МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

(ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.А. Мицель
Е.Б. Грибанова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ИМИТАЦИОННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Томск
ТУСУР
2016

УДК 681.51.015.26(076)
ББК 32.816я73
М70

Мицель А.А.

М70 Сборник задач по имитационному моделированию экономических процессов / А.А. Мицель, Е.Б. Грибанова. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2016. – 218 с.

ISBN 978-5-86889-358-2

Приведено более 300 задач различной сложности по имитационному моделированию экономических процессов. Рассмотрены примеры их решения. Основное внимание уделено задачам по написанию алгоритмов, а также «ручной» имитации экономических систем. Наиболее сложными задачами являются задачи по написанию алгоритмических моделей экономических объектов. Приведено описание модели брокера, модели копировального центра, модели производства, модели управления запасами с ограниченной вместимостью склада и событийной модели управления запасами. Часть моделей управления запасами составлена авторами, а алгоритмы двух последних моделей получены путем модификации классического алгоритма модели управления запасами. К каждой главе даются краткие теоретические сведения. В приложениях содержится справочная информация, которая может быть полезна при решении задач.

Предназначено для студентов специальности 09.03.03 «Прикладная информатика (профиль – прикладная информатика в экономике)». Кроме того, может быть использовано студентами других смежных экономических специальностей. Кроме того, может быть использовано студентами других смежных экономических специальностей.

УДК 681.51.015.26(076)
ББК 32.816я73

ISBN 978-5-86889-358-2

Содержание

Глава 1. Моделирование случайных событий

1.1 Моделирование простого события

Рассмотрим механизм моделирования простого события. Пусть имеется событие A, вероятность наступления которого равна P_A. Выберем с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,1) некоторое число z. Известно, что вероятность попадания в интервал $(0, P_A)$ случайной величины z равна величине P_A. Поэтому если при розыгрыше число z попало в этот интервал, то следует считать, что событие A произошло. Противоположное событие (не A) произойдет с вероятностью $(1 - P_A)$ в том случае, если $z \geq P_A$.

Процедура моделирования простого события в имитационной модели описывается алгоритмом, схема которого показана на рис. 1.1. Оператор 1 обращается к датчику случайных чисел, генерирующему случайную величину z. Оператор 2 проверяет условие $z < P_A$. Если оно выполняется, считается, что произошло событие A. В противном случае считается, что произошло противоположное событие (не A).

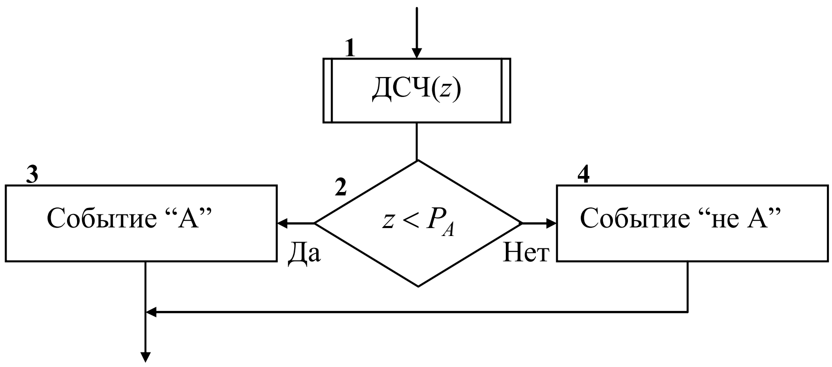


Рис.1.1 – Моделирование простого события

Пример 1

Вероятность P_A того, что купленный телефон сломается до истечения гарантийного срока, равна 0,01. Напишите алгоритм моделирования данного события.

Решение

Алгоритм моделирования события поломки телефона до истечения гарантийного срока приведен на рис. 1.2. Таким образом, моделируется случайное число z, равномерно распределенное на интервале (0,1), после чего проверяется, меньше ли оно вероятности наступления события. Если число z меньше P_A, то считается, что событие произошло, в противном случае данное событие не произошло, а, значит, телефон не будет сломан до истечения гарантийного срока.

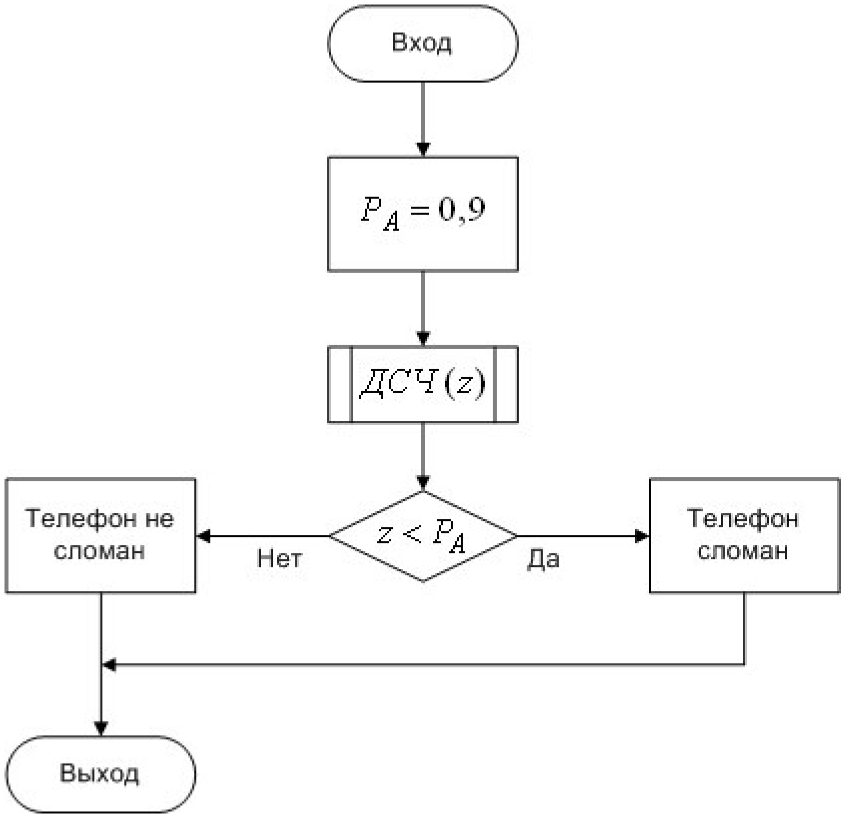


Рис. 1.2 – Алгоритм моделирования события поломки телефона до истечения гарантийного срока

Пример 2

Вероятность P_A покупки квартиры каждым клиентом в агентстве недвижимости равна 0,22. Напишите алгоритм моделирования события покупки квартиры для определения выручки фирмы, если считать, что в агентство обратилось десять клиентов (N=10). Стоимость покупки для всех клиентов одинакова и равна 1000000 руб. (S=1000000 руб.). Какое произойдет событие, если для одного из клиентов z = 0,25?

Решение

Алгоритм моделирования событий покупки квартиры клиентами представлен на рис. 1.3. Здесь V - выручка фирмы. Блок 1 устанавливает значения входных данных. Оператор 2 осуществляет циклический перебор клиентов, обратившихся в агентство. Оператор 3 моделирует случайную величину z, равномерно распределенную на интервале (0,1). Оператор 4 моделирует событие покупки квартиры. Если событие наступает (выполняется условие $z < P_A$), то оператор 5 прибавляет к суммарной выручке фирмы величину S суммы покупки. В противном случае переходим к следующему клиенту.

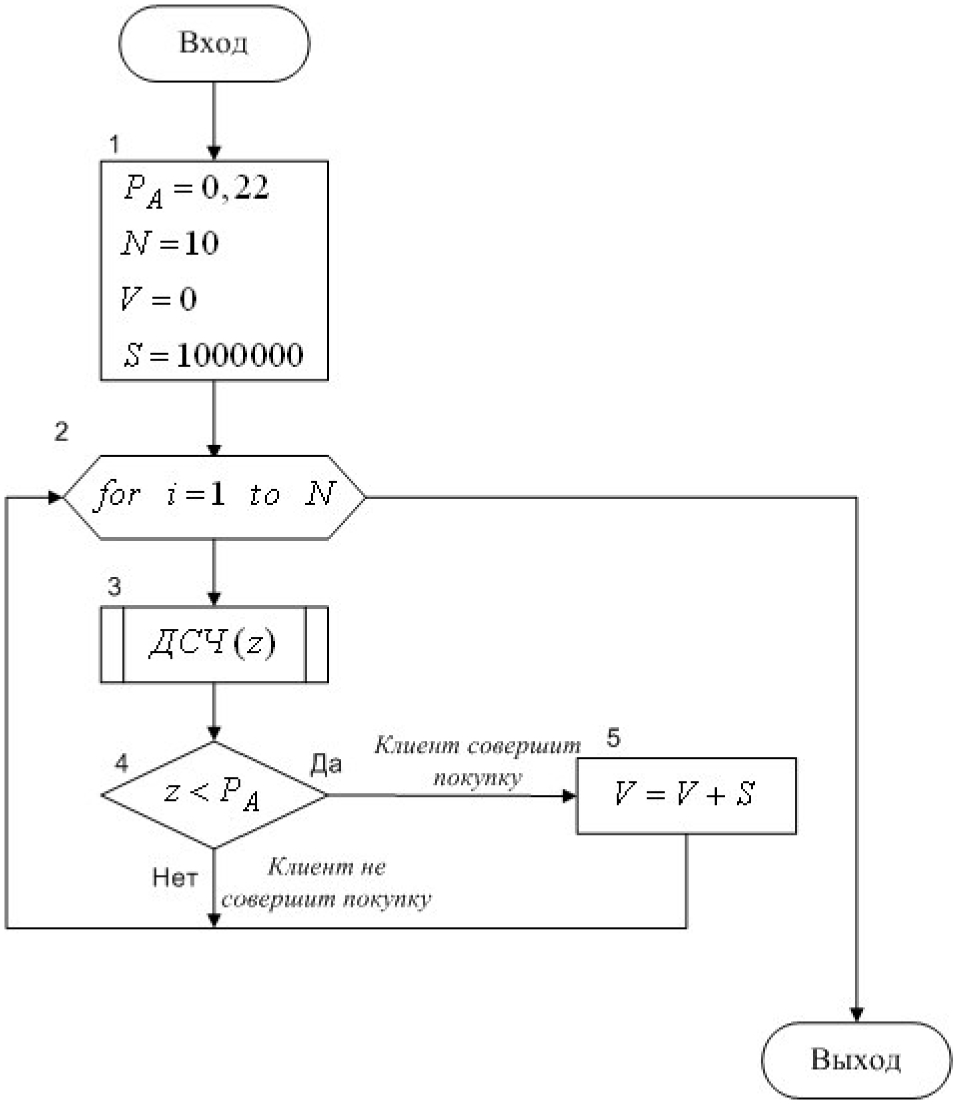


Рис. 1.3 – Алгоритм моделирования события покупки квартиры

В том случае, если z=0,25, то условие $z < P_A$ не выполняется, поэтому клиент не совершит покупку.

Пример 3

Человек оказался в незнакомом городе и направляется в сторону вокзала. Ему необходимо пройти пять перекрестков. На каждом из этих перекрестков он может с вероятностью 0,25 пойти правильным путем. Выбрав следующие случайные числа для моделирования события прохода перекрестка, определите, на каком перекрестке он впервые свернет в неправильном направлении: z_1=0,13; z_2=0,02; z_3=0,21; z_4=0,54; z_5=0,87.

Решение

Согласно алгоритму моделирования простого события человек будет идти правильным путем до тех пор, пока z_i<0,25 (i =1,..,5) (рис.1.4).

Следовательно, первые три перекрестка он пройдет в правильном направлении, а на четвертом сделает ошибку.

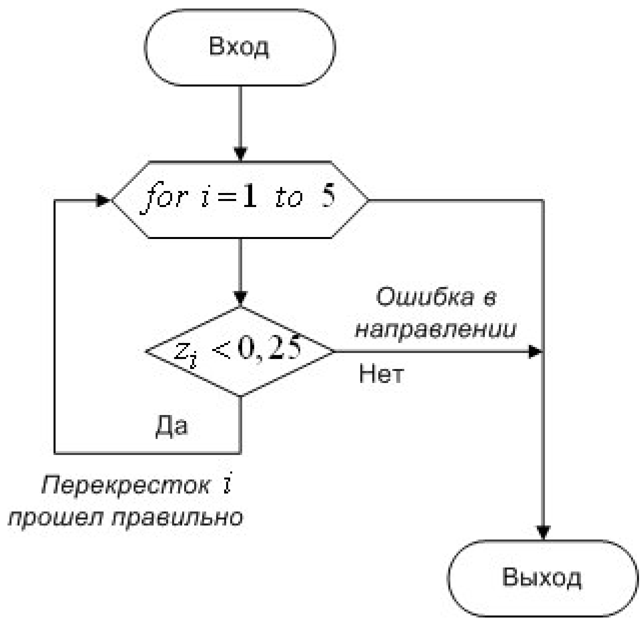


Рис.1.4 – Алгоритм моделирования прохода перекрестка

Задача 1

Студент не подготовился к тесту и отвечает на вопросы наугад. К каждому вопросу дано четыре варианта ответа, один из которых правильный. Поэтому вероятность P того, что студент отгадает правильный ответ, равна 0,25. Напишите алгоритм для определения количества правильных ответов, которые дал студент, если в тесте всего 90 вопросов.

Задача 2

Вероятность P_A срыва срока поставки товара поставщиком равна 0,14. В этом случае фирма несет убыток Y=500 руб., связанный с дефицитом товаром. Напишите алгоритм, определяющий убыток фирмы при N=20 поставках. Какое произойдет событие, если для одной из поставок z = 0,20 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 3

Вероятность P_A покупки бракованного товара в магазине равна 0,07. Напишите алгоритм, определяющий количество проданного бракованного товара для N=200 покупателей. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,15 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 4

Вероятность P_A получения студентом положительной оценки на экзамене равна 0,80. Напишите алгоритм моделирования события сдачи экзамена, если студент сдает экзамен до тех пор, пока не получит положительную оценку, а максимальное число пересдач равно 3. Какое произойдет событие, если для одной из попыток z = 0,24 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 5

Вероятность P_A того, что мобильный телефон абонента занят, равна 0,42. Напишите алгоритм моделирования N=120 звонков для определения числа принятых вызовов. Какое произойдет событие, если для одного из звонков z = 0,53 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1)).

Задача 6

Вероятность P_A годовых внеплановых убытков фирмы, связанных с чрезвычайными ситуациями, равна 0,03. Напишите алгоритм, определяющий убытки фирмы за N=3 года, если их величина равна 50000 руб. (Y=50000 руб.). Какое произойдет событие, если для одного из годов z = 0,30 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 7

Вероятность P_A поломки изделия в процессе производства равна 0,10. В этом случае убытки Y фирмы составят 500 руб. Напишите алгоритм, определяющий убытки фирмы, если рассматривается производство N=30 изделий. Какое произойдет событие, если для одного из изделий z = 0,15 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 8

Вероятность P_A выигрыша в лотерею равна 0,20. Напишите алгоритм, определяющий общую сумму выигрыша, если билеты купили N=50 человек. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,19 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 9

Вероятность P_A того, что покупатель вернет купленный товар, равна 0,38. Напишите алгоритм, определяющий количество товара, которое было возвращено N=50 покупателями. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,75 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 10

Вероятность P_A отсутствия товара на складе предприятия равна 0,23. В случае дефицита фирма платит неустойку покупателям в размере Y=300 руб. Напишите алгоритм, определяющий убытки предприятия, вызванные дефицитом товара, считая, что в фирму обратилось N=150 клиентов. Какое произойдет событие, если для одного из клиентов z = 0,12 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 11

Вероятность P_A того, что работник фирмы заболеет, равна 0,12. Напишите алгоритм, определяющий количество заболевших людей, если в фирме работает N=120 человек. Какое произойдет событие, если для одного из сотрудников z = 0,70 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 12

Вероятность P_A того, что клиент туристической фирмы поедет отдыхать заграницу, равна 0,33. В этом случае прибыль составит S=15000 руб. Напишите алгоритм, определяющий прибыль туристической фирмы, считая, что в фирму обратилось N=80 клиентов. Какое произойдет событие, если для одного из клиентов z = 0,52 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 13

Вероятность P_A того, что инвестиционный проект не окупится, равна 0,19. В этом случае убытки составят Y=150000 руб. Напишите алгоритм, определяющий возможные убытки для N=100 инвестиционных проектов. Какое произойдет событие, если для одного из проектов z = 0,22 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 14

Вероятность P_A того, что срок годности товара истечет прежде, чем он будет продан, равна 0,47. В случае продажи товара фирма получает выручку в размере S=40 руб. В случае истечения срока годности фирма несет убыток, равный 30 руб. (Y=30 руб.). Напишите алгоритм, определяющий прибыль рассматриваемой фирмы, считая, что в продажу поступило N=350 товаров. Какое произойдет событие, если для одного из товаров z = 0,14 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 15

Вероятность P_A получения в каждом месяце премии работником равна 0,67. Напишите алгоритм, определяющий количество полученных премий работником за год. Какое произойдет событие, если для одного из работников z = 0,82 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 16

Вероятность P_A поломки товара при транспортировке равна 0,14. Напишите алгоритм, определяющий количество поврежденного товара, считая, что транспортируется N=80 товаров. Какое произойдет событие, если для одного из товаров z = 0,11 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 17

Два игрока бросают по очереди монету. Вероятность выпадения «Герба» равна 0,5. Напишите алгоритм для определения победителя, если выигрывает тот игрок, у кого первого выпал «Герб».

Задача 18

С помощью конвейера осуществляется сборка изделия. Число деталей равно 25. Каждая деталь с вероятностью P=0,01 может оказаться бракованной. В том случае, если хотя бы одна деталь бракованная, то изделие также считается бракованным. Напишите алгоритм для определения, будет ли рассматриваемое изделие бракованным или нет.

Задача 19

Вероятность P_A выхода из строя оборудования в производственном цехе равна 0,29. Напишите алгоритм для определения числа поломок, если в цехе расположено 40 оборудований. Какое произойдет событие, если для одного из оборудований z = 0,25?

Задача 20

Вероятность P_1 заболевания человеком простудой равна 0,6. В том случае, если человеку сделали прививку, то вероятность уменьшается до P_2=0,2. Напишите алгоритм для определения, на сколько человек уменьшилось число больных благодаря прививке, если рассматривается N=90 человек.

Задача 21

Пусть человек оказался в лабиринте. На каждой развилке он с вероятностью 0,5 может выбрать правильное направление. На какой из семи развилок он сделает первую ошибку, если случайные числа, используемые при моделировании события выбора направления равны: z_1=0,43; z_2=0,06; z_3=0,27; z_4=0,39; z_5=0,82; z_6=0,71; z_7=0,98.

1.2 Моделирование полной группы несовместных событий

Пусть имеется полная группа несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_k$ с вероятностями $P_1, P_2, ..., P_k$. При этом выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1.$$

Процедура моделирования полной группы несовместных событий описывается алгоритмом, схема которого показана на рис. 1.5. Здесь L_i - кумулятивная вероятность

$$L_i = P_1 + P_2 + ... + P_i.$$

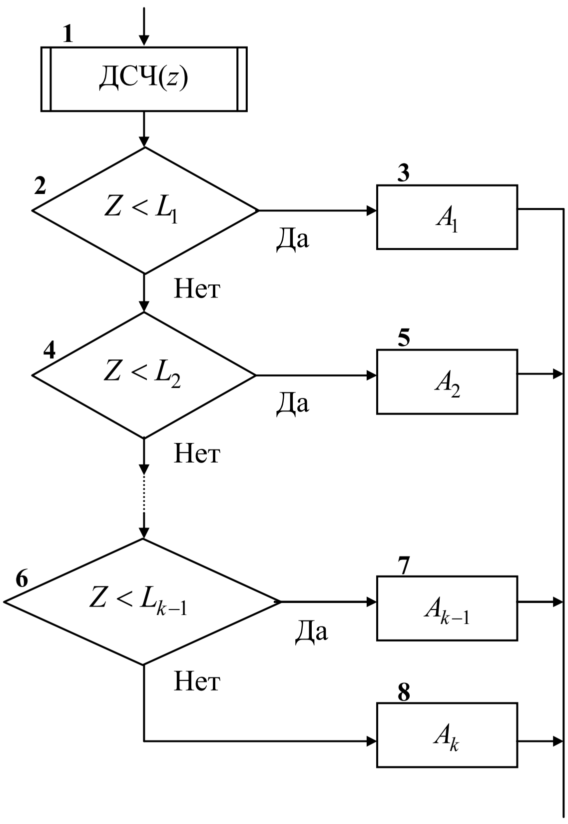


Рис. 1.5 – Алгоритм моделирования полной группы несовместных событий

Оператор 1 обращается к датчику случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1). Условный оператор 1 проверяет условие попадания случайной величины z в интервал $(0, L_1)$. Если это условие выполняется, то считается, что произошло событие A_1. Если условие в операторе

2 не выполняется, то алгоритм осуществляет проверку условий попадания случайной величины в другие интервалы. Одно из событий $A_1, A_2, ..., A_k$ обязательно произойдет.

Пример 1

Цена P_t на товар с вероятностью P_1 поднимется на t ден.ед., с вероятностью P_2 упадет на t ден.ед. и с вероятностью P_3 останется без изменения в текущем месяце. Напишите алгоритм для определения значения цены товара через четыре месяца.

Решение

Алгоритм представлен на рис.1.6. Оператор 1 производит циклический перебор месяцев, в течение которых наблюдается поведение цены. Оператор 2 осуществляет моделирование случайной величины z, равномерно распределенной на интервале (0,1). Оператор 3 проверяется условие попадания случайной величины z в интервал (0, P_1). Если случайная величина попала в этот интервал, то считается, что произошло повышение цены P_t на t ден.ед. Если случайная величина z попала в интервал $[P_1, P_1 + P_2)$, то считается, что цена P_t на товар упала на t ден.ед. В противном случае – цена на товар остается без изменения.

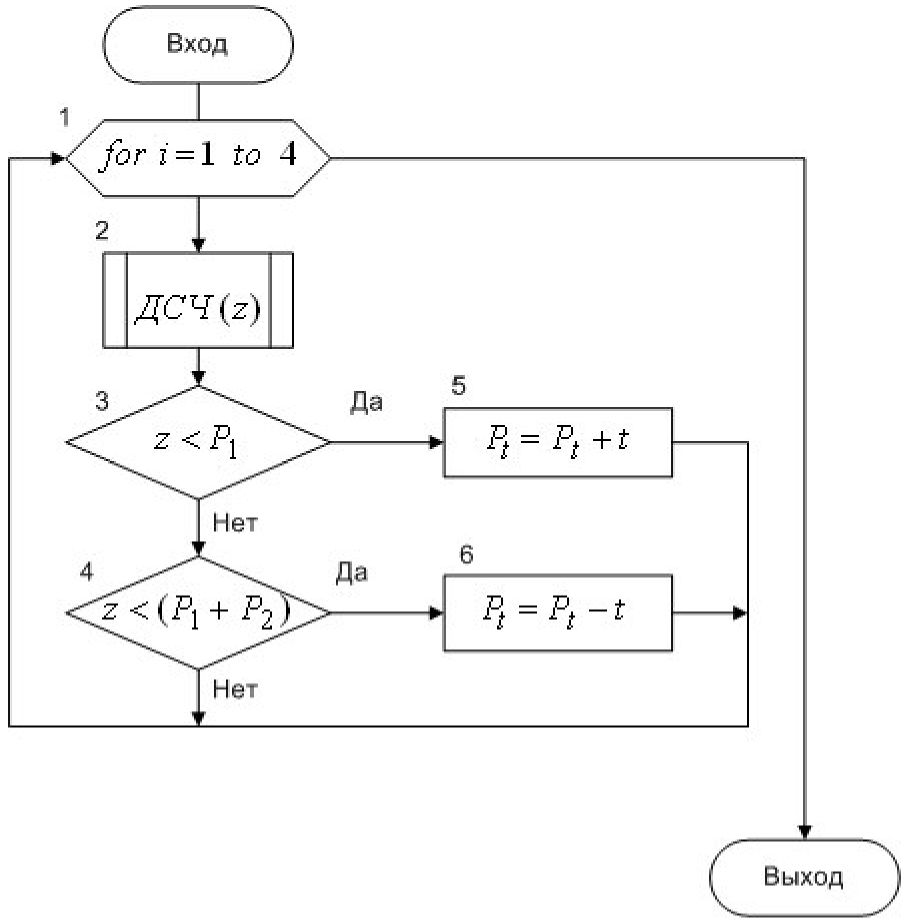


Рис.1.6 – Алгоритм моделирования поведения цены на товар в течение 4 месяцев

Пример 2

Рассматривается продажа двух товаров, цены которых равны A_1=60 руб., A_2=100 руб. Вероятности P_{11} и P_{12} покупки первого товара в размере V_{11}=100 шт. и V_{12}=150 шт. равны 0,4 и 0,2 соответственно (с вероятностью 0,4 товар не будет приобретен). Вероятности P_{21} и P_{22} покупки второго товара в размере V_{21}=50 шт. и V_{22}=30 шт. равны 0,3 и 0,1 соответственно (с вероятностью 0,6 товар не будет приобретен). Напишите алгоритм для определения выручки от продажи товаров.

Решение

Алгоритм представлен на рис.1.7. Здесь R - выручка от продажи товаров. A - массив, содержащий значения цены товаров, P - массив, содержащий значения вероятностей покупки первого и второго товара, V - массив со значениями объема продаж первого и второго товара. Оператор 1 является началом циклического перебора товаров. Операторы 2-4 моделируют события покупки товаров в определенном объеме. В зависимости от наступления того или иного события операторы 5 и 6 рассчитывают суммарную выручку от продажи товаров.

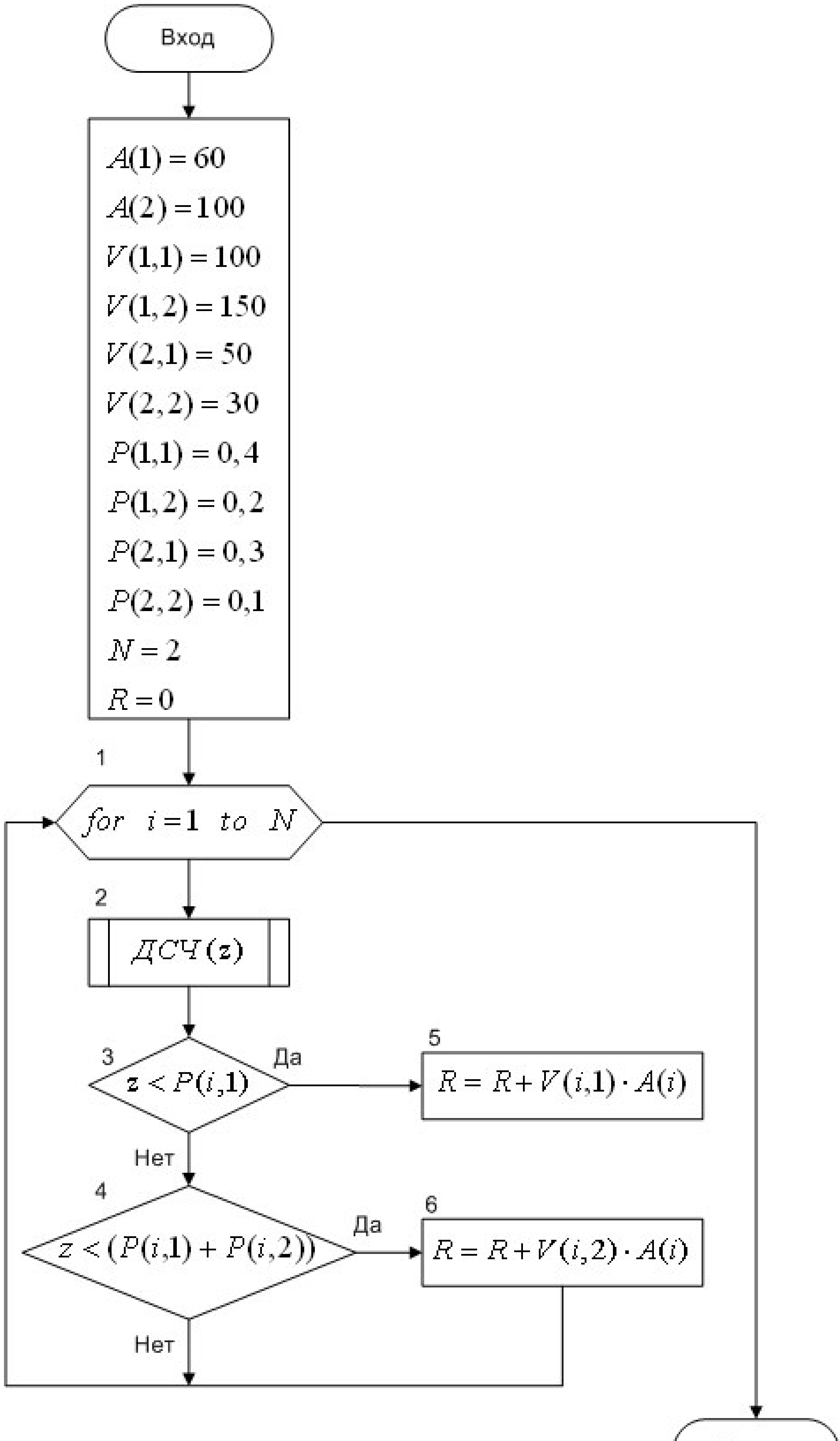


Рис.1.7 – Алгоритм моделирования продажи двух товаров

Пример 3

Размер ежедневной выручки в течение последних 30 дней приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Статистические данные

Ежедневная выручка, руб.	Частота
1000	10
2000	15
3000	5

Напишите алгоритм для определения размера выручки за 10 дней.

Решение

Исходя из значений частот ежедневной выручки, рассчитаем вероятности по формуле

$$P_i = \frac{N_i}{N},$$

где P - вероятность появления i - го значения;

N_i - частота i - го значения;

N -сумма всех частот.

Сумма частот равна N =10+15+5=30.

Значения вероятности приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Вероятностные характеристики выручки

Ежедневная выручка, руб.	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность
1000	10	0,33	0,33
2000	15	0,5	0,83
3000	5	0,17	1

Таким образом, алгоритм для определения размера выручки за 10 дней может быть записан в следующем виде (рис.1.8). Здесь для каждого дня происходит моделирование события получения определенной выручки (1000, 2000 или 3000 руб.), а также расчет её суммарного значения.

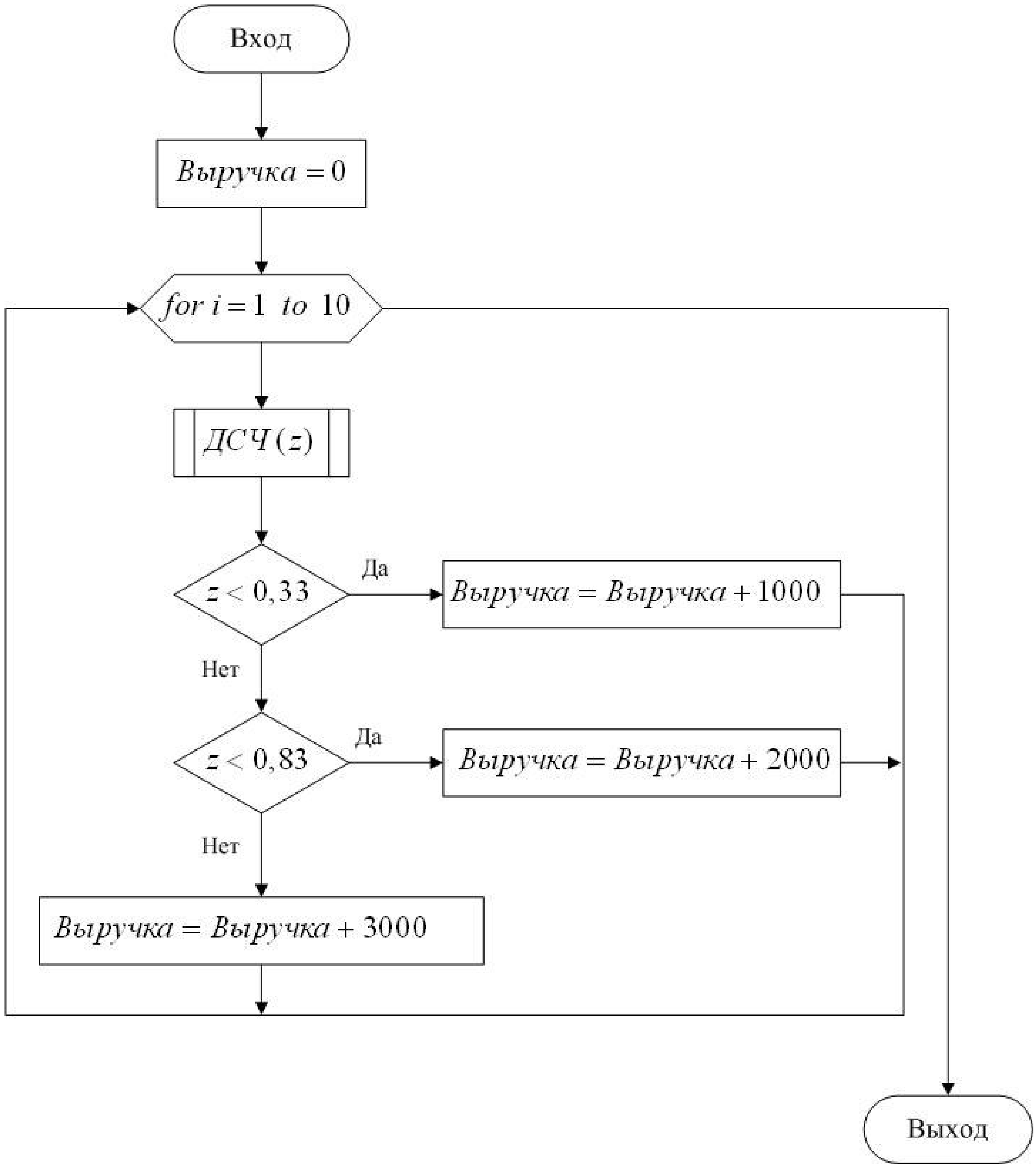


Рис.1.8 – Алгоритм моделирования получения выручки

Задача 1

Рассматривается процесс производства N=100 изделий. Вероятность изготовления бракованной продукции равна 0,3. При этом вероятность P_1 того, что бракованное изделие будет подлежать ремонту, равна 0,1. В этом случае дополнительные затраты фирмы составят Y_1=100 руб. Вероятность P_2 того, что бракованное изделие будет использовано в качестве запасных частей, равна 0,15. В этом случае дополнительные затраты фирмы составят Y_2=150 руб. Вероятность P_3 того, что бракованное изделие будет переработано, равна 0,05.

Затраты фирмы при этом составят Y_3=200 руб. Напишите алгоритм для определения затрат фирмы, связанных с выпуском бракованной продукции.

Задача 2

Процентная ставка i банка равна 11%. Вероятность P_1 увеличения годовой ставки процента в начале следующего года равна 0,2. В этом случае значение ставки процента будет равно 12% (i_1=12%). Вероятность P_2 уменьшения годовой ставки процента в банке равна 0,2. В этом случае значение ставки процента будет равно 10% (i_2=10%). Напишите алгоритм определения величины процентной ставки для N=10 случайных реализаций. Какое произойдет событие, если для одной случайной реализации z = 0,10 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 3

Доходность финансовой операции A с вероятностью P_{11}=0,2 составит d_{11}=0,5, с вероятностью P_{12}=0,6 составит d_{12}=0,6, с вероятностью P_{13} =0,2 - d_{13} =0,8. Доходность финансовой операции B с вероятностью P_{21}=0,3 составит d_{21}=0,8, с вероятностью P_{22}=0,4 составит d_{22}=0,9, с вероятностью P_{23} =0,3 - d_3 =0,95. Напишите алгоритм определения величин доходности финансовых операций. Какие произойдут события при z_1 = 0,15, z_2 = 0,15 (z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1)), если z_1 используется для моделирования события определения доходности финансовой операции A, а z_2 - финансовой операции B?

Задача 4

Стоимость рекламы составляет Y =1500 руб. Ожидаемый доход от рекламы с вероятностью P_1=0,3 равен 4000 руб. (S_1=4000 руб.), с вероятностью P_2=0,2 доход S_2=5000 руб., с вероятностью P_3=0,5 доход S_3=7000 руб. Напишите алгоритм определения эффективности C рекламы для N=10 случайных реализаций. Эффективность рекламы рассчитывается как разность дохода от рекламы и ее стоимости ($C = S_i - Y, i = 1,2,3$). Какое произойдет событие, если для одной случайной реализации z = 0,62 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 5

Фирма решила использовать два вида рекламы: A_1 (реклама в газете) и A_2 (реклама по телевизору). При использовании первого вида рекламы доход S фирмы с вероятностью P_{11} =0,4 будет равен 5000 руб., а вероятностью P_{12} =0,6 составит 6000 руб. При использовании второго вида рекламы доход фирмы с вероятностью P_{21} =0,7 будет равен 15000 руб., а вероятностью P_{22} =0,6 составит 18000 руб. Напишите алгоритм определения дохода фирмы. Какие произойдут события при z_1 = 0,25, z_2 = 0,81 (z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1)), если z_1 используется для моделирования события определения дохода от рекламы вида A_1, а z_2 - рекламы A_2?

Задача 6

Клиент экскурсионной фирмы с вероятностью P_1=0,2 отправится на обзорную экскурсию по городу, с вероятностью P_2=0,4 посетит музеи города, с вероятностью P_3=0,1 – храмы города, с вероятностью P_4=0,2 откажется от услуг фирмы. Напишите алгоритм для определения наиболее популярного вида экскурсий за месяц, если известно, что за это время в фирму обратится N=100 человек. Какое произойдет событие, если для одного клиента z = 0,62 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 7

Спрос на товар в магазине составляет 100 шт. в день (S=100 шт. в день). В связи с открытием поблизости нового магазина ожидается снижение спроса: с вероятностью P_1=0,2 – на 20 шт. в день, с вероятностью P_2=0,4 – на 30 шт. на день, с вероятностью P_3=0,4 – на 10 шт. в день. Напишите алгоритм определения новой величины спроса и его суммарного значения за 30 дней. Какое произойдет событие, если для одного дня z = 0,45 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 8

Начальная стоимость S товара равна 10000 руб. При его перевозке с вероятностью P=0,2 возможны повреждения. В этом случае с вероятностью P_1 =0,3 его стоимость снизится на 20%, с вероятностью P_2 - на 30%, с вероятностью P_3 - на 40%. Напишите алгоритм определения стоимости доставленного товара. Какие произойдут события при z_1 = 0,22, z_2 = 0,55, если z_1 используется при моделировании события повреждения товара, а z_2 - при определении снижении цены вследствие повреждения (z_1, z_2-случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1))?

Задача 9

В читальном зале библиотеки с вероятностью P_1=0,3 необходимая клиенту книга может оказаться занятой, с вероятностью P_2=0,4 - отсутствовать в фонде, с вероятностью P_3=0,3 - доступна для чтения. Напишите алгоритм определения количества обслуженных посетителей за день (которые получили нужную книгу), если в библиотеку за это время обратилось N=150 человек. Какое произойдет событие, если для одного человека z = 0,15 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 10

В парке аттракционов с вероятностью P_1=0,4 человек прокатится на аттракционе «*А*», с вероятностью P_2=0,2 – на аттракционе «*В*», с вероятностью P_3=0,1 – на аттракционе «*С*», с вероятностью P_4=0,3 – на аттракционе «*Д*». Цена билетов на аттракционы «А», «В», «С» и «Д» равна 30 руб., 40 руб., 50 руб. и 60 руб. соответственно. Напишите алгоритм для определения ежедневной выручки, если в парк аттракционов ежедневно посещает N=450 человек. Какое произойдет событие, если для одного человека z = 0,47 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 11

Авиакомпания занимается перевозкой пассажиров. При этом с вероятностью P_1=0,3 рейс может быть задержан, с вероятностью P_2=0,2 – перенесен на другой день. Напишите алгоритм для определения числа рейсов, перенесенных на другой день. Пусть при этом за рассматриваемый период число N запланированных рейсов равно 10. Какое произойдет событие, если для одного рейса z = 0,71 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 12

Фирма заказывает товар у поставщика. Вероятность P_1 того, что поставщик задержит доставку товара, равна 0,2, вероятность P_2 того, что поставщик доставит товар вовремя, равна 0,7, вероятность P_3 того, что поставщик не выполнит заказ равна 0,1. Напишите алгоритм для определения числа выполненных заказов. Пусть при этом за рассматриваемый период число заказов N равно 20. Какое произойдет событие, если для одного заказа z = 0,81 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 13

Цена товара равна 100 руб. За месяц она может с вероятностью P_1=0,1 упасть на 1 руб., с вероятностью P_2=0,5 – подняться на 2 руб., с вероятностью P_3=0,4 – остаться без изменения. Напишите алгоритм для определения цены товара через год. Какое произойдет событие, если для одного месяца z = 0,22 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 14

Склад занимается обслуживанием покупателей. Вероятность P_1 дефицита товара на складе (в настоящий момент товар отсутствует, но ожидается его поставка) равна 0,3, вероятность P_2 отсутствия товара на складе равна 0,2, вероятность P_3 наличия товара равна 0,5. Кроме того, в случае дефицита с вероятностью 0,6 клиент согласится ждать доставки, а с вероятностью 0,4 – обратится к услугам других фирм. В случае наличия товара осуществляется его продажа по цене 1000 руб. за шт., в случае дефицита товара тем клиентам, которые согласились ждать доставку оплачивают неустойку за несвоевременное получение товара в размере 150 руб.. В том случае, если клиенты при дефиците обратились к услугам других фирм, то учитывается упущенная прибыль, равная цене товара. Считая, что на склад обратилось N=100 человек, напишите алгоритм для определения показателя эффективности, равного разности дохода (цена товара) и расхода (оплата неустойки и упущенная прибыль).

Задача 15

Вероятность P_1 выигрыша в лотерею автомобиля стоимостью 300 тыс. руб. равна 0,01, вероятность P_2 выигрыша бытовой техники стоимостью 3 тыс. руб. равна 0,03, вероятность P_3 выигрыша аксессуаров стоимостью 600 руб. равна 0,1. Считая, что человек купил 50 лотерейных билетов, напишите алгоритм для определения количества выигрышей и их суммы. Какое произойдет событие, если для одного лотерейного билета z = 0,09 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 16

Известно число машин, приезжающих на автомойку в течение последних 150 часов (табл.1.3).

Таблица 1.3 – Статистические данные

Число машин в час	Частота
4	40
5	60
6	30
7	20

Напишите алгоритм для определения количества прибывших машин в течение 20 часов.

1.3 Моделирование дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина может быть задана табличной зависимостью:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Здесь p_j – вероятность того, что дискретная случайная величина X примет значение x_j. При этом $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Разделим интервал (0,1) на n отрезков, длины которых равны заданным вероятностям. Если случайное число z, вырабатываемое датчиком случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,1), попадет в интервал p_k, то случайная величина X примет значение x_k. Таким образом, при моделировании дискретных случайных величин фактически используется та же процедура, что и при моделировании полной группы несовместных событий.

Пример 1

Случайная величина ежедневного спроса на товар в магазине имеет дискретный закон распределения.

Ежедневный спрос, X	10	15	20	25
Вероятность, P	0,2	0,3	0,3	0,2

Напишите алгоритм для определения общей величины спроса за месяц (считая, что в месяце 30 дней).

Чему равна величина дневного спроса, если для одного месяца z = 0,29 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Решение

Разделим интервал (0,1) на 4 отрезка, длины которых составляют P_1=0,2, P_2=0,3, P_3=0,3, P_4=0,2. Т.о., если случайная величина z попадает, например, в интервал P_3, то считается, что величина спроса равна X_3=20 шт. (рис. 1.9). Алгоритм представлен на рис.1.10. Здесь $Спрос$ - общая величина спроса.

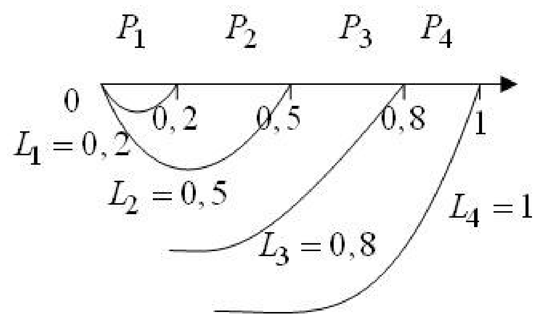


Рис. 1.9 – Разбиение интервала на отрезки

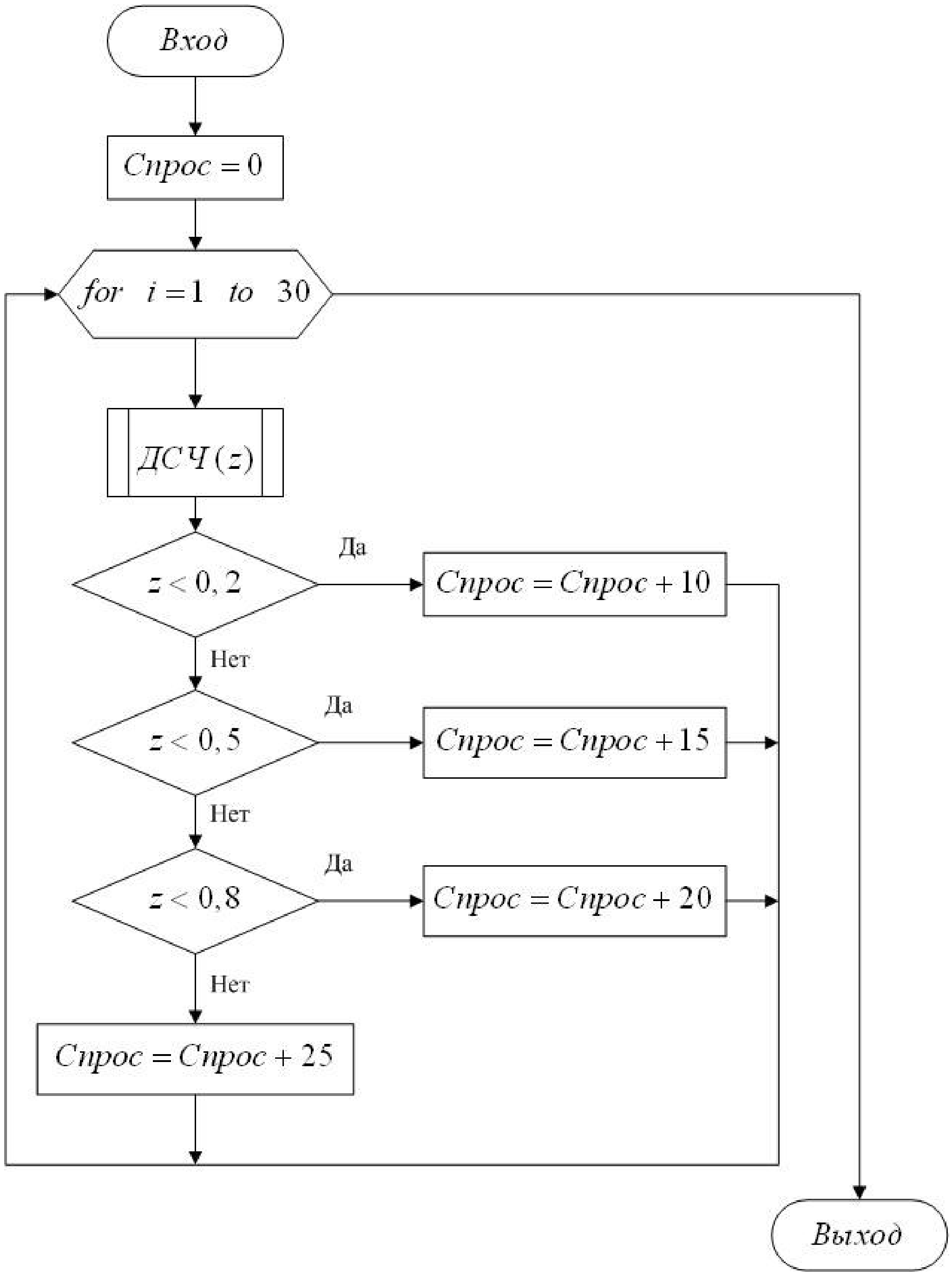


Рис. 1.10 – Алгоритм моделирования спроса на товар за месяц

В том случае, если z = 0,29 величина ежедневного спроса составит 15 шт.

Задача 1

Случайная величина X ежегодного сбора урожая имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	60	65	70	75	80	85
P	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Напишите алгоритм для определения общей величины собранного урожая за 10 лет.

Чему равна величина сбора, если для одного года z = 0,72 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 2

Случайная величина X объема доставленной на склад партии товара имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	100	105	110
P	0,2	0,7	0,1

Стоимость доставки единицы товара равна 10 руб. Напишите алгоритм для расчета годовых издержек заказа, если фирма осуществляет 1 заказ на доставку в месяц.

Чему равна величина объема партии, если для одного заказа z = 0,50 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 3

Рейсовый автобус осуществляет перевоз людей из пункта «А» в пункт «Б». Случайная величина X человек в автобусе имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	50	45	40	35	30
P	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1

Напишите алгоритм для определения общей выручки за месяц, если цена проезда составляет 30 руб., а число рейсов равно 10.

Чему равно число человек в автобусе, если для одного рейса z = 0,34 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 4

Случайная величина X числа изготовленных за месяц изделий на предприятии имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	1000	1100	1200	1300	1400
P	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

Напишите алгоритм для определения общей величины объема выпуска за год.

Чему равна величина выпуска продукции за месяц, если для одного месяца z = 0,49 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 5

Ежемесячный доход X от инвестиционного проекта является случайной величиной, которая имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	10000	10500	11000	12000	13000	14000	15000
P	0,05	0,15	0,1	0,4	0,2	0,05	0,05

Напишите алгоритм для определения общей величины дохода за два года.

Чему равна величина дохода за месяц, если для одного месяца z = 0,14 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 6

Случайная величина X депозитной ставки банка на следующий год имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	9	10	11
P	0,3	0,4	0,3

Напишите алгоритм для определения средней ставки процента за N =100 случайных реализаций.

Чему равна величина депозитной ставки, если для одной случайной реализации z = 0,35 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 7

Предприятие выпускает два вида продукции: «А» и «В». Годовой объем продаж X является случайной величиной с дискретным законом распределения (P - вероятность). Для продукции «А» закон распределения имеет вид

X	50000	60000	70000	80000	90000
P	0,05	0,2	0,5	0,2	0,05

Для продукции «В» закон распределения имеет вид

X	100000	110000	120000	130000	140000
P	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1

Напишите алгоритм для определения общего объема продаж за год.

Чему равна сумма объема продаж продукции «А» и «В» при z_1 = 0,32, z_2 =0,17, если z_1 используется для моделирования объема продаж продукции «А», а z_2 - продукции «В» (z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1))?

Задача 8

Случайная величина X числа обслуженных за день клиентов банка имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	60	65	70	75
P	0,2	0,2	0,3	0,5

Напишите алгоритм для определения числа обслуженных клиентов за год.

Чему равна величина обслуженных за день клиентов, если для одного дня z = 0,55 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 9

Случайная X доли рынка, которую замет новая фирма имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	0,01	0,015	0,02	0,03	0,04	0,05
P	0,1	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1

Напишите алгоритм для определения средней доли рынка за N=100 случайных реализаций.

Чему равна величина доли рынка, если для одной случайной реализации z = 0,75 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 10

Случайная X времени доставки товара на склад имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	1	2	3	4
P	0,1	0,6	0,2	0,1

Рассматривается 10 доставок. Напишите алгоритм для определения количества доставок со сроком больше, чем 2 дня.

Чему равна величина времени доставки, если для одной доставки z = 0,55 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 11

Автомастерская занимается ремонтом автомобилей. Случайная величина X числа клиентов в очереди на обслуживание в единицу времени имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	0	1	2	3	4	5
P	0,4	0,2	0,2	0,1	0,05	0,05

Напишите алгоритм для определения средней длины очереди за время T =10 за N =100 случайных реализаций.

Чему равна величина длины очереди, если для одной единицы времени одной случайной реализации z = 0,65 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 12

Случайная X времени поиска информации в справочной службе имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

Напишите алгоритм для определения общего времени обслуживания, если в справочную службу обратилось 20 клиентов.

Чему равна величина времени поиска информации, если для одного клиента z = 0,21 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 13

Рассматривается игра «Угадай число». Случайное число X может принимать значения 1,2,3 с равной вероятностью, т.е. имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

Человек пытается отгадать, какое число выпадет следующим. Рассматривается 10 попыток. Напишите алгоритм для определения количества совпадений с генерированным числом, если участник всегда называет цифру «2».

Чему равно сгенерированное число, если для одной попытки z = 0,50 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 14

Случайная X (мин.) времени ожидания обслуживания в кафе имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	1	2	3	4	5	6	7
P	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Считая, что в кафе пришло 30 человек, напишите алгоритм для определения среднего времени обслуживания и количества людей, ожидавших более 4 мин.

Чему равна величина времени ожидания обслуживания, если для одного человека z = 0,82 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 15

Случайная величина X (руб.) снижения стоимости товара на складе в течение месяца имеет дискретный закон распределения (P - вероятность)

X	100	200	300	400	500
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Напишите алгоритм для определения общих убытков из-за снижения стоимости товара за 6 месяцев, если на складе находится 50 товаров.

Чему равна величина снижения стоимости, если для одного товара в один месяц z = 0,84 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 16

Фирма занимается продажей компьютерной техники. Спрос на товар растет во времени. Величина увеличения спроса за месяц имеет дискретный закон распределения (P - вероятность).

X	10	15	20	25
P	0,3	0,2	0,3	0,2

Напишите алгоритм для определения спроса за год.

Чему равна величина увеличения спроса, если для одного месяца z = 0,24 (z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

1.4 Моделирование непрерывной случайной величины

Приведем способы моделирования непрерывных случайных чисел.

1. *Показательное распределение*

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(z),$$

где x - случайная величина, распределенная по показательному закону;

z - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,1).

2. *Равномерное распределение на интервале (a,b)*

$$x = a + z(b-a),$$

$$x = x_{cp} + \Delta x(z - 0,5),$$

где x - случайная величина, распределенная по равномерному закону;

a и b - нижняя и верхняя границы интервала (a,b) соответственно;

x_{cp} - среднее значение интервала (a,b);

Δx - величина интервала (a,b);

z - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,1).

3. *Нормальное распределение*

Процедура розыгрыша нормально распределенной случайной величины заключается в следующем.

- Сложим 12 случайных величин z_i с равномерным распределением в интервале (0,1), т. е. составим сумму

$$v = \sum_{i=1}^{12} z_i .$$

- Нормируем и центрируем случайную величину v, т. е. перейдем к величине

$$\eta = v - 6 .$$

- От нормированной и центрированной величины η перейдем к случайной величине y, распределенной по нормальному закону, с заданными параметрами $M(y)$ и $\sigma(y)$ по формуле

$$y = M(y) + \sigma(y) \cdot \eta ,$$

где $M(y)$ – известное математическое ожидание случайной величины y;

$\sigma(y)$ – известное среднее квадратическое отклонение случайной величины y.

4. Усеченное нормальное распределение

Усеченное нормальное распределение случайной величины x задается четырьмя параметрами: математическим ожиданием $M(x)$, средним квадратическим отклонением $\sigma(x)$, а также минимальным и максимальным значениями x_1 и x_2 (точками усечения).

Для определения возможных значений случайной величины с этим распределением можно использовать алгоритм, схема которого приведена на рис. 1.11.

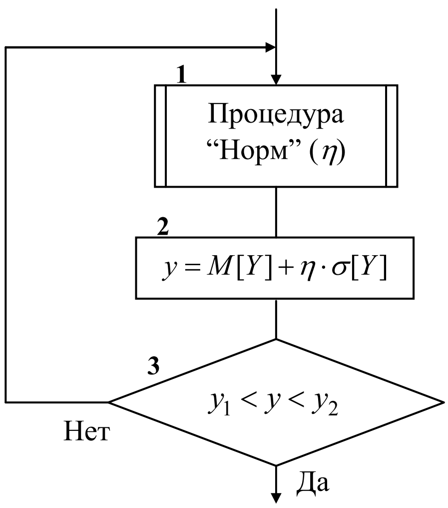


Рис. 1.11 – Алгоритм моделирования случайной величины с усеченным нормальным распределением

Оператор 1 обращается к процедуре моделирования возможных значений нормированной и центрированной случайной величины η с нормальным распределением. Оператор 2 вычисляет значение случайной величины y с заданными параметрами $M(y)$ и $\sigma(y)$.

Условный оператор 3 проверяет условие попадания случайной величины у в неусеченную область. При выполнении этого условия значение случайной величины y с усеченным нормальным распределением считается найденным. В противном случае управление в алгоритме передается вновь на вход оператора 1 и генерируется другая случайная величина.

Пример 1

Время выполнение проекта является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение M =3 мес., среднее квадратическое отклонение σ =0,1 мес.). Напишите алгоритм определения времени окончания 7-го проекта, считая, что новый проект начинается сразу же после завершения предыдущего. Через сколько времени закончится второй проект, если нормированная случайная величина η_1 =0,57 (при моделировании времени выполнения первого проекта), η_2 =0,12 (при моделировании времени выполнения второго проекта)?

Решение

Алгоритм представлен на рис. 1.12. Здесь переменная $time$ – время выполнения текущего проекта (возможное значение случайной величины, распределенной по нормальному закону), переменная $TimeProjects$ - суммарное время выполнения рассмотренных проектов. За начало отсчета принято значение равное нулю. Согласно приведенному алгоритму для каждого из семи проектов моделируется случайная величина времени его выполнения, распределенная по нормальному закону (согласно описанному выше способу). Время окончания седьмого проекта рассчитывается как сумма всех этих семи величин.

В том случае, если η_1 =0,57, то первый проект будет длиться

$$time = M + \sigma \cdot 0,57 = 3 + 0,1 \cdot 0,57 = 3,057 \approx 3,06$$

Первый проект закончится через

$TimeProjects = 3,06$ мес.

Время выполнения второго проекта равно

$$time = M + \sigma \cdot 0,12 = 3 + 0,1 \cdot 0,12 = 3,012 \approx 3,01$$

Поскольку второй проект начнется сразу же после окончания первого, то время его окончания равно

$TimeProjects = 3,06 + 3,01 = 6,07$ мес.

Следовательно, второй проект закончится через 6,07 месяца.

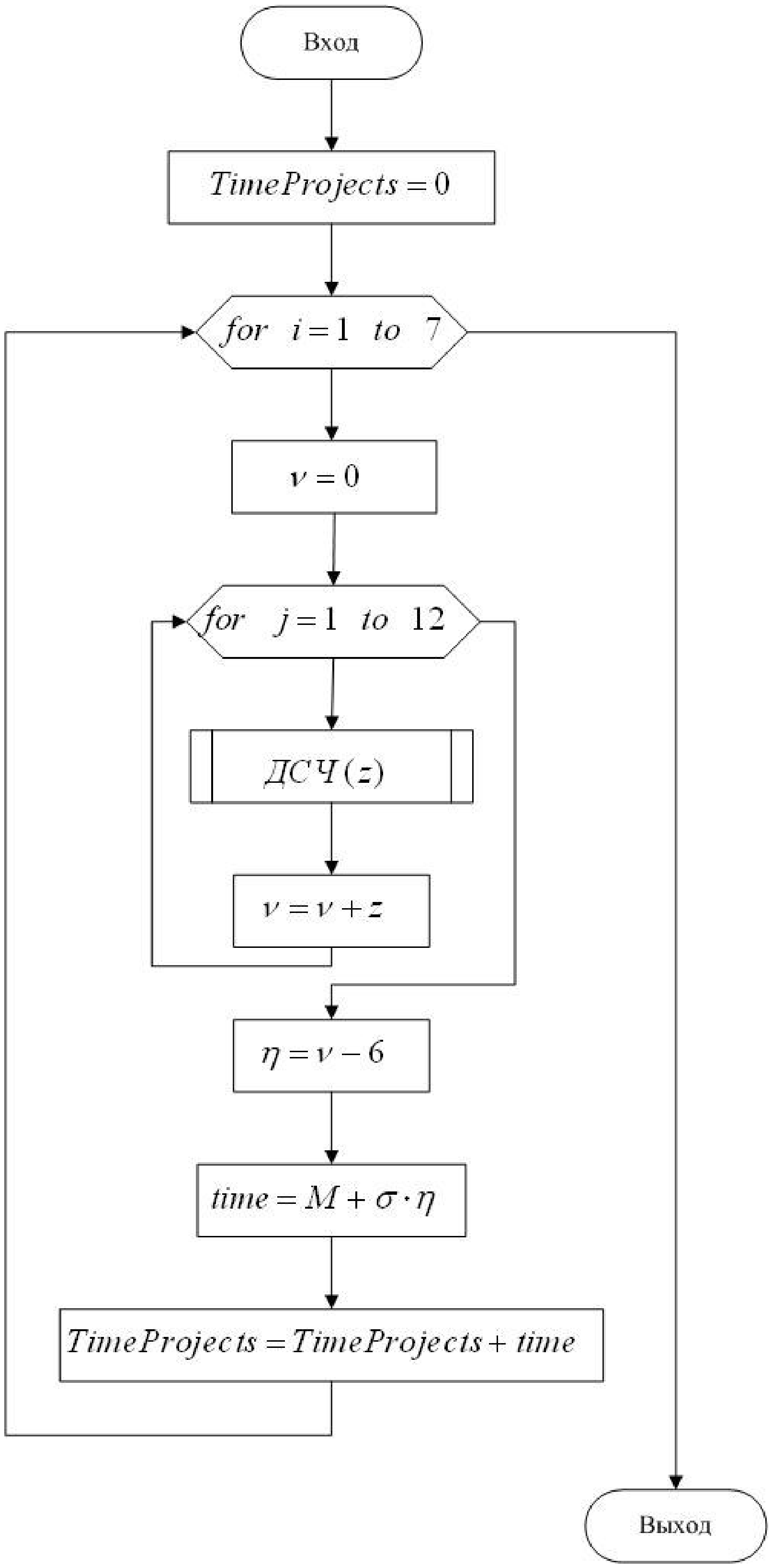


Рис. 1.12 –Алгоритм определения времени окончания 7- го проекта

Пример 2

Человек приезжает на машине на платную автостоянку, расположенную у магазина. Оплата стоянки производится сразу же после парковки машины. Стоимость одной минуты пользования автостоянкой равно C_1 ден.ед. В том случае, если клиент освободил место раньше, то деньги ему не возвращаются. Если же клиент задержался в магазине больше времени, чем оплатил, то ему необходимо будет заплатить штраф в размере C_2 ден.ед. за минуту. Время пребывания в магазине распределено по показательному закону со средним значением $t_{ср}$ мин. Пусть клиент оплатил $t_з$ мин. Напишите алгоритм для расчета затрат клиента, связанных с оплатой «лишних минут» в случае, если он освободил место раньше времени, и оплатой штрафа, если он освободил его позже заданного срока. Моделирование производится для N_p случайных реализаций.

Решение

Алгоритм представлен на рис.1.13. Опишем его операторы. Оператор 1 обнуляет переменную $Затраты$ - значение затрат клиента за N_p случайных реализаций. Оператор 2 является началом циклического перебора случайных реализаций. Оператор 3 моделирует значение случайной величины, равномерно распределенной на интервале (0,1). Оператор 4 вычисляет возможное значение t_o случайной величины времени пребывания в магазине, распределенной по показательному закону. Оператор 3 определяет, пришел ли клиент раньше оплаченного времени. Если установлено прибытие клиента раньше оплаченного времени, что рассчитываются затраты клиента, связанные с оплатой лишних минут и прибавляется это значение к величине общих затрат. В противном случае рассчитывается величина штрафа, которая также прибавляется к величине общих затрат. В том случае, если клиент пришел точно вовремя, то разность $t_o - t_з$ будет равна нулю, а следовательно и затраты за текущую реализацию. Оператор 8 вычисляет значение средней величины затрат за N_p случайных реализаций.

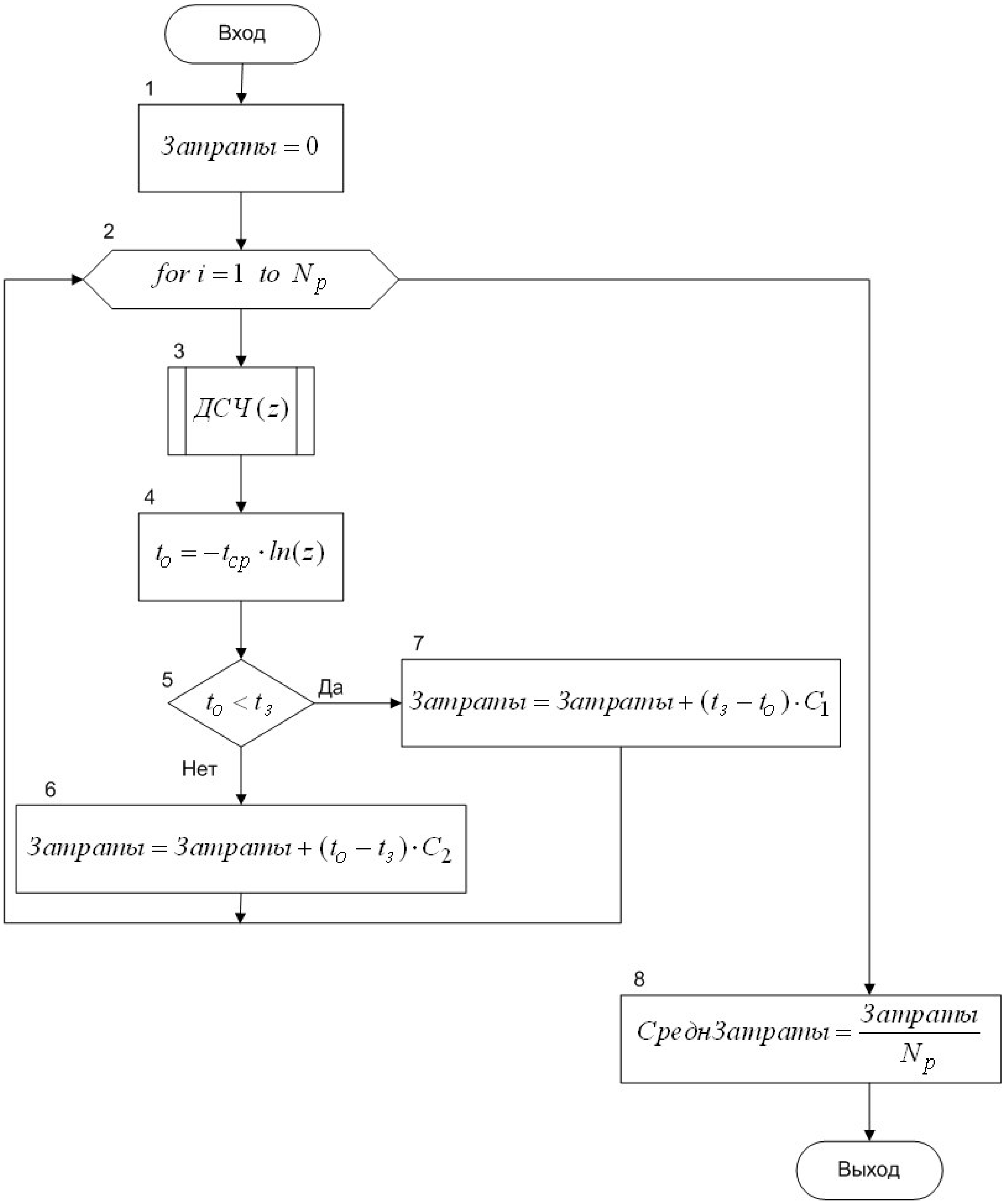


Рис.1.13 – Алгоритм моделирования прибытия человека на платную автостоянку

Задача 1

Студент получает ежемесячную стипендию в размере 1000 руб. Его расходы в месяц являются случайной величиной с равномерным законом распределения (границы интервала: a =100 руб.; b =700 руб.). Оставшиеся деньги он кладет в копилку. Напишите алгоритм для определения суммы, которая будет у студента в копилке через год.

Задача 2

В кинотеатре ежедневно проводится три сеанса: утренний, дневной и вечерний. Число зрителей является случайной величиной с нормальным законом распределения. Средние значения M_1=50, M_2=100, M_3=150 человек для утреннего, дневного и вечернего сеансов соответственно. Среднее квадратическое отклонение равно 7 человек (одинаково для всех сеансов). Напишите алгоритм для определения выручки за месяц, если цена билета на утренний сеанс равна 50 руб., дневной - 60 руб., вечерний -120 руб.

Задача 3

Фирма занимается доставкой туристов на туристическую базу. Организуется один рейс в день. Число туристов является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение равно M_t, среднее квадратическое отклонение - σ_t). Доставка осуществляется с помощью автобусов. Число мест в одном автобусе равно N. Если одного автобуса оказалось недостаточно для доставки всех туристов, то фирма организует в этот же день дополнительные рейсы. Затраты фирмы, связанные с организацией рейса составляют S, а выручка от доставки одного туриста (стоимость проезда для одного человека) равна V. Напишите алгоритм для определения прибыли фирмы за T дней.

Задача 4

В фирме работает менеджер. В течение дня он уходит на обеденный перерыв, равный 1 часу, а также уезжает по делам в другие организации. Время, которое он проводит в разъездах в течение дня, является случайной величиной с равномерным законом распределения. Границы интервала: a=3 часа, b=5 часов. Напишите алгоритм для определения общего времени отсутствия работника на рабочем месте за 30 дней.

Задача 5

Фирма занимается организацией водных экскурсий на катере. Поток клиентов, желающих воспользоваться данной услугой, является пуассоновским с интенсивностью λ=40 человек в час. Как только в организацию обратилось 20 человек, сразу же начинается экскурсия. Напишите алгоритм для определения числа экскурсий за T =3,5 часа.

Задача 6

Время между прибытием двух автобусов на остановку распределено по показательному закону со средним значением t_{cp} =2 мин. Поток людей, желающих уехать на автобусе, является пуассоновским с интенсивностью λ=0,3 человека в минуту. Напишите алгоритм для определения времени прибытия 10-го автобуса и 10- го пассажира на остановку. Сядет ли первый пришедший человек на автобус при z_1=40, z_2=0,30, если z_1 используется для моделирования времени поступления первого автобуса, z_2- используется для моделирования прихода первого пассажира, z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1)?

Задача 7

Случайная величина времени доставки товара на склад распределена равномерно на интервале (5,10) (дней). Напишите алгоритм определения количества поставок, время которых превысило 5,5 дня, если всего рассматривается 120 поставок. Чему равно время доставки товара, если для одной поставки z=0,14, z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1)?

Задача 8

Инвестору поступают доходы S величиной 10000 руб., через интервалы времени, которые являются случайными величинами, распределенными равномерно на интервале (1,3) (мес.). Напишите алгоритм определения срока окупаемости, т.е. времени, когда сумма доходов будет равна 110000 руб. Определите время, через которое инвестор получит первый доход, если z=0,44, z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1)?

Задача 9

Производство изделий на предприятии осуществляется в два этапа. Время выполнения первого этапа является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (1,2) (дня). Время выполнения второго этапа также является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (3,4) (дня). Напишите алгоритм, определяющий общее время производства 100 изделий. Чему равно время изготовления одного изделия при z_1=23, z_2=0,45, если z_1 используется для моделирования времени изготовления на станке «А», z_2-- на станке «В», z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1)?

Задача 10

Время экскурсии является случайной величиной с нормальным законом распределения. Среднее значение времени экскурсии M=4 (час.), среднее квадратическое отклонение σ=0,1 часа. Прибыль от каждой экскурсии составляет 1000 руб. Считая, что следующая экскурсия начинается сразу же после окончания предыдущей, напишите алгоритм для определения полученной прибыли за 20 часов. Чему равно время экскурсии, если величина η, используемая при моделировании случайной величины с нормальным распределением равна 0,62?

Задача 11

Случайная величина времени разгрузки судов у причала распределена по нормальному закону со средним значением M=6 (час.), средним квадратическим отклонением σ=0,2. Напишите алгоритм для определения среднего времени разгрузки судна за N=100 случайных реализаций. Чему равно время разгрузки, если величина η для одной реализации, используемая при моделировании случайной величины с нормальным распределением равна 0,42?

Задача 12

Время подготовки к экзамену является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением M=3 дня, средним квадратическим отклонением σ=0,4 дня. Напишите алгоритм для определения общего времени подготовки к пяти экзаменам. Чему равно время подготовки к одному экзамену, если величина η, используемая при моделировании случайной величины с нормальным распределением равна 0,11?

Задача 13

Время ремонта обуви в мастерской является случайной величиной с усеченным нормальным законом распределения. Среднее значение M = 5 часов, среднее квадратическое отклонение σ=0,2 часа, точки усечения $T_{\min}$=-1, $T_{\max}$=2. Считая, что обслуживание следующего клиента начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущего, напишите алгоритм для определения числа выполненных заказов за 24 часа.

Задача 14

Расходы, связанные с организацией выставки Y=10000 руб. Количество экскурсий, проведенных за время ее функционирования равно 10. Считая, что выручка от проведения одной экскурсии зависит от числа человек в группе и имеет усеченное нормальное распределение со средним значением M=5000 руб., средним квадратическим отклонением σ=500 руб. и точками усечения $T_{\min}$=0, $T_{\max}$=4, напишите алгоритм определения прибыли от организации выставки.

Задача 15

Время ремонта оборудования является случайной величиной с усеченным нормальным законом распределения. Среднее значение M=3 час., среднее квадратическое отклонение σ=0,1 час., точки усечения $T_{\min}$=0, $T_{\max}$=4. Стоимость ремонта составляет 50 руб. в час. Напишите алгоритм для определения расходов, если за рассматриваемый промежуток времени было проведено 6 ремонтов.

Задача 16

Время между приездом двух машин на бензоколонку распределено по показательному закону со средним значением t_{cp}=10 мин. Стоимость покупки бензина для каждого клиента является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (50, 300) (руб.). Напишите алгоритм для определения полученной выручки за период T =20 часов.

Задача 17

На предприятие поступают заказы на изготовление продукции. Поток этих требований является пуассоновским с интенсивностью λ= 5 заказов в месяц. Напишите алгоритм для определения числа заказов, поступивших к моменту времени 3,5 мес. Приняв начало отсчета равным нулю, определите время поступления второго заказа при z_1=0,4, z_2=0,1, если z_1 используется для моделирования времени поступления первого заказа, z_2- используется для моделирования второго заказа, z_1, z_2 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1).

Задача 18

Время обслуживания клиента в супермаркете является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (1,5) (мин.). Считая, что обслуживание следующего клиента начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущего, напишите алгоритм для определения числа клиентов обслуженных за день (12 часов). Чему равно время обслуживания клиента, если z=0,78, z - случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1).

Задача 19

В справочную службу поступают телефонные звонки с интенсивностью λ=4. Время между двумя соседними звонками распределено по показательному закону. Начало отсчета равно нулю. Напишите алгоритм определения времени поступления 100 – го звонка. Чему равно время поступления третьего звонка при z_1=0,45 (случайная величина для моделирования времени поступления первого звонка), z_2 =0,12 (случайная величина для моделирования времени поступления второго звонка), z_3=0,64 (случайная величина для моделирования времени поступления третьего звонка), если z_1, z_2, z_3 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1)?

Задача 20

Спрос на товар (мороженое) в магазине является случайной величиной с нормальным законом распределения. Средние значения зависят от времени года и составляют M_1=20000 шт. (летом), M_2=2000 шт. (весной), M_3=2000 шт. (осенью), M_4=1000 (зимой). Среднее квадратическое отклонение равно 200. Напишите алгоритм для определения выручки за два года, если цена мороженого равна 20 руб. летом и 15 руб. – в остальное время года.

Задача 21

Время между прибытием в кафе двух клиентов распределено по показательному закону со средним значением, равным 0,1 ч. Определите, через какое время придет десятый клиент, если случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0,1) и используемые при генерировании времени между приходом двух клиентов равны: z_1=0,21; z_2=0,19; z_3=0,87; z_3=0,45; z_4=0,76; z_5=0,64; z_6=0,98; z_7=0,52; z_8=0,08; z_9=0,14; z_{10}=0,59.

Задача 22

Интенсивность потока клиентов в парикмахерскую представляет собой пуассоновский поток с интенсивностью λ=10 заявок в час. Напишите алгоритм определения времени поступления 200 –го клиента. Приняв начало отсчета равным нулю, определите, будет ли обслужен второй клиент, если время окончания обслуживания первого равно 20 мин., максимальное время ожидания обслуживания равно 10 мин., а случайная величина z, распределенная равномерно на интервале (0,1) и используемая при моделировании времени поступления второго клиента равна 0,67.

1.5 Общие задачи

Пример 1

В швейную мастерскую поступают заказы на пошив одежды. Поток этих заказов является пуассоновским с интенсивностью λ=20 заказов в день. Сумма заказа является случайной величиной с равномерным законом распределения (границы интервала равны: a=1000, b=5000). При этом каждый клиент с вероятностью P=0,1 может отказаться от покупки после изготовления изделия (не заплатить суму заказа). Напишите алгоритм для определения суммы выручки за T=30 дней. Рассчитайте, через какое время придет первый заказчик и сумму его заказа, если z_1=0,1, z_2=0,65 (z_1, z_2 - случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0,1)), z_1 используется при моделировании поступления заказа, а z_2 - для моделирования суммы заказа.

Решение

Алгоритм представлен на рис.1.14. Оператор 1 производит обнуление переменных: t_n - время поступления заявки, V - суммарная выручка от выполнения заказов. Оператор 3 определяет время поступления очередного заказа. Поскольку поток заказов – пуассоновский, то время между двумя соседними заказами распределено по показательному закону. Поэтому время поступления очередного заказа равно сумме времени поступления предыдущего и случайной величины, распределенной по показательному закону со средним значением $\frac{1}{\lambda}$. Поскольку по условию задачи необходимо найти суммарную выручку за T=30 дней, то оператор 4 проверяет, не превышает ли время поступления заказа периода моделирования T. В том случае, если заказ поступил после завершения периода T, осуществляется выход. В противном случае, происходит моделирование суммы заказа S (операторы 5-6), распределенной равномерно на интервале (a, b). Оператор 8 моделирует событие отказа от заказа. В том случае, если клиент не отказался от покупки, то сумма заказа S прибавляется к общей выручке (оператор 9), в противном случае – сумма выручки остается без изменения. После этого осуществляется переход к оператору 2 и моделируется время поступления очередного заказа.

В том случае, если z_1=0,1, то первый заказчик придет через

$$t_n = -\frac{1}{\lambda}\ln(z_1) = -\frac{1}{20}\ln(0{,}1) \approx 0{,}12 \text{ дн.}$$

А сумма его заказа

$$S = a + z_2(b-a) = 1000 + 0{,}65 \cdot (5000 - 1000) = 3600 \text{ руб.}$$

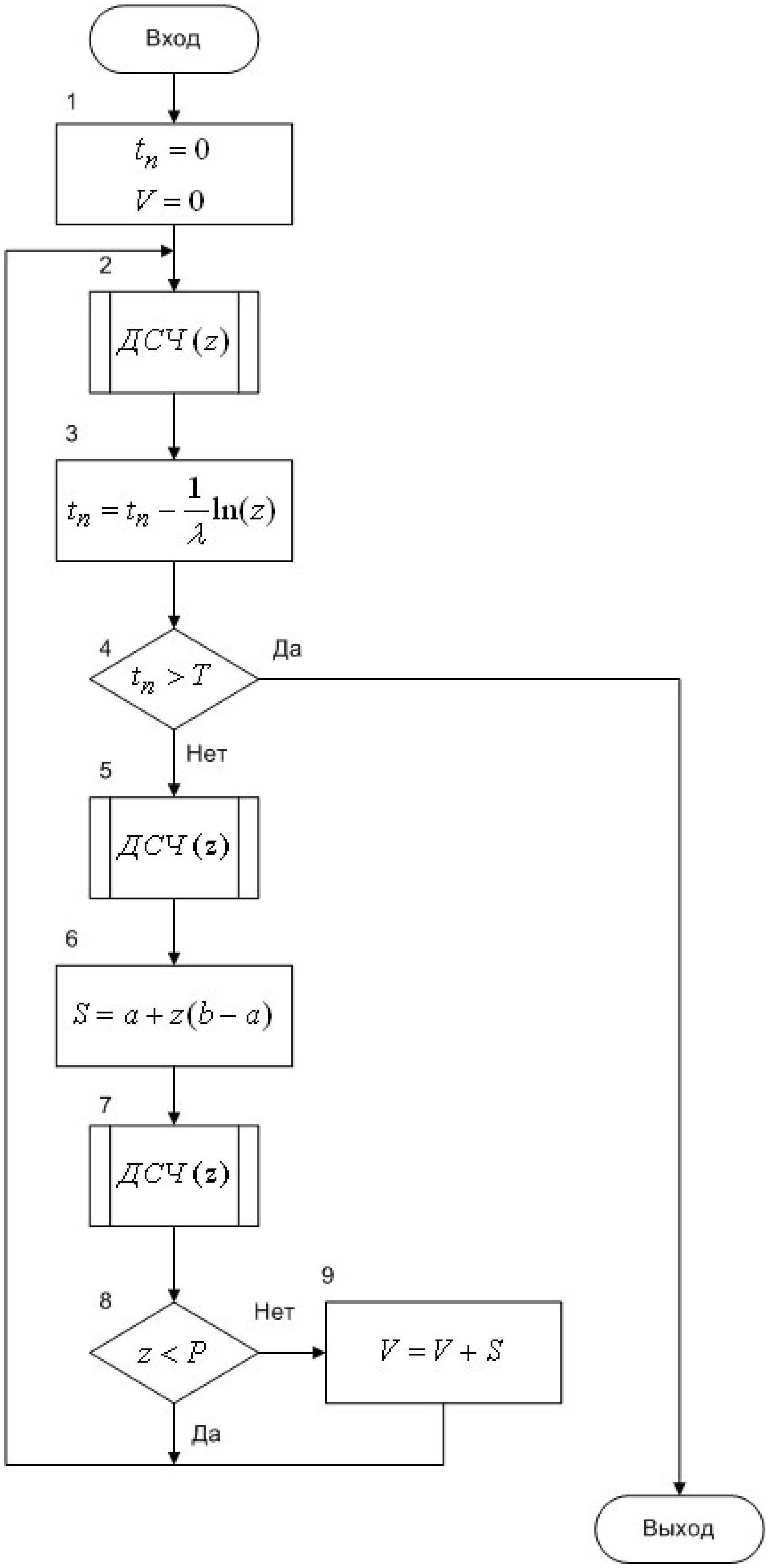


Рис.1.14 – Алгоритм моделирования работы швейной мастерской

Пример 2

Число клиентов фирмы, имеющих положительное мнение о ее продукции, к рассматриваемому периоду равно 1000 человек. Каждый из них ежедневно общается с определенным количеством людей, которые не являются клиентами фирмы. Это число является случайной величиной с нормальным законом распределения со средним значением M =10, средним квадратическим отклонением σ =1.

Считается, что сила убеждения (вероятность того, что при общении с клиентом человек тоже заинтересуется товаром и купит его, т.е. тоже станет клиентом) равна 0,6. К примеру, на рис.1.15 представлена ситуация, когда человек общаясь с пятью знакомыми, смог убедить троих из них купить данный товар.

Напишите алгоритм для определения прироста числа клиентов за один день.

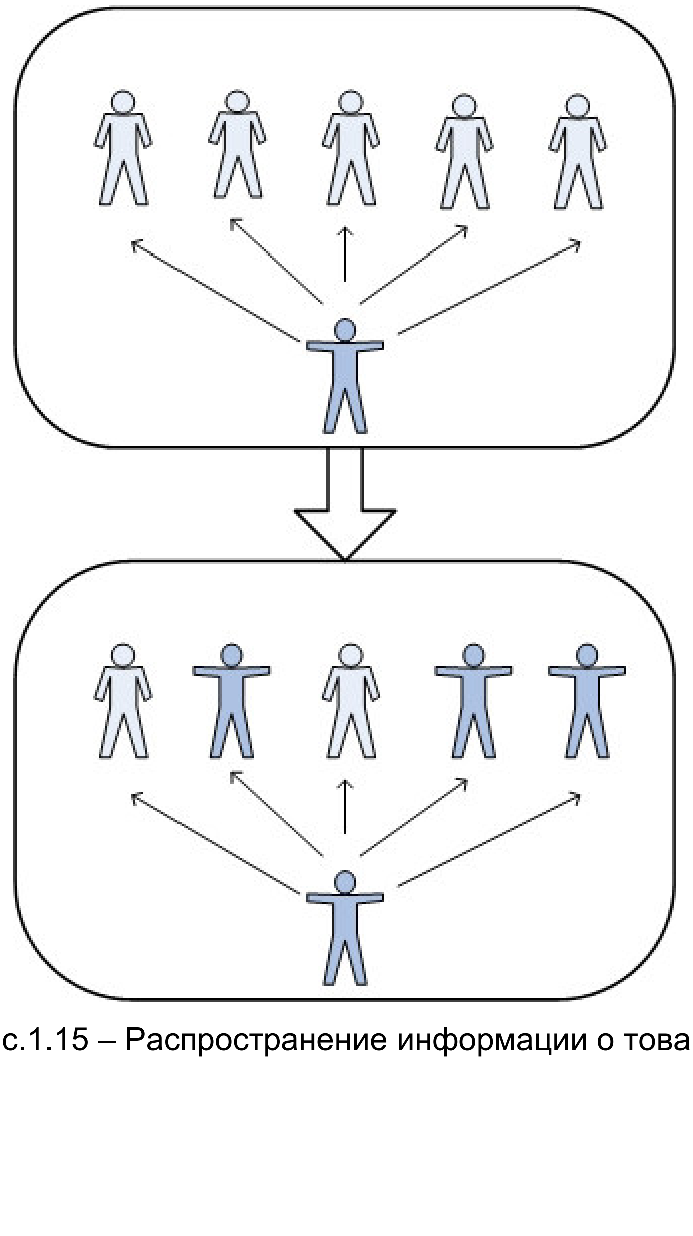


Рис.1.15 – Распространение информации о товаре

Решение

Алгоритм представлен на рис.1.16. Здесь $CountCust$ - число новых клиентов за день, $CountMen$ - число людей, с которым общается каждый клиент (представляет собой возможное значение случайной величины с нормальным законом распределения), z - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,1), и используемая при моделировании события убеждения человека (если меньше 0,6, то человек станет клиентом фирмы).

$Norm(10,1)$ - функция, генерирующая возможное значение случайной величины с нормальным законом распределения (среднее значение равно десяти, среднее квадратическое отклонение равно единице).

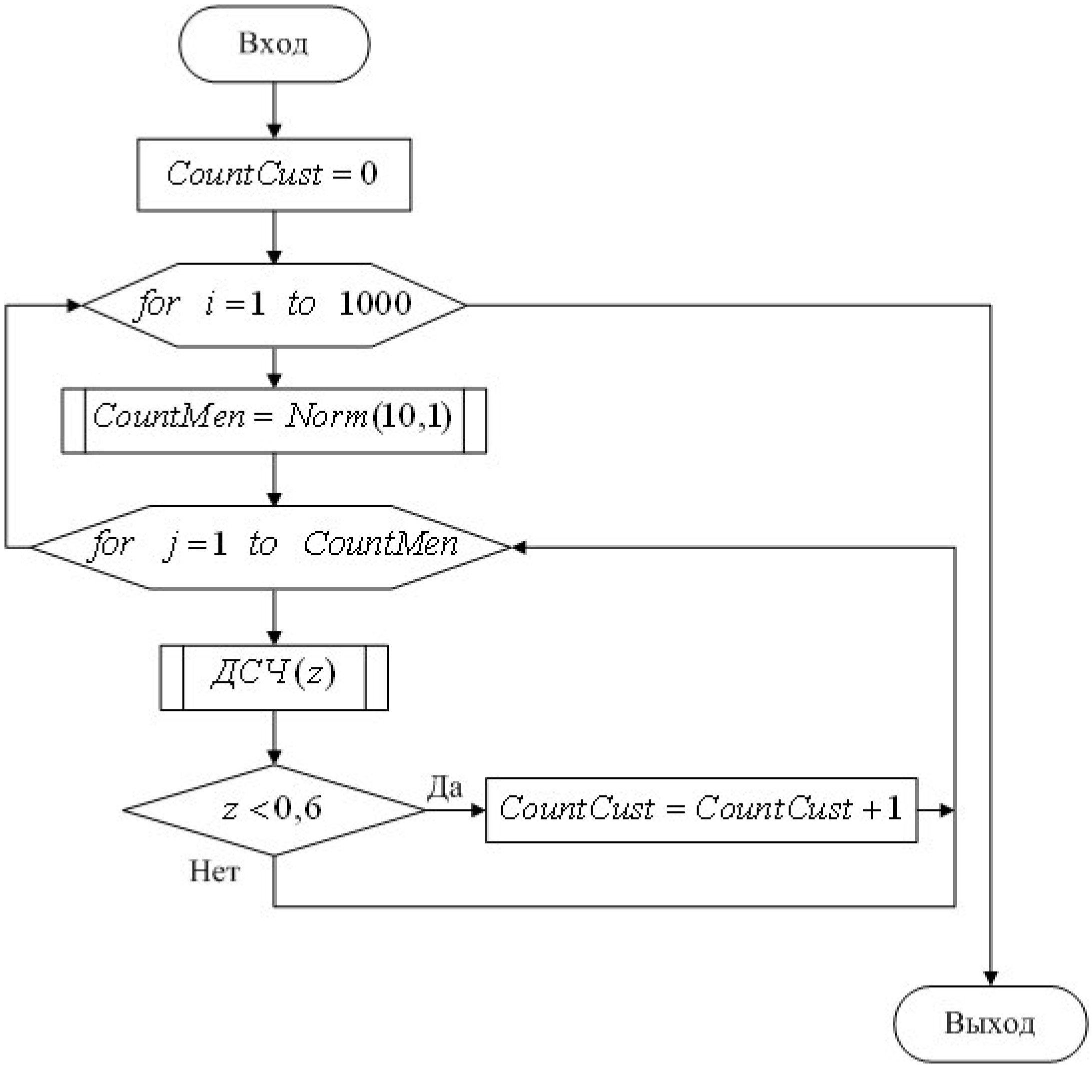


Рис.1.16 – Алгоритм моделирования распространения информации о товаре

Пример 3

Рассматривается процесс распространения эпидемии болезни. На начало рассматриваемого периода число больных людей равно $NumSick$. В текущий день с вероятностью P_v они могут вылечиться. В противном случае они могут заразить людей, с которыми ежедневно общаются. Число людей, с которыми больной ежедневно общается, является случайным с нормальным законом распределения (среднее значение равно M_p, среднее квадратическое отклонение - σ_p). Вероятность заражения равна P_s. Напишите алгоритм для определения числа больных за период T.

Решение

Алгоритм рассматриваемого процесса представлен на рис.1.17. Рассмотрим операторы этого алгоритма. Оператор 1 присваивает переменной $NumS$ значение числа больных людей на начало рассматриваемого периода. Оператор 2 является началом циклического перебора числа дней моделирования. Оператор 3 обнуляет значения переменных $NumS2$ (число людей, которые не выздоровели за текущий день) и $NumS3$ (число людей, зараженных за текущий день). Оператор 4 осуществляет перебор больных. Оператор 5 моделирует случайную величину z, равномерно распределенную на интервале (0,1). Оператор 6 моделирует событие выздоровления клиента. Если клиент не выздоровел, то переменная $NumS2$ увеличивается на единицу (оператор 7). Оператор 8 осуществляет перебор больных, которые не вылечились. Оператор 9 моделирует возможное значение случайной величины, распределенной по нормальному закону. Полученное число представляет собой количество людей, с которым общается рассматриваемый больной в текущий день. Оператор 10 осуществляет перебор людей, с которыми общается больной, а операторы 11, 12 моделируют события заражения. В том случае, если человек заразился от больного, то переменная $NumS3$ увеличивается на единицу (оператор 13). Оператор 14 рассчитывает новое значение $NumS$, как сумму значений переменных $NumS2$ и $NumS3$. Полученное число представляет собой количество больных людей, на начало следующего дня.

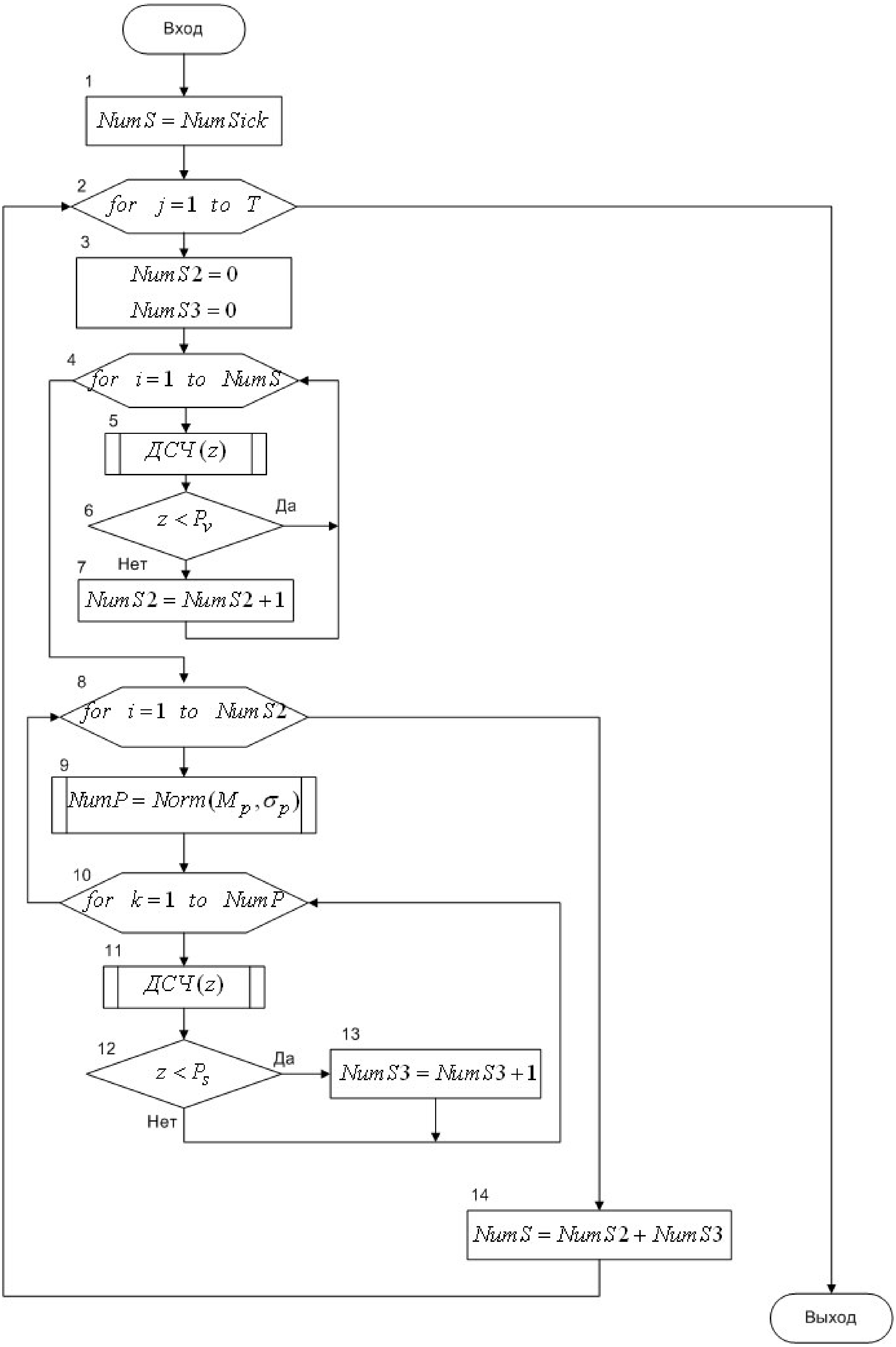


Рис.1.17 – Алгоритм моделирования распространения эпидемии болезни

Задача 1

Цена на товар в магазине за сутки с вероятностью P_1 =0,3 может подняться, с вероятностью P_2=0,5 остаться без изменения, и с вероятностью P_3=0,2 упасть. В первом случае средняя величина спроса за день составит A_1 = 500, во втором - A_2=600, в третьем - A_3=400. Случайная величина спроса распределена равномерно на интервале, величина которого равна Δx=50. Напишите алгоритм определения возможного значения случайной величины спроса. Определите это значение, если z_1=0,5, z_2=0,6 (z - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,1)), z_1 используется при моделировании события поведении цены, а z_2 - для моделирования величины спроса.

Задача 2

В фирме работает N=80 торговых агентов. Каждый из них ежедневно встречает в среднем A=50 человек (среднее квадратическое отклонение этого количества σ=5). Вероятность покупки товара равна P=0,3. Напишите алгоритм определения числа покупок за день, если количество человек, с которыми ежедневно общаются торговые агенты, является случайной величиной с нормальным законом распределения.

Задача 3

На аукционе проводятся торги. Число участников N=60. Цена, которую каждый из них может предложить – случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением A=200 руб. и средним квадратическим отклонением σ=5 руб. Выигрывает участник, предложивший наибольшую цену. Напишите алгоритм, имитирующий проведение торгов для нахождения цены продажи товара.

Задача 4

Рассматривается процесс распространения эпидемии болезни. Число больных N=100. Каждый из них общается за день с некоторым числом здоровых людей, которое является случайным с равномерным законом распределения (границы интервала равны: a=5, b=50). С вероятностью P=0,6 возможно заражение. Напишите алгоритм для определения количества заболевших людей за день.

Задача 5

Среднее число покупателей магазина за день N=150. Каждый из них с вероятностью P_1=0,3 покупает товар A_1, с вероятностью P_2=0,4 - товар A_2 и с вероятностью P_3=0,3- товар A_3. Напишите алгоритм определения количества проданного товара каждого вида за месяц (считая, что в месяце 30 дней), если случайная величина числа покупателей за день распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=10.

Задача 6

Зарплата агента складывается из постоянной части C и части, равной 10% от суммы продажи S. Ежедневно он посещает N=130 человек, которые с вероятностью P=0,4 совершают покупку товара на сумму, которая распределена равномерно на интервале (100; 1000). Напишите алгоритм для определения ежедневной зарплаты агента.

Задача 7

Банк занимается предоставлением кредитов. Число клиентов является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение A=100000 руб., среднее квадратическое отклонение σ=2000 руб.). С вероятностью P_1=0,4 клиент вернет кредит банку, с вероятностью P_2=0,3 – задержит выплату, с вероятностью P_3=0,3 – не вернет. Напишите алгоритм для определения числа клиентов, вернувших, не вернувших и задержавших выплату кредита.

Задача 8

Поток клиентов, обращающихся к услугам переговорного пункта, является пуассоновским с интенсивностью λ=5 человек в час. Время разговора является случайной величиной с дискретным законом распределения (X-значение времени разговора, P - вероятность)

X	0	1	2	3	4	5
P	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Стоимость разговора равна 5 руб. за мин. Считая, что переговорный пункт обладает достаточным количеством телефонных будок, чтобы клиенты не образовывали очередей, напишите алгоритм для определения суммы, полученной переговорным пунктом за T =12 часов.

Задача 9

Магазин занимается прокатом и продажей дисков. Поток покупателей – пуассоновский с интенсивностью λ=30 человек в час. С вероятностью P_1=0,3 клиент купит диск по цене 60 руб., с вероятностью P_2=0,4 – возьмет на прокат по цене 20 руб., с вероятностью P_3 =0,3 – не найдет нужный диск. Напишите алгоритм для определения выручки магазина за T =10 часов.

Задача 10

Производственная фирма располагает 10 станками. Каждый из них в течение месяца с вероятностью P=0,3 может выходить из строя. Стоимость ремонта зависит от типа поломки и является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением M =1000 руб., средним квадратическим отклонением σ=100 руб. Напишите алгоритм для определения ежемесячных затрат, связанных с ремонтом имеющихся у предприятия станков.

Задача 11

Число посетителей фирмы за месяц является случайной величиной с нормальным законом распределения. Среднее значение M =100 человек, среднее квадратическое отклонение σ=10. С вероятностью P_1=0,3 клиент обратиться в отдел кадров, с вероятностью P_2=0,5 - в бухгалтерию, с вероятностью P_3 =0,2 - к заместителю директора. Напишите алгоритм для определения числа посетителей каждого подразделения фирмы.

Задача 12

На складе хранится $N_{ур}$ = 10000 шт. товара. Число клиентов, приобретающих товар каждый день, является случайной величиной с усеченным нормальным законом распределения. Среднее значение M =100 человек, среднее квадратическое отклонение σ =10, точки усечения $T_{\min}$ =0, $T_{\max}$ =4. Каждый клиент покупает 1 единицу товара. С вероятностью P =0,1 клиент может вернуть купленный товар в этот же день. Напишите алгоритм для определения количества товара на складе через T =10 дней.

Задача 13

Посетители развлекательного комплекса играют в игру «Стрельба по мишени». Цена одной попытки равна 50 руб. Количество игроков в день является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением M =200 человек, средним квадратическим отклонением σ =10 человек. Каждый человек с вероятностью P_1 =0,1 может набрать 100 очков и выиграть 300 руб., с вероятностью P_2 =0,2 – набрать 50 очков и выиграть 100 руб. Напишите алгоритм для определения дневной прибыли развлекательного комплекса.

Задача 14

Поставщик осуществляет доставку грузов. Время доставки – случайная величина с показательным законом распределения. Среднее значение времени доставки $t_{ср}$ =3 дня. В том случае, если время доставки превышает 2 дня, поставщик платит неустойку за несвоевременную доставку, которая зависит от заказчика и с вероятностью P_1 равна 50 руб., с вероятностью P_2 равна 100 руб. Напишите алгоритм определения обще величины неустойки за 10 доставок.

Задача 15

Изготовление детали на заводе может быть осуществлено с вероятностью P_1 =0,5 на станке «А», с вероятностью P_2 =0,3 - на станке «В», с вероятностью P_3 =0,2- на станке «С». Время изготовления является случайной величиной с равномерным законом распределения. В случае изготовления на станке «А» границы интервала равны: a =1 час, b =2 часа. В случае изготовления на станке «В» границы интервала равны: a =1,5 часа, b =2 часа. В случае изготовления на станке «С» границы интервала равны: a =2 часа, b =2,5 часа. Напишите алгоритм для определения суммарного времени изготовления 110 изделий.

Задача 16

Рассматривается процесс производства изделий. Количество сырья необходимое для изготовления изделия является случайной величиной, распределенной равномерно на интервале (2,4). С вероятностью P =0,2 изделие может оказаться бракованным. Напишите алгоритм для определения количества сырья, необходимого для изготовления 90 изделий, а также числа бракованных изделий.

Задача 17

Автобусы прибывают на станцию технического обслуживания. Каждый автобус проходит технический контроль. Время технического контроля является случайной величиной с равномерным законом распределения, границы интервала: a =0,2 час., b =1 час. Кроме того, с вероятностью P =0,25 автобусу может потребоваться ремонт. Время ремонта является случайной величиной с нормальным законом распределения. Среднее значение M =30 час., среднее квадратическое отклонение σ =4 час. Напишите алгоритм для определения времени прохождения автобусом технического обслуживания.

Задача 18

В справочную службу поступают телефонные звонки. Время между соседними звонками является случайной величиной с равномерным законом распределения. Границы интервала : a =0,4 час., b =0,7 час. Считая, что время разговора (равное 0,05 час.) меньше чем время между звонками (т.е. невозможно возникновение ситуации, когда очередной звонок поступил прежде, чем был обслужен предыдущий), напишите алгоритм для определения, будет ли занят телефон в справочной службе, если клиент позвонит в момент времени 3,4 час.

Задача 19

Сотрудник предприятия имеет два задания, которые необходимо выполнить в течение дня: «оформление документов» и «переговоры с клиентами». Время выполнения заданий является случайной величиной с нормальным законом распределения. Среднее значение выполнения первого задания M_1=190 мин., второго - M_2=40 мин. Среднее квадратическое отклонение σ одинаково и равно 5 мин. С равной вероятностью он может выбрать сначала любое из перечисленных заданий. Напишите алгоритм для определения времени окончания работы сотрудника.

Задача 20

В химчистке выполняется обработка костюмов-двоек (пиджак и брюки). Пиджак обрабатывается у оператора «А» и время его обработки распределено равномерно на интервале (5,6) час. Вероятность повреждения пиджака при обработке P_1=0,01. Брюки обрабатываются у оператора «В» и время их обработки распределено равномерно на интервале (4,5) час. Вероятность повреждения брюк при обработке P_2=0,02. Считая, что обработка брюк и пиджака осуществляется параллельно, напишите алгоритм для определения времени окончания обработки костюма и наличия повреждения.

Задача 21

Работник фирмы занимается оформлением договоров с клиентами. Время оформления документа является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение M=15 мин., среднее квадратическое отклонение σ=1 мин.). С вероятностью P=0,2 в заполненных клиентом документах может обнаружиться ошибка. В этом случае документы дооформляются. Время дооформления является случайной величиной с равномерным законом распределения (границы интервала: a=1 мин., 3 мин.). Напишите алгоритм для определения времени обслуживания работником N=100 клиентов.

Задача 22

На автомобильном заводе работает один служащий, выдающий рабочим инструменты из инструментальной кладовой. Поток рабочих – пуассоновский с интенсивностью λ=10 человек в час. С вероятностью P=0,2 необходимый инструмент может отсутствовать или быть сломан. Напишите алгоритм для определения числа рабочих, не получивших нужный инструмент за период T =10 часов.

Задача 23

Брокер занимается заключением сделок на бирже. Поток заявок – пуассоновский. С интенсивностью $\frac{1}{t_{pok.cp}}$ к нему поступают заявки на покупку, с интенсивностью $\frac{1}{t_{prod.cp}}$ – на продажу. Каждая заявка характеризуется ценой (продажи или покупки) (для простоты считаем, что все заявки обладают равным количеством). Цена заявки является случайной величиной с нормальным законом распределением (среднее значение равно M_z, среднее квадратическое отклонение - σ_z). Больший приоритет имеют заявки, предложившие лучшую цену, а при равных ценах - поступившие раньше других. От сделки брокер получает прибыль, равную w % от суммы покупки.

В таблице 1.4 приведены действия брокера при поступлении заявок.

Таблица 1.4 – Поведение брокера

Событие	Действия брокера
Поступление заявки на покупку	Поиск среди заявок на продажу заявки, имеющей максимальную цену из возможных ее значений (равных или меньше предложенной). В том случае, если не найдено таких заявок, заявка на покупку помещается в очередь. А если найдена, то совершается сделка.
Поступление заявки на продажу	Поиск среди заявок на покупок заявки, имеющей минимальную цену из возможных ее значений (равных или больше предложенной). В том случае, если не найдено таких заявок, заявка на продажу помещается в очередь. А если найдена, то совершается сделка.

Рассматривается период равный T_D в течение N_p случайных реализаций.

Напишите алгоритм, имитирующий поведение брокера.

Решение

Алгоритмы приведены на рис.1.18-1.20. Рассмотрим основной алгоритм, представленный на рис. 1.18.

Оператор 1 обнуляет глобальную переменную S (прибыль брокера) и устанавливает значения входных данных.

Оператор 2 является началом цикла случайных реализаций. Оператор 3 обнуляет локальные переменные: $NumProd$ -число поступивших заявок на продажу, $NumPokup$ - число поступивших заявок на покупку, элемента массивов $Prod()$ и $Pokup()$, в которых содержатся значения цен, указанных в заявках на продажу и покупку соответственно.

Операторы 3-4 моделируют значение случайной величины, распределенной по показательному закону, времени поступления первой заявки на покупку. Аналогично операторы 5-6 моделируют значение случайной величины, распределенной по показательному закону, времени поступления первой заявки на продажу. Оператор 8 является началом цикла, выход из которого осуществляется, если время поступления следующей заявки превышает период моделирования. Оператор 9 проверяет, какая заявка поступила раньше: на продажу или покупку. В том случае, если раньше поступила заявка на покупку, то оператор 10 проверяет, поступила ли она после окончания периода моделирования. Если ее время поступления больше периода моделирования, то происходит выход из цикла. В противном случае моделируется возможное значение цены $zena$, по которой поступила данная заявка (оператор 11). По условию задачи цена является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение равно M_z, среднее квадратическое отклонение - σ_z), и поэтому ее моделирование осуществляется согласно алгоритму моделирования случайной величины с нормальным законом распределения. Оператор 12 вызывает процедуру, связанную с событием покупки товара. Операторы 13-14 моделируют значение времени поступления следующей заявки на покупку. В том случае, если первой к брокеру поступила заявка на продажу, то также происходит проверка окончания периода моделирования (оператор 15), расчет цены (оператор 16), вызов процедуры, связанной с событием продажи товара (оператор 17), расчет следующего времени поступления заявки на продажу (операторы 18-19).

После окончания случайных реализаций осуществляется расчет показателя эффективности модели – средней прибыли.

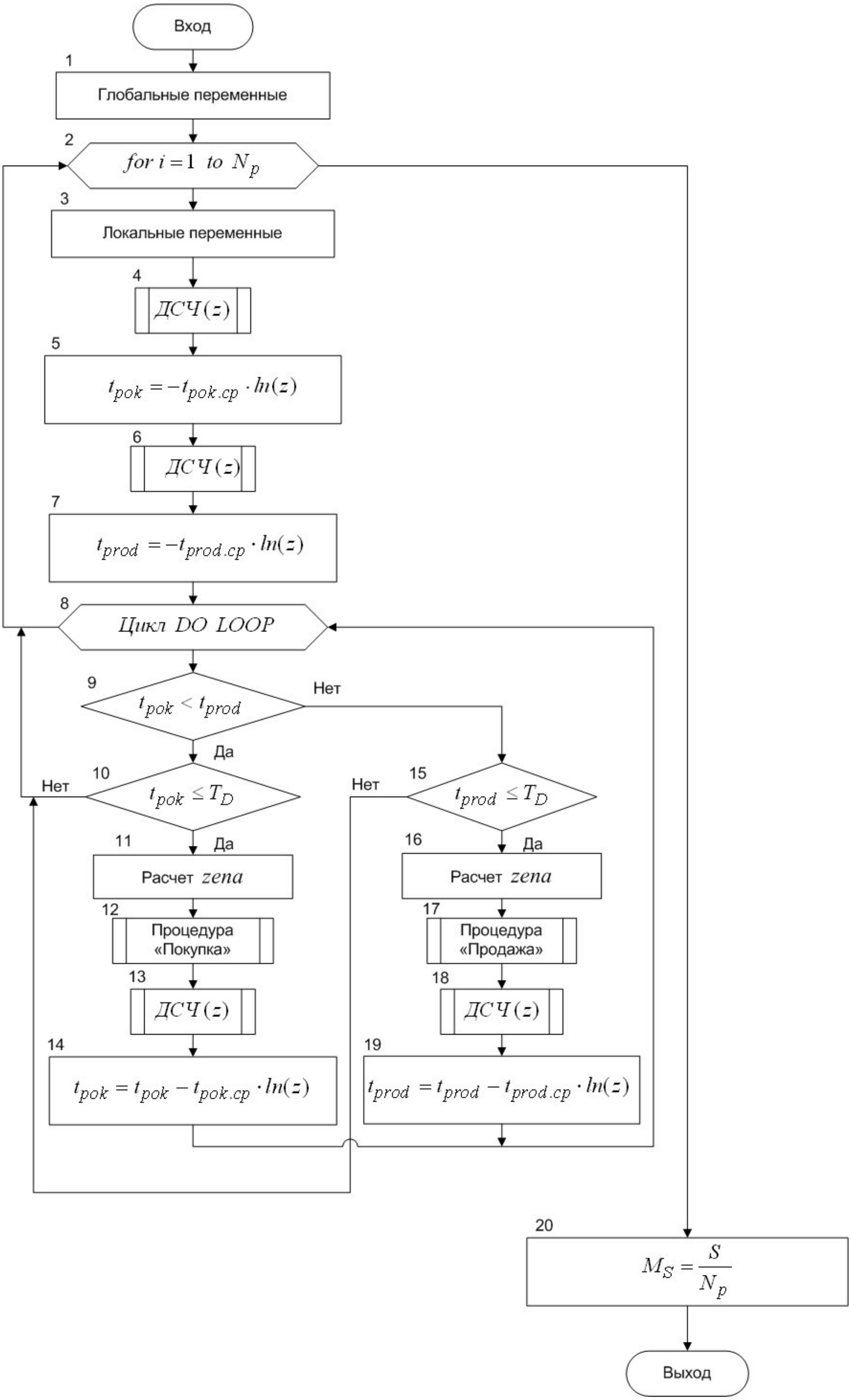

Вход
1
Глобальные переменные
2
$for\ i=1\ to\ N_p$
3
Локальные переменные
4
$ДСЧ(z)$
5
$t_{pok}=-t_{pok.cp}\cdot ln(z)$
6
$ДСЧ(z)$
7
$t_{prod}=-t_{prod.cp}\cdot ln(z)$
8
Цикл DO LOOP
9
$t_{pok}<t_{prod}$
Нет
Да
10
$t_{pok}\le T_D$
Нет
Да
11
Расчет zena
12
Процедура «Покупка»
13
$ДСЧ(z)$
14
$t_{pok}=t_{pok}-t_{pok.cp}\cdot ln(z)$
15
$t_{prod}\le T_D$
Нет
Да
16
Расчет zena
17
Процедура «Продажа»
18
$ДСЧ(z)$
19
$t_{prod}=t_{prod}-t_{prod.cp}\cdot ln(z)$
20
$M_S=\frac{S}{N_p}$
Выход

Рис.1.18 – Основной алгоритм

Рассмотрим теперь процедуру, связанную с событием поступления заявки на покупку товара (рис.1.19).

Оператор 1 обнуляет переменную $NumKlient$ - число заявок на продажу, которое соответствует поступившей заявке на покупку. Оператор 2 является началом перебора всех заявок на продажу. Все значения цен заявок на продажу содержатся в массиве $Prod$, а общее число заявок на продажу равно $NumProd$. Оператор 3 проверяет, удовлетворяет ли просматриваемая заявка на продажу условию, предъявляемому поступившей заявкой на покупку. Если нет, то переходим к следующей заявке на продажу. В противном случае, определяется, были ли уже кандидаты из заявок на продажу или нет (оператор 4). Если не было, то переменной $NumKlient$ присваивается значение 1, переменной $MaxZen$ (максимальное значение из всех цен, удовлетворяющих условию заявки на покупку) присваивается значение цены на продажу, а переменной $NumInd$ - порядковый номер заявки на продажу (оператор 8). Если уже были кандидаты на продажу, то увеличивается их число на единицу (оператор 5) и проверяется больше ли текущее значение цены на продажу максимального значения из всех предшествующих кандидатов (оператор 6). В том случае, если больше, то переменным $MaxZen$ и $NumInd$ присваивается значение характеристик рассматриваемой заявки на продажу. После просмотра всех заявок оператор 9 осуществляет проверку, была ли найдена соответствующая заявка на продажу. Если такая заявка была найдена, то оператор 10 удаляет эту заявку из массива $Prod$, число заявок на продажу уменьшается на единицу (оператор 11), рассчитывается суммарная прибыль брокера как процент от цены на покупку (оператор 12). Если же кандидаты среди заявок не нашлись, то поступившая заявка на покупку ставится в очередь. Оператор 13 увеличивает число заявок на покупку (число элементов массива $Pokup$), и присваивает последнему элементу массива $Pokup$ значение цены.

На рис.1.20 представлен алгоритм процедуры, связанной с поступлением заявкой на продажу. Можно заметить его сходство с алгоритмом на рис.1.18. Отличия заключаются в следующем: рассматриваемые заявки на покупку должны быть больше или равны цене поступившей заявки на продажу (оператор 3), среди всех кандидатов на покупку ищется заявка с минимальным значением цены (операторы 6-7). В том случае, если найден кандидат, то удаляется найденная заявка на покупку из массива $Pokup$, уменьшается число заявок на покупку и рассчитывается прибыль брокера. (операторы 10-12). Если же не было найдено ни одной подходящей заявки на покупку, то увеличивается число заявок на продажу, и эта заявка ставится в очередь (оператор 13).

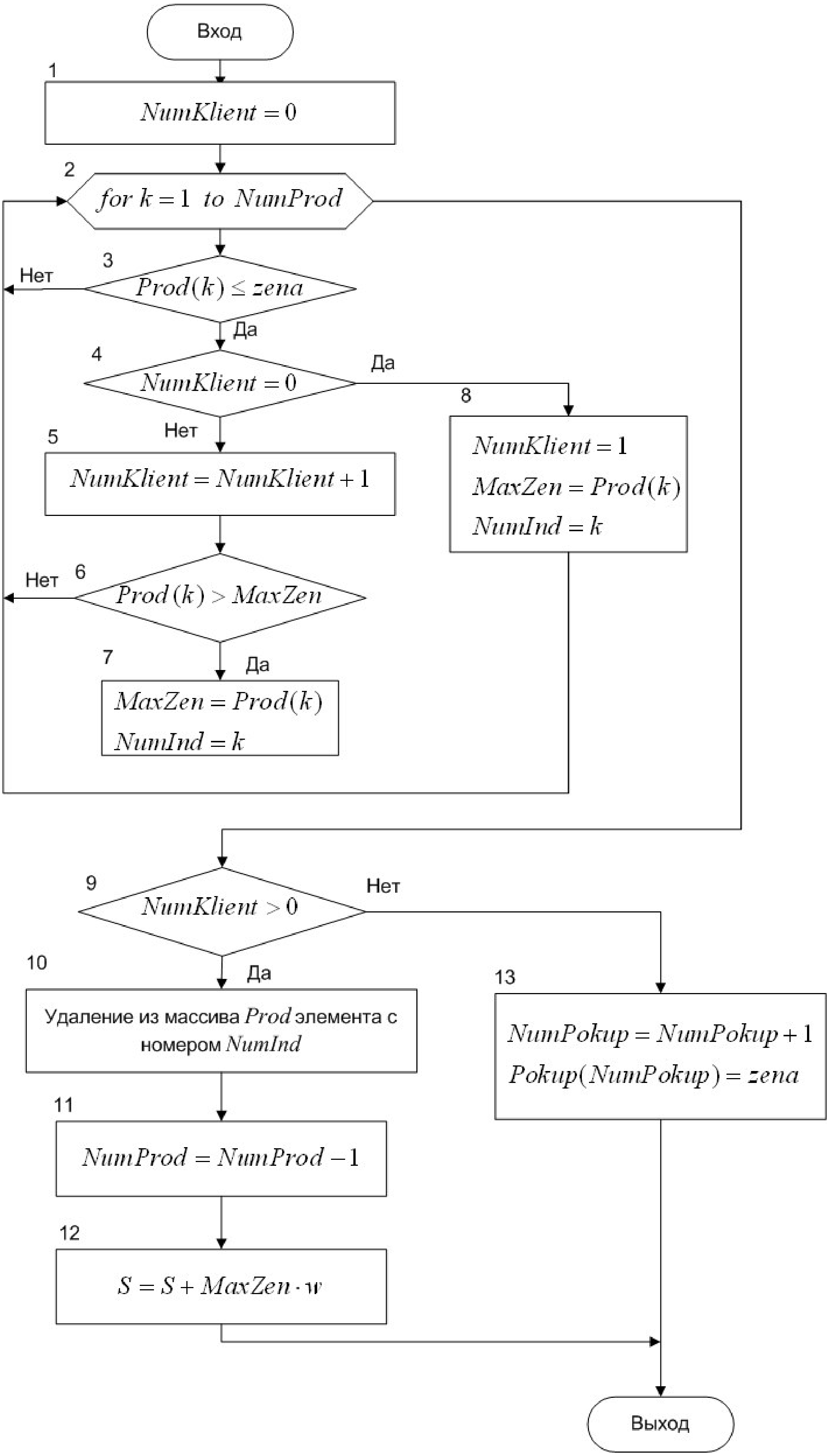

Вход
1
$NumKlient = 0$
2
$for\ k = 1\ to\ NumProd$
3
$Prod(k) \le zena$
Нет
Да
4
$NumKlient = 0$
Да
Нет
5
$NumKlient = NumKlient + 1$
8
$NumKlient = 1$
$MaxZen = Prod(k)$
$NumInd = k$
6
$Prod(k) > MaxZen$
Нет
Да
7
$MaxZen = Prod(k)$
$NumInd = k$
9
$NumKlient > 0$
Нет
Да
10
Удаление из массива $Prod$ элемента с номером $NumInd$
11
$NumProd = NumProd - 1$
12
$S = S + MaxZen \cdot w$
13
$NumPokup = NumPokup + 1$
$Pokup(NumPokup) = zena$
Выход

Рис.1.19 – Алгоритм имитации события поступления заявки на покупку

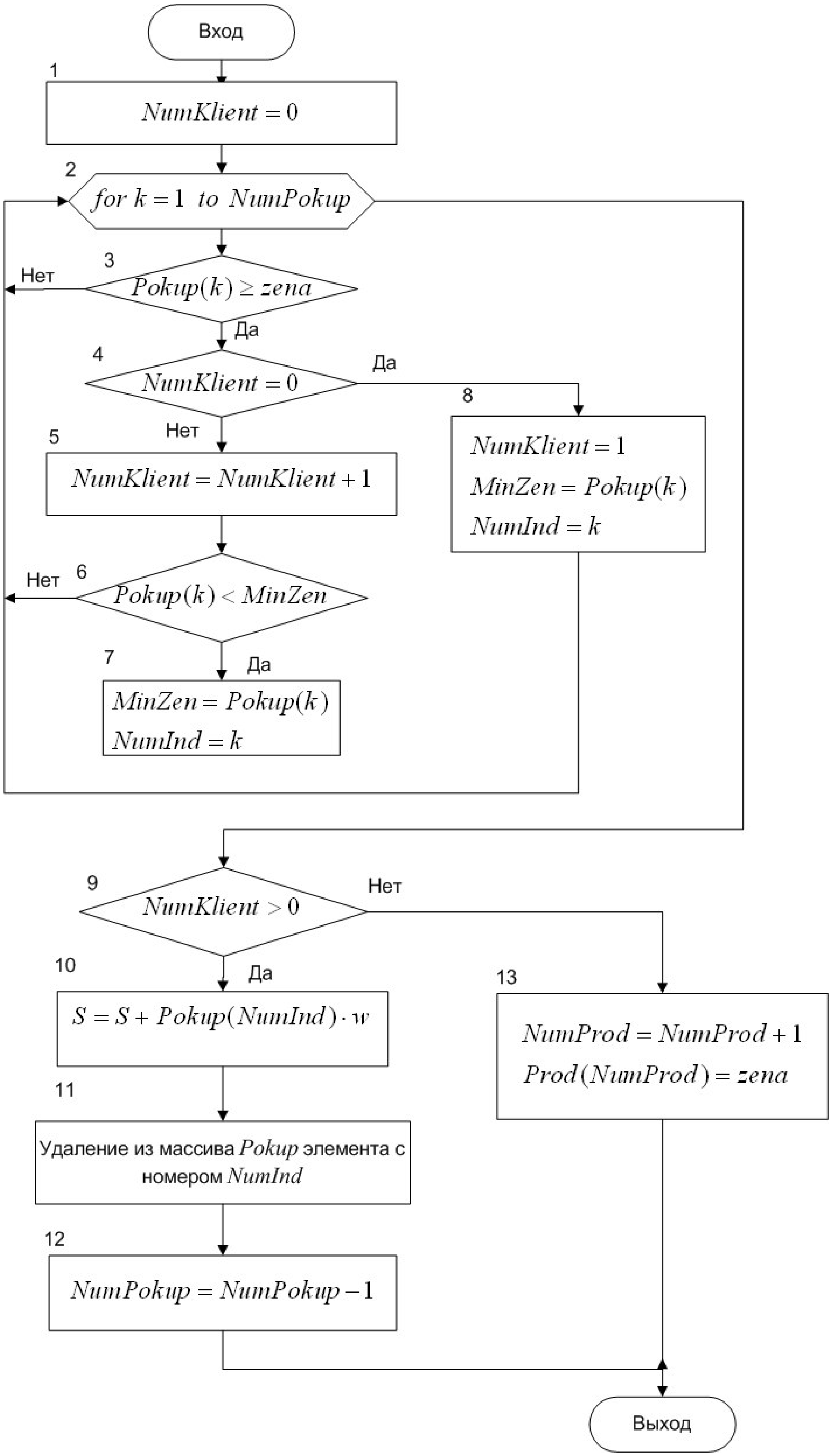

Вход
1
$NumKlient = 0$
2
$for\ k = 1\ \ to\ \ NumPokup$
3
Нет
$Pokup(k) \geq zena$
Да
4
$NumKlient = 0$
Да
8
$NumKlient = 1$
$MinZen = Pokup(k)$
$NumInd = k$
Нет
5
$NumKlient = NumKlient + 1$
Нет
6
$Pokup(k) < MinZen$
7
Да
$MinZen = Pokup(k)$
$NumInd = k$
9
$NumKlient > 0$
Нет
10
Да
$S = S + Pokup(NumInd) \cdot w$
13
$NumProd = NumProd + 1$
$Prod(NumProd) = zena$
11
Удаление из массива $Pokup$ элемента с номером $NumInd$
12
$NumPokup = NumPokup - 1$
Выход

Рис.1.20 – Алгоритм имитации события поступления заявки на продажу

Задача 23.1

Пусть к началу моделирования у брокера уже имеется три заявки на продажу, цена которых - $zena_1$, $zena_2$ и $zena_3$. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 23.2

Модифицируйте алгоритм, считая, что случайная величина времени между поступлением двух заявок на продажу распределена равномерно на интервале (a,b).

Задача 23.3

Как изменится алгоритм программы, если прибыль брокера составляет w% от суммы сделки?

Задача 23.4

Модифицируйте алгоритм, считая, что интенсивность потока заявок на покупку возрастает в 2 раза во второй половине периода моделирования.

Задача 23.5

Измените алгоритм, считая, что если к концу периода останутся заявки на покупку, то моделирование продолжается до их удовлетворения (при этом заявки на продажу больше не поступают).

Задача 23.6

Пусть среди заявок на покупку выбирается заявка не с лучшей ценой (имеющая минимальное значение из всех удовлетворяющих заявке на продажу), а первая поступившая заявка, удовлетворяющая заявке на продажу. Какие изменения необходимо внести в алгоритм в этом случае?

Задача 23.7

Пусть среди заявок на продажу выбирается заявка не с лучшей ценой (имеющая максимальное значение из всех удовлетворяющих заявке на покупку), а первая поступившая заявка, удовлетворяющая заявке на покупку. Какие изменения необходимо внести в алгоритм в этом случае?

Задача 23.8

Пусть с вероятностью P, человек подавший заявку на покупку может отказаться от сделки. В этом случае заявка на покупку аннулируется, а заявка на продажу остается в очереди. Как изменится алгоритм в этом случае?

Задача 23.9

Модифицируйте алгоритм, считая, что за какой-то период (его продолжительность не имеет значения) поступило N_1 заявки на покупку, а затем N_2 заявок на продажу.

Задача 23.10

Как изменится алгоритм, если среднее значение цены различно для заявок на покупку и продажу?

Задача 23.11

Добавьте в алгоритм оператор, чтобы в конце периода моделирования осуществлялся расчет числа неудовлетворенных заявок.

Задача 23.12

Какие операторы алгоритма нужно изменить, чтобы показателем эффективности было значение числа заключенных сделок?

Задача 23.13

Пусть интенсивность потока заявок равна $\frac{1}{t_{з.ср}}$. С вероятностью P_1 вновь поступившая заявка может оказаться заявкой на покупку, в противном случае эта заявка является заявкой на продажу. Внесите изменения в алгоритм для осуществления этого способа поступления заявок.

Задача 23.14

Измените алгоритм, считая, что среднее значение цены возрастает в 1,5 раза во второй половине периода моделирования.

Задача 23.15

Пусть прибыль брокера равна $w\%$ от суммы продажи. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 23.16

Моменты времени поступления первых заявок на покупку и продажу известны и равны t_1 и t_2 соответственно. Какие изменения необходимо внести в алгоритм?

Задача 23.17

Пусть процент w от суммы покупки зависит от цены и равен w_1, если стоимость покупки меньше $Pokup_{\min}$, и w_2 - в противном случае. Какие изменения необходимо внести в алгоритм?

Глава 2. Системы массового обслуживания

2.1 Теория массового обслуживания

На практике часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы - систем массового обслуживания (СМО).

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания. На вход СМО поступает поток требований (заявок) (табл.2.1).

Таблица 2.1 – Примеры СМО

Система массового обслуживания	Процесс обслуживания	Канал обслуживания	Заявки
Магазин	Продажа товаров	Касса	Покупатели
Справочная телефонная служба	Предоставление информации по телефону	Диспетчер	Звонки клиентов
Больница	Осмотр пациентов	Врач	Пациенты

Рассмотрим характеристики систем массового обслуживания. Различают следующие ее элементы:

1. входной поток заявок;
2. очередь;
3. узел обслуживания;
4. выходной поток.

На рис. 2.1 указаны эти элементы для следующей СМО: банк занимается обслуживанием клиентов, которые осуществляют денежные вложения.

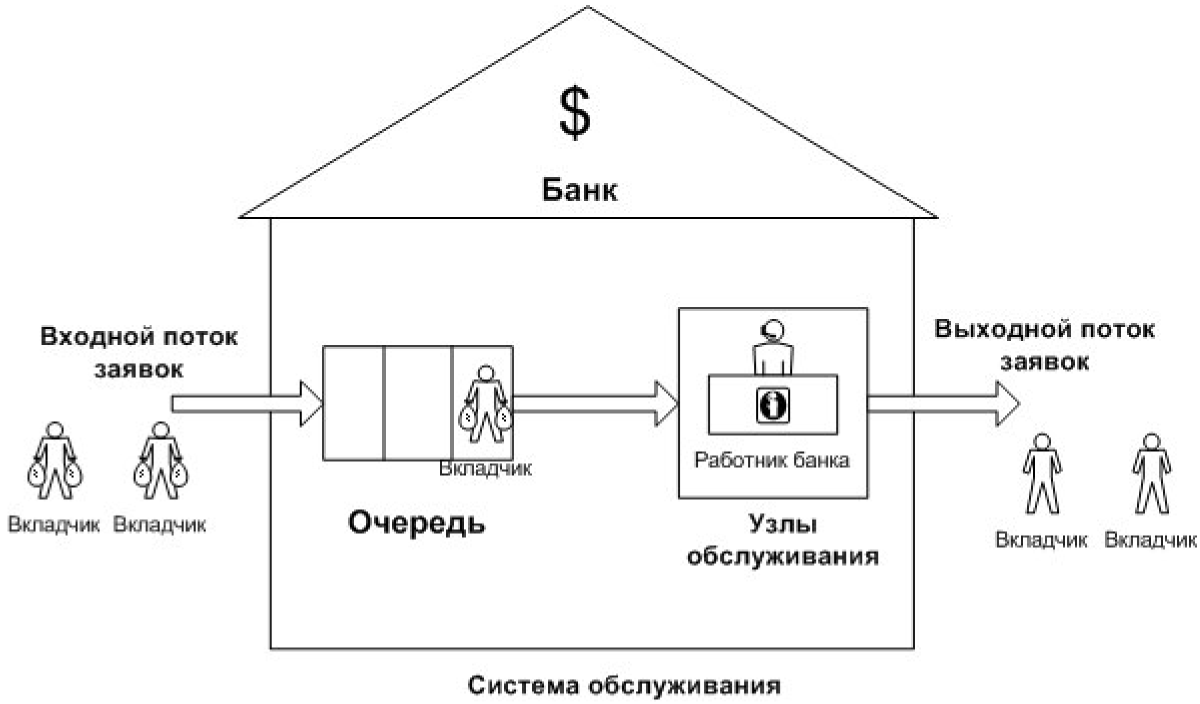


Рис. 2.1 – Элементы системы массового обслуживания

Входной поток заявок клиентов может быть случайным или детерминированным. В первом случае время между поступлением двух заявок является случайной величиной, а во втором – величиной детерминированной (поступление происходит в соответствие с определенным графиком). Интенсивность потока – частота появления событий, поступающих в СМО в единицу времени. В СМО может поступать несколько входных потоков, имеющих различные характеристики (интервал поступления, приоритет и т.д.). Интенсивность потока λ – частота появления событий, поступающих в СМО в единицу времени. Наиболее часто в задачах рассматривается пуассоновский поток заявок, распределение которого описывается следующей формулой

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$

Для данного распределения математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии. Вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

Очередь – место, где поступившие заявки ждут начала обслуживания. В том случае, если элемент очередь в системе отсутствует, то данная система без ожидания. Это означает, что в том случае, если в момент поступления заявки все каналы обслуживания заняты, то эта заявка покидает систему необслуженной. Очередь может иметь ограниченную или неограниченную длину. Кроме того, время ожидания в очереди может быть ограничено (говорят, что рассматриваются нетерпеливые заявки). Следующая характеристика очереди – дисциплина очереди. Она связана с правилом, в соответствии с которым обслуживаются клиенты. Различают следующие дисциплины: первый пришел – первый ушел, первый пришел – последний ушел, а также существуют дисциплины с приоритетами.

Рассмотрим теперь характеристики средств обслуживания. Системы обслуживания характеризуются по числу каналов обслуживания (например, если на рис. вкладчиков может обслуживать несколько работников банка, то система будет многоканальной), числу фаз обслуживания (например, если на рис. вкладчику необходимо будет последовательно пройти обслуживание у нескольких работников, то система будет многофазной). Время обслуживание может быть случайной величиной или детерминированным.

Также существую системы, в которых обслуженные требования после некоторой задержки опять поступают на вход. Такие системы называются замкнутыми.

В качестве показателей эффективности СМО рассматриваются: среднее время, которое клиент проводит в очереди, средняя длина очереди, среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания, среднее число клиентов в системе обслуживания, вероятность того, что система окажется незанятой и т.д. В приложении 1 приведены формулы расчета данных показателей для одноканальных и многоканальных систем массового обслуживания с отказами, ограниченной и неограниченной очередью.

Рассмотрим теперь понятие случайного процесса.

Под случайным (вероятностным или стохастическим) процессом понимается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния $S_1, S_2, S_3, \ldots$ — можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком). Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Случайный процесс называется марковским или случайным процессом без последствия, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – так называемым графом состояний. Обычно состояния системы изображаются прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние — стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния (рис.2.2).

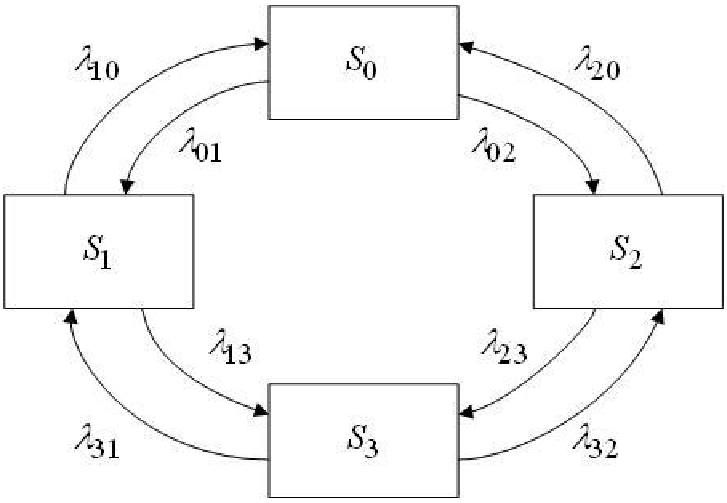


Рис.2.2 – Граф состояний

Для вычисления предельных вероятностей системы (в том случае, если рассматривается марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем) составляется уравнение Колмогорова. Правило составления следующее. В левой части записывается производная i - го состояния. В правой части - сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i - го состояния). Кроме того, в систему добавляется уравнение, согласно которому сумма всех предельных вероятностей системы равна единице. Т.к. предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмагорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Решив эту, систему, можно найти предельные вероятности

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — так называемый процесс гибели и размножения. Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, ..., S_k$. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1} либо в состояние S_{k+1} (рис.2.3).

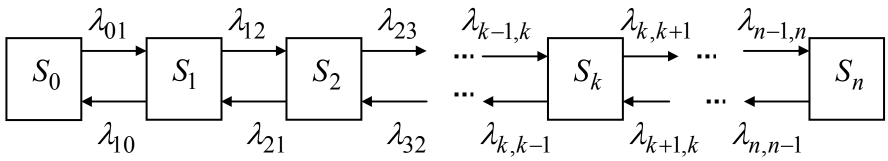


Рис.2.3 – Процесс гибели и размножения

Нахождение предельных вероятностей для данного процесса (если предположить, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$.) осуществляется с помощью уравнений Колмогорова.

Пример 1

На предприятие поступает простейший поток заказов на изготовление изделий с интенсивностью λ=1,1 заказа в час. Определите среднее число заказов за 8 часов. Найдите вероятность того, что за 2 часа

- не поступит ни одного заказа;
- поступит два заказа;
- поступит не менее трех заказов;
- поступит меньше двух заказов.

Решение

Вычислим интенсивность заказов за 8 часов

$\lambda = 8 \cdot 1{,}1 = 8{,}8$ заказов за 8 часов.

Интенсивность заказов за 2 часа равна

$\lambda = 2 \cdot 1{,}1 = 2{,}2$.

Вероятности рассчитываются с использованием пуассоновского распределения

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m e^{-\lambda\tau}}{m!}$$

Вероятность того, что за два часа не будет ни одного заказа равна

$$p_0 = \frac{2,2^0 e^{-2,2}}{0!} = 0,11$$

Вероятность того, что за два часа поступит два заказа, равна

$$p_2 = \frac{2,2^2 e^{-2,2}}{2!} = 0,27$$

Вероятность того, что за два часа поступит не менее трех заказов, равна

$$P(X \geq 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - (\frac{2,2^0 e^{-2,2}}{0!} + \frac{2,2^1 e^{-2,2}}{1!} + \frac{2,2^2 e^{-2,2}}{2!}) =$$

$$= 1 - (0,11 + 0,24 + 0,27) = 0,38$$

Вероятность того, что за два часа поступит меньше двух заказов, равна

$$P(X < 2) = p_0 + p_1 = 0,11 + 0,24 = 0,35\,.$$

Пример 2

В магазине работает один продавец. Интенсивность потока покупателей равна λ покупателей в час.

Предполагается, что покупатели образуют очередь.

Считая, что интенсивность нагрузки канала равна 0,5 (λ=20, μ=40), найдите:

1. вероятности того, что продавец свободен и занят;
2. вероятность того, что ожидает обслуживания не более 2 покупателей;
3. среднее число заявок в системе;
4. среднее число заявок в очереди;
5. среднее время пребывания заявки в системе;
6. среднее время пребывания заявки в очереди.

Решение

Рассматривается одноканальная СМО с неограниченной очередью.

Вероятность того, что продавец свободен

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,5 = 0,5\,.$$

Вероятность того, что продавец занят

$$P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0,5 = 0,5\,.$$

Вероятности того, что у кассы 1,2,3 покупателя (т.е. ожидают обслуживания 0,1,2 покупателя) равны

$$p_1 = \rho p_0 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25,$$

$$p_2 = \rho^2 p_0 = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125,$$

$$p_3 = \rho^3 p_0 = 0,5^3 \cdot 0,5 = 0,0625$$

Вероятность того, что ожидает обслуживания не более чем 2 покупателя равна

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,4375$$

Среднее число заявок в системе равно

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,5}{1-0,5} = 1.$$

Среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = L_{сист} - \rho = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} = \frac{1}{20} \cdot 1 = 0,05.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{1}{20} \cdot 0,5 = 0,025.$$

Задача 1

На рис.2.2 приведен граф состояний следующего процесса. Устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Найти предельные вероятности при λ_{01}=2, λ_{02}=3, λ_{10}=2, λ_{13}=4, λ_{20}=3, λ_{23}=4, λ_{31}=4, λ_{32}=5.

Задача 2

Устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 9 и 5 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 3 и 2 ден. ед. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 6p_1 = 2p_0 + 2p_3, \\ 4p_2 = p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Предельные вероятности описывают следующие состояния системы: S_0 - оба узла исправны; S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 - оба узла ремонтируются.

Задача 3

Процесс гибели и размножения представлен графом на рис.2.4. Найти предельные вероятности состояний.

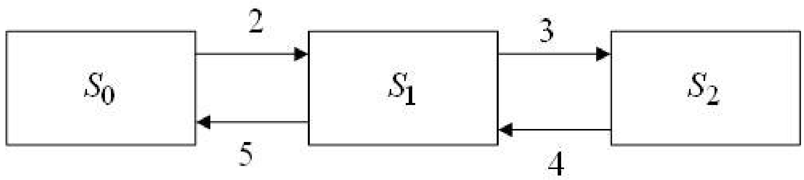


Рис.2.4 – Процесс гибели и размножения

Задача 4

В справочную службу поступают звонки с интенсивностью λ, равной 100 заявок в час, а средняя продолжительность обслуживания $\overline{t_{об}} \sim 4$ мин. Считая, что в справочной службе только один телефонный номер, а заявка, поступившая в момент обслуживания другой заявки, покидает систему, определите:

- предельные вероятности того, что канал свободен и того, что канал занят;
- относительную пропускную способность;
- вероятность отказа;
- абсолютную пропускную способность;
- средний чистый доход в единицу времени, если стоимость услуг информационной службы равна 100 руб.;
- упущенный доход в единицу времени, связанный с отказами в обслуживании;
- справляется ли система с потоком заявок.

Задача 5

В вычислительный центр с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы с интенсивностью λ заказов в час. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступивший заказ не принимается и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Поток обслуживаний (вычислительных работ) имеет интенсивность μ (заказов в час).

1. Нарисуйте граф состояний системы.
2. Считая, что интенсивность нагрузки канала равна 1 (λ=4, μ=4), найдите:

2.1. предельные вероятности (вероятность того, что занята 1 ЭВМ, вероятность того, что занято 2 ЭВМ и т.д.);

2.2. вероятность отказа системы массового обслуживания;

2.3. относительную пропускную способность;

2.4. абсолютную пропускную способность;

2.5. среднее число занятых каналов;

Задача 6

В Интернет-кафе работает 3 компьютера. Если посетитель приходит в тот момент, когда заняты все компьютеры, то он уходит из Интернет-кафе. Интенсивность λ посетителей составляет 2 заявки в час, время обслуживания $\overline{t}_{об}$ равно 0,5 часа. Найти оптимальное число ЭВМ, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 80.

Задача 7

К железнодорожной кассе поступает поток пассажиров, желающих приобрести билеты с интенсивностью λ (человек в час).

Считая, что интенсивность нагрузки канала равна 1,75 (λ=70, μ=40), определите минимальное количество касс, при котором очередь не будет расти до бесконечности и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$

- среднее число заявок в системе;
- среднее число заявок в очереди;
- среднее время пребывания заявки в системе;

- среднее время пребывания заявки в очереди;
- среднее число касс, занятых обслуживанием.

Задача 8

К узлу расчета в магазине поступает поток людей, желающих совершить покупки, с интенсивность λ=1 человек в минуту. Время обслуживания $\overline{t_{об}}$ равно 2 мин., клиенты могут образовывать очередь. Найдите оптимальное число узлов расчета, при котором значение относительной величины затрат $C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 2T_{оч}$ минимально.

Задача 9

Два автомата по продаже напитков продают 2 вида напитков: «А» и «В». Интенсивности потока покупателей равны: $\lambda_A = \lambda_B = 0,4$ покупателей в минуту. На обслуживание покупателей требуется 2 минуты.

Рассматривается 2 варианта продажи:

- напитки «А» и «В» продаются двумя автоматами.
- каждый автомат продает определенный вид напитка: первый автомат продает только напиток «А», а второй – напиток «В».

Сравните два варианта продажи напитков по характеристикам обслуживания.

Задача 10

В отделение скорой помощи поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ=2,6 вызова в час. Найдите вероятность того, что за 3 часа

- не поступит ни одного вызова;
- поступит не менее двух вызовов;
- поступит три вызова;
- поступит меньше пяти вызовов.

Задача 11

В приемную комиссию университета приходят абитуриенты. Входной поток абитуриентов – пуассоновский. Абитуриенты приходят каждые 15 мин. Требуется определить

- среднее число абитуриентов за месяц;
- вероятность того, что за целый день не придет ни один абитуриент;
- вероятность того, что за час придет более 7 абитуриентов.

Задача 12

На остановку поступает поток пассажиров с интенсивностью λ=3 человека в минуту. Определите

- среднее число пассажиров за час;
- вероятность того, что в течение 10 минут не придет ни один пассажир;
- вероятность того, что за 5 минут придет более 30 пассажиров.
- математическое ожидание времени между двумя пассажирами.

Задача 13

К банкомату поступает поток людей, которые могут образовывать очередь неограниченной длины. Интенсивность входного потока λ равна 5 человек в минуту, среднее время обслуживания $\overline{t}_{об}$ = 0,1 мин. Определите

1. вероятности того, что банкомат свободен и занят;
2. вероятность того, что в очереди не более 3 человек;
3. среднее число человек в системе массового обслуживания;
4. среднее число человек в очереди;
5. среднее время пребывания человека в системе массового обслуживания;
6. среднее время пребывания человека в очереди.

Задача 14

Утром, открывая магазин, четыре продавца заключили следующий спор. Один из них сказал, что в течение ближайших полчаса не будет ни одного клиента, второй – что придет один или два, третий сказал, что придет четыре покупателя, а четвертый – как минимум пять. Оцените шансы на выигрыш каждого продавца, если входной поток клиентов является пуассоновским с интенсивностью λ=5 человек в час.

Задача 15

На бензоколонку с тремя обслуживающими устройствами поступает поток машин. Интенсивность потока грузовых автомобилей λ_g=3 машины в час, интенсивность потока автобусов λ_a=2 автобуса в час, интенсивность потока легковых автомобилей - λ_l=3 машины в час. Считая, что очередь машин может неограниченно возрастать, а среднее время $\overline{t_{об}}$ обслуживания равно 0,12 часа определите:

- вероятность простоя трех обслуживающих устройств;
- среднее число машин в очереди;
- среднее число машин у бензоколонки;
- среднее время ожидания обслуживания;
- среднее время пребывания у бензоколонки.

Задача 16

В ателье поступают заказы с интенсивностью λ=10 заказов в день. Среднее время $\overline{t_{об}}$ выполнения заказа равно 0,25 дня. Считая, что в ателье работает четыре мастера, а очередь заказов может неограниченно возрастать, определите:

- вероятность того, что все четыре мастера не заняты;
- вероятность того, что в очереди не более трех заказов;
- вероятность того, что в очереди более двух заказов.

Задача 17

На автомойку с одним моечным боксом и пятью местами для стоянки (ожидания обслуживания) поступает пуассоновский поток машин с интенсивностью λ=5 машин в час. Среднее время $\overline{t_{об}}$ обслуживания равно 0,1 часа. Определите

- вероятность простоя автомойки;
- вероятность отказа в обслуживании;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность;
- среднее число машин в очереди;
- среднее число машин на автомойке.

Задача 18

В службу такси, располагающую четырьмя автомобилями, поступает поток заказов с интенсивностью λ=5 заказов в час. Среднее время выполнения заказа $\overline{t}_{об}$=0,5 часа. В том случае, если все машины на заказе служба не принимает больше трех заказов (максимальное число заявок в очереди равно трем). Определите

- вероятность простоя автомобилей;
- вероятность отказа в обслуживании;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность;
- среднее число заявок в очереди;
- среднее число занятых обслуживанием автомобилей.

Задача 19

В парикмахерскую поступает поток клиентов с интенсивностью λ=6 клиентов в час. Число парикмахеров равно трем. Число мест ожидания равно пяти. Считая, что среднее время обслуживания $\overline{t}_{об}$ равно 0,4 часа, определите

- вероятность отказа в обслуживании;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность;
- среднее число клиентов в очереди;
- среднее число занятых обслуживанием парикмахеров;

среднее число парикмахеров, не занятых обслуживанием (равно разности числа работающих парикмахеров и количества парикмахеров, занятых обслуживанием).

2.2 Имитационное моделирование систем массового обслуживания

Существуют следующие способы построения моделирующих алгоритмов:

- моделирования неперекрывающихся заявок и анализ системы с постоянным шагом;
- последовательной проводки заявок (способ моделирования перекрывающихся заявок);
- поэтапной последовательной проводки заявок (способ моделирования перекрывающихся заявок разного приоритета);
- обслуживания заявок в условиях отказов.

Первый способ заключается в том, что при моделировании потока заявок время поступления очередной заявки отсчитывается относительно времени окончания обслуживания предыдущей заявки. Анализ состояний системы осуществляется через равные промежутки времени ΔT. При ΔT, равном периоду времени работы системы, ни одна заявка не будет обнаружена. С уменьшением ΔT количество обнаруженных заявок в системе увеличивается. На рис. 2.5 представлено поступление четырех заявок. Например, время начала обслуживания первой заявки -τ_1, а окончание – τ_2. При анализе данным способом через интервал ΔT (в момент t_1) будет обнаружено, что началось обслуживание первой заявки, а в момент $t_2 = t_1 + \Delta T$ - что ее обслуживание завершено. Аналогично рассматриваются и остальные заявки.

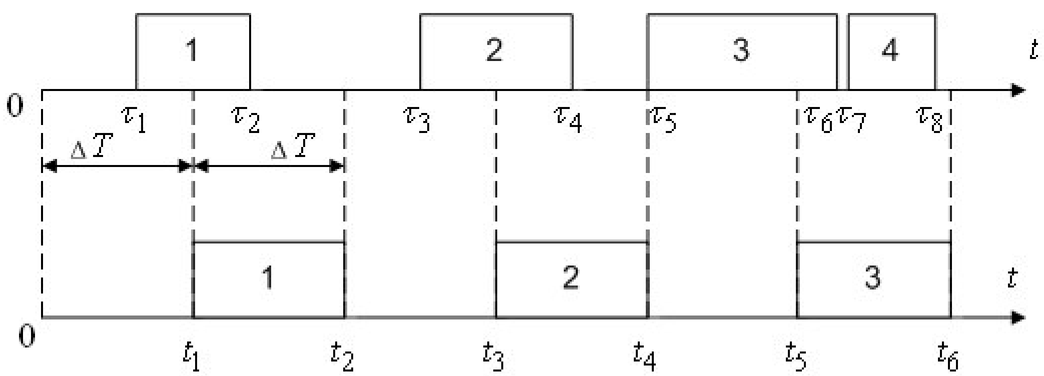


Рис.2.5 – Моделирование неперекрывающихся заявок и анализ системы через равные промежутки времени ΔT

Способ последовательной проводки заявок может быть осуществлен, если события, происходящие в системе, не зависят друг от друга. Моделирующий алгоритм последовательно воспроизводит истории отдельных заявок в порядке их поступления в систему. Алгоритм обращается к сведениям о других заявках лишь в том случае, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем порядке обслуживания данной заявки. На рис. 2.6 приведена последовательная проводка одиночных заявок. В случайный момент времени t_1 (считается, что распределение вероятностей времени прихода заявок известно) в систему поступила 1-я заявка. Поскольку канал свободен, то ее обслуживание начинается в момент времени $t_{н1} = t_1$. Если распределение времени обслуживания известно, то с помощью датчика случайных чисел можно определить случайную величину времени обслуживания τ_1. Тогда момент окончания обслуживания первой заявки будет равен: $t_{к1} = t_{н1} + \tau_1$. Далее определяется случайное время t_2 поступления второй заявки, которое отсчитывается относительно времени поступления первой заявки. Поскольку канал занят, то обслуживание ее начнется после завершения периода ожидания, равного $T_{ож} = t_{к1} - t_{н1}$. Аналогично происходит обслуживание остальных заявок.

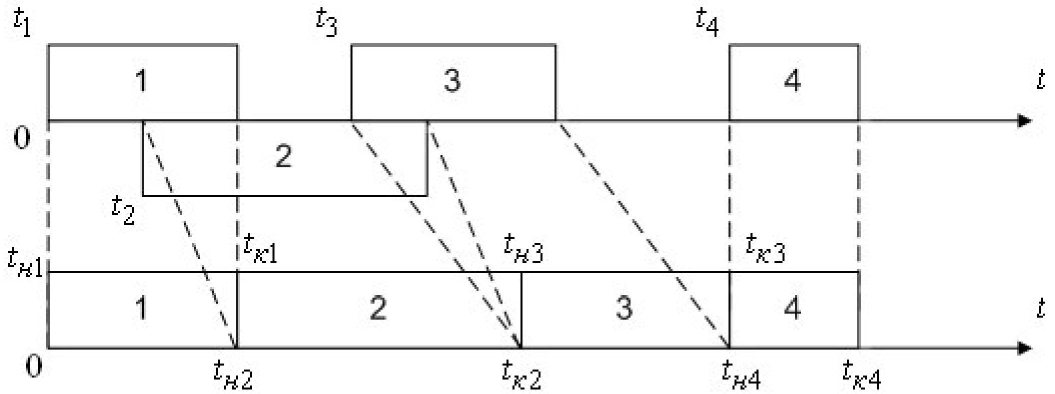


Рис.2.6 – Последовательная проводка заявок

Вторым вариантом способа последовательной проводки заявки является способ, при котором сначала формируется поток заявок, а затем начинается процесс обслуживания заявок.

Способ поэтапной последовательной проводки заявок используется в том случае, если в систему поступают заявки двух приоритетов. При этом считается, что все заявки независимы, при обслуживании используется абсолютный приоритет (поступающая заявка высшего приоритета немедленно вытесняет обслуживаемую заявку низшего приоритета), после освобождения канала может производиться «дообслуживание» той заявки второго приоритета, которая была вытеснена заявкой первого приоритета. В данном случае моделирование состоит из двух этапов. На первом этапе рассматриваются только заявки первого приоритета (рис.2.7). Применяя способ последовательной проводки, устанавливаются значения элементов массива $\{T_{н1.1}, T_{н1.2}, T_{н1.3}, ...\}$ - времени начала обслуживания заявок и массива $\{T_{к1.1}, T_{к1.2}, T_{к1.3}, ...\}$ - времени окончания обслуживания заявок. На втором этапе вновь устанавливается модельное время на нуль и начинается этап моделирования процесса обслуживания заявок второго приоритета в условиях, что на временной оси располагаются уже обслуженные заявки первого приоритета. Следовательно, заявки второго приоритета могут занимать только свободные промежутки времени.

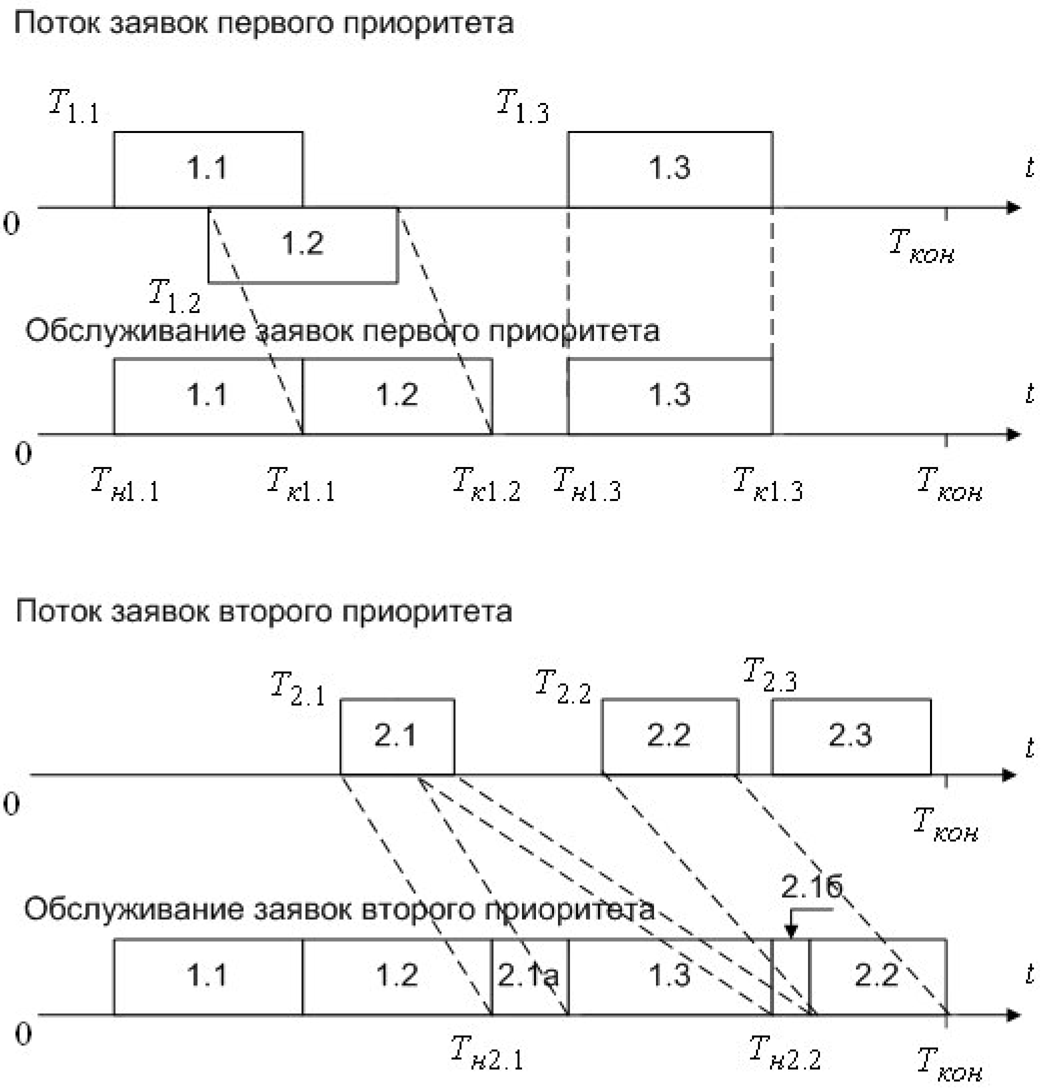


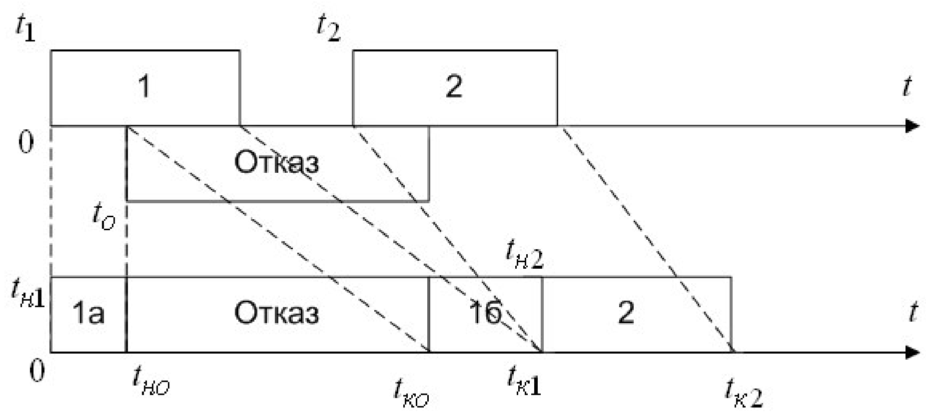
Рис.2.7 – Поэтапная последовательная проводка заявок

В системах, включающих технические подсистемы, возможно возникновение отказов. Различают два рода отказов (рис.2.8).

Отказы первого рода (неисправности) приводят к временному прекращению процесса обслуживания очередной заявки сохранением достигнутого состояния. После устранения отказа процесс обслуживания заявки может продолжаться.

Отказы второго рода (аварии) приводят к такому состоянию системы, что после устранения отказа процесс обслуживания заявки начинается сначала.

Появление в системе отказа 1-го рода



Появление в системе отказа 2-го рода

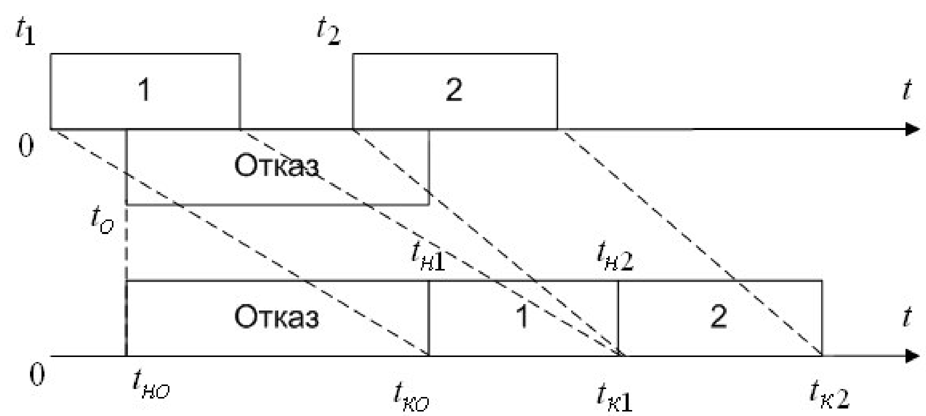


Рис. 2.8 – Появление в системе отказов

Пример 1

Ожидается приезд четырех автомашин на склад под разгрузку. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через

T_1 ч., третья – через T_2 ч., а четвертая – через T_3 ч. Допустим, что первую машину разгружали τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч., а четвертую - τ_4 ч.

Пусть τ_1=1,456, τ_2=3,157, τ_3=1,324, τ_4=2,4;

T_1=1,044, T_2=1,171; T_3=0,798.

Рассмотрите события данной системы. Составьте таблицу, содержащую описание события (приезд машины, начало и завершение загрузки, помещение в очередь) и его времени. Сколько машин будет находиться в очереди в момент 3,1 ч.?

Решение

События системы можно представить в виде следующей таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – События системы

Время события, t, ч	Цепь событий	Длина очереди
0	Начало отсчета Приезжает первая машина Начало разгрузки (разгрузка закончится через τ_1=1,456 ч от начала отсчета)	0
1,044	Приезжает вторая машина и встает в очередь	1
1,456	Завершение разгрузки первой машины Начало разгрузки второй машины (разгрузка закончится через 4,613 ч от начала отсчета)	0
2,215	Приезжает третья машина и встает в очередь	1
3,013	Приезжает четвертая машина и встает в очередь	2
4,613	Завершение разгрузки второй машины Начало разгрузки третьей машины (разгрузка закончится через 5,937 ч от начала отсчета)	1
5,937	Завершение разгрузки третьей машины Начало разгрузки второй машины (разгрузка закончится через 8,337 ч от начала отсчета)	0
8,337	Завершение разгрузки четвертой машины Конец моделирования	

Из таблицы видно, что в момент 3,1ч. в очереди будет находиться 2 машины.

Пример 2

Рассматривается ситуация, когда осуществляется разгрузка трех машин, которые перевозят товар с соседнего склада (система массового обслуживания является замкнутой). Машины загружаются на соседнем складе. После этого, либо разгружаются на рассматриваемом складе, либо выстраиваются в очередь на разгрузку. Затем снова отправляются на соседний склад для загрузки. Например, на рис.2.9 представлено состояние системы в момент времени t=1,15, когда происходит обслуживание первой машины, приехавшей на склад в момент времени T_1=0,2. В это время уже ожидают обслуживание вторая и третья машины, поступившие в моменты времени T_2=0,8 и T_3=1,1 соответственно.

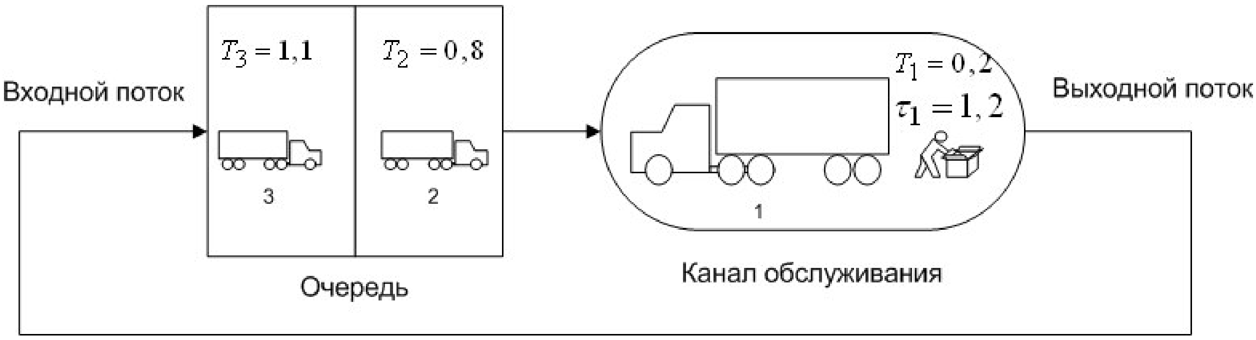


Рис.2.9 – Система массового обслуживания

Пусть первая машина прибыла на склад дважды в моменты времени 0,2 ч. и 1,3 ч. Время ее разгрузки составило 1,2 ч. и 1,3 ч. для первого и второго случая соответственно.

Вторая машина прибыла на склад в моменты времени 0,8 ч. и 2,2 ч. Время ее разгрузки составило 0,9 ч. и 1,1 ч. для первого и второго моментов соответственно.

Третья машина прибыла на склад в моменты времени 1,1 ч. и 3,6 ч. Время ее разгрузки составило 1 ч. и 1,2 ч. для первого и второго моментов соответственно.

Рассмотрите события данной системы. В какое время закончится последняя разгрузка?

Решение

События системы можно представить в виде следующей таблицы 2.3.

Таблица 2.3 – События системы

Время события, t, ч	Цепь событий	Длина очереди

0,2	Начало отсчета Приезжает первая машина Начало разгрузки (разгрузка закончится через 1,2 ч. от начала отсчета)	0
0,8	Приезжает вторая машина и встает в очередь	1
1,1	Приезжает третья машина и встает в очередь	2
1,2	Завершение разгрузки первой машины Начинается разгрузка второй машины (разгрузка закончится через 2,1 ч. от начала отсчета)	1
1,3	Приезжает первая машина и встает в очередь	2
2,1	Завершение разгрузки второй машины Начинается разгрузка третьей машины (разгрузка закончится через 3,1 ч. от начала отсчета)	1
2,2	Приезжает вторая машина и встает в очередь	2
3,1	Завершение разгрузки третьей машины Начинается разгрузка первой машины (разгрузка закончится через 4,4 ч. от начала отсчета)	1
3,6	Приезжает третья машина и встает в очередь	2
4,4	Завершение разгрузки первой машины Начинается разгрузка второй машины (разгрузка закончится через 5,5 ч. от начала отсчета)	1
5,5	Завершение разгрузки второй машины Начинается разгрузка третьей машины (разгрузка закончится через 6,7 ч. от начала отсчета)	0
6,7	Завершение разгрузки третьей машины Конец моделирования	

Последняя разгрузка закончится в момент времени, равный 6,7 ч.

Пример 3

Ожидается приезд пяти автомашин на склад под разгрузку. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 ч., третья – через T_2 ч., четвертая – через T_3 ч., пятая – через T_4 ч. Допустим, что первую машину разгружали τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч., четвертую - τ_4 ч., пятую - τ_5 ч. В том случае, если канал обслуживания занят, то машина занимает определенную очередь. На рис. 2.10 показано, к каким очередям поступают рассматриваемые машины. Разгрузка ожидающих машин начинается с первой очереди.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=0,9, τ_3=0,8, τ_4=0,6, τ_5=1;

T_1=0,1, T_2=0,3, T_3=0,2, T_4=0,4.

Рассмотрите события данной системы (приезд машины, начало и завершение разгрузки, помещение в очередь) считая, что обслуживание происходит

1. по одной заявке из каждой непустой очереди;
2. до исчерпания всех заявок в текущей очереди, включая пришедшие за время обслуживания.

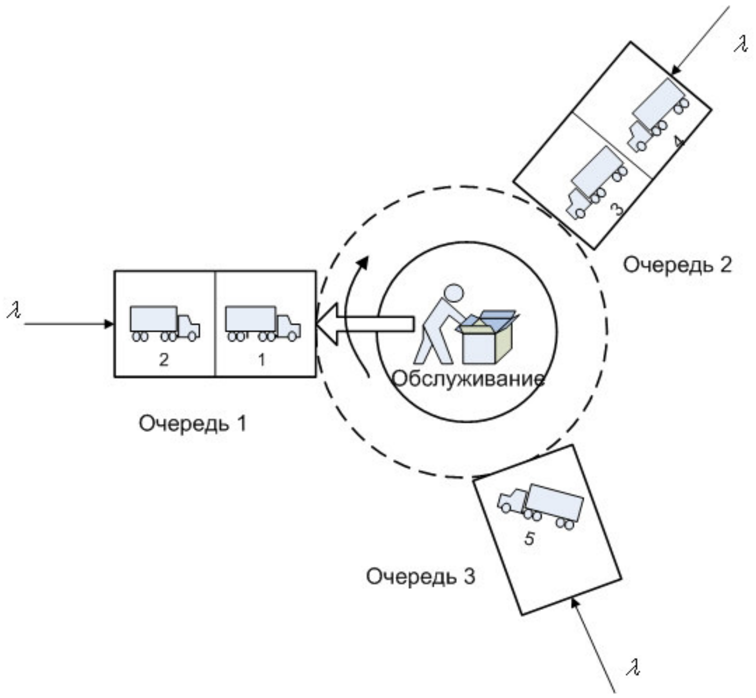


Рис.2.10 – Круговое обслуживание заявок

Решение

Рассмотрим первый вариант, когда обслуживание происходит по одной заявке из каждой непустой очереди.

События системы можно представить в виде следующей таблицы 2.4.

Таблица 2.4 – События системы при первом варианте выбора заявок из очереди

Время события, t, ч	Цепь событий	Длина очереди
0	Начало отсчета Приезжает первая машина Начало разгрузки (разгрузка закончится	0

	через τ_1 =0,7 ч от начала отсчета)	
0,1	Приезжает вторая машина и встает в очередь с номером один	1
0,4	Приезжает третья машина и встает в очередь с номером два	2
0,6	Приезжает четвертая машина и встает в очередь с номером два	3
0,7	Завершение разгрузки первой машины К этому моменту в очередях один и два находятся машины с номерами 2, 3 и 4. Начинаем обслуживание с первой очереди и поэтому производится разгрузка машины с номером два (разгрузка закончится через 1,6 ч. от начала отсчета)	2
1	Приезжает пятая машина и встает в очередь с номером три	3
1,6	Завершение разгрузки второй машины К этому моменту в очередях два и три находятся машины с номерами 3, 4, 5. Переходим ко второй очереди, и начинается разгрузка машины с номером три (разгрузка закончится через 2,4 ч. от начала отсчета)	2
2,4	Завершение разгрузки третьей машины К этому моменту в очередях два и три находятся машины с номерами 4 и 5. Переходим к третьей очереди, и начинается разгрузка машины с номером пять (разгрузка закончится через 3,4 ч. от начала отсчета).	1
3,4	Завершение разгрузки пятой машины К этому моменту в системе находится только машина с номером 4 (во второй очереди). Переходим ко второй очереди, и начинается разгрузка машины с номером четыре (разгрузка закончится через 4 ч. от начала отсчета)	0
4	Завершение разгрузки четвертой машины Конец моделирования	0

Рассмотрим теперь второй вариант, когда обслуживание происходит до исчерпания всех заявок в текущей очереди, включая пришедшие за время обслуживания. События представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – События системы при втором варианте выбора заявок из очереди

Время события, t, ч	Цепь событий	Длина очереди
0	Начало отсчета Приезжает первая машина Начало разгрузки (разгрузка закончится через τ_1 =0,7 ч от начала отсчета)	0
0,1	Приезжает вторая машина и встает в очередь с номером один	1
0,4	Приезжает третья машина и встает в очередь с номером два	2
0,6	Приезжает четвертая машина и встает в очередь с номером два	3
0,7	Завершение разгрузки первой машины К этому моменту в очередях один и два находятся машины с номерами 2, 3 и 4. Начинаем обслуживание с первой очереди и поэтому производится разгрузка машины с номером два (разгрузка закончится через 1,6 ч. от начала отсчета)	2
1	Приезжает пятая машина и встает в очередь с номером три	3
1,6	Завершение разгрузки второй машины К этому моменту в очередях два и три находятся машины с номерами 3, 4, 5. Переходим ко второй очереди, и начинается разгрузка машины с номером три (разгрузка закончится через 2,4 ч. от начала отсчета)	2
2,4	Завершение разгрузки третьей машины К этому моменту в очередях два и три находятся машины с номерами 4 и 5. Остаемся во второй очереди, и начинается разгрузка машины с номером четыре (разгрузка закончится через 3 ч. от начала отсчета).	1
3	Завершение разгрузки четвертой машины. К этому моменту в системе находится только машина с номером 5 (в третьей очереди). Переходим к третьей очереди, и начинается разгрузка машины с номером пять (разгрузка закончится через 4 ч. от начала отсчета)	0
4	Завершение разгрузки пятой машины Конец моделирования	0

Таким образом, при втором варианте машина с номером четыре будет обслужена прежде, чем машина с номером пять (в отличие о первого варианта).

Пример 4

На складе осуществляется разгрузка поступивших машин. Пусть в рассматриваемый момент времени на складе разгружается одна машина, а три находятся в очереди. Рассмотрите порядок обслуживания машин из очереди, если

1. дисциплина выбора заявок из очереди - FIFO (первый прибыл – первый обслужился);
2. дисциплина выбора заявок из очереди - LIFO (последний прибыл – первый обслужился);
3. осуществляется случайный выбор заявок из очереди (рассмотрите алгоритм, используемый в этом случае для моделирования случайного выбора машины из очереди);
4. дисциплина выбора заявок из очереди – «самая короткая в первую очередь» (первой обслуживается заявка, требующая меньшего времени обслуживания), если время обслуживания первой машины τ_1 равно 0,62 ч., второй - τ_2 =0,45 ч., третьей - τ_3 =0,5 ч.

Решение

1. В том случае, если дисциплина выбора заявок из очереди – FIFO, то в рассматриваемой системе первой будет обслужена машина с номером один, затем – с номером два, и, в последнюю очередь будет загружена машина с номером три (рис.2.11).

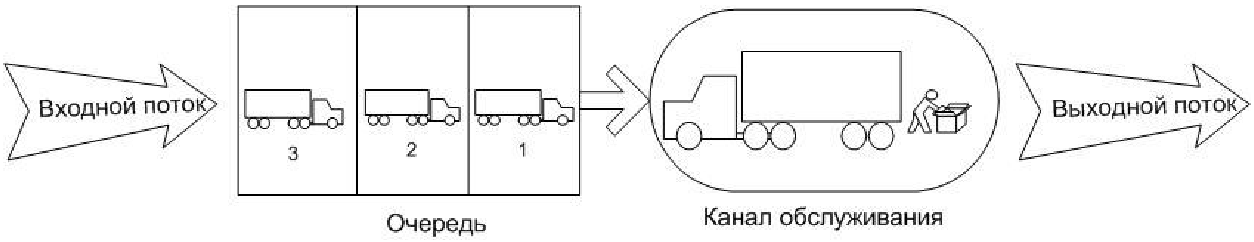


Рис.2.11 – Выбор заявок из очереди при дисциплине «первый прибыл – первый обслужился»

2. Дисциплина LIFO выбора заявок из очереди будет означать, что сначала будет обслужена машина с номером три (поступившая последней), потом – с номером два и, наконец, с номером один (рис.2.12).

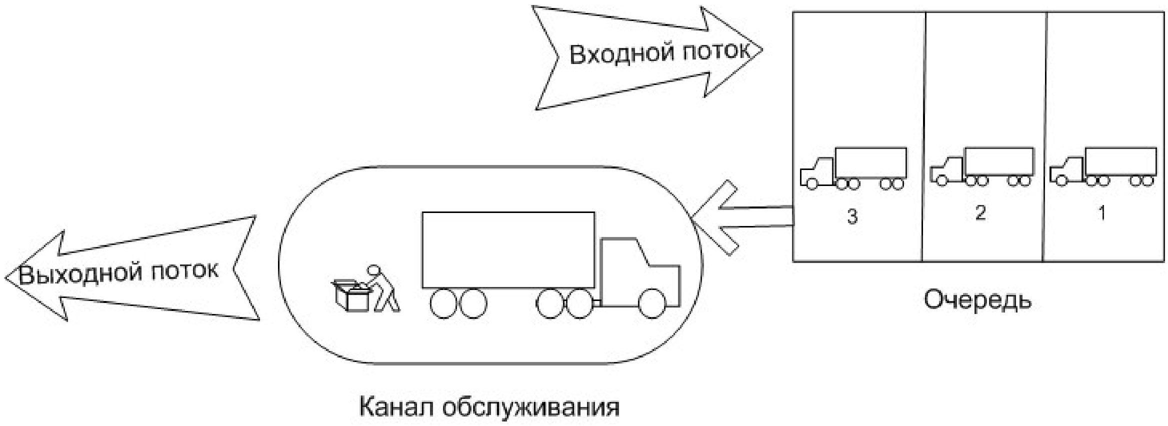


Рис.2.12 – Выбор заявок из очереди при дисциплине «первый прибыл – последний обслужился»

3. В случае применения данной дисциплины, каждая заявка из очереди может быть выбрана с равной вероятностью (рис. 2.13). Напишем алгоритм выбора заявок из очереди, если вероятности P их выбора одинаковы (и равны $\frac{1}{3}$) (рис. 2.14).

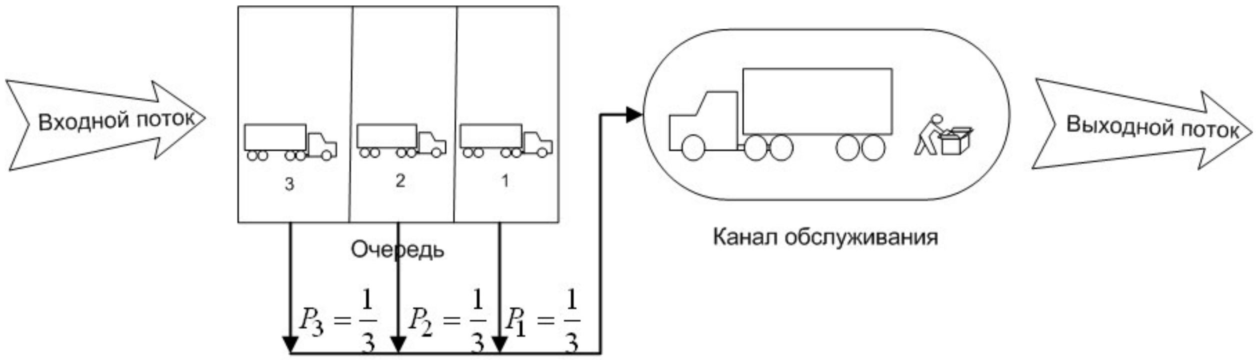


Рис.2.13 – Случайный выбор заявок из очереди

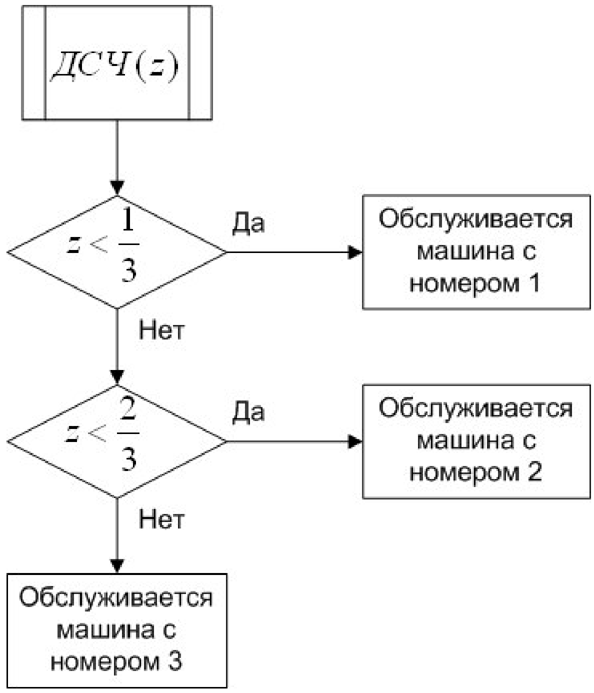


Рис.2.14 – Алгоритм выбора трех заявок из очереди

Пусть z=0,5. Тогда первой будет обслужена машина с номером 2 (т.к. $\frac{1}{3} < z < \frac{2}{3}$). Считая, что заявки больше в систему не поступают, определим, какая машина будет следующей на обслуживание. Поскольку осталось только две машины (с номерами 1 и 3), то вероятность выбора на обслуживание каждой из них равна $\frac{1}{2}$. Алгоритм можно представить следующим образом (рис.2.15).

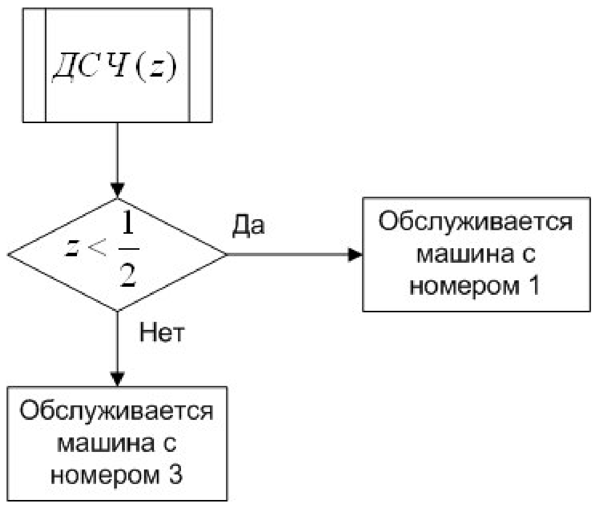


Рис.2.15 - Алгоритм выбора двух заявок из очереди

Пусть теперь z=0,1. Поскольку $z < \frac{1}{2}$, то следующей будет загружена машина с номером 1. Таким образом, последней будет обслужена машина с номером 3.

4. В случае применения дисциплины выбора «самая короткая в первую очередь», первой будет разгружена машина с номером 2 (т.к. требует наименьшего времени разгрузки), второй – с номером 3 и последней – с номером 1 (рис.2.16).

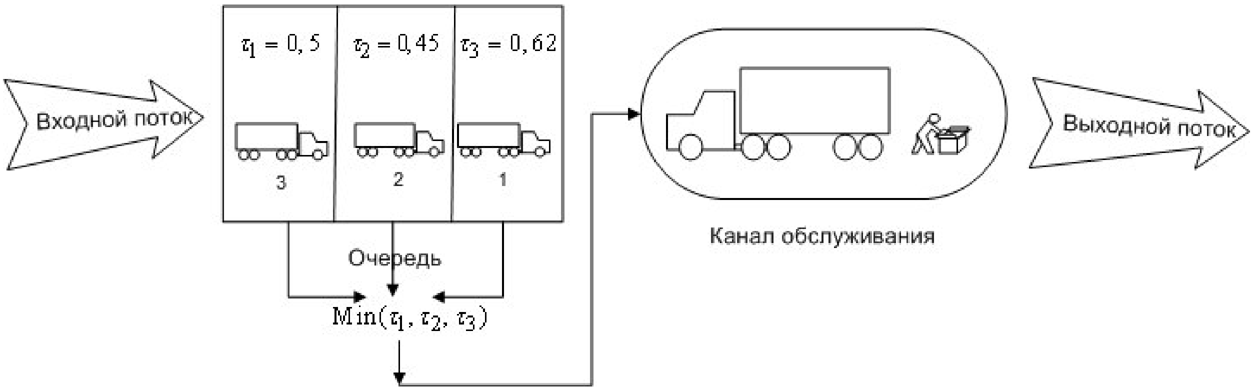


Рис.2.16 – Выбор заявки из очереди при дисциплине «самая короткая в первую очередь»

Пример 5

Ожидается приезд четырех автомашин на склад под разгрузку. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 ч., третья – через T_2 ч., а четвертая – через T_3 ч. Допустим, что первую машину разгружали τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч., а четвертую - τ_4 ч.

Пусть τ_1=0,6, τ_2=0,5, τ_3=0,3, τ_4=0,2;

T_1=1,1, T_2=1,2; T_3=0,4.

Рассмотрите события данной системы. Расположите их на временной оси. Проанализируйте состояния системы через промежутки времени с шагом ΔT=0,5. Будут ли обнаружены все заявки?

Решение

Время поступления первой заявки $t_{н1} = 0$

Время окончания обслуживания первой заявки равно $t_{о1} = \tau_1$=0,6.

Время поступления второй заявки $t_{н2} = T_1$ =1,1.

Время окончания обслуживания второй заявки $t_{о2} = T_1 + \tau_2$ =1,1+0,5=1,6.

Время поступления третьей заявки равно $t_{н3} = t_{н2} + T_2$ =1,1+1,2=2,3

Время окончания обслуживания третьей заявки $t_{о3} = t_{н3} + \tau_3$ =2,3+0,3=2,6

Время поступления четвертой заявки равно $t_{н4} = t_{н3} + T_3$ =2,3+0,4=2,7

Время окончания обслуживания четвертой заявки $t_{о4} = t_{н4} + \tau_4$ =2,7+0,2=2,9.

Проанализируем процесс с шагом 0,5 (рис.2.17).

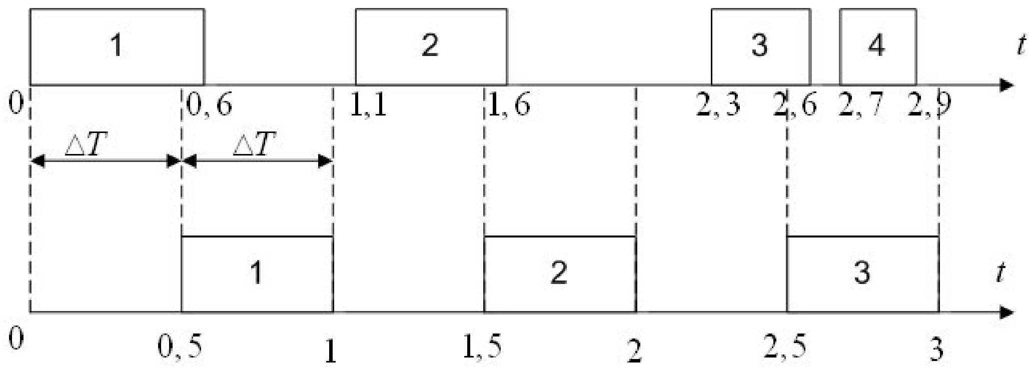


Рис.2.17 – Моделирование обслуживания методом $\triangle T$

В момент $t_1 = t_{н1} + \triangle T$ = 0+0,5=0,5 будет обнаружено, что в системе началось обслуживание первой заявки.

В момент $t_2 = t_1 + \triangle T$ =0,5+0,5=1 будет обнаружено, что обслуживание первой заявки завершено.

В момент $t_2 = t_1 + \triangle T$ =0,5+0,5=1 будет обнаружено, что обслуживание первой заявки завершено.

В момент $t_3 = t_2 + \triangle T$ =1+0,5=1,5 будет обнаружено, что началось обслуживание второй заявки.

В момент $t_4 = t_3 + \triangle T$ =1,5+0,5=2 будет обнаружено, что завершено обслуживание второй заявки.

В момент $t_5 = t_4 + \triangle T$ =2+0,5=2,5 будет обнаружено, что началось обслуживание третьей заявки.

В момент $t_6 = t_5 + \triangle T$ =2,5+0,5=3 будет обнаружено, что завершилось обслуживание третьей заявки.

Т.о. факт поступления и обслуживания 4-й заявки не будет установлен.

Задача 1

Ожидается приезд трех автомашин на склад под разгрузку. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 ч., третья – через T_2 ч. Допустим, что первую машину разгружали τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч.

Пусть τ_1=1,4, τ_2=1, τ_3=1,2;

T_1=1, T_2=1,2.

Рассмотрите события данной системы (приезд машины, начало и завершение разгрузки, помещение в очередь). Чему равно суммарное время ожидания обслуживания?

Задача 2

Ожидается приезд четырех автомашин на склад под разгрузку. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 ч., третья – через T_2 ч., а четвертая – через T_3 ч. Допустим, что первую машину разгружали τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч., а четвертую - τ_4 ч.

Пусть τ_1=1,1, τ_2=0,9, τ_3=1, τ_4=0,8;

T_1=1, T_2=1,2; T_3=0,5.

Рассмотрите события данной системы (приезд машины, начало и завершение разгрузки, помещение в очередь). Расположите их на временной оси. Осуществите последовательную проводку заявок. Чему равно время окончания обслуживания четвертой заявки?

Задача 3

В порту расположен причал для разгрузки судов. Ожидается прибытие четырех судов. Примем время прибытия первого судна за начало отсчета. Второе судно прибудет через T_1 ч., третье – через T_2 ч., а четвертое – через T_3 ч. Допустим, что первое судно разгружали τ_1 ч, второе - τ_2 ч., третье - τ_3 ч., а четвертое - τ_4 ч.

Пусть τ_1=1,32, τ_2=2,93, τ_3=1,62, τ_4=1,4;

T_1=1,13, T_2=1,43; T_3=0,7.

Рассмотрите события данной системы. Составьте таблицу, содержащую описание события (прибытие судна, начало и завершение загрузки, помещение в очередь) и его времени. Сколько судов будет находиться в очереди в момент 3 ч.?

Задача 4

После выбора товара в магазине клиенты направляются к кассе. Примем время поступления первого клиента к узлу расчета за начало отсчета. Второй клиент придет через T_1 ч., третий – через T_2 ч., а четвертый – через T_3 ч. Допустим, что первого клиента обслуживали τ_1 ч, второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч., а четвертого - τ_4 ч.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=0,4, τ_3=0,3, τ_4=0,6;

T_1=1,3, T_2=1; T_3=0,9.

Рассмотрите события данной системы. Расположите их на временной оси. Проанализируйте состояния системы через промежутки времени с шагом $\vartriangle T$ =0,5. Будут ли обнаружены все заявки?

Задача 5

Автомастерская занимается ремонтом автомобилей. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 дн., третья – через T_2 дн. Допустим, что первую машину ремонтировали τ_1 дн, вторую - τ_2 дн., третью - τ_3 дн.

Пусть τ_1=1, τ_2=1,5, τ_3=1,6;

T_1=0,7, T_2=1,2.

Рассмотрите события данной системы (приезд машины, начало и завершение ремонта, помещение в очередь). Чему равно среднее время пребывания машины в системе?

Примечание. Время пребывания заявки в системе равно сумме времени ожидания и времени обслуживания.

Задача 6

На автозаправку поступает поток машин. Примем время приезда первой машины за начало отсчета. Вторая машина приедет через T_1 ч., третья – через T_2 ч. Допустим, что первую машину заправляли τ_1 ч, вторую - τ_2 ч., третью - τ_3 ч.

Пусть τ_1=1,4, τ_2=1, τ_3=1,2;

T_1=1, T_2=1,2.

Рассмотрите события данной системы (приезд машины, начало и завершение заправки, помещение в очередь). Чему равна средняя длина очереди?

Примечание. Средняя длина очереди рассчитывается следующим образом

$$\tilde{N} = \sum N \cdot \frac{\Delta t}{t_{общ}},$$

где N - длина очереди на интервале Δt;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания заправки третьей машины).

Рассмотрим пример, приведенный на рис.2.18.

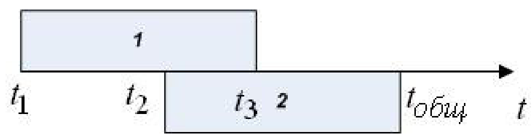


Рис. 2.18 – Пример поступления заявок в систему

В интервал времени $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ в очереди не находится ни одна заявка (N_1=0). В интервал времени $\Delta t_2 = t_3 - t_2$ в очереди находится одна заявка (N_2=1). В интервал времени $\Delta t_3 = t_{общ} - t_3$ в очереди не находится ни одна заявка (N_3=0). Поэтому средняя длина очереди равна

$$\tilde{N} = N_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_{общ}} + N_2 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}} + N_3 \cdot \frac{t_{общ} - t_3}{t_{общ}} =$$

$$0 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_{общ}} + 1 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}} + 0 \cdot \frac{t_{общ} - t_3}{t_{общ}} = \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}}.$$

Также приведем другой способ расчета, который является более трудоемким. Среднее число заявок, находящихся в очереди равно

$$\tilde{N} = \sum_{n=1}^{m} (n-1) \cdot p_n,$$

где m - максимальное число заявок в системе;

p_n - предельная вероятность того, что в системе находится n заявок.

Предельная вероятность того, что в системе находится n заявок, равна

$$p_i = \frac{t_i}{t_{общ}},$$

где t_i - суммарное время, в течение которого в системе находилось i заявок;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания заправки третьей машины).

Задача 7

В вычислительный центр поступают заказы на выполнение вычислительных работ. Примем время поступления первого заказа за начало отсчета. Второй заказ поступит через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый - через T_3 ч. Допустим, что первый заказ выполнялся τ_1 ч, второй - τ_2 ч., третий - τ_3 ч., четвертый - τ_4.

Пусть τ_1=0,5, τ_2=1, τ_3=1,2, τ_4=0,9;

T_1=0,9, T_2=2, T_3=3,1.

Рассмотрите события данной системы (поступление заказа, начало и завершение выполнения заказа, помещение в очередь). Чему равно суммарное время простоя вычислительной машины (время, когда не происходит обслуживания заявок) и коэффициент незанятости?

Примечание Коэффициент незанятости по отношению к полному времени рассчитывается следующим образом

$$K = \frac{t_{св}}{t_{общ}},$$

где $t_{св}$ - суммарное время простоя;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания выполнения четвертого заказа).

На рис. 2.19 приведен пример поступления в систему трех заявок. Здесь суммарное время простоя устройства обслуживания равно

$$t_{св} = t_{св1} + t_{св2}.$$

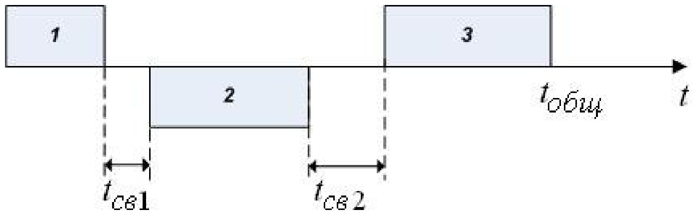


Рис. 2.19 – Поступление в систему трех заявок

Задача 8

Касса банка обслуживает поток клиентов. Примем время прихода первого клиента за начало отсчета. Второй клиент придет через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый - через T_3 ч. Допустим, что первый клиент обслуживался τ_1 ч., второй - τ_2 ч., третий - τ_3 ч., четвертый - τ_4 ч.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=1,1, τ_3=1,2, τ_4=0,7;

T_1=0,9, T_2=1,3, T_3=2,7.

Рассмотрите события данной системы (приход клиента, начало и завершение обслуживание клиента, помещение в очередь). Найдите предельную вероятность того, что в системе находится один клиент.

Примечание. Предельная вероятность p_1 того, что в системе находится один клиент, равна

$$p_1 = \frac{t_1}{t_{общ}},$$

где t_1 - суммарное время, в течение которого в системе находился один клиент;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания обслуживания четвертого клиента).

На рис. 2.20 приведен пример поступления в систему трех заявок. Здесь суммарное время, в течение которого в системе находилась одна заявка равно

$$t_1 = t_{11} + t_{12} + t_{13}.$$

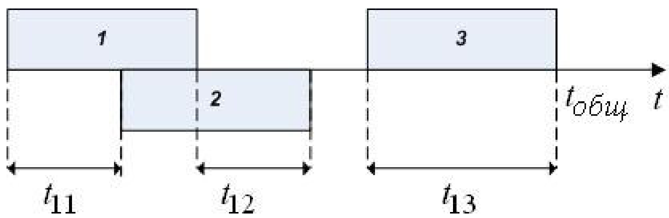


Рис.2.20 – Поступление в систему трех заявок

Задача 9

В ресторан поступает поток посетителей. Примем время прихода первого посетителя за начало отсчета. Второй клиент придет через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый - через T_3 ч. Допустим, что первый клиент обслуживался τ_1 ч, второй - τ_2 ч., третий - τ_3 ч., четвертый - τ_4.

Пусть τ_1=1,4, τ_2=1, τ_3=1,2, τ_4=0,9;

T_1=0,9, T_2=0,8, T_3=1,1.

Рассмотрите события данной системы (приход клиента, начало и завершение обслуживание клиента, помещение в очередь). Найдите предельную вероятность того, что в системе находятся два клиента.

Примечание. Предельная вероятность p_2 того, что в системе находятся два клиента, равна

$$p_2 = \frac{t_2}{t_{общ}},$$

где t_2 - суммарное время, в течение которого в системе находилось два клиента;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания обслуживания четвертого клиента).

На рис.2.21 приведен пример поступления в систему трех заявок. Здесь суммарное время, в течение которого в системе находилось две заявки равно

$$t_2 = t_{21} + t_{22}.$$

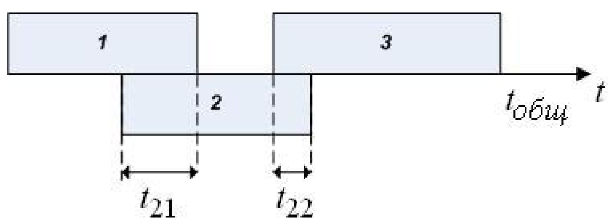


Рис.2.21 - Поступление в систему трех заявок

Задача 10

На телефонную станцию поступает поток звонков. Примем время поступления первого звонка за начало отсчета. Второй звонок поступит через T_1 мин., третий – через T_2 мин., четвертый - через T_3 мин. Допустим, что время обслуживания первого звонка равно τ_1 мин., второго - τ_2 мин., третьего - τ_3 мин., четвертого - τ_4 мин.

Пусть τ_1=0,4, τ_2=0,8, τ_3=1, τ_4=0,6;

T_1=0,9, T_2=0,6, T_3=1,3.

Рассмотрите события данной системы (поступление звонка, начало и завершение обслуживание). Рассматриваемая система не предусматривает ожидания обслуживания, т.е. звонок, поступивший в тот момент, когда в системе уже идет обслуживание, покидает систему (например, на рис.2.22 второй звонок покинет систему, т.к. в момент его поступления уже идет обслуживание первого звонка). Найдите вероятность отказа.

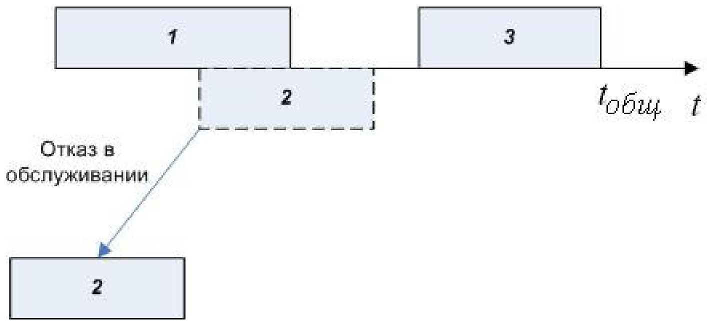


Рис.2.22 – Пример отказа в обслуживании

Примечание. Вероятность отказа может быть рассчитана следующим образом

$$P_{отк} = \frac{N_{отк}}{N_з},$$

где $N_{отк}$ - число заявок, покинувших систему необслуженными;

$N_з$ - общее число заявок, поступивших в систему (для рассматриваемого примера $N_з$=4).

Задача 11

Парикмахерская занимается обслуживанием клиентов. Примем время прихода первого клиента за начало отсчета. Второй клиент придет через T_1 ч., третий – через T_2 ч. Допустим, что первого клиента обслуживали τ_1 ч, второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч.

Пусть τ_1=1 , τ_2=1,1, τ_3=1,3;

T_1=1,5, T_2=0,9.

Рассмотрите события данной системы (приход клиента, начало и завершение обслуживания, помещение в очередь). Чему равно среднее число клиентов в системе?

Примечание. Среднее число клиентов в системе рассчитывается следующим образом

$$\tilde{K} = \sum K \cdot \frac{\vartriangle t}{t_{общ}},$$

где K - число клиентов в системе на интервале $\vartriangle t$;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания обслуживания третьего клиента).

Рассмотрим пример, приведенный на рис.2.23.

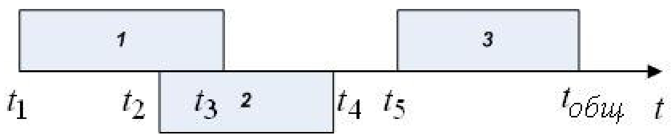


Рис.2.23 – Поступление в систему трех заявок

В интервал времени $\vartriangle t_1 = t_2 - t_1$ в системе находится одна заявка (K_1=1). В интервал времени $\vartriangle t_2 = t_3 - t_2$ в системе находится две заявки (K_2=2). В интервал времени $\vartriangle t_3 = t_4 - t_3$ в системе находится одна заявка (K_3=1). В интервал времени $\vartriangle t_4 = t_5 - t_4$ в системе не находится ни одна заявка (K_4=0). В интервал времени $\vartriangle t_5 = t_{общ} - t_5$ в системе находится одна заявка (K_5=1).Поэтому среднее число заявок в системе

$$\tilde{K} = K_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_{общ}} + K_2 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}} + K_3 \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_{общ}} + K_4 \cdot \frac{t_5 - t_4}{t_{общ}} + K_5 \cdot \frac{t_{общ} - t_5}{t_{общ}} =$$

$$1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_{общ}} + 2 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}} + 1 \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_{общ}} + 0 \cdot \frac{t_5 - t_4}{t_{общ}} + 1 \cdot \frac{t_{общ} - t_5}{t_{общ}} =$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_{общ}} + 2 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_{общ}} + \frac{t_4 - t_3}{t_{общ}} + \frac{t_{общ} - t_5}{t_{общ}}$$

Также приведем другой способ расчета. Среднее число заявок, находящихся в системе равно

$$\tilde{K} = \sum_{n=1}^{m} n \cdot p_n ,$$

где m - максимальное число заявок в системе;

p_n - предельная вероятность того, что в системе находится n заявок.

Предельная вероятность того, что в системе находится n заявок, равна

$$p_i = \frac{t_i}{t_{общ}} ,$$

где t_i - суммарное время, в течение которого в системе находилось i заявок;

$t_{общ}$ - время окончания моделирования (для данного случая равно времени окончания заправки третьей машины).

Задача 12

Такси осуществляет доставку клиентов до места назначения. Примем время поступления первого заказа от клиента за начало отсчета. Второй заказ поступит через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый – через T_3 ч. Допустим, что время выполнения первого заказа равно τ_1 ч, второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч., четвертого - τ_4 ч.

Пусть τ_1=0,8 , τ_2=1,4, τ_3=1,1, τ_4=0,9;

T_1=1,1, T_2=1,3, T_3=1.

В данной системе массового обслуживания в момент времени t=0,5 ч. произошел отказ первого рода (после его устранения обслуживание заявки продолжается). Например, возникла необходимость в замене колеса машины, осуществляющей доставку. Время замены колеса составило 0,5 ч. Рассмотрите события данной системы (поступление заказа, начало, возобновление и завершение выполнения заказа, помещение в очередь, возникновение отказа, устранение отказа). В какой момент завершится выполнение четвертого заказа?

Задача 13

Служба доставки занимается поставкой грузов по требованиям заказчиков. Примем время поступления первого заказа за начало отсчета. Второй заказ поступит через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый – через T_3 ч. Допустим, что время выполнения первого заказа равно τ_1 ч, второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч., четвертого - τ_4 ч.

Пусть τ_1=1,1 , τ_2=1,2, τ_3=1, τ_4=0,7;

T_1=0,6, T_2=1,5, T_3=1,8.

В данной системе массового обслуживания в момент времени t=2 ч. произошел отказ второго рода (после его устранения обслуживание заявки начинается заново). Например, в результате поломки возникла необходимость в ремонте машины в мастерской предприятия. Время ремонта составило 1,5 ч. Рассмотрите события данной системы (поступление заказа, начало, возобновление и завершение выполнения заказа, помещение в очередь, возникновение отказа, устранение отказа). В какой момент завершится выполнение четвертого заказа?

Задача 14

Работник предприятия выполняет задания, которые ему дает руководство, в порядке их поступления. Примем время поступления первого задания за начало отсчета. Второе задание поступило через T_1 ч., третье – через T_2 ч. Допустим, что время выполнения первого задания равно τ_1 ч., второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч.

Пусть τ_1=0,9, τ_2=0,6, τ_3=0,7;

T_1=1,2, T_2=0,3.

Рассмотрите события данной системы (поступление задания, начало и завершение выполнения задания, помещение в очередь). В момент времени t=1,4 ч. поступило срочное задание, из-за которого работнику пришлось прервать выполнение текущего. Время выполнения срочного задания составило 0,6 ч.

Осуществите поэтапную последовательную проводку заявок. В какой момент завершится выполнение третьего задания?

Задача 15

Пользователю поступают задачи, которые он решает с помощью компьютерной программы. Примем время поступления первой задачи за начало отсчета. Вторая задача поступила через T_1 мин., третье – через T_2 мин. Допустим, что время решения первой задачи равно τ_1 мин., второй - τ_2 мин., третьей - τ_3 мин.

Пусть τ_1=0,8, τ_2=0,7, τ_3=0,7;

T_1=1,2, T_2=0,5.

Рассмотрите события данной системы (поступление задачи, начало и завершение решения задачи, помещение в очередь). В момент времени t=1 мин. поступило срочная задача, из-за которого пришлось отложить решение остальных. Время решения срочной задачи составило 0,5 мин. Осуществите поэтапную последовательную проводку заявок. Какие задачи были отложены в результате появления срочной?

Задача 16

В кассе осуществляется прием оплаты за коммунальные платежи. Примем время прихода первого плательщика за начало отсчета. Второй плательщик пришел через T_1 мин., третий – через T_2 мин. Допустим, что время обслуживания первого плательщика равно τ_1 мин., второго - τ_2 мин, третьего - τ_3 мин.

Пусть τ_1=5, τ_2=4, τ_3=4,5;

T_1=2, T_2=1.

Рассмотрите события данной системы (приход плательщика, начало и завершение обслуживания, помещение в очередь) и расположите их на временной оси. В момент времени t=6 мин. пришел пенсионер, которого пропустили без очереди. Время его обслуживания составило 3 мин. Осуществите поэтапную последовательную проводку заявок. В какой момент завершится обслуживание третьего плательщика?

Задача 17

В библиотеке расположен один компьютер для поиска информации в электронном каталоге. В том случае, если в момент прихода читателя, компьютер занят, то он ищет необходимую информацию в бумажном каталоге. Примем время прихода первого читателя за начало отсчета. Второй читатель пришел через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый – через T_3 ч., пятый – через T_4 ч. Допустим, что время пользования компьютером для первого читателя равно τ_1 ч., второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч., четвертого - τ_4 ч., пятого - τ_5 ч.

Пусть τ_1=0,5, τ_2=0,6, τ_3=0,4, τ_4=0,7, τ_5=0,3;

T_1=0,3, T_2=0,3, T_3=0,1, T_4=0,5.

Рассмотрите события данной системы (приход читателя, начало и завершение работы с электронным каталогом, отказ от использования электронного каталога) и расположите их на временной оси. Рассчитайте уровень обслуживания.

Примечание. Уровень обслуживания может быть рассчитан следующим образом

$$Y = \frac{N_o}{N_з},$$

где N_o - число обслуженных заявок;

$N_з$ - общее число заявок, поступивших в систему (для рассматриваемого примера $N_з$=5).

Задача 18

К базе данных поступают запросы на поиск информации. Запросы имеют определенный приоритет: срочные запросы имеют первый приоритет, а остальные – второй. Рассмотрим запросы второго приоритета. Примем время поступления первого запроса за начало отсчета. Второй запрос пришел через T_{21} ч., третий – через T_{22} ч. Допустим, что время поиска информации для первого запроса равно τ_{21} ч., второго - τ_{22} ч., третьего - τ_{23} ч.

Пусть τ_{21}=0,7, τ_{22}=0,5, τ_{23}=0,4;

T_{21}=0,5, T_{22}=0,6.

Рассмотрим теперь заявки первого приоритета. Первый запрос пришел через T_{11} ч. (от начала отсчета), второй – через T_{12} ч. (от предыдущего запроса первого приоритета). Допустим, что время поиска информации для первого запроса равно τ_{11} ч., второго - τ_{12} ч.

Пусть τ_{11}=0,6, τ_{12}=0,3;

T_{11}=0,7, T_{12}=0,8.

Рассмотрите события данной системы (поступление запроса, начало и завершение поиска информации, помещение в очередь) и расположите их на временной оси. Осуществите поэтапную последовательную проводку заявок.

Задача 19

В цехе предприятия работает конвейер. Примем время начала изготовления первого изделия за начало отсчета. Время начала изготовления второго изделия равно T_1 ч., третьего – через T_2 ч. Допустим, что время изготовления первого изделия равно τ_1 ч., второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=0,3, τ_3=0,8;

T_1=0,8, T_2=0,4.

Рассмотрите события данной системы (начало и завершение изготовления изделия, поступление требования на изготовление) и расположите их на временной оси. Рассмотрите случай, если в системе возможны отказы (примем число отказов равным двум), связанные с поломкой конвейера. Вероятность появления отказа первого рода равна 0,4. Определите тип отказа, если z_1=0,2 (для моделирования типа первого отказа), z_2=0,85 (для моделирования типа второго отказа). Первый отказ возник в момент времени равном 1 ч., время ремонта в данном случае равно 0,3 ч. Время возникновения второго отказа равно 1,3 ч., время ремонта в данном случае равно 0,4 ч. Чему в этом случае равно время окончания изготовления 3-го изделия?

Задача 20

Пациенты поступают в клинику на обследование. Примем время прихода первого пациента за начало отсчета. Второй пациент пришел через T_1 ч., третий – через T_2 ч., четвертый – через T_3 ч., пятый – через T_4 ч. Допустим, что время обследования первого пациента равно τ_1 ч., второго - τ_2 ч., третьего - τ_3 ч., четвертого - τ_4 ч., пятого - τ_5 ч.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=0,5, τ_3=0,5, τ_4=0,6, τ_5=0,4;

T_1=0,5, T_2=0,8, T_3=0,2, T_4=1,1.

Рассмотрите события данной системы (приход пациента, начало и завершение обследования, помещение в очередь) и расположите их на временной оси. Осуществите последовательную проводку заявок. Рассчитайте вероятность ожидания обслуживания.

Примечание. Вероятность ожидания обслуживания в данном случае может быть рассчитана следующим образом

$$P_{ож.обс} = \frac{N_{ож}}{N_з},$$

где $N_{ож}$ - число заявок, ожидавших обслуживания;

$N_з$ - общее число заявок, поступивших в систему (для рассматриваемого примера $N_з$=5).

Задача 21

У менеджера фирмы возникают дела, связанные с поездками в другие организации в моменты времени T_1=0 ч., T_2=2 ч., T_3=4 ч., T_4=5 ч. Время, необходимое для их выполнения распределено равномерно на интервале (0,5;0,9). Рассчитайте значение времени выполнения этих дел, если z_1=0,1; z_2=0,4; z_3=0,7; z_4=0,25. z_1, z_2, z_3, z_4 - случайные величины, распределенные равномерно на интервале (0,1) и используемые при моделировании выполнения первого, второго, третьего, четвертого, пятого заданий соответственно.

Расположите рассматриваемые события на временной оси. Во сколько менеджер закончит свои дела? Застанет ли директор менеджера на рабочем месте, если зайдет в его кабинет в момент времени 4,2 ч.

Задача 22

Почтовое отделение обслуживает клиентов. Примем время прихода первого клиента за начало отсчета. Второй клиент пришел через T_1 мин., третий – через T_2 мин., четвертый – через T_3 мин. Допустим, что время обслуживания первого клиента равно τ_1 мин., второго - τ_2 мин, третьего - τ_3 мин., четвертого - τ_4 мин.

Пусть τ_1=0,59, τ_2=0,2, τ_3=0,45, τ_4=0,1;

T_1=0,7, T_2=1,1, T_3=1,8.

Рассмотрите события данной системы и расположите их на временной оси. Проанализируйте состояния системы через промежутки времени с шагом $\triangle T = 0,5$, $\triangle T = 0,25$, $\triangle T = 0,2$. При каком шаге будут обнаружены все заявки?

Задача 23

К библиотекарю поступают книги для ремонта. Книги складываются в коробку, из которой библиотекарь берет самую верхнюю. Примем время поступления первой книги за начало отсчета. Вторая книга поступит через T_1 час., третья – через T_2 час., четвертая – через T_3 час., пятая – через T_4 час. Допустим, что время ремонта первой книги равно τ_1 час., второй - τ_2 час., третьей - τ_3 час., четвертой - τ_4 час., пятой - τ_5 час.

Пусть τ_1=0,7, τ_2=0,4, τ_3=0,7, τ_4=0,7, τ_5=0,5;

T_1=0,5, T_2=0,1, T_3=0,5, T_4=0,8.

Рассмотрите события данной системы (поступление книги, помещение в очередь, начало и завершение ремонта) и расположите их на временной оси. Определите время окончания ремонта пятой книги.

Примечание

В данном случае рассматривается дисциплина LIFO (последний вошел – первый вышел) выбора заявок из очереди.

Задача 24

С помощью компьютера производится решение различных задач. В том случае, если задачи образуют очередь, то для решения выбирается задача, требующая наименьшего времени (меньшие по времени задачи имеют более высокий приоритет). Примем время поступления первой задачи за начало отсчета. Вторая задача поступит через T_1 час., третья – через T_2 час., четвертая – через T_3 час., пятая – через T_4 час. Допустим, что время выполнения первой задачи равно τ_1 час., второй - τ_2 час., третьей - τ_3 час., четвертой - τ_4 час., пятой - τ_5 час.

Пусть τ_1=0,6, τ_2=0,5, τ_3=0,4, τ_4=0,8, τ_5=0,3;

T_1=0,3, T_2=0,1, T_3=0,5, T_4=0,6.

Рассмотрите события данной системы (поступление задачи, помещение в очередь, начало и завершение выполнения задачи) и расположите их на временной оси. Во сколько закончится выполнение последней задачи?

Примечание

В данном случае рассматривается дисциплина «самая короткая в первую очередь» выбора заявок из очереди.

Задача 25

Преподаватель получает контрольные работы от студентов по Интернету. В том случае, если образуется очередь контрольных работ, то он их берет на проверку в произвольном порядке. Примем время поступления первой контрольной работы за начало отсчета. Вторая контрольная работа поступит через T_1 час., третья – через T_2 час., четвертая – через T_3 час., пятая – через T_4 час. Допустим, что время проверки первой работы равно τ_1 час., второй - τ_2 час., третьей - τ_3 час., четвертой - τ_4 час., пятой - τ_5 час.

Пусть τ_1=0,5, τ_2=0,5, τ_3=0,2, τ_4=0,5, τ_5=0,7;

T_1=0,2, T_2=0,2, T_3=0,3, T_4=0,7.

Напишите алгоритм моделирования события выбора контрольной работы из очереди. Выберите любые числа от нуля до единицы для моделирования данного события. Рассмотрите события данной системы (поступление контрольной работы, помещение в очередь, начало и окончание проверки) и расположите их на временной оси. Определите время окончания проверки пятой контрольной работы.

Примечание

В данном случае рассматривается дисциплина произвольного выбора заявок из очереди.

Задача 26

На предприятии трое сотрудников установили график выполнения работы (т.е. рассматривается замкнутая система массового обслуживания). Работа начинает выполняться сразу же, как только возникает в ней необходимость. Объем работ для всех одинаков, однако время выполнения работы различно для сотрудников. Сначала работу выполняет первый работник, потом второй, и, наконец, третий. После чего очередь опять подходит к первому работнику. Рассмотрите 2 круга выполнения работы. В первом круге время выполнения работы первым сотрудником равно 1,6 ч., вторым - 1,2 ч., третьим – 0,9 ч. На рис.2.24 а) представлена ситуация, когда работает сотрудник с номером 1, остальные в очереди, на рис. 2.24 б) – работает сотрудник с номером два, 2.24 в) – сотрудник с номером три.

Во втором круге время выполнения работы первым сотрудником равно 1,4 ч., вторым - 1,3 ч., третьим – 1,1 ч.

Необходимость в работе i возникает в моменты времени T_i: T_1=0 ч. (начало отсчета); T_2=1,8 ч.; T_3=3,1; T_4=4,2; T_5=5,7; T_6=7,1.

Расположите на временной оси выполненные работы. Если осуществлять моделирование с шагом $\triangle T$=0,5, то будут ли обнаружены все заявки?

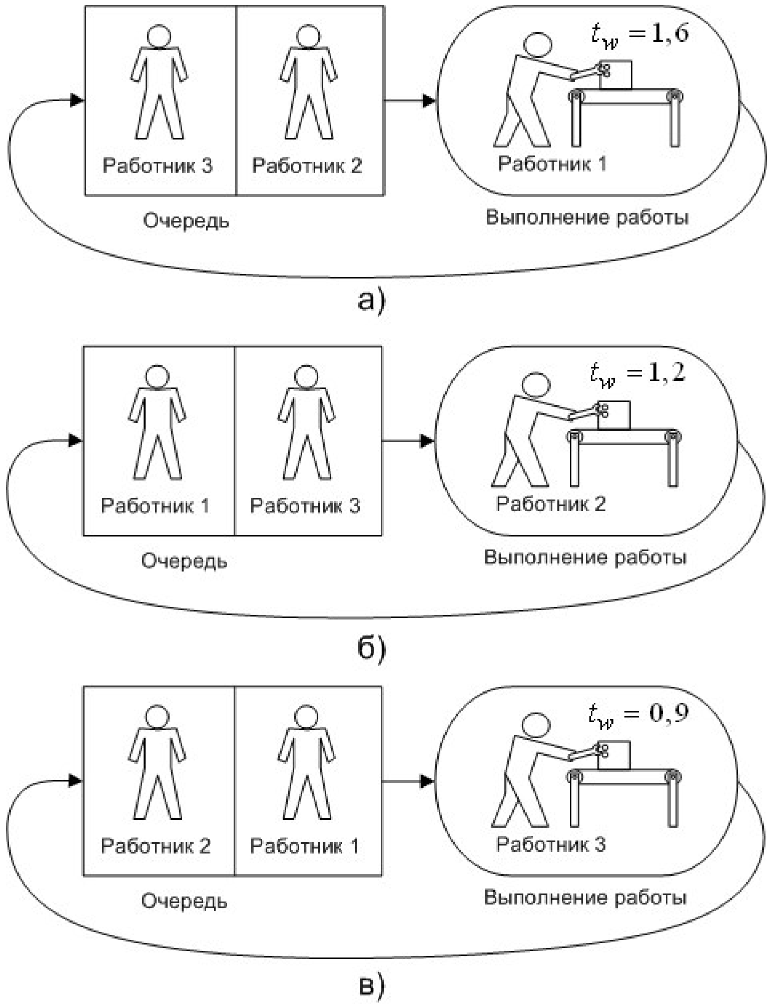


Рис.2.24 – Смена состояний системы

Задача 27

Предприятие располагает тремя машинами, которые в определенные моменты времени требуют ремонта (рассматриваемая система массового обслуживания является замкнутой).

Пусть первая машина требует ремонт дважды в моменты времени 0 ч. и 1,6 ч. Время ремонта первой и второй поломки составило 0,6 ч. и 1,5 ч. соответственно.

Второй машине потребуется ремонт в момент времени 0,7 ч. Время ремонта составило 0,6 ч.

Третья машина сломалась в моменты времени 1 ч. и 1,9 ч. Время ремонта первой и второй поломки составило 1,2 ч. и 1,3 ч. соответственно.

Рассмотрите события данной системы. В какое время закончится последний ремонт?

Задача 28

Рассмотрите систему массового обслуживания с круговым обслуживанием (рис.2.25). Примем время поступления первой заявки за начало отсчета. Вторая заявка поступит через T_1 час., третья – через T_2 час., четвертая – через T_3 час., пятая – через T_4 час., шестая – через T_5 час. Допустим, что время обслуживания первой заявки равно τ_1 час., второй - τ_2 час., третьей - τ_3 час., четвертой - τ_4 час., пятой - τ_5 час., шестой - τ_6 час. В том случае, если канал обслуживания занят, то заявка занимает определенную очередь. На рис. 2.25 показано, к каким очередям поступают заявки.

Пусть τ_1=1, τ_2=0,7, τ_3=0,8, τ_4=0,9, τ_5=0,6, τ_6=0,7.

T_1=0,2, T_2=0,3, T_3=0,4, T_4=0,5, T_5=0,4.

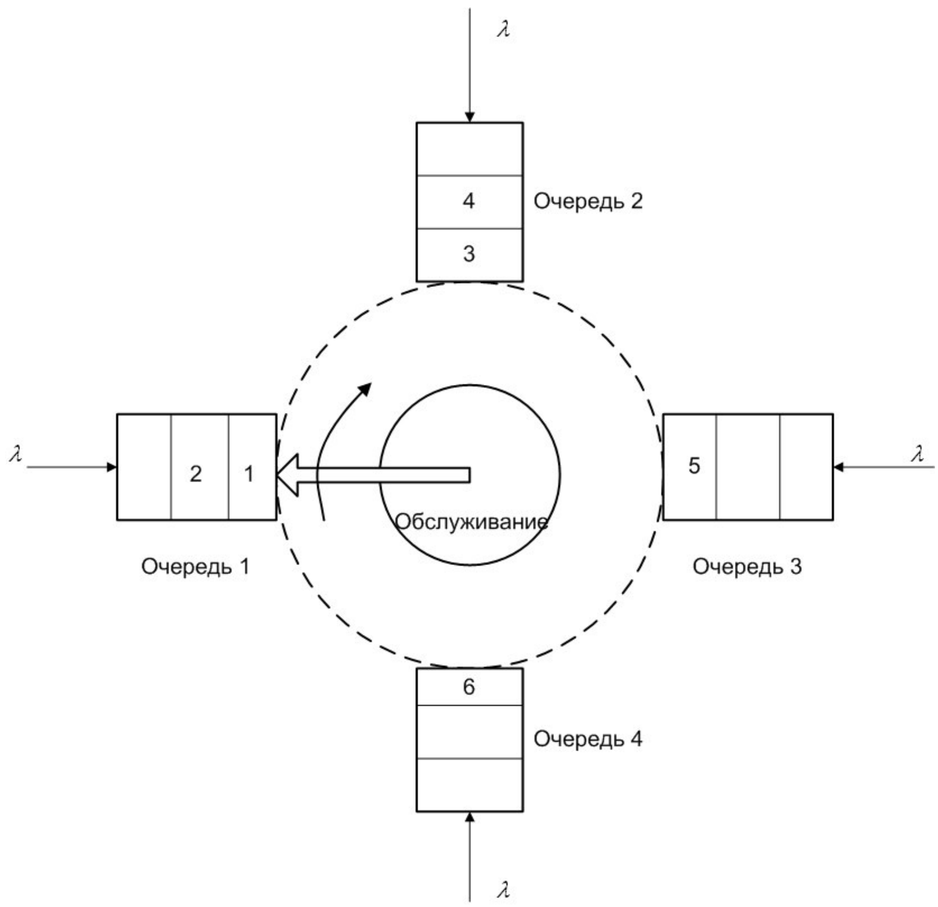


Рис.2.25 – Схема системы

Рассмотрите события данной системы (поступление заявки, помещение в очередь, начало и завершение обслуживания), считая, что обслуживание происходит

1. по одной заявке из каждой непустой очереди;
2. до исчерпания всех заявок в текущей очереди, включая пришедшие за время обслуживания.

Задача 29

К администратору гостиницы поступает поток клиентов. Время между двумя соседними клиентами является случайной величиной с показательным законом распределения (среднее значение равно 0,10 ч.). Время регистрации также является случайной величиной с показательным законом распределения (среднее значение равно 0,15 ч.). Определите время начала и окончания обслуживания каждого из четырех клиентов, если случайные величины (распределенные на интервале (0,1)), используемые при моделировании времени поступления и обслуживания, приведены в таблице 2.6. Случайные величины берутся в порядке их использования (т.е. первое для моделирования поступления первой заявки и т.д.) слева направо. Случайные величины z_p используются при моделировании времени поступления клиентов, а z_o - их обслуживания.

Таблица 2.6 – Значения случайных величин

z_p	0,23	0,45	0,12	0,87
z_o	0,65	0,77	0,32	0,21

Задача 30

Время между приходом двух человек на каток является случайной величиной с показательным законом распределения (среднее значение равно 0,25 ч.). Время катания для каждого клиента является случайной величиной с дискретным законом распределения

Время катания на коньках, ч.	1	2	3
Вероятность	0,7	0,2	0,1

Определите время прихода на каток каждого из трех человек и выручку, от обслуживания, если стоимость одного часа катания на катке равна 50 руб., а случайные величины (распределенные на интервале (0,1)), используемые при моделировании времени прихода и обслуживания, приведены в таблице 2.7. Случайные величины берутся в порядке их использования (т.е. первое для моделирования поступления первой заявки и т.д.) слева направо. Случайные величины z_p используются при моделировании времени поступления клиентов, а z_o - времени пребывания на катке.

Таблица 2.7 – Значения случайных величин

z_p	0,14	0,65	0,93
z_o	0,43	0,39	0,72

Задача 31

Пусть в систему массового обслуживания поступило три заявки. Момент прибытия первой заявки равен 0,2 ч., второй – 0,4 ч., третьей – 1,5 ч. Время окончания обслуживания первой заявки равно 0,9 ч., второй – 1,2 ч. третьей – 2 ч., Считая, что в рассматриваемой системе два канала обслуживания, рассмотрите варианты, когда обслуживание происходит:

1. в том канале, который раньше других освободился;
2. в первом свободном канале (порядок перебора: 1,2);
3. в любом из каналов с равной вероятностью (пусть $z = 0,67$ - случайная величина, используемая при моделировании события выбора канала).

Расположите прибытие заявок и их обслуживание на временной оси.

Задача 32

Копировальный центр занимается услугами ксерокопирования. Через интервалы времени приходят клиенты с целью откселокопировать некоторое число страниц. Стоимость ксерокопирования одной страницы составляет C ден.ед.

Допустим, что время между приходом двух клиентов является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Число страниц, которое необходимо отксерокопировать, является случайной величиной с нормальным законом распределения.

Время ксерокопирования одной страницы является детерминированным. Период работы центра равно T.

Кроме того, действует следующее правило: если у вновь пришедшего клиента страниц в n раз меньше чем осталось отксерокопировать у текущего, то он пропускается вперед, а затем дообслуживается прерванный клиент.

Таким образом, рассматриваемая система имеет схему системы массового обслуживания со следующими правилами:

- время между соседними заявками распределено по показательному закону;
- время обслуживания постоянно;
- число каналов равно единице;
- поступление заявок осуществляется группами;
- абсолютный приоритет имеют заявки с наименьшим временем обслуживания;
- при прерывании обслуживания заявки, происходит затем ее дообслуживание.

Кроме того, будет считать, что после завершения периода моделирования новые заявки не принимаются, однако происходит дообслуживание тех заявок, которые уже начали обслуживаться к этому моменту.

Итак, перечислим входные данные модели:

1. среднее время между приходом двух клиентов - $t_{з.ср}$;
2. среднее число страниц, которое клиенту необходимо отксерокопировать - M_C;
3. среднее квадратическое отклонение числа страниц, которые клиенту необходимо отксерокопировать - σ_C;
4. время ксерокопирования одной страницы - $t_{обс}$;
5. стоимость ксерокопирования одной страницы - C;
6. число n, которое учитывается при решении о прерывании заявки;
7. период моделирования - T;
8. число случайных реализаций - N_P.

Считается, что очередь может неограниченно возрастать. Показатель эффективности модели – средняя выручка, полученная от предоставления данных услуг (в приложении 3 даны формулы расчета статистических показателей). Выручка от обслуживания одного клиента рассчитывается по формуле

$$V = N_{стр} \cdot C,$$

где V -выручка;

$N_{стр}$-число страниц, которое необходимо отксерокопировать клиенту;

C - стоимость ксерокопирования одной страницы.

Напишите алгоритм модели копировального центра.

Решение

Алгоритм модели представлен на рис.2.26. Рассмотрим его операторы. Оператор 1 присваивает значение ноль переменной V_S - суммарной выручке за N_p случайных реализаций. Оператор 2 является началом циклического перебора случайных реализаций. Оператор 3 обнуляет локальные переменные $t_{п.н.}$ - время поступления новой заявки и $t_{к.п.}$ - время конца обслуживания предыдущей заявки. Оператор 4 является началом цикла, окончание которого связано с завершением периода моделирования. Оператор 5 моделирует значение случайной величины, распределенной равномерно на интервале (0,1). Оператор 6 рассчитывает время прибытия следующего клиента, считая, что период между приходом двух клиентов распределен по показательному закону. Оператор 7 проверяет, окончен ли период моделирования (в случае окончания происходит выход из цикла). Оператор 8 моделирует значение случайной величины числа страниц $N_{стр}$, которое необходимо отксерокопировать клиенту. Это число распределено по нормальному закону. Кроме того, полученное значение нужно округлить. Оператор 9 рассчитывает суммарную выручку центра, исходя из объема заказа клиента и стоимости ксерокопирования одной страницы. Оператор 10 проверяет, поступила ли новая заявка прежде, чем закончилось обслуживание предыдущей. Если новая заявка поступила в момент обслуживания другой (выполняется условие оператора 10), то рассчитывается число страниц, которое осталось отксерокопировать для предыдущего клиента (полученное в результате расчета значение нужно округлить в меньшую сторону). Оператор 12 проверяет, превышает ли рассчитанный остаток объем поступившей заявки в n раз. Если превышает, то обслуживание предыдущей заявки прерывается, и вместо нее обслуживается новая. Оператор 13 находит в этом случае время начала и окончания обслуживания новой заявки, а оператор 14 рассчитывает время окончания предыдущей заявки, при условии, что она будет дообслужена после вновь поступившей. Оператор 15 обновляет значение времени окончания обслуживания предыдущей заявки.

В том случае, если обслуживание текущей заявки не прерывается (не выполняется условие оператора 12), то новая заявка будет обслужена сразу же после окончания обслуживания предыдущей (оператор 16). Оператор 17 обновляет значение времени окончания обслуживания предыдущей заявки.

В том случае, если в момент поступления новой заявки канал обслуживания свободен (не выполняется условие оператора 10), то времени начала обслуживания новой заявки присваивается время ее поступления (оператор 18). Оператор 19 обновляет значение времени окончания обслуживания предыдущей заявки.

Оператор 20 рассчитывает значение показателя эффективности – средней выручки.

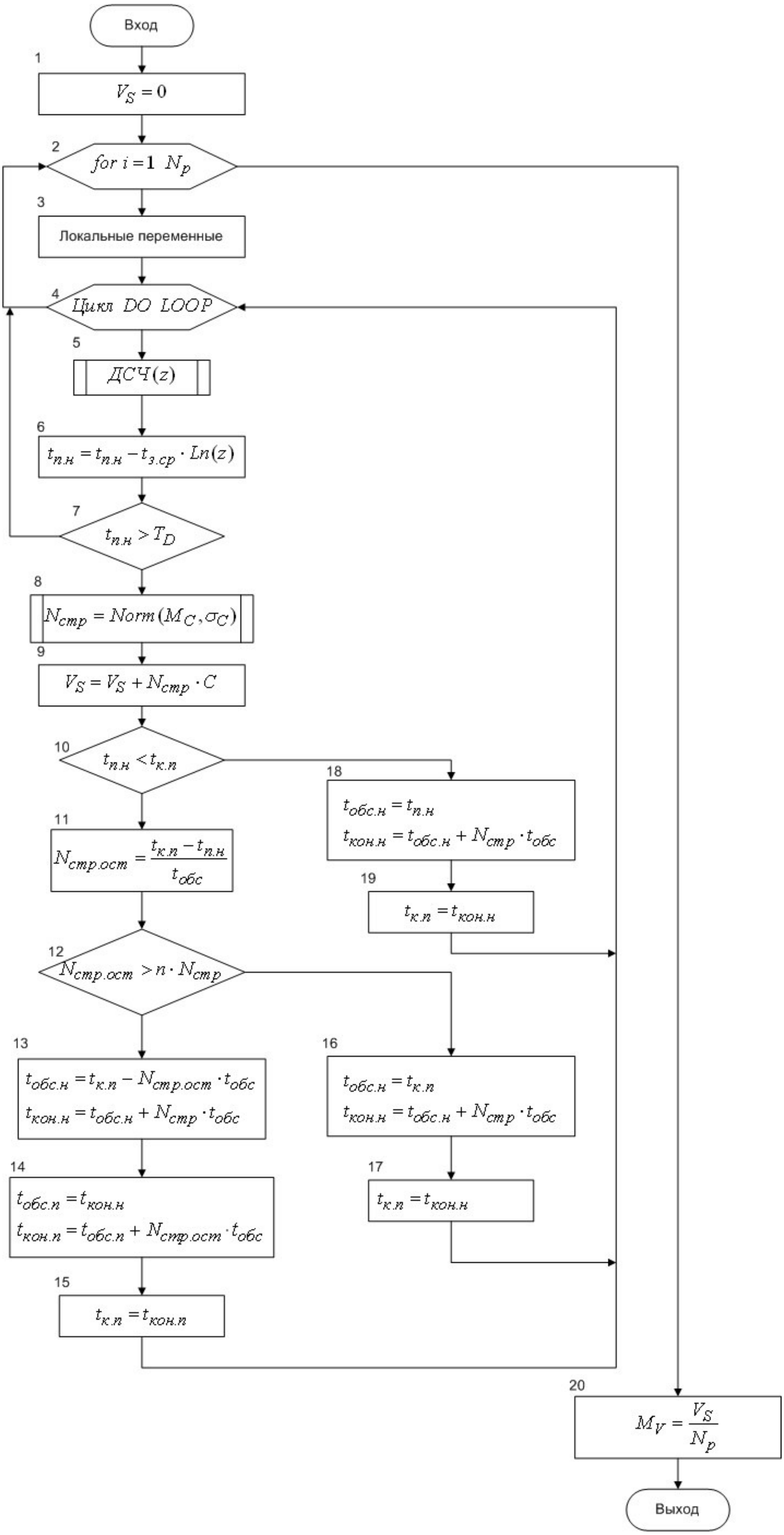

Вход
1
$V_S = 0$
2
$for\ i = 1\ N_p$
3
Локальные переменные
4
$Цикл\ DO\ LOOP$
5
$ДСЧ(z)$
6
$t_{п.н} = t_{п.н} - t_{з.ср} \cdot Ln(z)$
7
$t_{п.н} > T_D$
8
$N_{стр} = Norm(M_C, \sigma_C)$
9
$V_S = V_S + N_{стр} \cdot C$
10
$t_{п.н} < t_{к.п}$
11
$N_{стр.ост} = \frac{t_{к.п} - t_{п.н}}{t_{обс}}$
12
$N_{стр.ост} > n \cdot N_{стр}$
13
$t_{обс.н} = t_{к.п} - N_{стр.ост} \cdot t_{обс}$
$t_{кон.н} = t_{обс.н} + N_{стр} \cdot t_{обс}$
14
$t_{обс.п} = t_{кон.н}$
$t_{кон.п} = t_{обс.п} + N_{стр.ост} \cdot t_{обс}$
15
$t_{к.п} = t_{кон.п}$
16
$t_{обс.н} = t_{к.п}$
$t_{кон.н} = t_{обс.н} + N_{стр} \cdot t_{обс}$
17
$t_{к.п} = t_{кон.н}$
18
$t_{обс.н} = t_{п.н}$
$t_{кон.н} = t_{обс.н} + N_{стр} \cdot t_{обс}$
19
$t_{к.п} = t_{кон.н}$
20
$M_V = \frac{V_S}{N_p}$
Выход

Рис.2.26 –Алгоритм модели копировального центра

Задача 32.1

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы выполнялось следующее правило: с вероятностью P=0,1 у клиента могут возникнуть непредвиденные обстоятельства, и он может покинуть систему перед самым обслуживанием.

Задача 32.2

Измените алгоритм, предполагая, что время между соседними клиентами распределено равномерно на интервале (0,1;0,7).

Задача 32.3

Измените алгоритм, считая, что показатель эффективности – средняя прибыль, рассчитываемая как разность выручки и расходов. Величина расходов за период моделирования равна A.

Задача 32.4

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы показателем эффективности было среднее время простоя обслуживающего устройства.

Задача 32.5

Пусть клиенту предоставляется скидка i% в том случае, если число страниц превышает $N_{стр.порог}$. Как в этом случае изменится алгоритм модели?

Задача 32.6

Модифицируйте алгоритм, считая, что, если число страниц, которое нужно отксерокопировать клиенту меньше $N_{стр.порог}$, то цена одной страницы равна C_1, а в противном случае - C_2.

Задача 32.7

Измените алгоритм, считая, что показатель эффективности - число заказов, сумма которых превышает $V_{порог}$.

Задача 32.8

Пусть с вероятностью P клиент является постоянным и, следовательно, ему предоставляется скидка i %. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 32.9

Измените алгоритм таким образом, чтобы во второй половине периода моделирования интенсивность потока возросла в два раза.

Задача 32.10

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности - зарплата работника центра, равная i % от полученной выручки.

Задача 32.11

Модифицируйте алгоритм, считая, что через D дней стоимость ксерокопирования одной страницы возрастет на i %.

Задача 32.12

Измените алгоритм таким образом, чтобы выходной величиной была максимальная величина заказа.

Задача 32.13

Пусть в результате выполнения заказа с вероятностью P возможен брак. Доля бракованных страниц от объема заказа является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (0,1). Модифицируйте алгоритм для расчета числа бракованных страниц за период (считая, что это никак не влияет на время выполнения заказа и выручку).

Задача 32.14

Модифицируйте алгоритм, считая, что с вероятностью P клиент может быть неудовлетворен качеством и потребовать повторное ксерокопирование. В этом случае число страниц возрастает в 2 раза, а выручка фирмы не изменяется.

Задача 32.15

Измените алгоритм, считая, что показатель эффективности – среднее число обслуженных клиентов.

Задача 33

Фирма располагает одним станком для производства продукции. Время между приходом двух клиентов является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Время изготовления единицы продукции является случайной величиной с показательным законом распределения.

Цена изготовления одного изделия равна P. Если к моменту завершения изготовления изделия нет больше заказов, то оборудование выключается, иначе – начинается выполнение следующего заказа. В том случае, если оборудование выключено, то для начала изготовления изделия его нужно включить. Пусть время, необходимое для этого, постоянно и равно $time$.

Таким образом, рассматриваемая система имеет схему системы массового обслуживания со следующими правилами:

- время между соседними заявками распределено по показательному закону;
- время обслуживания распределено по показательному закону;
- число каналов равно единице;
- время ожидания обслуживания считается неограниченным;
- перед началом обслуживания необходимо включение станка, для чего требуется дополнительное время.

Итак, перечислим входные данные модели:

1. среднее время между приходом двух клиентов - $t_{з.ср}$;
2. среднее время изготовления одного изделия - $t_{обс.ср}$;
3. цена изготовления одного изделия - P;
4. время включения оборудовании - $time$;
5. период моделирования - T;
6. число случайных реализаций - N_P.

После окончания периода моделирования прекращается поступление заявок в систему, но происходит завершение тех заявок, которые уже поступили. Показатель эффективности модели – средняя выручка, полученная от продажи продукции. Выручка за период моделирования рассчитывается по формуле

$$V = N_{изд} \cdot P,$$

где V -выручка;

$N_{изд}$ -число проданных изделий;

P - цена одного изделия.

Напишите алгоритм описанной модели.

Решение

Алгоритм модели приведен на рис 2.27. Опишем его операторы.

Оператор 1 обнуляет значение глобальной переменной V - выручки за N_p случайных реализаций. Оператор 2 является началом циклического перебора случайных реализаций. Оператор 3 обнуляет значения локальных переменных: времени поступления заявки - $t_з$, времени окончания обслуживания заявки -$t_к$, числа изготовленных изделий за рассматриваемый период - $N_{изд}$. Оператор 4 является началом циклического перебора поступающих заказов. Оператор 5 обращается к датчику случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1). Оператор 6 служит для определения возможного значения случайной величины времени поступления заказа при условии, что время между соседними заказами имеет показательное распределение. Оператор 7 проверяет условие окончания периода моделирования. Если это условие не выполняется, то оператор 8 увеличивает число изготовленных изделий на единицу. Оператор 9 проверяет, поступила ли следующая заявка после того, как было завершено обслуживание предыдущей. Если условие выполняется, то время начала обслуживания равно времени поступления заявки (блок 10), а время включения оборудования $t_{вкл}$ равно $time$ (ожидания обслуживания не происходит, а, значит, следующая заявка поступила через какое время после завершения обслуживания предыдущей, поэтому оборудование к моменту поступления было выключено). Если же условие оператора 9 не выполняется, то начало обслуживания заявки приравнивается ко времени окончания обслуживания предыдущей заявки (блок 11). Оператор 12 обращается к датчику случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1). Блок 13 осуществляется расчет времени окончания изготовления изделия. Оператор 14 суммирует величину выручки в каждом периоде. Оператор 15 рассчитывает среднюю выручку за N_p случайных реализаций.

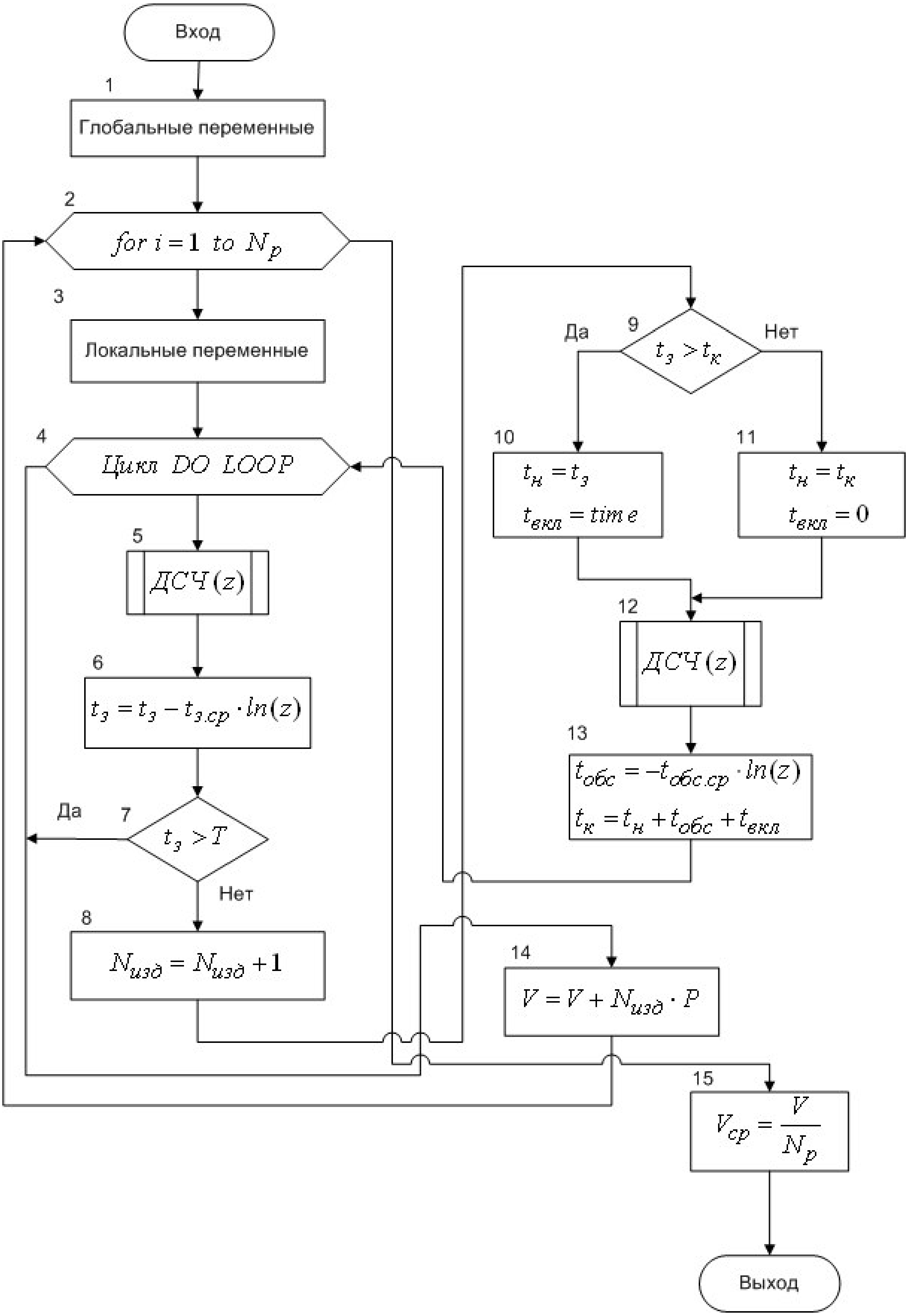


Рис.2.31 – Модификация алгоритма процедуры обслуживания заявок

Задача 33.1

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы показателем эффективности было максимальное время ожидания обслуживания.

Задача 33.2

Рассмотрите следующее правило в модели. С вероятностью P=0,15 изготовленное изделие может оказаться бракованным. В этом случае изделие для данной заявки начинает изготавливаться заново.

Задача 33.3

Измените алгоритм таким образом, чтобы были обслужены только те заявки, чье время окончания обслуживания не превышает периода моделирования.

Задача 33.4

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы осуществлялся расчет максимального времени обслуживания.

Задача 33.5

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности модели - средняя прибыль. Прибыль рассчитывается как разность выручки и переменных затрат. Переменные затраты на единицу продукции составляют s.

Задача 33.6

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы показателем эффективности было среднее время ожидания обслуживания.

Задача 33.7

Измените алгоритм для расчета среднего дохода, считая, что стоимость изделия имеет нормальное распределение со средним значением M, средним квадратическим отклонением σ.

Задача 33.8

Пусть стоимость изделия зависит от времени его изготовления (s руб. за единицу времени). Как в этом случае изменится алгоритм модели?

Задача 33.9

Модифицируйте алгоритм, считая, что время ожидания обслуживания ограничено величиной $t_{ож.\max}$.

Задача 33.10

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы показателем эффективности была вероятность ожидания обслуживания.

Задача 33.11

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы показателем эффективности было среднее время простоя обслуживающего устройства.

Задача 33.12

Как изменится алгоритм, если время изготовления будет детерминированной величиной равной $t_{обс}$?

Задача 33.13

Рассмотрите следующий вариант расчета показателя эффективности. Показатель эффективности – доход, полученный от клиента. При этом осуществляется производство на одном оборудовании двух типов изделий, среднее время изготовления которых одинаково. Однако с вероятностью P клиент может купить изделие первого типа стоимостью P_1, в противном случае он покупает изделие второго типа стоимостью P_2.

Задача 33.14

Модифицируйте алгоритм, считая, что система массового обслуживания является многоканальной, т.е. предприятие располагает несколькими станками по производству изделий.

Задача 33.15

Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы осуществлялся расчет максимального времени пребывания заявки в системе.

Задача 34

Рассматривается система массового обслуживания, в которую поступает поток заявок на изготовление изделий. Время между двумя соседними заявками является случайной величиной с показательным законом распределения. После поступления заказа информация передается в цеха и начинается изготовление изделия для данного заказа. Для изготовления изделия необходимо произвести детали «А» и «В», а затем осуществить их сборку. Процесс производства изделия в цехе может быть представлен с помощью сетевого графика, изображенного на рис. 2.32. Время выполнения работ являются случайными величинами. В таблице 2.8 приведены названия работ и характеристики их продолжительности.

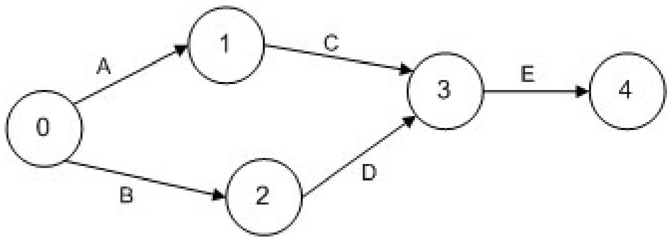


Рис.2.32 - Сетевой график

Таблица 2.8 – Характеристики работ

Обозначение работы	Название работы	Распределение	Среднее значение, час.	Величина интервала, час.
A	Передача информации об изготовлении детали «А»	Равномерное	0,4	0,2
B	Передача информации об изготовлении детали «В»	Равномерное	0,5	0,3
C	Изготовление детали «А»	Показательное	5	-
D	Изготовление	Показательное	7	-

	детали «В»			
Е	Сборка готового изделия	Показательное	3	-

Напишите алгоритм имитации данной многофазной системы массового обслуживания в течение N_p случайных реализаций, используя событийный способ продвижения времени. Выделите каждое событие в отдельную процедуру. Период моделирования равен T. Моделирование завершается в случае поступления заказа после периода T. Показатель эффективности - среднее число изготовленных изделий.

Решение

Выделим события данной системы для написания алгоритма:

1. поступление заказа;
2. передача информации об изготовлении детали «А»;
3. передача информации об изготовлении детали «В»;
4. изготовление детали «А»;
5. изготовление детали «В»;
6. сборка готового изделия.

Перечислим входные данные модели:

- среднее время между поступлением заявок на изготовление изделий - $t_{з.ср}$;
- параметры для моделирования случайной величины времени передачи информации об изготовлении детали с равномерным распределением: среднее значение $t_{ср.инф}(i)$ и величина интервала $x(i)$ ($i = 1,2$, i =1 для детали «А», i =2 для детали «В»);
- среднее значение для моделирования случайной величины времени изготовления детали $t_{ср.изг}(i)$ ($i = 1,2$, i =1 для детали «А», i =2 для детали «В») с показательным распределением;
- среднее значение $t_{ср.сбор}$ для моделирования случайной величины времени сборки изделия с показательным распределением;
- период моделирования - T_D;

- число случайных реализаций - N_p.

Алгоритм основной программы представлен на рис. 2.33. Рассмотрим его операторы. Оператор 1 обнуляет значение переменной $N_{изд}$ - числа изготовленных изделий за N_p случайных реализаций. Оператор 2 является началом циклического перебора случайных реализаций. Оператор 3 осуществляется обнуление локальных переменных: времени начала и окончания поступления заказа, времени окончания передачи информации, времени окончания изготовления деталей, времени окончания сборки изделия.

Оператор 4 осуществляется циклический перебор событий. Оператор 5 вызывает процедуру выполнения текущего события. Оператор 6 осуществляет проверку условия продолжения моделирования. Если это условие выполняется, то осуществляется вызов следующего события, в противном случае – переход к следующей случайной реализации. Если после вызова последнего события не закончен период моделирования (оператор 7), то вновь осуществляется перебор всех событий. Оператор 8 рассчитывает среднее значение изготовленных изделий за N_p случайных реализаций.

Рассмотрим теперь алгоритмы процедур моделирования каждого из событий. На рис. 2.34 приведен алгоритм моделирования события «Поступление заказа». Оператор 1 осуществляет моделирование случайной величины, равномерно распределенной на интервале (0,1). Оператор 2 рассчитывает время поступления очередного заказа при условии, что время между соседними заявками является случайной величиной с показательным распределением. Оператор 3 проверяет условие окончания периода моделирования и в зависимости от результата переменной $EndTime$ присваивается определенное значение (операторы 4,5).

На рис. 2.35 представлен алгоритм моделирования события «Передача информации». Начало передачи информации $t_{инф.н}(i)$ совпадает со временем поступления заказа, а окончание передачи $t_{инф.к}(i)$ осуществляется через время, длительность которого является случайной величиной с равномерным законом распределения (блок 2). Здесь в массивах элементы с индексом i =1 содержат информация о детали «А», а i =2 – детали «В».

На рис. 2.36 представлен алгоритм моделирования события «Изготовление детали». Начало изготовления детали $t_{изг.н}(i)$ совпадает со временем окончания передачи информации. Изготовление детали завершится через время, длительность которого является случайной величиной с показательным законом распределения (блок 2) в момент $t_{изг.к}(i)$.

Наконец, на рис. 2.37 представлен алгоритм моделирования события «Сборка изделия». Здесь начало сборки изделия $t_{пр.н}$ произойдет в тот момент, когда будут готовы изделия «А» и «В» (блок 2), т.е. максимальному времени окончания изготовления. А окончание сборки произойдет через случайный промежуток времени, распределенный по показательному закону. Оператор 3 увеличивает число изготовленных изделий.

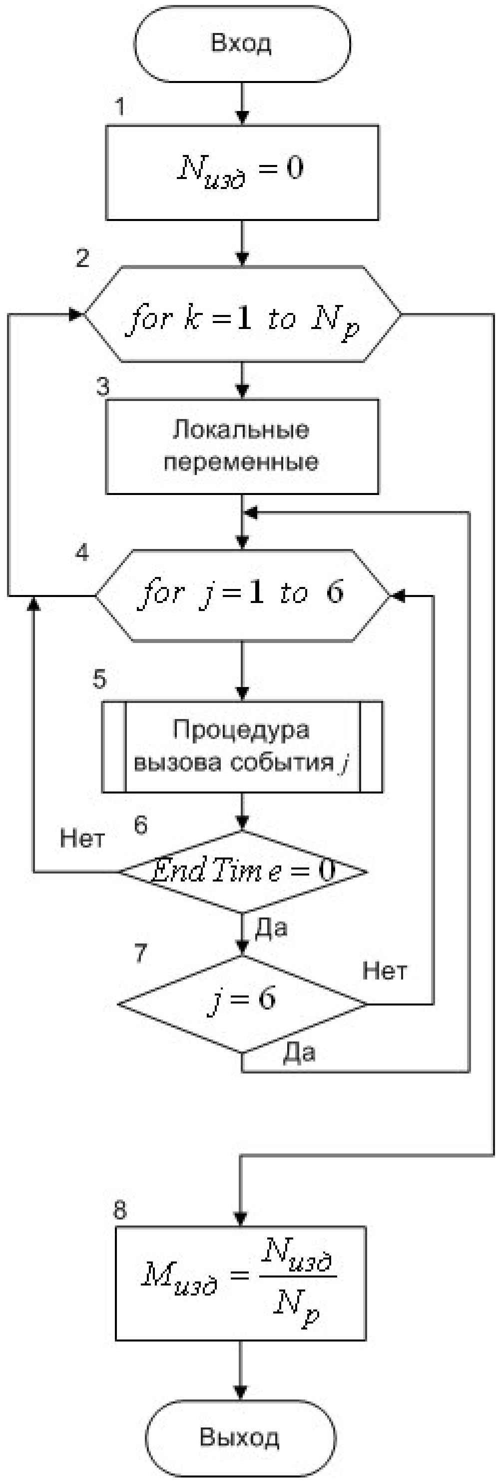


Рис.2.33 – Основной алгоритм

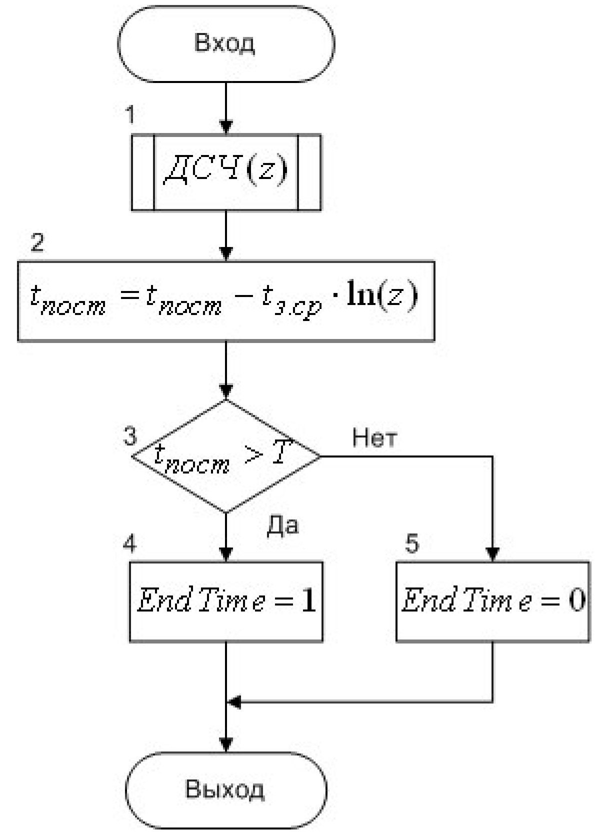


Рис.2.34 - Алгоритм моделирования события «Поступление заказа».

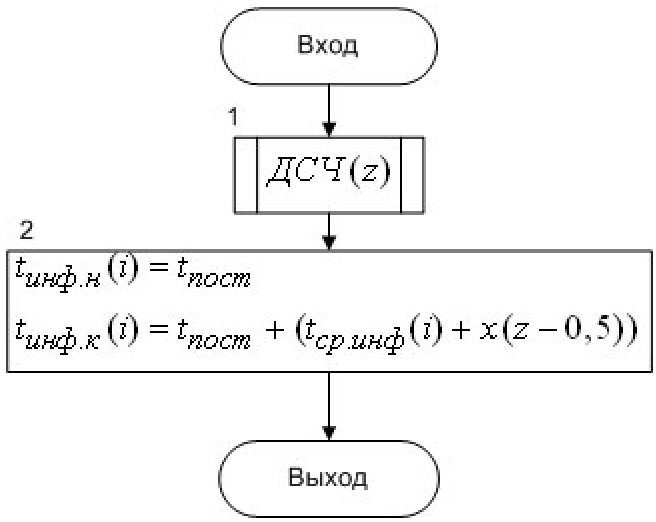


Рис.2.35 – Алгоритм моделирования события «Передача информации»

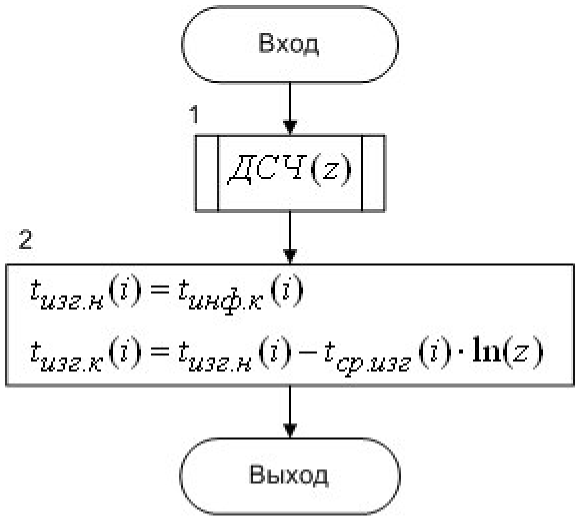


Рис.2.36 – Алгоритм моделирования события «Изготовление детали»

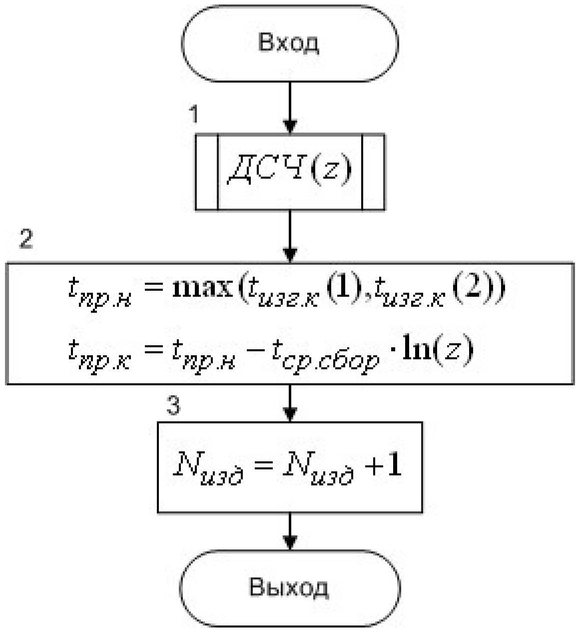


Рис.2.37 – Алгоритм моделирования события «Сборка изделия»

Задача 34.1

Из рис.2.33 видно, что переменная $EndTime$ меняет свое значение только после вызова первого события, поэтому проверка ее значения после выполнения каждого из событий не имеет смысла. Измените алгоритм таким образом, чтобы поверка завершения моделирования осуществлялась только после совершения первого события.

Задача 34.2

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности – средняя общая прибыль. Цена единицы изделия равна P, постоянные издержки за период - F_c, переменные издержки - F_v.

Задача 34.3

Какие операторы алгоритма окажутся лишними, если считать, что передача информации в цех об изготовлении детали происходит мгновенно?

Задача 34.4

Модифицируйте алгоритм модели, полагая, что изделие считается изготовленным, если время окончания его сборки не превышает периода моделирования.

Задача 34.5

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности – среднее максимальное время изготовления изделия.

Глава 3. Системы управления запасами

3.1 Теория управления запасами

Задачи управления запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических задач исследования операций, решение которых имеет важное народнохозяйственное значение. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что, в конечном счете, повышает эффективность используемых ресурсов.

Примерами запасов могут служить полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, денежная наличность и т.д. Движение запаса на складе представлено на рис.3.1.

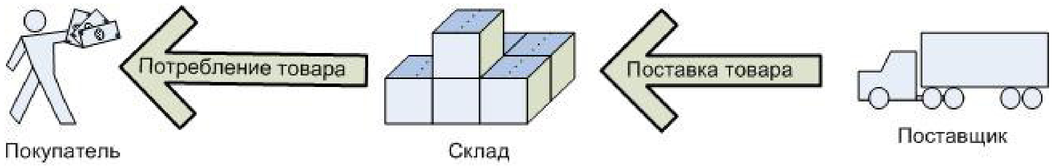
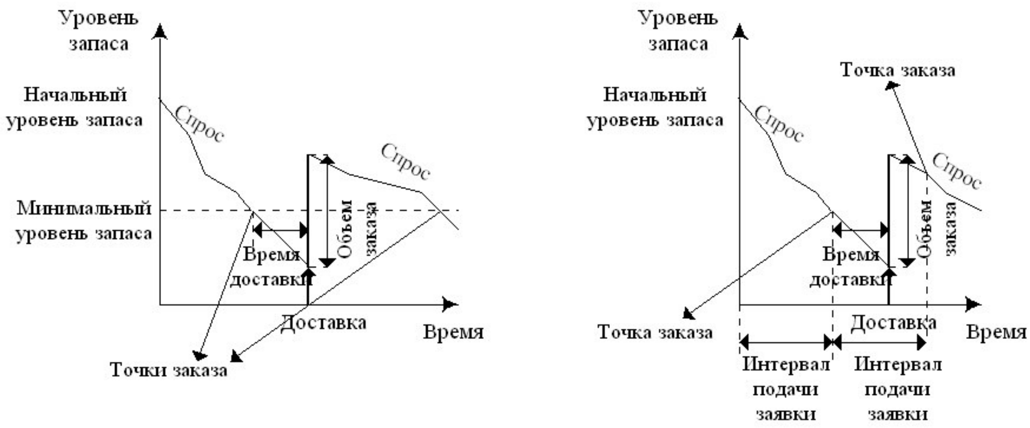


Рис. 3.1 - Движение товарного запаса

Необходимость иметь запасы обуславливается наличием хотя бы одного из следующих факторов:

1. колебание спроса на товары;
2. колебание сроков поставки товаров предприятия;
3. определенные условия, требующие закупки продукции партиями.

Рассмотрим основные характеристики моделей управления запасами (на рис. 3.2 представлено изменение уровня запаса на складе и элементы системы управления запасами).



а) б)

Рис.3.2 - Изменение уровня запаса и элементы системы управления запасами

Существует обширная классификация систем управления запасами. Рассмотрим характеристики ее элементов.

Спрос. Спрос на запасаемый продукт может быть детерминированным (в простейшем случае — постоянным во времени) или случайным (рис. 3.2). Случайность спроса описывается либо случайным моментом спроса, либо случайным объемом спроса в детерминированные или случайные моменты времени.

Пополнение склада. Пополнение склада может осуществляться либо периодически через определенные интервалы времени (рис. 3.2 б)), либо по мере исчерпания запасов, т. е. снижения их до некоторого уровня (рис. 3.2 а)). Причем доставка может осуществляться как всего товара сразу (рис. 3.2), так и в течение определенного периода времени.

Объем заказа. При периодическом пополнении и случайном исчерпании запасов объем заказа может зависеть от того состояния, которое наблюдается в момент подачи заказа (например, может быть равен спросу). Заказ обычно подается на одну и ту же величину при достижении запасом заданного уровня — так называемой точки заказа (рис.3.2). Объем заказа может быть случайной величиной (например, это может быть связано с ненадежными поставщиками либо доставкой сельскохозяйственной продукции, когда величина урожая неизвестна) или детерминированной.

Время доставки. В идеализированных моделях управления запасами предполагается, что заказанное пополнение доставляется на склад мгновенно. В других моделях рассматривается задержка поставок на фиксированный или случайный интервал времени.

Стоимость поставки. Как правило, предполагается, что стоимость каждой поставки слагается из двух компонент — разовых затрат, не зависящих от объема заказываемой партии, и затрат, зависящих (чаще всего — линейно) от объема партии.

Издержки хранения. В большинстве моделей управления запасами считают объем склада практически неограниченным, а в качестве контролирующей величины служит объем хранимых запасов. При этом полагают, что за хранение каждой единицы запаса в единицу времени взимается определенная плата.

Штраф за дефицит. Отсутствие запаса в нужный момент приводит к убыткам, связанным с простоем оборудования, неритмичностью производства и т. п. Эти убытки в дальнейшем будем называть штрафом за дефицит. При возникновении дефицита величина неудовлетворенного спроса может учитываться в последующие периоды (считается, что покупатели ждут, пока поступит товар на склад). В том случае, клиенты приняли решение о покупке товара у других фирм

Номенклатура запаса. В простейших случаях предполагается, что на складе хранится запас однотипных изделий или однородного продукта. В более сложных случаях рассматривается многономенклатурный запас.

Структура складской системы. Наиболее полно разработаны математические модели одиночного склада. Однако на практике встречаются и более сложные структуры: иерархические системы складов с различными периодами пополнения и временем доставки заказов, с возможностью обмена запасами между складами одного уровня иерархии и т. п.

В качестве показателя эффективности принятой стратегии управления запасами выступает функция затрат (издержек), представляющая суммарные затраты на хранение и поставку запасаемого продукта (в том числе потери от порчи продукта при хранении и его морального старения, потери прибыли от омертвления капитала и т. п.) и затраты на штрафы. В этом случае управление запасами состоит в отыскании такой стратегии пополнения и расхода запасами, при котором функция затрат принимает минимальное значение. Однако, встречаются и другие показатели, такие как уровень обслуживания покупателей, показатель выполнения плана реализации, оценка работы поставщиков (своевременность доставки), сокращение излишних запасов, рентабельность активов и т.д.

Рассмотрим наиболее простые модели управления запасами.

Статическая модель без дефицита

В статической модели без дефицита предполагается, что спрос является непрерывным и имеет постоянную интенсивность b, время доставки равно нулю, а пополнение осуществляется мгновенно через заданные промежутки времени - T. Объем заказанной партии товара равен n. При этом дефицит товара на складе недопустим. На рис.3.3 показано изменение уровня запаса для этой модели.

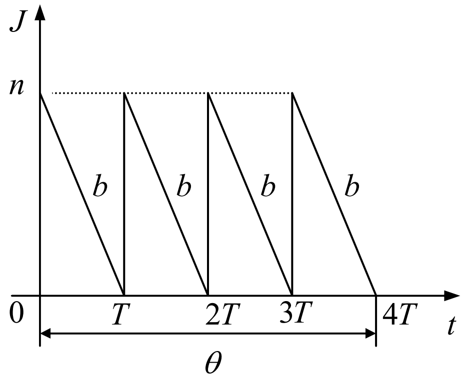


Рис.3.3 – Статическая модель управления запасами без дефицита

Интенсивность спроса для данной модели может быть рассчитана по формуле

$$b = \frac{N}{\theta},$$

где θ - рассматриваемый период;

N - общее потребление товара за период θ.

Затраты на доставку включают стоимость заказа одной партии и не зависят от ее объема и равны

$$C_1 = c_1 \frac{N}{n},$$

где C_1 - общие затраты на доставку за период θ;

c_1- затраты на доставку одной партии продукта, не зависимые от объема партии.

Затраты на хранение рассчитываются исходя из стоимости хранения единицы товара и равны

$$C_2 = \frac{c_2 \theta n}{2},$$

где C_2 - общие затраты на хранение за период θ;

c_2- затраты на хранение одной единицы продукта.

Таким образом, общие затраты включают издержки хранения и заказа.

Оптимальный объем партии товара рассчитывается по формуле

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}$$

где n_0 - оптимальный объем партии товара.

Время расхода оптимальной партии составляет

$$T_0 = \sqrt{\frac{2c_1 \theta}{c_2 N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 b}},$$

где T_0 - время расхода оптимальной партии.

Изменение суммарных затрат, к которому приводит изменение оптимального объема партии равно

$$\frac{\Delta C}{C_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2,$$

где C_0 - суммарные затраты рассчитанные при оптимальном объеме партии.

Статическая модель с дефицитом

Отличие от предыдущей модели заключается в том, что дефицит товара допустим. В этом случае изменение уровня запаса имеет следующий вид (рис.3.4).

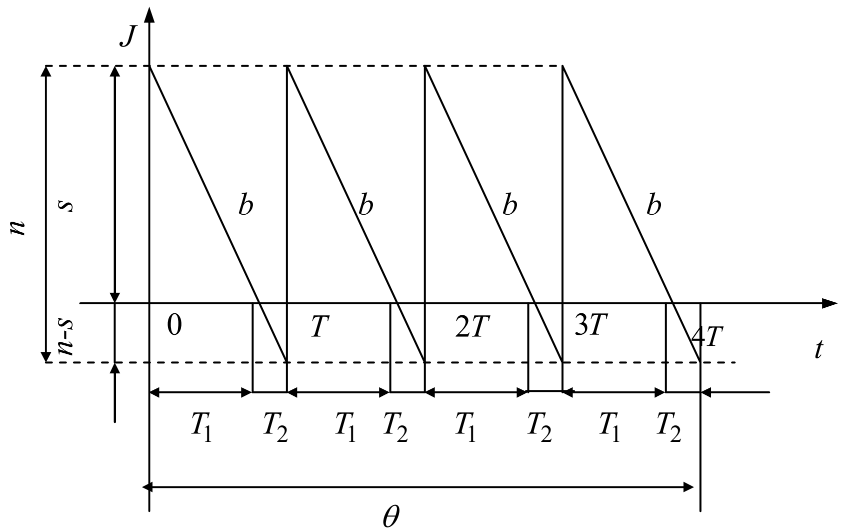


Рис.3.4 – Статическая модель управления запасами с дефицитом

Затраты на доставку рассчитываются также как и в модели без дефицита. Затраты на хранение равны

$$C_2 = \frac{c_2 s^2 \theta}{2n},$$

где s - максимальный уровень запаса.

Общие затраты также включает издержки дефицита, рассчитываемые по формуле

$$C_3 = \frac{c_3 \theta (n-s)^2}{2n},$$

где C_3 - затраты за период θ, связанные с отсутствием товара на складе;

c_3 - штраф за дефицит в единицу времени на каждую единицу продукта.

Оптимальный объем заказа рассчитывается по формуле

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}},$$

где $\tilde{n}_0$ - оптимальный объем заказа.

Наиболее экономичный максимальный запас равен

$$\tilde{s}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_3}{c_2 + c_3}} = \tilde{n}_0 \frac{c_3}{c_2 + c_3},$$

где $\tilde{s}_0$ - наиболее экономичный максимальный запас.

Величина

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3}$$

называется плотностью убытков из-за неудовлетворенного спроса.

Стохастические модели управления запасами

Рассмотрим стохастические модели управления запасами, у которых спрос является случайным.

Предположим, что спрос r за интервал времени T является случайным и задан его закон (ряд) распределения $p(r)$ или плотность вероятностей $\varphi(r)$. Если спрос r ниже уровня запаса s, то приобретение (хранение, продажа) излишка продукта требует дополнительных затрат c_2 на единицу продукта; наоборот, если спрос r выше уровня запаса s, то это приводит к штрафу за дефицит c_3 на единицу продукции.

В качестве функции суммарных затрат, являющейся в стохастических моделях случайной величиной, рассматривают ее среднее значение или математическое ожидание.

В рассматриваемой модели при дискретном случайном спросе r, имеющем закон распределения $p(r)$, математическое ожидание суммарных затрат имеет вид (учитываем только расходы на неиспользованные единицы продукта):

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r).$$

В этом выражении первое слагаемое учитывает затраты на приобретение (хранение) излишка $(s-r)$ единиц продукта (при $r \le s$), а второе слагаемое — штраф за дефицит на $(r-s)$ единиц продукта (при $r > s$).

В случае непрерывного случайного спроса, задаваемого плотностью вероятностей $\varphi(r)$, выражение $C(s)$ принимает вид:

$$C(s) = c_2 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + c_3 \int_s^{\infty} (r-s)\varphi(r)dr.$$

Задача управления запасами состоит в отыскании такого запаса s, при котором математическое ожидание суммарных затрат принимает минимальное значение.

Доказано, что при дискретном случайном спросе r математическое ожидание суммарных затрат минимально при запасе s_0,удовлетворяющем неравенствам

$$F(s_0) \le \rho \le F(s_0 + 1)$$

а при непрерывном случайном спросе r математическое ожидание суммарных затрат минимально при значении s_0, определяемом из уравнения

$$F(s_0) = \rho ,$$

где

$$F(s) = p(r < s)$$

есть функция распределения спроса r, $F(s_0)$ и $F(s_0 + 1)$ — ее значения; ρ — плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса.

В условиях рассматриваемой модели предположим, что расходование запаса происходит непрерывно с одинаковой интенсивностью.

Математическое ожидание суммарных затрат составит:

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s - \frac{r}{2}) p(r) + c_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{s^2}{r} p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(r-s)^2}{r} p(r).$$

Доказано, что в этом случае математическое ожидание минимально при запасе s_0, удовлетворяющем неравенству

$$L(s_0) < \rho < L(s_0 + 1),$$

где

$$L(s) = F(s) + \left(s - \frac{1}{2} \right) \sum_{r=s}^{\infty} \frac{p(r)}{r}.$$

Пример

В фирме действует следующая стратегия пополнения склада: объем партии равный 100 шт. заказывается при достижении уровня запаса 40 шт., а срок выполнения заказа – 4 дня. Таким образом, доставка осуществляется в тот момент когда уровень запаса равен нулю. Дефицит товара не допускается, доставка осуществляется мгновенно. Стоимость заказа равна 10 ден.ед., стоимость хранения единицы товара в течение суток составляет 0,5 ден.ед. Нарисуйте график изменения запаса, определите общие затраты за один цикл.

Рассчитайте оптимальный объем партии товара и соответствующие ему общие затраты.

Решение

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.5. Найдем общие затраты за один цикл по формуле

$$C = C_1 + C_2 = c_1 \cdot k + \frac{c_2 n T}{2},$$

где C - общие затраты;

C_1 - затраты на доставку;

C_2 - затраты на хранение;

c_1 - -стоимость доставки одной партии товара (стоимость заказа);

k - число поставок;

c_2 - стоимость хранения единицы товара в течение суток;

n - объем партии товара;

T - рассматриваемый период.

Для заданных значений получим

$$C = 10 + \frac{0{,}5 \cdot 100 \cdot 10}{2} = 260 \text{ ден.ед.}$$

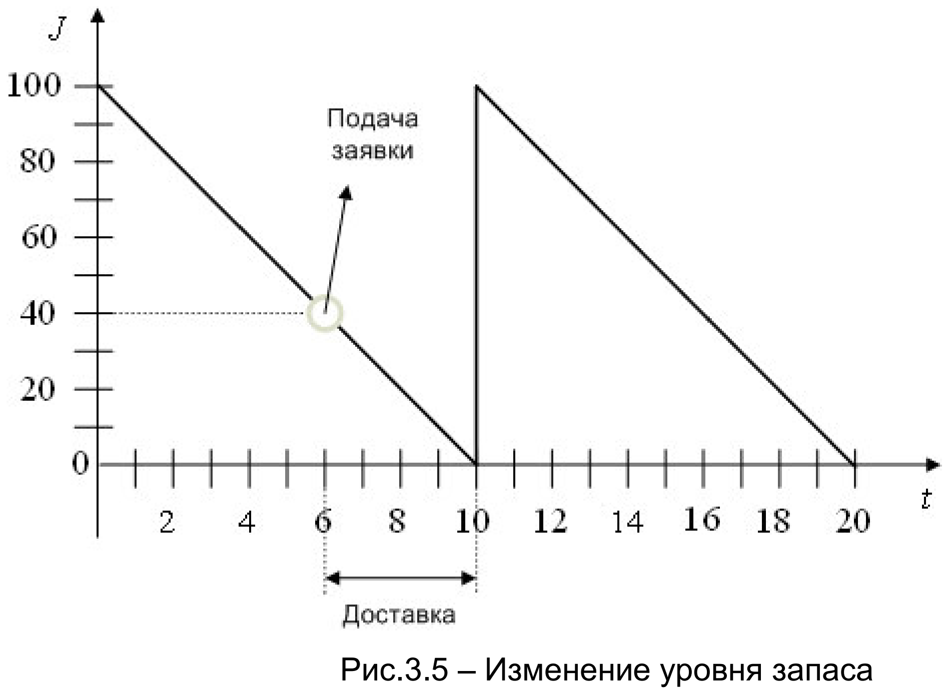


Рис.3.5 – Изменение уровня запаса

Рассчитаем теперь оптимальный объем партии товара

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 n}{c_2 T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{0,5 \cdot 10}} = \sqrt{400} = 20 \text{ шт.}$$

В этом случае количество поставок будет равно

$$k = \frac{N}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

Общие затраты в случае заказа оптимальной партии товара составят

$$C = 10 \cdot 5 + \frac{0,5 \cdot 20 \cdot 10}{2} = 100 \text{ ден.ед.}$$

Задача 1

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 100000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,2 ден.ед. в сутки, а поставка партии – 5000 ден.ед. задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить интенсивность расхода запаса в день, наиболее экономичный объем партии, интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок), число партий.

Задача 2

Для производства изделий предприятию требуется 150000 деталей в год. Расход этих деталей происходит равномерно и непрерывно в процессе производства. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема. Затраты на хранение детали на складе за месяц равны 10 ден.ед., а поставка партии стоит 7000 ден.ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии, интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок), общие расходы и относительное изменение суммарных затрат при объеме заказываемых партий 6000 деталей.

Задача 3

Интенсивность расхода краски при изготовлении изделий составляет 40000 банок за год. Расход осуществляется равномерно и непрерывно в процессе производства. Детали заказываются раз в год и доставляются партиями одинакового объема. Стоимость хранения на складе составляет 1 ден.ед. за день. Поставка партии товара обходится в 9000 ден.ед. Задержка производства из-за отсутствия краски недопустима. Определите наиболее экономичный объем партии, интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (задержка поставок не предусматривается). Рассчитайте точку заказа, полагая, что время доставки равно 15 дней.

Задача 4

Фирма занимается продажей товара со склада. Годовой спрос составляет 20000 шт. На склад товар поставляется партиями одинакового объема, стоимость доставки одной партии равна 140 ден. ед., стоимость хранения единицы составляет 30 ден. ед. в год. Определите наиболее экономичный объем партии, интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (задержка поставок не предусматривается), число заказываемых партий, общие годовые расходы фирмы.

Задача 5

Кафе закупает картофель в начале месяца для приготовления блюд. Ежемесячный расход картофеля составляет 50 кг. Стоимость доставки партии товара равна 15 ден.ед. Стоимость хранения одного килограмма картофеля составляет 1 ден.ед. в день. Определите расходы ежемесячные расходы кафе. Рассчитайте оптимальный объем партии товара и сравните полученное значение ежемесячных расходов с существующими.

Задача 6

Фирма занимается производством настольных ламп. Годовой спрос на продукцию составляет 1800000 шт. Стоимость хранения единицы товара в течение суток равна 1 д.е. Считая, что производство осуществляется мгновенно, а затраты, связанные с производством партии товара равны 100 ден.ед., рассчитайте оптимальный объем производимой партии и суммарные годовые затраты (дефицит не допускается).

Задача 7

Предприятие стоит перед выбором: производить изделие или покупать. Известно, что стоимость (не зависимая от объема) заказа равна 50 ден.ед., а выпуска партии – 60 ден.ед. Издержки хранения единицы изделия не зависят от того, было ли оно произведено или куплено и составляют 2 ден. ед. в сутки. Спрос на изделия равен 2500 шт. за месяц. Переменные издержки, связанные с изготовлением единицы изделия равны 10 ден. ед., а цена товара (в случае покупки) составляет 30 ден. ед. Считая, что дефицит не допускается (задержка доставки и производства не предусматривается), определите:

- оптимальный объем производимой партии и общие издержки заказа и хранения за месяц, соответствующие этому значению объема;
- суммарные затраты на производство, включающие общие издержки заказа и хранения, рассчитанные на предыдущем этапе и общие переменные затраты (стоимость изготовления единицы товара, умноженная на производимый объем);
- оптимальный объем заказываемой партии и общие издержки заказа и хранения за месяц, соответствующие этому значению объема;
- суммарные затраты на покупку, включающие общие издержки заказа и хранения, рассчитанные на предыдущем этапе и общую стоимость изделий (стоимость единицы изделия, умноженная на закупаемый объем).

Сравните полученные значения суммарных затрат за месяц на покупку и изготовление изделий.

Задача 8

Рассматривается задача управления запасами, в которой склад пополняется не мгновенно, а равномерно с интенсивностью p ($p > b, b$ - интенсивность расхода). Таким, образом, сначала идет производство изделия (одновременно с потреблением), а затем только потребление (рис.3.6).

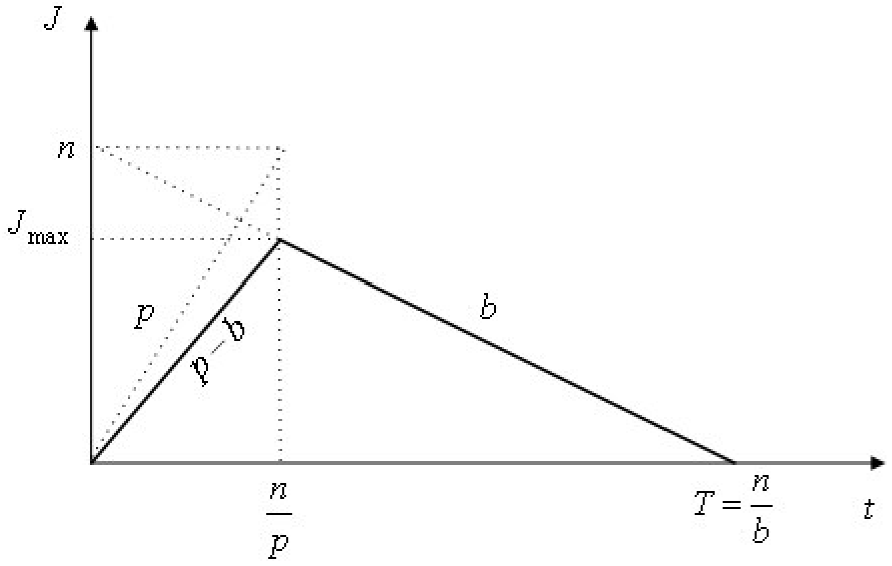


Рис.3.6 – Изменение уровня запаса

Считая, что дефицит недопустим, выведите формулу для вычисления максимального уровня запаса $J_{\max}$.

Примечание

Движение запаса определяется функцией вида

$$J(t)=\begin{cases}(p-b)\cdot t, & 0\le t\le \dfrac{n}{p};\\ n-b\cdot t, & \dfrac{n}{p}\le t\le \dfrac{n}{b}.\end{cases}$$

Определите, в какой точке эта функция достигает максимума (пересечение двух прямых), и подставьте это значение в систему.

Задача 9

Предприятие производит кирпич, который затем хранит на складе. Пополнение склада осуществляется равномерно в течение определенного периода времени с интенсивностью p=20 шт. в день. Одновременно происходит расход товара с интенсивностью b=10 шт. в день. После окончания периода производства, который равен четырем дням, происходит только расход (с той же интенсивностью). Дефицит недопустим. Постройте график изменения уровня запаса в течение одного цикла (производство партии кирпича и ее продажа).

Определите максимальный уровень запаса и время расхода партии после производства.

Задача 10

Рассматривается задача управления запасами, в которой склад пополняется не мгновенно, а равномерно с интенсивностью p ($p > b, b$ - интенсивность расхода). Таким, образом, сначала идет только производство изделия (без потребления), а затем его потребление (рис.3.7).

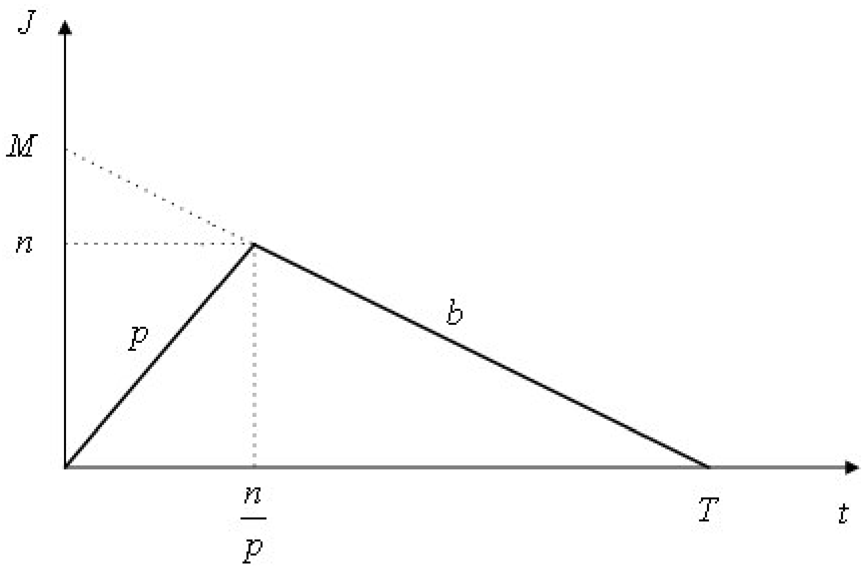


Рис.3.7 – Изменение уровня запаса на складе

Считая, что дефицит недопустим, выведите формулу для вычисления значения точки M (некоторая условная точка, получаемая на графике путем продолжения траектории потребления запаса и характеризующая возможный начальный уровень запаса при переходе к мгновенной поставке).

Примечание

Движение запаса определяется функцией вида

$$J(t) = \begin{cases} p \cdot t, & 0 \le t \le \dfrac{n}{p}; \\ M - b \cdot t, & \dfrac{n}{p} \le t \le \dfrac{n \cdot (b + p)}{p \cdot b}. \end{cases}$$

Рассчитайте значение M из условия равенства значений функций движения запаса в точке $t = \dfrac{n}{p}$.

Задача 11

Предприятие занимается производством стройматериалов, которые затем хранятся на складе. Интенсивность производства составляет p=30 шт. в день. После окончания периода производства, который равен пяти дням, происходит только расход товара с интенсивностью b=25 шт. в день. Дефицит недопустим. Постройте график изменения уровня запаса в течение одного цикла (производство партии стройматериалов и ее продажа). Определите период расхода произведенной партии и возможный начальный уровень запаса при переходе к мгновенной поставке.

Задача 12

Фирма занимается продажей компьютерной техники. Стоимость заказа партии товара у поставщика равна 25 ден.ед. (доставка осуществляется мгновенно). Доставленный товар хранится на складе. Цена хранения единицы товара равна 50 ден.ед. в неделю. Величина спроса за неделю равна 100 шт. (дефицит недопустим). Рассчитайте оптимальный объем партии товара, интервал между поставками, общие затраты за неделю. Нарисуйте график изменения запаса, укажите на нем среднее значение запаса.

Задача 13

Предприятие рассматривает две стратегии пополнения склада:

1. объем заказываемой партии товара равен 100 шт., точка заказа - 30 шт., срок выполнения заказа – 3 дня;
2. объем заказываемой партии товара равен 120 шт., точка заказа - 50 шт., срок выполнения заказа – 7 дней.

Дефицит не допускается, доставка осуществляется мгновенно. Стоимость заказа равна 15 ден.ед., стоимость хранения единицы товара в течение суток составляет 0,1 ден.ед.

Нарисуйте изменение уровня запаса на складе для двух стратегий. При использовании какой стратегии пополнения склада общие затраты меньше?

Задача 14

Фирма закупает сувениры у поставщиков. Купленный товар отправляют на склад. Стоимость заказа составляет 10 ден. ед. Однако, поставщик предлагает скидку 10% в том случае, если объем заказываемой партии превышает n_m=10 ед.

Стоимость хранения единицы товара на складе равна 2 ден. ед. в сутки. Спрос на сувениры равен 1000 шт. в неделю. Определите оптимальный объем партии товара с учетом возможности получения скидки, если доставка производится мгновенно, срок поставки равен нулю, а дефицит товара недопустим.

Примечание

Опишем алгоритм нахождения оптимального объема заказа с учетом скидки, приведенный в источнике [11]

1. рассчитывается оптимальный объем заказа n_0 с учетом скидки;
2. если $n_0 \geq n_m$, тогда предложение поставщика выгодно и его следует принять, иначе переходим к следующему шагу;
3. определяются суммарные затраты для оптимального уровня запаса без учета скидки и для минимально возможного размера заказа n_m с учетом скидки. Затем нужно их сравнить и принять выгодное решение.

Задача 15

Организация занимается продажей автошин, которые она закупает у поставщика по цене 2000 ден.ед. за шт. Стоимость заказа равна 10 ден.ед. Купленный товар хранится на складе, и издержки хранения единицы товара за неделю составляют 2% от цены товара. Считая, что дефицит недопустим, доставка осуществляется мгновенно, а спрос за месяц составляет 1000 шт., определите оптимальный объем заказываемой партии и суммарные затраты, включающие издержки заказа, хранения и стоимость закупки партии.

Задача 16

Предприятию необходимо принять решение об объеме заказываемой партии товара. Стоимость заказа составляет 2000 ден.ед., цена хранения единицы товара на складе в течение суток равна 10 ден.ед. Однако поставщик осуществляет разовую поставку в объеме не меньшем, чем n_m = 600 шт. Спрос за месяц составляет 15000 ден.ед. Дефицит не допускается, поставка осуществляется мгновенно, срок доставки равен нулю.

Примечание

Для решения задачи необходимо рассчитать оптимальный объем партии n_0, исходя из заданных значений. Если $n_0 \geq n_m$, то найденный объем равен n_0, в противном случае - n_m.

Задача 17

Руководство фирмы принимает решение о выборе поставщика. Предложения следующие:

1. Поставщик «А»: стоимость заказа равна 200 ден.ед., цена товара – 1000 ден.ед.;
2. Поставщик «В»: стоимость заказа равна 150 ден.ед., цена товара – 1010 ден.ед.

Цена хранения единицы товара в течение суток составляет 2 ден.ед. Потребление товара осуществляется равномерно и за два месяца составляет 1800 шт. Дефицит товара на складе не допускается, поставка осуществляется мгновенно. Найдите оптимальные значения объемов партий для двух предложений и суммарные затраты, при условии включения в формулу найденных значений объемов партий. Выберите наиболее выгодный вариант.

Задача 18

Фирма занимается продажей со склада офисных кресел. Стоимость доставки партии товара на склад равна 1000 ден.ед., а издержки хранения равны 2 ден.ед. в сутки. Поставка товара происходит мгновенно. Потребление осуществляется непрерывно и равномерно и составляет 138000 шт. в год. Определите оптимальный объем заказываемой партии товара, интервал между поставками, максимальный уровень запаса, считая, что дефицит допустим, а штраф из-за отсутствия единицы товара на складе равен 5 ден.ед. в сутки.

Задача 19

Производственная фирма занимается изготовлением мебели. Потребность за месяц в древесных плитах составляет 50000 листов, которые расходуются непрерывно и равномерно. Хранение единицы материала на складе составляет 20 ден.ед. в месяц, а поставка партии товара – 2500 ден.ед. Предполагается, что поставщик не допускает задержек поставок. Определите наиболее экономичный объем партии товара, интервал между поставками, максимальный уровень запаса, считая, что дефицит допустим, а штраф из-за отсутствия единицы товара на складе равен 1,5 ден.ед. в сутки.

Задача 20

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.8.

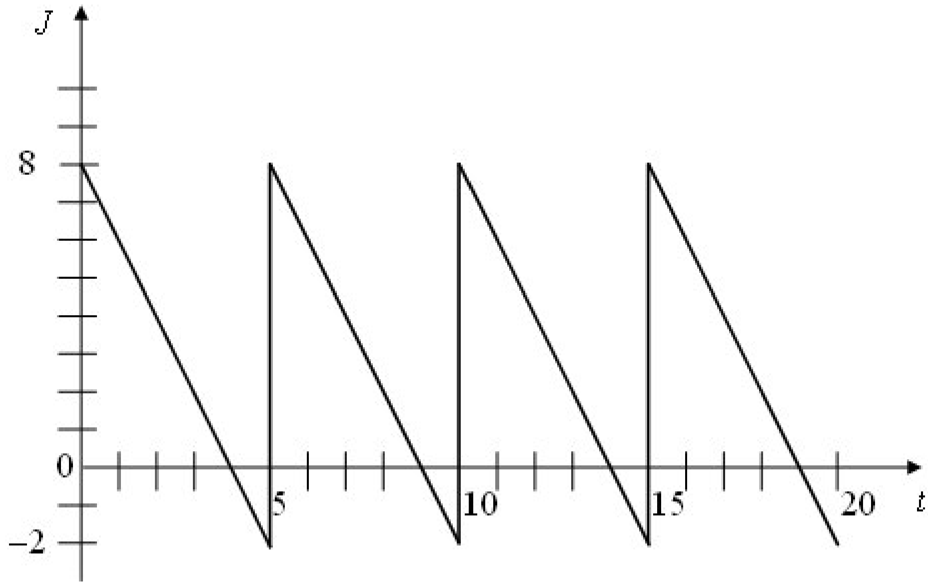


Рис.3.8 – Изменение уровня запаса

Рассчитайте вероятность дефицита по следующей формуле

$$P_d = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\frac{R_i}{\overline{\upsilon}_i},$$

где P_d - вероятность дефицита;

T -рассматриваемый период.

$\overline{\upsilon}_i$ - среднее потребление, рассчитываемое по формуле

$$\overline{\upsilon}_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\upsilon_i,$$

где υ_i - расход за промежуток времени i .

К примеру, на рис. потребление в первый промежуток времени составляет 2 шт. в день, а в пятый равен нулю.

Величина R_i рассчитывается следующим образом

$$R_i = \begin{cases} 0, & если \quad \overline{\upsilon}_i - \upsilon_i \le 0, \\ \overline{\upsilon}_i - \upsilon_i, & если \quad \overline{\upsilon}_i - \upsilon_i > 0. \end{cases}$$

Задача 21

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.9.

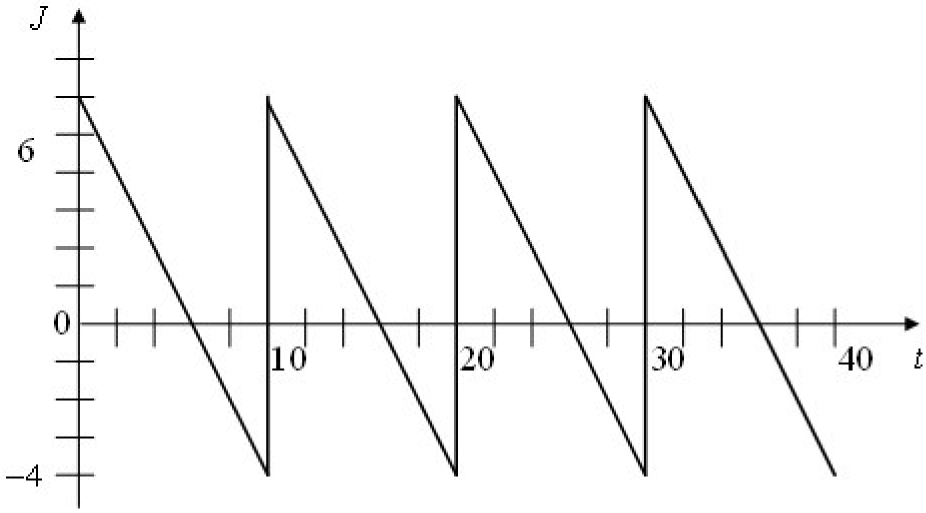


Рис.3.9 – Изменение уровня запаса

Рассчитайте уровень обслуживания по формуле

$$P_{об} = \frac{N_y}{N},$$

где N_y - величина потребления запаса за период;

N - величина общего спроса за период.

Задача 22

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.10.

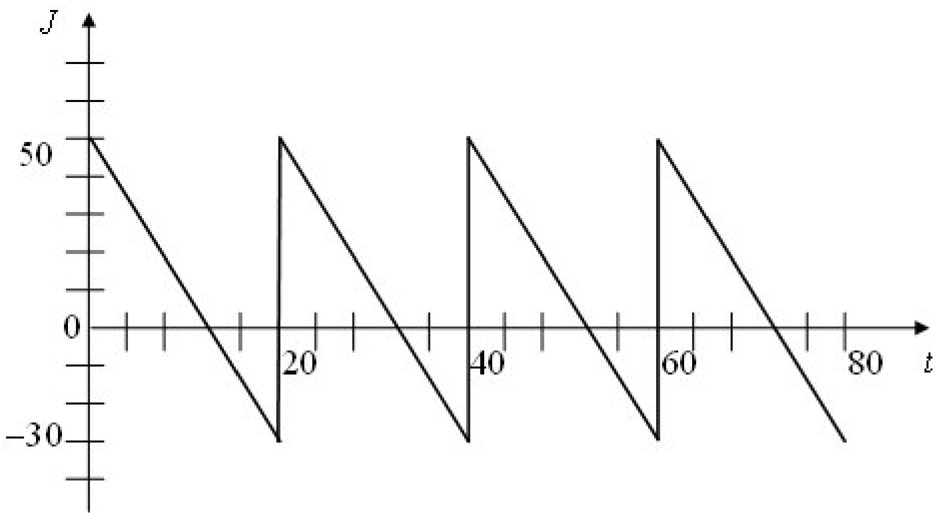


Рис.3.10 – Изменение уровня запаса

Считая, что затраты на доставку партии товара равны 1000 ден.ед., стоимость хранения единицы товара в ед.времени (4 дня) равна 3 ден.ед., а штраф за дефицит в ед.времени равен 10 ден.ед., определите общие затраты за рассматриваемый период.

Задача 23

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.11.

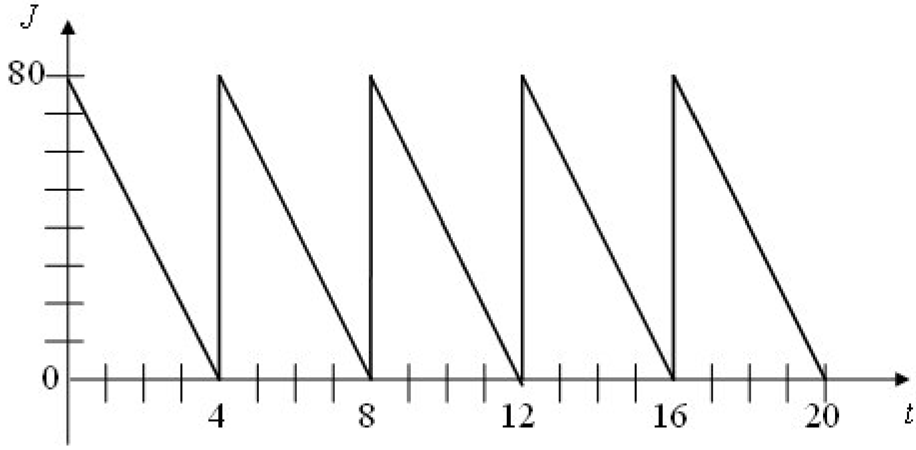


Рис.3.11 – Изменение уровня запаса

Определите общие затраты за рассматриваемый период, если стоимость поставки партии товара равна 2400 ден.ед., а стоимость хранения единицы товара в ед.времени равна 7 ден.ед.

Задача 24

Ежемесячный спрос на товар, хранящийся на складе, является случайной величиной. Ее закон распределения представлен в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Вероятностные характеристики спроса

Спрос, r	0	1	2	3	4
Статистическая вероятность $p(r)$	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Считая, что потребление происходит равномерно, определите оптимальный месячный запас товара. Затраты на хранение составляют 7 ден.ед., а дефицит одного изделия обходится в 90 ден.ед.

Задача 25

Для обеспечения производственного процесса предприятие закупает оборудование. Кроме того, необходимо принять решение о том, какое количество запасных частей следует приобрести. Стоимость хранения одной зап.части равно 20 ден.ед. В случае отсутствия необходимой зап.части простой оборудования обходится предприятию в 140 ден.ед. Статистические данные о числе необходимых зап.частей представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Вероятностные характеристики спроса

Число замененных деталей, r	0	1	2	3
Статистическая вероятность $p(r)$	0,4	0,3	0,2	0,1

Определите оптимальное число зап.частей.

Задача 26

Предприятие закупает агрегат с запасными блоками к нему. Стоимость хранения одного блока равна 12 ден.ед. В случае выхода агрегата из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой агрегата и срочный заказ нового блока к нему обойдется в 150 ден.ед. Распределение спроса в запасных блоках является непрерывным с показательным законом распределения. Функция распределения равна $F(r) = 1 - e^{-\lambda r}$, где λ =0,87.

Необходимо определить оптимальное число запасных блоков, которое нужно приобрести вместе с агрегатом.

Задача 27

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.12.

Считая, что цена единицы проданного покупателям данного склада товара равна 10 ден.ед., найдите значение выручки для двух случаев:

- величина дефицита удовлетворяется при следующей поставке товара (т.е. покупатели получат свой товар, как только он поступит на склад);
- величина дефицита не удовлетворяется (т.е. покупатели отказываются от покупки в случае отсутствия товара на складе);

Чему равен объем заказываемой на склад партии товара в каждом из вариантов? Полагая, что стоимость доставки единицы товара равна 2 ден.ед., а издержки заказа, независимые от объема партии равны 15 ден., определите затраты на доставку для двух случаев.

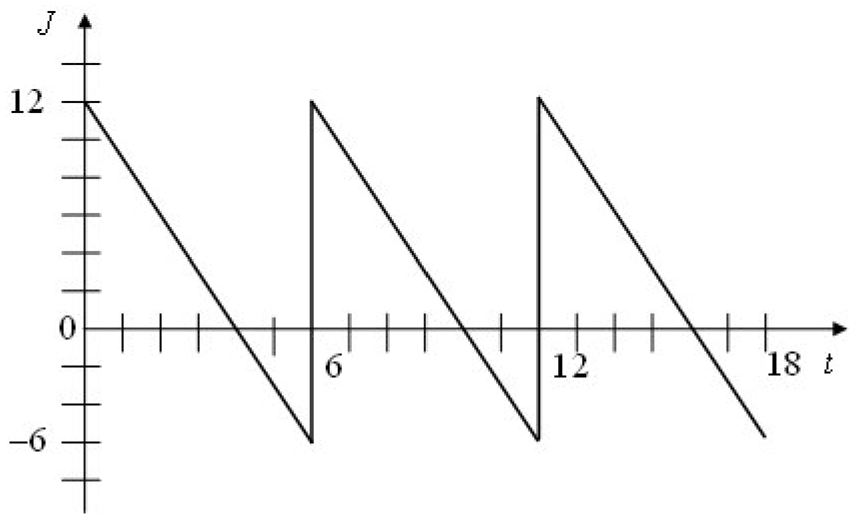


Рис.3.12 – Изменение уровня запаса

Задача 28

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.13.

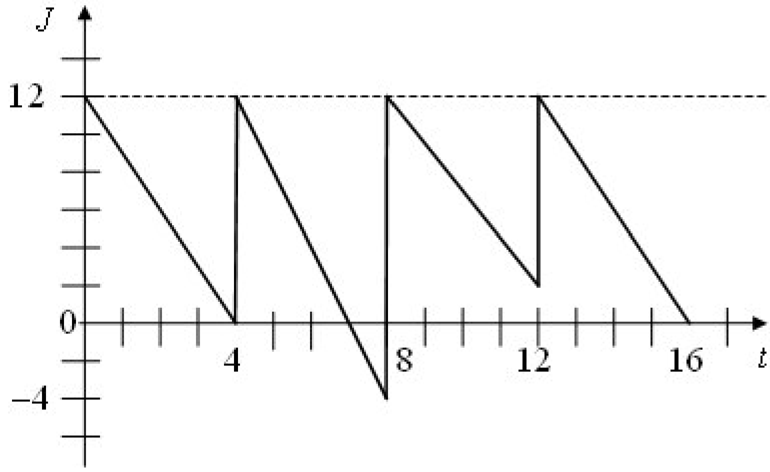


Рис.3.13 – Изменение уровня запаса

Из рисунка видно, что на складе используется следующая стратегия пополнения: через интервал времени T_i $(i = 1,..,4)$ осуществляется доставка партии, объем которой рассчитывается по формуле

$$n = J_{\max} - J(T_i),$$

где $J_{\max}$ - максимальный уровень запаса на складе;

$J(T_i)$ - уровень запаса в момент времени T_i.

Рассчитайте затраты на доставку, если стоимость поставки единицы товара равна 7 ден.ед., а издержки заказа, не зависимые от объема партии составляют 10 ден.ед. Определите объем потребления товара за рассматриваемый период.

Задача 29

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.14.

На складе действует следующая система пополнения запаса: как только уровень запаса на складе будет равен $J_{\min}$=20 шт., то подается заявка на доставку партии товара. Время доставки товара на склад равно T_d дней. Объем партии товара постоянен.

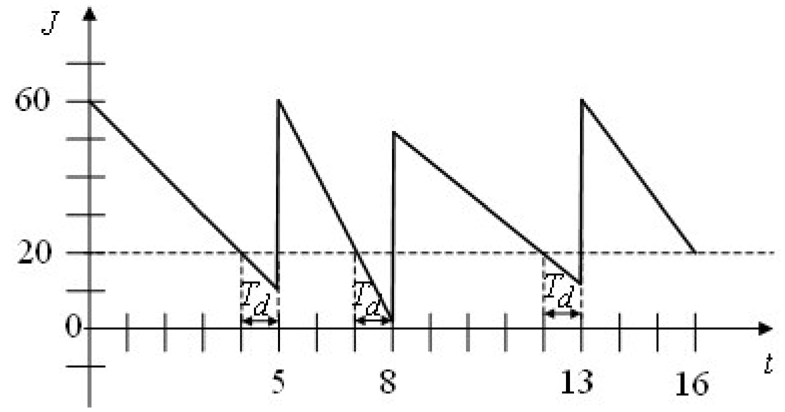


Рис.3.14 – Изменение уровня запаса

Определите объем заказываемой партии, время доставки, выручку склада за рассматриваемый период, если цена единицы товара равна 10 ден.ед., издержки заказа, если стоимость доставки партии товара равна 120 ден.ед.

Задача 30

Изменение уровня запаса на складе представлено на рис.3.15.

Система пополнения склада следующая: если уровень запаса становится равен $J_{\min}$=10 шт., то предприятие делает заказ на доставку партии товара. Время доставки равно T_d, а объем партии рассчитывается по формуле

$$n = J_{\max} - J(T_i),$$

где $J_{\max}$ - максимальный уровень запаса на складе;

$J(T_i)$ - уровень запаса в момент времени T_i.

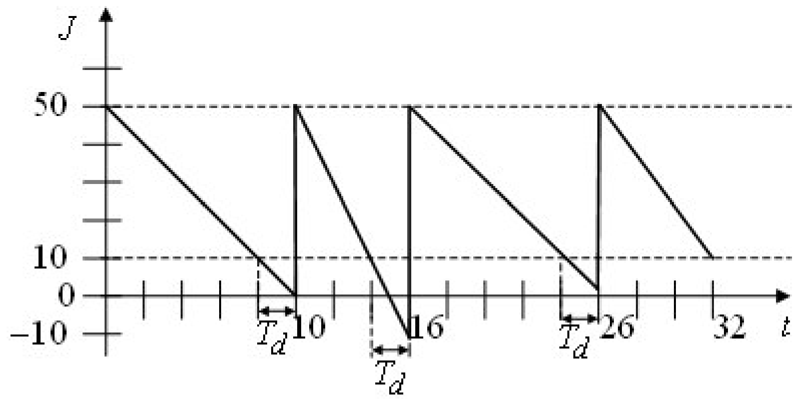


Рис.3.15 – Изменение уровня запаса

Определите объем потребления товара за период, объем партий доставки, уровень обслуживания, рассчитываемый как отношение спроса на товар к величине потребления.

Задача 31

Рассматриваются две стратегии подачи заявок: периодическая и пороговая. В первом случае, заявка на поставку партии определенного объема подается периодически, а во втором – при достижении минимального уровня запаса. Время доставки является случайной величиной. Рассмотрите эти стратегии и дайте ответы на следующие вопросы.

1. Пусть время первого заказа товара равно T_1, а второго - T_2 ($T_1 < T_2$). Возможно ли, что на склад поступил сначала товар, заказанный в момент T_2, а потом уже товар, заказанный в момент T_1?

2. В том случае, если спрос на товар в какой-то момент времени возрастет, использование какой стратегии, по вашему мнению, может привести к появлению дефицита, если время доставки остается прежним?

Задача 32

Два продавца занимаются продажей ёлок. За неделю до Нового года они закупили товар по цене 300 ден.ед., а продают по цене 800 ден.ед. Если ёлки нераспроданы за неделю, то они выбрасываются и продавец теряет сумму, за которую они были приобретены. В том случае, если товар уже закончился, а спрос есть, то считается, что упущенная выгода продавца равна прибыли, которую он мог бы получить, если бы товар у него был в наличии. Изменение уровня запаса товара для продавцов приведено на рис.3.16-3.17.

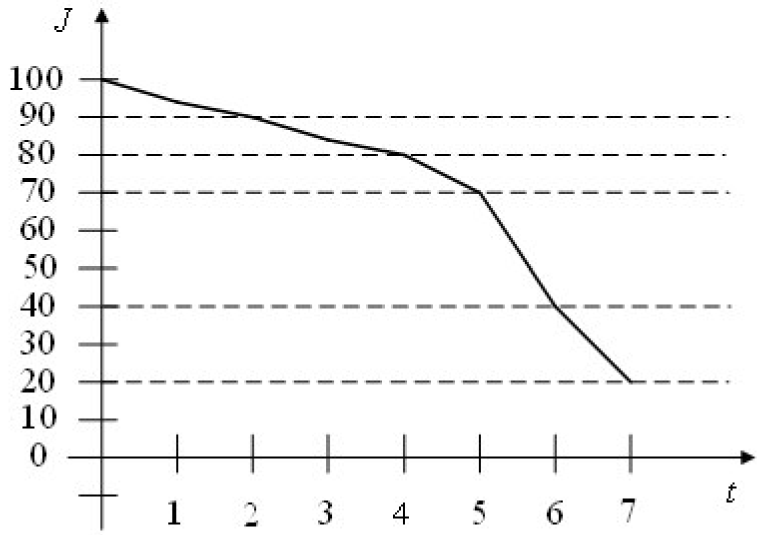


Рис.3.16 - Изменение уровня запаса для первого продавца

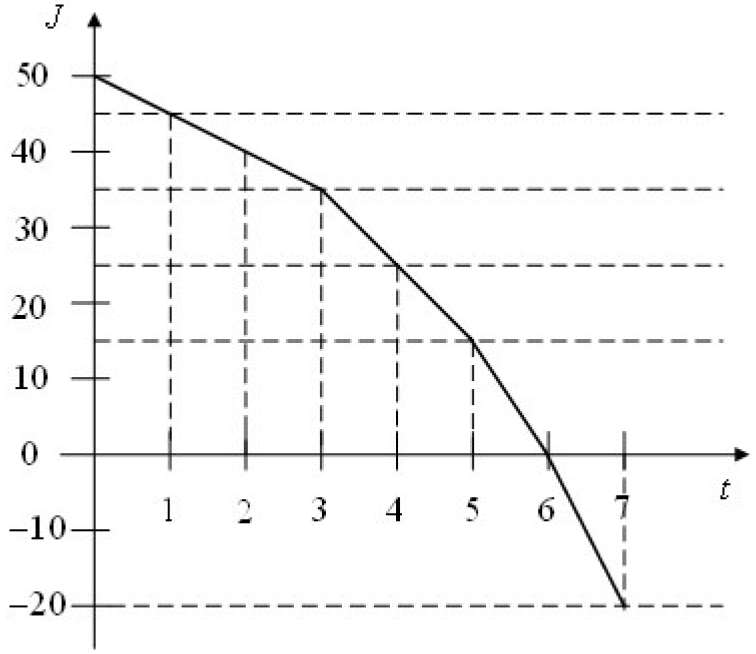


Рис.3.17 - Изменение уровня запаса для второго продавца

Определите, прибыль какого продавца оказалась больше.

Задача 33

Магазин закупил к зиме партию лыж по цене 100 ден.ед. за пару. Стоимость заказа составила 20 ден.ед. А продается магазином одна пара лыж по цене 200 ден.ед. После окончания зимнего сезона магазин их распродает с 10% скидкой. Информация о продажах представлена на рис.3.18.

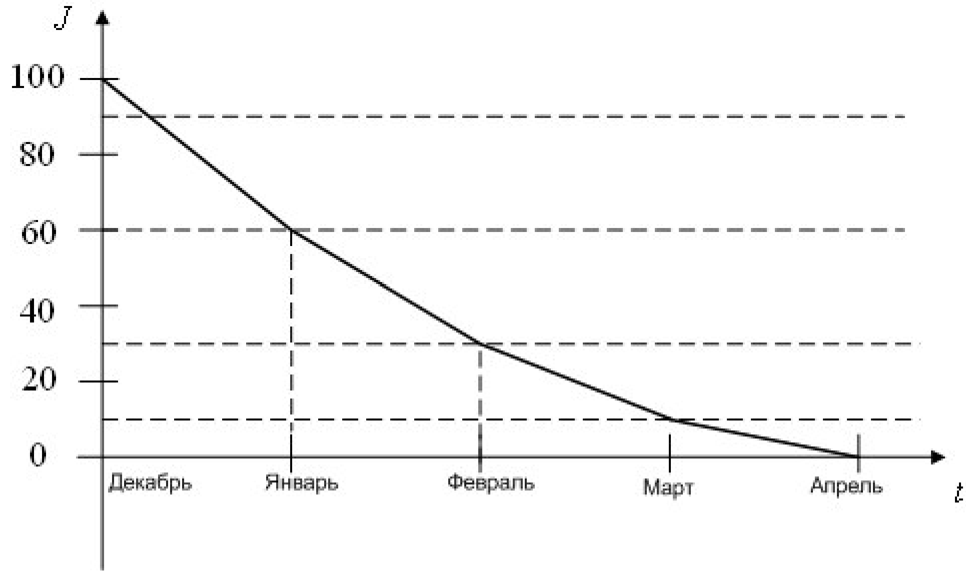


Рис.3.18 – Изменение уровня запаса

Определите затраты на приобретение товара, издержки хранения (стоимость хранения единицы товара равна 7 ден.ед.), прибыль магазина за рассматриваемый период.

3.2 Имитационное моделирование систем управления запасами

Пример

Предприятие осуществляет продажу товара со склада. Начальный уровень запаса равен 53 шт. Заказ на доставку партии объемом 5 шт. осуществляется в том случае, если уровень запаса меньше или равен величине 50 шт. Дефицит товара не учитывается при последующем моделировании. Осуществите имитацию деятельности склада в течение 5 дней, выполнив для этого следующие этапы:

1. проверяется, доставлена ли партия товара на склад, и увеличивается уровень запаса на величину объема партии в случае доставки;
2. моделируется случайная величина спроса;
3. уменьшается уровень запаса на величину спроса, рассчитывается дефицит;
4. проверятся, наступило ли время заказа (меньше ли уровень запаса значения 46 шт.).

В таблице 3.3 приведены данные о ежедневном спросе за 160 дней. В таблице 3.4 даны значения времени доставки, рассчитанные для 100 доставок. Для моделирования случайных величин спроса и времени доставки используются значения из таблицы 3.5, начиная с первой строки (слева направо).

Таблица 3.3 – Информация о спросе

Спрос, шт.	Частота
0	50
1	100
2	10

Таблица 3.4 – Информация о сроке выполнения заказа

Срок выполнения заказа, дней	Частота
1	40
2	60

Таблица 3.5– Значения случайных чисел

0,20	0,34	0,97	0,47	0,78	0,51	0,98	0,17	0,28	0,39
0,55	0,62	0,81	0,76	0,32	0,11	0,88	0,42	0,65	0,77

Решение

По данным о частотах величины спроса, рассчитаем вероятность принятия того или иного значения (частота значения разделить на суммарную частоту, равную 160 шт.). В таблице 3.6 приведены результаты расчета. В последнем столбце даны значения кумулятивной вероятности, которая используется при моделировании величины спроса. Таким образом, алгоритм моделирования спроса может быть представлен следующим образом (рис.3.19). Величина z берется из таблицы 3.5.

Таблица 3.6 – Вероятностные характеристики спроса

Спрос, шт.	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность
0	50	0,31	0,31

1	100	0,63	0,94
2	10	0,06	1

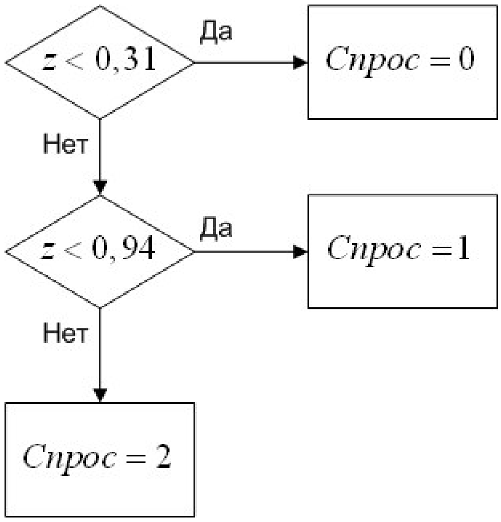


Рис.3.19 – Алгоритм моделирования спроса

Аналогично составляем таблицу (табл.3.7) для определения вероятности времени доставки. Таким образом, если величина z будет меньше 0,4 ,то считается, что время доставки равно 1, в противном случае – 2.

Таблица 3.7 – Вероятностные характеристики спроса

Срок выполнения заказа, дней	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность
1	40	0,4	0,4
2	60	0,6	1

Построим таблицу 3.8, в которой будем отражать результаты имитации.

Запас в начале первого дня равен начальному уровню запаса (53 шт.), в остальные дни он равен уровню запаса на конец предыдущего дня. Кроме того, если в этот день должна произойти доставка товара, то к этой величине прибавляется значение объема партии. Из таблицы видно, что заявка была подана на третий день (т.е. текущий уровень запаса, равный 50 шт. стал равен минимальному возможному значению). Срок доставки при этом составил 2 дня. Поэтому в начале 5-го дня уровень запаса будет равен сумме уровня запаса на конец 4-го дня (49 шт.) и объема партии доставки (5 шт.). Запас в конце дня рассчитывается как разность запаса в начале дня и величины спроса.

В том случае, если спрос превышает уровень запаса на складе, то считается, что в конце дня уровень запаса равен нулю, а дефицит равен разности спроса и уровня запаса. Т.к. дефицит товара не учитывается в дальнейшем, то следующий ненулевой уровень запаса будет равен объему поставки. В рассматриваемой задаче дефицит товара не наблюдался.

Таблица 3.8 – Результаты имитации

День	Запас в начале дня, шт	Случайное число	Спрос, шт.	Запас в конце дня, шт.	Заказ на поставку (да/нет)	Случайное число	Время выполнения, дни	Дефицит, шт.
1	53	0,20	0	53	нет			
2	53	0,34	1	52	нет			
3	52	0,97	2	50	да	0,47	2	
4	50	0,78	1	49	нет			
5	54	0,51	1	53	нет			

Задача 1

Рассматривается система управления запасами. Начальный уровень запаса равен 2 шт. Заказ на доставку партии объемом 4 шт. осуществляется периодически с интервалом времени 3 дня. Дефицит товара не учитывается при последующем моделировании. Осуществите имитацию управления запасами в течение 6 дней, выполнив для этого следующие этапы:

1. проверяется, доставлена ли партия товара на склад, и увеличивается уровень запаса на величину объема партии в случае доставки;
2. моделируется случайная величина спроса;
3. уменьшается уровень запаса на величину спроса, рассчитывается дефицит;
4. проверятся, наступило ли время заказа (прошло ли 3 дня с момента начала моделирования или с момента предыдущего заказа).

В таблице 3.9 приведены данные о ежедневном спросе за 140 дней. В таблице 3.10 даны значения времени доставки, рассчитанные для 100 доставок.

Для моделирования случайных величин спроса и времени доставки используются значения из таблицы 3.5, начиная с первой строки (слева направо).

Таблица 3.9 – Информация о спросе

Спрос, шт.	Частота
0	10
1	80
2	50

Таблица 3.10 – Информация о сроках выполнения заказа

Срок выполнения заказа, дней	Частота
1	90
2	10

Рассчитайте среднее число упущенных продаж по формуле

$$M_{у.п.} = \frac{N_{у.п.}}{N_{д}},$$

где $M_{у.п.}$ - среднее число упущенных продаж;

$N_{у.п.}$ - количество упущенных продаж за период (число дней, когда в системе был дефицит);

$N_{д}$ - число дней имитации.

Задача 2

Магазин занимается продажей некоторого товара. Его количество в начале рассматриваемого периода равно 10 шт. Магазин используется стратегию (k,Q) подачи заявок (k=5, Q=3), согласно которой заказ партии осуществляется, если количество товара в магазине ниже k, а объем партии товара равен Ql. Здесь l - минимальное целое число, при котором объем товара в магазине после пополнения будет равен по крайней мере k. (например данная стратегия при k=8, Q=5 означает, что пополнение запаса происходит, когда его уровень меньше 8, при этом если он равен 3,4,...,7, то l=1, а объем партии равен 5, а если запас равен 0,1,2, то l=2, а объем партии - 10). Дефицит товара не учитывается при последующем моделировании. Осуществите имитацию деятельности магазина в течение 5 дней, выполнив для этого следующие этапы:

1. моделируется случайная величина спроса;

2. уменьшается уровень запаса товара на величину спроса, рассчитывается дефицит;

3. проверяется, доставлена ли партия товара в магазин, и увеличивается уровень запаса товара на величину объема партии в случае доставки;

4. проверятся, наступило ли время заказа.

В таблице 3.11 приведены данные о ежедневном спросе за 260 дней. В таблице 3.12 даны значения времени доставки, рассчитанные для 110 доставок. Для моделирования случайных величин спроса и времени доставки используются значения из таблицы 3.5, начиная с первой строки (слева направо).

Таблица 3.11 – Информация о спросе

Спрос, шт.	Частота
1	50
2	170
3	40

Таблица 3.12 – Информация о поставках

Срок выполнения заказа, дней	Частота
1	60
2	50

Рассчитайте средний конечный запас по формуле

$$M_{з.к.} = \frac{S_{з.к.}}{N_{\partial}},$$

где $M_{з.к.}$ - средний конечный запас;

$S_{з.к.}$ - сумма конечного запаса за рассматриваемый период;

N_{∂} - общее количество дней.

Задача 3

Начальный уровень запаса в на складе равен 500 ед. Спрос является случайной величиной с показательным законом распределения (среднее значение равно 300 ед.). Нарисуйте изменение уровня запаса (в том числе отобразите дефицит в случае его появления), проведя моделирование в течение 6 дней. Пусть доставка товара в размере 400 ед. осуществляется один раз в конце третьего дня. Для моделирования случайных величин спроса используются значения из табл. 3, начиная с первой строки (слева направо).

Задача 4

Фирма занимается продажей товара со склада. Спрос и время доставки являются случайными величинами с нормальным законом распределения (полученные значения необходимо будет округлить). Заявка на доставку партии определенного объема подается при достижении минимального уровня запаса.

Стоимость затрат на хранение товара пропорциональна количеству товара, находящегося на складе в данный день. Стоимость затрат на поставку товара пропорциональна объему партии. Стоимость затрат, вызванных дефицитом товара, пропорциональна количеству покупателей, спрос которых остался неудовлетворенным.

Пусть склад имеет ограниченную вместимость. В том случае, если доставленная партия товара не может быть расположена на складе (т.к. он заполнен), то фирма вынуждена арендовать места для хранения. Стоимость аренды составляет C_4 ден.ед. в день за каждую единицу товара. Оплата производится сразу же после передачи товара в арендуемое помещение. По мере уменьшения товара на складе в результате спроса, товар сразу же перемещается из арендуемых помещений на склад фирмы. Покупка товара может быть осуществлена только с собственных складских помещений.

К входным переменным следует отнести следующие величины:

- средний ежедневный спрос - $M_Д$ и среднее квадратическое отклонение ежедневного спроса - $\sigma_Д$;
- среднее время поставки дополнительной партии товара - M_T и его среднее квадратическое отклонение - σ_T;
- стоимость хранения единицы товара на складе в течение одних суток - C_1;
- стоимость затрат на доставку единицы товара - C_2;
- затраты, связанные с дефицитом каждой единицы товара - C_3;
- начальный уровень запаса товара - $N_{ур}$;
- период работы склада - T_D.
- число случайных реализаций - N_p.
- объем дополнительной партии товара - $Part$;

- вместимость склада - $V_{\max}$;
- стоимость аренды - C_4;
- критический уровень запаса товара, при достижении которого администратор склада должен заказывать новую партию -$UR_{\min}$.

В качестве показателя эффективности моделируемого процесса целесообразно выбрать максимальные гарантированные затраты на содержание склада (с заданным уровнем гарантии), определяемые по формуле

$$C_{gar} = M_C + K_\alpha \cdot \sigma_C,$$

где M_C – средние затраты на содержание склада в течение периода T_D дней;

σ_C - среднее квадратическое отклонение затрат на содержание склада;

K_α - квантиль, зависящий от уровня гарантии α (K_α=1,28 при α =0,9).

Критерием выбора оптимального режима работы склада является минимум максимальных гарантированных затрат.

Напишите алгоритм описанной модели управления запасами.

Решение

Блок 1 на рис. 3.20. обеспечивает обнуление глобальных переменных, к которым относятся:

MS_C - начальное значение суммы случайных величин общих затрат на содержание склада для различных реализаций моделируемого процесса;

SS_C - начальное значение суммы квадратов случайных величин общих затрат.

Кроме того, в этом же блоке устанавливается начальное значение времени поставки дополнительной партии товара, которое выходит за пределы периода работы склада и равняется

$$T_{пост.0} = T_D + 1.$$

Оператор 2 представляет собой заголовок цикла случайных реализаций.

Блок 3 производит обнуление локальных переменных, к которым относятся:

S_{C1} - начальное значение суммарных затрат на хранение товара в течение всего периода работы склада для одной реализации;

S_{C2} - начальное значение суммарных затрат, связанных с нехваткой товара в течение всего периода работы склада для одной реализации;

S_{C3} - начальное значение суммарных затрат на поставку дополнительных партий товара в течение всего периода работы склада для одной реализации;

S_{C4} - начальное значение суммарных затрат на хранение товара в арендуемых помещениях.

T - исходное значение счетчика дней (модельное время);

$Rent$ - число товара, который хранится в арендуемых помещениях,

$Zajav$ - числовой признак отсутствия заявки на поставку дополнительной партии товара (если заявка подана, то $Zajav$ =1).

В этом же блоке планируемое время поставки партии товара приравнивается к его начальному значению, т. е. $T_{пост} = T_{пост.0}$. Наконец, текущий уровень запаса товара приравнивается к его начальному уровню:

$$V = N_{ур}\ .$$

Оператор 4 является началом циклического перебора дней работы склада. Оператор 5 увеличивает модельное время на один шаг (на одни сутки). Условный оператор 6 проверяет условие продолжения работы склада для каждой случайной реализации.

Оператор 7 обращается к процедуре «Norm», формирующей возможное значение нормированной, центрированной случайной величины с нормальным распределением. Оператор 8 определяет возможное значение величины случайного ежедневного спроса при заданном его математическом ожидании $M_Д$ и среднем квадратическом отклонении σ_T. Результат расчета округляется до целого числа.

Условный оператор 9 проверяет условие наступления срока поставки дополнительной партии товара. Если этот срок наступил, то оператор 10 увеличивает текущий запас товара на величину объема партии $Part$. Одновременно здесь же числовой признак отсутствия заявки на поставку партии товара устанавливается на нуль. Кроме того, планируемое время поставки вновь выводится за пределы периода работы склада.

После увеличения уровня запаса при доставке определяется, превысил ли уровень запаса V максимально допустимый $V_{\max}$ (оператор 11). В том случае, если складских помещений недостаточно, то осуществляется расчет нового значения переменной $Rent$ - числа единиц товара, которые хранятся в арендуемых помещениях (оператор 12). Уровень запаса при этом приравнивается к максимально возможному уровню. В блоке 13 наряду с расчетом нового значения уровня запаса (оставшегося после спроса), происходит расчет затрат S_{C4}, связанных с хранением товара в арендуемых помещениях.

Если количество заявок превысит текущий запас товара на складе, то в блоке 13 будет получено отрицательное значение V. В этом случае (проверку осуществляет оператор 14) оператор 19 определяет затраты, связанные с дефицитом товара, и устанавливает значение текущего запаса на нуль.

Оператор 15 осуществляется проверку, нужно ли перемещать товар из арендуемых помещений в собственные. Это условие выполняется тогда, когда уровень запаса на складе меньше вместимости склада и когда имеется товар в арендуемых помещениях. Оператор 16 проверяет, превышает ли количество товара в арендуемых помещениях число свободных мест на складе (считается, что в одном месте может храниться одна единица товара). Если условие выполняется, то количество товара в арендуемых помещениях уменьшается на величину свободных мест на складе (блок 17), а уровень запаса на складе приравнивается к его максимальному значению. В противном случае, уровень запаса на складе увеличивается на величину товара, хранимого в арендуемых помещениях (блок 18). В этом случае, число товара в арендуемых помещениях становится равным нулю.

Оператор 20 определяет затраты на содержание склада в текущие сутки.

Оператор 21 проверяет выполнение одновременно двух условий: превышает ли текущий запас минимально допустимый (критический) уровень и была ли уже оформлена заявка на поставку дополнительной партии товара. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то в алгоритме происходит передача управления на начало цикла, т. е. оператору 4.

Если же одновременно выполняются оба условия, то группа операторов с 22-го по 25-й определяет затраты на поставку дополнительной партии товара.

Оператор 22 увеличивает текущие затраты на величину стоимости партии товара. Оператор 23 обращается к процедуре формирования возможного значения нормированной, центрированной случайной величины с нормальным распределением. Оператор 24 определяет возможное значение случайной величины времени выполнения заявки на поставку партии товара с учетом заданных параметров: среднего времени поставки и среднего квадратического отклонения времени поставки. При этом результат расчета округляется до целого числа. Оператор 25 устанавливает на единицу числовой признак подачи заявки.

Блок 26 служит для расчета суммарных характеристик затрат на содержание склада по формулам:

$$S_C = S_{C1} + S_{C2} + S_{C3} + S_{C4};$$

$$MS_C = MS_C + S_C;$$

$$SS_C = SS_C + S_C \cdot S_C.$$

Блок 27 служит для определения показателя эффективности по формулам:

$$M_C = MS_C / N_p;$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1}(SS_C - N_p \cdot M_C^2)};$$

$$Gar = M_C + 1,28 \cdot \sigma_C.$$

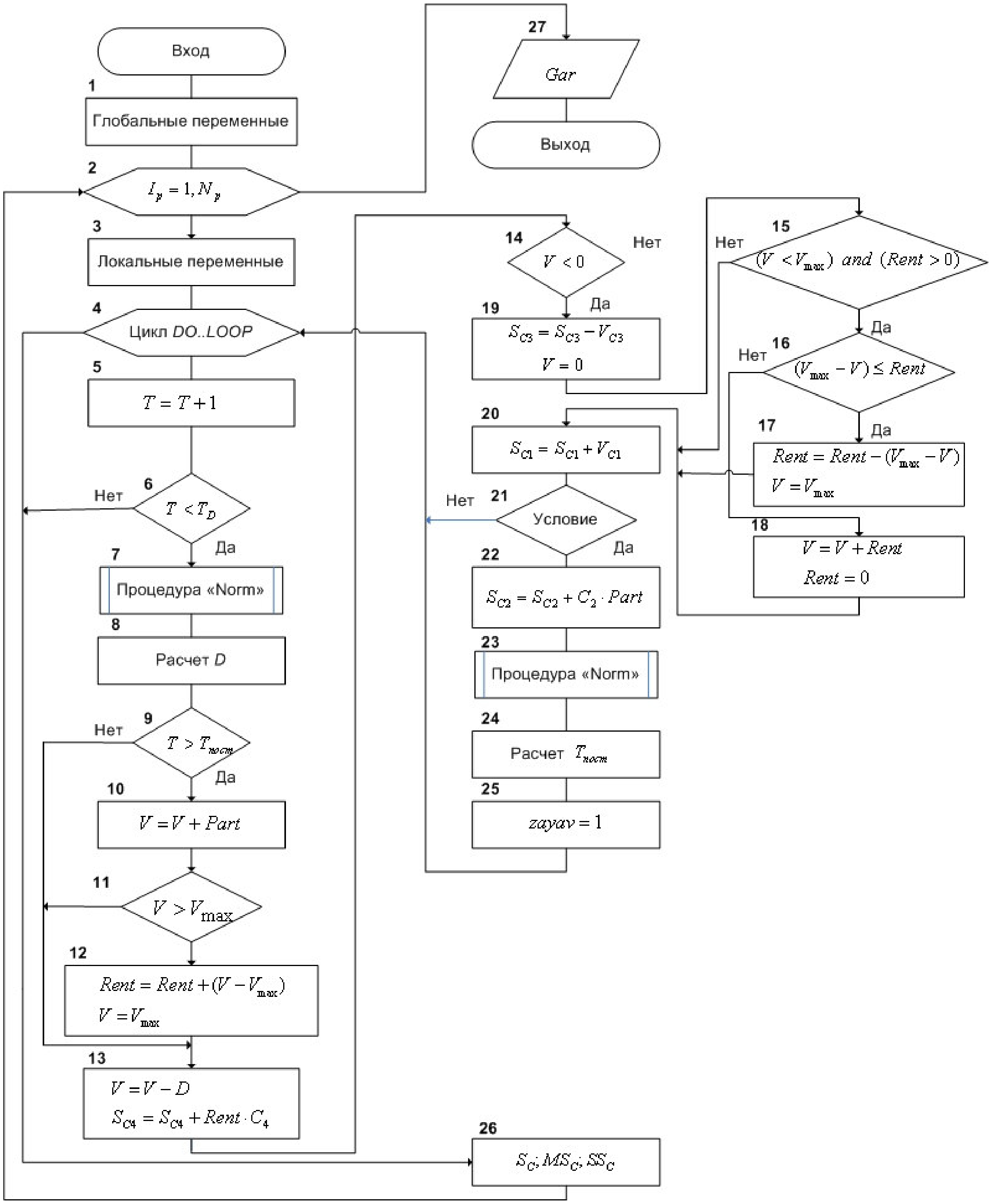


Рис.3.20 – Алгоритм модели управления запасами с ограниченным объем склада

Задача 4.1

Измените алгоритм, полагая, что неудовлетворенный спрос на товар откладывается и удовлетворяется при следующей поставке товара.

Задача 4.2

Модифицируйте алгоритм (программу), считая, что с вероятностью P заказанный товар может быть поврежден или утерян в дороге. Величина утерянного товара составляет A% от всего объема заказанной партии.

Задача 4.3

Пусть уровень обслуживания влияет на среднюю величину спроса. Это означает, что при возникновении дефицита товара на складе средняя величина спроса уменьшается на некоторую величину d до тех пор, пока не станет равным $M_{D.Min}$. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 4.4

Пусть уровень обслуживания влияет на среднюю величину спроса. Это означает, что при возникновении дефицита товара нас складе средняя величина спроса увеличивается на некоторую величину d до тех пор, пока не станет равным $M_{D.Max}$. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 4.5

Пусть издержки одного заказа включают затраты, зависящие от объема партии и постоянные затраты, которые от объема партии не зависят. Издержки хранения содержат затраты на хранение единицы товара на складе и постоянные затраты за весь период моделирования. Напишите изменения в алгоритме.

Задача 4.6

Считая, что стоимость хранения единицы товара на складе зависит от уровня запаса, напишите изменения в алгоритме (программе). Значения затрат приведены на рисунке 3.21 (в том случае, если уровень запаса больше или равен 100 шт., цена хранения единицы товара составляет 2,5 ден.ед.).

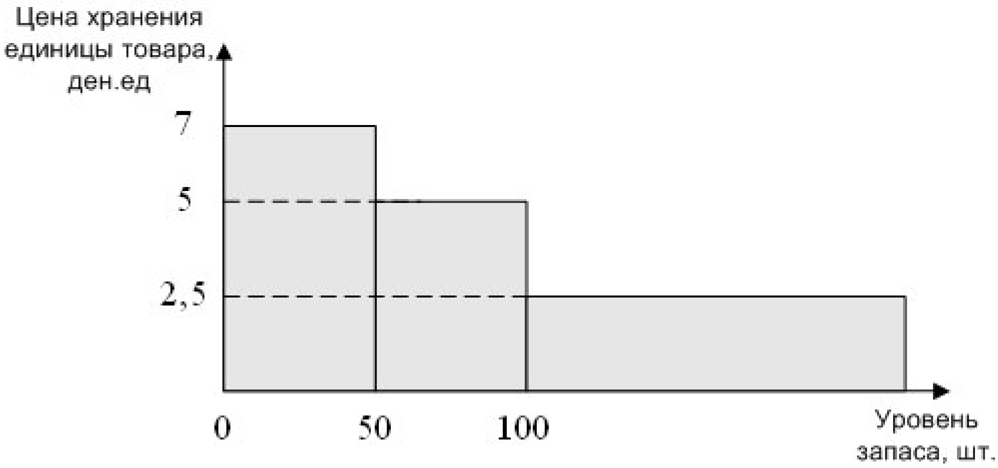


Рис.3.21 – Зависимость цены хранения единицы товара от уровня запаса на складе

Задача 4.7

Напишите изменения в алгоритме, приняв в качестве показателя эффективности модели среднюю прибыль, рассчитываемую как разность выручки и расходов. Цена единицы товара равна L.

Задача 4.8

Измените алгоритм, если необходимо рассчитать среднюю прибыль. Цена товаров на складе различна для покупателей. С вероятностью P_1 клиент может купить товар по цене L_1, с вероятностью P_2 - по цене L_2, с вероятностью P_3 - по цене L_3.

Задача 4.9

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности модели – вероятность дефицита (отношение величины дефицита к общему спросу за период).

Задача 4.10

Модифицируйте алгоритм, считая, что показатель эффективности модели – уровень обслуживания (отношение величины потребления к спросу за период).

Задача 4.11

Измените алгоритм, считая, что объем заказываемой партии товара равен спросу за предыдущий период (период между подачей последней заявки и данным моментом).

Задача 4.12

Пусть объем заказываемой партии рассчитывается по формуле

$$Part = J_{\max} - J(T_i) + M_T \cdot M_D,$$

где $Part$ - объем заказываемой партии;

$J_{\max}$ - максимальный уровень запаса на складе;

$J(T_i)$ - уровень запаса в момент заказа

M_T - среднее время поставки товара на склад;

M_D - средний ежедневный спрос.

Напишите, как изменится алгоритм при расчете данным способом.

Задача 4.13

Модифицируйте алгоритм, считая, что объем заказываемой партии товара, рассчитывается по формуле

$$Part^* = Part + Def\ ,$$

где $Part^*$ - объем заказываемой партии товара;

$Part$ - объем заказываемой партии товара в предыдущем периоде;

Def -величина дефицита товара за период между заказами.

Задача 4.14

Модифицируйте алгоритм, считая, что доставка товара на склад осуществляется с помощью машин, каждая из которых может вмещать d единиц товара. Стоимость доставки одной машиной равна C_m.

Задача 4.15

Пусть товар на складе за день может с вероятностью P испортиться. Число испорченного товара составляет A% от всего хранимого на складе товара. Как в этом случае изменится алгоритм?

Задача 4.16

Считая, что показатель эффективности модели – соблюдение срока поставки (число поставок, время которых меньше числа T_p), внесите соответствующие изменения в алгоритм.

Задача 4.17

Внесите изменения в алгоритм, считая, что оплата поставщикам производится по следующей схеме: 50% стоимости доставки при заказе и 50% - при доставке.

Задача 4.18

Напишите изменения в алгоритме (программе), если на складе действуют следующие правила. В том случае, если текущий уровень меньше значения $UR_{\min}$, то подается заявка на доставку (стоимость доставки единицы товара равна C_2, а среднее время доставки - M_T). Кроме того, если текущий уровень запаса меньше $UR^*_{\min}$ ($UR^*_{\min} < UR_{\min}$), то оформляется срочный заказ. В случае оформления срочного заказа стоимость доставки единицы товара будет равна C^*_2 ($C^*_2 > C_2$), а среднее время доставки - M^*_T ($M^*_T < M_T$).

Задача 4.19

Модифицируйте алгоритм, считая, что объем доставляемой партии – случайная величина с нормальным законом распределения. Стоимость доставки единицы товара зависит от объема партии и равна C_{21}, если объем партии меньше $Part_1$, и C_{22} - противном случае.

Задача 4.20

Как изменится алгоритм модели, если заявка на поставку будет осуществляться в начале рабочего дня, а доставка товара на склад – в конце?

Задача 4.21

Измените алгоритм (программу), считая, что через интервал времени T_{infl} происходит увеличение в результате инфляции всех стоимостных характеристик модели (стоимость доставки единицы товара, стоимость хранения единицы товара, штраф за дефицит единицы товара) на i %.

Задача 4.22

Пусть цена на товар, устанавливаемая ежедневно, является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале (a, b). Средняя величина спроса зависит от цены, и равна $M1_D$, если цена меньше $\frac{a+b}{2}$, и $M2_D$ - в противном случае. Модифицируйте алгоритм для нахождения средней прибыли с учетом приведенных выше условий.

Задача 4.23

Измените алгоритм, считая, что доставка товара на склад осуществляется в течение периода T_{dost} с интенсивностью, равной $Part$ шт.в день.

Задача 4.24

Пусть цена товара равна A ден.ед. Каждый покупатель с вероятностью P может оказаться постоянным, и следовательно, ему предоставляется скидка, равная S %. Напишите, как изменится алгоритм в этом случае. Показатель эффективности модели – средняя прибыль склада.

Задача 4.25

Полагая, что цена единицы товара равна A ден.ед., измените существующий алгоритм. Показатель эффективности - минимальная гарантированная прибыль с уровнем гарантии K_α =1,28.

Задача 4.26

Рассматривается производственная фирма, которая закупает сырье у поставщиков, сразу же его перерабатывает и отправляет на склад. В результате переработки из n шт. сырья получается $n \cdot m$ шт. готовой продукции. Напишите изменения, которые нужно внести в алгоритм.

Задача 4.27

Имеются следующие статистические данные о времени поставки товара на склад (табл.3.13).

Таблица 3.13 – Статистические данные времени поставки

Время доставки, дней.	Частота
1	50
2	70
3	100

Измените алгоритм в соответствие с полученным законом распределения времени доставки.

Задача 4.28

Измените алгоритм, считая, что заявка подается только в том случае, если спрос за предыдущий период (период между предыдущей заявкой и данным периодом) больше нуля.

Задача 4.29

Пусть начальный уровень запаса товара равен 20 шт., а доставка партий осуществляется ежедневно (для этого в качестве минимального уровеня запаса нужно выбрать большое число). Объем доставляемых партий возрастает (рис.3.21).

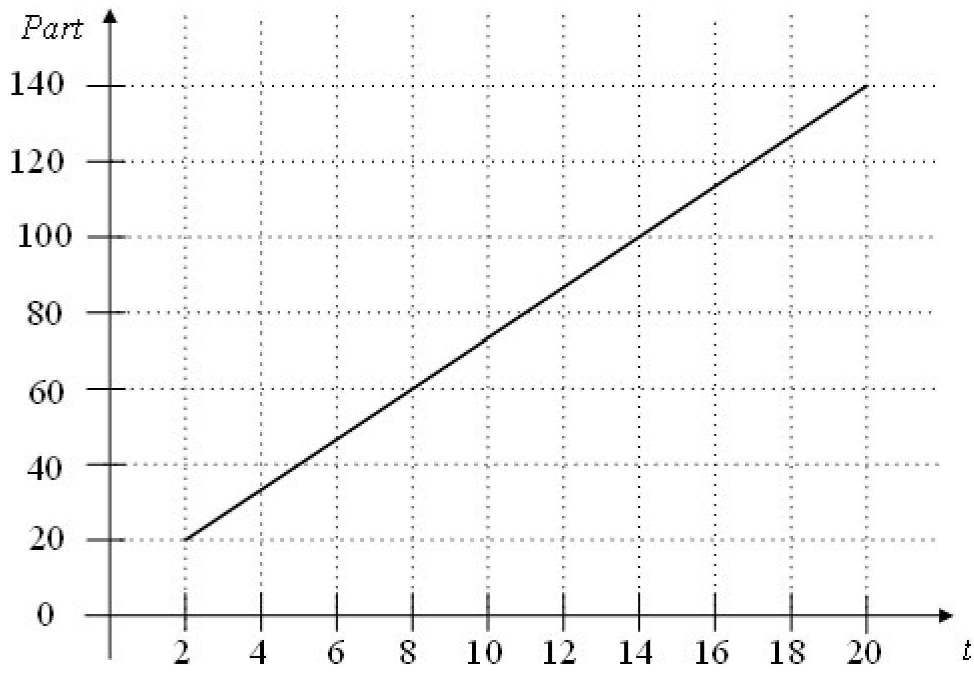


Рис.3.21 – Увеличение во времени объема партии

Пусть изменение среднего спроса за период происходит согласно графику на рис. 3.22(среднее квадратическое отклонение спроса неизменно и равно 2 шт.)

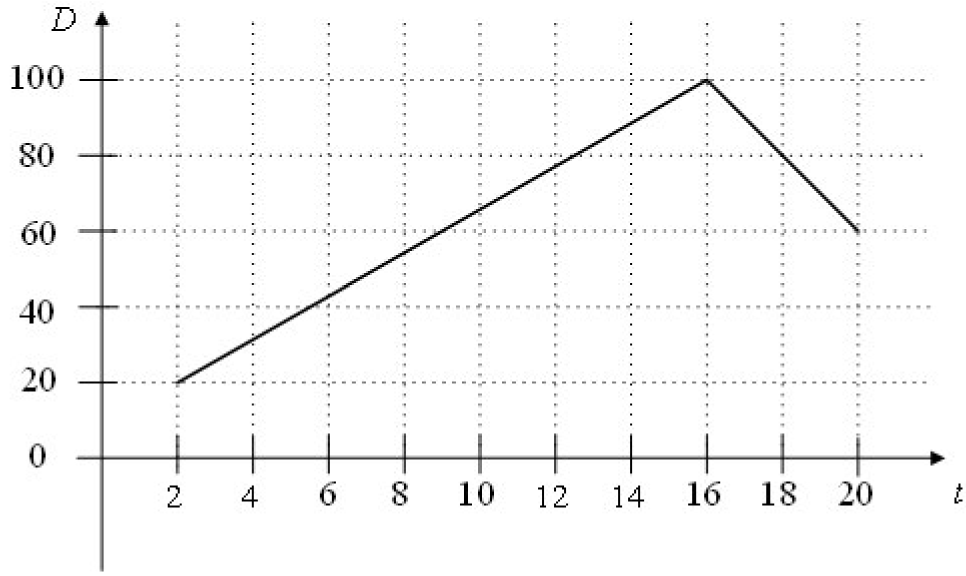


Рис.3.22 – Изменение спроса во времени

Измените алгоритм, чтобы поведение спроса и объема партии соответствовало описанным выше условиям.

Задача 5

Согласно описанной в задачи 4 модели управления запасами моделирование происходит с шагом $\triangle T$, на каждом из которых осуществляется моделирование различных событий. Модифицируйте алгоритм таким образом, чтобы продвижение модельного времени осуществлялось событийным способом (приложение 4).

Пусть в системе существуют следующие события: доставка товара, покупка товара (моделирование спроса), расчет затрат на хранение (пусть доставка происходит мгновенно и поэтому время заявки совпадает с доставкой) (табл. 3.14). Здесь предположим, что склад имеет неограниченную вместимость. Каждое событие характеризуется временем наступления t_{ci} (i =1 для события доставки, i =2 – покупки, i =3 - хранения), которое устанавливается через интервалы int_1, int_2, int_3. Например, первое время наступления события 1 равно $t_{c1} = int_1$. Далее оно будет наступать через промежутки

$$t_{c1} = t_{c1} + int_1$$

События вызываются основной программой в порядке их наступления, который определяется временем.

Таблица 3.14 – События системы

Номер события	Название события	Действия
1	Доставка товара	1. проверка наступления доставки (меньше ли уровень запаса некоторого значения $UR_{\min}$); 2. в том случае, если проверка показала, что наступило время доставки, то • увеличение уровня запаса V на величину объема партии $Part$;
2	Покупка товара	1. уменьшение уровня запаса на величину спроса D, которая является случайной со средним значением M_D и средним квадратическим отклонением σ_D;
3	Расчет затрат на хранение	1. расчет затрат на хранение исходя из значения уровня запаса V на складе и стоимости хранения единицы товара C_1.

Решение

Схема вызова событий показана на рис. 3.23. Показатель эффективности – средние затраты на хранение товара.

Система имеет следующие входные данные, которые не были приведены при описании предыдущей модели.

int_1, int_2, int_3 - интервалы между наступлениями событий 1,2,3 соответственно.

$t_c(1)$, $t_c(2)$, $t_c(3)$ - время наступления следующих событий 1,2,3 соответственно.

На рис. приведена основная программа. В операторе 1 происходит обнуление и установка начальных значений глобальных переменных: обнуляется суммарное значение затрат на хранение S_{c1}, устанавливаются значения начального уровня запаса $V = N_{yp}$, продолжительности периода моделирования T_D, стоимости хранения единицы товара C_1, числа случайных реализаций N_p, величины объема партии $Part$, среднее значение спроса M_D, среднее квадратическое отклонение спроса σ_D, величины интервалов между наступлениями событий int_1, int_2, int_3.

Оператор 2 является началом цикла случайных реализаций.

Оператор 3 производит обнуление и установка значений локальных переменных. В этом операторе, происходит установка значений времен наступления событий $t_c(1)$, $t_c(2)$, $t_c(3)$.

Оператор 4 является началом цикла, окончание которого происходит при завершении времени моделирования. Проверка этого условия происходит при помощи оператора 7.

Оператор 5 осуществляет перебор существующих событий. Оператор 6 осуществляется поиск минимального значения из $t_c(1)$, $t_c(2)$, $t_c(3)$ (т.е. поиск события, которое наступит раньше всех). Оператор 8 вызывает процедуру моделирования события, которое произойдет раньше всех. Оператор 9 рассчитывает показатель эффективности – средние затраты на хранение.

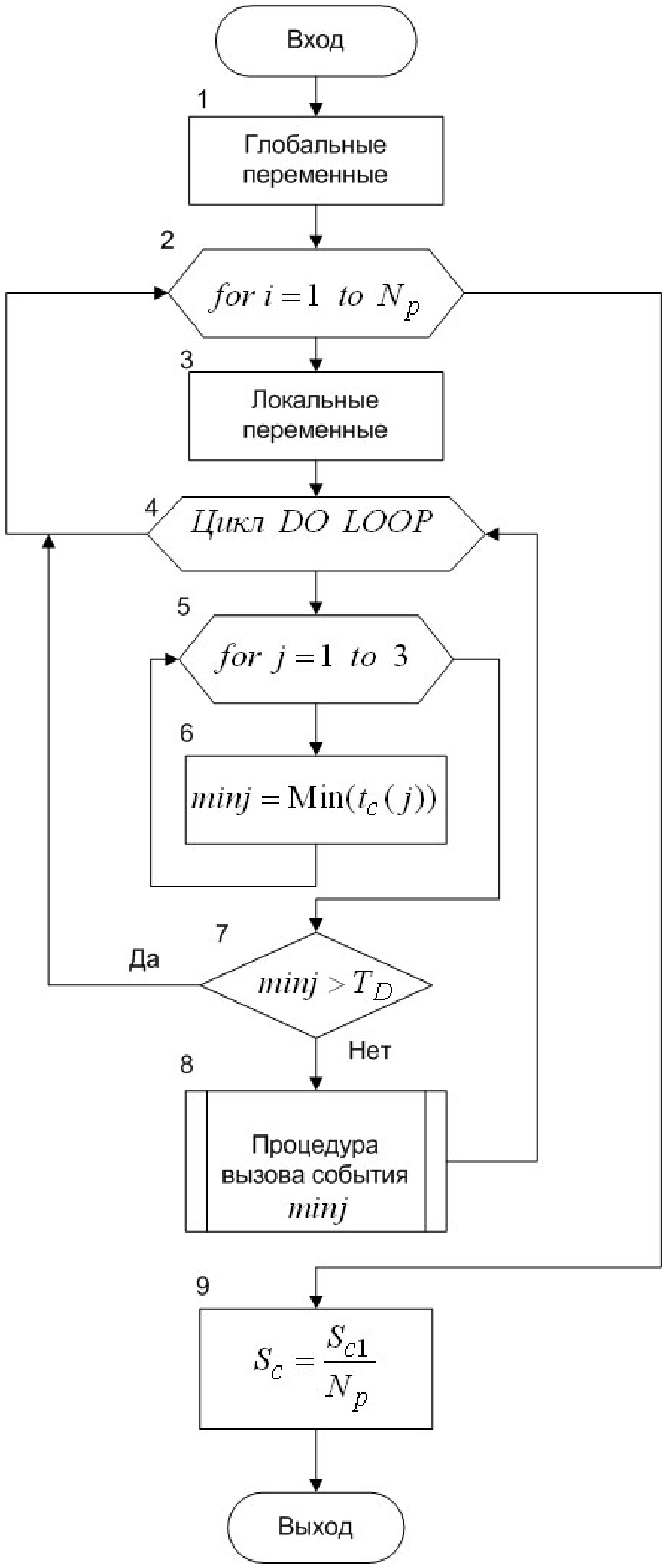


Рис.3.23 - Основная программа

Рассмотрим теперь процедуры моделирования каждого из событий.

На рис.3.24 представлен алгоритм моделирования первого события. Оператор 1 проверяет условие доставки: меньше ли текущее значение запаса минимально допустимого. Если да, то с помощью оператора 2 происходит мгновенная доставка товара: увеличение уровня запаса на складе на величину заказываемого объема партии $Part$. Оператор 3 определяет время следующего наступления данного события.

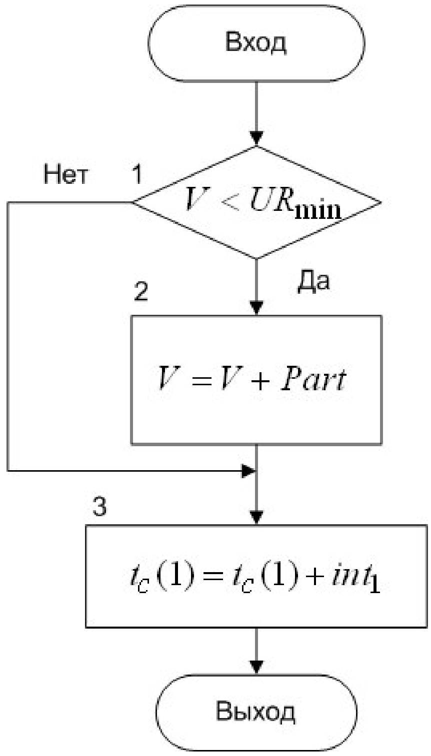


Рис. 3.24 - Алгоритм процедуры моделирования первого события – «Доставка товара»

На рис.3.25 показана процедура моделирования второго события. Оператор 1 производит моделирование случайной величины спроса, распределенной по нормальному закону со средним значением M_D и средним квадратическим отклонением σ_D. Оператор 2 уменьшает уровень запаса на складе на величину спроса. Оператор 3 проверяет, не принял ли запас на складе отрицательное значение (отрицательное значение спроса означает дефицит товара). Если запас отрицателен, то его уровень приравнивается к нулю (оператор 4). Оператор 5 определяет время следующего наступления данного события.

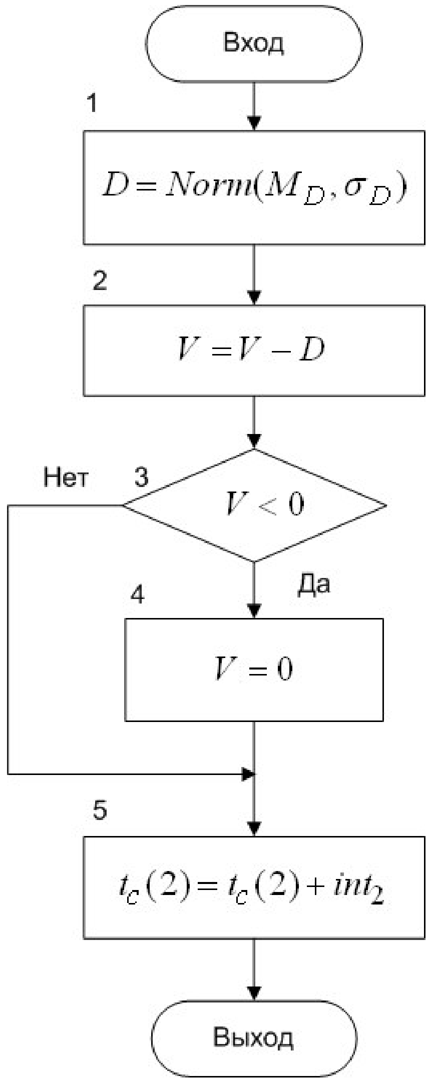


Рис.3.25 - Алгоритм процедуры моделирования второго события – «Покупка товара»

Наконец, на рис.3.26 представлен алгоритм процедуры моделирования третьего события. Оператор 1 производит расчет затрат на хранение. Эти значения суммируются. Оператор 2 определяет время следующего наступления данного события.

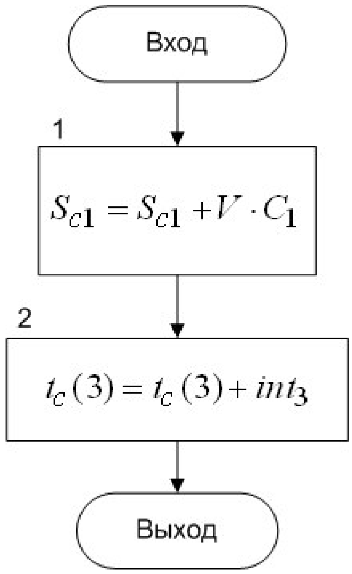


Рис.3.26 - Алгоритм процедуры моделирования второго события – «Расчет затрат на хранение»

Задача 5.1

Модифицируйте алгоритм событийной модели таким образом, чтобы показателем эффективности модели были средняя общая прибыль, равная разности выручки и издержек хранения и заказа.

Задача 5.2

Внесите изменения в алгоритм для расчета числа дней, когда спрос был больше некоторого числа D_p.

Задача 5.3

Напишите изменения в программе, считая, что средняя величина спроса увеличивается ежедневно (фирма становится более известной и в нее обращается больше покупателей) на величину, имеющую дискретный закон распределения (табл.3.15).

Таблица 3.15 – Закон распределения величины увеличения спроса

Увеличение спроса	0	1	2	3
Вероятность	0,3	0,3	0,2	0,2

Задача 5.4

Пусть спрос является детерминированным и его значение равно D. Каждый день с вероятностью P_1 он может возрасти, а с вероятностью P_2 уменьшится на величину A. В противном случае, величина спроса остается без изменения. Напишите, какие изменения необходимо внести в алгоритм (программу) в этом случае.

Задача 5.5

Пусть объем доставляемой партии – случайная величина с нормальным законом распределения. Измените алгоритм (программу), приняв в качестве показателя эффективности выполнение объемов поставки. Т.е. необходимо определить количество поставок, объем которых не меньше некоторого значения $Part_p$.

Задача 5.6

Пусть моделирование осуществляется в течение T=7 дней. Средняя величина спроса на товар с первого по пятый день составляет $M1_D$, а в остальные - $M2_D$ ($M2_D > M1_D$). Напишите, какие в этом случае необходимо внести изменения в алгоритм (программу) модели.

Задача 5.7

Модифицируйте алгоритм, считая, что в день доставки товара на склад обслуживание покупателей не происходит и спрос отсутствует.

Задача 5.8

Предположим, что рассматривается производственная фирма, которая закупает сырье у поставщиков, сразу же его перерабатывает и отправляет на склад. В результате переработки из n шт. сырья получается $\frac{n}{m}$ шт. готовой продукции. Считая, что n делится на m без остатка, напишите изменения, которые нужно внести в алгоритм.

Задача 5.9

Необходимо рассчитать среднее количество поставок товара за период. Какие изменения необходимо для этого внести в алгоритм?

Задача 5.10

Необходимо рассчитать среднее количество дней, когда на складе отсутствовал дефицит. Какие изменения необходимо для этого внести в алгоритм?

Задача 5.11

Изменение спроса во времени представлено на рис.3.27 (t - период, D - спрос). Период моделирования равен 18 дням. Измените алгоритм (программу), чтобы изменение спроса происходило таким образом.

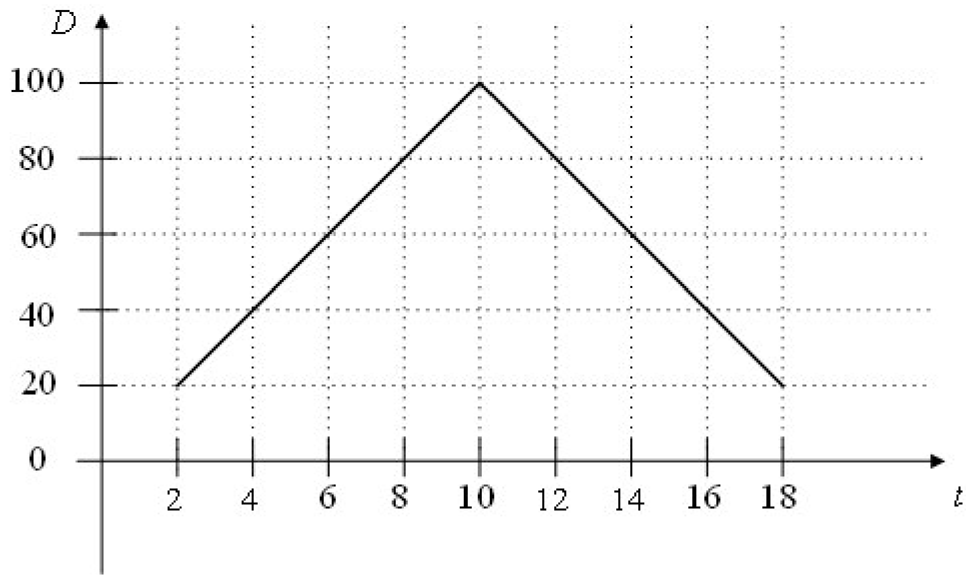


Рис.3.27 – Изменение спроса во времени

Примечание

Для выполнения задания необходимо сначала найти уравнения прямых, описывающих поведение спроса. Поскольку прямая задается уравнением $y = ax + b$, то уравнение для первой прямой будет иметь вид

$$D = 10 \cdot t,$$

а для второй -

$$D = -10 \cdot t + 200.$$

Таким образом, в зависимости от периода спрос будет рассчитываться по одной из приведенных формул.

Глава 4. Сетевые графики

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется *сетевым графиком.*

Главными элементами сетевой модели являются *события* и *работы.*

Термин *работа* используется в сетевом планировании и управлении (СПУ) в широком смысле. Во-первых, это *действительная работа* — протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Во-вторых, это *ожидание* — протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.). В-третьих, это *зависимость,* или *фиктивная работа* — логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени.

Событие — это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. События изображаются на графе кружками, а работы – стрелками, показывающими связь между работами.

Путь представляет собой последовательность взаимосвязанных работ, ведущую из начального узла к конечному. Работы, принадлежащие наиболее длинному пути, являются работами критического пути проекта, а сам этот путь называется критическим путем.

Прежде чем приступить к расчету характеристик сетевого графика, его необходимо упорядочить. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием. Другими словами, в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо: от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами. Небольшой проект после упорядочения сетевого графика рекомендуется дополнить линейной диаграммой проекта. При построении линейной диаграммы каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы.

Рассмотрим параметры событий.

Ранний срок $t_p(i)$ свершения i-го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni})$$

где L_{ni} — любой путь, предшествующий i - му событию, т.е. путь от исходного до i -го события сети.

Если событие j имеет несколько предшествующих путей, а следовательно, несколько предшествующих событий i, то ранний срок свершения события j удобно находить по формуле

$$t_p(j) = \max_{i,j}[t_p(i) + t(i,j)].$$

где $t(i,j)$ - время работы (i,j).

Поздний (или предельный) срок $t_n(i)$ свершения i-го события равен

$$t_n(i) = t_{kp} - \max_{L_{ci}} t(L_{ci}),$$

где L_{ci} — любой путь, следующий за i - м событием, т.е. путь от i - го до завершающего события сети.

Если событие i имеет несколько последующих путей, а следовательно, несколько последующих событий j, то поздний срок свершения события i можно найти по формуле

$$t_n(i) = \min_{i,j}[t_n(j) - t(i,j)]$$

Резерв времени $R(i)$ i- го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Рассмотрим теперь параметры работ.

Ранний срок $t_{рн}(i,j)$ начала работы (i,j) совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события i, т.е.

$$t_{рн}(i,j) = t_p(i).$$

Ранний срок $t_{ро}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется по формуле

$$t_{po}(i,j)=t_p(i)+t(i,j).$$

Поздний срок $t_{no}(i,j)$ окончания работы (i,j) определяется соотношением

$$t_{no}(i,j)=t_n(j),$$

а поздний срок $t_{nн}(i,j)$ начала этой работы — соотношением

$$t_{nн}(i,j)=t_n(j)-t(i,j).$$

Резерв времени пути $R(L)$ определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути

$$R(L)=t_{kp}-t(L).$$

Среди резервов времени работ выделяют четыре разновидности.

Полный резерв $R_n(i,j)$ работы (i,j) показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв определяется по формуле

$$R_n(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i,j).$$

Частный резерв времени первого вида R_1 работы (i,j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. Частный резерв первого вида находится по формулам

$$R_1(i,j)=t_n(j)-t_n(i)-t(i,j),$$

$$R_1(i,j)=R_n(i,j)-R(i).$$

Частный резерв времени второго вида, или *свободный резерв времени* R_c представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Свободный резерв находится по формулам

$$R_c(i,j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i,j),$$

$$R_c(i,j)=R_n(i,j)-R(j).$$

Независимый резерв времени $R_н$ — часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки

$$R_н(i,j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i,j),$$

$$R_н(i,j) = R_n(i,j) - R(i) - R(j).$$

Коэффициентом напряженности $K_н$ *работы* (i,j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим — критический путь:

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{kp}}{t_{kp} - t'_{kp}},$$

где $t(L_{\max})$ — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j);

t_{kp} — продолжительность (длина) критического пути;

t'_{kp} — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Эту формулу можно привести к виду

$$K_н(i,j) = 1 - \frac{R_n(i,j)}{t_{kp} - t'_{kp}},$$

где $R_n(i,j)$ — полный резерв времени работы (i,j).

Рассмотрим теперь случай, когда продолжительность работы $t(i,j)$ является случайной величиной.

Чтобы осуществить вероятностный подход определяют три временные оценки:

а) *оптимистическую оценку* $t_{опт}(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при самых благоприятных условиях;

б) *пессимистическую оценку* $t_{пес}(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при самых неблагоприятных условиях;

в) *наиболее вероятную оценку* $t_{нв}(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при нормальных условиях.

Среднее значение $\overline{t}(i,j)$ работы и ее дисперсия $\sigma^2(i,j)$ рассчитываются по формулам:

$$\bar{t}(i,j)=\frac{t_{опт}(i,j)+4t_{нв}(i,j)+t_{пес}(i,j)}{6};$$

$$\sigma^2(i,j)=\left[\frac{t_{пес}(i,j)-t_{опт}(i,j)}{6}\right]^2.$$

Также используется упрощенная (и менее точная) оценка средней продолжительности работы (i,j):

$$\bar{t}(i,j)=\frac{2t_{опт}(i,j)+3t_{пес}(i,j)}{5}$$

Среднее значение $\bar{t}(L)$ продолжительности пути и дисперсия $\sigma^2(L)$ рассчитываются по формулам:

$$\bar{t}(L)=\sum_{i,j}\bar{t}(i,j);$$

$$\sigma^2(L)=\sum_{i,j}\sigma^2(i,j).$$

Полагая t_{kp} случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения, получим

$$P(t_{kp}\le T)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T-\bar{t}_{kp}}{\sigma_{kp}}\right),$$

где $\Phi(z)$ — значение интеграла вероятностей Лапласа, где $z=\dfrac{T-\bar{t}_{kp}}{\sigma_{kp}}$ (в Приложении 2 приводится таблица значений этой функции);

σ_{kp} – среднее квадратическое отклонение длины критического пути:

$$\sigma_{kp}=\sqrt{\sigma_{kp}^2}.$$

Пример

Для проведения маркетинговых исследований необходимо выполнить определенные работы. В таблице 4.1 представлены характеристики этих работ. Постройте сетевой граф. Определите критический путь и ранние сроки свершения событий.

Таблица 4.1 – Характеристики работ

Работа	Предшествующая работа	Длительность работы, дни
A	-	3
B	-	4
C	A	3
D	A	4
E	B	5
F	C	2
G	C	3
H	G,D	2
I	H,E	1
J	F,I	1

Решение

Полученный граф представлен на рис.4.1 (на верхнем приведены обозначения работ, а на нижнем – их продолжительность)

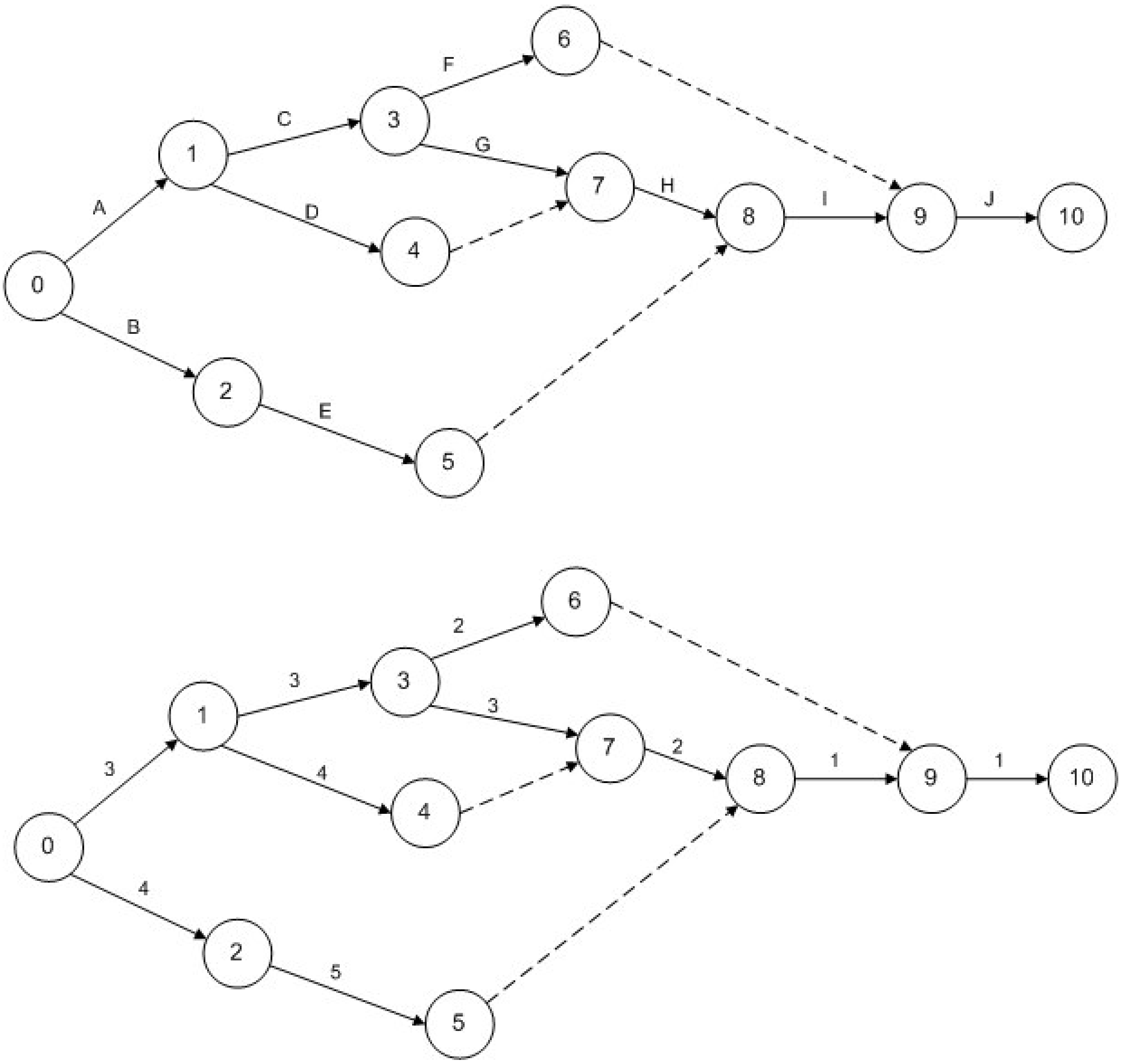


Рис.4.1 – Сетевой граф

Граф имеет четыре пути.

L_1 $0 \to 1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10$

L_2 $0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10$

L_3 $0 \to 1 \to 4 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10$

L_4 $0 \to 2 \to 5 \to 8 \to 9 \to 10$

Продолжительность первого пути равна 3+3+2+1=9, второго – 3+3+3+2+1+1=13, третьего – 3+4+2+1+1=11, четвертого – 4+5+1+1=11. Следовательно, критическим является второй путь, продолжительность которого равна 13 дней.

Найдем теперь ранние и поздние сроки свершения событий.

Для определения ранних сроков свершения событий будем двигаться по сетевому графику слева направо.

Для i=0 (нулевого события) t_p(0)=0.

Для i=1 (первого события) t_p(1)=t_p(0)+t(0,1)=3 дня, т.к. для события 1 есть только один предшествующий путь.

Для i=2 t_p(2)=t_p(0)+t(0,2)=4 дня, т.к. для события 2 есть только один предшествующий путь.

Для i=3 t_p(3)=t_p(1)+t(1,3)=3+3=6 дн., т.к. для события 3 есть только один предшествующий путь.

Для i=4 t_p(4)=t_p(1)+t(1,4)=3+4=7 дн., т.к. для события 4 есть только один предшествующий путь.

Для i=5 t_p(5)=t_p(2)+t(2,5)=4+5=9 дн., т.к. для события 5 есть только один предшествующий путь.

Для i=6 t_p(6)=t_p(3)+t(3,6)=6+2=8 дн., т.к. для события 6 есть только один предшествующий путь.

Для i=7 t_p(7)=max{t_p(3)+t(3,7); t_p(4)+t(4,7)}=max{6+3;7+0}=9 дн., т.к. для события 7 есть два предшествующих пути.

Для i=8 t_p(8)=max{t_p(7)+t(7,8); t_p(5)+t(5,8)}=max{9+2;9+0}=11 дн., т.к. для события 8 есть два предшествующих пути.

Для i=9 t_p(9)=max{t_p(8)+t(8,9); t_p(6)+t(6,9)}=max{11+1;8+0}=12 дн., т.к. для события 9 есть два предшествующих пути.

Для i=10 t_p(10)=t_p(9)+t(9,10)=12+1=13 дн., т.к. для события 10 есть только один предшествующий путь.

Задача 1

При составлении проекта было выделено 16 событий. Построенный сетевой график представлен на рис. 4.2. Выполните упорядочивание сетевого графика путем разбиения его на несколько вертикальных слоев.

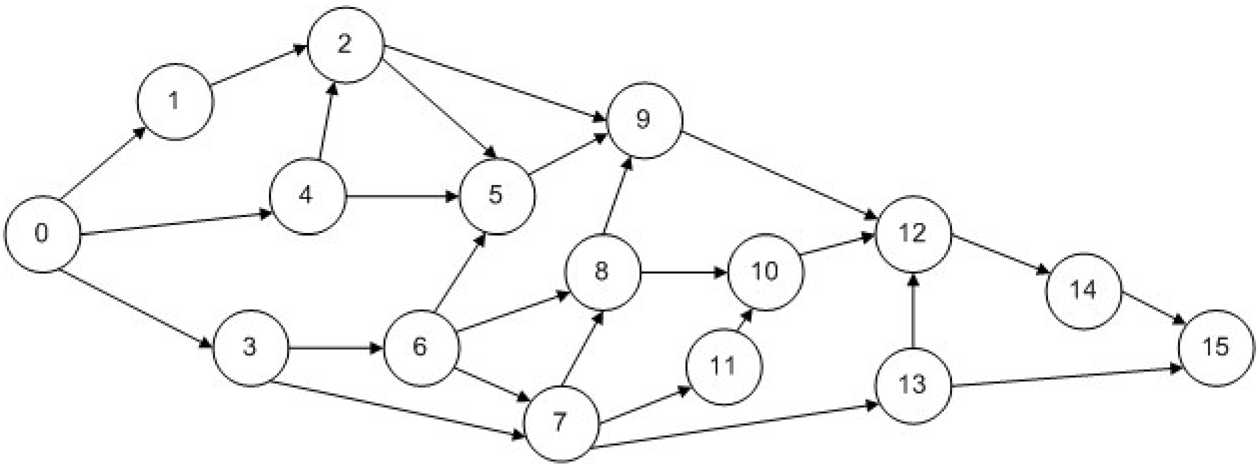


Рис. 4.2 – Сетевой график

Задача 2

В таблице 4.2 приведены этапы поиска работы. Постройте сетевой график. Определите критический путь.

Таблица 4.2 – Характеристики работ

Номер работы	Содержание работы	Предшествующая работа	Длительность работы, дни
1	Принятие решения об устройстве на работу	-	2
2	Составление резюме	1	0,5
3	Отправка резюме фирмам	2	0,5
4	Обращение в кадровое агентство	2	2
5	Выбор предложения	3,4	2
6	Устройство на работу	5	1

Задача 3

В таблице 4.3 приведены этапы покупки квартиры. Постройте сетевой граф. Сколько работ находится на критическом пути?

Таблица 4.3 – Характеристики работ

Номер работы	Содержание работы	Предшествующая работа	Длительность работы, дни
1	Принятие решения о покупки квартиры	-	3
2	Обращение к	1	1

	риэлтерским компаниям		
3	Поиск объявлений в газетах	1	2
4	Просмотр квартир	2,3	4
5	Выбор квартиры	4	3
6	Оформление документов	5	2
7	Покупка квартиры	6	1

Задача 4

Предприятию для работы необходимо арендовать офисное помещение. Работы, выполняемые в этом случае, представлены в табл. 4.4. Постройте сетевой граф. Определите критический путь. Сколько работ находится на критическом пути?

Таблица 4.4 – Характеристики работ

Номер работы	Содержание работы	Предшествующая работа	Длительность работы, дни
1	Принятие решения об аренде офисного помещения	-	2
2	Обращение к риэлтерским компаниям	1	1
3	Поиск объявлений в газетах	1	2
4	Просмотр помещений	2,3	3
5	Выбор предложения	4	1
6	Оформление документов	5	1
7	Привоз мебели на новое место	6	1
8	Привоз вычислительной техники	6	1
9	Привоз документов	7,8	1
10	Оплата аренды	9	1

Задача 5

Новый проект, выполняемый на предприятии, состоит из восьми работ. В таблице 4.5 представлены характеристики этих работ. Постройте сетевой граф.

Определите критический путь. Сколько работ находится на критическом пути? Можно ли отложить выполнение работы Е без отсрочки завершения проекта?

Таблица 4.5 – Характеристики работ

Работа	Предшествующая работа	Длительность работы, дни
A	-	2
B	-	1
C	-	4
D	A	3
E	B	5
F	C	4
G	D,E	2
H	F	3

Задача 6

Для сетевого графика, изображенного на рис.4.3, найдите все полные пути, критический путь, рассчитайте ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий (предварительно график нужно упорядочить). На сколько можно отложить выполнение работы 4 без отсрочки завершения проекта?

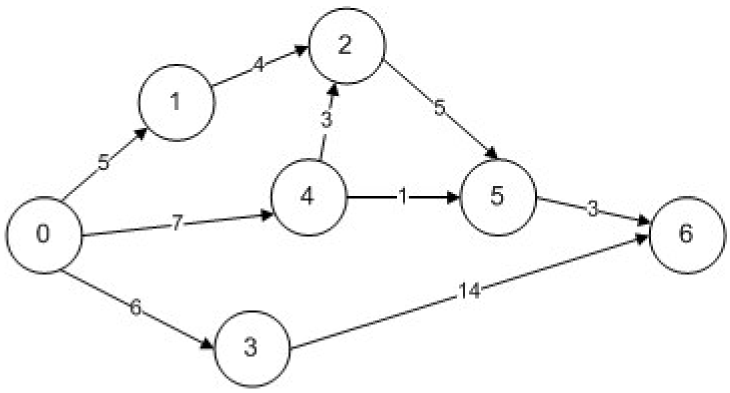


Рис.4.3 – Сетевой график

Задача 7

Для сетевого графика, изображенного на рис.4.4, найдите все полные пути, критический путь, рассчитайте ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий (предварительно график нужно упорядочить).

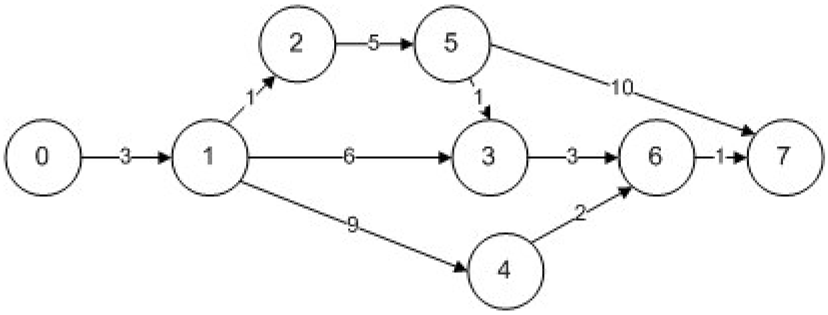


Рис.4.4 – Сетевой график

Задача 8

Для сетевого графика, изображенного на рис.4.5, найдите ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени (полный, частный, свободный, независимый).

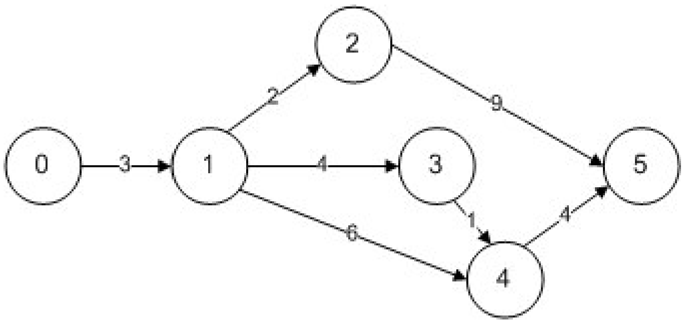


Рис.4.5 – Сетевой график

Задача 9

Для сетевого графика, изображенного на рис.4.6, найдите ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени (полный, частный, свободный, независимый).

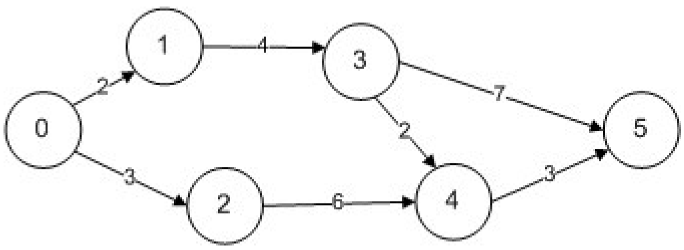


Рис.4.6 – Сетевой график

Задача 10

В табл. 4.6 указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

Таблица 4.6 – Оценки времени выполнения работ

№ п/п	Работа (i,j)	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		оптимистическая $t_o(i,j)$	пессимистическая $t_n(i,j)$	наиболее вероятная $t_{нв}(i,j)$
1	*(1,2)*	3	7	5
2	*(1,3)*	2	5	4
3	*(2,3)*	3	5	4
4	*(3,4)*	4	6	5
5	*(2,5)*	9	12	10
6	*(4,5)*	5	7	6

Необходимо: а) построить сетевой график; б) определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ; в) определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 15 суток;

Задача 11

В табл. 4.7 указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

Таблица 4.7 – Оценки времени выполнения работ

№ п/п	Работа (i,j)	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		оптимистическая $t_o(i,j)$	пессимистическая $t_n(i,j)$	наиболее вероятная $t_{нв}(i,j)$
1	*(1,2)*	4	8	6
2	*(1,3)*	5	9	7
3	*(1,4)*	5	9	8
4	*(3,4)*	10	14	12
5	*(2,5)*	8	12	10
6	*(4,5)*	1	4	2

Необходимо: а) построить сетевой график; б) определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ; в) определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,9.

Задача 12

Кафедра решила организовать вечер встречи выпускников. Необходимо выполнить следующие работы (табл.4.8).

Таблица 4.8 – Характеристики работ

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Время, дни		
			Оптимистическое	Наиболее вероятное	Пессимистическое
1	Определение даты празднования	-	4	5	6
2	Поиск места проведения	1	2	3	4
3	Рассылка приглашений	2	1	2	3
4	Подготовка программы	2	7	7,5	11
5	Подготовка банкета	4	3	4	5
6	Выполнение последних приготовлений	3,5	1	2	3
7	Проведение мероприятия	6	0,2	0,4	0,6

Определите ожидаемое время завершения организации вечера и стандартное отклонение времени организации вечера.

Задача 13

Предприниматель принял решение об открытии нового магазина. Необходимо выполнить следующие работы (табл. 4.9).

Таблица 4.9 – Характеристики работ

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Время, дни		
			Оптимистическое	Наиболее вероятное	Пессимистическое
1	Принятие решения об открытии нового магазина	-	1	2	3

2	Поиск помещения	1	4	6	8
3	Оформление документов	2	1	2	3
4	Ремонт помещения	3	10	15	20
5	Завоз товара	4	5	8	10
6	Принятие на работу сотрудников	5	7	10	13
7	Проведение рекламной компании	4	4	6	8
8	Торжественное открытие	6,7	1	2	3

Определите ожидаемое время и стандартное отклонение открытия нового магазина.

Задача 14

Студенту необходимо написать реферат. Для этого ему следует выполнить следующие работы (табл.4.10).

Таблица 4.10 – Характеристики работ

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Время, дни		
			Оптимистическое	Наиболее вероятное	Пессимистическое
1	Получение темы у преподавателя	-	2	4	6
2	Поиск информации в Интернете	1	1	2	3
3	Поиск информации в литературных источниках	1	3	4	5
4	Набор текста	2,3	4	6	8
5	Оформление реферата	4	0,5	1	2
6	Сдача на проверку	5	2	3	4
7	Получение оценки	6	1	2	3

Определите ожидаемое время написания реферата. Какова вероятность того, что реферат будет написан за 13 дней?

Задача 15

Для сетевого графика на рис.4.7 найдите коэффициенты напряженности работ (2,6) и (6,7).

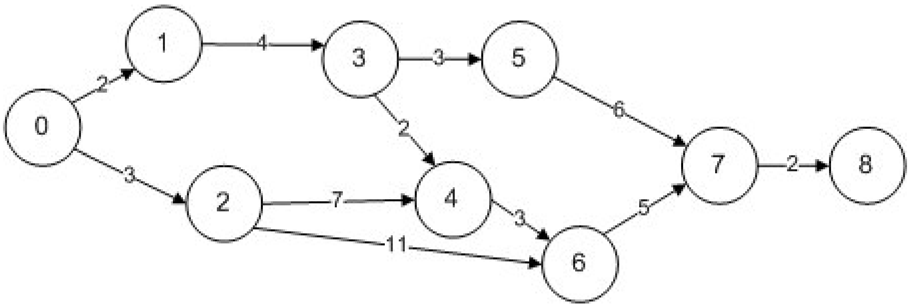


Рис.4.7 – Сетевой график

Задача 16

Для сетевого графика на рис.4.8 найдите коэффициенты напряженности работ (1,4) и (4,6).

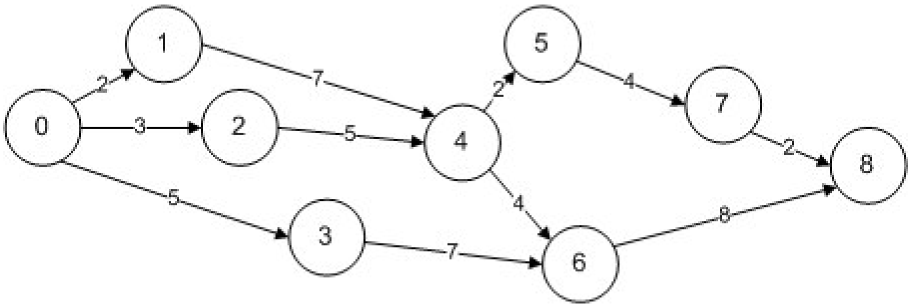


Рис.4.8 – Сетевой график

Задача 17

Для сетевого графика на рис.4.9 определите критический путь, ранние и поздние сроки свершения работы и постройте линейную диаграмму.

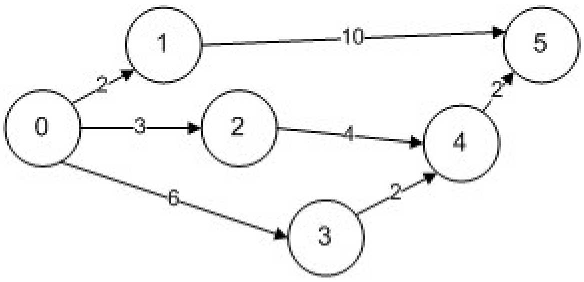


Рис.4.9 – Сетевой график

Задача 18

Для сетевого графика на рис.4.10 определите критический путь, ранние и поздние сроки свершения работы и постройте линейную диаграмму.

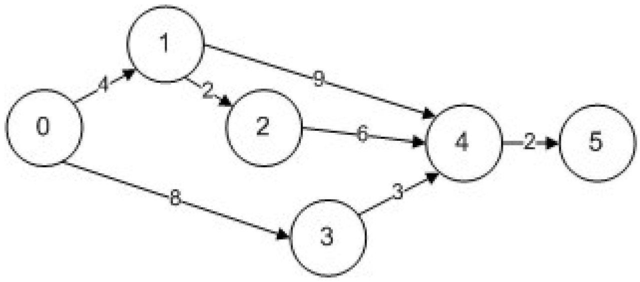


Рис.4.10 – Сетевой график

Задача 19

Организацию производственного процесса на предприятии можно представить в виде следующей сети (табл.4.11).

Таблица 4.11 – Характеристики работ

Работа	Предшествующая работа	Время, дни		
		Оптимистическое	Наиболее вероятное	Пессимистическое
1	-	2	3	4
2	-	3	4	5
3	1	1	1,5	3
4	2	4	5	6
5	3	2	4	6
6	4,5	7	10	13
7	6	4	6	8

Определите ожидаемое время продолжительности производственного процесса. Какова вероятность того, что продолжительность рассматриваемого процесса будет равна 22 дням? Найдите максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95.

Литература

1. Исследование операций в экономике. Под ред. Кремера Н.Ш. – М.: «Банки и биржи», 1977. – 407с.
2. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум. Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 280 с.
3. Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Сборник задач по исследованию операций. - М.- Издательство Московского Университета.- 1997.-252 с.
4. Вагнер Г.К. Основы исследования операций Т3. – М. – Мир.-1972. – 335 с.
5. Просветов Г.И. Математические методы в логистике. Задачи и решения. – М. – РДЛ. – 2006. – 271 с.
6. Мицель А.А., Грибанова Е.Б. Имитационное моделирование экономических объектов: Лабораторный практикум. – Томск.:Изд-во НТЛ, 2005. – 160 с.
7. Григорьев М.Н., Долгов А.П., Уваров С.А. Логистика.- М. – Гардарики. – 2006. – 463 с.
8. Хедли Дж. Анализ систем управления запасами. – М. – Наука. – 1969. – 511 с.
9. Стерлигов А.К. Использование метода имитационного моделирования в прикладных логистических задачах// Логистика сегодня. - №1.- 2006. – с. 40-48.
10. Кофман А. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.- Мир.-1965.-302с.
11. Терешкина Т. Логистический подход к управлению запасами//Логистика. - №2. – 2002. – с.21-23.
12. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА. – 2002. – 543 с.
13. Емельянов А.А., Власов Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов. – М: Финансы и статистика, 2002. -365с.
14. Федоров С.С. Управление запасами: Расчет по формуле Вильсона// Логинфо. - №2. – 2003. – с. 61-63.
15. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций. М.: Вильямс. – 2005. – 901 с.
16. Макаров И. М., Менский Б. М Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований: Дробно-рациональные изображения.- М.-Высшая школа.-.1978. 247 с.
17. Кельтон В. Лоу А. Имитационное моделирование. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.

Приложение 1. Формулы для расчета показателей СМО

Рассматриваются системы массового обслуживания, в которых интенсивность входного потока заявок равна λ, а потока обслуживания - μ (потоки являются пуассоновскими). В таблице 1 приведены формулы для расчета показателей СМО с отказами: A — абсолютная пропускная способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; Q — относительная пропускную способность, т.е. средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой; P_{OTK}. — вероятность отказа, т.е. вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной; $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов (для многоканальной системы). В случае рассмотрения одноканальной СМО предельные вероятности p_0 и p_1 представляют собой вероятность того, что канал свободен и того, что он занят соответственно. При рассмотрении многоканальной СМО предельная вероятность p_0 означает вероятность того, что канал свободен, а вероятности $p_1,...,p_n$, что занято $1,...,n$ каналов. Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

называется интенсивностью нагрузки канала.

Таблица 1 – Характеристики СМО с отказами

Показатели	Одноканальная СМО с отказами	Многоканальная СМО с отказами
Предельные вероятности	$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^k}{k!}+...+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ $p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0,...,p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0$
Вероятность отказа	$P_{OTK} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$P_{OTK} = \frac{\rho^n}{n!}p_0$
Относительная пропускная	$Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$	$Q = 1 - P_{OTK} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0$

способность		
Абсолютная пропускная способность	$A = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$	$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \dfrac{\rho^n}{n!} p_0\right)$
Среднее число занятых каналов	—	$\overline{k} = \dfrac{A}{\mu}$

В таблице 2 приведены формулы для расчета показателей СМО с неограниченной очередью. Кроме уже перечисленных показателей, здесь рассмотрены следующие: $L_{сист}$ – среднее число заявок в системе, $T_{сист}$ — среднее время пребывания заявки в системе; $L_{оч}$ — среднее число заявок в очереди (длина очереди); $T_{оч}$ — среднее время пребывания заявки в очереди; $P_{зан}$ — вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала). При рассмотрении одноканальной СМО вероятность p_0 означает вероятность того, что канал свободен, вероятность p_1, что он занят, а $p_2,..., p_k$ - что в очереди $1,...,k-1$ заявок. В случае рассмотрения многоканальной СМО вероятность p_0 означает вероятность того, что канал свободен, вероятности $p_1,..., p_n$ - что занято $1,...,n$ каналов, а $p_{n+1},..., p_{n+r}$ - что в очереди $1,...,r$ заявок.

Здесь если ρ<1 (для одноканальной СМО) и ρ / m<1 (для многоканальной СМО), то предельные вероятности существуют, в противном случае очередь растет до бесконечности.

Таблица 2 – Характеристики СМО с неограниченной очередью

Показатели	Одноканальная СМО с неограниченной очередью	Многоканальная СМО с неограниченной очередью
Предельные вероятности	$p_0 = 1 - \rho$, $p_1 = \rho(1-\rho),\ ...,\ p_k = \rho^k(1-\rho),...$	$p_0 = \left(1 + \rho + \dfrac{\rho^2}{2!} + ... + \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}$ $p_1 = \dfrac{\rho}{1!} p_0, ..., p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, ..., p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0$, $p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, ..., p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, ...$

Среднее число заявок в системе	$L_{сист} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$	$L_{сист} = L_{оч} + \rho$
Среднее число заявок в очереди	$L_{оч} = L_{сист} - L_{об}$	$L_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!\left(1-\dfrac{\rho}{n}\right)^2} p_0$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сист} = \dfrac{1}{\lambda} L_{сист}$	$T_{сист} = \dfrac{1}{\lambda} L_{сист}$
Среднее время пребывания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{1}{\lambda} L_{оч}$	$T_{оч} = \dfrac{1}{\lambda} L_{оч}$
Вероятность того, что заявка окажется в очереди	$P_{оч} = 1 - (p_0 + p_1)$	$P_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$
Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов)	$L_{об} = 1 - p_0$	$\overline{k} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$

В таблице 3 приведены формулы для расчета показателей СМО с ограниченной очередью. Данная СМО отличается от СМО с неограниченной очередью тем, что число заявок в очереди ограничено, т.е. если заявка поступает в тот момент, когда все места в очереди заняты, то она покидает систему необслуженной. Здесь среднее время пребывания заявки в системе и в очереди рассчитывается по тем же формулам (таблица 2).

Таблица 3 – Характеристики СМО с ограниченной очередью

Показатели	Одноканальная СМО с ограниченной очередью	Многоканальная СМО с ограниченной очередью
Предельные вероятности	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ $p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0, ...,$ $p_k = \rho^k p_0$	$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + ... + \right.$ $\left. + \frac{\rho^{n+1}(1-(\rho/n)^m)}{n \cdot n!(1-\rho/n)}\right)^{-1}$ $p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, ..., p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, ..., p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$ $p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, ..., p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0$ $(r = 1, ..., m)$
Вероятность отказа	$P_{отк} = P_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{m+n}}{n^m \cdot n!} p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_{0)}$	$A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^{m+n}}{n^m n!} p_0)$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^{m+n}}{n^m n!} p_0$
Среднее число заявок в очереди	$L_{оч} = \rho^2 \frac{[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n! \left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$
Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов)	$L_{об} = 1 - p_0$	$\overline{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Среднее число заявок в системе	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об}$	$L_{сист} = L_{оч} + \overline{k}$

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

Таблица значений функции $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,1	03643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	03849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	04032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	04192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	04332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	04452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	04554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	04641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	04713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	04772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	04821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	04861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	04893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	04918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	04938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	04953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	04965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	04974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	04981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49999	0,49999
4,2	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,3	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,4	0,49999	0,49999	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

Приложение 3. Формулы для расчета статистических показателей

Пусть имеется набор значений случайной величины X. Среднее значение M рассчитывается следующим образом

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

где N - число случайных реализаций;

x_i - значение случайной величины за i-тую случайную реализацию.

Формула расчета дисперсии и среднего квадратического отклонения

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^2}{N},$$

$$\sigma = \sqrt{D},$$

где D - дисперсия;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Кроме того, может быть рассчитана выборочная дисперсия D_v и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_v

$$D_v = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^2}{N-1},$$

$$\sigma_v = \sqrt{D_v}$$

Медиана рассматривается как альтернативный показатель среднего значения

$$me = \begin{cases} x_{((N+1)/2)}, если \quad N - нечетное; \\ [\ x_{(N/2)} + x_{((N/2)+1)}\ ]/2, если \quad N - четное. \end{cases},$$

где me - медиана.

Коэффициент вариации и асимметрия (показатель симметрии распределения) вычисляются по формуле

$$cv = \frac{\sigma}{M},$$

$$\nu = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^3 / N}{D^{\frac{3}{2}}},$$

где cv - коэффициент вариации;

ν - асимметрия.

Пусть случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Тогда минимальный гарантированный результат x_α с заданной вероятностью (например, величина минимальной прибыли, которая будет получена с заданной вероятностью) может быть рассчитан по формуле

$$x_\alpha = M - K_\alpha \sigma,$$

где K_α - квантиль нормального распределения, определяемы по таблице функции Лапласа.

Максимальный гарантированный результат x_α (например, величина максимального убытка, которая будет получена с заданной вероятностью) рассчитывается по формуле

$$x_\alpha = M + K_\alpha \sigma.$$

Кроме того, возможно построение гистограммы распределения. Это построение осуществляется следующим образом. Сначала рассчитывается величина интервала

$$Interval = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{NumInterval},$$

где $Interval$ - величина интервала;

$x_{\max}, x_{\min}$ - минимальное и максимальное значения случайной величины;

$NumInterval$ - число интервалов.

Формируется массив X значений границ интервалов (рисунок 1)

$$X(0) = x_{\min},$$
$$X(i) = X(i-1) + Interval, i = 1..N$$

После этого рассчитывается количество случайных величин, попадающих в каждый интервал. На гистограмме отображаются на оси ординат эти значения, предварительно разделенные на число случайных реализаций. Сумма частот всех интервалов равна единице.

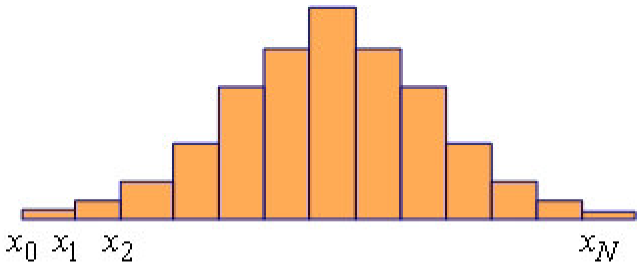


Рис. 1 – Гистограмма распределения

Приложение 4. Способы продвижения модельного времени

Дискретно-событийное моделирование используется для построения модели, отражающей развитие системы во времени, когда состояния переменных меняются в конкретные моменты времени (т.е. система может меняться только в исчислимое количество моментов времени). Находясь в некотором состоянии, дискретная система сохраняет его (не изменяет своих характеристик) до наступления очередного события, под воздействием которого переменные системы (и, следовательно, ее состояние) изменяются скачком.

Динамическая природа дискретно-событийных имитационных моделей требует наблюдения за текущим значением имитационного времени по мере функционирования модели. Также необходим механизм для продвижения имитационного времени от одного значения к другому. Существует два основных подхода к продвижению модельного времени: продвижение времени от события к событию и продвижение времени с постоянным шагом.

При использовании продвижения времени от события к событию часы модельного времени в исходном состоянии устанавливаются в ноль, и определяется время возникновения будущих событий. После этого часы модельного времени переходят на время возникновения ближайшего события, и в этот момент обновляются состояния системы с учетом произошедшего события, а также сведения о времени возникновения будущих событий. Затем часы модельного времени продвигаются ко времени возникновения следующего (нового) ближайшего события, обновляется состояние системы, и определятся время будущих событий, и т.д. Процесс продвижения модельного времени от времени возникновения одного события ко времени возникновения другого продолжается до тех пор, пока не будет выполнено какое-либо условие останова, указанное заранее (например, окончание периода моделирования). Поскольку в дискретно-событийной имитационной модели все изменения происходят только во время возникновения событий, периоды бездействия системы просто пропускаются, и часы переводятся со времени возникновения одного события на время возникновения другого. На рис.1 показано продвижение модельного времени от события к событию. Здесь c_i - время наступления i-того события, а стрелками показано изменение модельного времени. Таким образом, часы сначала переводятся на момент t_1 - время возникновения первого события, затем - на t_2 и t_3.

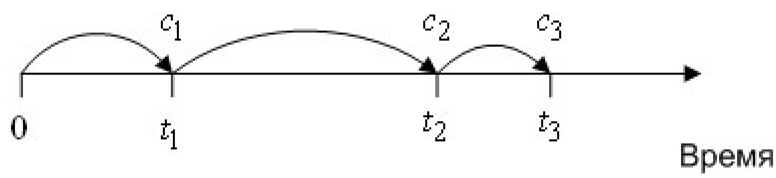


Рис. 1 – Продвижение времени от события к событию

При продвижении времени посредством постоянного шага часы модельного времени продвигаются точно на Δt единиц времени для какого-либо соответствующего выбора Δt. После каждого обновления часов выполняется проверка с целью определить, произошли ли какие-либо события в течение предыдущего интервала времени. Если на этот интервал запланированы одно или несколько событий, считается, что данные события происходят в конце интервала, после чего состояние системы соответствующим образом обновляется. Продвижение времени посредством постоянного шага приведено на рис.2, где изогнутые стрелки показывают продвижение часов модельного времени, а c_i - действительное время возникновения события i. В интервале $[0, \Delta t)$ событие происходит в момент c_1, но он рассматривается как произошедшее в момент Δt. В интервале $[\Delta t, 2\Delta t)$ события не происходит, однако проверка наступления осуществляется и т.д.

В ситуациях, когда принято считать, что два или несколько событий происходят в одно и то же время, необходимо применение ряда условий, позволяющих определять, в каком порядке обрабатывать события. Таким образом, продвижение времени посредством постоянного шага имеет два недостатка: возникновение ошибок, связанных с обработкой событий в конце интервала, в течение которого они происходят, а также необходимость решать, какое событие обрабатывать первым, если события, в действительности происходящие в разное время, рассматриваются как одновременные. Подобного рода проблемы можно частично решить, сделав интервалы менее продолжительными, но тогда возрастает число проверок возникновения событий, что приводит к увеличению времени выполнения задачи.

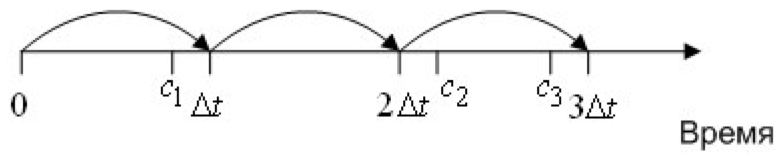


Рис.2 – Продвижение времени посредством постоянного шага