости ряда. Центр в 0, так как требуется разложить по степеням z, т.е. в ряде должны быть только степенные функции типа $(z-0)$ то есть центр 0.
Ближайшая точка разрыва это $z = -2$. Поэтому круг радиуса 2 с центром в нуле, т.е. $|z| < 2$.
Дальше, чтобы получать в знаменателе структуру типа $1-q$, есть 2 пути: вынести за скобку либо z либо 2.

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} \quad \text{либо}$$

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z}{2+z} = \frac{z}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

Но ведь $|z| < 2$, поэтому $\frac{|z|}{2} < 1$ а $\frac{2}{|z|} > 1$, так что первый вариант использовать нельзя, ведь там получилось бы $q > 1$ и нельзя считать по формуле сходящейся геометрической прогрессии, для которой должно быть обязательно $q < 1$. Поэтому выносим за скобку именно константу, а не z.

Итак, $\frac{z}{z+2} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^4}{16} + \ldots$ это и есть требуемое разложение в степенной ряд Тейлора. Его можно также записать в виде $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}$.

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}$.

Задача 160. Разложить в ряд Тейлора: $f(z) = \frac{1}{z+2}$ по степеням $(z-1)$.

Решение. В данном случае расстояние от центра до ближайшей точки разрыва равно 3. Условие круга $|z-1| < 3$.

$$f(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)}$$

Выражение $q = -\frac{z-1}{3}$ по модулю меньше 1, так как $|z-1| < 3$.

Поэтому можно рассматривать это как сумму некоторой сходящейся геометрической прогрессии. Тогда

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} .$$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$.

Задача 161. Разложить в ряд Тейлора $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+3)}$ по степеням z и найти $f^{(4)}(0)$.

Решение. В этой задаче сначала надо разложить на простейшие, чтобы в каждой дроби в знаменателе была только сумма или разность двух объектов.

$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+3} = \frac{A(z+3)+B(z-1)}{(z-1)(z+3)}$, тогда

$Az+3A+Bz-B=1z+0 \Rightarrow$ система $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-B=0 \end{cases} \Rightarrow 4A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow B=\frac{3}{4}$. Тогда функция имеет вид $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$.

Точки разрыва $z=1$ и $z=-3$, поэтому наибольший круг с центром в нуле может быть радиуса 1. Итак, ряд будет существовать в круге $|z|<1$. При этом очевидно, что $|z|<1<3$, поэтому автоматически выполнено и условие $|z|<3$, т.е. $\frac{|z|}{3}<1$. Поэтому во второй дроби можно выносить 3 за скобку для формирования структуры суммы прогрессии вида $\frac{1}{1-q}$. Итак, $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$ =

$-\frac{1}{4}\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} =$

$-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n$. Можно объединить эти две суммы в одну.

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)z^n \quad .$$

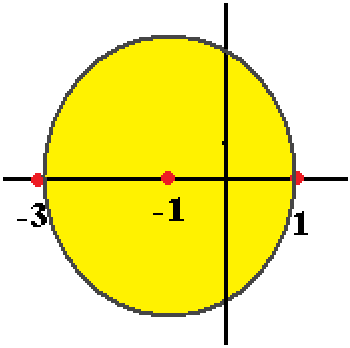
Теперь найдём коэффициент при 4 степени, чтобы найти $f^{(4)}(0)$. Приравняем коэффициент из этого ряда и тот его вид, который следует из теории. $\frac{1}{4}\left(-1+\frac{(-1)^4}{3^4}\right)=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ тогда

$$f^{(4)}(0)=\frac{4!}{4}\left(-1+\frac{(-1)^4}{3^4}\right) = 6\left(-1+\frac{1}{81}\right)= -\frac{6\cdot 80}{81} = -\frac{160}{27}.$$

Ответ. Ряд $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)z^n$, $\quad f^{(4)}(0) = -\frac{160}{27}$.

Задача 162. Разложить в ряд Тейлора: $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+3)}$ по степеням $z+1$.

Решение. Разложение на простейшие сначала производится точно так же, как в задаче 8: $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$. Но здесь центр круга не в 0, а в точке -1 потому что $z+1=z-(-1)$. Точки разрыва $z=1$ и $z=-3$. Поэтому расстояние до ближайшей точки разрыва равно 2, и круг здесь имеет вид $|z+1|<2$. Он показан на чертеже:



В выражении $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$ сначала надо прибавить и отнять константы, чтобы в знаменателе явно был выделен блок $z+1$.

$\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{(z+1)+2}$ теперь скобку вида $(z+1)$ мы не будем раскрывать вплоть до ответа, можно даже переобозначить её через w (но не обязательно).

Выносим за скобку константу 2 в каждой из дробей.

$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}$. В круге $|z+1|<2$ получается, что верно $\frac{|z+1|}{2}<1$ то есть там как раз получается такое $q<1$, как и надо для сходящейся геометрической прогрессии. Тогда далее

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{2}\right)} = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n+\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n .$$

Здесь в 2 частях индексы меняются синхронно, их можно объединить.

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+3(-1)^n}{2^{n+3}}(z+1)^n$.

Задача 163. Разложить в ряд Тейлора: $f(z)=\frac{z+2}{z^2-1}$ по степеням z.

Решение. Сначала надо разложить на простейшие дроби.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-1} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+B(z-1)}{(z-1)(z+1)} \Rightarrow$$

$Az+A+Bz-B=1z+2 \Rightarrow$ система $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow 2A=3 \Rightarrow A=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$. Итак, функция имеет вид: $\frac{3}{2}\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)}$.

Теперь оценим, в каком круге будет разложение. Центр в 0, так как по степеням z. Точки разрыва $z=1$, $z=-1$. Расстояние от центра до ближайшей точки разрыва равно 1. Поэтому разложение в ряд будет в круге $|z| < 1$.

$\frac{3}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z)}$ теперь то, что следует в знаменателе после единицы, уже и так удовлетворяет условию $|z| < 1$, то есть выносить за скобки никакие константы уже не надо. Можно уже использовать формулу суммы прогрессии.

$-\frac{3}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-3-(-1)^n}{2} z^n$, что при более подробной записи первых слагаемых выглядит так:

$-2 - z - 2z^2 - z^3 - \ldots$

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-3-(-1)^n}{2} z^n$

Задача 164. Найти $f^{(10)}(0)$ для $f(x) = x\sin x$.

Решение. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора. Прогрессия здесь не нужна, можно воспользоваться известной формулой для синуса.

$$x\sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \frac{x^{10}}{9!} - \ldots$$

Здесь нам нужен только коэффициент при степени 10.

$\frac{1}{9!} = \frac{f^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10!}{9!} = 10$. **Ответ.** 10.

Задача 165. Найти $f^{(8)}(0)$ для $f(x) = 2x^3 \sin\frac{x}{2}$.

Решение. $f(z)=2x^3\sin\frac{x}{2}\ =\ 2x^3\left(\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!}-\ldots\right)=$

$x^4-\frac{x^6}{2^2\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 5!}-\ldots$ Извлекаем слагаемое при степени 8 и сравниваем его с теоретическим значением.

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{1}{2^4\cdot 5!}\ \Rightarrow\ f^{(8)}(0)=\frac{8!}{2^4\cdot 5!}\ =\ \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2^4}=\frac{6\cdot 7\cdot 2^3}{2^4}=\frac{42}{2}=21.$$

Ответ. $f^{(8)}(0)=$ 21.

Задача 166. Найти производную $f^{(6)}(0)$ для $f(x)=e^x\sin x$.

Решение. Запишем разложения в ряд Тейлора для каждой функции.

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\ldots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

Найдём все те комбинации, которые дают 6 степень.

$x\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}x\ =\ \left(\frac{2}{5!}-\frac{1}{3!3!}\right)x^6$, что надо приравнять к $\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$.

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\frac{2}{5!}-\frac{1}{3!3!}=\frac{2}{120}-\frac{1}{36}\ =\ \frac{1}{60}-\frac{1}{36}=\frac{6-10}{360}=\frac{-4}{360}=\frac{-1}{90}.$$

$$f^{(6)}(0)=-\frac{6!}{90}=-\frac{720}{90}=-8.$$

Ответ. -8.

Ряды Лорана

Задача 167. Найти кольцо сходимости ряда Лорана: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{1+3^n}$

Решение. Сначала исследуем правильную часть.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+3^n}$, по признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}}{1+3^{n+1}}\frac{1+3^n}{|z|^n} = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}}$

сократим на 3^n числитель и знаменатель.

$$|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{3^n}+3} = |z|\frac{0+1}{0+3}=\frac{|z|}{3}<1,\text{ тогда } |z|<3.$$

Теперь рассмотрим главную часть $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{1+3^n}$. Можно задать индексацию натуральными числами, если сделать замену $m=-n$ и после этого уже применять обычный признак Даламбера.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{1+3^n} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{-m}}{1+3^{-m}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^m\left(1+\frac{1}{3^m}\right)}.$$

Тогда $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{|z|^{m+1}\left(1+\frac{1}{3^{m+1}}\right)}\dfrac{|z|^m\left(1+\frac{1}{3^m}\right)}{1} = \dfrac{1}{|z|}\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3^m}}{1+\frac{1}{3^{m+1}}} =$

$$\frac{1}{|z|}\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{|z|}<1,\text{ тогда } |z|>1.$$

Ответ. $1<|z|<3$ - кольцо сходимости.

Задача 168. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z+4}$ по степеням z.

Решение. Точки разрыва $z=3$ и $z=-4$, центр кольца в 0, значит, кольцо определяется условием $3<|z|<4$.

$$f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n =$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}}$. Можно ещё произвести сдвиг индекса в главной части, чтобы не был индекс 0 в двух частях сразу: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}}$ но фактически и так было видно, что главная часть начинается с -1 степени.

Ответ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}}$.

Задача 169. Разложить в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+4}$ по степеням $(z-1)$ в кольце.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь центр смещён в 1. Это влияет и на радиусы кольца. Ближайшая точка разрыва на расстоянии 2, а более далёкая на расстоянии 5. Поэтому условие кольца $2 < |z-1| < 5$. Но сначала надо прибавить и отнять 1, чтобы создать отдельное слагаемое $z-1$ его мы не будет раскрывать вплоть до ответа.

$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+4} = \frac{1}{(z-1)-2} + \frac{1}{(z-1)+5}$ теперь выносим за скобку либо константу, либо $z-1$ с учётом того, что должно получаться 1 и второй объект, который меньше 1.

$\frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} + \frac{1}{5} \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{5}\right)}$ согласно условию $2 < |z-1| < 5$, каждый объект в знаменателе здесь по модулю меньше 1 и может служить знаменателем сходящейся геометрической прогрессии.

Далее, $\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n} + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{5^n}$.

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{5^{n+1}}$.

Задача 170. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4}$ во внешней области $|z-1|>5$.

Решение. Здесь $|z-1|>5$, а значит автоматически и $|z-1|>2$.

Поэтому выносить за скобку в знаменателе надо так, чтобы всегда получались константы, делённые на $z-1$.

$$\frac{1}{(z-1)-2}+\frac{1}{(z-1)+5} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{z-1}\right)} =$$

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{(z-1)^n}$$

Первая часть преобразуется, как и в прошлом примере, а вот вторая по-новому. Кстати, здесь можно объединить, так как обе суммы относятся к главной части, там везде отрицательные степени.

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n+2^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n+2^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n+2^n}{(z-1)^{n+1}}$.

Ряды Фурье.

Задача 171. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)=x$ на (-1,1).

Решение. Так как функция нечётная, то все коэффициенты a_0 и a_n равны 0. Поэтому считаем только b_n. Учитываем, что $l=1$.

$b_n=\frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx$. Вычисляем интеграл по частям.

$u=x$, $u'=1$, $v'=\sin n\pi x$, $v=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n=-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{-1}{n\pi}\cos(-n\pi)+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}$ так как косинус чётная функция, то далее $-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n^2\pi^2}(0-0) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi =$

$-\frac{2(-1)^n}{n\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. **Ответ.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Задача 172. Разложить в триг. ряд Фурье $f(x)=2x+3$ на (-1,1)

Решение. Заметим, что функция $f(x)-3=2x$ нечётная. То есть, f это сумма нечётной и константы. Таким образом, коэффициенты a_n здесь тоже окажутся равны 0. Надо вычислить a_0 и b_n.

$$a_0=\frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)dx = (x^2+3x)\Big|_{-1}^{1} = (1+3)-(1-3)=4-(-2)=6,\ \frac{a_0}{2}=3.$$

$b_n=\frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)\sin n\pi x dx$. Вычисляем интеграл по частям.

$u=2x+3$, $u'=2$, $v'=\sin n\pi x$, $v=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n = -\frac{2x+3}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$$-\frac{5}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}(0-0) = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Ответ. Ряд Фурье: $3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Замечание. Для поиска коэффициентов b_n можно было воспользоваться результатом, полученным в задаче 1.

$$b_n = \int_{-1}^{1}(2x+3)\sin n\pi x dx = 2\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx + 3\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx$$

первое слагаемое содержит интеграл, равный в итоге $\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$ а второе равно 0. Тогда $b_n = 2\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

Задача 173. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале (-1,1).

$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_{0}^{1}xdx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$, при этом $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, кстати, это и есть средняя высота графика.

$a_n = \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1}x\cos(n\pi x)dx$, интегрируем по частям.

$u = x, u' = 1$, $v' = \cos(n\pi x)$, $v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

$$2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = 2\left(\left.\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx\right) =$$

$$2\left((0-0)+\left.\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right) = 2\frac{\cos(n\pi)-\cos 0}{n^2\pi^2} = 2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.$$

Обратите внимание, что $\cos(n\pi)$ равен $+1$ при чётных n и -1 при нечётных, поэтому совпадает с $(-1)^n$.

Коэффициенты $b_n = 0$ так как функция чётная. Итак, получаем ряд:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Более подробная запись:

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x-\frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x-\ldots$$

Задача 174. Найти ряд Фурье для $f(x)=\begin{cases} x+1 & if\ x\in(-1,0) \\ 1 & if\ x\in(0,1)\end{cases}$

Решение. Здесь функция не является чётной либо нечётной, поэтому надо будет искать все коэффициенты.

При этом, на левой и правой части интервала надо считать отдельно, ведь там функция задана по-разному.

$$a_0 = \int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_0^1 1dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-1}^{0} + x\Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{2}-1\right)+1=\frac{3}{2},\quad \frac{a_0}{2}=\frac{3}{4}.$$

$a_n = \int_{-1}^{0}(x+1)\cos n\pi x dx+\int_0^1 \cos n\pi x dx$. Первый интеграл вычисляется методом «по частям», второй просто в один шаг.

Кстати, для удобства вычислений можно раскрыть скобки и объединить так:

$$a_n = \int_{-1}^{0} x\cos n\pi x dx + \int_{-1}^{0} \cos n\pi x dx + \int_{0}^{1} \cos n\pi x dx \;=$$

$\int_{-1}^{0} x\cos n\pi x dx + \int_{-1}^{1} \cos n\pi x dx$. Тогда интеграле по частям остаётся не скобка, а только x.

$u = x$, $u' = 1$, $v' = \cos n\pi x$, $v = \dfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x$. Тогда

$$\int_{-1}^{0} x\cos n\pi x dx + \int_{-1}^{1} \cos n\pi x dx \;= \frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx + \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{-1}{n\pi}\sin(-n\pi) - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx + \frac{0-0}{n\pi} \;=\; 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + 0 \;=$$

$$\frac{\cos 0 - \cos(-n\pi)}{n^2\pi^2} \;=\; \frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} \;=\; \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} (x+1)\sin n\pi x dx + \int_{0}^{1} \sin n\pi x dx \;=\; \int_{-1}^{0} x\sin n\pi x dx + \int_{-1}^{1} \sin n\pi x dx$$

В первом $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin n\pi x$, $v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} \;=$$

$$\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{\cos n\pi - \cos n\pi}{n\pi} \;=\; \frac{-(-1)^n}{n\pi} + 0 - 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Ответ. Ряд Фурье: $\dfrac{3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x + \dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$.

Задача 175. Разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (-2,0) \\ 5, x \in (0,2) \end{cases}.$$

Решение. Здесь функция ступенчатая, поэтому вычислять интегралы по частям не придётся, будет в 1 шаг. Но разбивать на две части надо, т.к. функция задана по-разному справа и слева от 0. Кроме того, надо учесть, что $l = 2$ здесь.

$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 1dx + \int_{0}^{2} 5dx\right) = \frac{1}{2}(2+10) = 6$. Тогда $\frac{a_0}{2} = 3$. Кстати, это и есть средняя высота графика этой функции.

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} \cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 5\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + 5\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}(\sin 0 - \sin(-n\pi)) + 5\frac{2}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)\right) = 0$ так как синус любого угла, кратного π, есть 0. В ряде Фурье не будет косинусов. Впрочем, об этом можно было догадаться и сразу и не считать интегралы: ведь если сместить этот график вниз на 3, то получится нечётная функция.

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} \sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 5\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + 5\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)$$

$= \frac{-1}{n\pi}\left((\cos 0 - \cos n\pi) + 5(\cos n\pi - \cos 0)\right)$ притом здесь мы уже сразу учли чётность косинуса, что $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$.

Итак, $\frac{-1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n + 5(-1)^n - 5\right) = \frac{-1 + (-1)^n - 5(-1)^n + 5}{n\pi} =$

$\frac{4 - 4(-1)^n}{n\pi} = 4\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$.

Ответ. Ряд Фурье: $3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Литература

1. А.А.Ельцов, Т.А.Ельцова. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения http://edu.tusur.ru/publications/2259

2. Л.И.Магазинников. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования http://edu.tusur.ru/publications/2258