

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Ю.А. Шурыгин, А.Г. Карпов

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ
УПРАВЛЕНИЯ**

**Издательство Томского университета
2017**

Шурыгин Ю.А., Карпов А.Г.

Ш 95 Современные проблемы теории управления. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2017. – 80 с.

ISBN 978-5-7511-2519-6

В монографии рассмотрены вопросы анализа и проектирования современных систем автоматического управления, основанных на оптимальном, адаптивном и интеллектуальном управлении. Изложены основы теории оптимального управления, рассмотрены адаптивный подход к синтезу оптимального управления и основные понятия и принципы интеллектуального управления, а также некоторые особенности применения микропроцессоров в цифровых системах автоматического управления.

Для научных и инженерно-технических работников, занятых проектированием систем управления, и студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Управление в технических системах», «Информатика и вычислительная техника» и др.

УДК 519.71(075.9); 681.5

Монография написана по материалам исследований, выполненных в рамках работ по проекту 8.8184.2017/8.9 «Методология создания систем энергогенерирующих и энергопреобразующих устройств для наземных и бортовых комплексов наземного, космического и подводного базирования»

ISBN 978-5-7511-2519-6

© Ю.А. Шурыгин, А.Г. Карпов, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	7
1.1. Общие сведения и классификация систем оптимального управления.....	7
1.2. Вариационное исчисление в оптимальных системах	9
1.2.1. Постановка задач вариационного исчисления	9
1.2.2. Минимизация интегрального критерия	13
1.2.3. Оптимальное управление по минимуму интегрального критерия.....	19
1.2.4. Учёт ограничений с помощью метода множителей Лагранжа.	22
1.3. Метод максимума Понтрягина.....	25
1.3.1. Обобщённая задача оптимального управления	25
1.3.2. Принцип максимума	29
1.4. Динамическое программирование	34
1.4.1. Многошаговые процессы управления	34
1.4.2. Принцип оптимальности	35
1.4.3. Дискретный вариант метода динамического программирования.....	39
1.4.4. Уравнения Беллмана и Гамильтона–Якоби	42
2. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	47
2.1 Общие сведения и классификация адаптивных САУ	47
2.2. Стохастические процессы управления.....	50
2.3. Оптимальное управление с адаптацией.	54
3. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	59
3.1. Принципы организации интеллектуального управления	59
3.2. Функциональные схемы ИСУ	60
4. МИКРОПРОЦЕССОР КАК УПРАВЛЯЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ	64
4.1. Микропроцессор как контроллер в системах управления	64
4.2. Влияние квантования по уровню	68

4.3. Статистический учет ошибок квантования по уровню	70
4.4. Анализ предельного цикла.....	73
ЛИТЕРАТУРА.....	79

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классический этап развития теории автоматического управления (ТАУ) характеризовался детерминистским подходом, когда точно известны параметры и характеристики объекта управления и известны внешние воздействия. Даже, если последние и являлись случайными, предполагалось, что точно известны их статистические характеристики.

В этих условиях вполне достаточно было использовать классический подход к исследованию систем автоматического управления (САУ), основанный на преобразовании Лапласа или z -преобразовании. При проектировании системы в этом случае обычно требуется удовлетворять некоторым более или менее жестким требованиям, предъявляемым к частотным или временным характеристикам. Этими характеристиками, используемыми наиболее часто, являются запас устойчивости, степень колебательности, время установления и время нарастания, перерегулирование.

Вполне успешным стало также применение альтернативного подхода (можно назвать его вторым), основанного на методе пространства состояний и позволяющего аналитически проектировать регулятор при использовании в качестве критериев качества системы интегральную квадратичную или среднеквадратичную ошибку. По сути, здесь уже используются зачатки теории оптимизации. В современных условиях проектирование САУ становится ещё более сложным ввиду стремления управлять в широком диапазоне внешних условий, усложнения объектов управления, из-за нелинейных характеристик, меняющихся параметров, повышения требований к точности управления. Все это привело к дальнейшему развитию *теории оптимального управления*, некоторые вопросы которой изложены в главе 1. При написании этого раздела использовались некоторые сведения из [1].

Дальнейшее развитие теории управления, связанного с приложением к объектам с априорной неопределённостью их параметров и характеристик, а также с невозможностью в ряде случаев до начала работы САУ определить характеристики влияния внешней среды (речь идет, конечно, о статистических характеристиках) привело к дальнейшему развитию систем *адаптивного управления*. Такие системы рассмотрены в главе 2, которая изложена с привлечением [2].

В последнее время интенсивно разрабатывается новый класс систем автоматического управления, которые получили название *интеллектуальных систем управления*. Такие системы строятся как самообучающиеся, самонастраивающиеся системы с гибкими процедурами принятия решений об управлении, как системы, основанные на знаниях и формирующие новые знания в процессе управления. Интеллектуальные системы управления разрабатываются и как экспертные системы, встроенные в контур управления и работающие в интерактивном режиме с лицом, принимающим решение. Основные принципы построения таких систем и некоторые их функциональные схемы рассмотрены в главе 3, в которой использованы некоторые сведения из [3].

Реализация современных регуляторов в САУ обеспечивается применением микропроцессоров. Некоторые особенности их применения в САУ рассмотрены в главе 4, написанной с привлечением [1].

Содержание данной монографии приближено к одноименной дисциплине, изучаемой магистрантами направления «Управление в технических системах», поэтому может использоваться как учебное пособие для студентов упомянутого направления, а также смежных направлений и специальностей.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Толчком к развитию теории и практики систем управления с обратной связью явилась вторая мировая война. Далее следует небольшой период спячки в пятидесятых годах прошлого столетия и опять бурное развитие подобных систем, связанное с нуждами автоматизации промышленности и ещё большим развитием космической, авиационной, атомной и вычислительной техники.

Проектирование систем управления в современных условиях стало очень сложным ввиду стремления управлять в широком диапазоне внешних условий, из-за нелинейных характеристик, свойственных объектам, работающим в таких условиях, а также из-за чрезвычайно высоких требований к качеству таких систем.

Теория оптимизации предлагает специалистам по системам управления способы борьбы с указанными трудностями проектирования современных систем и служит хорошим примером использования понятий линейного векторного пространства.

1.1. Общие сведения и классификация систем оптимального управления

Философия теории оптимизации – построение наилучшей системы. Это, конечно, подразумевает наличие некоторого критерия или показателя качества для суждения о том, что означает «наилучшая». Выбор надлежащего показателя качества зачастую представляет отдельную (нередко непростую) задачу. Обоснование выбора того или иного критерия оптимальности связано с конкретными технико-экономическими условиями работы системы автоматического управления (САУ) и в теории оптимального управления не рассматривается.

Различия между критериями оптимальности дают основания для классификации оптимальных систем по оптимизируемым показателям качества. Это системы:

- оптимальные по быстродействию,
- оптимальные по расходу ресурсов,
- оптимальные по производительности,
- с минимальными потерями от управления и т.д.

Следующий вариант классификации оптимальных систем – по характеру процессов, протекающих в системах. С этой точки зрения системы делятся на системы:

- непрерывные,
- дискретно-непрерывные,
- дискретные.

Можно проводить классификацию и по типу дифференциальных уравнений, описывающих систему: линейные, нелинейные, с распределёнными параметрами (уравнения в частных производных) и т.д.

Наконец, можно классифицировать системы по характеру критерия оптимальности. В этом случае получаем системы:

- равномерно оптимальные (наилучшие в каждом отдельном случае, то есть при каждом проведенном эксперименте),
- статистически оптимальные (наилучшие в среднем, то есть при усреднении многих экспериментов),
- минимаксно оптимальные (системы, дающие наилучший результат в наихудших условиях).

По сравнению с менее строгими методами проектирования замкнутых САУ особенности теории оптимизации состоят в следующем.

1. Процедура проектирования является более четкой, так как включает в едином показателе проектирования все существенные аспекты качества.
2. Очевидно, что проектировщик может ожидать получения наилучшего результата только в соответствии с выбранным показателем качества. Поэтому для каждой задачи указывается область ограничений.
3. Часто можно обнаружить несовместимость ряда требований качества.
4. Получающаяся в результате проектирования система управления будет адаптивной, если в процессе работы показатель качества меняется, и попутно снова вычисляются параметры регулятора.
5. Работа с нестационарными оптимальными процессами не вносит каких-либо дополнительных трудностей.
6. Непосредственно рассматриваются и нелинейные объекты управления, правда, при этом возрастает сложность вычислений.

Основные этапы построения оптимальных систем состоят в следующем.

1. Построение математических моделей физических процессов, подлежащих управлению, а также критериев качества.
2. Вычисление оптимальных управляющих воздействий.
3. Синтез регулятора, реализующего оптимальное управление.

Теория оптимизации продолжает интенсивно развиваться, пытаясь преодолеть трудности, присущие этой теории. Перечислим их.

1. Формирование значимого на языке математике критерия качества из различных требований проектирования – непростая задача. Часто на этом пути применяется метод проб и ошибок.
2. Результирующий критерий качества системы часто является очень чувствительным к различного рода ошибочным предположениям и (или) к изменениям параметров регулируемого процесса.
3. Существующие в настоящее время алгоритмы управления в случае нелинейных систем требует сложных программ вычислений и, часто, большого количества машинного времени.
4. Хорошо работающие методы проектирования регуляторов, разработанные для малых областей фазового пространства (вблизи траекторий, соответствующих номинальным режимам), сразу же оказываются неприемлемыми применительно к большим областям фазового пространства в случае нелинейных систем.

Основные методы, используемые в теории оптимизации, это:

- классическое вариационное исчисление,
- принцип максимума Понтрягина,
- динамическое программирование Беллмана,
- алгоритмы Винера-Колмогорова и Калмана-Бьюси,
- функциональный анализ,
- метрический анализ.

1.2. Вариационное исчисление в оптимальных системах

1.2.1. Постановка задач вариационного исчисления

Вариационное исчисление – это раздел математического анализа, связанный с проблемой оптимизации при условиях более общего характера, чем те, которые рассматриваются в обычной теории нахождения максимума или минимума некоторой функции. Вариационное исчисление имеет дело с максимумом или минимумом *функционалов*, когда требуется определить не одно значение функции, а целую функцию.

Функционал – это переменная величина, зависящая от некоторой функции, например, функционалом является Q :

$$Q = \int_0^T G(u(t), y(t)) dt.$$

При этом каждой функции G , взятой из некоторого класса функций, соответствует определённое значение функционала Q .

Вариационное исчисление разработано более 150 лет назад известным русским математиком Эйлером и находит применение во многих областях науки и техники, среди которых – теория управления, классическая механика, электромагнетизм, гидродинамика, оптика, аэродинамика и т.д.

В классическом вариационном исчислении тремя основными проблемами традиционно считаются:

- задача Лагранжа,
- задача Майера,
- задача Больца.

Задача Лагранжа с одной независимой переменной связана с определением функции $\mathbf{u}(t)$, которая обеспечивает минимум интеграла от этой функции. Формализуем постановку задачи.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – n мерный вектор-столбец, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец.

2. Система начальных условий

$$x_i(t_0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

3. Критерий оптимальности

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (1.3)$$

где функция F предполагается непрерывной по своим аргументам.

Необходимо найти функцию $\mathbf{u}(t)$, доставляющую минимум функционала (1.3) среди всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1) с начальными условиями (1.2).

Задача Майера заключается в определении функции $\mathbf{u}(t)$, минимизирующей известную функцию, вычисляемую в конечной точке и содержащую некоторые переменные, конечные значения которых заранее не заданы.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений (1.1).
2. Начальные условия (1.2).
3. Конечные условия

$$x_j(t_f) = b_j, \quad j \in A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.4)$$

при этом t_f заранее не известно.

4. Критерий оптимальности

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f}. \quad (1.5)$$

Необходимо из всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1) с начальными (1.2) и конечными (1.4) условиями найти функцию $\mathbf{u}(t)$, минимизирующую критерий (1.5).

В частном случае, когда критерий оптимальности имеет вид

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} = t \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0,$$

задача Майера сводится к переходу от заданного начального состояния к желаемому конечному за минимальное время.

Задача Больца связана с определением функции $\mathbf{u}(t)$, минимизирующей сумму, состоящую из интеграла от некоторой функции и функции, вычисляе-

мой в конечной точке, при этом конечные значения некоторых переменных этой функции могут быть заранее не заданы.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений (1.1).
2. Начальные значения (1.2).
3. Конечные значения (1.4).
4. Критерий

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt. \quad (1.6)$$

Необходимо среди всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1) с начальными (1.2) и конечными (1.4) условиями выбрать функцию $\mathbf{u}(t)$, минимизирующую критерий (1.6).

Процедуру нахождения функции $\mathbf{u}(t)$ называют вариационным методом.

Если интерпретировать $\mathbf{x}(t)$ как вектор состояния объекта (процесса), а под $\mathbf{u}(t)$ понимать вектор управления, то оптимальное управление по минимуму интеграла сводится к задаче Лагранжа. Оптимальное управление конечным состоянием и управление с максимальным быстродействием – это задача Майера. К задаче Больца сводится управление по минимуму интеграла с ограничениями на конечное состояние или управление по минимуму времени перехода в заключительное состояние при ограничении на величину интеграла.

Из формулировок задач следует, что задача Больца – наиболее общая формулировка задачи вариационного исчисления. Однако всегда можно ввести некоторые дополнительные переменные, с помощью которых можно задачу Лагранжа свести к задаче Больца или к задаче Майера и наоборот.

Хотя существует много проблем оптимального управления, которые на первый взгляд не относятся ни к одной из трёх перечисленных задач, всегда можно прибегнуть к тому или иному математическому приёму, позволяющему первоначальную задачу преобразовать к одной из сформулированных выше.

Пример 1.1. Задача с производными высокого порядка.

Пусть требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt \quad (1.7)$$

при заданных начальных условиях на переменные x и \dot{x} .

Поскольку в подынтегральном выражении (1.7) имеется вторая производная, то ясно, что эта задача не относится непосредственно ни к одной из задач вариационного исчисления. Но путём введения дополнительной переменной y (размерность пространства состояний при этом, разумеется, увеличивается на

единицу) исходную задачу можно свести к задаче Лагранжа. Действительно, обозначим $\dot{x} = y$.

Тогда критерий (1.7) переписется в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, y, \dot{y}, t) dt,$$

а это уже непосредственно задача Лагранжа.

Пример 1.2. Переход от задачи Лагранжа к задаче Майера.

Пусть требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt. \quad (1.8)$$

Конечные значения для \mathbf{x} заданы.

Выражение (1.8) совпадёт с выражением (1.3), если обозначить $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$. Эту задачу Лагранжа можно преобразовать к задаче Майера, если ввести дополнительную $(n+1)$ -ю вспомогательную переменную, задав её уравнением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t).$$

Тогда критерий оптимальности примет вид

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1}(t) dt = x_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_f},$$

а это уже задача Майера.

Пример 1.3. Задача с ограничениями в виде неравенств.

В данной задаче требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$$

при заданных конечных значениях x в предположении, что на величину \dot{x} наложено ограничение в виде неравенства $a \leq \dot{x} \leq b$.

Вводя новую вспомогательную вещественную переменную y , можно заданное неравенство заменить уравнением

$$\varphi(\dot{x}, y) = (\dot{x} - a)(b - \dot{x}) - y^2 = 0.$$

1.2.2. Минимизация интегрального критерия

Поскольку любая задача вариационного исчисления может быть приведена к задаче Лагранжа, рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (1.9)$$

где F – непрерывная функция своих аргументов, а $x(t)$ – дважды дифференцируемая функция времени.

Начальная $x(t_0)$ и конечная $x(t_f)$ точки могут быть зафиксированы или подвижны.

Случай закреплённых конечных точек.

Зафиксируем начальное и конечное значение функции $x(t)$:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (1.10)$$

Найдём функцию $x(t)$, доставляющую минимум интеграла (1.9).

Геометрическая иллюстрация этой задачи заключается в том, чтобы найти кривую, соединяющую точки (t_0, x_0) и (t_f, x_f) , вдоль которой интеграл от функции $F(x, \dot{x}, t)$ был бы минимальным (рис. 1.1).

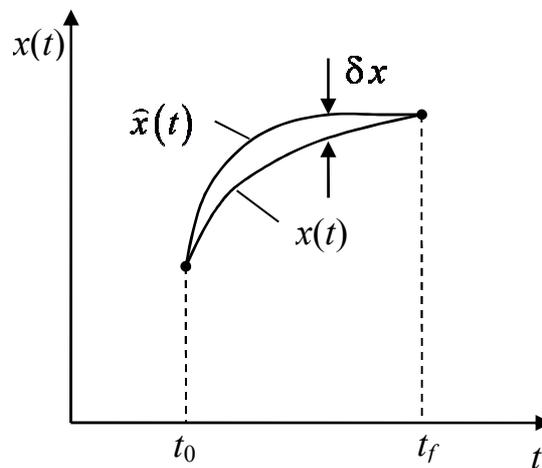


Рис. 1.1. Задача с закреплёнными конечными точками

Обозначим оптимальную траекторию через $x(t)$, а некоторую близкую к ней – через $\hat{x}(t)$. Разность между $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ называется вариацией функции $x(t)$

$$x(t) - \hat{x}(t) = \delta x.$$

Вариацию можно представить себе как некоторый малый параметр ε , умноженный на функцию $\eta(t)$ из того же класса функций, что и $x(t)$. Поскольку

точки начала и конца траекторий $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ совпадают, граничные условия для функции $\eta(t)$ нулевые

$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0. \quad (1.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) + \delta x = x(t) + \varepsilon \eta(t), \\ \hat{\dot{x}}(t) &= \dot{x}(t) + \delta \dot{x} = \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя соотношения (1.12) вместо функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в интеграл (1.9), получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}, t) dt.$$

Разложив подынтегральную функцию в последнем выражении в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x, \dot{x}, t) + \varepsilon \eta \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \text{члены с } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt. \quad (1.13)$$

Необходимым условием экстремума критерия I является равенство нулю частной производной выражения (1.13) по ε , откуда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt = 0. \quad (1.14)$$

Второе слагаемое в последнем выражении интегрируем по частям

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} dt = \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt. \quad (1.15)$$

Учитывая нулевые граничные условия, налагаемые на функцию $\eta(t)$ (1.12), первое слагаемое в выражении (1.15) обратится в нуль, и окончательно условие (1.14) преобразуется в уравнение

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться для произвольной функции η , нулю должно равняться выражение в квадратных скобках

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15) известно как уравнение Эйлера-Лагранжа.

Соответствующий многомерный вариант этого уравнения имеет вид

$$\text{grad}_x F - \frac{d}{dt} (\text{grad}_x F) = 0, \quad (1.17)$$

где обозначено

$$\text{grad}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа является необходимым условием экстремума функционала (1.9), поэтому только на интегральных кривых уравнения Эйлера-Лагранжа, удовлетворяющих граничным условиям (1.10), может реализовываться минимум критерия I . Интегральные кривые уравнения Эйлера-Лагранжа называются *экстремалиями*. Экстремалии, удовлетворяющие граничным условиям, определяют путём решения краевой задачи. Это решение не всегда существует, а если и существует, то не всегда единственное, а если единственное, то не всегда его можно найти, то есть проинтегрировать уравнение Эйлера-Лагранжа.

Положение облегчается тем, что во многих случаях синтеза оптимальных САУ из физических или геометрических соображений довольно просто устанавливается существование решения, его единственность и то, что это решение реализует минимум критерия. Если же решений все-таки несколько, то после вычисления критерия на каждом из этих решений выбирается то из них, на котором критерий достигает наименьшей величины.

Решение уравнения Эйлера-Лагранжа в аналитическом виде возможно в следующих случаях.

1. Функция F не зависит от \dot{x} , то есть является функцией только x и t : $F(x, t)$.
2. Функция F не зависит явно от времени $F = F(x, \dot{x})$.
3. Функция F не зависит от x $F = F(\dot{x}, t)$ или $F = F(\dot{x})$.

4. Функция F линейна относительно \dot{x} , то есть имеет, например, вид $F = \alpha(x, t) + \dot{x} \cdot \beta(x, t)$.

Случай подвижных конечных точек.

Теперь рассмотрим задачу минимизации интеграла, когда конечная точка не фиксирована, а лежит на некоторой кривой. Типичный пример такого случая – задача перехвата, когда, например, самолёт-перехватчик, стартуя из заданной начальной точки, должен сблизиться с перехватываемым самолётом, летящим по определённой траектории, затратив при этом минимальное количество топлива.

По-прежнему, оптимальную траекторию обозначим через $x(t)$, а близкую к ней неоптимальную – через $\hat{x}(t)$. Начальные условия для $x(t)$ заданы: $x(t_0) = x_0$, а конечная точка лежит на кривой с уравнением $x = c(t)$ (рис. 8.2).

Подставляя в интеграл (1.9) вместо оптимальной траектории $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ отличающуюся от неё неоптимальную $\hat{x}(t)$ и $\dot{\hat{x}}(t)$ соответственно и меняя верхний предел в интеграле на величину $t_f + \varepsilon \delta t_f$, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} F(x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}, t) dt. \quad (1.18)$$

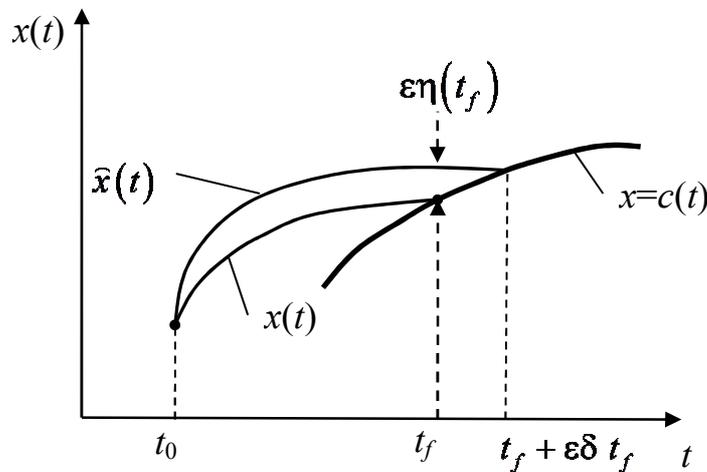


Рис. 1.2. Задача с подвижной конечной точкой

Вариация δt_f возникает потому, что конечная точка не фиксирована, а расположена на кривой $x=c(t)$. Действуя точно так же, как и в задаче с закреплённой конечной точкой, приходим к необходимому условию экстремума интеграла (1.18)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt + F(t_f) \delta t_f = 0.$$

Второе слагаемое под интегралом возьмём по частям и, проделав несложные преобразования, получим

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt + \eta(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} + F(t_f) \delta t_f = 0. \quad (1.20)$$

Рассмотрение условий в конечной точке (рис. 1.2) позволяет связать $\eta(t_f)$ и δt_f (ввиду малости соответствующих вариаций):

$$\dot{x}(t_f) \cdot \delta t_f + \eta(t_f) = \dot{c}(t_f) \cdot \delta t_f.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\eta(t_f) = \{ \dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f) \} \cdot \delta t_f. \quad (1.21)$$

Подставляя выражение (1.21) в уравнение (1.20), получим

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt + \left\{ F(t_f) + [\dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f)] \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться при любых вариациях δt_f , оно распадается на два условия

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0; \quad (1.22)$$

$$\left\{ F(t_f) + [\dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f)] \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0. \quad (1.23)$$

Из первого условия, как и ранее, следует уравнение Эйлера-Лагранжа (1.16).

Второе слагаемое в условии (1.23) равно нулю, если величина $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}$ ограничена, поэтому равно нулю должно быть выражение в фигурных скобках соотношения (1.23). Отсюда следует уравнение

$$F(t_f) = \left[\dot{x}(t_f) - \dot{c}(t_f) \right] \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f}. \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) называется *условием трансверсальности*.

Нелишне отметить, что уравнение (1.16) в начальный момент времени (то есть при $t = t_0$) может и не выполняться, поскольку $\eta(t_0) = 0$ и тогда условие (1.22) справедливо. Важно лишь, чтобы в начальный момент времени $x(t)$ была бы непрерывна, а $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ – конечна.

Если речь идёт о системе регулирования, когда осуществляется переход от одного существенного режима работы к другому, то есть от одного значения x к другому значению, конечная кривая $x = c(t)$ является горизонтальной прямой и $\dot{c}(t_f) = 0$. В этом случае условие трансверсальности (1.24) упрощается и принимает вид

$$F(t_f) = \dot{x}(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f}. \quad (1.25)$$

Можно показать, что в случае, когда функция F явно не зависит от времени, соотношения (1.16) и (1.25) сводятся к одному, а именно:

$$F(x, \dot{x}) = \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}. \quad (1.26)$$

Действительно, дифференцируя обе части последнего выражения по t как сложную функцию, после упрощения получаем

$$\dot{x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] = 0.$$

Обычно в процессе управления производная \dot{x} не обращается в нуль, поэтому нулю должно равняться выражение в квадратных скобках, а это левая часть уравнения Эйлера-Лагранжа (1.16).

Таким образом, оптимальную систему регулирования, осуществляющую переход от одного рабочего режима к другому за время (t_0, t_f) , определяет единственное условие (1.26).

1.2.3. Оптимальное управление по минимуму интегрального критерия

Теперь рассмотрим применение вариационного исчисления к задаче оптимального управления с интегральным критерием.

Пусть динамика объекта задана уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \quad (1.27)$$

где x – выход объекта, u – управляющее воздействие при заданном начальном значении

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.28)$$

Требуется сформировать управление $u(t)$, минимизирующее интегральный критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u) dt. \quad (1.29)$$

Функция F в критерии (1.29) может описывать отклонение от желаемого состояния, потребление энергии, стоимость САУ и т.п.

Обозначая функции, доставляющие минимум критерия (1.29) через $x(t)$ и $u(t)$, а некоторые близкие к ним – через $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ соответственно, можно записать

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon\eta, \\ \hat{u} &= u + \varepsilon\xi, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где η и ξ – в достаточной мере произвольные функции времени, определённые на интервале (t_0, t_f) , а ε – малый параметр.

Подставляя выражения (1.30) в критерий (1.29) вместо $x(t)$ и $u(t)$, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \varepsilon\eta, u + \varepsilon\xi) dt.$$

Разложив в последней формуле подинтегральную функцию в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x, u) + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \text{члены с } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt. \quad (1.31)$$

Необходимое условие экстремума функции (1.31) – равенство

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Взяв производную по ε от правой части выражения (1.31) и, поменяв местами порядок дифференцирования по ε и интегрирования по t , приравняем полученное выражение нулю при $\varepsilon=0$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial u} \right) dt. \quad (1.32)$$

Вернёмся к уравнению динамики объекта (1.27) и заменим $x(t)$ и $u(t)$ на $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ соответственно. Получим

$$\dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta} = f(x + \varepsilon \eta, u + \varepsilon \xi).$$

Разложив правую часть последнего выражения в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории по малым значениям ε , и ограничиваясь линейными членами, получим

$$\dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta} = f(x, u) + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial u} \right).$$

С учётом уравнения (1.27) последнее соотношение превратится в уравнение

$$\dot{\eta} = \eta \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial u} \quad (1.33)$$

с начальными условиями $\eta(t_0) = 0$.

Решая уравнение (1.33) относительно ξ , подставим это значение в уравнение (1.32)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\dot{\eta} - \eta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\frac{\partial f}{\partial u}} \right] dt = 0. \quad (1.34)$$

Слагаемое, связанное с производной $\dot{\eta}$ в выражении (1.34), найдем, интегрируя по частям

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} dt = \eta \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} \right] dt. \quad (1.35)$$

Поскольку в начальной точке $\eta(t_0) = 0$, то первое слагаемое в последнем выражении будет равно нулю, если положить в конечной точке

$$\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} \Big|_{t_f} = 0. \quad (1.36)$$

Тогда из выражений (1.34) и (1.35) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} \right) \right] dt = 0.$$

Так как последнее уравнение должно выполняться при произвольных функциях η , нулю должно равняться выражение в квадратных скобках. Таким образом, уравнение Эйлера-Лагранжа для данной задачи оптимального управления примет вид

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial u}{\partial u} \right) = 0. \quad (1.37)$$

Решая последнее уравнение с учётом граничных условий (1.28) и (1.36), определяем оптимальное управление $u(t)$. Это классическая задача вариационного исчисления с заданными условиями на концах интервала.

Аналитическое решение двухточечной краевой задачи возможно только в исключительных случаях, поэтому, как правило, приходится прибегать к методу последовательных приближений. Этот метод состоит в выборе наугад некоторого конечного значения $x(t_f) = x_f$ и численном решении уравнения Эйлера-Лагранжа при выбранном значении x_f и заданной величине x_0 . Затем вычисляем

разность между полученным $\left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u_r}$ и заданным конечными условиями. По-

скольку эта разность с первого раза не будет равна нулю, процесс продолжаем до тех пор, пока эта разность не станет меньше заданной достаточно малой величины.

Можно получить и многомерный аналог уравнения Эйлера-Лагранжа (1.37).

1.2.4. Учёт ограничений с помощью метода множителей Лагранжа.

До сих пор рассматривались задачи оптимального управления при отсутствии каких-либо ограничений на переменные состояния или на управляющие воздействия. Но на практике всегда имеются некоторые физические ограничения, как на управляемый процесс, так и на управляющие воздействия. Обычно учёт ограничений проводят при помощи *множителей Лагранжа*. Этот метод даёт изящный подход к решению задачи отыскания экстремума функционала, подчинённого одному или нескольким ограничивающим зависимостям, когда последние настолько сложны, что их трудно использовать для исключения свободных параметров. Метод множителей Лагранжа делает не нужным решение уравнений, задающих ограничения с целью исключения свободных параметров.

Обозначим функцию, экстремум которой требуется найти, через

$$P(\mathbf{u}) = P(u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Пусть на управление \mathbf{u} накладываются ограничения вида

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq \mathbf{c}, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец.

Тогда вектор \mathbf{u} , доставляющий максимум или минимум функции P , можно найти, определив условия максимума или минимума промежуточной функции

$$G(\mathbf{u}) = P(\mathbf{u}) + \lambda^T \mathbf{Q}(\mathbf{u}), \quad (1.39)$$

где $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец, именуемый векторным множителем Лагранжа.

Определив экстремум этой новой функции, получим вектор \mathbf{u} как функцию векторного множителя Лагранжа λ . Подставив найденный вектор

$$\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \quad (1.40)$$

в систему ограничительных соотношений (1.38), получим r уравнений относительно r компонент вектора $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r]^T$. Решая полученные уравнения, определяем компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$ и, подставив эти значения в соотношение (1.40), получим вектор оптимального управления.

Пример 1.4. Пусть уравнения динамики объекта являются линейными. В общем случае эти уравнения записываются в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1.41)$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ – как обычно, n -мерный вектор состояния объекта, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r]^T$ – r -мерный вектор управления, а \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы соответствующих размерностей.

Пусть требуется за время T перевести объект из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в конечное состояние¹

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}. \quad (1.42)$$

Найдём вектор оптимального управления $\mathbf{u}^\circ(t)$, доставляющий минимум интегрального квадратичного критерия

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} dt, \quad (1.43)$$

где матрица квадратичной формы \mathbf{H} является положительно определённой и симметрической.

Конечное состояние (1.42) можно принять за систему ограничительных соотношений.

Согласно методу множителей Лагранжа преобразуем вначале ограничительные соотношения (1.42) в интегральную форму, поскольку критерий оптимальности (1.43) задан в интегральном виде.

Решение уравнений состояния (1.41) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ – переходная матрица.

¹ Управление, целью которого является перевод объекта в заданное конечное состояние в заданный момент времени, называется *терминальным управлением*.

В конечной точке $t=T$ вектор состояния равен

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

С учётом соотношений (1.42) последнее уравнение превратится в уравнение

$$\Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0.$$

Решая это уравнение относительно \mathbf{x}_0 , и учитывая свойства переходной матрицы, получим

$$\mathbf{x}_0 = -\int_0^T \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)dt = 0. \quad (1.44)$$

Теперь задачу оптимизации можно сформулировать как задачу минимизации критерия (1.43) по управлению \mathbf{u} при наличии ограничений (1.44).

С введением множителей Лагранжа сформулированная проблема сводится к минимизации критерия

$$I_1(\mathbf{u}) = \int_0^T [\mathbf{u}^T(t)\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \lambda^T \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)]dt. \quad (1.45)$$

Составим уравнение Эйлера-Лагранжа для критерия (1.45), учитывая, что выражение в квадратных скобках не зависит от производной $\dot{\mathbf{u}}(t)$:

$$\text{grad}_{\mathbf{u}} [\mathbf{u}^T(t)\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \lambda^T \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)] = 0.$$

Применяя правила дифференцирования произведения матриц, из последнего уравнения получим

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T \lambda = 2\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T \lambda = 0. \quad (1.46)$$

При получении уравнения (1.46) учтено, что матрица \mathbf{H} – симметрическая. Из соотношения (1.46) определяем вектор оптимального управления

$$\mathbf{u}^\circ(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T \lambda = 0. \quad (1.47)$$

Подставим оптимальное управление (1.47) в ограничения (1.44)

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \Phi^{-1}(t) \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T dt \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V}(T) \boldsymbol{\lambda}, \quad (1.48)$$

где введено очевидное обозначение $\mathbf{V}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T \Phi^{-1}(t) \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T dt$.

Если матрица $\mathbf{V}(T)$ не вырождена, то вектор множителей Лагранжа из соотношения (1.48) определится как

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0.$$

Осталось подставить найденный вектор множителей Лагранжа в выражение для оптимального управления (1.47)

$$\mathbf{u}^\circ(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0.$$

1.3. Метод максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина является одним из эффективных методов решения проблем оптимизации. Он тесно связан с классической задачей Майера. Первоначально принцип максимума был получен Л.С. Понтрягиным с помощью классического вариационного исчисления. Однако в одном отношении он отличается от классической задачи Майера. В задаче Майера управляющие воздействия имеют неограниченные пределы, а у Л.С. Понтрягина управляющие воздействия могут быть элементами замкнутого множества или, другими словами, могут подчиняться некоторым ограничениям.

1.3.1. Обобщённая задача оптимального управления

Большинство задач оптимального управления можно объединить в три основных типа задач:

- 1) задача управления для достижения максимального быстродействия,
- 2) задача управления конечным состоянием,
- 3) задача управления по минимуму интеграла.

Рассмотрим управление объектом n -го порядка, заданного уравнениями в векторно-матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (1.49)$$

Здесь \mathbf{x} и \mathbf{u} – вектор состояния и вектор управления соответственно.

В каждый момент времени управляющие воздействия должны удовлетворять ограничениям в виде неравенства

$$g(\mathbf{u}) \leq 0, \quad (1.50)$$

что вытекает из физических ограничений, налагаемых на систему управления.

Вектор управления, удовлетворяющий ограничениям (1.50), называется вектором допустимого управления.

Задачу управления по минимуму времени переходного процесса можно тогда сформулировать как задачу определения вектора допустимого управления \mathbf{u} , переводящего объект из начального состояния \mathbf{x}_0 в желаемое конечное \mathbf{x}_f за минимальное время (задача максимального быстродействия).

Задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого допустимого вектора управления \mathbf{u} , при котором за заданный интервал времени $t_f - t_0$ одна (например, x_l) или некоторая совокупность переменных состояния приобретает возможно большее или возможно меньшее значение. Другими словами, вектор допустимого управления доставляет максимум или минимум, например,

$$x_l(t_f) = F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_f} \text{ или } \sum_{i=1}^k c_i x_i(t_f) = F_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_f}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Во многих случаях приходится сталкиваться с положением, когда отклонения выходной переменной от некоторого требуемого значения является нежелательным. Часто интересует среднее значение этого отклонения (например, это может быть прибыль или убыток) за некоторый промежуток времени. В таких случаях задача системы управления состоит в минимизации интеграла этого изменения (или какой-либо функции этого изменения) в течение заданного промежутка времени. Эту задачу оптимального управления можно сформулировать как определение вектора допустимого управления \mathbf{u} , доставляющего минимум интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt.$$

Перечисленные три типовые задачи можно свести к задаче оптимизации по отношению к координатам или переменным состояния объекта, называемой *обобщённой задачей оптимального управления*. Задачи управления по минимуму времени, конечным состоянием и по минимуму интеграла являются частными случаями задачи минимизации по отношению к одной новой дополнительной координате. Такой переход от частных задач к обобщённой задаче оптимального управления проводится с помощью процедуры инвариантного вложе-

ния или увеличения размерности вектора состояния путём добавления новой переменной состояния.

1. *Управление по максимуму быстродействия.*

Уравнения состояния заданы системой

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.51)$$

Допустимое управление подчиняется ограничениям (1.50).

Задача состоит в переводе объекта из начального состояния \mathbf{x}_0 в желаемое конечное \mathbf{x}_f за минимальное время, то есть в обеспечении

$$\min_{\mathbf{u}} (t_f - t_0) = \min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

Зададим новую переменную состояния $x_{n+1}(t)$ уравнением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t dt.$$

Так как $x_{n+1}(t) = t - t_0$, то управление по минимуму переходного процесса означает оптимизацию по отношению к новой переменной в конечный момент времени t_f .

2. *Управление конечным состоянием.*

Заданы уравнения объекта (1.51) и ограничения на управление (1.50).

В общем виде задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого вектора допустимого управления \mathbf{u} , который за данный промежуток времени $t_f - t_0$ обеспечивает минимум функционала F от вектора конечного состояния $\mathbf{x}(t_f)$, то есть обеспечивает

$$\min_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}(t_f)) = \min_{\mathbf{u}} F(x_1(t_f), x_2(t_f), \dots, x_n(t_f)).$$

Введём новую переменную $x_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}(t)) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ с начальными условиями $x_{n+1}(t_0) = F(\mathbf{x}(t_0))$.

Для составления уравнения относительно этой новой переменной, возьмем производную от $x_{n+1}(t)$ по t :

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Учитывая уравнения состояния объекта (1.51), последнее соотношение примет вид

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Таким образом, задача управления конечным состоянием сведена к задаче минимизации новой переменной $x_{n+1}(t)$ в конечный момент времени t_f .

3. Управление по минимуму интеграла.

Объект управления и ограничения, как и прежде, заданы уравнениями (1.51) и (1.50) соответственно.

Задача заключается в определении вектора допустимого управления, переводящего объект из начального состояния \mathbf{x}_0 в заключительное состояние \mathbf{x}_f , доставляя при этом минимум интеграла

$$\min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt.$$

Введём новую переменную $x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ с начальным значением $x_{n+1}(t_0) = 0$.

Тогда уравнение для этой новой переменной имеет вид

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Задача оптимизации по минимуму интеграла сведется тогда к задаче минимизации новой компоненты вектора состояния в конечный момент времени t_f .

Все рассмотренные задачи можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания минимума функционала

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f).$$

Таким образом, обобщённую задачу оптимального управления можно сформулировать как задачу определения из всей совокупности допустимых векторов управления, удовлетворяющих ограничениям (1.50), такого вектора \mathbf{u} ,

который переводит объект, заданный уравнениями динамики (1.51), из начального состояния \mathbf{x}_0 в некоторую определённую замкнутую область пространства состояний, доставляя минимум функционала ρ . Принцип максимума Понтрягина даёт изящный способ проектирования таких систем управления.

Прочие задачи оптимального управления, такие, например, как задача оптимизации с заданным начальным и конечным состоянием, задача с заданным начальным и переменным конечным состоянием, задача с переменным временем управления, задача перехвата и т.д., являются частными случаями обобщённой задачи.

1.3.2. Принцип максимума

Из вышеизложенного следует, что задача оптимизации может быть сформулирована как задача отыскания минимума функции

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_f \rangle = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_f, \quad (1.52)$$

подчинённой некоторым функциональным ограничениям.

В выражении (1.52) \mathbf{x} – вектор состояния объекта, \mathbf{b} – вектор-столбец, зависящий от координат, условия минимума которых должны быть обеспечены.¹

Функция, определяемая формулой (1.52), носит название *функции Понтрягина*.

Стратегия управления, обеспечивающая минимум функции Понтрягина, называется *стратегией оптимального управления*. Геометрическая интерпретация стратегии оптимального управления заключается в том, чтобы вектор \mathbf{x}_f перемещался как можно дальше в направлении $-\mathbf{b}$.

Определить минимум функции Понтрягина не всегда легко. Однако решение задачи оптимизации можно облегчить, если удастся найти некоторую простую функцию, тесно связанную с функцией Понтрягина и с динамикой объекта.

Интуитивно ясно, что минимум функции Понтрягина можно определить, найдя условия максимума энергии или мощности в системе. Такое предположение приводит к выводу о существовании такой функции энергии, условия максимума которой эквивалентны условиям минимума функции Понтрягина. И такая функция действительно есть! Это функция Гамильтона H , представляющая полную энергию в системе (сумма кинетической и потенциальной энергии) и равная скалярному произведению вектора количества движения на вектор скорости

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle. \quad (1.53)$$

¹ Вообще-то этот класс задач содержится в рамках задачи Майера в вариационном исчислении.

В выражении (1.53) \mathbf{x} – вектор состояния, \mathbf{p} – вектор количества движения, \mathbf{u} – вектор управления. При записи формулы (1.53) учтены уравнения динамики (1.51).

Простота функции Гамильтона делает весьма привлекательной идею о том, что из условий максимума функции Гамильтона можно получить условия минимума функции Понтрягина. Л.С. Понтрягин первым догадался сделать такой вывод и назвал свое открытие *принципом максимума*.

Принцип максимума гласит, что если вектор управления \mathbf{u} оптимален, то есть доставляет минимум функции Понтрягина, то функция Гамильтона H имеет максимум по отношению к \mathbf{u} в интервале управления.

Применение принципа максимума к решению задач оптимального управления заключается в определении условий максимума гамильтониана H по отношению к вектору управления. Результатом этого этапа будет вектор оптимального управления как функция вектора количества движения $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{p})$. Но при проектировании систем оптимального управления необходимо определить закон управления как функцию вектора состояния $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$ или как функцию времени $\mathbf{u}^\circ(t)$. Потому следующий этап – подстановка найденного вектора оптимального управления $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{p})$ в канонические уравнения Гамильтона. Очередной этап состоит в решении получающейся при этом двухточечной краевой задачи с граничными условиями. В результате получаем оптимальную траекторию $\mathbf{x}^\circ(t)$ и оптимальное управляющее воздействие $\mathbf{u}^\circ(t)$.

Итак, заданы уравнения динамики основной системы (1.51)

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вектор количества движения определится как решение дифференциальных уравнений сопряжённой системы

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.54)$$

с граничными условиями $p_i(t_f) = -b_i$, где b_i – известные константы, входящие в функцию Понтрягина ρ (1.52).

Связать уравнения (1.51) и (1.54) можно с помощью функции Гамильтона (1.53). Продифференцируем функцию Гамильтона H сначала по p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

а затем по x_i

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Учитывая уравнения (1.51) и (1.54), получаем канонические уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

с граничными значениями $x_i(t_0) = x_{i0}$, и $p_i(t_f) = -b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Физическую интерпретацию принципа максимума можно пояснить следующим образом: функция Гамильтона H представляет собой скалярное произведение \mathbf{p} на \mathbf{f} или \mathbf{p} на $\dot{\mathbf{x}}$ и является мощностью, если \mathbf{p} рассматривать как количество движения. Поэтому для минимизации функции Понтрягина ρ необходима максимальная энергия, и наоборот, когда ρ минимальна, H максимальна.

Функция Понтрягина ρ , определяемая выражением $\rho = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_f \rangle$, и граничные условия $p_i(t_f) = -b_i$ справедливы для процессов управления с произвольным конечным состоянием. Если же на конечное состояние накладываются ограничения вида

$$R_k(\mathbf{x}_f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.56)$$

то функция Понтрягина принимает вид

$$\rho = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_f + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}_f),$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – векторный множитель Лагранжа.

В этом случае канонические уравнения Гамильтона подчинены граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ p_i(t_f) &= -\left[b_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

При этом конечные условия для \mathbf{x}_f удовлетворяют ограничениям (8.56).

Пример 1.5. Определим оптимальное управление линейным объектом первого порядка

$$\dot{x} = -ax + \gamma u,$$

где a и γ – некоторые положительные константы.

Критерий качества – квадратичный

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(u, t) dt,$$

а управление ограничено $|u| \leq M$.

Перейдём к обобщённой задаче оптимального управления. Для этого обозначим $x_1 = x$ и введём дополнительную компоненту вектора состояния

$x_2 = \int_{t_0}^t x_1^2 dt$. Тогда уравнения динамики будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma u, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2. \end{aligned}$$

В связи с тем, что минимизировать теперь требуется $x_2(t_f)$, функция Понтрягина определится выражением

$$\rho = b_1 x_1 + b_2 x_2 = x_2,$$

где $b_1=0$, $b_2=1$.

Составим функцию Гамильтона для данной системы

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1(-ax_1 + \gamma u) + p_2 x_1^2.$$

Принцип максимума требует, чтобы управление u обеспечивало бы максимум функции Гамильтона. Из вида функции Гамильтона следует, что максимальное значение она будет принимать тогда, когда знак управления u будет совпадать со знаком p_1 , а абсолютное значение u будет максимальным, то есть M . Таким образом, общий характер оптимального управления установить довольно просто

$$u^\circ = M \operatorname{sign} p_1, \quad (1.57)$$

где знаковая функция

$$\text{sign } \alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha = 0, \\ -1 & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + \gamma u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \end{cases} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = ap_1 - 2x_1 p_2, \\ \dot{p}_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Начальные условия для вектора состояния \mathbf{x}

$$x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = 0,$$

конечные условия для вектора \mathbf{p}

$$p_1(t_f) = -b_1 = 0, \quad p_2(t_f) = -b_2 = -1.$$

Поскольку $\dot{p}_2 = 0$, а $p_2(t_f) = -1$, то $p_2(t) = \text{const} = -1$. Подставляя оптимальное управление в канонические уравнения, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma M \text{sign } p_1, \\ \dot{p}_1 &= ap_1 + 2x_1, \end{aligned} \tag{1.58}$$

с граничными условиями $x_1(t_0) = x_0$ и $p_1(t_f) = 0$.

По сути, мы получили двухточечную краевую задачу. Решение нелинейных уравнений (1.58) при заданных граничных условиях даст уравнение линии переключения $p_1(t)$, и, в соответствии с (1.57) – оптимальное управление u° . Процедура решения заключается в выборе наугад значения $p_1(t_0) = p_0$ и в определении, после некоторых проб и ошибок, функций $x_1(t)$ и $p_1(t)$, удовлетворяющих другому граничному условию $p_1(t_f) = 0$. Моделирование уравнений (1.58) приведено на рис. 1.3.

Важно отметить, что закон управления не может быть выражен в виде аналитической функции координат системы.

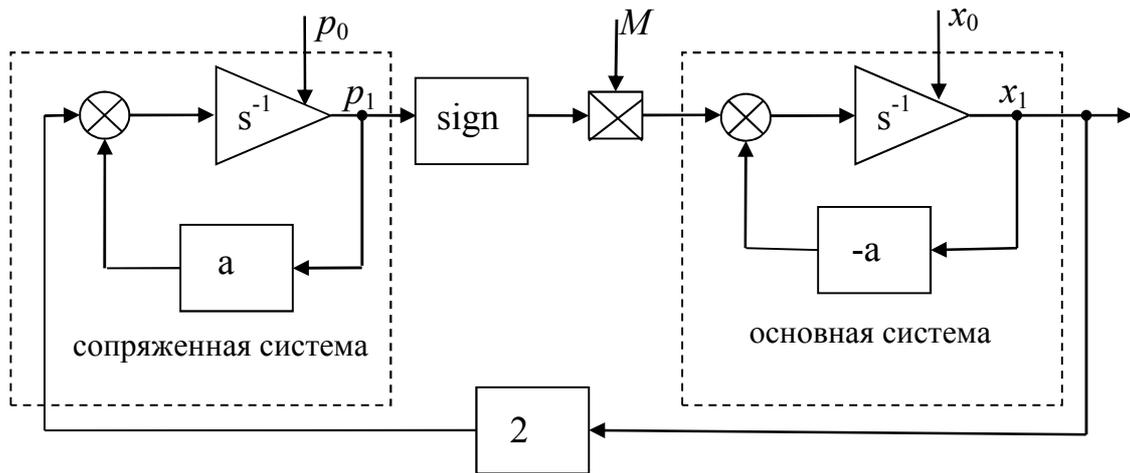


Рис. 1.3. Моделирование оптимального управления

1.4. Динамическое программирование

Из вышеизложенного ясно, что проблемы оптимизации сводятся к решению двухточечной краевой задачи. Эффективным методом решения такого рода задач является разработанный Ричардом Беллманом и его сотрудниками метод, названный ими динамическим программированием. Идея этого метода является выражением концепции инвариантного вложения, согласно которой исходная проблема заменяется рядом более простых проблем.

1.4.1. Многошаговые процессы управления

Пусть объект управления задан n -мерным вектором состояния \mathbf{x} . Разделим весь процесс управления на N шагов. На первом шаге объект преобразованием $\mathbf{x}_2 = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)$ переводится из состояния \mathbf{x}_1 в состояние \mathbf{x}_2 и выигрыш от этой операции равен $R_1 = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)$. Задача состоит в определении управления \mathbf{u}_1 , максимизирующего R_1 . Полученное решение можно назвать одношаговой стратегией оптимального управления. Ясно, что решение одношаговой проблемы элементарно. Максимальный выигрыш при этом даётся выражением

$$R_1^*(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1),$$

а решение, доставляющее максимум выигрыша, является оптимальным решением или оптимальной стратегией управления.

Перейдём ко второму шагу. Он преобразованием $\mathbf{x}_3 = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)$ переводит достигнутое в результате первого шага состояние \mathbf{x}_2 в состояние \mathbf{x}_3 . Два шага дают полный выигрыш $R_2 = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + r(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)$. Теперь задача состоит в определении последовательности управлений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, доставляющих максимум сум-

марному выигрышу. Таким образом, получаем двух шаговую стратегию. Максимальный выигрыш получим путём определения максимума уже по двум функциям, и равен он будет

$$R_2^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} [r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + r(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)].$$

Понятно, что двух шаговая задача является более сложной, чем одношаговая.

Сложность стремительно возрастает с увеличением количества шагов. Для N -шагового процесса задача состоит в выборе N -шаговой стратегии $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$, доставляющей максимум общему выигрышу $R_N = \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$. Максимальный выигрыш определится выражением

$$R_N^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\{\mathbf{u}_k\}} \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k),$$

где максимум берётся по управлениям на всех N шагах.

Определение максимума на основе известных элементарных методов приводит к системе из N уравнений, которые получаются приравнением нулю частных производных по \mathbf{u}_k от $R_N^\circ(\mathbf{x}_1)$ ($k=1, 2, \dots, N$).

Очевидно, что в случае большого N решение проблемы оптимизации становится чрезвычайно громоздким и поэтому решение задачи «в лоб» нереально.

1.4.2. Принцип оптимальности

Задача определения N -шаговой оптимальной стратегии может быть облегчена на основе применения фундаментального принципа динамического программирования – принципа оптимальности: оптимальная политика или оптимальная стратегия управления обладает свойством, что какое бы ни было начальное состояние или начальное решение, последующее решение должно быть оптимальной стратегией по отношению к состоянию, возникшему в результате первого решения.

Проиллюстрировать принцип оптимальности можно с применением понятия пространства состояний. Пусть имеется оптимальная траектория в пространстве состояний объекта, переводящая изображающую точку $\mathbf{x}(t_0)$ в точку $\mathbf{x}(t_f)$ (рис. 1.4). Оптимальность траектории означает, что некоторый критерий

оптимальности $R = \int_{t_0}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ принимает экстремальное (предположим для определённости максимальное) значение.

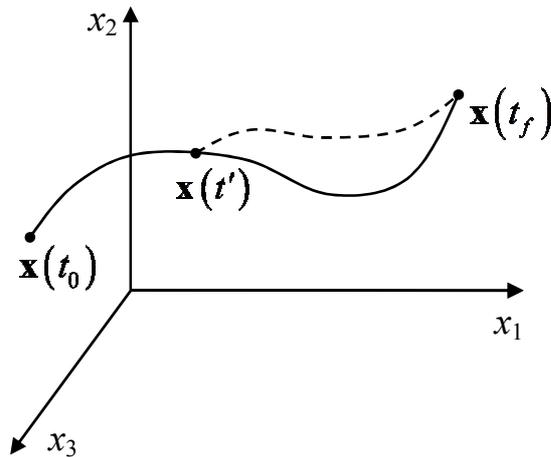


Рис. 1.4. К принципу оптимальности.

Принцип оптимальности гласит, что любая конечная часть оптимальной траектории является, в свою очередь, оптимальной траекторией. Это означает, что траектория от некоторой промежуточной точки $\mathbf{x}(t')$ до конечной точки $\mathbf{x}(t_f)$ является оптимальной, то есть обеспечивает максимум критерия

$$R' = \int_{t'}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt.$$

Действительно, предположим, что это не так, а, следовательно,

но, есть какая-то другая траектория (на рис. 1.4 показана штриховой линией), доставляющая максимум функционала R' . Но тогда и первоначальная траектория вопреки предположению не являлась оптимальной, поскольку критерий оптимальности, состоящий из суммы двух частей – максимальной на отрезке траектории от точки $\mathbf{x}(t_0)$ до точки $\mathbf{x}(t')$ и не максимальной – от точки $\mathbf{x}(t')$ до точки $\mathbf{x}(t_f)$, принимал бы не максимальное значение.

Изложенное выше справедливо, конечно, и для систем, в которых время разбито на дискретные шаги (этапы).

Таким образом, оптимальная стратегия зависит только от состояния объекта в рассматриваемый момент времени и не зависит от того как объект попал в это состояние, то есть не зависит от его предыстории.

Принцип оптимальности, описывающий основные свойства оптимальных стратегий, использует в качестве своей исходной точки концепцию инвариантного вложения, согласно которой решение исходной сложной задачи заменяется некоторым количеством аналогичных более простых задач.

Если речь идёт о многошаговых процессах оптимизации, то такой подход сводит исходную задачу к последовательному решению одношаговых процессов оптимизации. В многошаговом процессе оптимизации полный выигрыш для N шагов, согласно принципу оптимальности, можно представить в виде

$$R_N = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + R_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1).$$

Первое слагаемое в этом выражении – начальный выигрыш, второе слагаемое – максимальный выигрыш от последующих $N-1$ шагов.

Максимальный выигрыш запишется как

$$R_N^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} (r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + R_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)). \quad (1.59)$$

Соотношение (1.59) справедливо для любых $N \geq 2$. Для $N=1$ получим, очевидно

$$R_1^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1).$$

Таким образом, принцип оптимальности позволяет исходный N шаговый процесс заменить последовательностью одношаговых процессов и на каждом шаге использовать одно и то же рекуррентное соотношение (1.59).

Пример 1.6. Пусть требуется положительную величину c разделить на n частей так, чтобы произведение этих частей было максимальным.

Обозначим через $R_n^\circ(c)$ максимальное значение произведения, x – первая часть, $(c-x)$ – оставшаяся часть. Тогда, используя соотношение (1.59), можно составить функциональное уравнение

$$R_n^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_{n-1}^\circ(c-x)\}, \quad n \geq 2. \quad (1.60)$$

Очевидно, что при $n=1$ $R_1^\circ(c) = c$ и $R_1^\circ(c-x) = c-x$.

Положим в уравнении (1.60) $n=2$:

$$R_2^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_1^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \{x(c-x)\}.$$

Максимум найти нетрудно, приравняв нулю производную по x от выражения в фигурных скобках. Этот максимум будет при $x = \frac{c}{2}$. Таким образом, оптимальная стратегия деления на две части – это деление на две **равные** части

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right\},$$

а максимальное значение произведения – $R_2^\circ(c) = \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Положим $n=3$. Максимальное произведение найдем из соотношения

$$R_3^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_2^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \left\{ \frac{x(c-x)^2}{4} \right\}.$$

Взяв производную и приравняв её нулю, получим $x = \frac{c}{3}$. Оставшаяся часть в $\frac{2}{3}c$, согласно предыдущему рассуждению, оптимально будет разделена на две равные части, то есть на $\frac{c}{3}$ и $\frac{c}{3}$.

Оптимальное деление на три части будет, таким образом

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3} \right\},$$

а максимальное произведение равно

$$R_3^\circ(c) = \left(\frac{c}{3} \right)^3.$$

Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводу, что при $n=k$ оптимальным делением будет деление на k равных частей

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{k}, \frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k} \right\},$$

а максимальное произведение будет

$$R_k^\circ(c) = \left(\frac{c}{k} \right)^k.$$

Методом математической индукции можно доказать, что оптимальным делением будет деление на равные части и при $n=k+1$. Действительно, полагая $n=k+1$, из соотношения (1.60) получим

$$R_{k+1}^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_k^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \left\{ \frac{x(c-x)^k}{k^k} \right\}.$$

Путём простейших вычислений получаем оптимальное значение $x = \frac{c}{k+1}$, оптимальную стратегию деления $\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{k+1}, \frac{c}{k+1}, \dots, \frac{c}{k+1} \right\}$ и максимальное произведение $R_{k+1}^\circ(c) = \left(\frac{c}{k+1} \right)^{k+1}$.

Окончательно, оптимальная стратегия деления на n частей

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n} \right\},$$

и максимальное произведение равно

$$R_n^\circ(c) = \left(\frac{c}{n} \right)^n.$$

Задача, рассмотренная в данном примере, очень простая и она могла быть решена обычными методами. Но этот пример имел целью показать, каким образом данная задача может быть сформулирована как многошаговый процесс оптимизации. Во многих более сложных задачах подобная формулировка часто является ключом к их решению при применении метода динамического программирования.

1.4.3. Дискретный вариант метода динамического программирования

Начать рассмотрение метода динамического программирования проще с дискретного варианта процесса, подлежащего оптимизации.

Пусть имеются дискретные возможные значения $x \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$. Время также течет дискретно, шагами $t = kT$.

Ставится задача из начального состояния $x(k_0)$ перейти в заключительное состояние $x(k_f)$ с минимальным показателем качества

$$R(x(k_0), u(k), k_0) = T \sum_{k=k_0}^{k_f} r(x(k), u(k), k), \quad (1.61)$$

то есть найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $x(k_0)$ и точку $x(k_f)$.

В критерии (1.61) $r(x(k), u(k))$ – потери от сделанного k -го шага. Например, это могут быть затраты энергии или штраф на k -м шаге.

Поскольку на каждом шаге (а таких шагов $N = k_f - k_0$) состояние объекта принимает только одно из l значений, то число возможных траекторий конечно и равно l^N , и, в принципе, оптимальную траекторию можно было бы найти простым перебором. Однако в реальных случаях это потребовало бы непомерно большого объема вычислений. Метод динамического программирования позволяет резко сократить объем вычислительной работы.

Возьмём некоторую промежуточную точку k_j . Показатель качества R на интервале от k_j до k_f определяется состоянием объекта $x(k_j)$ и управляющими воздействиями $u(k)$ при $k_j \leq k \leq k_f$:

$$R(x(k_j), u(k), k_j) = T \sum_{k=k_j}^{k_f} r(x(k), u(k), k). \quad (1.62)$$

Принцип оптимальности означает, что если выражение (1.61) минимально, то часть (1.62) также должна быть минимальной. Более того, оптимальная стратегия управления $u^\circ(k)$ на интервале (k_j, k_f) является только функцией состояния $x(k_j)$, то есть $u^\circ(k) = g_k(x(k_j))$. Поэтому оптимальное значение критерия (1.62) является лишь функцией состояния $x(k_j)$ и самого k_j :

$$R^\circ(x(k_j), k_j) = \min_{u(k)} \sum_{k=k_j}^{k_f} Tr(x(k), u(k), k). \quad (1.63)$$

Очевидно, что при $k_j = k_f$ $R^\circ(x(k_f), k_f) = 0$. Приняв это граничное условие за исходное, можно воспользоваться уравнением (1.63) для вычисления $u^\circ(k)$ при попятном движении от $k = k_f$ до $k = k_0$.

Действительно, на шаге $k_f - 1$ находим управление $u^\circ(k_f - 1)$, соответствующее минимальному значению R , то есть, определяем и запоминаем $R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1)$, которое будет являться функцией значения x в начале последнего шага. Поиск минимума при этом ведётся только по одной переменной $u(k_f - 1)$

$$R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1) = \min_{u(k)} Tr(x(k_f - 1), u(k_f - 1), k_f - 1).$$

Важно отметить, что и $u^\circ(k_f - 1)$, и значение R° зависят от $x(k_f - 1)$.

Переходим к шагу $k_f - 2$. Оптимальной стратегией будет $\{u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}$, соответствующая

$$R^\circ(x(k_f - 2), k_f - 2) = \min_{\substack{u(k_f - 1) \\ u(k_f - 2)}} T \{r(x(k_f - 2), u(k_f - 2), k_f - 2) + r(x(k_f - 1), u(k_f - 1), k_f - 1))\} = \\ \min_{u(k_f - 2)} T \{r(x(k_f - 2), u(k_f - 2), k_f - 2) + R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1))\}.$$

Минимизировать приходится всё выражение в фигурных скобках, поскольку само значение $x(k_f - 1)$ зависит от $u^\circ(k_f - 2)$. Минимизация опять осуществляется только по одной переменной, теперь уже по $u^\circ(k_f - 2)$. В результате получаем оптимальное управление $\{u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}$, значение $x(k_f - 1)$ в конце предпоследнего шага и величину $R^\circ(x(k_f - 2), k_f - 2)$ как функцию $x(k_f - 2)$. Заносим её в память вместо $R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1)$.

Далее процесс повторяется до тех пор, пока мы не придём в точку, соответствующую $k = k_0$. А значения $x(k_0)$ нам известно! Таким образом, определится стратегия оптимального управления

$$\{u^\circ(k_0), u^\circ(k_0 + 1), \dots, u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}.$$

При получении оптимальной стратегии для вычисления $R^\circ(x(k_f - i), k_f - i)$ для каждого узла в момент времени $(k_f - i)T$ необходимо хранить временно в памяти ЦВМ $R^\circ(x(k_f - i + 1), k_f - i + 1)$ для момента времени $(k_f - i + 1)T$.

Поскольку $R^\circ(x(k_j), k_j)$ не зависит от управления u , уравнение (1.63) можно переписать в виде

$$\min_{u(k)} \left\{ Tr(x(k_j), u(k_j), k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_f} Tr(x(k), u(k), k) - R^\circ(x(k_j), k_j) \right\} = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно условию

$$\min_{u(k)} \left\{ r(x(k_j), u(k_j), k_j) + \frac{R^\circ(x(k_j + 1), k_j + 1) - R^\circ(x(k_j), k_j)}{T} \right\} = 0. \quad (1.64)$$

1.4.4. Уравнения Беллмана и Гамильтона–Якоби

При определённых ограничениях в условии (1.64) можно период квантования $T \rightarrow 0$, и тогда получим непрерывный аналог этого уравнения

$$\min_{u(t)} \left\{ r(x(t), u(t), t) + \frac{dR^\circ(x(t), t)}{dt} \right\} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (1.65)$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0; R^\circ(x(t_f), t_f) = 0$.

Данное уравнение известно как *уравнение Беллмана*.

В общем случае состояние объекта задано вектором $\mathbf{x}(t)$, управляющее воздействие также вектор $\mathbf{u}(t)$, и уравнение Беллмана приобретает вид

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{dR^\circ(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right\} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (1.66)$$

Возьмём полную производную по времени от второго слагаемого в фигурных скобках

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R^\circ}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right\} = 0.$$

Учитывая уравнения динамики объекта $\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и независимость $\frac{\partial R^\circ}{\partial t}$ от управления \mathbf{u} , получим уравнение Беллмана в виде

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ, \mathbf{f} \rangle \right\}. \quad (1.67)$$

Введя обозначение $\mathbf{p} = \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ$ для обобщённого вектора количества движения и $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle + r$ для функции Гамильтона, выражение (1.67) превратим в уравнение

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t).$$

Подставив в полученное уравнение оптимальное управление $\mathbf{u}^\circ(t)$ и оптимальную траекторию $\mathbf{x}^\circ(t)$, получим классическое уравнение Гамильтона–Якоби

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = H(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{p}, t),$$

дополненное условием

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \langle \text{grad}_x R^\circ, \mathbf{f} \rangle \}. \quad (1.68)$$

Условие (1.68) обеспечивается, если приравнять нулю производную по \mathbf{u} от выражения в фигурных скобках

$$\text{grad}_u r + \langle \text{grad}_x R^\circ, \mathbf{f} \rangle = 0. \quad (1.69)$$

Итак, в случае непрерывных систем с уравнениями объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

и интегральным критерием

$$R = \int_{t_0}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

принцип динамического программирования приводит к уравнению Беллмана

$$r(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ, t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \langle \text{grad}_x R^\circ, \mathbf{f} \rangle = 0, \quad (1.70)$$

где $R^\circ = \min R$, а \mathbf{u}° и \mathbf{x}° – оптимальное управление и оптимальная траектория движения объекта соответственно, дополненное уравнением (1.69) относительно R° .

В простейшем случае, когда имеется система первого порядка и скалярное управление, уравнение объекта имеет вид $\dot{x} = f(x, u)$. Уравнение Беллмана в этом случае будет

$$r(x^\circ, u^\circ, t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} \cdot f = 0, \quad (1.71)$$

а необходимое условие минимума критерия

$$\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial R^\circ}{\partial x} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial R^\circ}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} = P(x, u). \quad (1.72)$$

Подставляя выражение (1.72) в уравнение (1.71) и решая последнее относительно $\frac{\partial R^\circ}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = -r + f \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} = Q(x, u). \quad (1.73)$$

Продифференцируем уравнение (1.72) по t , а уравнение (1.73) – по x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^\circ}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \frac{\partial^2 R^\circ}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Приравняв правые части полученных выражений, получим уравнение относительно оптимального управления

$$\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + f \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

где P и Q определяются выражениями (1.72) и (1.73) соответственно.

Пример 1.7. Рассмотрим тот же линейный объект, что и в примере 1.5. Уравнение объекта

$$\dot{x} = -ax + \gamma u,$$

где a и γ – некоторые положительные константы.

Критерий качества – квадратичный

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(u, t) dt,$$

а управление ограничено $|u| \leq M$.

Введём функцию $R^\circ(x, t) = \min_u \int_t^{t_f} x^2 dt$. Тогда из формулы (1.67) следует

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_u \left\{ r(x, u) + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} f \right\} = \min_u \left\{ x^2 + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} (-ax + \gamma u) \right\}.$$

Из выражения в фигурных скобках видно, что его минимум будет в том случае, если знак управления противоположен знаку $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, а абсолютное значение – максимально, то есть если

$$u = -M \operatorname{sign} \frac{\partial R^\circ}{\partial x}.$$

Оптимальное управление, таким образом, будет релейным $u = \pm M$ в соответствии со знаком функции $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = x^2 - ax \frac{\partial R^\circ}{\partial x} - \gamma M \left| \frac{\partial R^\circ}{\partial x} \right|$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0; R^\circ(x, t_f) = 0$.

Как видно, сравнительно легко устанавливается общий характер оптимального управления, однако определение линии переключения – отнюдь не простая задача.

Уравнение Беллмана (1.70) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных, и в настоящее время нет общих методов его решения в аналитической форме. Каждая новая задача требует особого исследования.

Решение задач синтеза оптимального управления с помощью метода динамического программирования численными методами требует чрезвычайно большого объема вычислительной работы, неподсильной даже для современной вычислительной техники. Но, тем не менее, метод динамического программирования обладает рядом достоинств.

1. Метод позволяет получить физически понятные алгоритмы решения задач оптимального управления.

2. В процессе решения оптимальное управление определяется как функция переменных состояния объекта, что упрощает синтез замкнутых оптимальных систем.

3. Метод без особых изменений пригоден для синтеза как равномерно-оптимальных, так и статистически-оптимальных систем.

4. Принципу оптимальности Беллмана удовлетворяют только те функции $R^{\circ}(\mathbf{x}, t)$, которые одновременно являются функциями Ляпунова для замкнутой системы. Это приводит к тому, что соответствующее этим функциям оптимальное управление \mathbf{u}° и формирующий это управление регулятор обеспечивают не только минимум критерия качества, но и устойчивость системы в целом.

Достоинства метода динамического программирования Беллмана стимулируют исследования по его совершенствованию. В частности, появляется много работ, направленных на уменьшение требуемого объема памяти ЦВМ при решении задач динамического программирования численными методами и на разработку методов проектирования различных типов оптимальных систем с использованием уравнений Беллмана.

2. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

2.1 Общие сведения и классификация адаптивных САУ

Традиционный подход к синтезу САУ предполагает наличие математически корректно сформулированной цели управления и полной исходной (априорной) информации об объекте управления и действующих на него воздействиях. Понятие полноты априорной информации определяется достижимостью цели управления. Наличие полной априорной информации присуще обыкновенным (неадаптивным) системам управления, независимо от реализуемого закона управления, наличия или отсутствия обратной связи, случайности или детерминированности входных воздействий, применяемых вычислительных средств и т.д. При недостаточности же априорной информации мы приходим к адаптивным системам, реализующим *адаптивное управление*.

Адаптивное управление обеспечивает заданное (или максимальное в случае оптимального управления) качество управления объектом (процессом) в условиях неполных или изменяющихся в процессе работы параметров объекта и (или) изменения характеристик действующих на объект возмущений. Возможность управления объектом при недостаточной или даже весьма малой априорной информации основана на применении адаптации и обучения в системах управления, которые уменьшают неопределённость путем использования информации, получаемой в самом процессе управления. То есть под адаптацией (приспособлением) понимают процесс изменения параметров и (или) структуры регулятора, а нередко, и управляющих воздействий на основе текущей информации об объекте при неполной априорной информации и (или) меняющихся в процессе работы параметрах объекта.

Уместно привести здесь определение адаптивной системы, сформулированное Я.З. Цыпкиным.

«Под адаптивными системами управления будем понимать такие системы, которые, используя информацию о внешних воздействиях, условиях работы и выходных величинах, изменяют структуру или параметры регулятора с целью обеспечения оптимального или заданного функционирования управляемой системы при изменяющихся условиях её работы».

Похожее определение дал В.Н. Буков.

«Адаптивными называются такие системы управления, которые предназначены для функционирования в условиях априорной неопределённости и которые в процессе функционирования автоматически приспособляются к непредвиденным изменениям свойств объекта управления и внешней среды».

Классифицировать адаптивные системы можно по следующим основаниям.

По уровню априорной неопределённости:

– параметрическая адаптация, когда неизвестны или меняются параметры объекта;

– непараметрическая адаптация, когда априорная неопределенность не связана непосредственно с какими-либо параметрами.

По организации процесса адаптации:

– поисковые адаптивные системы, в которых для организации процесса изучения объекта используются случайные или детерминированные специально организованные воздействия;

– беспоисковые адаптивные системы, работа которых основана на использовании некоторых необходимых и (или) достаточных условий заданного критерия качества.

В поисковых адаптивных системах имеются специальные блоки, формирующие пробные воздействия для изучения (идентификации) объекта управления. Возможно также создание условий для возникновения автоколебаний (предельного цикла) в системе. Пробные движения не всегда возможны по условиям эксплуатации системы управления, и это является основным недостатком данного метода организации адаптивного управления.

По целям адаптации:

– системы с заданным качеством управления, характеризуемым известными критериями качества (запасы устойчивости, быстродействие, точность и т.п.);

– оптимальные (экстремальные) системы, в которых в процессе работы поддерживается экстремум функционала, характеризующего качество работы системы.

По типу организации управления:

– самонастраивающиеся системы, у которых в процессе управления подстраиваются параметры регулятора;

– самоорганизующиеся системы, у которых процесс адаптации приводит к изменению структуры регулятора заранее не определенным образом.

В адаптивных системах наряду с процессом управления идет процесс изучения (идентификации) объекта. Другими словами, управляющие воздействия носят двойственный характер. Они служат как средством изучения объекта, так и средством направления его к желаемому (в частности, оптимальному) состоянию. Такое управление можно назвать *дуальным* управлением. В системах дуального управления всегда есть противоречие между познавательной и управляющей сторонами воздействий.

Общую функциональную схему адаптивной системы можно представить рис. 2.1, на котором обозначено: О – объект управления, Р – регулятор, состоящий из двух частей ОР (основной регулятор) и БА (блок адаптации).

Основной контур управления образуют О и ОР. Это обычная неадаптивная САУ. Блок адаптации БА управляет основным регулятором ОР, изменяя его параметры и (или) структуру в соответствии с изменением условий работы и свойств объекта управления О. С этой целью БА измеряет внешние воздействия g и f и входную u и выходную y величины объекта. По этим данным БА вычисляет критерий качества $J(g, f, u, y)$ и, определяя его отклонение от заданного,

или, в зависимости от алгоритма работы, экстремального значения воздействует на ОР так, чтобы ликвидировать это отклонение.

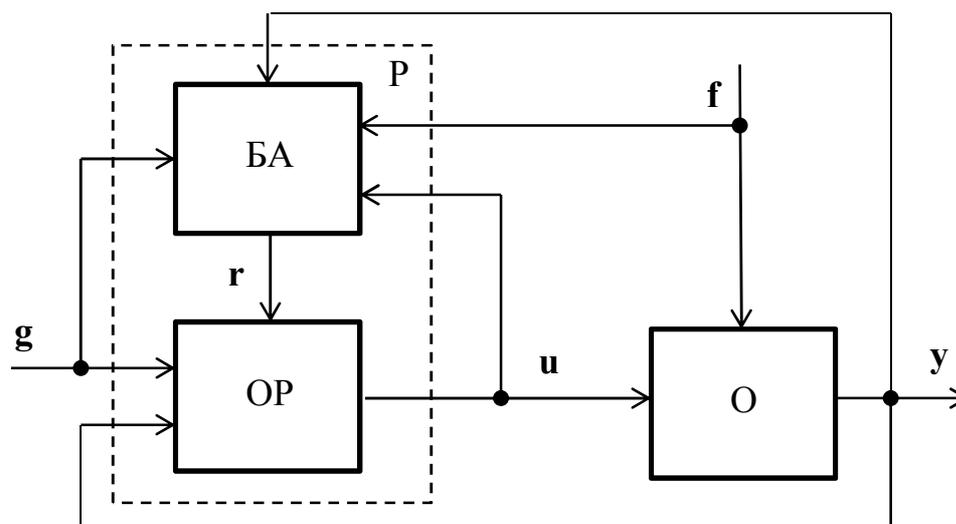


Рис. 2.1. Функциональная схема адаптивной САУ

Таким образом, в адаптивной САУ имеется два контура управления – основной, состоящий из объекта O и основного регулятора $ОР$, и контур адаптации, включающий блок адаптации $БА$. Для второго контура объектом управления является основная САУ. То есть контур адаптации является вторым уровнем управления уже над всей основной САУ.

Как и всякое управление, адаптация с помощью $БА$ принципиально может быть реализована в виде разомкнутой, замкнутой или в общем случае комбинированной системы. Рис. 2.1 иллюстрирует как раз этот последний случай.

В случае разомкнутого контура адаптации управление основным регулятором осуществляется в функции времени (программное управление), либо как система компенсации, действующая в функции внешних воздействий g и (или) f .

Адаптация, осуществляемая с помощью замкнутого контура (с обратной связью), функционирует в функции выходной величины y или переменных состояния объекта и в функции управляющих воздействий u . Использование при этом компенсационных сигналов, связанных с внешними воздействиями (т.е. комбинированное управление), является вспомогательным средством, повышающим качество адаптации и, в некоторых случаях, упрощающее вычислительный алгоритм регулятора.

Также, как и у обычных САУ, основным типом адаптивных САУ являются замкнутые системы адаптации.

Анализируя различные типы адаптивных систем управления, можно сделать вывод, что, по-видимому, наиболее перспективными являются оптимальные беспоисковые системы с параметрической адаптацией, в которых на основе полученной в процессе работы информации об объекте управления и возмущающих воздействиях осуществляется автоматическая подстройка параметров модели объекта.

2.2. Стохастические процессы управления

В разделе 1 рассматривалось решение задач оптимального управления процессами, которые предполагались детерминированными. Динамика процессов предполагалась полностью известной. Решение задач оптимального управления при этом сводилась обычно к составлению дифференциальных уравнений в частных производных или рекуррентных соотношений для определения закона управления, минимизирующего или максимизирующего заданный критерий качества.

На практике во многих случаях приходится иметь дело с неопределённостью процессов и различного рода случайными эффектами, которые возникают вследствие неточности изготовления, изменении параметров при старении, неточности сведений о динамике процессов и наличия случайных внешних воздействий. Если неопределённости не оказывают существенного влияния на ход процесса и случайные вариации незначительны, то, для того, чтобы противостоять случайным эффектам, достаточно применение системы, использующей принцип обратной связи. Но системы с обычными обратными связями оказываются не эффективными в условиях, когда неопределённости играют заметную роль и вариации параметров становятся значительными. Чтобы обеспечить оптимальное управление в этих случаях приходится прибегать к идее построения адаптивного и самообучающегося управления.

Поскольку на практике решение функциональных уравнений, формирующих оптимальное управление и рассмотренных в разделе 1, приходится искать в численном виде, уравнения будем рассматривать в дискретном времени.

Рассмотрим процесс со случайными параметрами, описываемый нелинейным разностным уравнением, записанным в векторно-матричном виде

$$\mathbf{x}(k+1) = g(\mathbf{x}(k), \mathbf{c}(k), \mathbf{u}(k)),$$

которое в более краткой записи выглядит как

$$\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{u}_k), \quad (2.1)$$

где \mathbf{x} – вектор переменных состояния, \mathbf{c} – вектор независимых случайных параметров, \mathbf{u} – вектор управляющих воздействий.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Синтез оптимального управления будем осуществлять в соответствии с методом динамического программирования (в его дискретном варианте).

Вначале считаем распределение вероятностей для случайных параметров известным с одинаковой дифференциальной плотностью распределения $dp(\mathbf{c})$.

Задача оптимального управления в данном случае может быть сформулирована как задача определения стратегии N -шагового управления, минимизирующей математическое ожидание функционала качества

$$R_N = \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{u}_{k-1}), \quad (2.2)$$

где $r(\dots)$ – функция потерь от управления на k -том шаге, характеризующая отклонение фактического поведения объекта от желаемого.

Для детерминированного случая при оптимальном управлении минимизируется непосредственно критерий качества (2.2). Однако в случае неопределённости, присущих процессу, это нецелесообразно. Хотя математическое ожидание значения R_N является менее точной (вследствие усреднения) мерой качества процесса управления, тем не менее, это достаточно удобная мера, которая может служить хорошим компромиссным решением вопроса.

Итак, критерий качества целесообразно взять в виде

$$\overline{R}_N = M \left\{ \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{u}_{k-1}) \right\}, \quad (2.3)$$

где $M(\dots)$ – символ математического ожидания.

Пусть $\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0)$ – есть минимум функции \overline{R}_N по отношению к вектору управления \mathbf{u} , то есть

$$\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) = \min_{\{\mathbf{u}\}} M \left\{ \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{u}_{k-1}) \right\}. \quad (2.4)$$

Для $N=1$ из выражения (2.4) имеем

$$\overline{R}_1^\circ(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_0} M \{ r(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{u}_0) \} = \min_{\mathbf{u}_0} \int r(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{u}_0) dp(\mathbf{c}_1). \quad (2.5)$$

Применяя для $N \geq 2$ принцип оптимальности, получим рекуррентное выражение

$$\begin{aligned} \overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) &= \min_{\mathbf{u}_0} M \{ r(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{u}_0) \} + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1) = \\ &= \min_{\mathbf{u}_0} \int \left(r(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{u}_0) + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1) \right) dp(\mathbf{c}_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Чтобы упростить вычисления, предположим, что распределение вероятностей случайных параметров является дискретным, то есть вектор случайных

параметров \mathbf{c} может принимать одно из конечного множества значений $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s)$ с вероятностями соответственно p_1, p_2, \dots, p_s . Тогда соотношение (2.6) можно записать в виде

$$\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_0} \sum_{j=1}^s p_j r(\mathbf{x}_1, \chi_j, \mathbf{u}_0) + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1). \quad (2.7)$$

Важно отметить, что к стохастическим процессам здесь применена такая же техника оптимизации, которая использовалась для детерминированных процессов (см. раздел 1.4.3) и были получены аналогичные уравнения.

Теперь рассмотрим задачу управления стохастическим процессом по конечному состоянию, то есть определим вектор управления \mathbf{u} , минимизирующего математическое ожидание значения некоторой функции конечного состояния $R_N = r(\mathbf{x}_N)$. Таким образом, критерий качества запишется как

$$\overline{R}_N = M\{r(\mathbf{x}_N)\}. \quad (2.8)$$

Минимум функции (2.8) будет

$$\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) = \min_{\{\mathbf{u}\}} M\{r(\mathbf{x}_N)\}. \quad (2.9)$$

Из выражения (2.9) следует, что для $N=1$

$$\overline{R}_1^\circ(\mathbf{x}_0) = r(\mathbf{x}_0), \quad (2.10)$$

а для $N \geq 2$ с учетом уравнения объекта (2.1)

$$\begin{aligned} \overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) &= \min_{\mathbf{u}_0} M\left\{\overline{R}_{N-1}^\circ(g(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{u}_0))\right\} = \\ &= \min_{\mathbf{u}_0} \int \overline{R}_{N-1}^\circ(g(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{u}_0)) dp(\mathbf{c}_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если случайные параметры могут принимать лишь дискретные значения, то последнее соотношение запишется как

$$\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_0} \sum_{j=1}^s p_j \overline{R}_{N-1}^\circ(g(\mathbf{x}_0, \chi_j, \mathbf{u}_0)). \quad (2.12)$$

Пример 2.1. Пусть объект управления является линейным и описывается уравнением

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(k, \mathbf{c}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}(k, \mathbf{c}_k) u_k, \quad (2.13)$$

с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, где скалярное управление ограничено $|u| \leq 1$; \mathbf{c} – вектор случайных параметров, а $\mathbf{A}(\dots)$ и $\mathbf{B}(\dots)$ – матрицы соответствующей размерности, элементы которых зависят от дискретного времени и от случайных параметров.

Пусть случайный вектор \mathbf{c}_k в момент времени k может принимать одно из двух значений \mathbf{c}_k^+ или \mathbf{c}_k^- с вероятностями

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{c} = \mathbf{c}_k^+\} &= p, \\ P\{\mathbf{c} = \mathbf{c}_k^-\} &= 1 - p, \end{aligned}$$

где вероятность p предполагается известной.

Минимизации подлежит математическое ожидание квадратичного критерия

$$R_N = \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \lambda u_{k-1}^2),$$

где \mathbf{Q} – квадратная симметрическая матрица, λ – весовой коэффициент.

Минимум математического ожидания обозначим

$$\overline{R}_N^\circ = \min_{\{u\}} M \left\{ \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \lambda u_{k-1}^2) \right\}.$$

Из последнего соотношения следует для $N=1$ (с учетом уравнения (2.13))

$$\begin{aligned} \overline{R}_1^\circ(\mathbf{x}_0) &= \min_{u_0} M \left\{ (\mathbf{x}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_1 + \lambda u_0^2) \right\} = \\ &= \min_{u_0} \left\{ p \mathbf{x}_1^{+T} \mathbf{Q} \mathbf{x}_1^+ + (1-p) \mathbf{x}_1^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{x}_1^- + \lambda u_0^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^+ &= \mathbf{A}(0, \mathbf{c}_0^+) \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(0, \mathbf{c}_0^+) u_0, \\ \mathbf{x}_1^- &= \mathbf{A}(0, \mathbf{c}_0^-) \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(0, \mathbf{c}_0^-) u_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для $N \geq 2$

$$\begin{aligned} \overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0) &= \min_{u_0} M \left\{ (\mathbf{x}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_1 + \lambda u_0^2) + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1) \right\} = \\ &= \min_{u_0} \left\{ p \left[\mathbf{x}_1^{+T} \mathbf{Q} \mathbf{x}_1^+ + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1^+) \right] + (1-p) \left[\mathbf{x}_1^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{x}_1^- + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1^-) \right] + \lambda u_0^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Искомая функция $\overline{R}_1^\circ(\mathbf{x}_0)$ и стратегия оптимального управления могут быть найдены путем прямых вычислений из рекуррентных соотношений (2.5) – (2.7), (2.10) – (2.12), (2.14) – (2.16).

2.3. Оптимальное управление с адаптацией.

В предыдущем разделе при рассмотрении стохастических процессов распределение вероятностей предполагалось известным. Это допущение позволило провести построение оптимального управления таким же образом, как и в случае детерминированных процессов. Однако в некоторых весьма частых случаях мы можем располагать ещё меньшей информацией о влиянии случайных параметров на поведение объекта, чем это предполагалось в стохастических процессах оптимального управления. Чтобы обеспечить в этих условиях оптимальное управление, нужно иметь регулятор, способный к адаптации, то есть необходимо наделить регулятор способностью познавать природу различных влияний в ходе самого процесса управления.

Одна из существенных особенностей адаптивного управления состоит в том, что условия работы системы заранее не известны или известны приближенно. Если уравнения динамики процесса или статистические свойства внешних воздействий меняются некоторым определенным образом во времени, то трудности расчета системы управления увеличиваются, но не являются непреодолимыми. В этом случае речь не может идти об адаптивном управлении, если только при этом нет неопределённости относительно того, что представляют собой уравнения объекта или относительно статистики внешних воздействий. Представляя эту неопределенность в математической форме, по-прежнему будем считать, что уравнения динамики объекта (процесса) зависят от случайных параметров. Если закон распределения вероятностей этих случайных параметров известен, получаем задачу управления стохастическим процессом. Если закон распределения вероятностей случайных параметров не известен или известен частично, получаем задачу адаптивного управления. В случае адаптивного управления в его ходе производится переоценка стратегии управления в свете имеющейся неопределенности и результатов её изучения.

Рассматривая разностное уравнение динамики объекта (2.1), конкретизируем вектор случайных параметров $\mathbf{c}(k)$. С этой точки зрения случайные параметры можно считать представляющими неопределенность, относящуюся к:

– коэффициентам уравнений, описывающих динамику объекта (задача параметрической адаптации объекта),

- статистическим свойствам задающих воздействий, если эти воздействия являются случайными (задача адаптации по полезному сигналу),
- статистическим свойствам возмущающих воздействий (помех), нарушающих течение процесса (задача адаптации по возмущениям).

Для лучшего понимания существа решаемой проблемы и упрощения изложения будем считать (как и в примере 2.1), что случайный параметр может принимать одно из только двух значений. То есть, в момент времени k случайный параметр \mathbf{c} принимает одно из двух значений \mathbf{c}^+ и \mathbf{c}^- с вероятностями соответственно p и $1-p$, причем эти вероятности заранее не известны. Сама вероятность p предполагается случайной величиной ξ с априорной функцией плотности вероятности $\omega(\xi)$. Конечно, это не очень удобная ситуация для анализа, но здесь мы находимся в более выгодном положении по сравнению с тем случаем, когда неизвестен вид функции распределения случайных параметров или даже неизвестна степень их корреляции. На каждом шаге процесса управления, когда принимается решение об управляющем воздействии, адаптивный регулятор изменяет не только физическое состояние объекта, но находит также оценку функции плотности вероятности для p и оценку самого значения вероятности p (дуальное управление).

В качестве начальной оценки значения вероятности возьмем ожидаемое значение p

$$p_0 = \int_0^1 \xi \cdot \omega(\xi) d\xi.$$

Процесс адаптации включает сбор информации о случайных переменных и обработку этой информации в соответствии с некоторым решающим правилом. Решения, принятые в результате обработки получаемой в процессе работы информации об объекте, используются для улучшения управления, которое первоначально выбирается исходя из априорного распределения. Начальные априорные предположения могут, конечно, оказаться далекими от истины. Однако адаптивный регулятор в процессе наблюдения за объектом с помощью итерационных процедур может приблизиться к определению точного значения распределения вероятностей.

Если в процессе наблюдения $\mathbf{c} = \mathbf{c}^+$, то новая оценка функции плотности вероятности для p дается апостериорной вероятностью

$$\omega_1(\xi) = P(p = \xi | \mathbf{c} = \mathbf{c}^+). \quad (2.17)$$

Искомую вероятность (2.17) можно найти по формуле Байеса

$$P(p = \xi | \mathbf{c} = \mathbf{c}^+) = \frac{P(p = \xi)P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^+ | p = \xi)}{\int_0^1 P(p = \xi)P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^+ | p = \xi)d\xi}. \quad (2.18)$$

Поскольку $P(p = \xi) = \omega(\xi)$, а $P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^+ | p = \xi) = \xi$, из выражений (2.17), (2.18) получим

$$\omega_1(\xi) = \frac{\xi \cdot \omega(\xi)}{\int_0^1 \xi \cdot \omega(\xi) d\xi}. \quad (2.19)$$

Если в процессе наблюдения $\mathbf{c} = \mathbf{c}^-$, то новая оценка функции плотности вероятности для p дается апостериорной вероятностью

$$\omega_2(\xi) = P(p = \xi | \mathbf{c} = \mathbf{c}^-). \quad (2.20)$$

Применив формулу Байеса, получим условную вероятность

$$P(p = \xi | \mathbf{c} = \mathbf{c}^-) = \frac{P(p = \xi)P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^- | p = \xi)}{\int_0^1 P(p = \xi)P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^- | p = \xi)d\xi}. \quad (2.21)$$

Так как $P(\mathbf{c} = \mathbf{c}^- | p = \xi) = 1 - \xi$, то новую оценку плотности вероятности из выражений (2.20) и (2.21) получим в виде

$$\omega_2(\xi) = \frac{(1 - \xi)\omega(\xi)}{\int_0^1 (1 - \xi) \cdot \omega(\xi) d\xi}. \quad (2.22)$$

Учитывая новые оценки (2.19), (2.22), саму вероятность p при условии наблюдения $\mathbf{c} = \mathbf{c}^+$ получим в виде

$$p_1 = \int_0^1 \xi \cdot \omega_1(\xi) d\xi = \frac{\int_0^1 \xi^2 \cdot \omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 \xi \cdot \omega(\xi) d\xi}, \quad (2.23)$$

и при условии наблюдения $\mathbf{c} = \mathbf{c}^-$ – в виде

$$p_2 = \frac{\int_0^1 \xi \cdot \omega_2(\xi) d\xi}{\int_0^1 (1-\xi) \cdot \omega(\xi) d\xi} = \frac{\int_0^1 \xi(1-\xi) \cdot \omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 (1-\xi) \cdot \omega(\xi) d\xi}. \quad (2.24)$$

Таким образом, формула Байеса позволяет произвести оценку значений вероятности p на основе наблюдений, сделанных в процессе управления, путем коррекции априорного распределения. Если произведено $n + m$ измерений, в результате которых случайный параметр n раз принял значение \mathbf{c}^+ и m раз – значение \mathbf{c}^- , то новой оценкой плотности распределения вероятности будет

$$\omega_{n,m}(\xi) = \frac{\xi^n (1-\xi)^m \omega(\xi)}{\int_0^1 \xi^n (1-\xi)^m \cdot \omega(\xi) d\xi}, \quad (2.25)$$

а новой оценкой самой вероятности p будет

$$P_{n,m} = \frac{\int_0^1 \xi^{n+1} (1-\xi)^m \cdot \omega(\xi) d\xi}{\int_0^1 \xi^n (1-\xi)^m \cdot \omega(\xi) d\xi}. \quad (2.26)$$

Уравнения (2.25) и (2.26) являются *информационной* моделью процесса адаптивного управления. Регулятор должен при этом работать так же, как если бы полученная оценка (2.26) являлась точным значением вероятности p .

Перейдем теперь к проблеме минимизации критерия качества, определяемого формулой (2.3).

Пусть $\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0, n, m)$ минимум критерия качества \overline{R}_N по отношению к вектору управления \mathbf{u} , если в начальном состоянии \mathbf{x}_0 случайный параметр n раз принимал значение \mathbf{c}^+ и m раз – значение \mathbf{c}^- . Тогда можно записать

$$\overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0, n, m) = \min_{\{\mathbf{u}\}} M \left\{ \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{u}_{k-1}) \right\}.$$

Для $N=1$

$$\begin{aligned} \overline{R}_1^\circ(\mathbf{x}_0, n, m) = \min_{\mathbf{u}_0} M \{ r(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}, \mathbf{u}_0) \} = \min_{\mathbf{u}_0} \{ p_{n,m} r(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{c}^+, \mathbf{u}_0) + \\ + (1 - p_{n,m}) r(\mathbf{x}_1^-, \mathbf{c}^-, \mathbf{u}_0) \}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^+ &= g(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}^+, \mathbf{u}_0), \\ \mathbf{x}_1^- &= g(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}^-, \mathbf{u}_0). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Применяя принцип оптимальности, для $N \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} \overline{R}_N^\circ(\mathbf{x}_0, n, m) = \min_{\mathbf{u}_0} \{ p_{n,m} \left[r(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{c}^+, \mathbf{u}_0) + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1^+, n+1, m) \right] + \\ + (1 - p_{n,m}) \left[r(\mathbf{x}_1^-, \mathbf{c}^-, \mathbf{u}_0) + \overline{R}_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1^-, n, m+1) \right] \}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Уравнения (2.27) – (2.29) представляют собой вычислительный итерационный алгоритм по определению оптимальной стратегии адаптивного управления.

3. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Интенсивное развитие в последнее время такого научного направления, как искусственный интеллект, особенно таких его разделов, как компьютерная логика и лингвистика, методы поиска и принятия решений, экспертные системы, инженерия знаний подготовило почву для создания программных средств по обработке и использованию знаний для решения многих прикладных задач. Сюда, в том числе, можно отнести системы, моделирующие творческие функции человека. Такие системы называются интеллектуальными, а применительно к управлению – интеллектуальными системами управления (ИСУ). Таким образом, теория интеллектуального управления появилась на стыке ТАУ и теории искусственного интеллекта.

В теории интеллектуального управления пока нет устоявшейся терминологии и четкого понимания сути протекающих в ИСУ процессов, однако уже сейчас можно выделить главное отличие ИСУ от предшествующих типов САУ. Это – взаимодействие с внешней средой. Внешняя среда в данном случае является не только источником помех, но и источником полезной информации.

3.1. Принципы организации интеллектуального управления

ИСУ могут существенным образом отличаться по структуре и выполняемым функциям, но в них в той или иной степени присутствуют следующие блоки: база знаний с развитыми механизмами вывода; интеллектуальный решатель, формирующий постановку и общий план решения задачи; интеллектуальный планировщик, формирующий конкретный план решения задачи; блок объяснения и интерфейс с пользователем. Построенные по иерархической структуре ИСУ отвечают базовому принципу, считающемуся фундаментальным в теории интеллектуальных систем. Этот принцип сформулировал американский ученый Дж. Саридис – «Increasing Precision with Decreasing Intelligence» (IPDI), что в переводе звучит как «повышение точности с понижением интеллектуальности». Это означает, что по мере продвижения к высшим уровням иерархической структуры ИСУ повышается интеллектуальность системы, но снижается точность управления и наоборот.

Для ИСУ справедливы следующие пять принципов.

1. Информационное взаимодействие с внешней средой при помощи специально организованных информационных каналов связи.
2. Принципиальная открытость ИСУ для повышения интеллектуальности и совершенствования собственного функционирования.
3. Наличие механизмов прогноза динамики внешней среды и собственного поведения.
4. Многоуровневая иерархическая структура, соответствующая повышению интеллектуальности при снижении требований к точности управления по мере повышения уровня иерархии в системе и наоборот.

5. Сохранность функционирования (возможно, с некоторой потерей качества управления) при разрыве связей или потере управляющих воздействий от высших уровней иерархии.

Согласно первому принципу ИСУ непрерывно взаимодействует с внешней средой, получает из неё всю необходимую информацию для принятия решений и пополнения знаний. ИСУ, в свою очередь, оказывает на внешнюю среду непосредственное активное воздействие в результате своей работы. Таким образом, модель знаний в ИСУ должна предполагать возможность изменений внешней среды и знаний о ней в результате собственных на неё воздействий.

Информационная связь с внешней средой по сути означает открытость ИСУ, что подчеркивается вторым принципом. Эта открытость обеспечивается такими высшими уровнями в иерархии ИСУ, как самонастройка, самоорганизация и самообучение. База знаний содержит знания двух типов: постоянные (достоверные) знания, которыми ИСУ обладает и постоянно пользуется, и временные (недостоверные). В знаниях второго типа система не уверена, с ними система экспериментирует в процессе обучения и знания этого типа либо отбрасываются, либо переходят в знания первого типа в зависимости от результатов анализа своего поведения во внешней среде. Второй принцип требует организации процесса приобретения и пополнения знаний в процессе функционирования ИСУ.

При невыполнении третьего принципа систему нельзя считать в полной мере интеллектуальной. Система без прогноза может попасть в критическую ситуацию и не найти выхода из-за ограничений на время работы механизмов формирования управляющих воздействий в непредвиденных условиях.

Четвертый принцип дает возможность построения ИСУ в тех случаях, когда неточность знаний об объекте управления или его поведении можно компенсировать увеличением числа уровней интеллектуальности, а также использованием более совершенных алгоритмов принятия решений в условиях неопределённости.

Согласно пятому принципу в ИСУ возможна частичная потеря интеллектуальности, но не прекращение работы системы управления в целом при отказах в работе более высоких уровней иерархии ИСУ. Что, конечно, естественно с точки зрения надёжности ИСУ.

3.2. Функциональные схемы ИСУ

Анализ ИСУ с точки зрения полноты реализации рассмотренных выше пяти принципов позволяет разделить все ИСУ на системы, интеллектуальные «в большом» и системы, интеллектуальные «в малом».

ИСУ, построенные и функционирующие в соответствии со всеми пятью принципами в полном объеме, называются интеллектуальными «в большом».

ИСУ, структурно не организованные в соответствии со всеми пятью принципами, но использующие в процессе своего функционирования знания (например, в виде правил) как средство уменьшения неопределённости исход-

ной информации об объекте управления и (или) его поведении, называются интеллектуальными «в малом».

Системы, интеллектуальные «в большом», имеют многоуровневую иерархическую структуру. В этой иерархии имеются следующие уровни (в порядке понижения ранга):

- самоорганизация (самоперестройка по результатам обучения);
- обучение;
- прогноз событий;
- адаптация;
- выработка решений;
- работа с базами событий и знаний;
- планирование процесса реализации решений;
- исполнительный.

Для конкретной ИСУ каждый из этих уровней имеет свою специфику и, в свою очередь, может состоять из нескольких уровней. На самом нижнем уровне, как правило, располагается обыкновенная САУ. Более высокие уровни можно трактовать как надстройку над традиционной САУ. В простейшем случае эта надстройка может содержать только базу знаний, состоящую из нескольких продукционных правил. В этом случае уровни принятия решений и планирования могут отсутствовать.

Определения систем, интеллектуальных «в большом» и «в малом», устанавливают границы уровней интеллектуальности ИСУ. Степень интеллектуальности внутри этих границ определяют по наличию или отсутствию тех или иных перечисленных выше уровней иерархии управления.

В составе ИСУ, интеллектуальной «в большом», на верхних уровнях иерархической структуры управления обычно используются экспертные системы. Функциональная схема такой ИСУ включает пять основных блоков (рис.3.1).

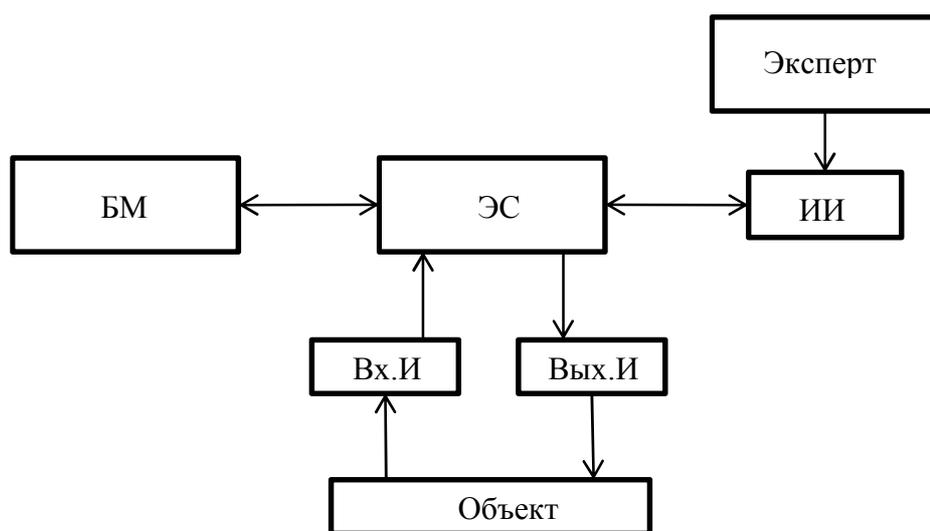


Рис. 3.1. Схема ИСУ, интеллектуальной «в большом»

Блок «интеллектуальный интерфейс» (ИИ) предназначен для связи с экспертом в области управления и используется в основном для обучения. Блок моделирования (БМ) осуществляет прогноз динамики существующий ситуации, а иногда может выполнять функции анализа путей развития процессов, приведших к текущему положению. Функции исполнительного уровня выполняются в блоке «выходной интерфейс» (Вых. И). Типовая структура экспертной системы (ЭС) представлена на рис. 3.2.

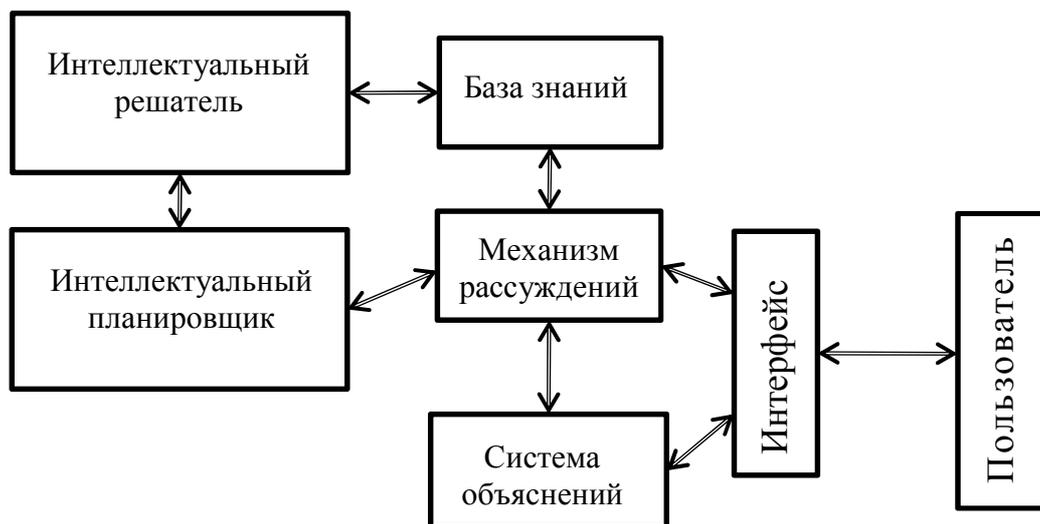


Рис. 3.2. Экспертная система

ИСУ с экспертной системой, дополненная механизмами обучения и прогноза развития ситуации (рис.3.1) удовлетворяет пяти принципам интеллектуального управления и, следовательно, является интеллектуальной системой «в большом».

В последнее время ведутся интенсивные исследования по созданию ИСУ с экспертными регуляторами, использующими технологию инженерии знаний и рассуждений на знаниях. В таких системах (рис. 3.3) так же, как и в адаптивных системах (см. рис. 2.1), кроме основного контура управления (основной регулятор ОР – объект) имеется интеллектуальная обратная связь с включенной в неё упрощенной экспертной системой (экспертный регулятор – ЭР). Экспертная система при этом ориентирована на решение задач управления, поэтому в ней отсутствуют некоторые специфические для типовых экспертных систем блоки, например, подсистемы объяснения. Экспертный регулятор автоматически меняет параметры основного регулятора ОР в зависимости от изменения внешней среды и поведения объекта.

Основной проблемой при реализации экспертного регулятора является формирование базы знаний, получаемых в результате анализа динамических свойств САУ в условиях изменений внешней среды и параметров объекта управления. Вообще говоря, формирование базы знаний и организация эффек-

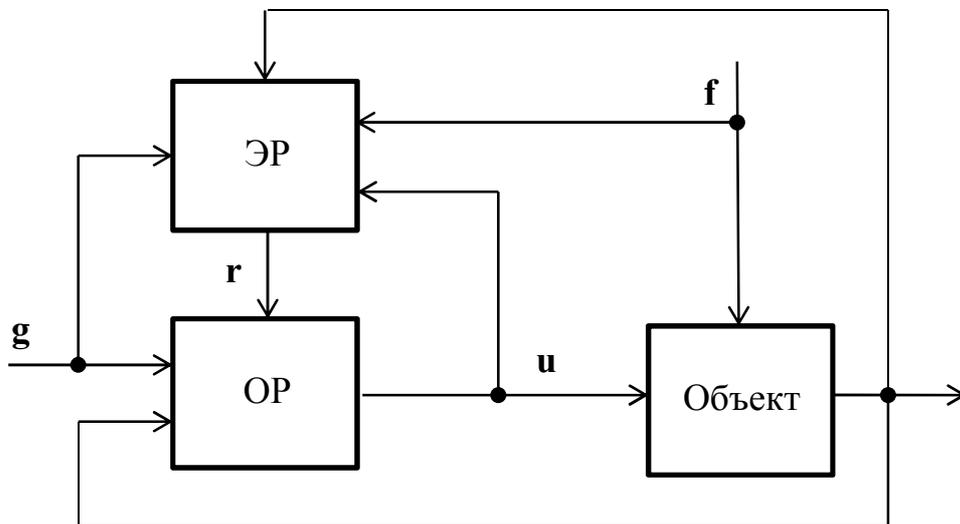


Рис. 3.3. Функциональная схема ИСУ с экспертным регулятором

тивных механизмов вывода нужны при разработке любой экспертной системы, но для экспертного регулятора проблема осложняется некоторыми специфическими для САУ требованиями. В частности, ИСУ должна обладать высоким быстродействием; эффективностью поиска и принятия решений в соответствии с целями управления; высокой надежностью, способной обеспечить эффективное функционирование системы в условиях неполной входной информации; гибкостью, подразумевающей возможность подключения различных подсистем вывода на соответствующих фрагментах знаний.

4. МИКРОПРОЦЕССОР КАК УПРАВЛЯЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Реализация управляющих устройств (регуляторов) в современных системах автоматического управления осуществляется, как правило, в виде микропроцессоров, которые являются относительно медленными устройствами. Это обстоятельство накладывает ограничение на период квантования, задаваемый в цифровых системах таймером. Особенно актуально это в оптимальных и адаптивных системах управления, где производится много вычислений по организации управления.

Еще одно ограничение, связанное с микропроцессором, – это конечное число разрядов для представления чисел. Большинство дешевых микропроцессоров оперируют с 8-битовыми словами, что обеспечивает только 256 уровней разрешения. Это приводит к тому, что не все числа могут быть реализованы в микропроцессоре.

4.1. Микропроцессор как контроллер в системах управления

Некоторые особенности применения микропроцессора как контроллера рассмотрим на примере.

На рис. 4.1 представлена структурная схема микропроцессорной системы автоматического регулирования. В качестве объекта управления выбран двигатель постоянного тока (ДПТ). Требуется поддерживать постоянную скорость вращения вала двигателя.

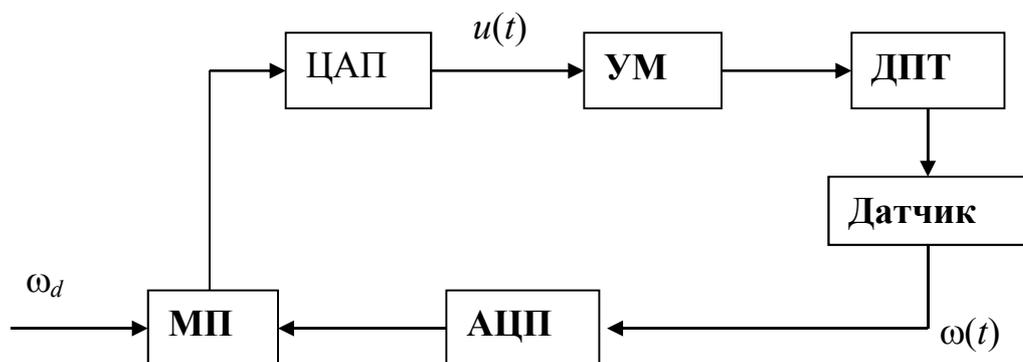


Рис. 4.1. Функциональная схема системы с микропроцессором

Непрерывная часть системы включает усилитель мощности (УМ), двигатель постоянного тока и датчик (тахогенератор с аналоговым выходом). Аналоговая часть связана с микропроцессором (МП) АЦП и ЦАП. Целью управления является поддержание скорости вращения вала ДПТ $\omega(t)$ равной значению заданной скорости ω_d .

Пусть микропроцессор реализует пропорционально-интегральный (ПИ) закон управления. В непрерывном варианте это означает формирование управляющего воздействия по формуле

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int e(\tau) d\tau, \quad (4.1)$$

где $e(t) = \omega_d - \omega(t)$ – сигнал ошибки, а k_P и k_I – некоторые постоянные коэффициенты.

В выражении (4.1) интеграл есть

$$x(t) = \int_{t_0}^t [\omega_d - \omega(\tau)] d\tau + x(t_0), \quad (4.2)$$

где t_0 – начальный момент времени.

Для вычисления выражения (4.2) может быть использован любой метод численного интегрирования, предположим, метод трапеций. Тогда, полагая $t = kT$, $t_0 = (k-1)T$, будем иметь

$$\int_{(k-1)T}^{kT} [\omega_d - \omega(\tau)] d\tau \approx \omega_d T - \frac{T}{2} (\omega(kT) + \omega[(k-1)T]) \quad (4.3)$$

для $k=1, 2, \dots$

Таким образом, вычисление интеграла в формуле (4.3) для $t = kT$ может быть выполнено по заданной скорости ω_d и значениям $\omega(kT)$ и $\omega[(k-1)T]$. Но вычисление интеграла по формуле (4.3) не производится мгновенно – микропроцессору требуется для этого конечное время, то есть, имея входные данные $\omega(kT)$ и $\omega[(k-1)T]$, мы получим результат вычисления интеграла не в момент времени $t = kT$, а с некоторой задержкой. Оценить эту задержку можно, просуммировав все временные интервалы, необходимые для выполнения микропроцессором подпрограммы интегрирования. Для определенности предположим, что временная задержка на вычисления равна одному периоду квантования T . Таким образом, правая часть формулы (4.3) представляет результат вычисления интеграла в момент времени $t = (k+1)T$, и выражение (4.2) в дискретной форме имеет вид

$$x[(k+1)T] = \omega_d T - \frac{T}{2} \omega(kT) + \frac{T}{2} \omega[(k-1)T] + x(kT). \quad (4.4)$$

Окончательно из выражения (4.1) с учетом (4.4) имеем

$$u((k+1)T) = k_p (\omega_d - \omega(kT)) + k_I x((k+1)T). \quad (4.5)$$

Управляющее воздействие (4.5) поступает на усилитель мощности в моменты $t=(k+1)T$, $k=0,1,2, \dots$ и остается постоянным между моментами квантования.

На рис. 4.2 представлена более подробная функциональная схема системы. Для определения начала очередного периода квантования используется аналоговый программный таймер, который вырабатывает импульс каждые T секунд. Выходной сигнал таймера используется для двух целей. Во-первых, он поступает на шину прерываний микропроцессора, что приводит к остановке рабочей программы вычисления управляющего воздействия $u[(k+1)T]$ и выполнению программы прерывания (в данном случае это будет программа вывода очередного значения управляющего воздействия $u[(k+1)T]$). Далее управление $u[(k+1)T]$ поступает в ЦАП, с выхода которого аналоговый сигнал через усилитель мощности воздействует на двигатель постоянного тока. Во-вторых, сигнал от таймера по шине управления поступает на устройство выборки и хранения, входящее в АЦП. При этом мгновенная скорость вращения вала ДПТ $\omega(t)$, измеряемая тахогенератором (ТГ), квантуется по времени и «замораживается» в течение одного периода квантования T . Далее АЦП квантует значение $\omega(kT)$ по уровню (по амплитуде) и кодирует полученный сигнал соответствующим двоичным кодом. На все это требуется определенное время. Как только дискретные данные на выходе АЦП готовы, АЦП сообщает об этом (по шине готовности данных) микропроцессору. Шина готовности данных может быть соединена с шиной прерывания микропроцессора (на рисунке не показано), и по сигналу с АЦП значение $\omega(kT)$ в виде двоичного числа поступает в процессор по шине данных. После вычисления следующего значения $u[(k+1)T]$ процессор ожидает очередного сигнала с таймера для вывода вычисленного управления. Далее все повторяется.

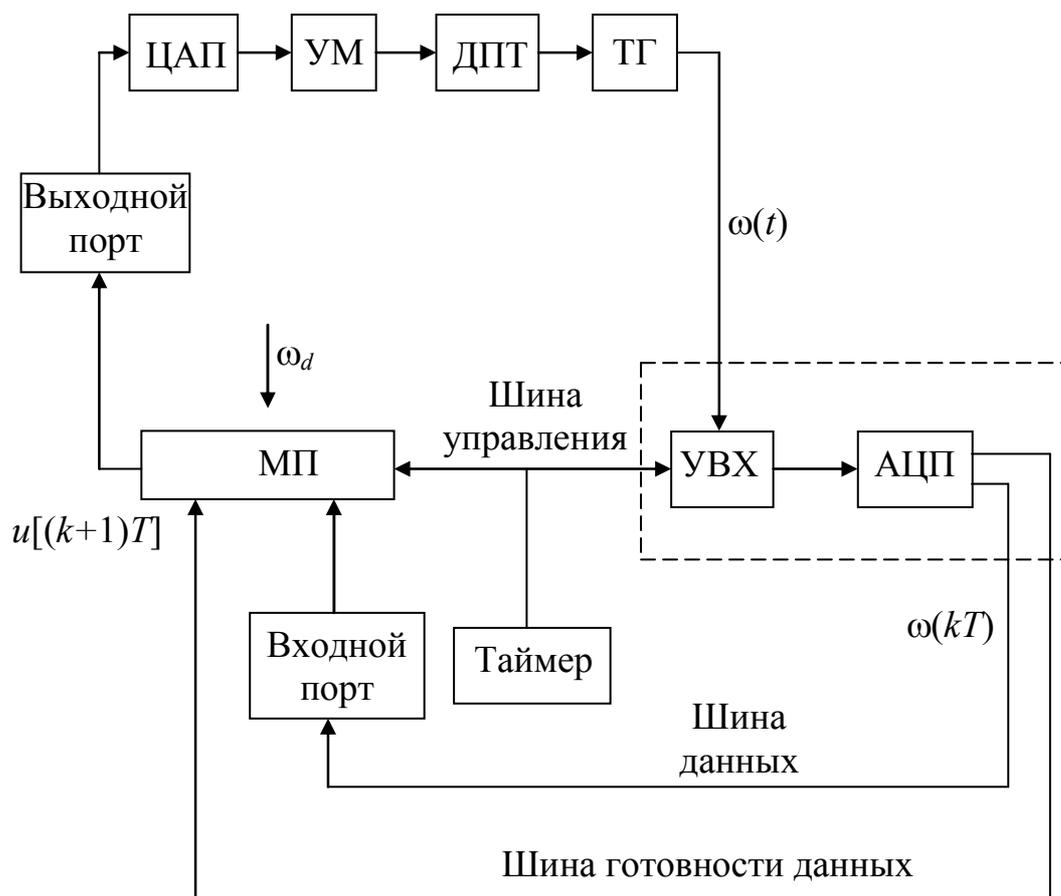


Рис. 4.2. Уточненная функциональная схема

Чтобы микропроцессор успевал произвести вычисление очередного значения сигнала регулирования $u[(k+1)T]$, необходимо выбрать соответствующую частоту прерываний таймера, а для этого нужно оценить время, требуемое микропроцессору на вычисления. Время вычисления может быть определено из анализа программы, реализующей соответствующий закон управления, с учетом возможного выполнения подпрограмм, которые могут быть вызваны из любого пакета функциональных задач. Программа, как известно, состоит из набора команд, которые требуют для своего выполнения определенного количества машинных циклов. Каждый машинный цикл, в свою очередь, требует определенного количества машинных состояний. Время выполнения микропроцессором конкретной команды пропорционально общему числу машинных состояний, через которые проходит микропроцессор при выполнении этой команды, и может быть найдено в соответствующих справочниках по данному микропроцессору. Учитывая эту информацию, нетрудно найти общее время, требуемое для выполнения программы: для этого анализируют всю программу от команды к команде, суммируя количество машинных состояний или время их выполнения.

При рассмотрении примера микропроцессорной системы регулирования описание регулятора изначально было представлено дифференциальным уравнением. Как вариант цифровой регулятор может быть задан своей дискретной передаточной функцией $D(z)$.

4.2. Влияние квантования по уровню

Относительно небольшое количество машинных разрядов, отведенных для представления чисел в микропроцессоре, приводит к необходимости учета эффектов, связанных с квантованием сигналов по уровню в цифровых системах.

Статическая характеристика квантователя по уровню и его структурная схема приведены на рис. 4.3.

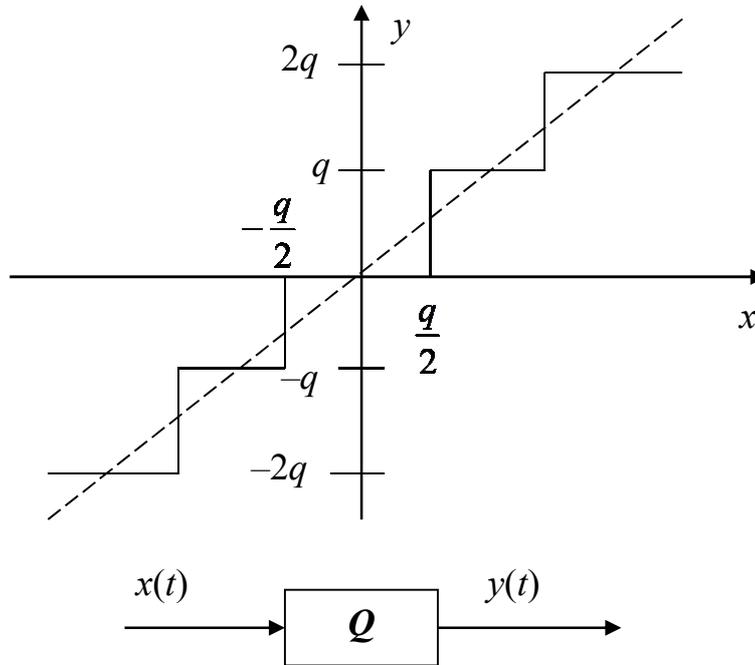


Рис. 4.3. Квантование по уровню

Входной сигнал квантователя $x(t)$ может принимать любые значения (непрерывный по амплитуде сигнал), а выходной сигнал $y(t)$ – только дискретные значения, ближайšie к $x(t)$ и кратные величине q – шагу квантования. Шаг квантования зависит от максимального значения числа (МЗЧ) и длины представляемого цифровым кодом слова:

$$q = 2^{-N} \text{МЗЧ},$$

где N – число двоичных разрядов (битов).

Ясно, что ошибка квантования (то есть разница $x(t) - y(t)$) будет лежать в интервале от $-\frac{q}{2}$ до $\frac{q}{2}$.

Строго говоря, нелинейных устройств, изображенных на рисунке 4.3, даже в простейшей одноконтурной схеме с микропроцессором, как минимум, три (см. рис. 4.4): это нелинейности АЦП, микропроцессора и ЦАП.

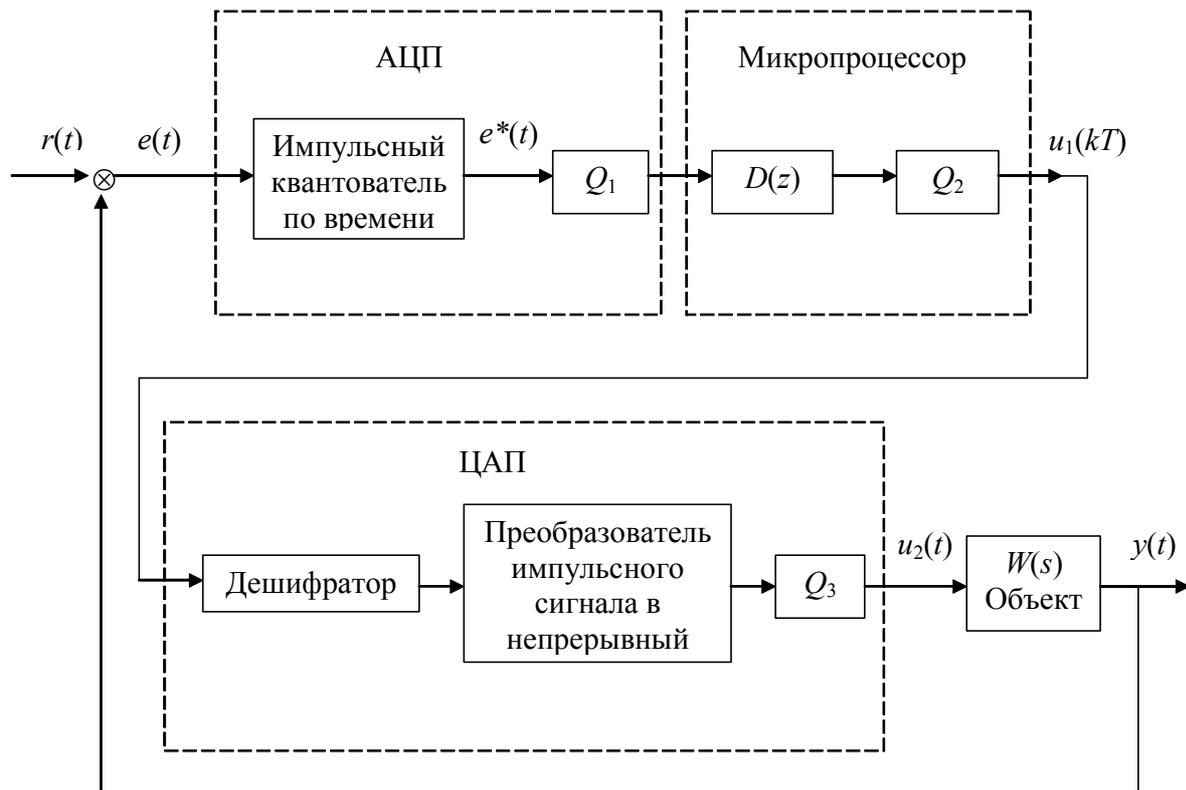


Рис. 4.4. Структурная схема системы с микропроцессором

Исследование такой системы чрезвычайно сложно, поэтому обычно задачу упрощают, пренебрегая нелинейностями АЦП и ЦАП. Структурная схема при этом принимает вид, представленный на рис. 4.5.

На рис. 4.5 в качестве фильтра дискретного сигнала использован, как обычно, ЭНП с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Ограничения в представлении чисел в МП приводят к неточности в реализации закона управления. Причиной этого являются неполная компенсация нулей и полюсов передаточной функции управляемого процесса (при синтезе системы с конечным временем переходного процесса) или неточное задание матрицы обратной связи (при синтезе системы с обратной связью по состоянию). Неточно могут задаваться и отдельные коэффициенты передаточной функции регулятора. Все это вызывает дополнительные ошибки, которые требуют анализа и учета.

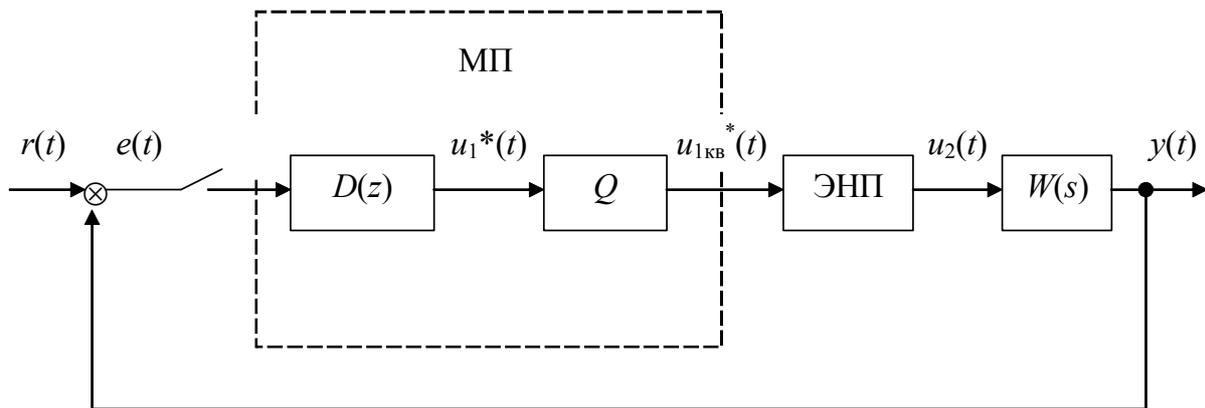


Рис. 4.5. Упрощенная структурная схема цифровой системы

Кроме этого, нелинейность квантователя Q приводит к дополнительному возрастанию общей ошибки (за счет ошибок квантования), а также к возможности возникновения в системе незатухающих колебаний (предельного цикла).

4.3. Статистический учет ошибок квантования по уровню

Наибольшее значение ошибки квантования, как мы уже выяснили, равно $\pm q/2$. Поэтому «наихудшая» ошибка в цифровой системе, представленной на рис. 4.5, вследствие квантования по уровню может быть определена при замене квантователя Q на внешний источник шума амплитудой $\pm q/2$. Эквивалентная схема при такой замене будет представлена рис. 4.6.

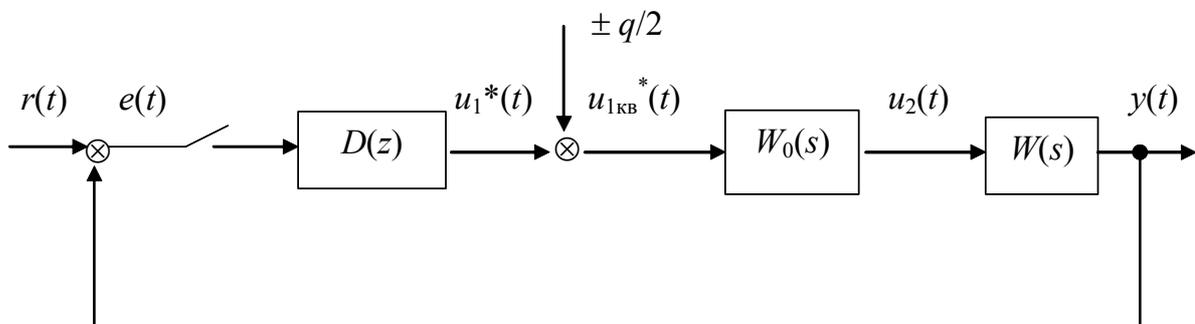


Рис. 4.6. Статистический учет ошибки квантования

На основании схемы рис. 4.6 z -изображение максимальной ошибки вследствие квантования по уровню будет равно

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \frac{W_0 W(z)}{1 + D(z) \cdot W_0 W(z)} (\pm q/2) \cdot \frac{z}{z-1} = \\
 &= \frac{Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}}{1 + (1 - z^{-1}) D(z) \cdot Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}} (\pm q/2).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Само значение ошибки может быть определено по обратному z -преобразованию правой части выражения (4.6).

Иногда оценки ошибки «сверху» бывает недостаточно и приходится прибегать к статистическим оценкам. Ошибка квантования при произвольном сигнале на входе является случайной величиной с нулевым мат ожиданием.

Можно показать, что если выполняются два условия:

1) $q \leq MЗЧ/8$,

2) плотность распределения сигнала $u_1^*(t)$ – гладкая функция (например, гауссова),

то все значения ошибки квантования $\varepsilon = u_1^* - u_{1KB}^*$, расположенные в интервале от $-q/2$ до $q/2$, равновероятны, то есть плотность распределения ошибки $p(\varepsilon)$ постоянна в диапазоне от $-q/2$ до $q/2$:

$$p(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{при } |\varepsilon| \leq q/2, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > q/2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Первое условие выполняется всегда, так как оно означает, что число разрядов для представления числа в МП не меньше 3. Второе условие также справедливо, поскольку, как правило, нет никаких оснований предполагать противное.

Дисперсия ошибки при распределении (4.7) равна, как известно из теории вероятности:

$$D_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = q^2/12. \quad (4.8)$$

Если при этом еще предположить некоррелированность ошибок квантования на каждом шаге, то эффекту от квантования по уровню эквивалентно дополнительное воздействие на систему идеального белого шума с интенсивностью $N = \pi q^2 / 6\omega_s$. Такая замена основана на том, что удобный, с аналитической точки зрения, идеальный белый шум с бесконечным частотным спектром $S_u(\omega) = N$ воспринимается цифровой системой так же (вследствие квантования по времени с частотой ω_s), как и реальный белый шум с шириной спектра $\omega_s/2$ и интенсивностью N . Спектральная плотность такого реального белого шума

$$S_p(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2}, \end{cases}$$

а его дисперсия D_p равна дисперсии ошибки квантования D_ε

$$D_p = \frac{1}{2\pi} N \cdot 2 \frac{\omega_s}{2} = \frac{q^2}{12} = D_\varepsilon.$$

Таким образом, схему, изображенную на рис. 4.5, можно заменить эквивалентной (в статистическом смысле) схемой, приведенной на рис. 4.7.

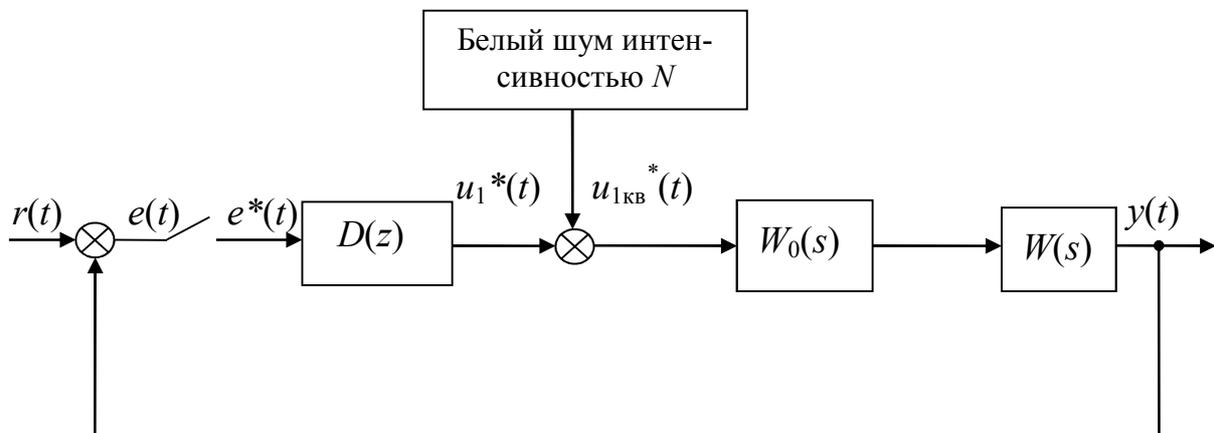


Рис. 4.7. Учет ошибки квантования в виде «белого» шума

Система, представленная на рис. 4.7, является линейной и может быть исследована в рамках линейной теории. Например, дисперсию ошибки, вызванной квантованием по уровню, можно найти по формуле

$$D_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left| \frac{W_0 W(z)}{1 + W(z)} \right|^2 \Bigg|_{z=e^{j\omega T}} Nd\omega =$$

$$= \frac{q^2}{12\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left| \frac{W_0 W(z)}{1 + W(z)} \right|^2 \Bigg|_{z=e^{j\omega T}} d\omega,$$

(4.9)

где $W_0 W(z) = Z \{W_0(s)W(s)\} = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$, $W(z) = D(z)W_0 W(z)$.

Для вычисления интеграла в правой части (4.9) удобнее перейти к псевдо-частоте ω_w согласно соотношениям

$$e^{j\omega T} = z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w}. \quad (4.10)$$

Продифференцировав правую и левую части выражения (4.10), найдем $d\omega$:

$$d\omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{d\omega_w}{|1 + j\omega_w|^2}. \quad (4.11)$$

Подставив выражение (4.11) в формулу (4.9) и перейдя к переменной ω_w , получим

$$D_e = \frac{q^2}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W_0 W(j\omega_w)}{1 + W(j\omega_w)} \right|^2 \frac{d\omega_w}{|1 + j\omega_w|^2}. \quad (4.12)$$

Интеграл в последнем выражении легко находить, пользуясь существующими таблицами для интегрирования спектральных плотностей, так как подынтегральное выражение в (4.12) приводится к требуемому для этого виду.

4.4. Анализ предельного цикла

Рассмотренные выше методы учета ошибок квантования не учитывают ошибки, вызванной возможным существованием в цифровой системе предельного цикла. Чаще всего предельный цикл исследуется методом гармонического баланса, основанного на гармонической линеаризации нелинейности (обычно одной). Суть метода гармонической линеаризации состоит в замене нелинейного звена эквивалентным, с точки зрения прохождения чисто гармонического сигнала, линейным звеном с комплексным (в общем случае) коэффициентом передачи $K(A)$ (этот коэффициент называется коэффициентом гармонической линеаризации), зависящим от амплитуды сигнала.

Применение метода гармонического баланса основано на предположении, что линейная часть системы пропускает только основную частоту (первую гармонику) возможных автоколебаний (гипотеза фильтра).

Одно из необходимых условий наличия в нелинейной системе автоколебаний – это то, что период колебаний в произвольной точке замкнутого контура не должен измениться при возвращении сигнала в эту точку после прохождения по контуру (отсюда название – метод баланса). Ясно, что выполнение этого условия в системе с периодическим квантованием по времени возможно только в случае, если период автоколебаний в предельном цикле содержит целое число периодов квантования T , причем не менее двух. Поэтому период автоколебаний T_T при решении данной задачи измеряется в относительных единицах – в периодах квантования T :

$$\overline{T}_r = T_r / T,$$

где \overline{T}_r – относительный период.

Относительная частота автоколебаний $\overline{\omega}_r$ будет выражаться формулой

$$\overline{\omega}_r = \frac{2\pi}{\overline{T}_r} = 2\pi T / T_r = \omega_r T = \frac{\pi}{N}, \quad (4.13)$$

где $N = T_r / (2T)$ – относительный полупериод колебаний, $N=1,2,\dots$

Наличие квантования по времени в цифровых системах вносит особенности в поведение коэффициента гармонической линеаризации: он оказывается зависимым не только от амплитуды автоколебаний A_r , но и от относительной частоты $\overline{\omega}_r$ (или от N). Коэффициент гармонической линеаризации оказывается зависимым также от фазы φ_r , характеризующей сдвиг начальной фазы автоколебаний относительно момента квантования сигнала по времени (момента замыкания ключа).

Пусть нелинейность описывается статической характеристикой $y = f(x)$. Тогда стандартная процедура вычисления коэффициента импульсной гармонической линеаризации приводит к формуле

$$K^*(A_r, \varphi_r, N) = \frac{2}{A_r N} \sum_{n=1}^{N-1} f \left[A_r \cos \left(\frac{\pi}{N} n + \varphi_r \right) \right] \cdot e^{-j \left(\frac{\pi}{N} n + \varphi_r \right)}. \quad (4.14)$$

Представим систему, изображенную на рис. 4.5, в следующем виде (рис. 4.8, а):

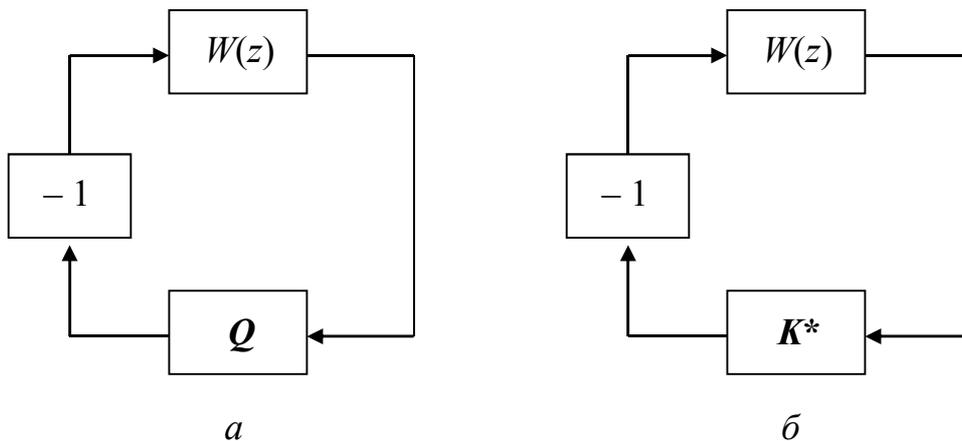


Рис. 4.8. Система с нелинейностью

На рис. 4.8 через $W(z)$ обозначена эквивалентная передаточная функция линейной части:

$$W(z) = D(z) \cdot W_0 W(z) = (1 - z^{-1}) D(z) Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}.$$

Проведя гармоническую линеаризацию нелинейного звена Q , получим эквивалентную линейную систему (см. рис. 4.8, б), где коэффициент импульсной гармонической линеаризации может быть вычислен по формуле (4.14). Существование в линейной системе незатухающих колебаний означает нахождение такой системы на колебательной границе устойчивости. Условие нахождения системы на границе устойчивости может быть найдено с помощью любого критерия устойчивости, например, по критерию Найквиста замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если ее АФХЧ в разомкнутом состоянии проходит через точку $(-1, j0)$, то есть выполняется условие

$$K^*(A_\Gamma, \varphi_\Gamma, N) W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = -1, \quad (4.15)$$

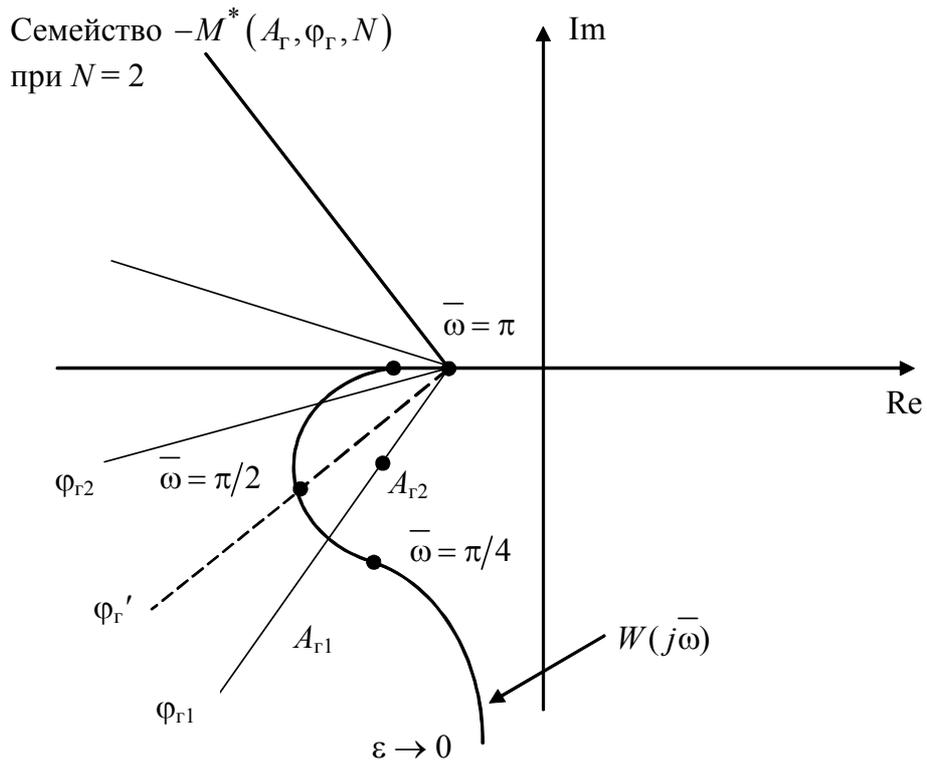
где $W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = W(z)$ после подстановок (согласно (4.13)): $z = e^{j\omega T}$,
 $\omega = \bar{\omega}_\Gamma / T$, $\bar{\omega}_\Gamma = \pi / N$.

Уравнение (4.15) удобно представить в виде

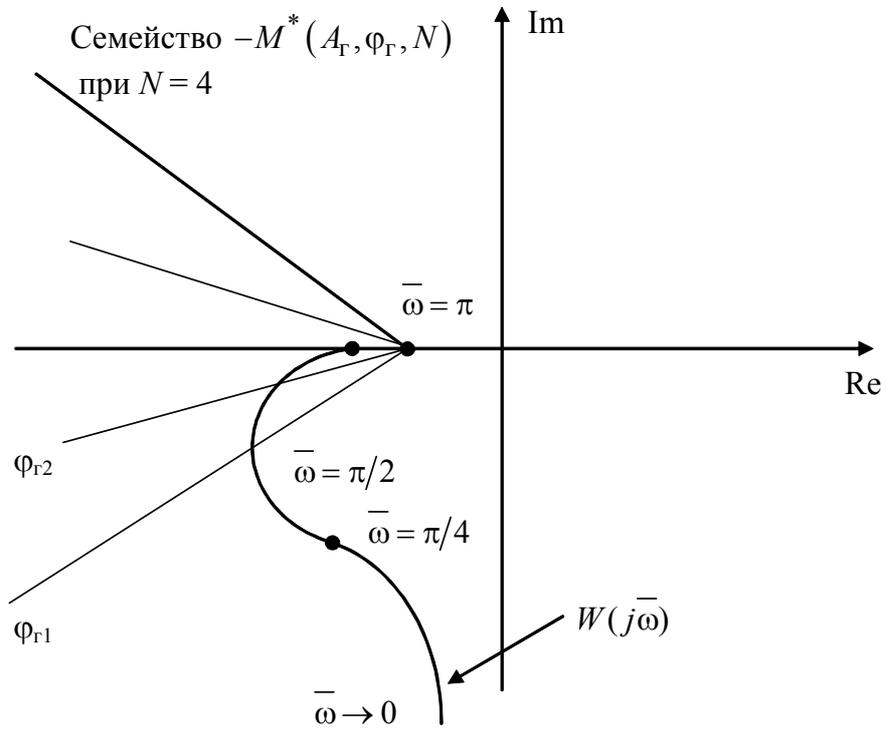
$$W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = -\frac{1}{K^*(A_\Gamma, \varphi_\Gamma, N)} = -M^*(A_\Gamma, \varphi_\Gamma, N)$$

и решать его графическим методом (метод Гольдфарба). Для этого на комплексной плоскости строится кривая $W(z)$ при изменении z по окружности единичного радиуса $|z|=1$ (или, что то же самое, кривая $W(e^{j\omega T})$ при $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$). На этой кривой отмечаются точки $\bar{\omega} = \pi / N$ ($N=1, 2, \dots$), поскольку частота автоколебаний может принять значение только из ряда значений, соответствующих относительным частотам $\bar{\omega}$. На этом же графике строится семейство по φ_Γ кривых $-M^*(A_\Gamma, \varphi_\Gamma, N)$ для каждого значения N (см. рис. 4.9). Анализ этих кривых и говорит о наличии или отсутствии автоколебаний в предельном цикле.

Например, из рис. 4.9, б видно, что предельного цикла на частоте $\bar{\omega} = \pi/4$ в системе быть не может, так как точка кривой $W(j\bar{\omega})$, соответствующая этой частоте ($N=4$), находится вне семейства кривых $-M^*(A_\Gamma, \varphi_\Gamma, 4)$ и ни на одну из них не попадает.



a



б

Рис. 4.9. Определение параметров предельного цикла

Из рис. 4.9, а видно, что предельный цикл существует на частоте $\bar{\omega}=\pi/2$, поскольку точка $W\left(j\frac{\pi}{2}\right)$ попадает в поле кривых $-M^*(A_T, \varphi_T, 2)$ (а именно, на кривую с фазой φ_T' , показанную пунктирной линией). Этот предельный цикл будет устойчивым, если $A_{T1} > A_{T2}$. Значения амплитуды и фазы автоколебаний можно вычислить, если воспользоваться, например, линейной интерполяцией.

При вычислении коэффициента гармонической линеаризации по формуле (4.14) удобно ступенчатую нелинейность на рис. 4.3 представить как сумму релейных нелинейностей (см. рис. 4.10).

Из изложенного ясно, что исследование предельного цикла сопряжено с большим объемом вычислительных и графических операций, причем положительный результат (то есть наличие в системе автоколебаний) разработчика, как правило, не устраивает. Поэтому интерес представляет задача построения системы без автоколебаний.

Предельного цикла в системе не будет, если кривые $W\left(j\frac{\pi}{N}\right)$ и $-M^*(A_T, \varphi_T, N)$ не пересекаются, а они точно не пересекутся, если $W(j\bar{\omega})$ располагается вне зоны, где могут располагаться кривые $-M^*(A_T, \varphi_T, N)$ для различных значений A_T, φ_T и конкретного N .

Можно показать, что для нелинейности, изображённой на рис. 4.3, независимо от числа ступенек запретная для $W(j\bar{\omega})$ область будет располагаться внутри угла величиной π/N , вершина которого находится в точке $(-1, j0)$. Угол при этом симметричен относительно отрицательной действительной полуоси (см. рис. 4.11).

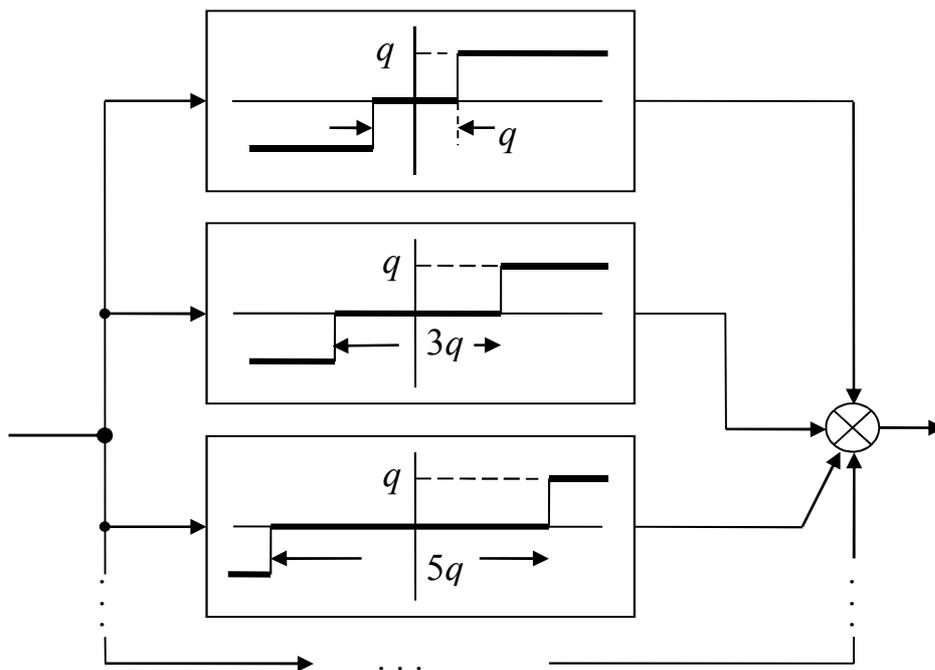


Рис. 4.10. Представление нелинейности квантования в виде релейных характеристик

При исследовании предельного цикла в цифровой системе нужно помнить, что даже, если предельный цикл наблюдается, он может иметь незначительную амплитуду и слабо влиять на качество управления в такой системе.

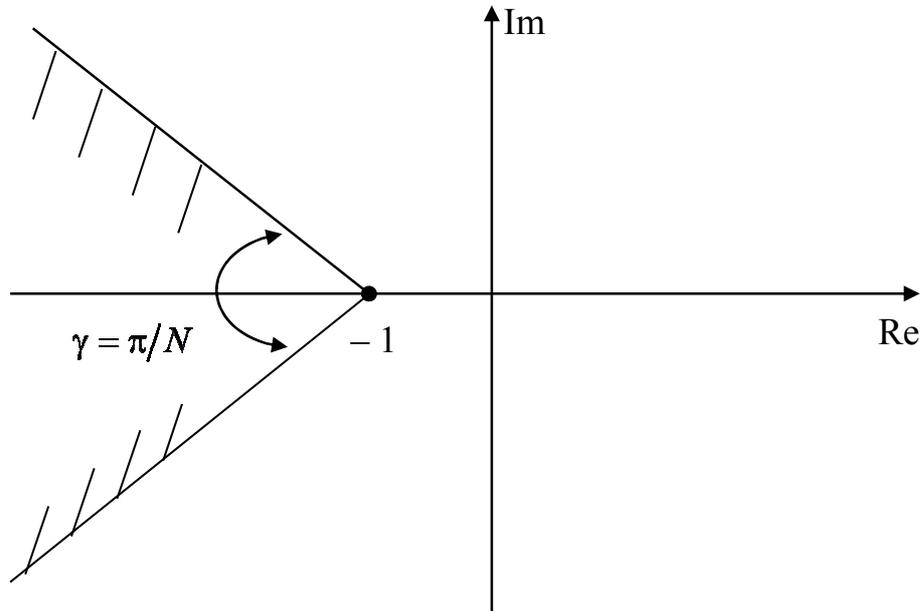


Рис. 4.11. Зона расположения АФЧХ линейной части системы для существования предельного цикла

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ю.А. Шурыгин и др.** – Теория и элементы систем автоматике. – Томск: Изд-во Томского университета, 2015. – 365 с., с ил.
2. **Г.Н. Решетникова.** Адаптивные системы: Учеб. пособие. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 112 с.
3. **А.М. Кориков.** Основы теории управления: Учеб. пособие. 2-е изд. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – 392 с.

Научное издание

ШУРЫГИН Юрий Алексеевич
КАРПОВ Александр Георгиевич

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *В.Г. Лихачева*
Компьютерная верстка *Г.П. Орловой*

Подписано в печать 18.12.2017 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Печ. л. 5,0; усл. печ. л. 4,7; уч.-изд. л. 5,2.
Тираж 500 экз. Заказ 394

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ИП «Завгородний Евгений Анатольевич»,
634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1