Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова

Практикум по теории функций комплексного переменного, теории рядов, операционному исчислению

Учебное пособие

Томск
Издательство ТУСУРа
2018

УДК 517(076.5)
ББК 22.161я73
Е585

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент школы базовой инженерной подготовки НИТПУ **Е.Н. Некряч**

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций НИТГУ **Л.В. Гензе**

Ельцов, Александр Александрович

Е585 Практикум по теории функций комплексного переменного, теории рядов, операционному исчислению : учеб. пособие / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2018. – 194 с.

ISBN 978-5-86889-811-2

Рассмотрены примеры решения задач по теории функций комплексного переменного, теории рядов, операционному исчислению, подобные задачам контрольных работ и индивидуальных заданий по этим разделам. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов очных, заочных факультетов, а также обучающихся по дистанционным технологиям. Может использоваться для самостоятельной работы.

УДК 517(076.5)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-86889-811-2

Оглавление

Предисловие

Пособие представляет собой практикум по таким разделам курса математики, как введение в теорию функций комплексного переменного, теория числовых рядов в комплексной форме, теория функциональных рядов и их частных случаев, а именно степенных рядов (Тейлора и Лорана) и рядов Фурье, преобразование Фурье, интеграл Фурье, преобразование Лапласа (операционное исчисление). В начале каждого раздела приводятся краткие сведения по теории, затем рассматриваются примеры решения типовых задач, представлены задачи для самостоятельного решения, которых должно хватить для проведения занятий и для домашней работы. Пособие может быть использовано студентами различных форм обучения для самостоятельной работы и преподавателями для проведения практических занятий по указанным выше темам. Нумерация задач в каждом пункте своя. Номер 1.2.3 означает задачу номер 3 пункта 2 раздела 1. Ответы приведены в конце книги. При подготовке пособия использовались задачники [1–3].

1. Введение в теорию функций комплексного переменного

1.1. Комплексные числа и действия над ними

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a+b\cdot\sqrt{-1}$, где a и b – некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2-2x+5=0$, получаем $\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2\left(1+2\cdot\sqrt{-1}\right)+5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1+2\cdot\sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$(1)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{-1}+\left(2\cdot\sqrt{-1}\right)^2-2-2\cdot 2\cdot\sqrt{-1}+5=4+4\cdot(-1)=0\,.$$

Таким образом, конструкцию $1+2\cdot\sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2-2x+5=0$.

Пусть i – некоторый формальный символ, x и y – действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z=x+iy$ назовём комплексными числами, x – действительной, а y – мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$ и будем обозначать их соответственно $x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z$. Число $x-iy$ будем называть сопряжённым (комплексно сопряжённым) к числу $z=x+iy$ и обозначать $\overline{z}$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,;$$
$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\,.$$

Заметим, что $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z=2x$, $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}z\cdot i=2y\cdot i$, следовательно, $x=\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то складывая и умножая числа $x+0\cdot i$ и $y+0\cdot i$ по приведённым выше формулам, получаем

$$(x+0\cdot i)+(y+0\cdot i)=(x+y)+i\cdot(0+0)=(x+y)+0\cdot i,$$
$$(x+0\cdot i)(y+0\cdot i)=(xy-0\cdot 0)+i(x\cdot 0+y\cdot 0)=xy+0\cdot i.$$

Как видим, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $x+0\cdot i$ не выводят за множество чисел этого вида (то есть получаются числа того же вида). Поэтому можно заключить, что операции сложения и умножения совпадают с обычными операциями над действительными числами и считать комплексные числа расширением множества действительных чисел. Применив введённые выше операции над комплексными числами, для комплексного числа $i=0+i\cdot 1$ получаем

$$i^2=(0+i\cdot 1)(0+i\cdot 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=-1+0\cdot i=-1.$$

Заметим, что операции сложения и умножения комплексных чисел производятся как соответствующие операции над двучленами с раскрытием скобок, приведением подобных и учётом того, что $i\cdot i=-1$. Слагаемые вида 0 и $0\cdot i$ обычно опускаются.

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{(x_2)^2+(y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ сопоставим точку (x,y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиусов-векторов точек (x,y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиуса-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Далее,

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиусом-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным, и обозначают его $\arg z$.

Совмещая алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа z, можем записать

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi.$$

Следовательно, $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$, $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$. Разделив мнимую часть на действительную, получаем $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \dfrac{|z|\sin\varphi}{|z|\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$, или, выписывая крайние части соотношения, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Если $x = \operatorname{Re} z > 0$, то есть комплексное число z лежит в правой полуплоскости (в первой или четвёртой четверти), то $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ Если же $x = \operatorname{Re} z < 0$, то есть комплексное число z лежит в левой полуплоскости (во второй или третьей четверти), то $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi$. Отметим частные случаи. Если число z действительное и положительное, то есть $x = \operatorname{Re} z > 0$, $y = \operatorname{Im} z = 0$, то $\varphi = 0$; если число z действительное и отрицательное, то есть $x = \operatorname{Re} z < 0$, $y = \operatorname{Im} z = 0$, то $\varphi = \pi$. Если число z мнимое, то есть $x = \operatorname{Re} z = 0$, то в случае $y = \operatorname{Im} z > 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а в случае $y = \operatorname{Im} z < 0$ можно взять либо $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, либо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Подводя итог вышесказанному, заметим, что при выборе главного значения аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Удобным также является выбор главного значения аргумента из промежутков $[-\pi, \pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из промежутков $[-\pi, \pi)$ и $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z| e^{i\varphi}$. Эта запись числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = |z_1|\cdot|z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично можно получить, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы возведения комплексного числа в степень n и извлечения корня n-й степени из комплексного числа, называемые формулами Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0,1,\dots,n-1.$$

1.1.1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 4i$.

Имеем $z_1 + z_2 = (2+3i) + (1-4i) = (2+1) + \big(3 + (-4)\big)i = 3 - i$;
$z_1 - z_2 = (2+3i) - (1-4i) = (2-1) + \big(3 - (-4)\big)i = 1 + 7i$;
$z_1 z_2 = (2+3i)(1-4i) = (2\cdot 1) + \big(3i(-4)i\big) + 2(-4i) + 1\cdot 3i = 14 - 5i$;
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i.$$

1.1.2. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если а) $z = 2 + i$;

б) $z = -2 + 2i$; в) $z = -1 - \sqrt{3}i$; г) $z = \sqrt{3} - i$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

а) Для числа $z=2+i$ можем написать $\operatorname{Re}(2+i)=2$, $\operatorname{Im}(2+i)=1$, $|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Далее, так как действительная и мнимая части данного комплексного числа положительны, то на комплексной плоскости число $z=2+i$ находится в первой четверти, следовательно, $\arg(2+i)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

б) Для числа $z=-2+2i$ имеем $\operatorname{Re}(-2+2i)=-2$, $\operatorname{Im}(-2+2i)=2$, $|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Далее, так как действительная часть данного комплексного числа отрицательна, а мнимая часть положительна, то на комплексной плоскости число $z=-2+2i$ находится во второй четверти, поэтому $\arg(-2+2i)=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right)=\pi+\operatorname{arctg}(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

в) Для числа $z=-1-\sqrt{3}i$ имеем $\operatorname{Re}\left(-1-\sqrt{3}i\right)=-1$, $\operatorname{Im}\left(-1-\sqrt{3}i\right)=-\sqrt{3}$, $\left|\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$. Далее, так как действительная и мнимая части данного комплексного числа отрицательны, то на комплексной плоскости число $z=-1-\sqrt{3}i$ находится в третьей четверти, следовательно, $\arg\left(-1-\sqrt{3}i\right)=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)=\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

г) Для числа $z=\sqrt{3}-i$ имеем $\operatorname{Re}\left(\sqrt{3}-i\right)=\sqrt{3}$, $\operatorname{Im}\left(\sqrt{3}-i\right)=-1$, $\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$. Далее, так как действительная часть данного комплексного числа положительна, а мнимая часть отрицательна, то на комплексной плоскости число $z=\sqrt{3}-i$ находится в четвёртой четверти, следовательно, $\arg\left(\sqrt{3}-i\right)=2\pi+\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. Заметим, что если выбирать главное значение аргумента из промежутков $[-\pi,\pi)$ или $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, то $\arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}$.

д) $\operatorname{Re}\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}, \operatorname{Im}\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$, $\left|-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right|=\sqrt{\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2}=1$. Так как угол $\frac{\pi}{7}$ лежит в первой четверти, то $\cos\frac{\pi}{7}>0, \sin\frac{\pi}{7}>0$, поэтому число $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ лежит во второй четверти. Следовательно, $\arg\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\pi+\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)=$ $=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$.

1.1.3. Записать в тригонометрической и показательной формах следующие числа: а) $z=3+3i$; б) $z=-2+2\sqrt{3}i$;
в) $z=-4\sqrt{3}-4i$; г) $z=2-3i$.

а) Так как для числа $z=3+3i$ имеем $|3+3i|=3\sqrt{2}$, $\arg(3+3i)=\frac{\pi}{4}$, то $3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) Так как для числа $z=-2+2\sqrt{3}i$ имеем $\left|-2+2\sqrt{3}i\right|=4$, $\arg\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=\pi+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$, то можем записать $-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

в) Так как для числа $z=-4\sqrt{3}-4i$ получаем $\left|-4\sqrt{3}-4i\right|=8$, $\arg\left(-4\sqrt{3}-4i\right)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{7\pi}{6}$, то можем записать $-4\sqrt{3}-4i=8\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=8e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

г) Так как $\left|2-3i\right|=\sqrt{13}$, $\arg\left(2-3i\right)=\operatorname{arctg}\frac{-3}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, то $2-3i=\sqrt{13}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\right)=\sqrt{13}e^{i\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)}$.

1.1.4. Представить в показательной форме следующие числа: а) $z=1$; б) $z=-1$; в) $z=i$; г) $z=-i$; д) $z=1+i$; е) $z=1-i$; ж) $z=-1+i$; з) $z=-1-i$.

Имеем: а) $1=e^{i2k\pi}$; б) $-1=e^{i(2k+1)\pi}$; в) $i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$;

г) $-i=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$; д) $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$; е) $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$; ж) $-1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}$; з) $-1-i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)}$.

1.1.5. Записать в алгебраической форме числа:
а) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; б) $3e^{i\frac{3\pi}{4}}$; в) $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; г) $6\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

а) Так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то получаем $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i$;

б) $3e^{i\frac{3\pi}{4}}=3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

в) $2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$;

г) $6\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3-3\sqrt{3}i$.

1.1.6. Найти $\sqrt[3]{1}$. Так как $|1|=1$, $\arg 1=0$, то, используя формулу Муавра для вычисления корня степени n из комплексного числа, имеем $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$. Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, получаем три значения корня кубического из единицы:

$$\sqrt[3]{1}_1=1,\ \sqrt[3]{1}_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \sqrt[3]{1}_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.1.7. Найти $z=\sqrt[3]{8}$. Так как $|8|=8, \arg 8=0$, то, используя формулу для вычисления корня степени n из комплексного числа, получаем $z_k=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$. Придавая k последовательно значения 0,1,2, получаем три значения корня кубического из 8: $z_1=2, z_2=-1+\sqrt{3}i, z_3=-1-\sqrt{3}i$.

1.1.8. Найти $z=\sqrt{-9}$. Так как $|-9|=9, \arg(-9)=\pi$, то, используя формулу для вычисления корня степени n из комплексного числа, имеем

$$z_k=\sqrt{-9}=3\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1.$$

Придавая k последовательно значения 0, 1, получаем значения $z_1=3i, z_2=-3i$ корня квадратного из –9.

Заметим, что для любого действительного отрицательного числа главное значение аргумента равно π, для любого действительного положительного числа главное значение аргумента равно 0.

1.1.9. Найти $z=\sqrt{1-i}$. Так как $|1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$, то $z_k=\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,1$. Придавая k последовательно значения 0, 1, получаем значения $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)\right)$ корня квадратного из $\sqrt{1-i}$. Заметим, что квадратные корни из комплексных чисел отличаются только знаками.

1.1.10. Решить уравнение $x^2 - 8x + 25 = 0$.

Заметим, что комплексные решения квадратных уравнений с действительными коэффициентами могут быть получены по той же формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, что и действительные, но при отрицательном дискриминанте. Имеем

$$x_{1,2} = \frac{8 + \sqrt{64 - 100}}{2} = 4 + \sqrt{16 - 25} = 4 + \sqrt{-9}\ .$$

Так как $\sqrt{-9} = \pm 3i$, то окончательно получаем $x_{1,2} = 4 \pm 3i$.

1.1.11. Решить уравнение $z^2 - (2+i)z + 1 + i = 0$.

Можно поступить двумя способами. Во-первых, отделив действительную и мнимую части квадратного трёхчлена в левой части, получить систему двух квадратных уравнений, связывающих действительную и мнимую части числа z. Во-вторых, воспользоваться тем, что формулы для нахождения корней квадратного уравнения справедливы и для уравнений с комплексными коэффициентами (получаются по той же схеме, что и для квадратных уравнений с действительными коэффициентами). Реализуя второй путь, имеем

$$z_{1,2} = \frac{2 + i + \sqrt{(2+i)^2 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2 + i + \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + i \pm i}{2},$$

то есть $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i, z_2 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1.12. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, если а) $z = \dfrac{1}{1-i}$, б) $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$, в) $z=\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$, г) $z=\frac{4-2i}{-3+4i}$, д) $z=\frac{2+5i}{3-4i}$,

е) $z=\frac{3+i}{-2-5i}$, ж) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$, з) $z=(3+2i)(7-i)$,

и) $z=(2+6i)(3-5i)$, к) $z=\frac{4+2i}{-2+3i}$, л) $z=5e^{i\frac{\pi}{8}}$, м) $z=-3e^{i\frac{3\pi}{7}}$,

н) $z=2\left(-\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, о) $z=2\left(-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, п) $z=i$,

р) $z=-7$, с) $z=(-4+3i)^3$, т) $z=2\left(-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$,

у) $z=(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$, ф) $z=(1+\sqrt{3}i)^5(1-i)^6$.

1.1.13. Представить в показательной форме числа:
а) $z=1+\sqrt{3}i$; б) $z=-1+\sqrt{3}i$; в) $z=\sqrt{3}+i$; г) $z=\sqrt{3}-i$,
д) $z=-\sqrt{3}+i$.

1.1.14. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{i}$, б) $\sqrt[6]{-64}$, в) $\sqrt{4}$,
г) $\sqrt[3]{1-i}$, д) $\sqrt[5]{3-3i}$, е) $\sqrt[3]{1+i}$, ж) $\sqrt{-2+2i}$, з) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$,
и) $\sqrt[3]{4-3i}$, к) $\sqrt[4]{3+4i}$, л) $\sqrt[3]{-i}$, м) $\sqrt[4]{16i}$, н) $\sqrt[4]{-81i}$, о) $\sqrt[5]{1+i}$.

1.1.15. Решить уравнения: а) $x^2+6x+25=0$, б) $x^2+3=0$,
в) $3x^2+2x+4=0$, г) $x^2-4x+13=0$, д) $3x^2-2x+8=0$,
е) $x^2-2x+8=0$, ж) $x^2+2x+6=0$, з) $2x^2-x+5=0$,
и) $x^2-2x+5=0$, к) $x^2+x+8=0$, л) $x^2-4x+8=0$,
м) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$, н) $2z^2-(1+i)z+(2+3i)=0$.

1.2. Некоторые множества на комплексной плоскости

1.2.1. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости, заданные соотношениями:

а) $|z-2|=5$; б) $|z-2|<5$; в) $|z-2|>5$; г) $|z-2|\le 5$;
д) $|z-2|\ge 5$; е) $2<|z-2|<5$; ж) $2\le|z-2|\le 5$.

а) Уравнение описывает множество точек комплексной плоскости, находящихся на расстоянии 5 единиц от точки

$z_0 = 2$. Следовательно, это есть уравнение окружности с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом, равным 5.

б) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, находящихся на расстоянии меньше 5 единиц от точки $z_0 = 2$, то есть внутренность круга с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом, равным 5.

в) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, находящихся на расстоянии больше 5 единиц от точки $z_0 = 2$, то есть внешность круга с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом, равным 5.

г) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, находящихся на расстоянии не более (меньше либо равном) 5 единиц от точки $z_0 = 2$, то есть внутренность круга с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом, равным 5, включая границу, то есть саму окружность.

д) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, находящихся на расстоянии не менее (больше либо равном) 5 единиц от точки $z_0 = 2$, то есть внешность круга с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом, равным 5, включая границу, то есть саму окружность.

е) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, для которых одновременно имеют место соотношения $|z-2| > 2$ и $|z-2| < 5$, то есть множество, являющееся кольцом, образованным окружностями $|z-2| = 2$ и $|z-2| = 5$, лежащее между этими окружностями.

ж) Неравенством описывается множество точек комплексной плоскости, для которых одновременно имеют место соотношения $|z-2| \geq 2$ и $|z-2| \leq 5$, то есть множество, являющееся кольцом, образованным окружностями $|z-2| = 2$ и $|z-2| = 5$, лежащее между этими окружностями, включая сами окружности.

1.2.2. Записать уравнение окружности с центром в точке $z_0 = 2 - i$ и радиусом, равным 3.

Из геометрического смысла модуля комплексного числа и определения окружности следует, что уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом r может быть записано в виде $|z - z_0| = r$. Подставляя, получаем, что уравнение нужной нам окружности имеет вид $|z - 2 + i| = 3$. Так как $|z - 2 + i| = 3$, то можем записать $z - 2 + i = 3e^{it}$, где $0 \le t < 2\pi$ – некоторый параметр, или, что то же самое, $z = 2 - i + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ – уравнение той же окружности в параметрической форме.

1.2.3. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости:

а) $|z+i| + |z-2i| = 5$; $|z+i| + |z-2i| < 5$; $|z+i| + |z-2i| > 5$; $|z+i| + |z-2i| \le 5$; $|z+i| + |z-2i| \ge 5$;

б) $|z+i| + |z-2i| = 3$; $|z+i| + |z-2i| < 3$; $|z+i| + |z-2i| > 3$; $|z+i| + |z-2i| \le 3$; $|z+i| + |z-2i| \ge 3$;

в) $|z+i| + |z-2i| = 2$; $|z+i| + |z-2i| < 2$; $|z+i| + |z-2i| > 2$; $|z+i| + |z-2i| \le 2$; $|z+i| + |z-2i| \ge 2$.

а) Первое множество есть совокупность точек комплексной плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек ($-i$, $2i$) есть величина постоянная и равная 5 единицам, что больше, чем расстояние между точками $-i$, $2i$. Следовательно, это есть уравнение эллипса с фокусами в точках $-i$, $2i$. Второе множество есть внутренность указанного эллипса, третье – внешность этого эллипса, четвёртое – внутренность эллипса с включением границы, пятое – внешность эллипса с включением границы.

б) Так как расстояние между точками $-i$ и $2i$ рано 3, то первое множество есть совокупность точек отрезка, соединяющего точки $-i$ и $2i$, второе множество не содержит ни одной точки (является пустым), третье есть внешность отрезка, соединяющего точки $-i$ и $2i$, четвертое, так же как и первое, есть совокупность точек отрезка, соединяющего точки $-i$ и $2i$, пятое есть вся комплексная плоскость.

в) Первое множество пусто, второе пусто, третье есть вся комплексная плоскость, четвёртое пусто, пятое есть вся комплексная плоскость.

1.2.4. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости:

а) $|z+i|-|z-2i|=2$; $|z+i|-|z-2i|<2$; $|z+i|-|z-2i|>2$; $|z+i|-|z-2i|\le 2$; $|z+i|-|z-2i|\ge 2$;

б) $|z-2i|-|z+i|=2$; $|z-2i|-|z+i|<2$; $|z-2i|-|z+i|>2$; $|z-2i|-|z+i|\le 2$; $|z-2i|-|z+i|\ge 2$.

а) Первое множество есть совокупность точек комплексной плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек $-i, 2i$ есть величина постоянная и равная 2 единицам, что меньше, чем расстояние между точками $-i, 2i$. Следовательно, это есть уравнение ветви гиперболы, лежащей выше оси OX и с фокусами в точках $-i, 2i$, второе множество есть совокупность точек комплексной плоскости, ограниченная ветвью гиперболы $|z+i|-|z-2i|=2$ и расположенная с той же стороны ветви гиперболы $|z+i|-|z-2i|=2$, что и фокус $-i$, третье множество есть совокупность точек комплексной плоскости, ограниченная ветвью гиперболы $|z+i|-|z-2i|=2$ и расположенная с той же стороны ветви гиперболы $|z+i|-|z-2i|=2$, что и фокус $2i$, четвёртое множество есть второе множество, дополненное ветвью гиперболы, пятое множество есть третье множество, дополненное ветвью гиперболы.

б) Первое множество есть ветвь гиперболы с фокусами в точках $-i, 2i$, лежащей ниже оси OX, соответственно второе множество есть совокупность точек, ограниченная ветвью гиперболы $|z+i|-|z-2i|=-2$ и расположенная с той же стороны ветви гиперболы $|z+i|-|z-2i|=-2$, что и фокус $2i$, третье множество есть совокупность точек, ограниченная ветвью гиперболы $|z+i|-|z-2i|=-2$ и расположенная с той же стороны ветви гиперболы $|z+i|-|z-2i|=-2$, что и фокус $-i$, четвёртое множество есть второе множество, дополненное ветвью гиперболы, пятое множество есть третье множество, дополненное ветвью гиперболы.

1.2.5. Записать с помощью неравенств следующие множества на комплексной плоскости:

а) полуплоскость, расположенную справа от мнимой оси;

б) полуплоскость, расположенную выше действительной оси;

в) первый квадрант.

а) Так как полуплоскость расположена справа от мнимой оси, то $x > 0$, или, что то же самое, $\operatorname{Re} z > 0$.

б) Так как полуплоскость расположена выше действительной оси, то $y > 0$, или, что то же самое, $\operatorname{Im} z > 0$.

в) В первом квадранте одновременно выполняются неравенства $x > 0$ и $y > 0$, то есть $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$, поэтому первый квадрант есть множество

$$\{z \in C : \operatorname{Re} z > 0\} \cap \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\} = \{z \in C : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.2.6. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости: а) $|z - 2 + 3i| = 5$; б) $|z - 2 + 3i| < 5$; в) $|z - 2 + 3i| > 5$;

г) $|z - 2 + 3i| \le 5$; д) $|z - 2 + 3i| \ge 5$; е) $3 < |z - 2 + 3i| < 5$;

ж) $3 \le |z - 2 + 3i| \le 5$.

1.2.7. Записать уравнение окружности с центром в точке $z_0 = 1 + 4i$ и радиусом, равным 5.

1.2.8. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости: а) $|z - i| + |z + 2i| = 4$; $|z - i| + |z + 2i| < 4$; $|z - i| + |z + 2i| > 4$; $|z - i| + |z + 2i| \le 4$; $|z - i| + |z + 2i| \ge 4$;

б) $|z - i| + |z + 2i| = 3$; $|z - i| + |z + 2i| < 3$; $|z - i| + |z + 2i| > 3$; $|z - i| + |z + 2i| \le 3$; $|z - i| + |z + 2i| \ge 3$;

в) $|z - i| + |z + 2i| = 1$; $|z - i| + |z + 2i| < 1$; $|z - i| + |z + 2i| > 1$; $|z - i| + |z + 2i| \le 1$; $|z - i| + |z + 2i| \ge 1$.

1.2.9. Охарактеризовать множества на комплексной плоскости: а) $|z-i|-|z+2i|=2$; $|z-i|-|z+2i|<2$; $|z-i|-|z+2i|>2$; $|z-i|-|z+2i|\le 2$; $|z-i|-|z+2i|\ge 2$;

б) $|z+2i|-|z-i|=2$; $|z+2i|-|z-i|<2$; $|z+2i|-|z-i|>2$; $|z+2i|-|z-i|\le 2$; $|z+2i|-|z-i|\ge 2$.

1.2.10. Записать с помощью неравенств следующие множества на комплексной плоскости:

а) полуплоскость, расположенную слева от мнимой оси;

б) полуплоскость, расположенную ниже действительной оси;

в) второй квадрант.

1.3. Отображения. Образы и прообразы линий

Пусть G и D – области на комплексной плоскости. Будем говорить, что задано отображение из G в D ($f: G \to D$), если для всякой точки $z \in G$ по некоторому правилу или закону поставлена в соответствие точка $w \in D$. Точка $w = f(z)$ называется образом точки z, а точка z – прообразом точки w при отображении f. Соответственно, если Γ и L – кривые в комплексной плоскости, то $f(\Gamma)$ – образ кривой Γ, а $f^{-1}(L)=\{z\in C : f(z)\in L\}$ – прообраз кривой L при отображении f.

Перечислим элементарные функции комплексного переменного. Всюду ниже константы a, b, c, d и так далее предполагаются комплексными.

Линейное отображение $w = az$ и линейная функция $w = az + b$.

Дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Степенная функция $w = z^n$ и ее частные случаи при различных n.

Дробно-рациональная функция

$$w=\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}.$$

Показательная функция $w=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}$.

Логарифмическая функция

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$$

и ее главное значение $w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

Тригонометрические функции комплексного переменного

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})},\ \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},\ \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}.$$

Функции, обратные к тригонометрическим и гиперболическим.

Функция Жуковского $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

1.3.1. а) Найти образы линий $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $y=x$ при отображении $w=z^2$.

Можем записать $w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$. Поэтому $u(x,y)=\operatorname{Re} w=x^2-y^2$, $v(x,y)=\operatorname{Im} w=2xy$. Если $x=c$, то получаем в плоскости w кривую, заданную параметрически уравнениями $u=c^2-y^2$, $v=2cy$. Исключая параметр y, имеем $y=\dfrac{v}{2c}$ и, следовательно, $u=c^2-\dfrac{v^2}{4c^2}$. При каждом фиксированном c это парабола с ветвями, направленными влево, и вершиной в точке $w=c^2$, пересекающая мнимую ось при $v=\pm 2c^2$, то есть в точках $2c^2 i$ и $-2c^2 i$. При $c=0$ получаем отрицательную полуось OX.

Если $y=c$, то параметрические уравнения образа этой кривой есть $u=x^2-c^2$, $v=2cx$, откуда, исключая параметр x, имеем $x=\dfrac{v}{2c}$ и, следовательно, $u=\dfrac{v^2}{4c^2}-c^2$ – семейство парабол с ветвями, направленными вправо, вершиной в точке $w=-c^2$, пересекающая мнимую ось при $v=\pm 2c^2$, то есть в точках $2c^2 i$ и $-2c^2 i$. При $c=0$ получаем положительную полуось OX.

Если $y=x$, то $u=0$, $v=2x^2$, следовательно, $v\geq 0$ и образом прямой $y=x$ является неотрицательная часть мнимой оси.

б) Найти образы линий $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $y=x$ при отображении $w=e^z$.

Имеем $w=e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}$. Если $x=c$, то $w=e^c e^{iy}$. Это уравнение описывает окружность с центром в начале координат и радиусом e^c, пробегаемую бесконечное число раз. Если $y=c$, то $w=e^x e^{ic}$. Это уравнение луча, исходящего из начала координат, со значением аргумента, равным c. Если $y=x$, то $w=e^x e^{ix}$, и мы получаем спираль, описываемую вокруг начала координат.

в) Найти прообразы линий $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $v=u$ при отображении $w=z^2$.

Так как $u=\operatorname{Re} w=x^2-y^2$, то $x^2-y^2=c$, если $u=c$. При $c=0$ получаем уравнение $x^2-y^2=0$, которое описывает пару распадающихся прямых $y=x$ и $y=-x$. При $c\neq 0$ получаем гиперболы с фокусами на оси OX при $c>0$ и фокусами на оси OY при $c<0$ и асимптотами $y=x$ и $y=-x$. Далее, так как $v(x,y)=\operatorname{Im} w=2xy$, то $2xy=c$, если $v=c$. При $c=0$ получаем уравнение $xy=0$, которое описывает оси координат. При $c\neq 0$

получаем гиперболы, лежащие в 1-м и 3-м координатных углах при $c>0$, и гиперболы, лежащие во 2-м и 4-м координатных углах при $c<0$, и асимптотами $x=0$, $y=0$. Если $u=v$, то $x^2-y^2=2xy$, или $x^2-2xy-y^2=0$. Выделяя в последнем уравнении полный квадрат, последовательно имеем $x^2-2xy+y^2-2y^2=0$, $(x-y)^2-2y^2=0$, $(x-y)^2=2y^2$. Это пара распадающихся прямых $x-y=\sqrt{2}y$, $x-y=-\sqrt{2}y$, или, что то же самое, $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{x}{1-\sqrt{2}}$.

г) Найти образы линий $|z|=\text{const}$ и $\arg z=\text{const}$ при отображении $w=z^2$.

Можем записать $w=z^2=|z|^2 e^{i2\arg z}$. Если $|z|=\text{const}$, то имеем окружность радиусом $|z|^2$, пробегаемую два раза. Если $\arg z=\text{const}$, то получаем луч, исходящий из начала координат под углом $2\arg z$.

д) Найти прообразы линий $|w|=\text{const}$, $\arg w=\text{const}$ при отображении $w=z^2$.

Можем записать $z^2=w=|w|e^{i\arg w}$, или $z=\sqrt{|w|}e^{i\frac{\arg w}{2}}$. Если $|w|=\text{const}$, то при $\arg w\in[0,2\pi)$ получим половину окружности радиусом $\sqrt{|w|}$, лежащую в верхней полуплоскости плоскости z, при $\arg w\in[2\pi,4\pi)$ это половина окружности радиусом $\sqrt{|w|}$, лежащая в нижней полуплоскости плоскости z. Таким образом, прообраз линии $|w|=\text{const}$ при отображении $w=z^2$ есть окружность радиусом $\sqrt{|w|}$, пробегаемая бесконечное число раз. Если $\arg w=\text{const}$, то получаем луч в плоскости z, исходящий из начала координат под углом $\dfrac{\arg w}{2}$.

1.3.2. Найти модуль, аргумент, вещественную и мнимую части: а) $w = e^{2+i}$; б) $w = e^{2-3i}$; в) $w = e^{3+4i}$.

а) Так как $e^{2+i} = e^2 e^i = e^2(\cos 1 + i\sin 1)$, то $|w| = e^2$, $\arg w = 1$, $\operatorname{Re} w = e^2 \cos 1$, $\operatorname{Im} w = e^2 \sin 1$.

б) Так как $e^{2-3i} = e^2 e^{-3i} = e^2(\cos(-3) + i\sin(-3))$, то $|w| = e^2$, $\arg w = -3 + 2\pi$, если главное значение аргумента выбирать из промежутка $[0, 2\pi)$, $\operatorname{Re} w = e^2 \cos(-3 + 2\pi) = e^2 \cos 3$, $\operatorname{Im} w = e^2 \sin(-3 + 2\pi) = -e^2 \sin 3$.

в) Так как $e^{3+4i} = e^3 e^{4i} = e^3(\cos 4 + i\sin 4)$, то $|w| = e^3$, $\arg w = 4$, если главное значение аргумента выбирать из промежутка $[0, 2\pi)$, потому что $0 < 4 < 2\pi$, $\operatorname{Re} w = e^2 \cos 4$, $\operatorname{Im} w = e^2 \sin 4$.

1.3.3. Вычислить: а) $w = \operatorname{Ln} i$; б) $w = \operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; в) $w = 2^i$.

а) $w = \operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg(i) + 2k\pi) = \ln 1 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$

б) $w = \operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \ln\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\arg\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \ln 1 + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) =$

$= i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right).$

в) $w = 2^i = e^{i\operatorname{Ln} 2} = e^{i(\ln|2| + i\arg(2))} = e^{i(\ln 2 + i2k\pi)} = e^{-2k\pi + i\ln 2}$.

1.3.4. Найти вещественную и мнимую части, модуль и аргумент комплексного числа $z = \operatorname{Ln}(-e)$.

Имеем

$z = \operatorname{Ln}(-e) = \ln|-e| + i(\arg(-e) + 2k\pi) = \ln e + i(\pi + 2k\pi) =$

$= 1 + i(2k+1)\pi$. Таким образом, $\operatorname{Re}\operatorname{Ln}(-e) = 1$, $\operatorname{Im}\operatorname{Ln}(-e) = (2k+1)\pi$, $|\operatorname{Ln}(-e)| = \sqrt{1 + (2k+1)^2\pi^2}$, $\arg\operatorname{Ln}(-e) = \operatorname{arctg}(2k+1)\pi$.

1.3.5. Найти вещественную, мнимую части и модуль комплексного числа $z = \operatorname{Arctg} 2i$.

Имеем $z=\operatorname{Arctg}2i$, откуда $\operatorname{tg}z=2i$. Или $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=2i$.

Из последнего получаем $e^{iz}-e^{-iz}=-2(e^{iz}+e^{-iz})$. Умножим обе части равенства на e^{iz} и получим $e^{2iz}-1=-2(e^{2iz}+1)$, или $3e^{2iz}=-1$, $e^{2iz}=-\dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$2iz=\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{1}{3}+i\left(\arg\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k\right)=-\ln 3+i\left(\pi+2k\pi\right).$$

Тогда $z=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)+\dfrac{i}{2}\ln 3$. Поэтому $\operatorname{Re}\operatorname{Arctg}2i=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $\operatorname{Im}\operatorname{Arctg}2i=\dfrac{1}{2}\ln 3$, $\left|\operatorname{Arctg}2i\right|=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}(2k+1)^2+\dfrac{1}{4}\ln^2 3}$.

1.3.6. Решить уравнение $\sin z=0$.

Так как $\sin z=0$, то $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$. Следовательно, $e^{iz}-e^{-iz}=0$. Умножая обе части равенства на e^{iz}, получаем $e^{i2z}=1$, откуда $i2z=\operatorname{Ln}1=\ln|1|+i(\arg 1+2k\pi)=2k\pi i$. Поэтому $z=k\pi$.

1.3.7. Решить уравнение $\cos z=2$.

Так как $\cos z=2$, то $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$. Следовательно, $e^{iz}+e^{-iz}=4$. Умножая обе части равенства на e^{iz}, получаем $e^{i2z}-4e^{iz}+1=0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решая его, получаем $e^{iz}=2+\sqrt{3}$ или $e^{iz}=2-\sqrt{3}$.

Из первого соотношения получаем

$$iz=\operatorname{Ln}(2+\sqrt{3})=\ln\left|2+\sqrt{3}\right|+i(\arg(2+\sqrt{3})+2k\pi)=$$

$$=\ln\left|2+\sqrt{3}\right|+2k\pi i.$$

Поэтому $z=2k\pi-i\ln\left|2+\sqrt{3}\right|$.

Из второго соотношения имеем

$$iz = \mathrm{Ln}(2-\sqrt{3}) = \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + i(\arg(2-\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$$= \ln\left|2-\sqrt{3}\right| + 2k\pi i\,.$$

Поэтому $z = 2k\pi - i\ln\left|2-\sqrt{3}\right|$.

Задачи для самостоятельного решения

1.3.8. Найти:

а) образы линий $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, $y = x$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$;

б) прообразы линий $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, $v = u$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$.

в) образы линий $|z| = \mathrm{cons}t$, $\arg z = \mathrm{const}$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$;

г) прообразы линий $|w| = \mathrm{const}$, $\arg w = \mathrm{const}$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$.

1.3.9. Найти модуль, аргумент, вещественную и мнимую части: а) $w = e^{3+2i}$; б) $w = e^{4-3i}$; в) $w = e^{3-4i}$.

1.3.10. Вычислить: а) $w = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$; б) $w = \left(2+i\right)^{1-\sqrt{3}i}$;

в) $w = \left(1+i\right)^{i}$; г) $w = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{-i}$; д) $w = (3-4i)^{1-i}$; е) $w = i^{i}$;

ж) $w = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$; з) $w = (-3+4i)^{1+i}$; и) $z = \mathrm{sh}(2+3i)$.

1.3.11. Найти вещественные и мнимые части, модули и аргументы комплексных чисел: а) $z = \mathrm{Ln}(3e)$; б) $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^{i}$;

в) $z = \mathrm{sh}(2+3i)$; г) $z = \mathrm{Arctg}2$.

1.3.12. Решить уравнения: а) $\sin z = 5$; б) $\cos z = 3$;
в) $\sin z = 1 + 2i$; г) $\cos z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$; д) $\sin z = 2i$; е) $\cos 2z = 0$.

1.4. Голоморфные (аналитические) функции комплексного переменного, геометрический смысл производной

Пусть G и D – области на комплексной плоскости и f – отображение из G в D ($f: G \to D$). Говорят, что функция f дифференцируема в точке $z_0 \in G$, если существует число $A + Bi$ такое, что приращение $f(z) - f(z_0)$ функции f можно представить в виде

$$f(z) - f(z_0) = \left(A + Bi\right)(z - z_0) + \alpha(z - z_0)$$

для всех z из некоторой окрестности точки z_0, где бесконечно малая функция $\alpha(z - z_0)$ имеет в точке z_0 более высокий порядок малости, чем $z - z_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(z - z_0)}{z - z_0} = 0$. Если f дифференцируема в точке z_0, то, как и в случае функций действительного переменного, $A + Bi$ является производной функции f в точке z_0 и $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши – Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Заметим, что функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ формально можно считать функцией переменных z и $\bar{z}$, так как $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, поэтому можем записать

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Рассматривая производную $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}$, приходим к выводу, что условие $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$ является эквивалентным условиям Коши – Римана. То есть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда производная функции по комплексно сопряженному аргументу равна нулю, то есть $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$.

Говорят, что функция f голоморфная (аналитическая) в точке $z_0 \in G$, если она дифференцируема в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и производная непрерывна в точке z_0.

Отметим некоторые свойства голоморфных (аналитических) функций:

1) основные элементарные функции голоморфны (аналитические) в своей области определения;

2) композиция (суперпозиция) и линейная комбинация конечного числа голоморфных (аналитических) функций является голоморфной функцией;

3) произведение конечного числа аналитических (голоморфных) функций есть функция аналитическая (голоморфная);

4) если знаменатель отличен от нуля, то отношение голоморфных (аналитических) функций есть функция голоморфная (аналитическая).

Модуль производной $|f'(z)|$ есть коэффициент линейного растяжения при отображении f в точке z, а аргумент производной $\arg f'(z)$ равен углу поворота при отображении f любого направления, исходящего из точки z.

Функция $u(x,y)$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$. Действительная и мнимая части голоморфной (аналитической) функции являются гармоническими функциями.

1.4.1. Выяснить, где голоморфна функция $f(z)=z^2$.

Проверим выполнение условий Коши – Римана. Так как $u(x,y)=\operatorname{Re} z^2=x^2-y^2$, $v(x,y)=\operatorname{Im} z^2=2xy$, то получаем $u'_x=2x$, $u'_y=-2y$, $v'_x=2y$, $v'_y=2x$. Следовательно, $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$ и условия Коши – Римана выполнены во всех точках комплексной плоскости, поэтому функция аналитическая (голоморфная) во всей комплексной плоскости.

1.4.2. Выяснить, где голоморфна функция $f(z)=\operatorname{Re} z=x$.

Проверим выполнение условий Коши – Римана. Так как $u(x,y)=\operatorname{Re} z=x$, $v(x,y)=\operatorname{Im}\operatorname{Re} z=0$, то получаем $u'_x=1$, $u'_y=0$, $v'_x=0$, $v'_y=0$. Следовательно, $u'_x\neq v'_y$, $u'_y=-v'_x$ и условия Коши – Римана не выполнены ни в одной точке комплексной плоскости, поэтому функция не является аналитической (голоморфной) ни в одной точке комплексной плоскости.

1.4.3. Какая часть комплексной плоскости сжимается и какая растягивается при отображении: а) $w=e^z$, б) $w=z^2$?

а) Плоскость растягивается, когда коэффициент линейного растяжения больше единицы, и сжимается, когда этот коэффициент больше нуля и меньше единицы. Коэффициент линейного растяжения функции, имеющей производную, равен модулю производной. Так как $f'(z)=(e^z)'=e^z$, то $\left|f'(z)\right|=\left|e^z\right|=\left|e^{x+iy}\right|=$ $=\left|e^x e^{iy}\right|=\left|e^x\right|\cdot\left|e^{iy}\right|=e^x$. Следовательно, точки, в которых плоскость растягивается, удовлетворяют неравенству $e^x>1$, откуда получаем $x>0$, или, что то же самое, $\operatorname{Re} z>0$. Аналогично показывается, что плоскость сжимается при $\operatorname{Re} z<0$.

б) Так как $f'(z) = (z^2)' = 2z$, то $|f'(z)| = |2z| = 2|z|$. Следовательно, точки, в которых плоскость растягивается, удовлетворяют неравенству $2|z| > 1$, откуда получаем $|z| > 0{,}5$, то есть плоскость растягивается во внешности круга с центром в начале координат и радиусом, равным 0,5. Аналогично показывается, что плоскость сжимается при $|z| < 0{,}5$, то есть внутри круга с центром в начале и радиусом, равным 0,5.

1.4.4. Для отображения $w = z^2 - 2z$ найти точки, в которых коэффициент линейного растяжения равен 0.

Имеем $(z^2 - 2z)' = 2z - 2 = 2(z-1)$, $\left|(z^2 - 2z)'\right| = 2|z-1| = 0$. Следовательно, $|z-1| = 0$, откуда получаем $z = 1$. Интересен физический смысл постановки данной задачи. Если коэффициент линейного растяжения больше 1, то плоскость растягивается, если равен 1, то плоскость ни растягивается, ни сжимается, если меньше 1, но больше 0, то плоскость сжимается.

1.4.5. Для отображения $w = z^2 - 2z$ найти точки, в которых угол поворота равен 0.

Так как $\arg(z^2 - 2z)' = \arg(2z - 2) = \arg(2x - 2 + i2y)$, то

$$\arg(z^2 - 2z)' = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}, & \text{если } x - 1 > 0, y > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 1, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}, & \text{если } x - 1 < 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 1, y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}, & \text{если } x - 1 > 0, y < 0. \end{cases}$$

Приравнивая аргумент к нулю, получаем:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} = 0$ при $x - 1 > 0, y \geq 0$, поэтому $\dfrac{y}{x-1} = 0$, следовательно, $y = 0$;

б) $\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} = 0$ при $x-1<0$, поэтому $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} = -\pi$, откуда $\dfrac{y}{x-1} = \operatorname{tg}(-\pi) = 0$, следовательно, $y=0$;

в) $2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} = 0$ при $x-1>0, y\le 0$, поэтому $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} = -2\pi$, откуда $\dfrac{y}{x-1} = \operatorname{tg}(-2\pi) = 0$, следовательно, $y=0$.

Поэтому угол поворота любого направления равен нулю на оси OX.

1.4.6. а) Восстановить голоморфную (аналитическую) функцию, если $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2 + x$.

Проверяем, является ли $\operatorname{Re} f(z)$ гармонической функцией. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2+y^2+x)}{\partial x} = 2x+1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2(x^2+y^2+x)}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2+y^2+x)}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2(x^2+y^2+x)}{\partial y^2} = 2$. Поэтому $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2+2=4$. Следовательно, функция $u = x^2+y^2+x$ не является гармонической и не может быть действительной частью голоморфной (аналитической) функции. Поэтому восстановить голоморфную функцию с $u = x^2+y^2+x$ невозможно, так как аналитической (голоморфной) функции с такой действительной частью нет.

б) Восстановить голоморфную (аналитическую) функцию, если $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x$.

Проверяем, является ли $\operatorname{Re} f(z)$ гармонической функцией. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2-y^2+x)}{\partial x} = 2x+1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2(x^2-y^2+x)}{\partial x^2} = 2$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial (x^2 - y^2 + x)}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 (x^2 + y^2 + x)}{\partial y^2} = -2$. Поэтому $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$. Следовательно, функция $u = x^2 - y^2 + x$ гармоническая и может быть действительной частью голоморфной (аналитической) функции.

Далее, $v = \int\limits_L dv = \int\limits_L \dfrac{\partial v}{\partial x} dx + \dfrac{\partial v}{\partial y} dy$. Используя условия Коши – Римана, можем это соотношение переписать в виде $v = \int\limits_L dv = \int\limits_L \left(-\dfrac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \dfrac{\partial u}{\partial x} dy$. Так как криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то получаем с точностью до константы $v = \int\limits_L (2y) dx + (2x+1) dy = 2xy + y$. Таким образом,

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y) + C = z^2 + z + C .$$

Задачи для самостоятельного решения

1.4.7. Выяснить, где голоморфна (аналитична) функция $f(z) = e^z$.

1.4.8. Найти a, b, c, при которых голоморфна (аналитична) функция $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$.

1.4.9. Найти, где дифференцируемы функции $e^{\sin z}$, $\sin(2e^z)$, ze^{-z}, $\dfrac{z \cos z}{1+z^2}$, $\operatorname{tg} z$, e^{z^2}, $\dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$, $\dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

1.4.10. Для отображения $w = z^2 - 2z$ найти точки, в которых коэффициент линейного растяжения равен 1.

1.4.11. Для отображения $w = z^3$ найти угол поворота направления, выходящего из точки, и коэффициент линейного растяжения в точках $z_0 = 1 + i$ и $z_1 = -3 + 4i$.

1.4.12. Восстановить голоморфную функцию, если

а) $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2 y - y^3$, б) $\operatorname{Im} f(z) = 2xy$.

в) $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, |z| > 0$.

1.5. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть L – кривая в комплексной плоскости. Тогда интеграл по кривой L от функции f комплексного переменного равен

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy,$$

то есть представляет собой сумму двух криволинейных интегралов 2-го рода от функций действительного переменного. Если кривая L задана параметрически и является гладкой или кусочно-гладкой, то интеграл от функции комплексного переменного можно вычислить либо по формуле

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(u(x(t), y(t)x'(t) - v(x(t), y(t)y'(t) \right) dt +$$

$$+i\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(v(x(t), y(t)x'(t) + u(x(t), y(t)y'(t) \right) dt,$$

либо по формуле

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt,$$

где $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$ – кривая на вещественной плоскости R^2, заданная параметрически; $z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_1, t_2]$ – та же кривая на комплексной плоскости. В данном случае были использованы соотношения $dx(t) = x'(t)dt$, $dy(t) = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt = (x'(t) + iy'(t))dt$.

Заметим, что если подынтегральная функция голоморфна (аналитична), то интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точек, следовательно, для аналитических функций справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_A}^{z_B} f(z)dz = F(z_B) - F(z_A),$$

где L – любая кривая, соединяющая точки z_A и z_B.

1.5.1. Вычислить интеграл $\int_L z\,\mathrm{Re}\,z dz$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A = 1 + i$ и $B = -3 + 2i$.

Параметрические уравнения отрезка, соединяющего точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$

Поэтому для нашего отрезка получаем $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 1 + t, \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$ Далее,

$$\int_L z\,\mathrm{Re}\,z dz = \int_L (x + iy)x(dx + idy) =$$

$$= \int_L (x^2 dx - xydy) + i\int_L (xydx + x^2 dy).$$

Подставляя $x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$, $dx = -4dt$, $dy = dt$, имеем

$$\int_L z\,\mathrm{Re}\,z dz = \int_0^1 ((1-4t)^2(-4) - (1-4t)(1+t))dt +$$

$$+ i\int_0^1 ((1-4t)(1+t)(-4) + (1-4t)^2)dt =$$

$$= \int_0^1 (-5 + 35t - 60t^2)dt + i\int_0^1 (-3 + 4t + 32t^2)dt =$$

$$= \left(-5t + \frac{35}{2}t^2 - 20t^3\right)\Bigg|_0^1 + i\left(-3t + 2t^2 + \frac{32}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{15}{2} + \frac{29}{3}i.$$

1.5.2. Вычислить интеграл $\int_L z^2 dz$ вдоль параболы $y^2 = x$ от точки $A = 1 + i$ до точки $B = 4 + 2i$.

Так как

$$\int_L z^2dz = \int_L (x+iy)^2 d(x+iy) = \int_L \Big((x^2-y^2)+i2xy\Big)(dx+idy) =$$

$$= \int_L (x^2-y^2)dx - 2xydy + i\int_L 2xydx + (x^2-y^2)dy \,.$$

Подставляя $x = y^2$, $dx = 2ydy$, получаем

$$\int_L z^2dz = \int_1^2 \Big((y^4-y^2)2y - 2y^3\Big)dy + i\int_1^2 \Big(4y^4 + (y^4-y^2)\Big)dy =$$

$$= \int_1^2 \Big(2y^5 - 4y^3\Big)dy + i\int_1^2 \Big(5y^4 - y^2\Big)dy = \left(\frac{y^6}{3} - y^4\right)\Bigg|_1^2 + i\left(y^5 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 6 + \frac{86}{3}i \,.$$

1.5.3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(2z - \overline{z}\right)dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 3$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

Дуга окружности $|z| = 3$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ на комплексной плоскости может быть задана уравнением $z = 3e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Подставляя $z = 3e^{it}$, $\overline{z} = 3e^{-it}$, $dz = 3ie^{it}dt$ в исходный интеграл, получаем

$$\int_L \left(2z - \overline{z}\right)dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cdot 3e^{it} - 3e^{-it})i3e^{it}dt = 9e^{i2t}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 9it\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 9\left(e^{i\pi} - e^{-i\pi}\right) - 9i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 9(1-1) - 9\pi i = -9\pi i \,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.5.4. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z dz$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A = 2 + 3i$ и $B = 3 - 4i$.

1.5.5. Вычислить интеграл $\int\limits_L z^3 dz$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $A = 1 + i$ до точки $B = 3 + 9i$.

1.5.6. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z} dz$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A = 1 + i$ и $B = -2 + 4i$.

1.5.7. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z} dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 3$, $\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi$.

1.5.8. Вычислить интеграл $\int\limits_L 2z\bar{z} dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 4$, $0 \le \arg z \le \pi$.

1.5.9. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z + \mathrm{Re}\,z) dz$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A = 1 + i$ и $B = -3 + 2i$.

1.5.10. Вычислить интеграл $\int\limits_L z dz$ вдоль кривой $x = y^3$ от точки $A = 1 + i$ до точки $B = 2 + 8i$.

1.5.11. Вычислить интеграл $\int\limits_L 4\left(z^3 + z\right) dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 4$, $\pi \le \arg z \le 2\pi$.

1.6. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши

Теорема Коши для односвязной области. Пусть f – голоморфная (аналитическая) функция в односвязной области G. Тогда для любого замкнутого контура C, целиком лежащего в области G, $\int\limits_C f(z)dz = 0$. Если в дополнение к сказанному f непрерывна в замыкании $G \cup \partial G$ области G, то вместо контура C можно поставить границу ∂G области G, то есть $\int\limits_{\partial G} f(z)dz = 0$.

Теорема Коши для многосвязной области. Пусть f – голоморфная (аналитическая) функция в многосвязной области G, ограниченной контуром C и непересекающимися контурами $C_1, C_2, ..., C_n$, лежащими внутри контура C, и непрерывна в замыкании $G \cup C \cup C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ области G. Тогда $\int\limits_C f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)dz$.

Интегральные формулы Коши. Пусть f – голоморфная (аналитическая) функция в односвязной области G. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz, \text{ или } \int\limits_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0),$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}dz, \text{ или } \int\limits_C \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области G и содержащий точку z_0 внутри. Если в дополнение к сказанному f непрерывна в замыкании $G \cup \partial G$ области G, то вместо контуров C можно поставить границу ∂G области G.

1.6.1. Записать интегральную формулу Коши, позволяющую найти:

а) значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = 2$. По интегральной формуле Коши можем записать

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t - 2}dt,$$

где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области G и содержащий точку 2 внутри;

б) вторую производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = 5i$. По интегральной формуле Коши можем записать

$$f''(5i) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-5i)^3}\,dt\,,$$

где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области G и содержащий точку $5i$ внутри;

в) третью производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = 2+i$. По интегральной формуле Коши можем записать

$$f'''(2+i) = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-(2+i))^4}\,dt\,,$$

где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области G и содержащий точку $2+i$ внутри.

1.6.2. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz$, если C есть контур: а) $|z-2i| = 1$; б) $|z-1| = 0{,}5$; в) $|z+1| = 1{,}5$; г) $|z| = 4$; д) $|z| = 0{,}5$; е) $|z-1| = 2{,}5$.

Подынтегральная функция $\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}$ имеет особенность (знаменатель обращается в нуль) в точках $z_1 = 2i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -2$.

а) Контур $|z-2i| = 1$ делит плоскость на две части, в одной из которых находятся точки, лежащие внутри контура, для них выполняется неравенство $|z-2i| < 1$, в другой находятся точки, лежащие вне контура, для них выполняется неравенство $|z-2i| > 1$. Для точки $z_1 = 2i$ имеем $|2i-2i| = 0 < 1$. Следовательно, точка $z_1 = 2i$ лежит внутри контура. Для точки $z_2 = 1$ имеем $|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 1$. Следовательно, точка $z_2 = 1$ лежит вне контура. Аналогично для точки $z_3 = -2$ имеем $|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 1$, следовательно, она также лежит вне контура $|z-2i|=1$. Поэтому функция $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{(z-1)(z+2)}$ является аналитической (голоморфной) внутри и на контуре $|z-2i|=1$. Применяя интегральную формулу Коши, в которой $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{(t-1)(t+2)}$, $\dfrac{1}{(t-z)^{n+1}}=\dfrac{1}{(t-2i)}$ и t заменено на z, получаем

$$I_1=\int\limits_{|z-2i|=1}\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{\sin^2 z}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=2i}=$$

$$=\frac{2\pi i\sin^2 2i}{(2i-1)(2i+2)}=\frac{2\pi i\sin^2 2i}{(-6+2i)}=\frac{2\pi i(-6-2i)\sin^2 2i}{(-6+2i)(-6-2i)}=$$

$$=\frac{4\pi(1-3i)\sin^2 2i}{40}=\frac{\pi(1-3i)\sin^2 2i}{10}.$$

б) Аналогично пункту а) этой задачи заключаем, что контур $|z-1|=0{,}5$ содержит внутри себя точку $z_2=1$, а точки $z_1=2i$ и $z_3=-2$ лежат вне этого контура. Поэтому функция $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{(z-2i)(z+2)}$ является аналитической (голоморфной) внутри и на контуре $|z-1|=0{,}5$. Применяя интегральную формулу Коши, в которой $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{(t-2i)(t+2)}$, $\dfrac{1}{(t-z)^{n+1}}=\dfrac{1}{(t-1)}$ и t заменено на z, получаем

$$I_2=\int\limits_{|z-1|=0{,}5}\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z+2)}\right|_{z=1}=$$

$$=\frac{2\pi i\sin^2 1}{(1-2i)(1+2)}=\frac{2\pi i\sin^2 1}{3(1-2i)}=\frac{2\pi i(1+2i)\sin^2 1}{3(1-2i)(1+2i)}=\frac{2\pi i(1+2i)\sin^2 1}{3\cdot 5}=$$

$$=\frac{\pi(-4+2i)\sin^2 1}{15}.$$

в) Аналогично пункту а) этой задачи заключаем, что контур $|z+1|=1{,}5$ содержит внутри себя точку $z_3=-2$, а точки $z_1=2i$ и $z_2=1$ лежат вне этого контура. Поэтому функция $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)}$ является аналитической (голоморфной) внутри и на контуре $|z+1|=1{,}5$. Применяя интегральную формулу Коши, в которой $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{(t-2i)(t-1)}$, $\dfrac{1}{(t-z)^{n+1}}=\dfrac{1}{(t+2)}$ и t заменено на z, получаем

$$I_3=\int\limits_{|z-1|=0,5}\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)}\right|_{z=-2}=$$

$$=\frac{2\pi i\sin^2(-2)}{(-2-2i)(-2-1)}=\frac{2\pi i\sin^2(-2)}{6(1+i)}=\frac{\pi i\sin^2 2}{3(1+i)}=\frac{\pi i(1-i)\sin^2 2}{3(1+i)(1-i)}=$$

$$=\frac{\pi(1+i)\sin^2 2}{3\cdot 2}=\frac{\pi(1+i)\sin^2 2}{6}.$$

г) Аналогично пункту а) этой задачи заключаем, что контур $|z|=4$ содержит внутри себя все точки $z_1=2i$, $z_2=1$, $z_3=-2$ с особенностью в знаменателе. Поэтому по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz=I_1+I_2+I_3.$$

д) Аналогично пункту а) этой задачи заключаем, что контур $|z|=0{,}5$ не содержит внутри себя точки $z_1=2i$, $z_2=1$, $z_3=-2$ с особенностью в знаменателе. Поэтому по интегральной теореме Коши для односвязной области

$$\int\limits_{|z|=0,5}\frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)}dz=0\,.$$

е) Аналогично пункту а) этой задачи заключаем, что контур $|z-1|=2{,}5$ содержит внутри себя точки $z_1=2i$ и $z_2=1$, а точку

$z_3 = -2$ не содержит. Поэтому по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{|z-1|=2,5} \frac{\sin^2 z}{(z-2i)(z-1)(z+2)} dz = I_1 + I_2.$$

1.6.3. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-3i|=1} \frac{e^{4z}}{(z-3i)^3} dz$.

Подынтегральная функция $\frac{e^{4z}}{(z-3i)^3}$ имеет особенность (знаменатель обращается в нуль) в точке $z_1 = 3i$. Других особенностей у подынтегральной функции нет. Контур $|z-3i|=1$ содержит внутри себя эту точку. Применяя интегральную формулу Коши, в которой $f(t) = e^{4z}$, $\frac{1}{(t-z)^{n+1}} = \frac{1}{(t-1)^3}$ и t заменено на z, получаем

$$\int\limits_{|z-3i|=1} \frac{e^{4z}}{(z-3i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(e^{4z}\right)''\Big|_{z=3i} = 16\pi i e^{12i}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.6.4. Записать интегральную формулу Коши, позволяющую найти:

а) значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = 5$;

б) вторую производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = 2i$;

в) пятую производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = -2+3i$.

1.6.5. Записать интегральную формулу Коши, позволяющую найти:

а) значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = 2+3i$;

б) третью производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = 1+2i$;

в) четвертую производную функции $f(z)$ в точке $z_0 = -2+i$.

1.6.6. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\left(z-3i\right)^3\left(z-1\right)^2}dz$, если C есть контур: а) $|z-2i|=\frac{3}{4}$; б) $|z+2i|=0,5$; в) $|z-1|=0,5$; г) $|z+3i|=0,5$; д) $|z+3i|=1,5$; е) $|z|=\frac{5}{2}$; ж) $|z|=0,5$.

1.6.7. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{e^z}{\left(z-3i\right)^2\left(z-2\right)\left(z+3\right)^4}dz$, если C есть контур: а) $|z-3i|=1$; б) $|z-2|=1$; в) $|z+3|=2$; г) $|z|=4$; д) $|z|=1$.

1.6.8. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{\cos z}{\left(z-i\right)^2\left(z^2+9\right)\left(z+2i\right)^4}dz$, если C есть контур: а) $|z-i|=0,5$; б) $|z-3i|=1$; в) $|z+3i|=\frac{3}{4}$; г) $|z+2i|=2$; д) $|z|=4$; е) $|z|=0,5$.

1.6.9. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz$, если C есть контур: а) $|z+3|=1,5$; б) $|z+1|=1,5$; в) $|z+i|=2$; г) $|z-i|=2$; д) $|z|=1$; е) $|z-1|=0,5$.

1.6.10. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz$, если C есть контур: а) $|z-3|=1$; б) $|z+3|=1$; в) $|z+2i|=2$; г) $|z-4i|=2$; д) $|z+1|=5$; е) $|z-1|=1$.

2. Представление функций рядами

2.1. Числовые ряды

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом, a_n – общим членом ряда.

Ряд называется сходящимся, если существует и конечен предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ряда, если же этот предел не существует или равен ∞, то ряд называется расходящимся.

Отметим, что для рядов с комплексными членами ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ соответственно из действительных и мнимых частей общего члена ряда. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$.

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Отметим, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Обратное не верно. То есть имеются ряды, сходящиеся и не сходящиеся абсолютно.

Ряд, сходящийся и не сходящийся абсолютно, называют условно сходящимся.

Отметим также, что для знакоположительных рядов с действительными членами понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Для рядов с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n\right)$$

абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ соответственно из действительных и мнимых частей общего члена ряда.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то предел общего члена ряда существует и равен нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Необходимый признак хорош для доказательства расходимости ряда, так как эквивалентным необходимому признаку является следующее утверждение.

Необходимый признак сходимости ряда в альтернативной форме. Если предел общего члена ряда не существует или не равен нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости могут быть сформулированы как в терминах абсолютной сходимости, так и в терминах сходимости знакоположительных рядов с действительными членами.

2.1.1. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.

Так как $a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, то

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{n^2-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Находя предел частичных сумм, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $\dfrac{3}{2}$.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3\cdot 2^n}$.

Это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{1}{6}$ и знаменателем $\dfrac{1}{2}$. Частичная сумма ряда равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3\cdot 2^k} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{3}$.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

Это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{3}{4}$ и знаменателем $\dfrac{3}{2}$. Частичная сумма ряда равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) : \left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n .$$

Переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Следовательно, ряд расходится. Это можно было выяснить, заметив, что не выполнен необходимый признак сходимости, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \infty$.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + i3^{n+1}}{4^{n+1}}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+i3^{n+1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^{n+1}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Первое слагаемое есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{8}$ и знаменателем $\frac{1}{2}$. Так как знаменатель прогрессии меньше 1, то первое слагаемое есть сходящийся ряд и его сумма равна $\frac{1}{4}$. И второе слагаемое есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{9}{16}$ и знаменателем $\frac{3}{4}$. Так как знаменатель прогрессии меньше 1, то и второе слагаемое также есть сходящийся ряд и его сумма равна $\frac{9}{4}$. Подводя итог, заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+i3^{n+1}}{4^{n+1}}$ сходится и его сумма равна $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}i$. Более того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+i3^{n+1}}{4^{n+1}}$ сходится абсолютно, так как ряды из действительных и мнимых частей сходящиеся знакоположительные и поэтому абсолютно сходящиеся (смотри замечание в начале пункта).

д) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$. Ряд, составленный из модулей, имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как знаменатель прогрессии меньше 1, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{\sqrt{2}}:\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. И так как ряд, составленный из модулей, сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

е) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0$, то в силу невыполнения необходимого признака сходимости ряд расходится.

ж) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$.

Так как $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=1$, то $\left|\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|^n=1$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1\neq 0$ и ряд абсолютно расходится. Далее, из того, что $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1\neq 0$, следует, что и $\lim_{n\to\infty}a_n$ не может быть равным нулю, так как a_n при любом n лежит на единичной окружности и не может стремиться к нулю. Более того, нетрудно показать, что $\lim_{n\to\infty}a_n$ не существует. Действительно, $\arg\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\pi}{6}$. Поэтому значение аргумента чисел a_n будет повторяться через каждые 12 шагов, то есть $\arg a_n=\frac{n(\mathrm{mod}12)\cdot\pi}{6}$. В силу нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.2. Выяснить сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{4^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-i4^{n+1}}{5^{n+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right)^n$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2+5}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3n+20}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^n$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+3i}{6}\right)^n$.

Непредельная (конечная) форма признака сравнения. Пусть имеются два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ (1); \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \ (2).$$

Если начиная с некоторого номера выполняются неравенства $|a_n| \le |b_n|$, то из абсолютной сходимости ряда (2) следует абсолютная сходимость ряда (1) и из абсолютной расходимости ряда (1) следует абсолютная расходимость ряда (2).

Предельная форма признака сравнения. Пусть имеются два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ (1); \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \ (2).$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = K$, $K \ne 0$, $K \ne \infty$, то либо оба ряда абсолютно сходятся, либо оба ряда абсолютно расходятся.

Отметим, что, так же как и в несобственных интегралах 1-го рода, удобно в качестве эталонного ряда применять обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, который при $\alpha \le 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.

2.1.3. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

При любом $n \ge 1$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{n\cdot 2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и исходный ряд.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

Данный ряд можно исследовать как с помощью предельного признака сравнения, так и с помощью непредельного. По первому замечательному пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}:\frac{\pi}{2^n}\right)=1$, а так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ сходится, то и исходный ряд сходится.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Данный ряд можно исследовать с помощью предельного признака сравнения. По следствию из второго замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right):\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right):\frac{1}{n}\right)=1$, и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и исходный ряд расходится.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}$.

Находим порядок малости общего члена $\frac{1}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}$ ряда относительно $\frac{1}{n}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}:\frac{1}{n^\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}=\begin{cases}0,\text{если } \alpha<\frac{4}{3};\\ \frac{1}{2},\text{если } \alpha=\frac{4}{3};\\ \infty,\text{если } \alpha>\frac{4}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости $\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+3n^2}}$ относительно $\frac{1}{n}$ равен $\frac{4}{3}$, поэтому ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ в смысле сходимости ведут себя одинаково, а так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8n^4+3n^2}}$.

д) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}$.

Находим порядок малости общего члена $\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}$ ряда относительно $\frac{1}{n}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}=\begin{cases}0,\text{если } \alpha<\frac{4}{5};\\ \frac{1}{\sqrt[5]{3}},\text{если } \alpha=\frac{4}{5};\\ \infty,\text{если } \alpha>\frac{4}{5}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости $\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}$ относительно $\frac{1}{n}$ равен $\frac{4}{5}$, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$ в смысле сходимости ведут себя одинаково, и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n^4+2n}}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.4. Выяснить сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2^n}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n+i\sin n}{n^2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n\sqrt{n}}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^8+3n^2+5n+2}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^2}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)$; н) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\frac{1}{2^n}$; о) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$.

Интегральный признак (Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ удаётся подобрать монотонную действительнозначную функцию f действительного аргумента так, что $f(n)=|a_n|$. Тогда из сходимости интеграла $\int_1^{\infty}f(x)dx$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, а из расходимости интеграла $\int_1^{\infty}f(x)dx$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ не является абсолютно сходящимся.

2.1.5. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Для интеграла $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ имеем

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{A\to\infty}\left(\ln\ln x\right)\Big|_2^A=\lim_{A\to\infty}\left(\ln\ln A-\ln\ln 2\right)=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. Для интеграла $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ можем записать $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^{A}\dfrac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^A=$
$=\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\dfrac{1}{\ln A}+\dfrac{1}{\ln 2}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\dfrac{1}{\ln 2}$. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Для интеграла $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ получаем $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^{A}\dfrac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}}=2\lim\limits_{A\to\infty}\left(\sqrt{\ln x}\right)\Big|_2^A=$
$=\lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln A-\ln 2\right)=\infty$.

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$.

По признаку сравнения ряд сходится, так как он в смысле сходимости ведёт себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Докажем теперь сходимость ряда с помощью интегрального признака сходимости. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$. Для интеграла $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+4}$ имеем

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_1^A=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.6. Выяснить сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n+1}}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^6+9}$.

Признак Даламбера в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge q>1$, то ряд расходится, так как если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ge q>1$, то предел модуля общего члена ряда не равен нулю, поэтому предел общего члена ряда либо не равен нулю, либо не существует и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Признак Даламбера в предельной форме. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q$, то при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, при $q>1$ ряд расходится (при $q>1$ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\ne 0$), при $q=1$ признак Даламбера ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся ряды, так и расходящиеся, для которых $q=1$.

2.1.7. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+3)^{n+1}} : \frac{n!}{(n+2)^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!(n+2)^n}{(n+3)^{n+1}n!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!(n+1)(n+2)^n}{(n+3)^{n+1}n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)^n}{(n+3)^{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{(n+3)}\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+3)}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n =$$

$$= 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Так как $e^{-1} < 1$, то ряд сходится.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left((n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) : \left(n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)+1}{2^{n+1}} : \frac{3n+1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)2^n}{2^{n+1}(3n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+3)^2}{3^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(4(n+1)+3)^2}{3^{n+1}} : \frac{(4n+3)^2}{3^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(4n+7)3^n}{3^{n+1}(4n+3)}\right) = \frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.8. Выяснить сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin\frac{1}{2^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{tg}\frac{1}{3^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\, n!}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$.

Радикальный признак Коши в непредельной форме. Если начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q > 1$, то ряд расходится, так как если $\sqrt[n]{|a_n|} \ge q > 1$, то предел модуля общего члена ряда не равен нулю, поэтому предел общего члена ряда либо не равен нулю, либо не существует и из-за нарушения необходимого признака сходимости ряд расходится.

Радикальный признак Коши в предельной форме. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $q > 1$ ряд расходится (при $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$), при $q = 1$ признак Коши ответа не даёт, то есть имеются как сходящиеся ряды, так и расходящиеся, для которых $q = 1$.

2.1.9. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2-i}{3}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2-i}{3}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2-i}{3}\right|=\left|\frac{2-i}{3}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Так как $\frac{\sqrt{5}}{3}<1$, то ряд сходится абсолютно.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2n+i}{4n}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+i}{4n}\right|=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2}<1$, то ряд сходится абсолютно.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

Так как $\frac{1}{e}<1$, то ряд сходится.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{2n+1}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n+1}\right|=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

д) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Применяя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Так как $0 < 1$, то ряд сходится.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.10. Выяснить сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+2}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+2i}{6}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{4}\right)^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{1}{n}$.

Признак Дирихле. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ с произвольными членами и пусть последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, а числовая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к нулю монотонно, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Следствием признака Дирихле является следующий признак.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$. Если начиная с некоторого номера $a_n \geq a_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

2.1.11. а) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}$.

Ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$. Исследуя его с помощью предельного признака сравнения и находя порядок малости относительно $\frac{1}{n}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sin\frac{\pi}{2n}:\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^{\alpha}}{2n}=\begin{cases}0,\text{если } \alpha<1;\\ \frac{\pi}{2},\text{если } \alpha=1;\\ \infty,\text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости относительно $\frac{1}{n}$ равен 1 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$ расходится, а следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}$ не является абсолютно сходящимся. Далее, так как $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}=0$ и стремление к нулю монотонно, потому что $\sin\frac{\pi}{2n}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$, то по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}$ сходится, а так как он не сходится абсолютно, то является условно сходящимся.

б) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{\pi}{2n}$.

Ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2n}$. Применяя предельный признак сравнения и находя порядок малости относительно $\frac{1}{n}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}:\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{4n^2}:\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n^{\alpha}}{4n^2}=\begin{cases}0, \text{если } \alpha<2;\\ \frac{\pi^2}{4}, \text{если } \alpha=2;\\ \infty, \text{если } \alpha>2.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости относительно $\frac{1}{n}$ равен 2 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ сходится, а следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ сходится абсолютно.

в) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Предел модуля общего члена ряда равен

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

Поэтому ряд расходится.

г) Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n$.

Ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n$. Исследуя его с помощью радикального признака Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2n+3}{3n+1}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, ряд из модулей сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.12. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2+1}{3n^2+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2+1}{3n^4+2n^2+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{in}}{\sqrt[4]{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{5n^4+3n}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2n}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin^4\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}^3\frac{1}{\sqrt{n}}$; о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$; п) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{\pi}{n}$;

р) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)$; с) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$.

2.2. Функциональные ряды

Выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ называется функциональным рядом, $u_n(z)$ – общим членом функционального ряда. Будем обозначать через $S_n(z)$ частичную сумму ряда, через $S(z)$ сумму ряда.

Так как при каждом фиксированном z функциональный ряд является числовым, то для исследования сходимости функциональных рядов применяются признаки сходимости числовых рядов.

Множество тех z, в которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Множество тех z, в которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ абсолютно сходится, называется областью абсолютной сходимости функционального ряда. Обычно искать область абсолютной сходимости проще.

Кроме обычной сходимости функциональных рядов, рассматривают ещё равномерную и равномерную внутри области сходимости.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к своей сумме $S(z)$ в области D, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, единый для всех z из области D, такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|S_n(z) - S(z)\right| < \varepsilon$ сразу для всех z из области D.

Говорят, что ряд сходится равномерно внутри области D, если он сходится равномерно на каждом ограниченном замкнутом подмножестве из D.

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, или, что то же самое, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $\left|a_n\right| \le \left|b_n\right|$.

Теорема 2.2.1 (Вейерштрасс). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ в области D существует мажорирующий его абсолютно сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в области D равномерно.

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно интегрировать почленно в области D, если для любой кривой L, лежащей в области D, выполняется соотношение $\int\limits_L \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_L u_n(z) dz$.

Теорема 2.2.2. Если ряд сходится равномерно внутри области D, а функции $u_n(z)$ и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ интегрируемы на кривой L, лежащей в области D, то ряд можно интегрировать почленно.

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно дифференцировать почленно в области D, если для всех z из области D выполняется соотношение $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$.

Теорема 2.2.3. Если ряд сходится равномерно внутри области D и функции $u_n(z)$ голоморфные (аналитические) в области D, то сумма ряда есть функция аналитическая и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

Заметим, что для функций действительного переменного дифференцируемость функции не влечёт её аналитичность. Для рядов, состоящих из функций действительного переменного, имеет место следующий результат о почленной дифференцируемости ряда.

Теорема 2.2.4. Если функции $u_n(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно внутри этого интервала, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно дифференцировать почленно, то есть имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, или, что то же самое, производная суммы исходного ряда равна сумме ряда из производных.

2.2.1. а) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Найдём область абсолютной сходимости ряда. Используя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{z^n}{n!}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^n z n!}{n!(n+1)z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{(n+1)}.$$

Этот предел равен нулю при каждом фиксированном z на комплексной плоскости. Таким образом, ряд сходится абсолютно, а следовательно, сходится на всей комплексной плоскости. В данном случае область абсолютной сходимости совпадает с областью сходимости.

б) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)z^n z}{n!z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|z|(n+1).$$

Этот предел равен ∞ при каждом фиксированном $z \neq 0$ на комплексной плоскости. Таким образом, ряд не сходится ни в одной отличной от нуля точке комплексной плоскости. При $z = 0$ получаем ряд, состоящий из нулей, и поэтому предел частичных сумм равен нулю. Окончательно получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$ сходится только в точке $z = 0$.

в) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$.

Найдём область абсолютной сходимости ряда. Используя радикальный признак Коши, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{z}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3}{z}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{|z|}=\frac{3}{|z|}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{3}{|z|}<1$ и расходится при $\frac{3}{|z|}>1$, или, что то же самое, сходится при $|z|>3$ и расходится при $|z|<3$. При $|z|=3$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается так же) выяснить сходимость этого ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z|=3$. Так как $|z|=3$, то $z=3e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{3e^{i\varphi}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$. Так как $\left|e^{-in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признака сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$ сходится при $|z|>3$ и расходится при $|z|\le 3$.

г) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{3^n}$.

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{2(n+1)+1}}{3^{n+1}}:\frac{z^{2n+1}}{3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2}{3}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^2}{3}=\frac{|z|^2}{3}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{|z|^2}{3}<1$ и расходится при $\frac{|z|^2}{3}>1$, или, что то же самое, сходится при $|z|<\sqrt{3}$ и расходится при $|z|>\sqrt{3}$. При $|z|=\sqrt{3}$ ни с помощью признака Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается так же, как и в предыдущем примере) выяснить сходимость этого ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $|z|=\sqrt{3}$. Так как $|z|=\sqrt{3}$, то $z=\sqrt{3}e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}e^{i\varphi}\right)^{2n+1}}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{3}e^{i(2n+1)\varphi}$. Так как $\left|e^{i(2n+1)\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признака сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{3}e^{i(2n+1)\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{3^n}$ сходится при $|z|<\sqrt{3}$ и расходится при $|z|\ge\sqrt{3}$.

д) Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{z+1}\right)^n\right)$.

Исходный ряд сходится в области, в которой сходится каждый из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$. Тогда их сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{z+1}\right)^n\right)$ сходится. Применяя к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$ признак Коши, находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z}{5}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z}{5}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{5}=\frac{|z|}{5}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$ сходится в области $|z|<5$ и расходится в области $|z|>5$. Исследуя при $|z|=5$ (на границе областей), получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5e^{i\varphi}}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\varphi}$. Так как $\left|e^{in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признака сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$ сходится при $|z|<5$ и расходится при $|z|\geq 5$.

Аналогично, применяя к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$ признак Коши, находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{z+1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{z+1}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|z+1|}=\frac{1}{|z+1|},$$

из чего заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$ сходится в области $|z+1|>1$ и расходится при $|z+1|<1$. Исследуя при $|z+1|=1$ (на границе областей), получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{i\varphi}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$. Так как $\left|e^{-in\varphi}\right|=1$, то в силу нарушения необходимого признака сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$ сходится при $|z+1|>1$ и расходится при $|z+1|\leq 1$. Поэтому ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{z}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{z+1}\right)^n\right)$ сходится в пересечении (общей части) областей $|z|<5$ и $|z+1|>1$.

2.2.2. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^n}$ сходится равномерно внутри области сходимости.

Нетрудно доказать, что данный ряд сходится в области $|z|<3$ (например, с помощью признака Даламбера). Возьмём $|z|\le 3-\delta$, где $3>\delta>0$ – некоторое число. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^{n+3}}{(n+1)3^n}$, с одной стороны, является мажорирующим для исходного в области $|z|\le 3-\delta$, с другой стороны, он сходится, так как по признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3-\delta)^{n+4}}{(n+2)3^{n+1}}:\frac{(3-\delta)^{n+3}}{(n+1)3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3-\delta)}{(n+2)3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3-\delta}{3}=\frac{3-\delta}{3}.$$

Так как $\frac{3-\delta}{3}<1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^{n+3}}{(n+1)3^n}$ сходится. По теореме Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на множестве $|z|\le 3-\delta$. Так как любое замкнутое множество из круга $|z|<3$ может быть заключено в замкнутый круг $|z|\le 3-\delta$ при некотором $3>\delta>0$, то исходный ряд сходится равномерно внутри круга $|z|<3$.

2.2.3. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ можно интегрировать почленно.

Так же как и в предыдущем примере, показывается, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^n}{3^n}$ является сходящимся числовым рядом. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^n}{3^n}$ мажорирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ в области $|z|\le 3-\delta$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ сходится равномерно внутри области $|z|<3$ и поэтому его можно интегрировать почленно по любой кривой, лежащей внутри круга $|z|<3$.

2.2.4 Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}$ можно дифференцировать почленно.

Так же как и в предыдущих примерах, показывается, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^{n+1}}{3^n}$ является сходящимся числовым рядом. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-\delta)^{n+1}}{3^n}$ мажорирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}$ в области $|z|\le 3-\delta$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}$ сходится равномерно внутри области $|z|<3$, поэтому его можно дифференцировать почленно внутри круга $|z|<3$.

2.2.5. а) Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^n}$.

Вынося z^2 за знак суммы, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^n}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}$ получен интегрированием членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$, так как $\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\int_0^z\frac{z^n}{3^n}dz$, и поэтому можем записать $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{z^n}{3^n}dz$. В задаче 2.2.3 показано, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ сходится равномерно внутри круга $|z|<3$. И так как его члены $\frac{z^n}{3^n}$ есть функции голоморфные (аналитические) на всей комплексной плоскости, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ можно интегрировать почленно. Далее, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем прогрессии $\frac{z}{3}$. При $|z|<3$ знаменатель прогрессии по модулю меньше единицы, следовательно, при $|z|<3$ получаем $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=1:\left(1-\frac{z}{3}\right)=1:\frac{3-z}{3}=\frac{3}{3-z}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{z^n}{3^n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\int_0^z\frac{3}{3-z}dz=-3\ln(3-z)+3\ln 3.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^n}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{z^n}{3^n}dz=$$

$$=z^2(-3\ln(3-z)+3\ln 3).$$

б) Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+3}}{3^n}$.

Для данного ряда можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+3}}{3^n}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^n}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{3^n}\right)'.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}$ состоит из голоморфных (аналитических) функций $\frac{z^{n+1}}{3^n}$, а так как он внутри области $|z|<3$ сходится равномерно, то его можно дифференцировать почленно, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^{n+3}}{3^n}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{3^n}\right)'=z^3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}\right)'=z^3\left(\frac{z}{1-\frac{z}{3}}\right)'=$$

$$=z^3\left(\frac{3z}{3-z}\right)'=z^3\frac{9}{(3-z)^2}=\frac{9z^3}{(3-z)^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.2.6. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{3^n}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n(z+1)^n}{(n+1)(n+2)}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+2i)^n}{n2^n}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{3^n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z+1-i)^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-1+i)^n}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n$;

н) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n$; о) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{3n-2}}{5^n}$; п) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{5n-3}}{n^2 7^n}$.

2.2.7. Доказать, что ряд сходится равномерно внутри области сходимости: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+3}}{(2n+1)5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2-i)^n}{7^n(2n-1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{(z+1-2i)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-\sqrt{3}i)^n}{5^n(n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z+\sqrt{3}-i)^n}$.

2.2.8. Доказать, что ряд можно интегрировать почленно внутри области сходимости: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+\sqrt{3}-i)^n}{8^n(2n-1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)3^n}{(z+1-\sqrt{2}i)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2-\sqrt{3}i)^n}{10^n(n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}(n+2)}{(z+\sqrt{3}-2i)^n}$.

2.2.9. Доказать, что ряд можно дифференцировать почленно внутри области сходимости: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3-i)^n}{6^n(3n-1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n-1}}{(z+2-2i)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+2i)^n}{5^n(n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z-1+2i)^n}$.

2.2.10. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+3}}{(2n+1)3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+2i)^{5n+3}}{5n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)z^{4n+3}}{7^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+2i)^{2n+3}}{2n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+1)(z-1+i)^{5n+3}}{3^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)(z+i)^{3n+3}}{5^n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n-1}}{(z+2-2i)^n}$; з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)3^n}{z^{2n+3}}$.

2.3. Степенные ряды

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ называется степенным. Так как этот ряд сдвигом начала координат в точку z_0 может быть преобразован к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то обычно последний и изучают. Имеет место следующий результат.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке z_1, то он сходится, и притом абсолютно, в любой точке z, для которой $|z|<|z_1|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_2, то он расходится и в любой точке z, для которой $|z|>|z_2|$.

Таким образом, степенной ряд имеет круг сходимости. Выражение для нахождения радиуса $R=\frac{1}{L}$ круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ получают с помощью признака Даламбера $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ или признака Коши $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Нетрудно показать, что степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, поэтому его можно интегрировать и дифференцировать внутри этого круга любое число раз.

2.3.1. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{(n+1)3^n}$.

Имеем $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)3^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=\frac{1}{3}$. Таким образом, радиус сходимости ряда $R=\frac{1}{L}=3$ и ряд сходится в круге $|z-2+i|<3$. Для выяснения сходимости на границе $|z-2+i|=3$ круга сходимости нужны дополнительные исследования.

2.3.2. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n z^n}{(n+1)!}$.

Имеем

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}:\frac{n^n}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!n^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{(n+2)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=e.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{e}$ и ряд сходится в круге $|z|<\frac{1}{e}$. Для выяснения сходимости на границе $|z|=\frac{1}{e}$ круга сходимости нужны дополнительные исследования.

2.3.3. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{5^n}$.

В данном случае воспользоваться приведенными выше формулами для нахождения радиуса круга сходимости нельзя, так как степени z идут не подряд. Это так называемый ряд с пропусками. Для выяснения области сходимости лучше всего воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши непосредственно. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{3(n+1)+1}}{5^{n+1}}:\frac{z^{3n+1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^3}{5}\right|=\frac{|z|^3}{5}.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при $\frac{|z|^3}{5}<1$ и расходится при $\frac{|z|^3}{5}>1$, или, что то же самое, сходится при $|z|<\sqrt[3]{5}$ и расходится при $|z|>\sqrt[3]{5}$. При $|z|=\sqrt[3]{5}$ ни с помощью признака

Коши, ни с помощью признака Даламбера (показывается так же) выяснить сходимость этого ряда не удаётся. Рассмотрим ряд при $\left|z\right| = \sqrt[3]{5}$. Так как $\left|z\right| = \sqrt[3]{5}$, то $z = \sqrt[3]{5}e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Подставляя в ряд, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{5}e^{i\varphi}\right)^{3n+1}}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{5}e^{i(2n+1)\varphi}$. Так как $\left|e^{i(2n+1)\varphi}\right| = 1$, то в силу нарушения необходимого признака сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{3}e^{i(2n+1)\varphi}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{3n+1}}{5^n}$ сходится при $\left|z\right| < \sqrt[3]{5}$ и расходится при $\left|z\right| \ge \sqrt[3]{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.3.4. Найти радиус круга сходимости и круг сходимости степенного ряда: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!(z-1-i)^n}{(n+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{5n-3}}{n^2 7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n9^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+3)!z^n}{(n+2)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{4n-3}}{n^3 5^n}$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3-2i)^n}{\sqrt{n+2}\cdot 9^n}$.

2.4. Ряды Тейлора и Лорана

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$, где интегрирование ведётся по любому замкнутому контуру, внутри себя содержащему точку z_0 и не содержащему точек не аналитичности функции $f(z)$, называется рядом Тейлора.

Степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$, называется рядом Лорана. Слагаемое $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а слагаемое $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ называется главной частью ряда Лорана.

Степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, сходящийся в кольце $|z| > R$, называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. Слагаемое $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ называют правильной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки, а слагаемое $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ называют главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.

Теорема Тейлора. Всякая голоморфная (аналитическая) в круге $|z-z_0| < R$ функция есть сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz,$$

где интегрирование ведётся по любому замкнутому контуру, содержащему точку z_0 внутри себя и целиком лежащему в круге $|z-z_0| < R$. Это представление единственно в том смысле, что если мы получили разложение функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, то это обязательно ряд Тейлора.

Ряд Тейлора разложения функции по степеням z, то есть при $z_0 = 0$, называется рядом Маклорена. Разложение часто используемых функций в ряд Маклорена давно получено и представлено ниже.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n;$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n};$$

$$\mathrm{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

Теорема Лорана. Всякая голоморфная (аналитическая) в кольце $r < |z-z_0| < R$ функция есть сумма степенного ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} dz,$$

где интегрирование ведется по любому контуру, содержащему точку z_0 внутри себя и целиком лежащему в кольце $r<|z-z_0|<R$. Это представление единственно в том смысле, что если мы получили разложение функции в степенной ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, то это обязательно ряд Лорана.

Кольцо $r<|z-z_0|<R$ может включать случаи $r=0$ и $R=\infty$, то есть иметь либо вид $0<|z-z_0|<R$ ($r=0$), либо вид $|z-z_0|>r$ ($R=\infty$).

2.4.1. Разложить в ряд $\sin z^3$ в окрестности точки $z=0$.

Пользуясь разложением $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, можем записать $\sin z^3=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\left(z^3\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}$. По теореме единственности это ряд Тейлора для функции $\sin z^3$.

2.4.2. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{(2n+1)5^n}$. Найти $f'''(3)$.

Коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-3)$ вычисляются по формуле $c_n=\dfrac{f^{(n)}(3)}{n!}$. Поэтому $f'''(3)=3!\cdot c_3$. Так как $c_3=\dfrac{1}{(2\cdot3+1)5^3}=\dfrac{1}{7\cdot125}=\dfrac{1}{875}$, то $f'''(3)=\dfrac{3!}{875}=\dfrac{6}{875}$.

2.4.3. Найти $f^{(125)}(0)$ и $f^{(126)}(0)$, если $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$.

Так как $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2n}$, то четные коэффициенты $c_{2n}=1$, а нечётные $c_{2n+1}=0$. Поэтому

$$f^{(125)}(0)=125!\cdot c_{125}=125!\cdot 0=0,$$

$$f^{(126)}(0)=126!\cdot c_{126}=126!\cdot 1=126!$$

2.4.4. Разложить по степеням $\left(z-2\right)$ функцию $f(z)=z^2+5z+3$.

Имеем $f(2)=2^2+5\cdot 2+3=17$. Вычисляя производные, получаем $f'(z)=2z+5$, $f''(z)=(f'(z))'=2$, остальные производные равны нулю. Далее, $f'(2)=2\cdot 2+5=9$, $f''(2)=2$. И окончательно имеем $f(z)=z^2+5z+3=17+9(z-2)+(z-2)^2$. Заметим, что данный результат можно было получить, выделяя степени $\left(z-2\right)$ в исходной функции, что является трудным при несколько большей степени полинома.

2.4.5. Разложить по положительным и отрицательным степеням $\left(z+2\right)$ функции $\dfrac{1}{z-3}$ и $\dfrac{1}{\left(z-3\right)^2}$.

Можем записать $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{z+2-2-3}=\dfrac{1}{(z+2)-5}$. Далее, для разложения по положительным степеням $\left(z+2\right)$ имеем

$$\frac{1}{(z+2)-5}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{5}}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{5}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{5^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $\left|\dfrac{z+2}{5}\right|<1$, или, что то же самое, при $\left|z+2\right|<5$.

Аналогично для разложения по отрицательным степеням ($z+2$) получаем

$$\frac{1}{(z+2)-5}=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{5}{z+2}}=\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z+2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{(z+2)^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $\left|\frac{5}{z+2}\right|<1$, или, что то же самое, при $|z+2|>5$.

Далее, так как $\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'$, то можем записать

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{5^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+2)^{n-1}}{5^{n+1}}$$

для разложения по положительным степеням ($z+2$) и

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{(z+2)^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{(z+2)^{n+2}}$$

для разложения по отрицательным степеням $(z+2)$.

2.4.6. а) Функцию $f(z)=\frac{1}{z}$ разложить по степеням z.

По теореме единственности разложения функции в ряд Лорана данная запись и есть разложение функции по степеням z.

б) Функцию $f(z)=\frac{1}{z}$ разложить по положительным и отрицательным степеням $(z-3)$.

Можем записать $\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-3)+3}$. Далее, для разложения по положительным степеням $(z-3)$ имеем

$$\frac{1}{(z-3)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{3^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $\left|\frac{z-3}{3}\right|<1$, или, что то же самое, при $|z-3|<3$.

Аналогично для разложения по отрицательным степеням $(z-3)$ получаем

$$\frac{1}{(z-3)+3}=\frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z-3}}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z-3}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-3)^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $\left|\frac{3}{z-3}\right|<1$, или, что то же самое, при $|z-3|>3$.

2.4.7. а) Функцию $\frac{1}{z(z-3)}$ разложить по степеням z.

Первый сомножитель $\frac{1}{z}$ по степеням z уже разложен. Осталось разложить по степеням z второй сомножитель $\frac{1}{z-3}$.

Для разложения по положительным степеням z имеем

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $|z|<3$, то есть полученный ряд сходится в области $|z|<3$. Таким образом, для исходной функции получаем разложение

$$\frac{1}{z(z-3)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{3z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n+1}},$$

справедливое в области $0<|z|<3$.

Для разложения сомножителя $\dfrac{1}{z-3}$ по отрицательным степеням z получаем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{z^{n+1}}.$$

Это разложение справедливо при $|z|>3$. Поэтому разложение исходной функции по степеням z в области $|z|>3$ имеет вид

$$\frac{1}{z(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{z^{n+2}}.$$

б) Функцию $\dfrac{1}{z(z-3)}$ разложить по степеням $(z-3)$.

Задача решается аналогично предыдущей, только по степеням $(z-3)$ раскладываем множитель $\dfrac{1}{z}$, а множитель $\dfrac{1}{z-3}$ не беспокоим. Разложение $\dfrac{1}{z}$ по степеням $(z-3)$ выполнено в задаче 2.4.6. Объединить результаты предоставляется читателю.

в) Функцию $\dfrac{1}{z(z-3)}$ разложить по степеням $(z-2)$.

Раскладывая рациональную дробь $\dfrac{1}{z(z-3)}$ на сумму двух простейших, получаем $\dfrac{1}{z(z-3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z}\right)$.

Первое слагаемое раскладывается по степеням $(z-2)$ следующим образом. Так как $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{(z-2)-1}$, то разложение по положительным степеням $(z-2)$ имеет вид

$$\frac{1}{z-3}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{n} \qquad (1)$$

и справедливо при $\left|z-2\right|<1$. Разложение по отрицательным степеням $\left(z-2\right)$ имеет вид

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+1}} \qquad (2)$$

и справедливо при $\left|z-2\right|>1$.

Аналогично для слагаемого $\frac{1}{z}$ можем записать $\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{2+(z-2)}$. Поэтому разложение $\frac{1}{z}$ по положительным степеням $\left(z-2\right)$ имеет вид

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \qquad (3)$$

и справедливо в области $\left|z-2\right|<2$, а разложение по отрицательным степеням $\left(z-2\right)$ имеет вид

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}} \qquad (4)$$

и справедливо в области $\left|z-2\right|>2$. Объединяя выражения (1) и (3), получаем разложение

$$\frac{1}{z(z-3)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}},$$

справедливое в области $\left|z-2\right|<1$. Объединяя выражения (2) и (3), получаем разложение

$$\frac{1}{z(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}},$$

справедливое в области $1<\left|z-2\right|<2$. Объединяя выражения (2) и (4), получаем разложение

$$\frac{1}{z(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n(-1)^n}{(z-2)^{n+1}},$$

справедливое в области $|z-2|>2$. Выражения (1) и (4) объединить нельзя, так как области сходимости соответствующих рядов не имеют общих точек.

2.4.8. а) Функцию e^{z-3} разложить по степеням $(z-3)$.

Имеем $e^{z-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n!}$.

б) Функцию e^{z-3} разложить по степеням z.

Имеем $e^{z-3}=e^{-3}e^{z}=e^{-3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

2.4.9. Функцию $(1+z^3)\sin\frac{1}{z}$ разложить по степеням z.

Разложение $\sin\frac{1}{z}$ по степеням z имеет вид

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}.$$

Поэтому можем записать

$$(1+z^3)\sin\frac{1}{z}=(1+z^3)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+z^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^3}{(2n+1)!z^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+z^2-\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n-2}}.$$

Данное разложение справедливо в области $|z|>0$, то есть представляет разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. Можно попытаться записать ответ в виде одной суммы, но мы этого делать не будем.

Задачи для самостоятельного решения

2.4.10. Разложить в ряд $\cos z^2$ в окрестности точки $z=0$.

2.4.11. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-5)^n}{(3n+1)3^n}$. Найти $f^{(4)}(5)$.

2.4.12. Найти $f^{(7)}(0)$, $f^{(8)}(0)$ и $f^{(9)}(0)$ для функции $f(z)=\frac{1}{1-z^3}$.

2.4.13. Разложить по положительным и отрицательным степеням $(z-3)$ функции $\frac{1}{z-5}$ и $\frac{1}{(z-5)^2}$.

2.4.14. Разложить по степеням $(z+2)$ функцию z^2+7z+9.

2.4.15. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $z^5-6z^4+8z^3-3z^2+9z-7$.

2.4.16. Разложить по степеням $(z-1)$ функцию $z^5-2z^4+3z^3-3z^2+5z-17$.

2.4.17. а) Функцию $\frac{1}{z-3}$ разложить по степеням $(z-3)$.

б) Функцию $\frac{1}{z-3}$ разложить по положительным и отрицательным степеням $(z+3)$.

2.4.18. 1) Функцию $\frac{1}{z-3}$ разложить в областях: а) $|z|<3$, б) $|z|>3$, в) $|z-1|<2$.

2) Функцию $\frac{1}{(z-3)^2}$ разложить в областях: а) $|z|<3$, б) $|z|>3$, в) $|z-1|<2$.

2.4.19. Функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ разложить: а) по степеням z; б) по степеням $(z-1)$.

2.4.20. Функцию $\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}$ разложить по степеням:

а) z, б) $(z-2)$, в) $(z+2)$.

2.4.21. Функцию $\frac{1}{z+1}$ разложить в областях: а) $|z-3|<4$, б) $|z-3|>4$, в) $|z-1|<2$.

2.4.22. Функцию $\frac{1}{(z+1)^3}$ разложить в областях: а) $|z-3|<4$, б) $|z-3|>4$, в) $|z-1|<2$.

2.4.23. Функцию $(z-i)\cos\frac{1}{(z-i)^2}$ разложить по степеням $(z-i)$.

2.4.24. Функцию $\sin\left(z-\frac{\pi}{3}\right)$ разложить:

а) по степеням $\left(z-\frac{\pi}{3}\right)$, б) по степеням z.

2.4.25. Функцию $\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$ разложить:

а) по степеням $\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$, б) по степеням z.

2.4.26. Функцию $e^{\frac{1}{z^3}}$ разложить в ряд по степеням z.

2.4.27. Функцию $(z+1)\sin\frac{1}{z+i}$ разложить по степеням $(z+i)$.

2.4.28. Функцию $(1+z)\cos\frac{1}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки (по степеням z).

2.4.29. Функцию e^{2z} разложить в ряд по степеням z.

2.5. Нули аналитических функций. Особые точки

Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$, если функция в этой точке обращается в нуль, то есть $f(z_0)=0$.

Точка z_0 называется нулём кратности k функции $f(z)$, если в этой точке обращаются в нуль сама функция и её первые $k-1$ производные, а производная порядка k нулю не равна, то есть $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0, f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

Теорема 2.5.1. Точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Тейлора по степеням $\left(z-z_0\right)$ имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Теорема 2.5.2. Точка z_0 является нулём кратности k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её можно записать в виде $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 функция, такая, что $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 называется особой точкой функции $f(z)$, если в этой точке нарушается аналитичность функции $f(z)$.

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, внутри которой нет других особых точек функции $f(z)$.

Точка z_0 называется регулярной или правильной точкой функции $f(z)$, если она не является особой точкой.

Классификация изолированных особых точек основана на поведении предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен, то точка z_0 называется устранимой особой точкой.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и равен бесконечности, то точка z_0 называется полюсом.

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует, то точка z_0 называется существенно особой точкой.

Теорема 2.5.3. Точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда z_0 является нулём функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \text{ если } z \neq z_0, \\ 0, \text{ если } z = z_0. \end{cases}$$

Эта теорема позволяет уточнить понятие полюса аналитической функции.

Точка z_0 называется полюсом порядка k функции $f(z)$, если эта точка есть нуль кратности k функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \text{ если } z \neq z_0, \\ 0, \text{ если } z = z_0. \end{cases}$$

Полюс порядка 1 обычно называют простым полюсом.

Теорема 2.5.4. Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её можно записать в виде $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\psi(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 функция, такая, что $\psi(z_0) \neq 0$.

Интересна связь между типом изолированной особой точки и видом разложения функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 (в кольце $0 < |z - z_0| < R$).

Теорема 2.5.5. Точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ не содержит главной части, то есть имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Теорема 2.5.6. Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана по степеням $\left(z-z_0\right)$ содержит в главной части k слагаемых, то есть имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-k}^{-1} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n .$$

Теорема 2.5.7. Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть её разложения в ряд Лорана по степеням $\left(z-z_0\right)$ содержит бесконечное число членов.

В бесконечно удалённой точке та же классификация особых точек. Связь с разложением в ряд Лорана та же с учётом специфики бесконечно удалённой точки. Приведём её.

Теорема 2.5.8. Бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки не содержит главной части, то есть имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n=\ldots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0 .$$

Теорема 2.5.9. Бесконечно удалённая точка является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда её разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки содержит в главной части k слагаемых, то есть имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{k} c_n z^n=\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n+\sum_{n=1}^{k} c_n z^n=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n+c_1 z+c_2 z^2+\ldots+c_k z^k .$$

Теорема 2.5.10. Бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки содержит бесконечное число членов.

2.5.1. а) Найти нули аналитической функции

$$f(z) = z^2 + 5z + 4$$

и указать их кратность.

Решая квадратное уравнение $z^2 + 5z + 4 = 0$, получаем

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

или $z_1 = -4$, $z_2 = -1$. Поэтому можем записать

$$z^2 + 5z + 4 = (z + 4)(z + 1).$$

Таким образом, кратность каждого корня равна 1.

б) Найти нули аналитической функции

$$f(z) = z^3 + 9z^2 + 27z + 27$$

и указать их кратность.

Вспоминая школу, получаем $z^3 + 9z^2 + 27z + 27 = (z + 3)^3$. Поэтому точка $z = -3$ есть нуль кратности 3.

в) Найти нули аналитической функции $f(z) = \sin^2 z$ и указать их кратность.

Решая уравнение $\sin^2 z = 0$, получаем $\sin z = 0$, решениями которого являются точки $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Так как

$$(\sin^2 z)' = 2\sin z \cos z = \sin 2z, \ (\sin^2 z)'' = (\sin 2z)' = 2\cos 2z,$$

$(\sin^2 z)'\Big|_{z=k\pi} = \sin 2k\pi = 0$, $(\sin^2 z)''\Big|_{z=k\pi} = 2\cos 2k\pi = 2$, то точки $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, для функции $f(z) = \sin^2 z$ есть нули кратности 2.

г) Найти нули аналитической функции $f(z) = z^3\left(z^2 + 4\right)^2$ и указать их кратность.

Точка $z = 0$ есть нуль кратности 3, точки $z = \pm 2i$ есть нули кратности 2.

д) Найти нули аналитической функции $f(z) = 1 - \cos z$ и указать их кратность.

Решая уравнение $1 - \cos z = 0$, получаем $\cos z = 1$, следовательно, $z = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Вычисляя производную, имеем $f'(z) = (1 - \cos z)' = \sin z$, $f''(z) = (\sin z)' = \cos z$.

Поэтому $f'(2k\pi)=\sin z\big|_{z=2k\pi}=0$, $f''(2k\pi)=\cos z\big|_{z=2k\pi}=1$. Таким образом, точки $z=2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, являются нулями кратности 2 для функции $f(z)=1-\cos z$.

2.5.2. а) Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+4}$ и указать их характер.

Числитель и знаменатель заданной функции есть функции голоморфные (аналитические), поэтому нарушение аналитичности может быть только в точках обращения в нуль знаменателя. Имеем $z^2+5z+4=(z+4)(z+1)$. Таким образом,

$$f(z)=\frac{1}{z^2+5z+4}=\frac{1}{(z+4)(z+5)}.$$

По теореме о виде функции в полюсе заключаем, что точки $z=-4$ и $z=-1$ есть простые полюсы функции $f(z)$.

б) Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$ и указать их характер.

Так как числитель и знаменатель голоморфные (аналитические) функции на всей комплексной плоскости, то особыми точками могут быть только нули знаменателя. Таковыми являются точки $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, которые для знаменателя есть нули кратности 2. Поэтому для функции $\sin^2 z=\dfrac{1}{f(z)}$ данные точки являются нулями кратности 2 и по определению полюсов точки $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, есть полюсы порядка два для функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

в) Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$ и указать их характер.

Аналогично предыдущему примеру особыми точками являются нули знаменателя $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ В отличие от предыдущего примера, одна из них, а именно точка $z=0$, является нулем числителя. Вблизи точки $z=0$ можем записать $\sin^2 z = z^2\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ есть аналитическая (голоморфная) в окрестности точки $z=0$ функция, такая, что $\varphi(0)\neq 0$. Следовательно, функция $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ вблизи точки $z=0$ есть голоморфная (аналитическая) функция, такая, что $\psi(0)\neq 0$. Поэтому можем записать $\dfrac{z}{\sin^2 z}=\dfrac{z}{z^2\varphi(z)}=\dfrac{z\psi(z)}{z^2}=\dfrac{\psi(z)}{z}$. Таким образом, точка $z=0$ есть полюс порядка 1 (простой полюс) для исходной функции. Остальные нули знаменателя, то есть точки $z=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, есть нули кратности 2 для функции $\sin^2 z=\dfrac{1}{f(z)}$ и по определению полюсов точки $z=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, являются полюсами порядка два для функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

г) Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin^2 z}$ и указать их характер.

Аналогично предыдущим двум примерам особыми точками являются нули знаменателя $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Так же как и в предыдущем примере, точка $z=0$ является нулем числителя, но, в отличие от него, нулём кратности 2. Вблизи точки $z=0$, как и раньше, можем записать $\sin^2 z=z^2\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ есть аналитическая (голоморфная) в окрестности точки $z=0$ функция, такая, что $\varphi(0)\neq 0$. Следовательно, функция $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ вблизи точки $z=0$ есть голоморфная (аналитическая) функция, такая, что $\psi(0)\neq 0$. Поэтому $\dfrac{z^2}{\sin^2 z}=\dfrac{z^2}{z^2\varphi(z)}=\dfrac{z^2\psi(z)}{z^2}=\psi(z)$. Таким образом, точка $z=0$ есть устранимая особая точка для исходной функции. Это можно было выяснить, найдя

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\sin^2 z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{z^2\varphi(z)}=\dfrac{1}{\varphi(0)}$. Так как $\varphi(0)\neq 0$, то этот предел конечен и по определению точка $z=0$ – устранимая особая точка. Остальные нули знаменателя, то есть точки $z=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, есть нули кратности 2 для функции $\sin^2 z=\dfrac{1}{f(z)}$ и по определению полюсов точки $z=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, являются полюсами порядка 2 для функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

д) Найти особые точки функции $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ и указать их характер.

Раскладывая в ряд по степеням z, получаем

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Из этого разложения видим, что главная часть ряда Лорана разложения функции в окрестности точки $z_0=0$ содержит бесконечное число членов, поэтому данная точка есть существенно особая. Этот же вывод можно сделать, если рассмотреть $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{1}{z}$. Легко доказывается, что этот предел не существует. Действительно, взяв две последовательности $z_k=\dfrac{1}{2k\pi}$ и $\varsigma_k=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$, получаем, что на первой из них $\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{1}{z_k}=0$, а на второй $\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{1}{\varsigma_k}=1$, что и доказывает отсутствие предела.

2.5.3. а) Выяснить характер точки $z_0=0$ (правильная, устранимая особая, полюс, существенно особая) для функции $f(z)=\dfrac{\ln(1+z^3)}{z}$.

Раскладывая числитель в ряд по степеням z, получаем

$$\ln(1+z^3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z^3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{3n}}{n}=z^3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{3n-3}}{n}.$$

Функция $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{3(n-1)}}{n}=1-\frac{z^3}{2}+\frac{z^6}{3}-...$ является аналитической в круге $|z|<1$ как сумма степенного ряда и $\varphi(0)=1$. Поэтому $f(z)=\frac{\ln(1+z^3)}{z}=\frac{z^3\varphi(z)}{z}=z^2\varphi(z)$. По теореме о виде аналитической (голоморфной) функции в окрестности нуля получаем, что точка $z_0=0$ является нулём кратности 2 для исходной функции.

б) Охарактеризовать точку $z_0=0$ для функции

$$f(z)=\frac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^3}.$$

Как и в предыдущем примере, раскладывая числитель в ряд по степеням z, получаем $\ln(1+z^3)=z^3\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая (голоморфная) в круге $|z|<1$ функция, такая, что $\varphi(0)=1$. Поэтому $f(z)=\frac{\ln(1+z^3)}{z^3}=\frac{z^3\varphi(z)}{z^3}=\varphi(z)$ и $z_0=0$ является устранимой особой точкой для исходной функции.

в) Охарактеризовать точки $z_0=0$ и $z_1=3$ для функции

$$f(z)=\frac{e^z-1}{(z-3)^3}.$$

Функция в точке $z_0=0$ является аналитической как отношение аналитических (голоморфных) функций и

$$f(0)=\frac{e^0-1}{(0-3)^3}=\frac{1-1}{-27}=0.$$

Так как

$f'(z)=\dfrac{e^z(z-3)^3-(e^z-1)3(z-3)^2}{(z-3)^6}$, то $f'(0)=\dfrac{-27}{27^2}=-\dfrac{1}{27}\neq 0$, и поэтому точка $z_0=0$ есть нуль кратности 1.

В точке $z_1=3$ числитель есть отличная от нуля аналитическая функция. Поэтому точка $z_1=3$ есть полюс порядка 3 для функции $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z-3)^3}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.5.4. Найти нули аналитических функций и указать их кратность: а) $f(z)=z^2+4$; б) $f(z)=\sin^3(z-2i)$; в) $f(z)=\operatorname{tg}^3 z$;

г) $f(z)=z^5\left(z^2+9\right)^3$; д) $f(z)=1-\cos^3 z$;

е) $f(z)=\left(z-2i\right)^5\left(z^2+4z+20\right)^3\left(z+4i\right)^4$; ж) $f(z)=\sin^{50}(z+i)$.

2.5.5. Найти особые точки и указать их характер:

а) $f(z)=(z-1)\cos\dfrac{1}{(z-1)^2}$; б) $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-2z+1}$; в) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

г) $f(z)=\dfrac{\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos z}$; д) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\dfrac{1}{2}}$;

е) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)^2\left(z+1\right)^2}$; ж) $f(z)=\dfrac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$;

з) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$; и) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-2i}$; к) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+3i}$;

л) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2+9}$; м) $f(z)=\operatorname{tg}^2 2z$; н) $f(z)=\dfrac{z}{\cos^2 z}$;

о) $f(z)=\cos\frac{1}{z}$; п) $f(z)=e^{\frac{1}{z^3}}$; р) $f(z)=e^{\frac{1}{z-4i}}$.

2.5.6. Охарактеризовать указанные точки для функций:

а) $f(z)=\frac{\sin z^3}{z}$, $z_0=0$; б) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\frac{\ln(1+z^2)}{(z-2)^5}$, $z_0=2, z_1=0$; г) $f(z)=e^z, z_0=2$.

2.6. Вычеты

Пусть z_0 – конечная точка комплексной плоскости.

Вычетом $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1}, то есть коэффициент при минус первой степени в разложении функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ (в кольце $0<|z-z_0|<R$).

Так как

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz,$$

где L – контур, охватывающий точку z_0 и не включающий в себя другие особые точки функции $f(z)$, то умея находить вычеты, можно попытаться с их помощью вычислять интегралы от функций комплексного переменного.

Зная разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ (в кольце $0<|z-z_0|<R$), всегда можно найти вычет. Имеются результаты, позволяющие находить вычеты, не зная разложения функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, в зависимости от вида особой точки. Для конечной точки имеем:

1) вычет в правильной точке равен нулю;
2) вычет в устранимой особой точке равен нулю;
3) вычет в простом полюсе вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z);$$

4) если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – голоморфные (аналитические) в окрестности z_0 функции, $\varphi(z_0)\neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 есть нуль кратности 1, то точка z_0 является простым полюсом для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и с помощью предыдущей формулы получаем, что вычет может быть вычислен по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)};$$

5) вычет в полюсе порядка k вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big);$$

6) в существенно особой точке вычет можно найти, зная разложение функции в ряд Лорана в проколотой окрестности конечной точки (в кольце $0<\left|z-z_0\right|<R$).

Рассмотрим теперь бесконечно удалённую точку.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке называется число $-c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при минус первой степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Вычет в бесконечно удаленной точке можно найти следующими способами:

1) с помощью разложения функции в ряд Лорана;
2) по формулам М.Р. Куваева:

а) в устранимой особой точке по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} z^2 f(z);$$

б) в полюсе порядка k по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{k+2}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}f(z)\right);$$

3) сведением к вычислению вычета в нуле путём замены $z=\dfrac{1}{w}$ по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{w=0}\left(f\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\frac{1}{w^2}\right).$$

2.6.1. а) Найти вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{\ln(1+z^3)}{z}$.

Точка $z=0$ есть устранимая особая точка для функции $\dfrac{\ln(1+z^3)}{z}$. Поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{\ln(1+z^3)}{z}=0$.

б) Найти вычеты $\operatorname*{res}\limits_{z=-2}\dfrac{z^3}{z^3+8}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=1+\sqrt{3}i}\dfrac{z^3}{z^3+8}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=1-\sqrt{3}i}\dfrac{z^3}{z^3+8}$.

Найдём нули знаменателя. Имеем $z^3=-8$. Тогда $z=\sqrt[3]{-8}=2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$, или $z_1=1+\sqrt{3}i$, $z_2=-2$, $z_3=1-\sqrt{3}i$. Поэтому

$$z^3+8=(z+2)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)=(z+2)(z^2-2z+4).$$

Так как z^3 в точках $z_1=1+\sqrt{3}i$, $z_2=-2$, $z_3=1-\sqrt{3}i$ в нуль не обращается, то эти точки являются простыми полюсами для функции $\dfrac{z^3}{z^3+8}$. В данном случае удобно считать вычеты как по первой формуле для вычета в простом полюсе, так и по второй. Получаем:

$$\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{z^3}{z^3+8}=\lim_{z\to-2}\frac{(z+2)z^3}{z^3+8}=\lim_{z\to-2}\frac{(z+2)z^3}{(z+2)(z^2-2z+4)}=$$

$$=\lim_{z\to-2}\frac{z^3}{z^2-2z+4}=\frac{-8}{4+4+4}=-\frac{2}{3};$$

$$\operatorname*{res}_{z=1-\sqrt{3}i}\frac{z^3}{z^3+8}=\left.\frac{z^3}{(z^3+8)'}\right|_{z=1-\sqrt{3}i}=\left.\frac{z^3}{3z^2}\right|_{z=1-\sqrt{3}i}=\left.\frac{z}{3}\right|_{z=1-\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{3};$$

$$\operatorname*{res}_{z=1+\sqrt{3}i}\frac{z^3}{z^3+8}=\left.\frac{z^3}{(z^3+8)'}\right|_{z=1+\sqrt{3}i}=\left.\frac{z^3}{3z^2}\right|_{z=1+\sqrt{3}i}=\left.\frac{z}{3}\right|_{z=1+\sqrt{3}i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{3}.$$

в) Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=3}\frac{e^z-1}{(z-3)^3}$.

Так как $z=3$ нуль знаменателя кратности 3, а числитель в этой точке в нуль не обращается, то данная точка есть полюс порядка 3 для функции $\frac{e^z-1}{(z-3)^3}$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=3}\frac{e^z-1}{(z-3)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 3}\Big((z-3)^3 f(z)\Big)''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 3}\Big(e^z-1\Big)''=\frac{e^3}{2}.$$

г) Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=0} z^2\sin\frac{1}{z}$.

Точка $z=0$ есть существенно особая точка для функции $z^2\sin\frac{1}{z}$. Раскладывая в ряд по степеням z, получаем

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\ldots\right)=z-\frac{1}{6z}+\ldots$$

Коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен $-\frac{1}{6}$, поэтому $\operatorname*{res}_{z=0} z^2\sin\frac{1}{z}=-\frac{1}{6}$.

д) Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^8}{z^3+4}$.

Раскладывая в ряд в окрестности бесконечно удалённой точки, получаем

$$\frac{z^8}{z^3+4}=\frac{z^8}{z^3\left(1+\frac{4}{z^3}\right)}=z^5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^3}\right)^n=z^5\left(1-\frac{4}{z^3}+\frac{4^2}{z^6}-\ldots\right)=$$

$$=z^5-4z^2+\frac{16}{z}-\ldots$$

Коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен 16, поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^8}{z^3+4}=-16$.

Задачи для самостоятельного решения

2.6.2. Найти вычеты: а) $\operatorname*{res}_{z=0} z^2\cos\frac{1}{z^3}$; б) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\ln(1+z^3)}{z^3}$;

в) $\operatorname*{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z^3}}$; г) $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 z}$; д) $\operatorname*{res}_{z=\frac{3\pi}{2}} \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 z}$; е) $\operatorname*{res}_{z=\sqrt{3}-i} \frac{z^5}{z^6+64}$;

ж) $\operatorname*{res}_{z=\sqrt{3}+i} \frac{z^5}{z^3+64}$; з) $\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^5}{z^3+5}$; и) $\operatorname*{res}_{z=2i} (z-2i)^2\sin\frac{1}{z-2i}$;

к) $\operatorname*{res}_{z=0} (z-1+i)^2\cos\frac{1}{z-1+i}$; л) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\ln(1+2z)}{z^3}$; м) $\operatorname*{res}_{z=3i} e^{\frac{1}{z-3i}}$;

н) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^3\ln\left(\frac{z+1}{z}\right)$; о) $\operatorname*{res}_{z=4i} \frac{e^{z-4i}-1}{(z-4i)^3}$; п) $\operatorname*{res}_{z=\pi} \frac{z-\pi}{\sin^2 z}$; р) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z-\pi}{\sin^2 z}$.

2.7. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Основные теоремы о вычетах.

Теорема 2.7.1. Пусть функция $f(z)$ голоморфная (аналитическая) внутри контура L за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих внутри этого контура, и не имеющая особых точек на контуре L. Тогда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\right).$$

Теорема 2.7.2. Пусть функция $f(z)$ голоморфная (аналитическая) во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда сумма вычетов во всех особых точках, включая и бесконечно удалённую точку, равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Эти теоремы и теорема Коши для многосвязной области позволяют вычислять интегралы по различным контурам.

2.7.1. а) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z+i|=2} \frac{3z-5}{z^2-4z+3}dz$.

Нулями знаменателя подынтегральной функции являются точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 3$. Так как числитель в этих точках в нуль не обращается, то они являются полюсами подынтегральной функции. Так как $|z_1 + i| = |1+i| = \sqrt{2} < 2$, а $|z_2 + i| = |3+i| = \sqrt{10} > 2$, то точка $z_1 = 1$ лежит внутри контура $|z+i| = 2$, а точка $z_2 = 3$ не лежит внутри контура $|z+i| = 2$. Поэтому

$$\int\limits_{|z+i|=2} \frac{3z-5}{z^2-4z+3}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} \frac{3z-5}{z^2-4z+3} = 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(3z-5)}{(z-1)(z-3)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{3z-5}{z-3} = 2\pi i .$$

б) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^{11}}{z^4+4}dz$.

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках $z = \sqrt[4]{-4}$. Имеем $|-4| = 4$, $\arg(-4) = \pi$, поэтому

$$z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 0,1,2,3,$$

или, что то же самое, $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = 1-i$. Все четыре точки лежат внутри контура $|z| = 2$. Поэтому проще найти вычет в бесконечно удалённой точке. Раскладывая в ряд в окрестности бесконечно удалённой точки, получаем

$$\frac{z^{11}}{z^4+4} = \frac{z^{11}}{z^4\left(1+\frac{4}{z^4}\right)} = z^7\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^4}\right)^n = z^7\left(1 - \frac{4}{z^4} + \frac{16}{z^8} - \ldots\right) =$$

$$= z^7 - 4z^3 + \frac{16}{z} - \ldots$$

Так как коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен 16, то $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^{11}}{z^4+1}=-16$, и поэтому

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^{11}}{z^4+1}dz=2\pi i\left(-\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^{11}}{z^4+1}\right)=2\pi i\cdot 16=32\pi i.$$

в) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-1|=1,5}\frac{z^{11}}{z^4+4}dz$.

Подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$, $z_3=-1-i$, $z_4=1-i$, которые являются нулями знаменателя и найдены в предыдущем примере. Внутри контура $|z-1|=1,5$ лежат точки $z_1=1+i$ и $z_4=1-i$. Найдём вычеты подынтегральной функции в этих точках. Имеем

$$\operatorname*{res}_{z=1+i}\frac{z^{11}}{z^4+4}=\left.\frac{z^{11}}{(z^4+4)'}\right|_{z=1+i}=\left.\frac{z^{11}}{4z^3}\right|_{z=1+i}=\left.\frac{z^8}{4}\right|_{z=1+i}=\frac{(1+i)^8}{4}=4,$$

так как $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=(2i)^2=-4$, $(1+i)^8=(-4)^2=16$.

Аналогично

$$\operatorname*{res}_{z=1-i}\frac{z^{11}}{z^4+4}=\left.\frac{z^{11}}{(z^4+4)'}\right|_{z=1-i}=\left.\frac{z^{11}}{4z^3}\right|_{z=1-i}=\left.\frac{z^8}{4}\right|_{z=1-i}=\frac{(1-i)^8}{4}=4,$$

так как $(1-i)^2=-2i$, $(1-i)^4=(-2i)^2=-4$, $(1+i)^8=(-4)^2=16$.

Поэтому $\int\limits_{|z-1|=1,5}\frac{z^{11}}{z^4+4}dz=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1+i}\frac{z^{11}}{z^4+4}+\operatorname*{res}_{z=1-i}\frac{z^{11}}{z^4+4}\right)=$
$=2\pi i\cdot(4+4)=16\pi i$.

г) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1}z^4\sin\frac{1}{z}dz$.

Точка $z=0$ является существенно особой для подынтегральной функции и лежит внутри контура $|z|=1$. Поэтому, раскладывая функцию $z^4 \sin\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<\infty$, получаем

$$z^4 \sin\frac{1}{z} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}} =$$

$$= z^4 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots \right).$$

Так как коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=0} \left(z^4 \sin\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

и

$$\int\limits_{|z|=1} z^4 \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \left(z^4 \sin\frac{1}{z} \right) = \frac{2\pi i}{120} = \frac{\pi i}{60}.$$

д) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{z}{\sin z} dz$.

Особыми точками подынтегральной функции могут быть только нули её знаменателя, то есть точки $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Из них внутри контура $|z|=1$ лежит только точка $z=0$. Эта точка является устранимой особой точкой для функции $\frac{z}{\sin z}$, поэтому $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z}{\sin z} = 0$. Таким образом, $\int\limits_{|z|=1} \frac{z}{\sin z} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0$.

Для несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ имеет место следующий результат.

Теорема 2.7.3. Если функция $f(z)$ голоморфна (аналитична) в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек, голоморфна (аналитична) на оси OX и $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, где $M > 0, \delta > 0$ – некоторые константы, то несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

где суммирование ведётся по всем особым точкам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости, то есть таким, что $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$.

2.7.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)}$.

Данная подынтегральная функция может иметь особые точки только в нулях знаменателя. Такими являются точки $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$, $x_3 = 1+2i$, $x_4 = 1-2i$ – нули кратности 1 (простые нули). Из них в верхней полуплоскости лежат точки $x_1 = 2i$ и $x_3 = 1+2i$. Так как числитель в этих точках в нуль не обращается, то $x_1 = 2i$ и $x_3 = 1+2i$ есть полюсы порядка 1 (простые полюсы). Поэтому имеем

$$\operatorname*{res}_{z=2i} \frac{z}{(z^2+4)(z^2-2z+5)} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)z}{(z^2+4)(z^2-2z+5)} =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)(z^2-2z+5)} = \left.\frac{z}{(z+2i)(z^2-2z+5)}\right|_{z=2i} =$$

$$= \frac{1}{2-8i} = \frac{1+4i}{34}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} \frac{z}{(z^2+4)(z^2-2z+5)} = \lim_{z\to 1+2i} \frac{(z-1-2i)z}{(z^2+4)(z^2-2z+5)} =$$

$$= \lim_{z\to 1+2i} \frac{z}{(z^2+4)(z-1+2i)} = \frac{(1+2i)}{((1+2i)^2+4)4i} = -\frac{2+9i}{68}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)} = 2\pi i\left(\frac{1+4i}{34} - \frac{2+9i}{68}\right) = 2\pi i \frac{-i}{68} = \frac{\pi}{34}.$$

2.7.3. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$.

Данная подынтегральная функция может иметь особые точки только в нулях знаменателя. Такими являются точки $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$, обе нули кратности 2. Из них в верхней полуплоскости лежит точка $x_1 = 2i$. Так как числитель в этой точке в нуль не обращается, то $x_1 = 2i$ есть полюс порядка 2. Поэтому имеем

$$\operatorname*{res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{(z-2i)^2 z^2}{(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+2i)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{2z(z+2i)^2 - z^2 \cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z(z+2i) - 2z^2}{(z+2i)^3} =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{4zi}{(z+2i)^3} = \left.\frac{4zi}{(z+2i)^3}\right|_{z=2i} = \frac{-8}{(4i)^3} = \frac{-8}{-64i} = \frac{-i}{8}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{-i}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Вычисление интегралов $\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ или интегралов $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, где $R(\cos t, \sin t)$ есть рациональная функция переменных $\cos t$ и $\sin t$, заменой $z = e^{it}$ сводится к вычислению интеграла $\int_{|z|=1} R_1(z)dz$, где $R_1(z)$ – другая рациональная функция переменной z. Действительно, если t пробегает полуинтервал $[0,2\pi)$ или полуинтервал $[-\pi,\pi)$, то точка z пробегает единичную окружность. Далее, по формулам Эйлера получаем

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Кроме того, $dz = ie^{it}dt$, или $dt = \frac{1}{i}e^{-it}dz = \frac{dz}{iz}$. Подставляя найденные выражения для $\cos t$, $\sin t$, dt в выражение $R(\cos t, \sin t)dt$, получаем новую рациональную функцию, но уже переменной z.

2.7.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(5+\cos x)^2}$.

Сделаем замену $z = e^{ix}$. Тогда $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ и поэтому

$$5+\cos x = 5+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+10z+1}{2z}.$$

Далее,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(5+\cos x)^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{4z^2dz}{iz\left(z^2+10z+1\right)^2} = -\int\limits_{|z|=1} \frac{4izdz}{\left(z^2+10z+1\right)^2}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются точки обращения в нуль знаменателя. Это происходит в точках

$$z_1 = -5-\sqrt{24} \text{ и } z_2 = -5+\sqrt{24}.$$

Так как $4<\sqrt{24}<5$, то $|z_1| = 5+\sqrt{24} > 9$, и поэтому точка $z_1 = -5-\sqrt{24}$ не лежит в круге $|z|=1$. Далее, так как $-1 < -5+\sqrt{24} < 0$, то $|z_2| = \left|-5+\sqrt{24}\right| < 1$, и точка $z_2 = -5+\sqrt{24}$ лежит в круге $|z|=1$. Поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(5+\cos x)^2} = -\int\limits_{|z|=1} \frac{4izdz}{\left(z^2+10z+1\right)^2} = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-5+\sqrt{24}} \frac{4iz}{\left(z^2+10z+1\right)^2}.$$

Точка $z_2 = -5 + \sqrt{24}$ есть нуль кратности 2 знаменателя, а следовательно, полюс порядка 2 подынтегральной функции. Далее имеем

$$\operatorname*{res}_{z=-5+\sqrt{24}} \frac{4iz}{\left(z^2+10z+1\right)^2} = \lim_{z\to-5+\sqrt{24}} \frac{d}{dz} \frac{\left(z+5-\sqrt{24}\right)^2 4iz}{\left(z^2+10z+1\right)^2} =$$

$$= \lim_{z\to-5+\sqrt{24}} \frac{d}{dz} \frac{4iz}{\left(z+5+\sqrt{24}\right)^2} =$$

$$= \lim_{z\to-5+\sqrt{24}} \frac{4i\left(z+5+\sqrt{24}\right)^2 - 4iz\cdot 2\left(z+5+\sqrt{24}\right)}{\left(z+5+\sqrt{24}\right)^4} =$$

$$= \lim_{z\to-5+\sqrt{24}} \frac{4i\left(z+5+\sqrt{24}\right) - 4iz\cdot 2}{\left(z+5+\sqrt{24}\right)^3} =$$

$$= \lim_{z\to-5+\sqrt{24}} \frac{-4zi+20i+4\sqrt{24}i}{\left(z+5+\sqrt{24}\right)^3} = \left.\frac{-4zi+20i+4\sqrt{24}i}{\left(z+5+\sqrt{24}\right)^3}\right|_{z=-5+\sqrt{24}} =$$

$$= \frac{-4\left(-5+\sqrt{24}\right)i+20i+4\sqrt{24}i}{\left(-5+\sqrt{24}+5+\sqrt{24}\right)^3} = \frac{40i}{24\sqrt{24}}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\left(5+\cos x\right)^2} = 2\pi i\cdot\frac{40i}{24\sqrt{24}} = \frac{-40}{12\sqrt{24}}\pi = -\frac{10}{3\sqrt{24}}\pi = -\frac{5}{3\sqrt{6}}\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.7.5. Вычислить интегралы: а) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^8}{z^3+8}dz$;

б) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{z^8}{z^4+16}dz$; в) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{z^2+2z+10}{z^2\left(z^3+8\right)}dz$; г) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz$;

д) $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \dfrac{z}{\sin z}dz$; е) $\oint\limits_{|z-1+i|=2,5} \dfrac{z^3+27}{\left(z^4-81\right)}dz$;

ж) $\oint\limits_{|z+4i|=3} \dfrac{2z-5}{z^2-4z+20}dz$; з) $\oint\limits_{|z|=1/2} (z^5+2z-3)\cos\dfrac{1}{z^2}dz$;

и) $\oint\limits_{|z|=1/2} \left(z^8+3z^4-2\right)\sin\dfrac{1}{z^3}dz$; к) $\oint\limits_{|z|=1} \left(z^3+z\right)\cos\dfrac{1}{z}dz$;

л) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^3dx}{\left(x^2+16\right)^2\left(x^2-8x+20\right)}$; м) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2dx}{\left(x^2+11\right)^2}$;

н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$; о) $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{3}+\sin x}$; п) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{dx}{\left(\sqrt{7}+\cos x\right)^2}$;

р) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{dx}{(8+\sin x)^2}$.

3. Ряды Фурье

Рассмотрим множество вещественнозначных функций, заданных на отрезке $[a,b]$ и интегрируемых вместе со своим квадратом, то есть таких, что существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Такими являются, например, все непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Положим для этих функций $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$. Эта операция обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому на множестве функций, интегрируемых вместе со своим квадратом, вводят скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{3.1}$$

Для комплекснозначных функций действительного переменного, интегрируемых со своим квадратом, скалярное произведение вводят по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{3.2}$$

Назовём две функции ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Семейство функций $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...$ назовём ортогональным, если каждые две функции из этого семейства ортогональны между собой.

Ортогональной системой функций является так называемая тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,..., \tag{3.3}$$

которая ортогональна на отрезке $[-l,l]$.

Частным случаем этой системы функций является система

$$1, \cos nx, \sin nx, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

ортогональная на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Конкретные ортогональные семейства функций, отличные от тригонометрической системы, можно найти в [4–8] и других книгах.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ – множество попарно ортогональных функций. Пусть, далее, функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \tag{3.5}$$

Это представление называется разложением функции в обобщённый ряд Фурье. Если ряд можно интегрировать почленно, то вычисляя скалярное произведение от левой и правой частей данного разложения, получаем коэффициенты этого разложения

$$a_k = \frac{\left(f(x), \varphi_k(x) \right)}{\left\| \varphi_k(x) \right\|^2}. \tag{3.6}$$

Применяя эти формулы к тригонометрической системе (3.3), получаем разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{3.7}$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{3.8}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \; n = 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

Преобразуем слагаемое $a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ в формуле (3.7). Имеем

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Положим

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}=A_n,\ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\cos\varphi_n,\ \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\sin\varphi_n.$$

С учётом этих обозначений имеем

$$a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=A_n\left(\cos\varphi_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=$$

$$=A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right).$$

Поэтому ряд (3.7) может быть записан в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right).$$

Функция $A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}-\varphi_n\right)$ является периодической с наименьшим периодом $\frac{2l}{n}$ и представляет собой гармоническое колебание. Поэтому разложение функций в ряд Фурье называют гармоническим анализом. Величина A_n называется амплитудой гармоники, $\frac{n\pi}{l}$ – частотой гармоники, φ_n – отклонением от начального положения.

Величины A_n, $n=1,2,...$, называют амплитудным спектром, $\frac{n\pi}{l}$ – частотным спектром, φ_n, $n=1,2,...$, – фазовым спектром.

Заметим, что, зная амплитудный, частотный и фазовый спектры, всегда можно восстановить исходную функцию, так как имеет место следующий результат.

Теорема Дирихле. Всякая кусочно-непрерывная и ограниченная на отрезке $[-l,l]$ функция (сигнал) $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье (3.7), который сходится к периодической с периодом $2l$ функции $S(x)$, заданной на числовой прямой и в точках отрезка $[-l, l]$ принимающей значения

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Для чётных функций коэффициенты (3.8), (3.9) разложения функции в ряд Фурье приобретают вид

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,...; \quad (3.10)$$

$$b_n = 0,\ n = 1,2,... \quad (3.11)$$

Аналогично для нечётных функций имеем

$$a_n = 0,\ n = 0,1,2,...; \quad (3.12)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{-l}^0 f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,... \quad (3.13)$$

Функции, заданные на половине периода, можно продолжить на другую половину периода любым образом. Продолжая чётным образом, получаем разложение по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (3.14)$$

коэффициенты которого находятся по формулам (3.10), (3.11).

Продолжая нечётным образом, получаем разложение по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (3.15)$$

коэффициенты которого находятся по формулам (3.12), (3.13).

Разложение (3.7) можно также записать в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \quad (3.16)$$

при этом коэффициенты находят по формулам

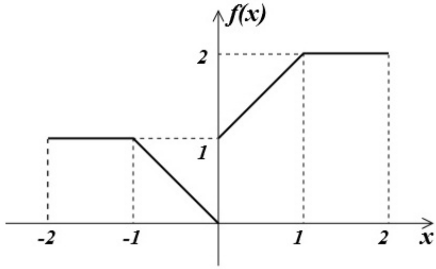
$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2,... \quad (3.17)$$

Разложение (3.16) называют рядом Фурье в комплексной форме.

Соответственно $\left|\frac{l}{\pi}c_n\right|$ есть амплитудный спектр, $-\arg\left(\frac{l}{\pi}c_n\right)$ – фазовый спектр, $\frac{n\pi}{l}$ – частотный спектр.

Интересна функция Хэвисайда, или, что то же самое, единичная функция $h(t)=\begin{cases}0, \text{ если } t<0,\\ 1, \text{ если } t\ge 0\end{cases}$. С помощью этой функции удобно записывается ступенька на отрезке $[t_1,t_2]$, задаваемая формулой $f(t)=\begin{cases}1, \text{ если } t\in[t_1,t_2]\\ 0, \text{ если } t\notin[t_1,t_2]\end{cases}$, так как $f(t)=h(t-t_1)-h(t-t_2)$.

3.1. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье. Найти амплитудный, фазовый и частотный спектры.



Записывая функцию в аналитической форме, получаем

$$f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<-1,\\ -x, & -1\le x<0,\\ x+1, & 0\le x<1,\\ 2, & 1\le x<2.\end{cases}$$

Найдем коэффициенты разложения данной функции в ряд Фурье. Имеем $a_0=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f\left(x\right)dx$. Так как подынтегральная функция положительна, то $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ есть площадь под кривой $f(x)$, которая легко вычисляется и равна 5. Поэтому $a_0 = \frac{5}{2}$.

Далее,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (x+1)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 2\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx .$$

Вычислим каждый интеграл в данном выражении отдельно. Для первого интеграла имеем

$$\int_{-2}^{-1} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{-\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{-2\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin(\pi n)\right) = -\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для вычисления второго интеграла $\int_{-1}^{0} (-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$ применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = -x$, $dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$. Тогда $du = -dx$, $dv = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. В результате получаем

$$\int_{-1}^{0} (-x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = -\frac{2x}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{0} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= 0 + \frac{2(-1)}{\pi n}\sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(0)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла также применим формулу интегрирования по частям. Положим $u=x+1$, $dv=\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx$. Тогда $du=dx$, $dv=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)$. В результате имеем

$$\int_0^1 (x+1)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=\frac{2(x+1)}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{2}{\pi n}\sin(0)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(0)=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}.$$

Для четвёртого слагаемого получаем

$$\int_1^2 2\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\left[\sin(\pi n)-\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]=-\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Окончательно для коэффициентов a_n имеем

$$a_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2 n^2}-\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right).$$

Вычислим теперь коэффициенты b_n. Имеем

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x+1)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для первого интеграла

$$\int_{-2}^{-1}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{-\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{-2\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos(\pi n)\right) = \frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

Для вычисления второго интеграла $\int_{-1}^{0}(-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$ применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = -x$, $dv = \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$. Тогда $du = -dx$, $dv = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. И для второго интеграла получаем

$$\int_{-1}^{0}(-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \frac{2x}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{0}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= 0 - \frac{2(-1)}{\pi n}\cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin(0) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Третий интеграл также вычисляем с применением формулы интегрирования по частям. Положим $u = x+1$, $dv = \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx$. Тогда $du = dx$, $dv = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. И для третьего интеграла получаем

$$\int_0^1 (x+1)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = -\frac{2(x+1)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n}\cos(0) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin(0) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} - \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Для четвёртого интеграла имеем

$$\int_1^2 2\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = -\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) = -\frac{4}{\pi n}\cos(\pi n) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n.$$

Окончательно для коэффициентов b_n имеем

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n\right) = \frac{1}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Амплитудный спектр

$$A_n=\sqrt{\frac{16}{\pi^4 n^4}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)^2+\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)^2},\ n=1,2,...$$

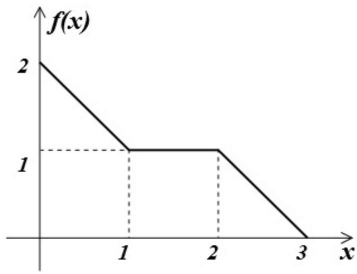
Фазовый спектр

$$\varphi_n=\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)}{\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi n\left(1-(-1)^n\right)}{4\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right)}\right),$$

$$n=1,2,...$$

Частотный спектр равен $\frac{\pi n}{2}$.

3.2. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по косинусам.



Продолжая функцию, заданную на половине периода четным образом, получаем разложение по косинусам $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$. Так как функция задана на отрезке $[0,3]$, то коэффициенты нужного нам разложения находятся по формулам $a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, $n=0,1,2,...$, $b_n=0$, $n=1,2,...$

Переходя к аналитическому виду, получаем

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & 0\le x\le 1, \\ 1, & 1\le x\le 2, \\ 3-x, & 2\le x\le 3. \end{cases}$$

Имеем $a_0=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx$. Так как подынтегральная функция положительна, то $\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx$ есть площадь под кривой $f\left(x\right)$, которая легко вычисляется и равна 3. Поэтому $a_0=2$.

Далее,

$$a_n=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1(2-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int\limits_1^2\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int\limits_2^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для вычисления первого интеграл $\int\limits_0^1(2-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$ применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u=2-x$, $dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du=-dx$, $v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$\int\limits_0^1(2-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=(2-x)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1+\frac{3}{n\pi}\int\limits_0^1\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=(2-x)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1-\frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}-0-\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right).$$

Для второго интеграла $\int\limits_1^2\cos\frac{n\pi x}{3}dx$ получаем

$$\int\limits_1^2\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_1^2=\frac{3}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла $\int\limits_2^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, так же как и для вычисления первого, применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u=3-x$, $dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du=-dx$, $v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}dx$. Тогда

$$\int\limits_2^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=(3-x)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3+\frac{3}{n\pi}\int\limits_2^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=(3-x)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3-\frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3=$$

$$=0-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Окончательно для коэффициентов a_n имеем

$$a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-$$

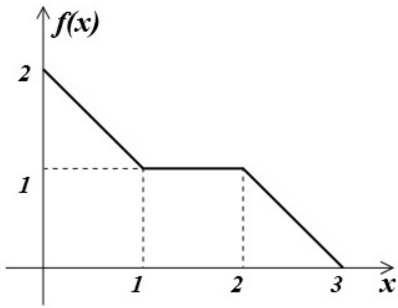
$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-\cos\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n+\cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}-(-1)^n+\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

3.3. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по синусам.



Продолжая функцию нечётным образом, получаем разложение по синусам $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\ldots,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots$$

Переходя к аналитическому виду, получаем

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Имеем

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\ .$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Для вычисления первого интеграл $\int_0^1 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx$ применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = 2-x$, $dv = \sin\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du = -dx$, $v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$\int_0^1 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = -(2-x)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= -(2-x)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{6}{n\pi} - \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} - 0\right) = \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{6}{n\pi}.$$

Для второго интеграла $\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}dx$ получаем

$$\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_1^2 = -\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Для вычисления третьего интеграла $\int_2^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx$, так же как и для вычисления первого, применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u=3-x$, $dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx$, имеем $du=-dx$, $v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}dx$. Тогда

$$\int_2^3(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=-(3-x)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3-\frac{3}{n\pi}\int_2^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-(3-x)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3-\frac{3\cdot 3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_2^3=$$

$$=0+\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\sin n\pi-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Окончательно для коэффициентов b_n имеем

$$b_n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{6}{n\pi}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3}+1\right)-\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3}+1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Для примеров 3.1, 3.2, 3.3 было бы весьма полезным получить коэффициенты Фурье с помощью какого-нибудь математического пакета и на одном графике поместить функцию и несколько частичных сумм ряда при $n=1,2,\ldots,k$.

3.4. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -1\le x<0, \\ -3, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье в комплексной форме. Найти амплитудный, фазовый и частотный спектры.

Найдём коэффициенты разложения. Так как $l=1$, то

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2e^{-in\pi x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(-3)e^{-in\pi x}dx=$$

$$=\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{3e^{-in\pi x}}{2in\pi}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{i}{n\pi}\left(\left(e^{0}-e^{in\pi}\right)-\frac{3}{2}\left(e^{-in\pi}-e^{0}\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{n\pi}\left(\left(1-e^{in\pi}\right)-\frac{3}{2}\left(e^{-in\pi}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{n\pi}\left(\left(1-(\cos n\pi+i\sin n\pi)\right)-\frac{3}{2}\left((\cos n\pi+i\sin n\pi)-1\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{n\pi}\left(\left(1-(-1)^n\right)-\frac{3}{2}\left((-1)^n-1\right)\right)=\frac{5i}{2n\pi}\left(1-(-1)^n\right),\ n=0,\pm1,\pm2,...$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{5i}{2n\pi}\left(1-(-1)^n\right)e^{in\pi x}\ .$$

Амплитудный спектр $\left|\dfrac{5\left(1-(-1)^n\right)}{2n\pi^2}\right|$.

Фазовый спектр

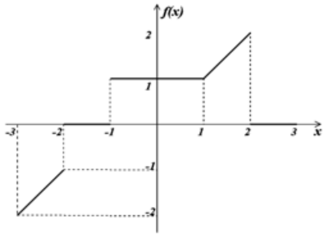
$$-\arg\left(\frac{5i}{2n\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\right)=\begin{cases} 0, & \text{если } n=2k, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } n=2k+1. \end{cases}$$

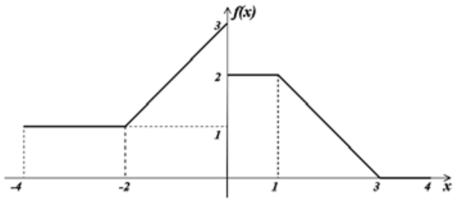
Частотный спектр равен $n\pi$.

Задачи для самостоятельного решения

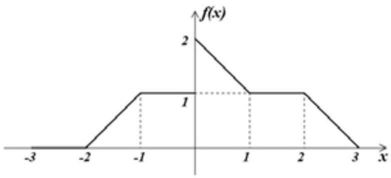
3.5. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье. Найти амплитудный, фазовый и частотный спектры.

а)   б)



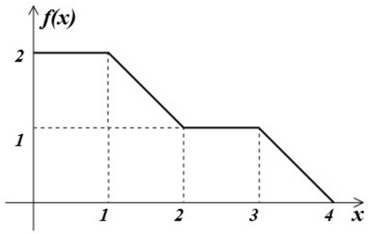


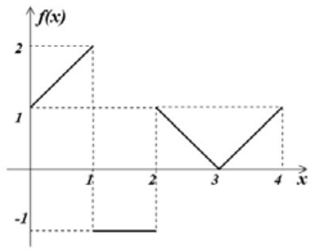
в)



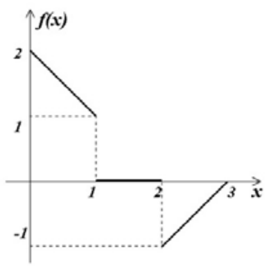
3.6. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по косинусам.

а)   б)



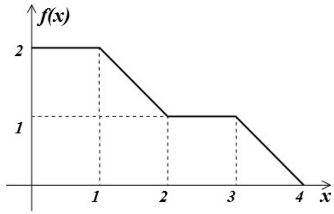


в)

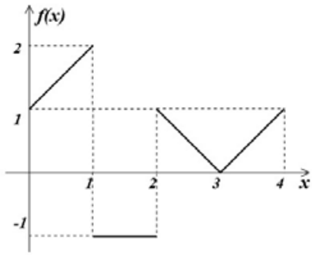


3.7. Разложить функцию, заданную графически, в ряд Фурье по синусам.

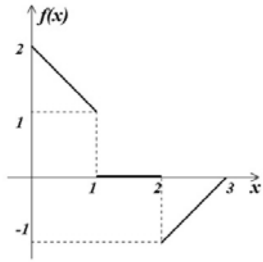
а)



б)



в)



3.8. Разложить функцию в ряд Фурье в комплексной форме, найти амплитудный, фазовый и частотный спектры:

а) $f(x) = 3x + 5,\ -2 \le x \le 2$;

б) $f(x) = e^{-3x},\ -3 \le x \le 3$;

в) $f(x) = x^2 - 16,\ |x| \le 4$;

г) $f(x) = -2x + 7,\ -\pi \le x \le \pi$;

д) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi \le x < 0, \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4. Интегральные преобразования

Пусть $K(x,s,t)$ – функция переменных x,s,t, которые могут быть многомерными. Пусть $G \subseteq R^n$ – некоторое множество, $U(G)$ – подмножество множества ограниченных на G функций. Оператор A, определённый на $U(G)$ и действующий по формуле $(Af)(s) = \int\limits_G K(x,s,f(x))dx$, назовём интегральным оператором или интегральным преобразованием. Функцию $K(x,s,t)$ назовём ядром интегрального преобразования. Интеграл $\int\limits_G K(x,s,f(x))dx$ есть интеграл, зависящий от параметра, и, следовательно, его свойства, такие как предельный переход, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость по параметру, определяются свойствами подынтегральной функции (ядра интегрального преобразования). Мы будем рассматривать частный случай ядра $K(x,s,t) = K(x,s)\cdot t$. Такие ядра называют мультипликативными. В случае этого ядра справедлива теорема.

Теорема. Если $U(G)$ – линейное пространство, то оператор $(Af)(s) = \int\limits_G K(x,s)f(x)dx$, определённый на этом пространстве, линеен, то есть

$$(A(f+g))(s) = (Af)(s) + (Ag)(s),\ (A(\alpha f))(s) = \alpha(Af)(s).$$

Доказательство очевидно из свойства линейности как собственных, так и несобственных интегралов.

Другие свойства интегральных преобразований зависят от ядра $K(x,s)$, размерности переменных x,s и области G.

Наиболее известны преобразования Фурье, синус-преобразование Фурье, косинус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

4.1. Преобразование Фурье, интеграл Фурье, синус- и косинус-преобразования Фурье

Множество G есть числовая прямая, то есть $G = R = (-\infty, +\infty)$, $U(G)$ – совокупность абсолютно интегрируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций.

Ядро преобразования Фурье $K(x,s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx}$. Преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi(s) = \Phi\big(f(x)\big)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx .$$

Функция $\Phi(s)$ называется также спектральной функцией или спектральной плотностью, $|\Phi(s)|$ называется амплитудным спектром, $-\arg\Phi(s)$ называется фазовым спектром.

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) e^{isx} ds .$$

Подставляя в выражение для обратного преобразования Фурье функцию $\Phi(s)$ (результат прямого преобразования Фурье), получаем формулу

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \right) e^{isx} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(x-t)} dt \right) ds,$$

которая называется интегралом Фурье. Это аналог ряда Фурье.

Имеет место следующий результат.

Теорема. Если $f(x)$ абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$, кусочно-непрерывная и ограниченная или кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке функция, то

$$\varphi(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(x-t)} dt \right) ds.$$

Заметим, что в точках непрерывности

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x).$$

Свойства преобразования Фурье

1. Линейность. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, $(\Phi g)(s)=\Psi(p)$, то

$$(\Phi(f+g))(s)=(\Phi f)(s)+(\Phi g)(s)=\Phi(s)+\Psi(s),$$

$$(\Phi(\alpha f))(s)=\alpha(\Phi f)(s)=\alpha\Phi(s),$$

или, что то же самое,

$$\big(\Phi(\alpha f+\beta g)\big)(s)=\alpha(\Phi f)(s)+\beta(\Phi g)(s)=\alpha\Phi(s)+\beta\Psi(s).$$

2. Подобие. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi\big(f(\alpha x)\big)(s)=\frac{1}{|\alpha|}\Phi\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

3. Запаздывание. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi\big(f(x-\tau)\big)(s)=e^{-is\tau}\Phi(s).$$

4. Дифференцирование функции. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и $f(x)$ бесконечно малая при $x\to\pm\infty$, то

$$\Phi\big(f'(x)\big)(s)=is\Phi\big(f(x)\big)(s).$$

5. Дифференцирование образа. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

$$\Phi'\big(f(x)\big)(s)=\Phi\big(-ixf(x)\big)(s).$$

6. Если $(\Phi f)(s)=\Phi(s)$, то

а) $\Phi\big(f(x)\cos\alpha x\big)(s)=\dfrac{1}{2}\big(\Phi(s-\alpha)+\Phi(s+\alpha)\big);$

б) $\Phi\big(f(x)\sin\alpha x\big)(s)=\dfrac{1}{2i}\big(\Phi(s-\alpha)-\Phi(s+\alpha)\big).$

Часто рассматривают синус- и косинус-преобразования Фурье.

Для синус- и косинус-преобразований Фурье множество G также есть числовая прямая, то есть $G=R=(-\infty,+\infty)$, $U(G)$ – совокупность абсолютно интегрируемых на $(-\infty,+\infty)$ функций.

Ядро синус-преобразования Фурье равно $K(x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin sx$. Синус-преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_s(s)=\Phi_s\left(f(x)\right)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx dx.$$

Для нечетных функций синус-преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_s(s)=\Phi_s\left(f(x)\right)(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin sx dx.$$

Ядро косинус-преобразования Фурье равно $K(x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos sx$. Косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_c(s)=\Phi_c\left(f(x)\right)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx.$$

Для чётных функций косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$\Phi_c(s)=\Phi_c\left(f(x)\right)(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos sx dx.$$

4.1.1. Найти преобразование Фурье функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 1, & 1<|x|<2\ , \\ 0, & \text{в других точках}; \end{cases}$

в) $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$; г) $f(x)=e^{-|x|}\cos x$.

а) Записывая преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} xe^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{\infty} 0\cdot e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} xe^{-isx}dx.$$

Для вычисления интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1} xe^{-isx}dx$ применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^{-isx}dx$, тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{is}e^{-isx} = \frac{i}{s}e^{-isx}$. В результате получаем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ix}{s}e^{-isx}\Big|_{-1}^{1}-\frac{i}{s}\int\limits_{-1}^{1}e^{-isx}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ix}{s}e^{-isx}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{s^2}e^{-isx}\Big|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{s}e^{-is}+\frac{i}{s}e^{is}+\frac{1}{s^2}e^{-is}-\frac{1}{s^2}e^{is}\right).$$

Так как $e^{is}+e^{-is}=2\cos s$, $e^{is}-e^{-is}=2i\sin s$, то

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2i}{s}\cos s-\frac{2i}{s^2}\sin s\right)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{s}\cos s-\frac{1}{s^2}\sin s\right).$$

б) Запишем функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<|x|<2 \\ 0, & \text{в других точках}\end{cases}, =\begin{cases}1, & x\in(-2,-1)\cup(1,2), \\ 0, & x\notin(-2,-1)\cup(1,2).\end{cases}$$

Тогда

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-2}0\cdot e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{-1}e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}0\cdot e^{-isx}dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{1}^{2}e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{2}^{\infty}0\cdot e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{-1}e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{1}^{2}e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{is}e^{-isx}\Big|_{-2}^{-1}-\frac{1}{is}e^{-isx}\Big|_{1}^{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{s}e^{-isx}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{i}{s}e^{-isx}\Big|_{1}^{2}\right)=$$

$$=\frac{i}{s\sqrt{2\pi}}\left(e^{is}-e^{2is}+e^{-2is}-e^{-is}\right).$$

Так как $e^{is}-e^{-is}=2i\sin s$, то окончательно получаем

$$\Phi(s)=\frac{i}{s\sqrt{2\pi}}\left(2i\sin s-2i\sin 2s\right)=\frac{2}{s\sqrt{2\pi}}\left(\sin 2s-\sin s\right)=$$

$$=\frac{4}{s\sqrt{2\pi}}\sin\frac{s}{2}\cos\frac{3s}{2}.$$

в) Записывая преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-isx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}e^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}xe^{x}e^{-isx}dx+\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}e^{-isx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}xe^{(1-is)x}dx+\int_{0}^{+\infty}xe^{-(1+is)x}dx\right).$$

Вычислим каждое слагаемое отдельно. Для интеграла $\int_{-\infty}^{0}xe^{(1-is)x}dx$ можем записать $I_1=\int_{-\infty}^{0}xe^{(1-is)x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{0}xe^{(1-is)x}dx$. Применим для нахождения интеграла $\int_{-A}^{0}xe^{(1-is)x}dx$ формулу интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{(1-is)x}dx$, тогда $du=dx$, $v=\frac{1}{1-is}e^{(1-is)x}$. Следовательно,

$$I_1=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x}{1-is}e^{(1-is)x}\Bigg|_{-A}^{0}-\frac{1}{1-is}\int_{-A}^{0}e^{(1-is)x}dx\right)=$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x}{1-is}e^{(1-is)x}\Big|_{-A}^{0} - \frac{1}{(1-is)^2}e^{(1-is)x}\Big|_{-A}^{0}\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(0 + \frac{A}{1-is}e^{-(1-is)A} - \frac{1}{(1-is)^2} + \frac{1}{(1-is)^2}e^{-(1-is)A}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(1-is)^2} + \lim_{A\to+\infty}\frac{A}{1-is}e^{-(1-is)A} + \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{(1-is)^2}e^{-(1-is)A}.$$

Далее, $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{A}{1-is}e^{-(1-is)A}\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{isA}}{(1-is)}\cdot\frac{A}{e^A}\right)$. Применив для вычисления предела $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{e^A}$ правило Лопиталя, получаем $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{e^A} = 0$. Так как $\left|\frac{e^{isA}}{1-is}\right| = \frac{\left|e^{isA}\right|}{|1-is|} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ при каждом фиксированном s есть величина конечная, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{isA}}{(1-is)}\cdot\frac{A}{e^A}\right) = 0$.

Аналогично можем записать $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{A}{(1-is)^2}e^{-(1-is)A}\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{isA}}{(1-is)^2}\cdot\frac{A}{e^A}\right)$, а так как $\left|\frac{e^{isA}}{(1-is)^2}\right| = \frac{\left|e^{isA}\right|}{|1-is|^2} = \frac{1}{1+s^2}$ при каждом фиксированном s есть величина конечная, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{isA}}{(1-is)^2}\cdot\frac{A}{e^A}\right) = 0$. Таким образом, $I_1 = -\frac{1}{(1-is)^2}$.

Для интеграла $\int_0^{+\infty} xe^{-(1+is)x}dx$ можем записать $I_2 = \int_0^{+\infty} xe^{-(1+is)x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-(1+is)x}dx$. Применим для нахождения интеграла $\int_0^A xe^{-(1+is)x}dx$ формулу интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^{-(1+is)x}dx$, тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{1+is}e^{-(1+is)x}$. Следовательно,

$$I_2 = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+is}e^{-(1+is)x}\Big|_0^A + \frac{1}{1+is}\int_0^A e^{-(1+is)x}dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+is}e^{-(1+is)x}\Big|_0^A - \frac{1}{(1+is)^2}e^{-(1+is)x}\Big|_0^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A}{1+is}e^{-(1+is)A} + 0 - \frac{1}{(1+is)^2}e^{-(1+is)A} + \frac{1}{(1+is)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+is)^2} - \lim_{A\to+\infty}\frac{A}{1+is}e^{-(1+is)A} - \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{(1+is)^2}e^{-(1+is)A}.$$

Далее, $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A}{1+is}e^{-(1+is)A}\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-isA}}{(1+is)}\cdot\frac{A}{e^A}\right)$. Так как $\left|\frac{e^{-isA}}{1+is}\right| = \frac{\left|e^{-isA}\right|}{|1+is|} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ при каждом фиксированном s есть величина конечная и $\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{e^A} = 0$ (показано выше), то и $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-isA}}{(1+is)}\cdot\frac{A}{e^A}\right) = 0$. Аналогично можем записать

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A}{(1+is)^2}e^{-(1+is)A}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-isA}}{(1+is)^2}\cdot\frac{A}{e^A}\right),$$

а так как $\left|\frac{e^{-isA}}{(1+is)^2}\right|=\frac{\left|e^{-isA}\right|}{|1+is|^2}=\frac{1}{1+s^2}$ при каждом фиксированном s есть величина конечная, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-isA}}{(1+is)^2}\cdot\frac{A}{e^A}\right)=0$. Таким образом, $I_2=\frac{1}{(1+is)^2}$.

Окончательно получаем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{(1-is)^2}+\frac{1}{(1+is)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1-is)^2-(1+is)^2}{(1-is)^2(1+is)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-2is+(is)^2-\left(1+2is+(is)^2\right)}{\left(1-(is)^2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-2is-s^2-1-2is+s^2}{\left(1+s^2\right)^2}\right)=\frac{-4is}{\sqrt{2\pi}\left(1+s^2\right)^2}.$$

г) Записывая преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-isx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\cos xe^{-isx}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{x}\cos xe^{-isx}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\cos xe^{-isx}dx\right).$$

Заменяя в полученных выражениях $\cos x$ по формулам Эйлера $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, получаем

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)e^{-isx}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)e^{-isx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}\left(e^{(1+i-is)x}+e^{(1-i-is)x}\right)dx+\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-(1-i+is)x}+e^{-(1+i+is)x}\right)dx\right).$$

Для первого слагаемого в скобках имеем

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}\left(e^{(1+i-is)x}+e^{(1-i-is)x}\right)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{0}\left(e^{(1+i-is)x}+e^{(1-i-is)x}\right)dx=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1+i-is}e^{(1+i-is)x}+\frac{1}{1-i-is}e^{(1-i-is)x}\right)\Bigg|_{-A}^{0}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1+i-is}+\frac{1}{1-i-is}-\frac{1}{1+i-is}e^{-(1+i-is)A}-\frac{1}{1-i-is}e^{-(1-i-is)A}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+i-is}+\frac{1}{1-i-is}-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-i(1-s)A}}{1+i-is}\cdot e^{-A}\right)-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{i(1+s)A}}{1-i-is}\cdot e^{-A}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+i-is}+\frac{1}{1-i-is}=\frac{1}{1+i(1-s)}+\frac{1}{1-i(1+s)}.$$

Для второго слагаемого получаем

$$I_2=\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-(1-i+is)x}+e^{-(1+i+is)x}\right)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}\left(e^{-(1-i+is)x}+e^{-(1+i+is)x}\right)dx=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{1-i+is}e^{-(1-i+is)x}-\frac{1}{1+i+is}e^{-(1+i+is)x}\right)\Bigg|_{0}^{A}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{1-i+is}e^{-(1-i+is)A}-\frac{1}{1+i+is}e^{-(1+i+is)A}+\frac{1}{1-i+is}+\frac{1}{1+i+is}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-i+is}+\frac{1}{1+i+is}-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{i(1-s)A}}{1-i+is}\cdot e^{-A}\right)-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-i(1+s)A}}{1+i+is}\cdot e^{-A}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-i+is}+\frac{1}{1+i+is}=\frac{1}{1-i(1-s)}+\frac{1}{1+i(1+s)}.$$

Тогда

$$\Phi(s)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i(1-s)}+\frac{1}{1-i(1+s)}+\frac{1}{1-i(1-s)}+\frac{1}{1+i(1+s)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-i(1-s)+1+i(1-s)}{(1+i(1-s))(1-i(1-s))}+\frac{1+i(1+s)+1-i(1+s)}{(1-i(1+s))(1+i(1+s))}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1+(1-s)^2}+\frac{2}{1+(1+s)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(1-s)^2}+\frac{1}{1+(1+s)^2}\right).$$

4.1.2. Для заданных на $[0,\infty)$ функций найти синус-преобразование Фурье или косинус-преобразование Фурье:

а) $f(x)=\dfrac{1}{9+x^2}$, $\Phi_c(s)$; б) $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$, $\Phi_s(s)$;

в) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a\\ 0, & x>a\end{cases}$, $\Phi_c(s)$;

г) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$, $\Phi_s(s)$.

а) Записывая косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi_c(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos sx}{9+x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos sx}{9+x^2}dx=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=3i}\dfrac{e^{isz}}{9+z^2}\right)$. Так как точка $z=3i$ для функции $f(z)=\dfrac{e^{isz}}{9+z^2}$ является простым полюсом, то вычет вычисляется по формуле $\operatorname*{res}_{z=z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$. Таким образом,

$$\Phi_c(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\lim_{z\to z_0}\left((z-3i)\frac{e^{isz}}{(z+3i)(z-3i)}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi i\cdot\lim_{z\to z_0}\left(\frac{e^{isz}}{(z+3i)}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-3s}}{6i}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\left(\frac{\pi e^{-3s}}{3}\right)=\frac{\pi e^{-3s}}{3\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{e^{-3s}}{3}.$$

б) Записывая синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi_s(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin sx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{x\sin sx}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin sx}{4+x^2}dx=$$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{ze^{isz}}{4+z^2}\right)$. Так как точка $z=2i$ для функции $f(z)=\frac{ze^{isz}}{4+z^2}$ является простым полюсом, то вычет вычисляется по формуле $\operatorname*{res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\cdot f(z)\right)$. Таким образом,

$$\Phi_s(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\lim_{z\to z_0}\left((z-2i)\frac{ze^{isz}}{(z+2i)(z-2i)}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\lim_{z\to z_0}\left(\frac{ze^{isz}}{(z+2i)}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(2\pi i\cdot\frac{2ie^{-2s}}{4i}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(\pi ie^{-2s}\right)=\frac{\pi e^{-2s}}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-2s}.$$

в) Записывая косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\Phi_c(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos sx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\cos sx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{s}\sin sx\Big|_0^a\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{s}\sin as.$$

г) Записывая синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, имеем $\Phi_s(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin sx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{1}\left(2x-2\right)\sin sx dx$. Применим интегрирование по частям. Положим $u=2x-2$, $dv=\sin sx\, dx$, тогда $du=2dx$, $v=-\frac{1}{s}\cos sx$. Следовательно,

$$\Phi_s(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\left(2x-2\right)}{s}\cos sx\Big|_0^1+\frac{2}{s}\int\limits_0^1\cos sx dx\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\left(2-2\right)}{s}\cos s+\frac{\left(-2\right)}{s}\cos 0+\frac{2}{s^2}\sin sx\Big|_0^1\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}\left[\sin s-\sin 0\right]\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{s^2}\sin s-\frac{2}{s}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1.3. Найти преобразование Фурье функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x\sin 5x, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases}$ б) $f(x)=\left(3-x\right)\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$;

в) $f(x)=\begin{cases} \cos 3x, & |x|\le \pi, \\ 0, & |x|>\pi; \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} -e^{-3x}, & -2\le x<0, \\ e^{3x}, & 0\le x\le 2, \\ 0, & |x|\ge 2; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} x\cos 2x, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases}$ е) $f(x)=\begin{cases} \sin 3x, & |x|\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}; \end{cases}$

ж) $f(x)=e^{-|x-2|}$; з) $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 2, \\ 0, & |x|>2; \end{cases}$

и) $f(x)=e^{-3|x|}$.

4.1.4. Для заданных на $[0,\infty)$ функций найти синус-преобразование Фурье или косинус-преобразование Фурье:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(9+x^2)(4+x^2)}$, $\Phi_s(s)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{(25+x^2)^2}$, $\Phi_c(s)$;

в) $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$, $\Phi_c(s)$;

г) $f(x)=\begin{cases}\sin 3x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$, $\Phi_s(s)$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{16+x^4}$, $\Phi_c(s)$; е) $f(x)=e^{-3x}$, $\Phi_c(s)$;

ж) $f(x)=\dfrac{x}{(4+x^2)^2}$, $\Phi_s(s)$; з) $f(x)=e^{-2x}\sin 3x$, $\Phi_s(s)$;

и) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{x}{4}, & 0\le x\le 4\pi\\ 0, & x>4\pi\end{cases}$, $\Phi_c(s)$;

к) $f(x)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$, $\Phi_s(s)$;

л) $f(x)=\begin{cases}2x+4, & 0\le x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$, $\Phi_s(s)$;

м) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$, $\Phi_c(s)$.

4.2. Преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная, кусочно-непрерывная (то есть на каждом ограниченном отрезке числовой прямой имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода) на полуинтервале $[0,\infty)$ функция. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-rt}dt$.

Если при некотором r_0 этот интеграл абсолютно сходится, то он абсолютно сходится и при любом r, таком, что $\operatorname{Re} r \ge \operatorname{Re} r_0$. Наименьшее действительное r_0, такое, что для всякого r с $\operatorname{Re} r > r_0$ интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-rt}dt$ абсолютно сходится, а при $\operatorname{Re} r < r_0$ абсолютно расходится, называется показателем роста функции $f(t)$. Если показатель роста $r_0 < \infty$, то говорят, что функция имеет ограниченный рост. Примером функции ограниченного роста служит такая функция, что $\left| f(t) \right| \le Me^{r_0 t}$.

Комплекснозначную функцию $f(t)$, заданную на интервале $(-\infty, \infty)$, назовём оригиналом, если она обладает свойствами:

1) $f(t) = 0$ для всех $t \in (-\infty, 0)$;
2) $f(t)$ кусочно-непрерывна, то есть на каждом ограниченном отрезке числовой прямой имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода;
3) $f(t)$ ограниченного роста.

Заметим, что любую кусочно-непрерывную функцию ограниченного роста можно сделать оригиналом, если умножить её на функцию $h(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ 1, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$. Функцию $h(t)$ называют единичной или функцией Хэвисайда. С учётом сделанного замечания кусочно-непрерывные функции ограниченного роста будем считать оригиналами.

Ядро преобразования Лапласа равно e^{-px}. Преобразование Лапласа определяется для оригиналов. Преобразование Лапласа имеет вид

$$F(p) = L\left(f(t)\right)(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt .$$

Функцию $F(p)$ комплексного переменного p называют изображением функции $f(t)$.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Если $(Lf)(p) = F(p)$, $(Lg)(p) = G(p)$, то
$$(L(f+g))(p) = (Lf)(p) + (Lg)(p) = F(p) + G(p),$$
$$(L(\alpha f))(p) = \alpha(Lf)(p) = \alpha F(p).$$
2. Подобие. Если $(Lf)(p) = F(p)$, то
$$L\left(f\left(\alpha t\right)\right)\left(p\right) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$
3. Запаздывание. Если $(Lf)(p) = F(p)$, то
$$L\left(f\left(t-\tau\right)\right)\left(p\right) = e^{-p\tau}L(f(t))(p) = e^{-p\tau}F(p).$$
4. Смещение. Если $(Lf)(p) = F(p)$, то
$$L\left(e^{p_0 t} f\left(t\right)\right)\left(p\right) = F(p - p_0).$$
5. Дифференцирование оригинала. Если $(Lf)(p) = F(p)$ и $f'(t)$, $f''(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ оригиналы, то
$$L\left(f'\left(t\right)\right)\left(p\right) = pF(p) - f(+0),$$
$$L\left(f''\left(t\right)\right)\left(p\right) = p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0),$$
$$L\left(f^{(n)}\left(t\right)\right)\left(p\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$
6. Дифференцирование изображения. Если $(Lf)(p) = F(p)$, то
$$F'(p) = L(-tf(t))(p),$$
$$F^{(n)}(p) = L((-1)^n t^n f(t))(p).$$

В частности,
$$L\left(t^n\right)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

7. Интегрирование оригинала. Если $(Lf)(p) = F(p)$, то
$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

8. Интегрирование изображения. Если $(Lf)(p)=F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)dp$ абсолютно сходится, то $\dfrac{f(t)}{t}$ оригинал и

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p)=\int\limits_p^\infty F(p)dp .$$

Функция $(f*g)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ называется свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$.

Свойства свёртки

1. Свёртка симметрична, то есть $(f*g)(t)=(g*f)(t)$.
2. Если $(Lf)(p)=F(p)$, $(Lg)(p)=G(p)$, то
$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=F(p)G(p) .$$
3. Формула Дюамеля
$$L\left(f(0)g(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)(p)=pF(p)G(p) .$$

Таблица оригиналов и изображений

Оригинал	Изображение
$h(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
$\cos\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Оригинал	Изображение
$\mathrm{ch}\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\mathrm{sh}\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

Первая теорема обращения. Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то в каждой точке непрерывности $f(t)$ имеет место равенство

$$f(t)=L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{px}dp,$$

где интеграл берётся вдоль любой прямой с $\operatorname{Re}p=a>r_0$, а r_0 – показатель роста функции $f(t)$.

Вторая теорема обращения. Если

1) функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}p>r_0$ и в полуплоскости $\operatorname{Re}p<r_0$ имеет конечное число полюсов;

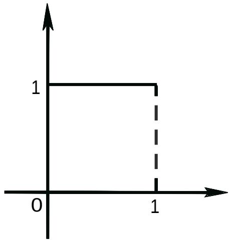
2) $\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{p\in C_R}\left|F(p)\right|=0$, где C_R – дуги окружностей $|p|=R$, $\operatorname{Re}p<r_0$;

3) для любого $a>r_0$ абсолютно сходится интеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp$,

то функция $f(t)=L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=h(t)\cdot\left(\sum\limits_k\operatorname*{res}\limits_{p=p_k}F(p)e^{pt}\right)$ есть оригинал для $F(p)$.

4.2.1. Найти изображение оригинала, заданного графически.

Данная функция с помощью единичной функции $h(t)=\begin{cases}0, \text{ если } t<0,\\ 1, \text{ если } t\ge 0\end{cases}$ может быть записана в виде $f(t)=h(t)-h(t-1)$. Так как $L(h(t))=\dfrac{1}{p}$, то по теореме запаздывания получаем $L(h(t-1))=\dfrac{e^{-p}}{p}$. В силу линейности преобразования Лапласа имеем



$$L(f(t))=L(h(t)-h(t-1))=\frac{1}{p}-\frac{e^{-p}}{p}=\frac{1-e^{-p}}{p}.$$

4.2.2. В развитие предыдущего примера. Площадь под ступенькой $f(t)=h(t)-h(t-\tau)$ равна τ. Следовательно, площадь под ступенькой $\varphi_\tau(t)=\dfrac{h(t)-h(t-\tau)}{\tau}$ равна 1. Набор функций $\varphi_\tau(t)$ является одним из семейств, образующих так называемую дельта-функцию Дирака $\delta(t)=\begin{cases}\infty, \ t=0,\\ 0, \ t\ne 0,\end{cases}$

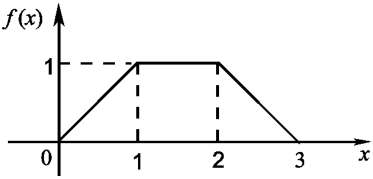
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\varphi_\tau(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{h(t)-h(t-\tau)}{\tau},$$

с нормировкой $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$. Далее,

$$L(\varphi_\tau(t))=L\left(\frac{h(t)-h(t-\tau)}{\tau}\right)=\frac{1-e^{-p\tau}}{p\tau}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\tau\to 0$, получаем $L(\delta(t))=1$.

4.2.3. Найти изображение оригинала, заданного графически.



Данная функция с помощью единичной функции $h(t)$ может быть записана в виде

$$f(t)=t\left(h(t)-h(t-1)\right)+(h(t-1)-h(t-2))+$$
$$+(3-t)(h(t-2)-h(t-3)) .$$

Преобразуя, получаем

$$f(t)=t\cdot h(t)-(t-1)h(t-1)-(t-2)h(t-2)+(t-3)h(t-3) .$$

По теореме о дифференцировании изображения имеем $L\left(t\cdot h(t)\right)=\dfrac{1}{p^2}$. Далее, по теореме запаздывания получаем

$$L\left((t-1)h(t-1)\right)=\frac{e^{-p}}{p^2},\ L\left((t-2)h(t-2)\right)=\frac{e^{-2p}}{p^2},$$

$$L\left((t-3)h(t-3)\right)=\frac{e^{-3p}}{p^2}.$$

Поэтому $L\left(f(t)\right)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2}$.

4.2.4. Восстановить оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2-2p+10}$.

Можем записать

$$\frac{1}{p^2-2p+10}=\frac{1}{p^2-2p+1+9}=\frac{1}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{(p-1)^2+3^2}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+3^2}.$$

Так как $\dfrac{3}{p^2+3^2}=L(\sin 3t)$, то по теореме смещения получаем $F(p)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{(p-1)^2+3^2}=\dfrac{1}{3}L\left(e^t\sin 3t\right)$, или, что то же самое,

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2-2p+10}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+3^2}\right)=\frac{1}{3}e^t\sin 3t\,.$$

4.2.5. Восстановить оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p^2-9p-3}{p^3-2p^2-3p}$.

Корни знаменателя $p_1=-1$, $p_2=0$ и $p_3=3$. Поэтому $p^3-2p^2-3p=(p+1)p(p-3)$. Раскладывая на простые дроби, получаем

$$\frac{2p^2-9p-3}{p^3-2p^2-3p}=\frac{2p^2-9p-3}{p(p+1)(p-3)}=\frac{A_1}{p+1}+\frac{A_2}{p}+\frac{A_3}{p-3}\,.$$

Приводя к общему знаменателю, имеем

$$\frac{2p^2-9p-3}{p^3-2p^2-3p}=\frac{A_1p(p-3)+A_2(p+1)(p-3)+A_3(p+1)p}{p^3-2p^2-3p}=$$

$$=\frac{(A_1+A_2+A_3)p^2+(-3A_1-2A_2+A_3)p-3A_2}{p^3-2p^2-3p}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2,\\ -3A_1-2A_2+A_3=-9,\\ -3A_2=-3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1=2, A_2=1, A_3=-1$.

Таким образом,
$$\frac{2p^2-9p-3}{p^3-2p^2-3p}=\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p-3}=L\left(2e^{-t}+1-e^{3t}\right),$$
или, что то же самое,
$$L^{-1}\left(\frac{2p^2-9p-3}{p^3-2p^2-3p}\right)=L^{-1}\left(\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p-3}\right)=2e^{-t}+1-e^{3t}.$$

4.2.6. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

Пусть $L(y)=Y(p)$. По теореме дифференцирования оригинала можем написать $L(y')=pY(p)-y(0)=pY(p)-0=pY(p)$, $L(y'')=p^2Y(p)-p\cdot y(0)-y'(0)=p^2Y(p)-0\cdot p-3=p^2Y(p)-3.$

Далее, $L(\sin x)=\dfrac{1}{p^2+1}$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем уравнение $p^2Y(p)-3-3pY(p)+2Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ для нахождения изображения $L(y)=Y(p)$.

Приводя подобные в левой части уравнения, можем записать $\left(p^2-3p+2\right)Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}+3=\dfrac{3p^2+4}{p^2+1}$, или, что то же самое, $Y(p)=\dfrac{3p^2+4}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-3p+2\right)}$. Раскладывая получившуюся рациональную дробь на сумму простейших дробей, имеем $Y(p)=\dfrac{17}{5}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{1}{p-2}$. Так как $L^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)=\cos x$, $L^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)=\sin x$, $L^{-1}\left(\dfrac{1}{p-1}\right)=e^x$, $L^{-1}\left(\dfrac{1}{p-2}\right)=e^{2x}$, то $y(x)=\dfrac{17}{5}\cos x-\dfrac{7}{2}\sin x+\dfrac{1}{10}e^x+\dfrac{3}{10}e^{2x}$.

4.2.7. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + y = 4\sin x, \quad y(0) = -2, \; y'(0) = 1.$$

Положим $L(y) = Y(p)$. По теореме дифференцирования оригинала можем написать $L(y'') = p^2 Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) =$ $= p^2 Y(p) - (-2) \cdot p - 1 = p^2 Y(p) + 2p - 1$. Далее, $L(\sin x) = \dfrac{1}{p^2 + 1}$.

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем уравнение для нахождения $L(y) = Y(p)$:

$$p^2 Y(p) + 2p - 1 + Y(p) = \frac{4}{p^2 + 1}.$$

Приводя подобные в левой части уравнения, можем записать $\left(p^2 + 1\right) Y(p) = \dfrac{-2p^3 + p^2 - 2p + 5}{p^2 + 1}$, или, что то же самое, $Y(p) = \dfrac{-2p^3 + p^2 - 2p + 5}{\left(p^2 + 1\right)^2}$.

По второй теореме обращения оригинал $y(x)$ равен сумме вычетов в полюсах функции $Y(p) = \dfrac{-2p^3 + p^2 - 2p + 5}{\left(p^2 + 1\right)^2}$, то есть

$$y(x) = \operatorname*{res}_{p=i} \left(\frac{-2p^3 + p^2 - 2p + 5}{\left(p^2 + 1\right)^2} e^{px} \right) +$$

$$+ \operatorname*{res}_{p=-i} \left(\frac{-2p^3 + p^2 - 2p + 5}{\left(p^2 + 1\right)^2} e^{px} \right).$$

Так как точки $p = \pm i$ есть полюсы порядка 2 для функции $Y(p)$, то

$$\operatorname*{res}_{p=i}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{\left(p^2+1\right)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left((p-i)^2\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{\left(p^2+1\right)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{(p+i)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{(p+i)^2}xe^{px}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-6p^2+2p+2\right)(p+i)^2-2\left(-2p^3+p^2-2p+5\right)(p+i)}{(p+i)^4}e^{px}\right)=$$

$$=\frac{(2i-1-2i+5)}{-4}xe^{ix}+\frac{(6+2i+2)(-4)-4i(2i-1-2i+5)}{16}e^{ix}=$$

$$=-xe^{ix}-\left(2+\frac{3}{2}i\right)e^{ix},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-i}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{\left(p^2+1\right)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left((p+i)^2\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{\left(p^2+1\right)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{(p-i)^2}e^{px}\right)=$$

$$=\lim_{p\to -i}\left(\frac{-2p^3+p^2-2p+5}{(p-i)^2}xe^{px}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-6p^2+2p+2\right)(p-i)^2-2\left(-2p^3+p^2-2p+5\right)(p-i)}{(p-i)^4}e^{px}\right)=$$

$$=\frac{(-2i-1+2i+5)}{-4}xe^{-ix}+\frac{(6-2i+2)(-4)+4i(-2i-1+2i+5)}{16}e^{-ix}=$$

$$=-xe^{ix}-\left(2-\frac{3}{2}i\right)e^{ix}.$$

Таким образом,

$$y(x)=-xe^{ix}-\left(2+\frac{3}{2}i\right)e^{ix}-xe^{-ix}-\left(2-\frac{3}{2}i\right)e^{-ix}=$$

$$=-x\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)-\frac{3}{2}i\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=$$

$$=-2x\cos x-4\cos x+3\sin x.$$

4.2.8. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-3x+2y-e^{-t} \\ y'=-3x+4y+t^2+t \end{cases};\ \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}.$$

Положим $L(x)=X(p)$, $L(y)=Y(p)$. По теореме дифференцирования оригинала можем написать

$$L(x')=pX(p)-x(0)=pX(p)-0=pX(p),$$

$$L(y')=pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$$

Далее, $L\left(e^{-t}\right)=\frac{1}{p+1}$, $L(t)=\frac{1}{p^2}$, $L\left(t^2\right)=\frac{2}{p^3}$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы, получаем систему уравнений для нахождения $L(x)=X(p)$ и $L(y)=Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p)=-3X(p)+2Y(p)-\dfrac{1}{p+1}, \\ pY(p)-1=-3X(p)+4Y(p)+\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$$

Перенося влево слагаемые с $X(p)$ и $Y(p)$ и приводя подобные в левых и правых частях уравнений системы, можем записать

$$\begin{cases} (p+3)X(p)-2Y(p)=-\dfrac{1}{p+1}, \\ 3X(p)+(p-4)Y(p)=\dfrac{p^3+p+2}{p^3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Крамера. Определитель системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+3 & -2 \\ 3 & p-4 \end{vmatrix}=(p+3)(p-4)+6=p^2-p-6=(p-3)(p+2).$$

Определители для нахождения $X(p)$ и $Y(p)$ соответственно равны

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{p+1} & -2 \\ \dfrac{p^3+p+2}{p^3} & p-4 \end{vmatrix}=-\frac{p-4}{p+1}+\frac{2p^3+2p+4}{p^3}=$$

$$=\frac{p^4+6p^3+2p^2+6p+4}{p^3(p+1)},$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p+3 & -\dfrac{1}{p+1} \\ 3 & \dfrac{p^3+p+2}{p^3} \end{vmatrix}=\frac{(p^3+p+2)(p+3)}{p^3}+\frac{3}{p+1}=$$

$$=\frac{p^5+4p^4+7p^3+6p^2+11p+6}{p^3(p+1)}.$$

Тогда изображения $X(p)$ и $Y(p)$ имеют вид

$$X(p)=\frac{p^4+6p^3+2p^2+6p+4}{p^3(p+1)(p+2)(p-3)},$$

$$Y(p)=\frac{p^5+4p^4+7p^3+6p^2+11p+6}{p^3(p+1)(p+2)(p-3)}.$$

Раскладывая получившиеся рациональные дроби на суммы простейших дробей, получаем

$$X\left(p\right)=-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{283}{540}\cdot\frac{1}{p-3},$$

$$Y\left(p\right)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{283}{180}\cdot\frac{1}{p-3}.$$

Далее, так как $L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=1$, $L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)=t$, $L^{-1}\left(\frac{1}{p^3}\right)=\frac{t^2}{2}$, $L^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)=e^{-t}$, $L^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)=e^{-2t}$, $L^{-1}\left(\frac{1}{p-3}\right)=e^{3x}$, то

$$x\left(t\right)=-\frac{2}{27}-\frac{2}{9}t-\frac{1}{3}t^2-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{283}{540}e^{3t},$$

$$y\left(t\right)=-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}t-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{283}{180}e^{3t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.2.9. Найти изображение следующих оригиналов:

а) $f(t)=\left(t^2+t\right)e^{2t}$; б) $f(t)=t\left(\sin 5t+\cos 4t\right)$; в) $f(t)=\sin^3 t$;

г) $f(t)=\cos^4 t$; д) $f(t)=\left(3t^2-5\right)\operatorname{ch}4t$; е) $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{5\tau}d\tau$;

ж) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau}d\tau$; з) $f(t)=\int\limits_0^t \tau\sin^2\tau d\tau$;

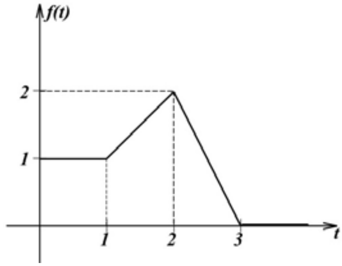
и) $f(t)=\int\limits_0^t \left(3\tau-2\right)\sin 3\tau d\tau$; к) $f(t)=\frac{t-\sin t}{t}$; л) $f(t)=\frac{2\sin^2 4t}{t}$;

м) $f(t)=\frac{1-e^{3t}}{t}$; н) $f(t)=\frac{\int\limits_0^t \cos 5\tau d\tau}{t}$; о) $f(t)=t^2\sin 3t$;

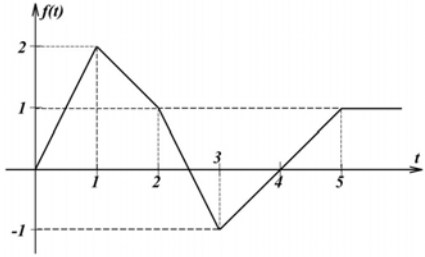
п) $f(t)=\left(3t^2+5\right)\operatorname{sh}2t$; р) $f(t)=\left(2t^4+3t^2+2\right)e^{-\frac{t}{2}}$.

4.2.10. Найти изображение оригинала, заданного графически.

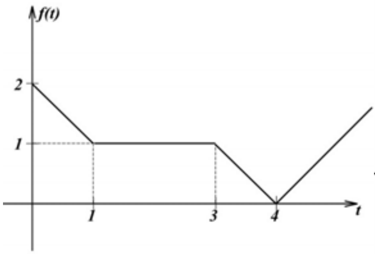
а)



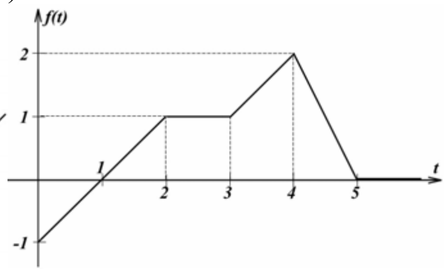
б)



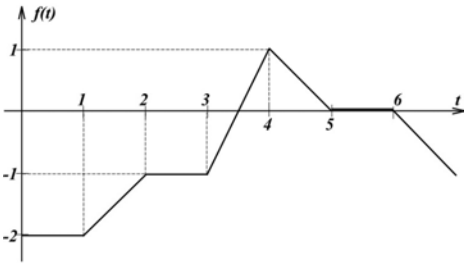
в)



г)



д)



4.2.11. Записать свертку функций и найти ее изображение:

а) $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = \cos^2 5t$;

б) $f(t) = 3\sin t - 5\cos t$, $g(t) = sh3t$;

в) $f(t) = \sin 3t$, $g(t) = \cos 7t$;

г) $f(t) = t^5$, $g(t) = \sin^2 4t$;

д) $f(t) = 3t^2 + 2t - 4$, $g(t) = e^{5t}\cos 3t$;

е) $f(t) = sh5t$, $g(t) = \left(t^3 + t^2\right)e^{-2t}$.

4.2.12. Восстановить оригинал по изображению:

а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^3-7p+6}$; б) $F(p)=\dfrac{(p+11)e^{-p}}{p^2+p-12}$;

в) $F(p)=\dfrac{p^2+3p+5}{p^3+2p^2-5p-6}$; г) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p-1}-\dfrac{e^{p}}{p-2}+\dfrac{e^{-p}}{(p-2)^2}$;

д) $F(p)=\dfrac{\left(p^2+3p+3\right)e^{2p}}{(p+1)^3(p+2)}$; е) $F(p)=\dfrac{(2p+3)e^{-p}}{p^2+2p+5}-\dfrac{p-1}{p^2+4}$;

ж) $F(p)=\dfrac{(2p+1)e^{3p}}{p^2+4p+8}-\dfrac{(p-1)e^{-2p}}{p^2-2p+5}$;

з) $F(p)=\dfrac{11p^2-40p+100}{\left(p^2-2p+10\right)\left(p^2-4p+20\right)}$;

и) $F(p)=\dfrac{2p^3-21p^2+51p-36}{\left(p^2+9\right)\left(p^2-6p+18\right)}$;

к) $F(p)=\dfrac{p^4-7p^3+45p^2+224p+75}{p^2(p-3)\left(p^2+8p+25\right)}$;

л) $F(p)=\dfrac{9e^{2p}}{p+4}-\dfrac{e^{-4p}}{(p+4)^2}+\dfrac{(2p+5)e^{-p}}{p^2-4p+29}$;

м) $F(p)=\dfrac{2p^3+80p^2-756p+884}{(p+2)\left(p^2+4p+40\right)(p-3)^2}$.

4.2.13. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения:

а) $y''+5y'+6y=e^{-x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

б) $y''+25y=x\cos 5x+\sin 5x$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

в) $y''-6y'+45y=e^{x}\cos x$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

г) $y''-7y'+6y=(3x+1)e^{x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

д) $y''+6y'+25y=(2x-5)e^{-3x}$; $y(0)=2$, $y'(0)=1$;

е) $y'' - 2y' + 10y = e^x \sin 3x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

ж) $y'' + 4y' + 4y = \cos x + 2\sin x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;

з) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

и) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4.2.14. Найти решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x' - 2y - y' - 7x = \cos t - \sin t \\ x' + x + y = -\sin t \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = 2x - 3y + t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = -3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x' = -x + 2y + t \\ y' = -3x + 4y + e^t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = -2 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x' = x - y + t^2 + t \\ y' = 2x - y + e^{-t} \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x' = x + 2y + e^{3t} \\ y' = -x + +3y \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \cos 2t \\ y' = 2x - y - \sin 2t \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$;

з) $\begin{cases} x' = -2x + 4y + e^t \\ y' = -2x + 2y + \cos t \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} x' = -x + y + 2e^{2t} \\ y' = 2x + e^{2t} \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 4 \\ y(0) = -3 \end{cases}$;

к) $\begin{cases} x' = 2x + y + e^{3t} + \cos t \\ y' = -x + 4y - \sin t \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$;

л) $\begin{cases} x' = 2x + y - \sin 4t \\ y' = 3x + 4y + e^{3t} \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = -2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Ответы

Раздел 1

1.1.12. а) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$, $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$, $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 2$, $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$;

г) $\operatorname{Re} z = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{2}{5}$, $|z| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{Re} z = -\frac{14}{25}$, $\operatorname{Im} z = \frac{23}{25}$, $|z| = \frac{\sqrt{29}}{5}$, $\arg z = \pi - \operatorname{arctg}\frac{23}{14}$;

е) $\operatorname{Re} z = -\frac{11}{29}$, $\operatorname{Im} z = \frac{13}{29}$, $|z| = \sqrt{\frac{10}{29}}$, $\arg z = \pi - \operatorname{arctg}\frac{13}{11}$;

ж) $\operatorname{Re} z = 2\cos\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{Im} z = -2\sin\frac{\pi}{7}$, $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{7}$;

з) $\operatorname{Re} z = 23$, $\operatorname{Im} z = 11$, $|z| = 5\sqrt{26}$, $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{11}{23}$;

и) $\operatorname{Re} z = 36$, $\operatorname{Im} z = 8$, $|z| = 4\sqrt{85}$, $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$;

к) $\operatorname{Re} z = -\frac{2}{13}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{16}{13}$, $|z| = \sqrt{\frac{20}{13}}$, $\arg z = \pi + \operatorname{arctg} 8$;

л) $\operatorname{Re} z = 5\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{Im} z = 5\sin\frac{\pi}{8}$, $|z| = 5$, $\arg z = \frac{\pi}{8}$;

м) $\operatorname{Re} z = -3\cos\frac{3\pi}{7}$, $\operatorname{Im} z = -3\sin\frac{3\pi}{7}$, $|z| = 3$, $\arg z = \frac{10\pi}{7}$;

н) $\operatorname{Re} z = -2\cos\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{Im} z = -2\sin\frac{\pi}{9}$, $|z| = 2$, $\arg z = \frac{10\pi}{9}$;

о) $\operatorname{Re} z = -2\cos\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{Im} z = 2\sin\frac{\pi}{9}$, $|z| = 2$, $\arg z = \frac{8\pi}{9}$;

п) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = 1$, $\arg z$;

р) $\operatorname{Re} z = -7$, $\operatorname{Im} z = 0$, $|z|$, $\arg z = \pi$;

с) $\operatorname{Re} z = 44$, $\operatorname{Im} z = 117$, $|z| = 125$,

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{117}{44} = 3\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right);$$

т) $\operatorname{Re} z = -2\cos\frac{\pi}{5}$, $\operatorname{Im} z = -2\sin\frac{\pi}{5}$, $|z| = 2$, $\arg z = \frac{6\pi}{5}$;

у) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Im} z = 0$, $|z| = \frac{1}{4}$, $\arg z 0$;

ф) $\operatorname{Re} z = 128\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = 128$, $|z| = 256$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

1.1.13. а) $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}$; б) $z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}$; в) $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}$;

г) $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}$; д) $z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)}$.

1.1.14. а) $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_3 = -i$;

б) $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -\sqrt{3}+i$, $z_4 = -\sqrt{3}-i$, $z_5 = -2i$, $z_6 = \sqrt{3}-i$; в) $z_1 = 2$, $z_2 = -2$;

г) $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$,

$z_3 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - i\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

д) $z_1 = \sqrt[10]{18}\left(\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}\right)$, $z_2 = \sqrt[10]{18}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

$z_3 = \sqrt[10]{18}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $z_4 = \sqrt[10]{18}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

$z_5 = \sqrt[10]{18}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$;

е) $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$,

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right);$$

ж) $z_1=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $z_2=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$;

з) $z_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}-i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $z_2=\frac{1}{\sqrt[5]{16}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{16}}$,

$$z_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{15}+i\sin\frac{11\pi}{15}\right),\ z_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{15}+i\sin\frac{17\pi}{15}\right),$$

$$z_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{15}+i\sin\frac{23\pi}{15}\right);$$

и) $z_1=\sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)\right)$,

$$z_2=\sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)\right),$$

$$z_3=\sqrt[3]{5}\left(\cos\left(\frac{4\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{3}\right)\right);$$

к) $z_1=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)\right)$;

$$z_2=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)\right),$$

$$z_3=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{4\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)\right),$$

$$z_4=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{6\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{4}\right)\right);$$

л) $z_1=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$, $z_2=i$, $z_3=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$;

м) $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$,

$z_3=2\left(\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\sin\dfrac{9\pi}{8}\right)$, $z_4=2\left(\cos\dfrac{13\pi}{8}+i\sin\dfrac{13\pi}{8}\right)$;

н) $z_1=3\left(\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $z_2=3\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$,

$z_3=3\left(\cos\dfrac{7\pi}{8}+i\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)$, $z_4=3\left(\cos\dfrac{11\pi}{8}+i\sin\dfrac{11\pi}{8}\right)$;

о) $z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{20}+i\sin\dfrac{\pi}{20}\right)$, $z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{20}+i\sin\dfrac{9\pi}{20}\right)$,

$z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{20}+i\sin\dfrac{17\pi}{20}\right)$, $z_4=-\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}-i\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$,

$z_5=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{33\pi}{20}+i\sin\dfrac{33\pi}{20}\right)$.

1.1.15. а) $x_{1,2}=-3\pm4i$; б) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}i$; в) $x_{1,2}=-\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{11}}{3}i$;

г) $x_{1,2}=2\pm3i$; д) $x_{1,2}=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{23}}{3}i$; е) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{7}i$;

ж) $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}i$; з) $x_{1,2}=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{39}}{4}i$; и) $x_{1,2}=1\pm2i$;

к) $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{31}}{2} i$; л) $x_{1,2} = 2 \pm 2i$; м) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -3 + i$;

н) $z_1 = \dfrac{1 + i + \sqrt{740}\left(\cos\left(\dfrac{\pi + \operatorname{arctg}\frac{11}{8}}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi + \operatorname{arctg}\frac{11}{8}}{2}\right)\right)}{4}$,

$z_2 = \dfrac{1 + i + \sqrt{740}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi + \operatorname{arctg}\frac{11}{8}}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi + \operatorname{arctg}\frac{11}{8}}{2}\right)\right)}{4}$.

1.2.6. а) окружность с центром в точке $z_0 = 2 - 3i$ и с радиусом, равным 5;

б) внутренность круга с центром в точке $z_0 = 2 - 3i$ и с радиусом, равным 5;

в) внешность круга с центром в точке $z_0 = 2 - 3i$ и с радиусом, равным 5.

1.2.7. $|z - 1 - 4i| = 5$ или $z = 1 + 4i + 5e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.

1.2.8. а) $|z - i| + |z + 2i| = 4$ – эллипс с фокусами в точках $z_{01} = -2i$ и $z_{02} = i$;

$|z - i| + |z + 2i| < 4$ – внутренность эллипса с фокусами в точках $z_{01} = -2i$ и $z_{02} = i$;

$|z - i| + |z + 2i| > 4$ – внешность эллипса с фокусами в точках $z_{01} = -2i$ и $z_{02} = i$;

б) $|z - i| + |z + 2i| = 3$ – отрезок, соединяющий точки $z_1 = -2i$ и $z_2 = i$;

$|z - i| + |z + 2i| < 3$ – пустое множество;

$|z - i| + |z + 2i| > 3$ – внешность отрезка, соединяющего точки $z_1 = -2i$ и $z_2 = i$;

в) $|z-i|+|z+2i|=1$ – пустое множество;

$|z-i|+|z+2i|<1$ – пустое множество;

$|z-i|+|z+2i|>1$ – вся комплексная плоскость.

1.2.9. а) $|z-i|-|z+2i|=2$ – ветвь гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, лежащая выше оси OX;

$|z-i|-|z+2i|<2$ – множество точек комплексной плоскости, ограниченное ветвью гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, расположенное с той же стороны ветви, что и фокус $z_{01}=-2i$;

$|z-i|-|z+2i|>2$ – множество точек комплексной плоскости, ограниченное ветвью гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, расположенное с той же стороны ветви, что и фокус $z_{02}=i$;

б) $|z+2i|-|z-i|=2$ – ветвь гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, лежащая ниже оси OX;

$|z+2i|-|z-i|<2$ – множество точек комплексной плоскости, ограниченное ветвью гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, расположенное с той же стороны ветви, что и фокус $z_{02}=i$;

$|z+2i|-|z-i|>2$ – множество точек комплексной плоскости, ограниченное ветвью гиперболы с фокусами в точках $z_{01}=-2i$ и $z_{02}=i$, расположенное с той же стороны ветви, что и фокус $z_{01}=-2i$.

1.2.10. а) $\operatorname{Re} z<0$; б) $\operatorname{Im} z<0$;

в) $\left\{z\in C \,\middle|\, \operatorname{Re} z<0\right\}\cap\left\{z\in C \,\middle|\, \operatorname{Im} z>0\right\}=\left\{z\in C \,\middle|\, \operatorname{Re} z<0;\ \operatorname{Im} z>0\right\}$.

1.3.8. а) образом линии $x = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является: при $c \neq 0$ – окружность с центром в точке $w_0 = \dfrac{1}{2c}$ радиусом $\dfrac{1}{2c}$, при $c = 0$ – мнимая ось;

образом линии $y = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является: при $c \neq 0$ – окружность с центром в точке $w_0 = -\dfrac{1}{2c}i$ радиусом $\dfrac{1}{2c}$, при $c = 0$ – действительная ось;

образом линии $y = x$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является прямая $v = -u$ – биссектриса второго и четвертого квадрантов;

б) прообразом линии $u = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является: при $c \neq 0$ – окружность с центром в точке $\left(\dfrac{1}{2c}, 0\right)$ радиусом $\dfrac{1}{2c}$, при $c = 0$ – ось OY;

прообразом линии $v = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является: при $c \neq 0$ – окружность с центром в точке $\left(0, -\dfrac{1}{2c}\right)$ радиусом $\dfrac{1}{2c}$, при $c = 0$ – ось OX;

прообразом линии $v = u$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является прямая $y = -x$ – биссектриса второго и четвертого координатных углов;

в) образом линии $|z| = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является окружность с центром в точке $w_0 = 0$ радиусом $\dfrac{1}{c}$, пробегаемая по часовой стрелке;

образом линии $\arg z = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является луч, исходящий из начала координат под углом $(-c)$;

г) прообразом линии $|w| = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является окружность с центром в начале координат радиусом $\dfrac{1}{c}$, пробегаемая по часовой стрелке;

прообразом линии $\arg z = c$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является луч, исходящий из начала координат под углом $(-c)$.

1.3.9. а) $|w| = e^3$, $\arg w = 2$, $\operatorname{Re} w = e^3 \cos 2$, $\operatorname{Im} w = e^3 \sin 2$;

б) $|w| = e^4$, $\arg w = -3 + 2\pi$, $\operatorname{Re} w = e^4 \cos 3$, $\operatorname{Im} w = -e^4 \sin 3$;

в) $|w| = e^3$, $\arg w = -4 + 2\pi$, $\operatorname{Re} w = e^3 \cos 4$, $\operatorname{Im} w = -e^3 \sin 4$.

1.3.10. а) $w = \ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

б) $w = \sqrt{5} e^{\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k\right)} \times$

$\times\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 5\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 5\right)\right)$, $k \in Z$;

в) $w = e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\left(\cos\left(\ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right)$, $k \in Z$;

г) $w = e^{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}\left(\cos(\ln 2) - i\sin(\ln 2)\right)$, $k \in Z$;

д) $w = 5e^{-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k} \times$

$\times\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\ln 5\right) - i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\ln 5\right)\right)$, $k \in Z$;

е) $w = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, $k \in Z$;

ж) $w = e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}$, $k \in Z$);

з) $w = 5e^{-\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi k} \times$

$\times\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\ln 5\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\ln 5\right)\right)$, $k \in Z$;

и) $z = \cos 3\operatorname{sh} 2 + i\sin 3\operatorname{ch} 2$.

1.3.11. а) $\operatorname{Re} z = 1 + \ln 3$, $\operatorname{Im} z = 2\pi k$, $|z| = \sqrt{(1+\ln 3)^2 + 4\pi^2 k^2}$, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{2\pi k}{1+\ln 3}$;

б) $\operatorname{Re} z = e^{-\frac{\pi}{6}-2\pi k}\cos(\ln 2)$, $\operatorname{Im} z = e^{-\frac{\pi}{6}-2\pi k}\sin(\ln 2)$, $|z| = e^{-\frac{\pi}{6}-2\pi k}$, $\arg z = \ln 2$;

в) $\operatorname{Re} z = \cos 3\operatorname{sh} 2$, $\operatorname{Im} z = \sin 3\operatorname{ch} 2$, $|z| = \sqrt{\cos^2 3\operatorname{sh}^2 2 + \sin^2 3\operatorname{ch}^2 2}$, $\arg z = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\operatorname{cth} 2)$;

г) $\operatorname{Re} z = \dfrac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k}{2}$, $\operatorname{Im} z = 0$, $|z| = \left|\dfrac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k}{2}\right|$,

$$\arg z = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \pi, & \text{если } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}.$$

1.3.12. а) $z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\left(5+\sqrt{24}\right)$,

$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\left(5-\sqrt{24}\right)$;

б) $z_1 = 2\pi k - i\ln\left(3+\sqrt{8}\right)$, $z_2 = 2\pi k - i\ln\left(3-\sqrt{8}\right)$;

в) $z_1 = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-1+2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{-2+2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}}\right) + 2\pi k -$

$-\frac{i}{2}\ln\left(13-4\sqrt{2}\left(2\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)$,

$z_2 = \pi - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{2-2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}}\right) + 2\pi k - \frac{i}{2}\ln\left(13-4\sqrt{2}\left(2\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)$;

г) $z_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$, $z_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$;

д) $z_1 = 2\pi k - i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, $z_2 = \pi + 2\pi k - i\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)$;

е) $z_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $z_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

1.4.7. Функция аналитична во всех точках комплексной плоскости.

1.4.8. Функция голоморфна (аналитична) при $c = 1$, $a = -b$.

1.4.9. а) функция аналитична на всей комплексной плоскости;

б) функция аналитична на всей комплексной плоскости;

в) функция аналитична на всей комплексной плоскости;

г) функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = \pm i$;

д) функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

е) функция аналитична на всей комплексной плоскости;

ж) функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = 2\pi k i,\ k \in Z$;

з) функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек $z = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

1.4.10. Точки, лежащие на окружности $|z-1| = \dfrac{1}{2}$ с центром в точке $z_0 = 1$ радиусом $\dfrac{1}{2}$.

1.4.11. $|w'(z_0)| = 6$, $|w'(z_1)| = 75$, $\arg(w'(z_0)) = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg(w'(z_0)) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{24}{7}\right)$.

1.4.12. а) $\operatorname{Im} f(z) = -x^3 + 3xy^2$, $f(z) = -i\,z^3$;

б) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$, $f(z) = z^2$;

в) $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1$, $f(z) = \dfrac{i}{z} - 1$, $|z| > 0$.

1.5.4. $\int\limits_L z \operatorname{Im} z dz = \dfrac{57}{2} + \dfrac{103}{6} i$.

1.5.5. $\int\limits_L z^3 dz = 568 - 1944i$.

1.5.6. $\int\limits_L \bar{z} dz = 9 + 6i$.

1.5.7. $\int\limits_L \bar{z} dz = \dfrac{9\pi i}{2}$.

1.5.8. $\int\limits_L 2z\bar{z} dz = -256$.

1.5.9. $\int\limits_L (z + \operatorname{Re} z) dz = \dfrac{13}{2} - 8i$.

1.5.10. $\int\limits_L z dz = -30 + 15i$.

1.5.11. $\int\limits_L 4\left(z^3 + z\right) dz = 0$.

1.6.4. а) $f\left(5\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{z-5} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = 5$ внутри;

б) $f''\left(2i\right) = \dfrac{2!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{\left(z-2i\right)^3} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = 2i$ внутри;

в) $f^{(5)}\left(-2+3i\right) = \dfrac{5!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{\left(z+2-3i\right)^6} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = -2+3i$ внутри.

1.6.5. а) $f\left(2+3i\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{z-2-3i} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = 2+3i$ внутри;

б) $f'''\left(1+2i\right) = \dfrac{3!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{\left(z-1-2i\right)^4} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = 1+2i$ внутри;

в) $f^{(4)}\left(-2+i\right) = \dfrac{4!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{\left(z+2-i\right)^5} dz$, где C – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий точку $z_0 = -2+i$ внутри.

1.6.6. а) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = \frac{-3\pi(4+3i)}{50}$;

б) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = \frac{3\pi(-4+3i)}{6250}$;

в) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = \frac{-3\pi(3+4i)}{625}$;

г) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = 0$;

д) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = \frac{-3\pi(2+i)}{1250}$;

е) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = \frac{-3\pi(3+4i)}{625}$;

ж) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)(z-3i)^3(z-1)^2}dz = 0$.

1.6.7. а) $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-3i)^2(z-2)(z+3)^4}dz = \frac{-\pi e^{3i}(127+67i)}{82134}$;

б) $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-3i)^2(z-2)(z+3)^4}dz = \frac{-2\pi e^2(12+5i)}{105625}$;

в) $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-3i)^2(z-2)(z+3)^4}dz = \frac{\pi e^{-3}(-3539+3265i)}{303750}$;

г) $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-3i)^2(z-2)(z+3)^4}dz = \frac{-\pi e^{3i}(127+67i)}{82134}+$

$+\frac{-2\pi e^2(12+5i)}{105625}+\frac{\pi e^{-3}(-3539+3265i)}{303750}$;

д) $\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-3i)^2(z-2)(z+3)^4}dz = 0$.

1.6.8. а) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz = \frac{\pi(13\operatorname{ch}1 - 12\operatorname{sh}1)}{3888}$;

б) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz = -\frac{\pi\operatorname{ch}3}{7500}$;

в) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz = \frac{\pi\operatorname{ch}3}{48}$;

г) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz =$

$= \frac{\pi\operatorname{ch}3}{48} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{121}{1125}\operatorname{sh}2 + \frac{1286+900i}{50625}\operatorname{ch}2\right)$;

д) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz = \frac{\pi(13\operatorname{ch}1 - 12sh1)}{3888} - \frac{\pi\operatorname{ch}3}{7500} +$

$+ \frac{\pi\operatorname{ch}3}{48} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{121}{1125}\operatorname{sh}2 + \frac{1286+900i}{50625}\operatorname{ch}2\right)$;

е) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{(z-i)^2\left(z^2+9\right)(z+2i)^4}dz = 0$.

1.6.9. а) $\oint\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = \frac{5\pi i}{12}$;

б) $\oint\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = \frac{11\pi i}{12}$;

в) $\oint\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = \frac{\pi\left(3\sqrt{3}+i\right)}{24}$;

г) $\int\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = \frac{\pi\left(-3\sqrt{3}+i\right)}{24}$;

д) $\int\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = \frac{\pi i}{2}$;

е) $\int\limits_C \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)}dz = 0$.

1.6.10. а) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = \pi i$;

б) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = 0$;

в) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = \frac{\pi(1+i)}{2}$;

г) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = \frac{\pi(-1+i)}{2}$;

д) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = 2\pi i$;

е) $\int\limits_C \frac{z^3+27}{(z^4-81)}dz = 0$.

Раздел 2

2.1.2. а) ряд сходится и его сумма равна 1;

б) ряд сходится и его сумма равна $\frac{3}{2}$;

в) ряд сходится и его сумма равна $\frac{2}{3}$;

г) ряд расходится;

д) ряд сходится и его сумма равна $\frac{3}{10}+\frac{16}{5}i$;

е) ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$;
ж) ряд сходится и его сумма равна 2;
з) ряд расходится;
и) ряд расходится;
к) ряд расходится;
л) ряд сходится и его сумма равна 5.
2.1.4. а) сходится;
б) сходится;
в) абсолютно сходится;
г) расходится;
д) сходится;
е) сходится;
ж) сходится;
з) сходится;
и) расходится;
к) сходится;
л) сходится;
м) расходится;
н) сходится;
о) расходится.
2.1.6. а) сходится;
б) расходится;
в) расходится;
г) сходится;
д) сходится;
е) сходится;
ж) сходится;
з) сходится.
2.1.8. а) сходится;
б) расходится;
в) сходится;
г) сходится;
д) сходится;
е) расходится;
ж) сходится;
з) расходится;

и) сходится.

2.1.10. а) расходится;

б) сходится;

в) сходится;

г) абсолютно сходится;

д) сходится;

е) абсолютно сходится;

ж) сходится.

2.1.12. а) сходится условно;

б) сходится условно;

в) расходится;

г) абсолютно сходится;

д) сходится условно;

е) сходится условно;

ж) абсолютно сходится;

з) абсолютно сходится;

и) абсолютно сходится;

к) расходится.

л) сходится условно;

м) сходится условно;

н) абсолютно сходится;

о) сходится условно;

п) абсолютно сходится.

2.2.6. а) вся комплексная плоскость;

б) точка $z = 0$;

в) область абсолютной сходимости $|z| < 2$, область сходимости $|z| \le 2$, на границе $|z| = 2$ ряд сходится условно, за исключением точки $z = 2$, в которой ряд расходится;

г) область абсолютной сходимости $|z| < 1$, область сходимости $|z| \le 1$, на границе $|z| = 1$ ряд сходится условно, за исключением точки $z = 1$, в которой ряд расходится;

д) $|z| < 3$;

е) $|z+1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

ж) $|z| \le 1$;

з) область абсолютной сходимости $|z-1+2i|<2$, область сходимости $|z-1+2i|\le 2$, на границе $|z-1+2i|=2$ ряд сходится условно, за исключением точки $z=3-2i$, в которой ряд расходится;

и) область абсолютной сходимости $2<|z+1-i|<3$, область сходимости $2<|z+1-i|\le 3$, на границе $|z+1-i|=3$ ряд сходится условно, за исключением точки $z=2+i$, в которой ряд расходится;

к) $|z-i|\le\sqrt{2}$;

л) $|z-1+i|>1$;

м) пересечение областей $|z-2|<3$ и $|z-1|>2$;

н) пересечение областей $|z-3|<4$ и $|z+1|>1$;

о) $|z|<\sqrt[3]{5}$;

п) $|z|\le\sqrt[5]{7}$.

2.2.7. а) область абсолютной сходимости $|z|<\sqrt{5}$;

б) область абсолютной сходимости $|z+2-i|<7$;

в) область абсолютной сходимости $|z+1-2i|>2$;

г) областью абсолютной сходимости является пересечение областей $|z+1-\sqrt{3}i|<5$ и $|z+\sqrt{3}-i|>2$.

2.2.10. а) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z^2\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}\right|$;

б) $S=\dfrac{(z-1+2i)^3}{5}\ln\left|\dfrac{40+38i}{1-(z-1+2i)^5}\right|$;

в) $S=\dfrac{z^3\left(49+21z^4\right)}{\left(7-z^4\right)^2}$;

г) $S=\left(z-1+2i\right)^2\left(-z+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{z+2i}{2-2i-z}\right|+\dfrac{1}{4}\ln 2\right)$;

д) $S=\dfrac{18\left(z-1+i\right)^8-\left(z-1+i\right)^{13}}{\left(3-\left(z-1+i\right)^5\right)^2}$;

е) $S=\dfrac{20\left(z+i\right)^6-\left(z+i\right)^9}{\left(5-\left(z+i\right)^3\right)^2}$;

ж) $S=\dfrac{3\left(z+2-2i\right)}{\left(z-7-2i\right)^2}$;

з) $S=\dfrac{z^2+3}{z\left(z^2-3\right)^2}$.

2.3.4. а) $R=e$, $\left|z-1-i\right|<e$;

б) $R=\sqrt[5]{7}$, $\left|z\right|\le\sqrt[5]{7}$;

в) $R=9$, круг абсолютной сходимости $\left|z\right|<9$, круг сходимости $\left|z\right|\le 9$, на границе $\left|z\right|=9$ ряд сходится условно, за исключением точки $z=9$, в которой ряд расходится;

г) $R=e$, $\left|z\right|<e$;

д) $R=\sqrt[4]{5}$, $\left|z\right|\le\sqrt[4]{5}$;

е) $R=9$, круг абсолютной сходимости $\left|z+3-2i\right|<9$, круг сходимости $\left|z+3-2i\right|\le 9$, на границе $\left|z+3-2i\right|=9$ ряд сходится условно, за исключением точки $z=6+2i$, в которой ряд расходится.

2.4.10. $\cos z^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{z^{4n}}{\left(2n\right)!}$.

2.4.11. $f^{(4)}(5)=\dfrac{8}{351}$.

2.4.12. $f^{(7)}(0)=0$; $f^{(8)}(0)=0$; $f^{(9)}(0)=362880$.

2.4.13. $\dfrac{1}{z-5}=\begin{cases}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{2^{n+1}}, & |z-3|<2\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-3)^{n+1}}, & |z-3|>2\end{cases};$

$$\frac{1}{(z-5)^2}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z-3)^{n-1}}{2^{n+1}}, & |z-3|<2\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{(z-3)^{n+2}}, & |z-3|>2\end{cases}.$$

2.4.14. $z^2+7z+9=-1+3(z+2)+(z+2)^2$.

2.4.15. $z^5-6z^4+8z^3-3z^2+9z-7=-34-36(z-3)+$
$+15(z-3)^2+26(z-3)^3+9(z-3)^4+(z-3)^5$.

2.4.16. $z^5-2z^4+3z^3-3z^2+5z-17=-13+5(z-1)+$
$+4(z-1)^2+5(z-1)^3+3(z-1)^4+(z-1)^5$.

2.4.17. а) $\dfrac{1}{z-3}$;

б) $\dfrac{1}{z-3}=\begin{cases}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3)^n}{6^{n+1}}, & |z+3|<6\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{6^n}{(z+3)^{n+1}}, & |z+3|>6\end{cases}.$

2.4.18. 1) а) $\dfrac{1}{z-3}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}$,

б) $\dfrac{1}{z-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^{n+1}}$,

в) $\dfrac{1}{z-3}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$.

2) а) $\dfrac{1}{(z-3)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{nz^{n-1}}{3^{n+1}}$,

б) $\dfrac{1}{(z-3)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)3^n}{z^{n+2}}$,

в) $\dfrac{1}{(z-3)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

2.4.19. а) 1) в области $|z|<1$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}};$$

2) в области $1<|z|<2$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}};$$

3) в области $|z|>2$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}};$$

б) 1) в области $|z-1|<3$ $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-1)^{n-2}}{3^{n+1}}$;

2) в области $|z-1|>3$ $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+3}}$.

2.4.20. а) 1) в области $|z|<2$

$$\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n nz^{n-1}}{2^{n+1}};$$

2) в области $2<|z|<3$

$$\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^n}{z^{n+2}};$$

3) в области $|z|>3$

$$\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (n+1)2^n}{z^{n+2}};$$

б) 1) в области $|z-2|<4$ $\dfrac{1}{(z+3)(z+2)^2}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-2)^n}{5^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-2)^n}{4^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(z-2)^{n-1}}{4^{n+1}};$$

2) в области $4<|z-2|<5$

$$\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-2)^n}{5^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (n+1)4^n}{(z-2)^{n+2}};$$

3) в области $|z-2|>5$

$$\frac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (n+1)4^n}{(z-2)^{n+2}};$$

в) 1) в области $|z+2|<1$ $\dfrac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z+2)^{n-2}$;

2) в области $|z+2|>1$ $\dfrac{1}{(z+3)(z+2)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+2)^{n+3}}$.

2.4.21. а) $\dfrac{1}{z+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (z-3)^n}{4^{n+1}}$;

б) $\dfrac{1}{z+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n}{(z-3)^{n+1}}$;

в) $\dfrac{1}{z+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}}$.

2.4.22. а) $\dfrac{1}{(z+1)^3}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n-1)(z-3)^{n-2}}{4^{n+1}}$;

б) $\dfrac{1}{(z+1)^3}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+2)4^n}{(z-3)^{n+3}}$;

в) $\dfrac{1}{(z+1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n-1)(z-1)^{n-2}}{2^{n+2}}$.

2.4.23. $(z-i)\cos\dfrac{1}{(z-i)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-i)^{4n-1}}$.

2.4.24. а) $\sin\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

б) $\sin\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

2.4.25. а) $\cos\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}$;

б) $\cos\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

2.4.26. $e^{\frac{1}{z^3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^{3n}}$.

2.4.27. $(z+1)\sin\dfrac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+i)^{2n}(2n+1)!}+$

$+(1-i)\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+i)^{2n+1}(2n+1)!}$.

2.4.28. $(1+z)\cos\dfrac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n}(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+i)^{2n-1}(2n)!}$.

2.4.29. $e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$.

2.5.4. а) $z = \pm 2i$ нули кратности 1;

б) $z_k = 2i + \pi k,\ k \in Z$, нули кратности 3;

в) $z_k = \pi k,\ k \in Z$, нули кратности 3;

г) $z = 0$ нуль кратности 5, $z = \pm 3i$ нули кратности 3;

д) $z_k = 2\pi k,\ k \in Z$, нули кратности 2;

е) $z = -4$ нуль кратности 4, $z = 2i$ нуль кратности 5, $z = -2 \pm 4i$ нули кратности 3;

ж) $z_k = -i + \pi k,\ k \in Z$, нули кратности 50.

2.5.5. а) $z = 1$ существенно особая точка;

б) $z = 1$ полюс порядка 2;

в) $z = -\frac{\pi}{2}$ устранимая особая точка;

г) $z = -\frac{\pi}{2}$ устранимая особая точка;

$z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ k \neq -1$, простые полюсы;

д) $z_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, простые полюсы;

е) $z = -1$ полюс порядка 2, $z = -\frac{\pi}{2}$ полюс порядка 2;

ж) $z = 0$ полюс порядка 3, $z = \pm 2i$ полюсы порядка 2;

з) $z = 0$ существенно особая точка;

и) $z = 2i$ существенно особая точка;

к) $z = -3i$ существенно особая точка;

л) $z = \pm 3i$ существенно особые точки;

м) $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$, полюсы порядка 2;

н) $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, полюсы порядка 2;

о) $z = 0$ существенно особая точка;

п) $z = 0$ существенно особая точка;

р) $z=4i$ существенно особая точка.

2.5.6. а) $z_0=0$ устранимая особая точка;

б) $z_0=0$ простой полюс;

в) $z_0=2$ полюс порядка 5, $z_1=0$ нуль кратности 2;

г) $z_0=2$ правильная (регулярная) точка.

2.6.2. а) $\underset{z=0}{\operatorname{res}} z^2\cos\frac{1}{z^3}=0$, $z=0$, существенно особая точка;

б) $\underset{z=0}{\operatorname{res}}\frac{\ln(1+z^3)}{z^3}=0$, $z=0$, устранимая особая точка;

в) $\underset{z=0}{\operatorname{res}} e^{\frac{1}{z^3}}=0$, $z=0$, существенно особая точка;

г) $\underset{z=\frac{\pi}{2}}{\operatorname{res}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 z}=1$, $z=\frac{\pi}{2}$, простой полюс;

д) $\underset{z=\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{res}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 z}=1$, $z=\frac{3\pi}{2}$, полюс порядка 2;

е) $\underset{z=\sqrt{3}-i}{\operatorname{res}}\frac{z^5}{z^6+64}=\frac{1}{6}$, $z=\sqrt{3}-i$, простой полюс;

ж) $\underset{z=\sqrt{3}+i}{\operatorname{res}}\frac{z^5}{z^3+64}=0$, $z=\sqrt{3}+i$, регулярная точка;

з) $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}}\frac{z^5}{z^3+5}=5$, $z=\infty$, полюс порядка 2;

и) $\underset{z=2i}{\operatorname{res}}(z-2i)^2\sin\frac{1}{z-2i}=-\frac{1}{6}$, $z=2i$, существенно особая точка;

к) $\underset{z=0}{\operatorname{res}}(z-1+i)^2\cos\frac{1}{z-1+i}=0$, $z=0$, регулярная точка;

л) $\underset{z=0}{\operatorname{res}}\frac{\ln(1+2z)}{z^3}=-2$, $z=0$, полюс порядка 2;

м) $\operatorname*{res}_{z=3i} e^{\frac{1}{z-3i}} = 1$, $z = 3i$, существенно особая точка;

н) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^3 \ln\left(\frac{z+1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, $z = \infty$, полюс порядка 2;

о) $\operatorname*{res}_{z=4i} \frac{e^{z-4i}-1}{(z-4i)^3} = \frac{1}{2}$, $z = 4i$, полюс порядка 2;

п) $\operatorname*{res}_{z=\pi} \frac{z-\pi}{\sin^2 z} = 1$, $z = \pi$, простой полюс;

р) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z-\pi}{\sin^2 z} = 1$, $z = 0$, полюс порядка 2.

2.7.5. а) $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^8}{z^3+8} dz = 128\pi i$;

б) $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^8}{z^4+16} dz = -16\sqrt{2}\pi i$;

в) $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+2z+10}{z^2(z^3+8)} dz = \frac{5\pi i}{12}$;

г) $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{2z}}{(z-2)^3} dz = 4\pi i e^4$;

д) $\int\limits_{|z-\pi|=1} \frac{z}{\sin z} dz = -2\pi^2 i$;

е) $\int\limits_{|z-1+i|=2,5} \frac{z^3+27}{(z^4-81)} dz = \frac{2\pi(1+3i)}{3}$;

ж) $\int\limits_{|z+4i|=3} \frac{2z-5}{z^2-4z+20} dz = \frac{\pi(1+8i)}{4}$;

з) $\int\limits_{|z|=1/2} (z^5+2z-3)\cos\frac{1}{z^2} dz = 0$;

и) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} (z^8+3z^4-2)\sin\frac{1}{z^3}\,dz = -\frac{\pi i}{3}$;

к) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (z^3+z)\cos\frac{1}{z}\,dz = -\frac{11\pi i}{12}$;

л) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3dx}{\left(x^2+16\right)^2\left(x^2-8x+20\right)} = \frac{\pi\left(-258806+359167i\right)}{287300}$;

м) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+11\right)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{11}}$;

н) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2} = \frac{\pi}{2}$;

о) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3}+\sin x} = \pi\sqrt{2}$;

п) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{7}+\cos x\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{7}}{3\sqrt{6}}$;

р) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(8+\sin x)^2} = \frac{16\pi}{63\sqrt{63}}$.

Раздел 3

3.5. а) $a_0 = \dfrac{2}{3}$, $a_n = \dfrac{3}{\pi^2 n^2}\left(2\cos\dfrac{2\pi n}{3} - \cos\dfrac{\pi n}{3} - (-1)^n\right) +$

$+\dfrac{1}{\pi n}\left(3\sin\dfrac{2\pi n}{3} + \sin\dfrac{\pi n}{3}\right)$,

$b_n = \dfrac{1}{\pi n}\left(\cos\dfrac{\pi n}{3} - \cos\dfrac{2\pi n}{3}\right) - \dfrac{3}{\pi^2 n^2}\sin\dfrac{\pi n}{3}$;

б) $a_0=\dfrac{5}{2}$, $a_n=\dfrac{4}{\pi^2n^2}\left(1-\cos\dfrac{\pi n}{2}-\cos\dfrac{3\pi n}{4}+\cos\dfrac{\pi n}{4}\right)$,

$$b_n=\frac{(-1)^n}{\pi n}-\frac{1}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{3\pi n}{4}-\cos\frac{\pi n}{4}\right)+$$

$$+\frac{4}{\pi^2n^2}\left(\sin\frac{\pi n}{4}-\sin\frac{3\pi n}{4}-\sin\frac{\pi n}{2}\right);$$

в) $a_0=\dfrac{3}{2}$, $a_n=\dfrac{3\left(1-\left(-1^n\right)\right)}{\pi^2n^2}$,

$$b_n=\frac{1}{\pi n}+\frac{6}{\pi^2n^2}\left(\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{\pi n}{3}\right).$$

3.6. а) $a_0=\dfrac{5}{2}$, $a_n=\dfrac{8}{\pi^2n^2}\left(\cos\dfrac{3\pi n}{4}+\cos\dfrac{\pi n}{4}-\cos\dfrac{\pi n}{2}-(-1)^n\right)$,

$b_n=0$, $n=1,2,\ldots$;

б) $a_0=\dfrac{3}{4}$, $a_n=\dfrac{8}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1+\cos\dfrac{\pi n}{4}-2\cos\dfrac{3\pi n}{4}+\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)+$

$+\dfrac{2}{\pi n}\left(3\sin\dfrac{\pi n}{4}-2\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $b_n=0$, $n=1,2,\ldots$;

в) $a_0=\dfrac{2}{3}$, $a_n=\dfrac{6}{\pi^2n^2}\left(1+(-1)^n-\cos\dfrac{2\pi n}{3}-\cos\dfrac{\pi n^n}{3}\right)+$

$+\dfrac{2}{\pi n}\left(\sin\dfrac{\pi n}{3}+\sin\dfrac{2\pi n}{3}\right)$, $b_n=0$, $n=1,2,\ldots$

3.7. а) $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$,

$$b_n=\frac{4}{\pi n}+\frac{8}{\pi^2n^2}\left(\sin\frac{3\pi n}{4}+\sin\frac{\pi n}{4}-\sin\frac{\pi n}{2}\right);$$

б) $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$, $b_n=\dfrac{8}{\pi^2n^2}\left(\sin\dfrac{\pi n}{4}-2\sin\dfrac{3\pi n}{4}+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)+$

$$+\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}-3\cos\frac{\pi n}{4}\right);$$

в) $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$,

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\left(2 - \cos\frac{2\pi n}{3} - \cos\frac{\pi n}{3}\right) - \frac{6}{\pi^2 n^2}\left(\sin\frac{2\pi n}{3} + \sin\frac{\pi n}{3}\right).$$

3.8. а) $c_n = \frac{6(-1)^n i}{n\pi}$; б) $c_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sh} 9}{81 + n^2\pi^2}(9 - i\pi n)$;

в) $c_n = \frac{32(-1)^n}{n^2\pi^2}$; г) $c_n = \frac{2(-1)^{n+1} i}{n}$; д) $c_n = \frac{\left(1 + (-1)^n\right)}{2\pi\left(n^2 - 1\right)}(1 - in)$.

Раздел 4

4.1.3.

а) $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin(s+5)}{(s+5)^2} - \frac{\sin(s-5)}{(s-5)^2} + \frac{\cos(s-5)}{s-5} - \frac{\cos(s+5)}{s+5}\right)$;

б) $\Phi(s) = ise^{\frac{1}{2}\left(6is + s^2\right)}$;

в) $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\left[(s+3)\pi\right]}{s+3} + \frac{\sin\left[(s-3)\pi\right]}{s-3}\right)$;

г) $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{2(3-is)}}{3-is} - \frac{e^{2(3+is)}}{3+is} - \frac{2is}{9+s^2}\right)$;

д) $\Phi(s) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\cos(s+2)}{s+2} + \frac{\cos(s-2)}{s-2} - \frac{\sin(s-2)}{(s-2)^2} - \frac{\sin(s+2)}{(s+2)^2}\right)$;

е) $\Phi(s) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{s+3}\sin\left[\frac{(s+3)\pi}{2}\right] - \frac{1}{s-3}\sin\left[\frac{(s-3)\pi}{2}\right]\right)$;

ж) $\Phi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cos 2s + \sin 2s}{1+s^2}\right)$;

з) $\Phi(s) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{s}\sin 2s + \frac{2}{s^2}\cos 2s - \frac{1}{s^3}\sin 2s\right)$;

и) $\Phi(s) = \frac{6}{\sqrt{2\pi}\left(9+s^2\right)}$.

4.1.4. а) $\Phi_s(s)=0$;

б) $\Phi_c(s)=\dfrac{\sqrt{2\pi}e^{-5s}(5s+1)}{500}$;

в) $\Phi_c(s)=\dfrac{s\sin\pi s}{\sqrt{2\pi}\left(s^2-4\right)}$;

г) $\Phi_s(s)=\dfrac{3\sin\pi s}{\sqrt{2\pi}\left(9-s^2\right)}$;

д) $\Phi_c(s)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{32}\left[e^{-2s\sin\frac{3\pi}{8}}\sin\left(2s\cos\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)-\right.$

$\left.-e^{-2s\sin\frac{7\pi}{8}}\sin\left(2s\cos\dfrac{7\pi}{8}-\dfrac{5\pi}{8}\right)\right]$;

е) $\Phi_c(s)=\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}\left(9+s^2\right)}$;

ж) $\Phi_s(s)=\dfrac{\sqrt{2\pi}se^{-2s}}{8}$;

з) $\Phi_s(s)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[\dfrac{1}{4+(s-3)^2}-\dfrac{1}{4+(s+3)^2}\right]$;

и) $\Phi_c(s)=\dfrac{16\sin 4\pi s}{\sqrt{2\pi}\left(1-16s^2\right)}$;

к) $\Phi_s(s)=\dfrac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(-\dfrac{2}{s}\cos 2s+\dfrac{1}{s^2}\sin 2s\right)$;

л) $\Phi_s(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\dfrac{12}{s}\cos 4s+\dfrac{4}{s}+\dfrac{2}{s^2}\sin 4s\right)$;

м) $\Phi_c(s)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{3}{s}\sin 3s+\dfrac{1}{s^2}\cos 3s-\dfrac{1}{s^2}\right)$.

4.2.9. а) $F(p)=\frac{2}{(p-2)^3}+\frac{1}{(p-2)^2}$;

б) $F(p)=\frac{10p}{\left(p^2+25\right)^2}+\frac{p^2-16}{\left(p^2+16\right)^2}$;

в) $F(p)=\frac{3}{4\left(p^2+1\right)}-\frac{1}{4\left(p^2+9\right)}$;

г) $F(p)=\frac{3}{8p}+\frac{p}{2\left(p^2+4\right)}+\frac{p}{8\left(p^2+16\right)}$;

д) $F(p)=\frac{6\left(p^3+48p\right)}{\left(p^2-16\right)^3}-\frac{5p}{p^2-16}$;

е) $F(p)=\frac{1}{p(p-5)^2}$;

ж) $F(p)=\frac{4}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{2}\right)$;

з) $F(p)=\frac{1}{2p^3}+\frac{4-p^2}{2p\left(p^2+4\right)^2}$;

и) $F(p)=\frac{1}{p}\left(\frac{18p}{\left(p^2+9\right)^2}-\frac{6}{p^2+9}\right)$;

к) $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}p$;

л) $F(p)=\frac{1}{2}\ln\left|p^2+16\right|-\ln|p|$;

м) $F(p)=\ln|p-3|-\ln|p|$;

н) $F(p)=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{5}\right)$;

о) $F(p)=\dfrac{18\left(p^2+3\right)}{\left(p^2+9\right)^3}$;

п) $F(p)=\dfrac{12\left(3p^2+4\right)}{\left(p^2-4\right)^3}+\dfrac{20p}{\left(p^2-4\right)^2}$;

р) $F(p)=\dfrac{768}{(2p+1)^5}+\dfrac{24}{(2p+1)^3}+\dfrac{4}{2p+1}$.

4.2.10. а) $F(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{3e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-3p}}{p^2}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{3e^{-p}}{p}-\dfrac{3e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{3e^{-3p}}{p^2}-\dfrac{e^{-5p}}{p^2}$;

в) $F(p)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{e^{-p}}{p}-\dfrac{e^{-3p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-4p}}{p^2}$;

г) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2}-\dfrac{3e^{-4p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-5p}}{p^2}$;

д) $F(p)=-\dfrac{2}{p}+\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-3p}}{p^2}-\dfrac{3e^{-4p}}{p^2}+\dfrac{e^{-5p}}{p^2}-\dfrac{e^{-6p}}{p^2}$.

4.2.11. а) $\left(f*g\right)(t)=\int\limits_0^t e^{3(t-\tau)}\cos^2 5\tau\,d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\frac{1}{p-3}\left(\frac{1}{2p}+\frac{p}{2\left(p^2+100\right)}\right);$$

б) $\left(f*g\right)(t)=\int\limits_0^t(3\sin\tau-5\cos\tau)\operatorname{sh}\big(3(t-\tau)\big)d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\frac{3}{p^2-9}\left(\frac{3}{p^2+1}-\frac{5p}{p^2+1}\right);$$

в) $(f*g)(t)=\int\limits_0^t \sin(t-\tau)\cos 7\tau\, d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\frac{3p}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+49\right)};$$

г) $(f*g)(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^5 \sin^2 4\tau\, d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\frac{5!}{p^6}\left(\frac{1}{2p}-\frac{4}{p^2+64}\right);$$

д) $(f*g)(t)=\int\limits_0^t \left(3(t-\tau)^2+2(t-\tau)-4\right)e^{5\tau}\cos 3\tau\, d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\left(\frac{6}{p^3}+\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p}\right)\frac{p-5}{(p-5)^2+9};$$

е) $(f*g)(t)=\int\limits_0^t \left(\tau^3+\tau^2\right)e^{-2\tau}\,\mathrm{sh}\big(5(t-\tau)\big)\, d\tau$,

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=\frac{5}{p^2-25}\left(\frac{2}{(p+2)^3}-\frac{6}{(p+2)^4}\right).$$

4.2.12. а) $f(t)=-\frac{1}{10}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{5}e^{2t}$;

б) $f(t)=-e^{-4(t-1)}+2e^{3(t-1)}$;

в) $f(t)=e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$;

г) $f(t)=e^{t-2}-e^{2(t+1)}+(t-1)e^{2(t-1)}$;

д) $f(t)=-e^{-2(t+2)}+e^{-(t+2)}+\frac{1}{2}(t+2)^2 e^{-(t+2)}$;

е) $f(t)=2e^{-(t-1)}\cos\big(2(t-1)\big)+\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin\big(2(t-1)\big)-\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$;

ж) $f(t)=2e^{-2(t+3)}\cos(2(t+3))-\frac{3}{2}e^{-2(t+3)}\sin(2(t+3))-$

$-e^{t-2}\cos(2(t-2))-\frac{3}{2}e^{t-2}\sin(2(t-2))$;

з) $f(t)=-2e^{t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{t}\sin 3t+2e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t$;

и) $f(t)=3\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t-e^{3t}\cos 3t-\frac{5}{3}e^{3t}\sin 3t$;

к) $f(t)=-3-t+2e^{3t}+2e^{-4t}\cos 3t-3e^{-4t}\sin 3t$;

л) $f(t)=9e^{-4(t+2)}-(t-4)\,e^{-4(t-4)}+2e^{2(t-1)}\cos(5(t-1))+$

$+\frac{9}{5}e^{2(t-1)}\sin(5(t-1))$;

м) $f(t)=-3e^{-2t}\cos 6t+\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 6t-2te^{3t}+3e^{-2t}$.

4.2.13. а) $y(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+3e^{-2x}-\frac{5}{2}e^{-3x}$;

б) $y(x)=-\frac{1}{1000}x^{2}\sin 5x-\frac{603}{5000}x\cos 5x+\cos 5x+\frac{10603}{25000}\sin 5x$;

в) $y(x)=\frac{39}{1537}e^{x}\cos x-\frac{4}{1537}e^{x}\sin x+\frac{1498}{1537}e^{3x}\cos 6x-$

$-\frac{4529}{9222}e^{3x}\sin 6x$;

г) $y(x)=-\frac{7}{125}e^{x}-\frac{7}{25}xe^{x}-\frac{3}{10}x^{2}e^{x}+\frac{7}{125}e^{6x}$;

д) $y(x)=-\frac{57}{16}e^{-3x}+\frac{79}{8}xe^{-3x}+\frac{89}{16}e^{-3x}\cos 4x-\frac{23}{32}e^{-3x}\sin 4x$;

е) $y(x)=e^{x}\cos 3x-\frac{5}{18}e^{x}\sin 3x+\frac{51}{18}xe^{x}\cos 3x-\frac{4}{3}xe^{x}\sin 3x$;

ж) $y(x)=\frac{14}{5}\cos x-\frac{36}{25}\sin x+\frac{2}{25}e^{2x}+\frac{11}{25}xe^{2x}$;

з) $y(x)=\frac{41}{20}e^{-x}+\frac{3}{4}e^{3x}-\frac{1}{5}e^{4x}$;

и) $y(x) = -3e^{2x} + 2xe^{2x} - 2x^2e^{2x} + \frac{10}{3}e^{x} + \frac{2}{3}e^{4x}$.

4.2.14. а) $\begin{cases} x(t) = te^{t} - e^{-t} - 2 - t^2 + 2e^{t} \\ y(t) = te^{t} + e^{-t} - 2t + e^{t} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x(t) = \frac{3}{13}\cos t + \frac{9}{13}\sin t + \frac{3}{2}e^{t} + \frac{27}{52}e^{-5t} \\ y(t) = \frac{7}{26}\cos t - \frac{87}{26}\sin t - \frac{17}{6}e^{t} + \frac{139}{39}e^{-5t} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x(t) = -17 + 11t - 2t^2 + 14e^{-t} - 2te^{-t} \\ y(t) = -14 + 8t - t^2 + 15e^{-t} - 2te^{-t} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x(t) = -2 - 2t - 5e^{t} - 4te^{t} + 8e^{2t} \\ y(t) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t - 6e^{t} - 5te^{t} + \frac{3}{2}e^{2t} \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x(t) = 3 - t - t^2 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t \\ y(t) = 4 - t - 2t^2 - e^{-t} - 2\cos t + 3\sin t \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x(t) = -e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{2t}\sin t \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{73}{5}e^{t} + \frac{33}{2}e^{2t} \\ y(t) = \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{73}{5}e^{t} + 11e^{2t} \end{cases}$;

з) $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{5}e^{t} + \frac{4}{3}\cos t - \frac{2}{15}\cos 2t - \frac{12}{5}\sin 2t \\ y(t) = -\frac{2}{5}e^{t} + \frac{2}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t - \frac{19}{15}\cos 2t - \frac{17}{15}\sin 2t \end{cases}$;

и) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{5}{4}e^{2t} - \dfrac{2}{3}e^{t} + \dfrac{41}{12}e^{-2t} \\ y(t) = \dfrac{7}{4}e^{2t} - \dfrac{4}{3}e^{t} - \dfrac{41}{12}e^{-2t} \end{cases};$

к) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{671}{500}e^{3t} - \dfrac{151}{50}te^{3t} - \dfrac{13}{20}t^2e^{3t} - \dfrac{171}{500}\cos t - \dfrac{3}{500}\sin t \\ y(t) = -\dfrac{334}{125}e^{3t} - \dfrac{142}{25}te^{3t} + \dfrac{19}{10}t^2e^{3t} - \dfrac{41}{125}\cos t + \dfrac{87}{125}\sin t \end{cases};$

л) $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{245}{136}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{3t} - \dfrac{49}{328}e^{5t} + \dfrac{140}{697}\cos 4t - \dfrac{70}{1394}\sin 4t \\ y(t) = \dfrac{245}{136}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{3t} - \dfrac{147}{328}e^{5t} - \dfrac{72}{697}\cos 4t - \dfrac{433}{5576}\sin 4t \end{cases}.$

Литература

1. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М.А. Евграфова. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

2. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Физматгиз, 1960. – 368 с.

3. Сборник задач по курсу высшей математики: учеб. пособие для втузов / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк [и др.]. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.

4. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение: учеб. пособие / А.В. Ефимов. – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.

5. Магазинников Л.И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования / Л.И. Магазинников. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2002. – 206 с.

6. Магазинников Л.И. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения) / Л.И. Магазинников, Г.Н. Глазов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. – Ч. 1. – 198 с.

7. Магазинников Л.И. Высшая математика. Специальные разделы (для автоматизированной технологии обучения) / Л.И. Магазинников, Г.Н. Глазов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. – Ч. 2. – 193 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009. – Т. 3. – 800 с.

Учебное издание

Ельцов Александр Александрович
Ельцова Тамара Александровна

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ТЕОРИИ РЯДОВ, ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие

Подписано в печать 18.10.18. Формат 60х84/16.
Усл.-печ. л. 11,39. Тираж 100 экз. Заказ 416.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.