

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ В УПРАВЛЕНИИ
И ПРОЕКТИРОВАНИИ

А.Г. Карпов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Часть 2

Учебное пособие

Томск – 2012

УДК 519.71(075.9); 681.5

Карпов А.Г. Теория автоматического управления. Часть 2:
Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТМЛ-Пресс, 2012. – 264 с.

ISBN 978-5-9130-2136-6

Во второй части учебного пособия рассмотрены особые линейные системы: системы с запаздыванием и распределенными параметрами, а также нестационарные системы. Изложены основные методы исследования нелинейных систем. Рассмотрены вопросы статистической динамики линейных и нелинейных систем. Приведены основы теории оптимизации.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов, бакалавров и магистров «Управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника», а также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, аспирантами и инженерами.

УДК 519.71(075.9); 681.5

Рецензент: зав. каф. Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, профессор **А.Г. Гарганеев**

ISBN 978-5-9130-2136-6

© А.Г.Карпов, макет, 2012
© Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1. ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ.....	6
1.1. Системы с запаздыванием и системы с распределёнными параметрами.....	6
1.1.1. Математическое описание систем с запаздыванием.....	6
1.1.2. Системы с распределёнными параметрами.....	11
1.1.3. Устойчивость и качество управления.....	12
1.2. Системы с переменными параметрами.....	19
1.2.1. Дифференциальные уравнения нестационарных систем.....	20
1.2.2. Временные характеристики нестационарных систем.....	27
1.2.3. Преобразование Лапласа и нестационарные системы.....	37
1.2.4. Параметрическая передаточная функция.....	40
1.2.5. Устойчивость и качество регулирования.....	48
1.3. Импульсные системы.....	52
2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ.....	54
2.1. Общие понятия.....	54
2.2. Типовые нелинейные звенья и их уравнения.....	56
2.2.1. Однозначные нелинейности.....	58
2.2.2. Двухзначные характеристики.....	59
2.2.3. Многозначные характеристики.....	60
2.3. Методы исследования нелинейных систем.....	65
2.3.1. Нелинейные системы и устойчивость.....	65
2.3.2. Первый метод Ляпунова (метод малых отклонений).....	69
2.3.3. Метод фазовой плоскости.....	82
2.3.4. Метод интегрируемой аппроксимации.....	86
2.3.5. Метод точечных преобразований.....	96
2.3.6. Второй метод Ляпунова.....	99
2.3.7. Частотный критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова.....	104
2.3.8. Методы малого параметра.....	110
2.3.9. Гармоническая линеаризация.....	117
2.4. Качество переходных процессов и коррекция.....	131
2.4.1. Оценка качества нелинейных систем.....	131

2.4.2.	Коррекция нелинейных систем	134
3.	СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА САУ	142
3.1.	Случайные события, величины и процессы.....	144
3.1.1.	Случайные события	144
3.1.2.	Случайные величины.....	146
3.1.3.	Случайные процессы	150
3.2.	Стохастические процессы в линейных САУ	165
3.2.1.	Прохождение случайного сигнала через линейные звенья.....	165
3.2.2.	Определение статистически оптимальных параметров	172
3.2.3.	Синтез статистически оптимальной системы.....	177
3.3.	Стохастические процессы в нелинейных САУ.....	187
3.3.1.	Прохождение случайного сигнала через нелинейные звенья.....	187
3.3.2.	Статистическая линеаризация	193
3.3.3.	Применение статистической линеаризации для исследования точности замкнутых САУ	198
4.	ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.....	204
4.1.	Понятие об оптимальных системах.....	204
4.2.	Вариационное исчисление в оптимальных системах.....	208
4.2.1.	Постановка задач вариационного исчисления.....	208
4.2.2.	Минимизация интегрального критерия.....	214
4.2.3.	Оптимальное управление по минимуму интегрального критерия.....	222
4.2.4.	Учёт ограничений с помощью метода множителей Лагранжа.....	227
4.3.	Принцип максимума Понтрягина.....	233
4.3.1.	Обобщённая задача оптимального управления.....	234
4.3.2.	Принцип максимума	239
4.4.	Динамическое программирование.....	248
4.4.1.	Многошаговые процессы управления	248
4.4.2.	Принцип оптимальности	250
4.4.3.	Дискретный вариант метода динамического программирования.....	256
4.4.4.	Уравнения Беллмана и Гамильтона–Якоби	260
	ЛИТЕРАТУРА	267

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первой части настоящего учебного пособия¹ изложены основы линейной теории автоматического управления. Во второй, настоящей части читатели знакомятся с системами, которые, хотя и описываются линейными дифференциальными уравнениями, имеют определённые особенности в описании и исследовании. Это системы с постоянным запаздыванием и системы с переменными параметрами. Актуальность исследования первых связана с интенсивным развитием систем телеуправления, а вторых диктуется, в частности, широким распространением систем управления подвижными объектами.

Вообще говоря, линейная теория – определённая идеализация, когда можно пренебречь влиянием нелинейностей, неизбежно содержащихся в реальных системах. Когда такое пренебрежение недопустимо или нелинейность специально по тем или иным причинам вводится в систему, приходится прибегать к специфическим методам исследования нелинейных систем, основные из которых изложены во втором разделе данной книги.

Весьма важным моментом в исследовании систем управления является поведение последних при случайных воздействиях на них. Вопросы статистической динамики систем автоматического управления (САУ) рассматриваются в третьем разделе.

Процесс улучшения чего бы то ни было, не знает границ. Это касается, в том числе и САУ. Проектирование наиболее эффективных в определённом смысле систем – прерогатива теории оптимизации, основы которой приведены в последнем разделе.

¹ Карпов А.Г. Теория автоматического управления. Часть 1: Учебное пособие. - Томск: Изд-во ТМЛ-Пресс, 2011. – 212 с.

1. ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

К особым линейным системам относятся следующие классы систем.

1. Системы с запаздыванием и системы с распределёнными параметрами.
2. Системы с переменными параметрами.
3. Импульсные системы.

1.1. Системы с запаздыванием и системы с распределёнными параметрами

1.1.1. Математическое описание систем с запаздыванием

Линейными системами с запаздыванием называются такие САУ, которые, имея, в общем, ту же самую структуру, что и обыкновенные линейные системы, отличаются от последних тем, что у них есть в одном или в нескольких звеньях запаздывание во времени начала изменения выходной величины (после начала изменения входной величины) на время τ . Это время называется временем запаздывания или временем транспортной задержки и остаётся постоянным во всём последующем ходе процесса управления.

Например, если обыкновенное линейное звено (апериодическое звено первого порядка) описывается уравнением

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = Kx_1(t), \quad (1.1.1)$$

то уравнение соответствующего линейного звена с запаздыванием будет иметь вид

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = Kx_1(t - \tau). \quad (1.1.2)$$

Подобного рода уравнения называют уравнениями с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностными уравнениями.

Введём обозначение

$$x_1^*(t) = x_1(t - \tau). \quad (1.1.3)$$

Уравнение (1.1.3) описывает так называемое звено чистого запаздывания. Примером звена чистого запаздывания является акустическая линия связи (τ – время распространения звука) или длинная электрическая линия (в первом приближении).

С учетом соотношения (1.1.3) уравнение (1.1.2) запишется в виде

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = Kx_1^*(t),$$

то есть в виде уравнения обыкновенного линейного звена.

Точно также и в общем случае уравнение динамики любого линейного звена с запаздыванием можно разбить на два:

$$\begin{aligned} A(s)x_2(t) &= B(s)x_1^*(t), \\ x_1^*(t) &= x_1(t - \tau). \end{aligned}$$

Такое представление соответствует условному разбиению линейного звена с запаздыванием на два последовательно соединённых звена – обыкновенного линейного звена того же порядка с теми же коэффициентами и предшествующее ему звено чистого запаздывания (рис. 1.1).

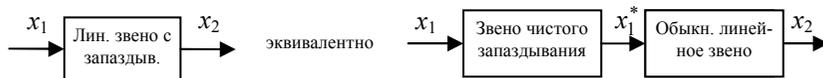


Рис. 1.1. Линейное звено с запаздыванием

Временные характеристики любого звена с запаздыванием, очевидно, будут такие же, как у соответствующего обыкновенного звена, но сдвинутые по оси времени вправо на величину τ . Поэтому время запаздывания можно легко определить по экспериментально полученной временной характеристике.

Разложим правую часть уравнения (1.1.3) в ряд Тейлора вблизи точки $\tau=0$, предполагая, что такое разложение возможно. Получим

$$x_1^*(t) = x_1(t - \tau) = x_1(t) + \dot{x}_1(-\tau) + \frac{\ddot{x}_1}{2!}(-\tau)^2 + \dots + \frac{x_1^{(n)}}{n!}(-\tau)^n + \dots$$

В операторной форме это уравнение будет иметь вид

$$x_1^*(t) = \left[1 + (-\tau p) + \frac{(-\tau p)^2}{2!} + \dots + \frac{(-\tau p)^n}{n!} + \dots \right] x_1(t) = e^{-\tau p} x_1(t),$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Из последнего выражения понятно, что передаточная функция звена чистого запаздывания равна

$$W_{\text{ч.з.}}(s) = e^{-\tau s}, \quad (s - \text{комплексная величина}) \quad (1.1.4)$$

Впрочем, этот же результат можно получить и непосредственным применением преобразования Лапласа к правой и левой частям уравнения (1.1.3). Действительно, преобразовав по Лапласу уравнение (1.1.3) с учётом теоремы запаздывания, получим

$$X_1^*(s) = e^{-\tau s} X_1(s).$$

Из этого выражения получим передаточную функцию звена чистого запаздывания

$$W_{\text{ч.з.}}(s) = \frac{X_1^*(s)}{X_1(s)} = e^{-\tau s}.$$

Таким образом, уравнение произвольного линейного звена с запаздыванием можно записать в виде

$$A(p)x_2(t) = B(p)e^{-\tau p}x_1(t), \quad (1.1.5)$$

а соответствующую передаточную функцию – в виде

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}e^{-\tau s} = W_0(s)e^{-\tau s}, \quad (1.1.6)$$

где $W_0(s)$ – передаточная функция соответствующего обыкновенного линейного звена без запаздывания.

Частотная передаточная функция получается из выражения (1.1.6) подстановкой $s = j\omega$

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau} = A_0(\omega)e^{j[\varphi_0(\omega) - \tau\omega]},$$

где $A_0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega)$ – амплитудно-частотная и фазовая частотная функции звена без запаздывания соответственно.

Отсюда следует правило: для построения АФЧХ любого линейного звена с запаздыванием нужно взять характеристику соответствующего обыкновенного линейного звена и каждую её точку сдвинуть вдоль окружности по часовой стрелке на угол $\tau\omega$, где ω – значение частоты в данной точке характеристики.

Так как в начале АФЧХ $\omega=0$, а в конце $\omega \rightarrow \infty$, то начальная точка характеристики остаётся неизменной, а конец асимптотически навивается на начало координат (если степень числителя $B(s)$ меньше степени знаменателя $A(s)$ – а для физически реализуемых звеньев это так).

Например, АФЧХ апериодического звена с запаздыванием приведена на рис. 1.2 (там же штриховой линией показана характеристика соответствующего звена без запаздывания).

Все формулы для уравнений и передаточных функций систем остаются в силе и для систем с запаздыванием, если только в эти формулы подставлять значения передаточных функций в виде (1.1.6). Например, для

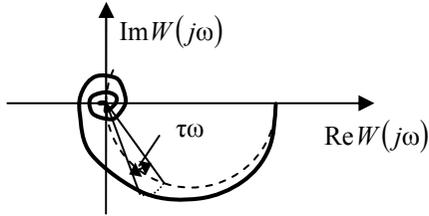


Рис. 1.2. АФЧХ апериодического звена с запаздыванием

двух последовательно соединенных звеньев с запаздыванием τ_1 и τ_2 передаточная функция будет равна

$$W(s) = W_{01}(s)e^{-\tau_1 s} \cdot W_{02}(s)e^{-\tau_2 s} = W_0(s)e^{-(\tau_1 + \tau_2)s},$$

где $W_0(s)$ – передаточная функция разомкнутой цепи без учёта запаздывания, равная произведению передаточных функций включённых последовательных звеньев.

Таким образом, при исследовании динамики разомкнутой цепи из последовательно соединённых звеньев безразлично, будет ли всё запаздывание сосредоточено в одном каком-либо звене или разнесено по разным звеньям.

Подобным же образом получаются и передаточные функции других соединений звеньев – параллельного и соединения обратной связью, а также передаточные функции замкнутой и разомкнутой системы.

1.1.2. Системы с распределёнными параметрами

Системой с распределёнными параметрами будет такая система, среди уравнений которой помимо обыкновенных дифференциальных уравнений имеются уравнения в частных производных. С физической точки

зрения это соответствует учёту волновых процессов, например, в длинных электрических линиях при передаче по ним воздействий от одного звена САУ к другому, либо же при регулировании процессов в самих длинных линиях. Практическое значение вопросы исследования таких процессов приобретают в некоторых системах телеуправления.

Уравнения длинной линии задаются формулами

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t},$$

где u и i – напряжение и ток соответственно в произвольной точке с координатой x вдоль линии, l и c – индуктивность и емкость единицы длины соответственно.

После решения приведённых уравнений в частных производных с учётом граничных условий, определяемых смежными звеньями данной САУ, для системы в целом получаются дифференциально-разностные уравнения такого же типа, как и для систем с постоянным запаздыванием.

1.1.3. Устойчивость и качество управления

Передаточная функция звена с запаздыванием или последовательно соединённых звеньев, как уже было выяснено ранее, может быть записана в виде (1.1.6). Аналогично и передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена как

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-\tau s} = W_0(s) e^{-\tau s}.$$

Тогда характеристический полином замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью равен сумме числителя и знаменателя выражения (1.1.6), а характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$A(s) + B(s)e^{-\tau s} = 0. \quad (1.1.7)$$

Иногда встречается запись характеристического уравнения и в другом виде

$$A(s)e^{\tau s} + B(s)e^{-\tau s} = 0$$

или в ещё более сложных формах

$$\begin{aligned} A(s) + B_1(s)e^{-\tau_1 s} + B_2(s)e^{-\tau_2 s} &= 0, \\ A(s)e^{\tau s} + B_1(s)e^{-\tau s} + B_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

и т.п.

В дальнейшем будем пользоваться наиболее распространенной формой записи характеристического уравнения (1.1.7).

Известно, что решение подобного рода уравнений можно записать в виде некоторых рядов и что для сходимости этого решения (то есть для устойчивости системы) необходимо и достаточно, чтобы все корни трансцендентного уравнения (1.1.7) имели отрицательные вещественные части.

Отличие от обыкновенного алгебраического уравнения наличие множителя $e^{-\tau s}$ приводит к тому, что уравнение (1.1.7) имеет бесконеч-

ное количество корней. К системам с запаздыванием и с распределёнными параметрами применимы критерии Михайлова и Найквиста, но из-за наличия множителя $e^{-\tau s}$ существенно меняется как вид кривой Михайлова замкнутой системы $D(j\omega) = A(j\omega) + B(j\omega)e^{-j\tau\omega}$, так и АФЧХ разомкнутой системы, построенной по частотной передаточной функции $W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}e^{-j\tau\omega}$. Поэтому из кривой Михайлова не получается таких простых алгебраических выражений, которые получались для обыкновенных линейных систем и, как следствие, для устойчивости линейных систем первого и второго порядка с запаздыванием уже недостаточно только положительности коэффициентов характеристического уравнения, а для систем третьего и более высокого порядка неприменимы критерии Вышнеградского и Рауса–Гурвица.

Наиболее просто для определения устойчивости воспользоваться критерием Найквиста. Причем построение АФЧХ и исследование устойчивости лучше всего производить, если передаточная функция разомкнутой системы представлена в виде

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}e^{-j\tau\omega}.$$

Для получения передаточной функции в таком виде необходимо соответствующим образом провести размыкание системы. Рассмотрим на примерах как это сделать.

Пример 1.1.1. Для системы, структурная схема которой имеет вид, представленный на рис. 1.3, а, размыкание можно провести в любой точ-

ке главной цепи, например, разорвать обратную связь. Тогда передаточная функция будет иметь вид

$$W(s) = W_1(s) \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)} \cdot e^{-\tau s} \cdot W_4(s) = W_0(s) e^{-\tau s},$$

то есть по виду совпадает с нужным выражением.

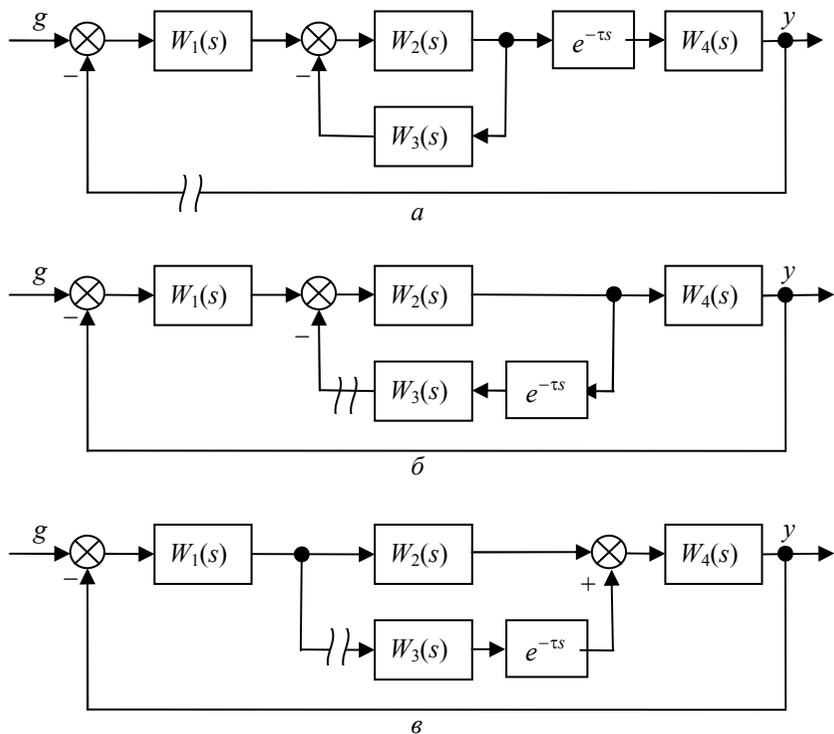


Рис. 1.3. Примеры размыкания системы

Для системы, структурная схема которой представлена на рис. 1.3, б, размыкание в цепи обратной связи даст неудобное выражение

$$W(s) = W_1(s) \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)} e^{-\tau s} W_4(s).$$

Поэтому размыкание в данном случае следует проводить по цепи местной обратной связи. Такое размыкание приведёт к передаточной функции

$$W(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)W_4(s)} \cdot W_3(s) e^{-\tau s},$$

имеющей нужный вид.

Наконец, для системы, представленной на рис. 1.3, в, размыкание в указанном месте (см. рис. 1.3, в) приведёт к требуемому виду передаточной функции

$$W(s) = \frac{W_3(s)W_4(s)W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_4(s)} \cdot e^{-\tau s}.$$

Если получено характеристическое уравнение замкнутой системы в виде $A(s) + B(s)e^{-\tau s} = 0$, то передаточная функция разомкнутой системы сразу записывается в виде $W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} e^{-j\tau\omega}$ без определения места размыкания системы на структурной схеме.

Частотная передаточная функция разомкнутой системы представляется, точно так же, как и для звена с запаздыванием, в виде

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\omega\tau}, \quad (1.1.8)$$

где $W_0(j\omega) = A_0(\omega)e^{j\varphi_0(\omega)}$, $A_0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega)$ – амплитудно-частотная и фазовая частотная функции системы без запаздывания соответственно.

Модуль второго множителя в выражении (1.1.8) равен единице, а фаза – минус $\omega\tau$, поэтому представляя выражение (1.1.8) в форме $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, получим

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A_0(\omega), \\ \varphi(\omega) &= \varphi_0(\omega) - \omega\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, наличие в системе звена чистого запаздывания не меняет модуля частотной передаточной функции и вносит только дополнительный фазовый сдвиг. Этот фазовый сдвиг $\omega\tau$, пропорциональный частоте, «закручивает» годограф АФЧХ, особенно в высокочастотной области, по часовой стрелке. В общем случае, это ухудшает условия устойчивости, так как приближает годограф к критической точке $(-1, j0)$. Но в некоторых случаях при сложной форме кривой АФЧХ введение постоянного запаздывания может улучшить условия устойчивости.

По имеющемуся годографу АФЧХ системы без запаздывания $W_0(j\omega)$ можно найти критическое значение времени запаздывания $\tau = \tau_{кр}$, при котором система с запаздыванием оказывается на границе устойчивости. Для этого на годографе следует найти точку, для которой модуль равен единице. Обозначим соответствующую частоту ω_1 (эта частота равна частоте среза $\omega_{ср}$), а фазу – φ_1 (рис. 1.4). Тогда при введении постоянного запаздывания $\tau = \tau_{кр}$ условие совпадения этой точки с критической точкой $(-1, j0)$ запишется как $\varphi_1 - \omega_1\tau_{кр} = -\pi$, откуда критическое время запаздывания равно

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \varphi_1}{\omega_1}. \quad (1.1.9)$$

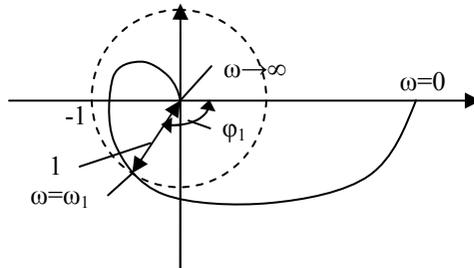


Рис. 1.4. Определение критического времени запаздывания

Если подобных точек на кривой АФЧХ несколько, следует сделать расчеты для всех таких точек и взять наименьшее значение $\tau_{кр}$.

Оценку качества регулирования в системах с запаздыванием и с распределёнными параметрами проще всего проводить при помощи частотных критериев качества. Для расчета могут успешно применяться логарифмические характеристики.

Построение переходных характеристик удобнее всего производить также на основе использования частотных характеристик, в частности, по вещественной частотной функции. Для построения переходных процессов могут применяться графические и численно-графические методы, а также ЦВМ.

Сформулируем некоторые выводы.

1. В структуре системы с запаздыванием всегда можно выделить звено чистого запаздывания.

2. Передаточная функция звена чистого запаздывания – это $e^{-\tau s}$.
3. Наличие постоянного запаздывания не меняет амплитудно-частотную функцию, но вносит дополнительный отрицательный фазовый сдвиг.
4. Запаздывание в системе, как правило, ухудшает условия устойчивости, но в некоторых специальных случаях запасы устойчивости могут возрастать.
5. Для исследования устойчивости наиболее удобно применять критерий Найквиста, а для оценки качества регулирования – частотные критерии качества.
6. Построение АФЧХ разомкнутой САУ удобнее всего проводить, если её вид соответствует выражению (1.1.8).
7. При получении передаточной функции разомкнутой системы размыкание следует проводить в цепи нахождения звена чистого запаздывания.

1.2. Системы с переменными параметрами

Если параметры системы меняются со временем, мы получаем так называемую нестационарную систему или систему с переменными параметрами. Взаимосвязь входа (входов) и выхода (выходов) такой системы зависит от времени. С точки зрения математического описания непрерывные нестационарные системы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Нестационарность систем приводит к определённым особенностям в их исследовании, что выражается, в частности, в зависимости передаточ-

ной функции от времени и в зависимости временных характеристик как от времени, так и от момента приложения воздействия.

Актуальность исследования нестационарных систем возникла в связи с управлением подвижными объектами, масса которых, а, следовательно, и их динамика меняется с течением времени (например, вследствие расхода топлива).

1.2.1. Дифференциальные уравнения нестационарных систем

В общем виде линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами задаётся уравнением

$$a_0(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y(t) = b_0(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_m(t) g(t), \quad (1.2.1)$$

где $y(t)$ и $g(t)$ – скалярные выход и вход системы соответственно.

Вспоминая обозначение для оператора дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, уравнение (1.2.1) можно записать в сокращённой форме

$$A(p, t)y(t) = B(p, t)g(t), \quad (1.2.2)$$

где формальное определение операторов $A(p, t)$ и $B(p, t)$ следует из сравнения уравнений (1.2.1) и (1.2.2).

Полагая, что вход системы известен, правую часть уравнения (1.2.2) можно представить как вынуждающую функцию $f(t)$, и тогда это уравнение можно переписать также в виде

$$A(p, t)y(t) = f(t). \quad (1.2.3)$$

Определить выход системы при известном входном сигнале можно путём непосредственного решения дифференциального уравнения вида (1.2.1), (1.2.2) или (1.2.3).

Всегда возможно найти аналитическое решение уравнения первого порядка. Для этого удобно представить уравнение в общем виде

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_1(t)y(t) = f(t). \quad (1.2.4)$$

Уравнение (1.2.4) решается путём введения, так называемого интегрирующего множителя $S(t) = e^{\int a_1(t) dt}$. Умножив на этот интегрирующий множитель обе части уравнения (1.2.4), получим

$$S(t) \frac{dy(t)}{dt} + S(t)a_1(t)y(t) = S(t)f(t).$$

Нетрудно заметить, что левая часть последнего выражения представляет собой производную по времени от произведения $y(t) \cdot S(t)$, поэтому

$$y(t) \cdot S(t) = \int f(t) e^{\int a_1(t) dt} dt + c,$$

где c – константа интегрирования.

Окончательно решение для $y(t)$ получаем в виде

$$y(t) = S(t)^{-1} [\int f(t) e^{\int a_1(t) dt} dt + c]. \quad (1.2.5)$$

Полученное решение содержит оба составляющие – частное решение неоднородного уравнения и общее решение соответствующего однородного уравнения. Можно показать, что при вычислении интегрирующего множителя $S(t) = e^{\int a_1(t) dt}$ нет необходимости записывать постоянную интегрирования: учёт этой константы не приведёт к более общему виду окончательного решения.

В некоторых случаях при решении уравнений первого порядка возможно и использование более простого метода разделения переменных, но метод интегрирующего множителя применим во всех случаях, и является универсальным.

Пример 1.2.1. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} - ty = t.$$

Вычислим интегрирующий множитель

$$S(t) = e^{\int (-t) dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Воспользовавшись формулой (1.2.5), получим

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left[\int e^{-\frac{t^2}{2}} t dt + c \right] = e^{\frac{t^2}{2}} \left[\int e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) + c \right] = -1 + ce^{\frac{t^2}{2}}.$$

Для уравнений более высокого порядка получить аналитическое решение в общем случае не представляется возможным. Разберём почему. Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = 0$$

представлялось в форме e^{st} , где s – предполагается константой. В таком случае мы приходим к характеристическому уравнению

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Но в случае нестационарных систем коэффициенты a_i являются функциями времени, поэтому и корни соответствующего характеристического уравнения не являются константами, а также зависят от времени вопреки предположению. Это противоречие не позволяет записать решение нестационарного уравнения в виде e^{pt} .

Примером решаемого уравнения является уравнение Эйлера

$$a_0 (b + ct)^n s^n y + a_1 (b + ct)^{n-1} s^{n-1} y + \dots + a_{n-1} (b + ct) s y + a_n y = 0,$$

где a_i, b, c – константы.

Уравнение Эйлера путём подстановки $(b + ct) = e^z$ или $z = \ln(b + ct)$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример 1.2.2. Требуется найти общее решение однородного уравнения

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = 0. \quad (1.2.6)$$

Сделаем подстановку $e^z = t$, $z = \ln t$. Продифференцировав, получим $e^z dz = dt$, откуда $\frac{dz}{dt} = e^{-z}$.

Найдем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dz} e^{-z}. \quad (1.2.7)$$

Запишем выражение для второй производной

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} e^{-z} + \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dt} e^{-z} = -\frac{dy}{dz} e^{-2z} + \frac{d^2 y}{dz^2} e^{-2z}. \quad (1.2.8)$$

Подставляя найденные производные (1.2.7), (1.2.8) в исходное уравнение (1.2.6), получим

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + y = 0.$$

Решение этого уравнения очевидно

$$y = C_1 \cos z + C_2 \sin z = C_1(\ln t) + C_2(\ln t).$$

В случае если коэффициенты a_i в уравнении(1.2.1) являются полиномами t , решение получается в виде бесконечного ряда. Подобными примерами являются уравнения Бесселя и Лежандра.

Частное решение может быть найдено методом вариации параметров [1]. Этот метод пригоден как для уравнений с постоянными параметрами, так и для нестационарных уравнений. Но в этом случае предварительно должно быть найдено общее решение соответствующего однородного уравнения.

Если точное аналитическое решение получить не представляется возможным, применяют различные приближённые методы.

Достаточно распространённым методом является метод последовательных приближений, который особенно эффективен в случае так называемых квазистационарных систем, в которых изменение параметров происходит медленно (по сравнению с переходными процессами). Зафиксируем время в уравнении (1.2.3) $t=v$ и представим коэффициенты в левой части уравнения в виде двух составляющих – постоянной $a_i(v)$ и переменной $a_i^*(t-v)$:

$$a_i(t) = a_i(v) + a_i^*(t-v).$$

Таким образом, весь оператор в правой части также можно записать в виде подобных двух составляющих $A(p,t) = A(p,v) + A^*(p,t-v)$, а уравнение (1.2.3) будет иметь вид

$$A(p,v)y(t) = f(t) - A^*(p,t-v)y(t) = f(t) + F[y(t)]. \quad (1.2.9)$$

Решение полученного уравнения предполагается искать в виде ряда

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \dots \quad (1.2.10)$$

Предполагая малость переменной составляющей коэффициентов по сравнению с постоянной составляющей, для определения нулевого приближения $y_0(t)$ полагаем в (1.2.9) $F[y(t)] = 0$. Таким образом, уравнение для нулевого приближения будет иметь вид

$$A(p, \nu)y_0(t) = f(t).$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами и его решение не представляет никакой сложности.

Подставляя в правую часть уравнения (1.2.9) найденное нулевое приближение $y_0(t)$, а в левую часть – сумму двух слагаемых ряда (1.2.10), получим уравнение для первого приближения

$$A(p, \nu)y_1(t) = F[y_0(t)].$$

Повторяя изложенную процедуру, нетрудно получить рекуррентную формулу для вычисления k -го приближения

$$A(p, \nu)y_k(t) = F[y_{k-1}(t)].$$

Если очередная поправка $y_k(t)$ будет меньше наперёд заданной допустимой ошибки, то это свидетельствует о необходимости прекращения рекуррентной процедуры.

Полученный в результате решения ряд (1.2.10) сходится тем быстрее, чем медленнее меняются коэффициенты дифференциального уравнения (1.2.3).

1.2.2. Временные характеристики нестационарных систем

Рассмотрим переходную и весовую функции систем с переменными параметрами.

Поскольку коэффициенты дифференциального уравнения системы меняются с течением времени, эти функции будут зависеть от момента приложения входного воздействия. Таким образом, переходную функцию можно обозначить как $h(t-v, v) = h(\tau, v)$, где t – текущее время, отсчитываемое, например, от момента включения системы или момента начала наблюдения за ней или момента начала изменения параметров, v – время, соответствующее поступлению на вход единичного ступенчатого воздействия, τ – текущее время, отсчитываемое от момента приложения единичного ступенчатого воздействия (рис. 1.5).

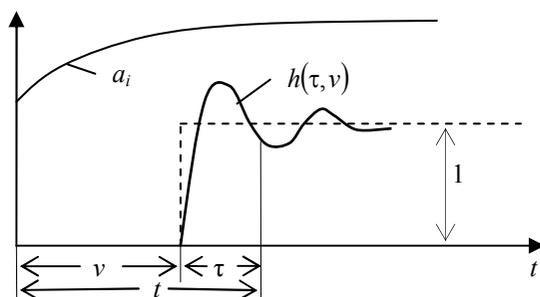


Рис. 1.5. Переходная характеристика нестационарной системы

Перейдём к весовой функции, которая является, как известно, реакцией на единичный импульс. Единичную импульсную функцию можно представить как предел отношения

$$\delta(t-v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1(t-v) - 1(t-(v+\Delta v))}{\Delta v}. \quad (1.2.11)$$

Выход системы при поступлении на вход воздействия (1.2.11), то есть весовую функцию, можно в силу принципа суперпозиции представить в виде разности смещённых на Δv переходных функций и изменённым в $1/\Delta v$ раз масштабом

$$w(t-v, v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{h(t-v, v) - h(t-(v+\Delta v), v+\Delta v)}{\Delta v}.$$

Правая часть последнего выражения – производная от переходной функции по v с обратным знаком, таким образом,

$$w(t-v, v) = -\frac{\partial h(t-v, v)}{\partial v}.$$

Весовая функция (равно как и переходная функция) является функцией двух переменных: времени v , соответствующего моменту поступления на вход единичного импульса, и текущего времени t . Таким образом, это некоторая поверхность (рис. 1.6). Для физически реализуемых систем реакция на некоторое воздействие не может появиться раньше этого воздействия, поэтому при $t < v$ весовая функция тождественно равна нулю $w \equiv 0$. Таким образом, при $t < v$ поверхность $w(t-v, v)$ переходит в плоскость $t=0$. Границе перехода поверхности $w(t-v, v)$ в плоскость $t=0$ соответствует биссектриса $t=v$.

Сечение поверхности весовой функции $w(t-v, v)$ вертикальной плоскостью, параллельной оси t (рис. 1.6, *a*), даёт весовую функцию для фиксированного момента приложения единичного импульсного воздействия

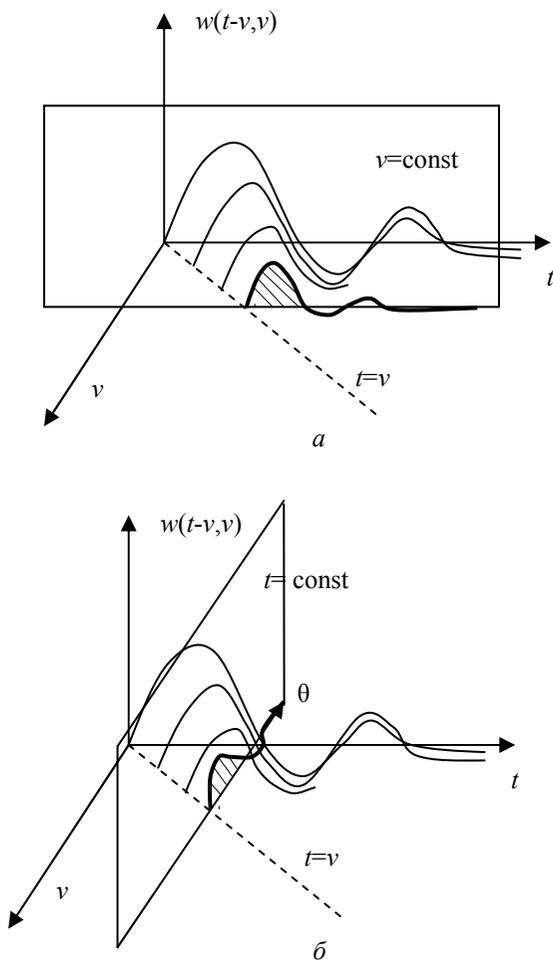


Рис. 1.6. Весовая характеристика

($v=\text{const}$). Эта функция носит название нормальной функции веса. Она является параметрической функцией, так как в неё входит фиксированный параметр $v=\text{const}$.

Нормальная весовая функция зависит от времени t , но может быть сделана и функцией аргумента $\tau = t - v$ подстановкой $t = v + \tau$

$$w(t - v, v) = w(\tau, v), v = \text{const}.$$

Если провести сечение поверхности весовой функции $w(t - v, v)$ вертикальной плоскостью, параллельной оси v (рис. 1.6, б), то получится кривая, образованная ординатами семейства нормальных весовых функций для фиксированного значения времени $t = \text{const}$. Эту кривую можно получить путём обработки семейства нормальных весовых функций, полученных для различных моментов приложения входного импульса v .

Зависимость $w(t - v, v)$ от смещения v при фиксированном моменте времени t называется сопряжённой весовой функцией. Сопряжённая весовая функция также является параметрической функцией, так как содержит параметр $t = \text{const}$. Сопряжённую весовую функцию можно представить также как функцию аргумента $\theta = t - v$, который называется реверс-смещением, поскольку отсчитывается от точки $v = t$ в сторону, противоположную смещению v . Это осуществляется подстановкой в сопряжённую функцию веса значения $v = t - \theta$ при $t = \text{const}$

$$w(t - v, v) = w(\theta, t - \theta), t = \text{const}.$$

Если параметры системы не меняются, весовая функция является функцией только времени $\tau = t - v$ и не зависит от момента приложения

импульса v . Рельеф весовой функции в этом случае получается цилиндрическим, а оба рассмотренных ранее сечения совпадают по форме и отличаются только знаками аргументов. Если речь идёт о реверс-смещении, то получаем полное совпадение двух весовых функций – нормальной и сопряжённой $w(\tau) = w(\theta)$.

Весовая функция является, как и для систем с постоянными параметрами, исчерпывающей характеристикой САУ. Она характеризует поведение системы во времени и по её виду можно судить о качестве регулирования.

Кроме того, по известной функции веса можно получать процесс на выходе системы при заданном входном воздействии. Действительно, при входном сигнале $g(t)$ выход может быть подсчитан согласно принципу суперпозиции, как сумма (в пределе интеграл) элементарных реакций на импульсы с амплитудой $g(v)$, $0 \leq v \leq t$. Таким образом,

$$y(t) = \int_0^t w(t-v, v) g(v) dv. \quad (1.2.12)$$

Учитывая физическую реализуемость системы, верхний предел в последнем выражении можно поменять на бесконечность

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(t-v, v) g(v) dv. \quad (1.2.13)$$

Переходя к реверс-смещению, получим интеграл свёртки

$$y(t) = \int_0^t w(\theta, t - \theta) g(t - \theta) d\theta. \quad (1.2.14)$$

Как видно, в выражениях (1.2.12)-(1.2.14) используется сопряжённая функция веса.

Весовую функцию можно найти, решая дифференциальное уравнение системы. Вспомним общее решение дифференциального уравнения (1.2.3) при нулевых начальных условиях по методу вариации параметров (см. [1], с. 16)

$$y(t) = \int_0^t f(\lambda) \left[\frac{1}{a_0(\lambda)V(\lambda)} \sum_{i=1}^n y_i(t)V_{ni}(\lambda) \right] d\lambda, \quad (1.2.15)$$

где $V(\lambda)$ – определитель Вронского, $V_{ni}(\lambda)$ – алгебраическое дополнение вронскиана, а $y_i(t)$ – линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения.

Выражение в квадратных скобках последнего соотношения известно как однородная функция Грина $G(t - \lambda, \lambda)$

$$G(t - \lambda, \lambda) = \frac{1}{a_0(\lambda)W(\lambda)} \sum_{i=1}^n y_i(t)V_{ni}(\lambda). \quad (1.2.16)$$

Функция Грина часто используется в математической литературе и обладает целым рядом замечательных свойств.

С учётом обозначения (1.2.16) уравнение (1.2.15) можно записать как

$$y(t) = \int_0^t f(\lambda) G(t - \lambda, \lambda) d\lambda. \quad (1.2.17)$$

Сравнивая выражения (1.2.17) и (1.2.12) можно сделать вывод, что если $f(t) = g(t)$, то есть $B(p,t)=1$, то весовая функция совпадает с функцией Грина при $0 < v < t$

$$w(t-v, v) = \begin{cases} G(t-v, v) & \text{при } 0 < v < t, \\ 0 & \text{при } t < v. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Вычислить функцию Грина можно воспользовавшись формулой (1.2.16), если известны составляющие $y_i(t)$ общего решения однородного уравнения. Множители в выражении (1.2.16) выглядят следующим образом

$$V(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) & \dots & y_n(\lambda) \\ \dot{y}_1(\lambda) & \dot{y}_2(\lambda) & \dots & \dot{y}_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\lambda) & y_2^{(n-1)}(\lambda) & \dots & y_n^{(n-1)}(\lambda) \end{vmatrix}, \quad (1.2.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i(t) V_{mi}(\lambda) &= \begin{vmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) & \dots & y_n(\lambda) \\ \dot{y}_1(\lambda) & \dot{y}_2(\lambda) & \dots & \dot{y}_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\lambda) & y_2^{(n-2)}(\lambda) & \dots & y_n^{(n-2)}(\lambda) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(\lambda) & y_2(\lambda) & \dots & y_n(\lambda) \\ \dot{y}_1(\lambda) & \dot{y}_2(\lambda) & \dots & \dot{y}_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\lambda) & y_2^{(n-1)}(\lambda) & \dots & y_n^{(n-1)}(\lambda) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Но в общем случае полином правой части не равен единице $B(p, t) \neq 1$ и функция Грина не совпадает с весовой функцией. Тогда вынуждающая функция будет равна

$$f(t) = B(p, t)g(t) = b_0(t)p^m g(t) + b_1(t)p^{m-1} g(t) + \dots + b_m(t)g(t),$$

где $p = d/dt$, а $m < n$. В этом более общем случае для определения весовой функции при известной функции Грина можно воспользоваться уравнением (1.2.17). Положим $g(t) = \delta(t - v)$. Тогда выходом системы будет $y(t) = w(t - v, v)$ и уравнение (1.2.15) примет вид

$$w(t - v, v) = \int_0^t [B(p, \lambda)\delta(\lambda - v)]G(t - \lambda, \lambda)d\lambda. \quad (1.2.21)$$

Необходимо понимать, что соотношение (1.2.21) позволяет определить весовую функцию только для $0 < v < t$. Поскольку подынтегральное выражение отлично от нуля только при $\lambda = v$, пределы интегрирования можно заменить на $-\infty$ и $+\infty$.

Уравнение (1.2.21) не настолько сложное, как это может показаться на первый взгляд. Составляющие выражения в квадратных скобках имеют вид

$$b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(\lambda - v)}{d\lambda^k} = b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(v - \lambda)}{d\lambda^k}.$$

Интеграл, содержащий такую составляющую, равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\lambda, \lambda) b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(v-\lambda)}{d\lambda^k} d\lambda = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\lambda, \lambda) b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(v-\lambda)}{d(v-\lambda)^k} d\lambda.$$

Правая часть последнего выражения – интеграл свёртки функции $G(t-\lambda, \lambda) \cdot b_{m-k}(\lambda)$ и k -ой производной δ -функции. Воспользуемся свойством интеграла свёртки

$$f_1^{(k)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(k)}(t),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции, $*$ – операция свёртки. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\lambda, \lambda) b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(v-\lambda)}{d\lambda^k} d\lambda = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v-\lambda) \frac{d^k}{d\lambda^k} [G(t-\lambda, \lambda) b_{m-k}(\lambda)] d\lambda.$$

Теперь применим фильтрующее свойство δ -функции¹. Окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\lambda, \lambda) b_{m-k}(\lambda) \frac{d^k \delta(v-\lambda)}{d\lambda^k} d\lambda = (-1)^k \frac{d^k}{dv^k} [G(t-v, v) b_{m-k}(v)],$$

а весовая функция согласно (1.2.19) будет иметь вид

$$w(t-v, v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dv^k} [G(t-v, v) b_{m-k}(v)] & \text{при } 0 < v < t, \\ 0 & \text{при } t < v. \end{cases} \quad (1.2.22)$$

¹ Интеграл от произведения δ -функции на произвольную функцию равен значению этой функции в точке, в которой δ -функция принимает бесконечное значение.

Таким образом, при вычислении весовой функции можно пользоваться формулой (1.2.18) или (1.2.22) в зависимости от правой части дифференциального уравнения.

Пример 1.2.3. Получить весовую функцию для системы, описываемой дифференциальным уравнением с переменными параметрами

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4t \frac{dy}{dt} + 2y = g. \quad (1.2.23)$$

Данное уравнение является уравнением Эйлера, поэтому делаем подстановку $e^z = t$. Тогда $dt = e^z dz$, а $\frac{dz}{dt} = e^{-z}$. Вычисляем производные

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} e^{-z}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} e^{-2z} - \frac{dy}{dz} e^{-z}.$$

Подставляя найденные производные в уравнение (1.2.23), получим соответствующее однородное уравнение в виде

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + 3 \frac{dy}{dz} + 2y = 0.$$

Общим решением последнего уравнения будет $y_0(z) = C_1 e^{-z} + C_2 e^{-2z}$ или, переходя к старой переменной t

$$y_0(t) = \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2}.$$

Таким образом, $y_1 = \frac{1}{t}$, $y_2 = \frac{1}{t^2}$. Вронскиан согласно (1.2.19) равен

$$V(v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & \frac{1}{v^2} \\ -\frac{1}{v^2} & -\frac{2}{v^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v^4}.$$

Согласно (1.2.20) получим

$$\sum y_i(t)V_{ni}(v) = (-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{v} & \frac{1}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{vt}{t^2v^2}.$$

Так как $B(p,t)=1$, пользуемся формулами (1.2.18) и (1.2.16)

$$w(t-v, v) = \frac{1}{v^2}(-v^4) \cdot \frac{v-t}{t^2v^2} = \frac{t-v}{t^2}, \text{ при } v \leq t.$$

1.2.3. Преобразование Лапласа и нестационарные системы

Одно из основных применений преобразования Лапласа для систем с постоянными параметрами заключалось в возможности перехода от дифференциальных уравнений относительно функций времени к алгебраическим уравнениям относительно соответствующих изображений по Лапласу. Вообще говоря, любое дифференциальное уравнение можно почленно преобразовать по Лапласу, но алгебраические уравнения получаются только в том случае, если коэффициенты уравнения посто-

яны. В случае переменных коэффициентов мы приходим к другому дифференциальному или интегральному уравнению. При решении однородных уравнений, коэффициенты которых являются полиномами t , полезно пользоваться свойством дифференцирования изображения

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}. \quad (1.2.24)$$

Пример 1.2.4. Найти решение дифференциального уравнения

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - (t-1)y = 0 \quad (1.2.25)$$

с начальным условием $y(+0)=1$.

Применим к уравнению (1.2.25) преобразование Лапласа с учётом свойства (1.2.24)

$$-\frac{d}{ds} [s^2 Y(s) - sy(+0) - y'(0)] + sY(s) - y(+0) + \frac{dY(s)}{ds} + Y(s) = 0.$$

Упрощая левую часть, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно $Y(s)$

$$(s+1) \frac{dY(s)}{ds} + Y(s) = 0.$$

Решить это уравнение можно либо разделением переменных, либо методом интегрирующего множителя. Действительно, разделяя переменные, получим

$$\frac{dY(s)}{Y(s)} = -\frac{ds}{s+1}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln Y(s) = -\ln(s+1) + \ln C = \ln \frac{C}{s+1},$$

откуда $Y(s) = \frac{C}{s+1}$. Переходя к оригиналу, получим $y(t) = Ce^{-t}$. Учитывая начальное условие $y(+0)=1$, постоянная интегрирования $C=1$, следовательно $y(t) = e^{-t}$.

В общем случае использование свойства (1.2.24) даёт дифференциальное уравнение относительно $Y(s)$ порядка равного высшей степени полинома от t . Следует заметить, что получившееся уравнение часто нелегко решить: приведённый пример скорее исключение.

Каждый член уравнения с переменными коэффициентами – это произведение известной и неизвестной функции времени. Для вычисления преобразования Лапласа от такого члена можно воспользоваться теоремой о свёртке в области изображений. В итоге получится сложное интегральное уравнение относительно $Y(s)$. Поскольку результирующее уравнение редко оказывается проще, чем исходное, то непосредственное применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами малоперспективно в плане получения решения такого уравнения.

В тех случаях, когда преобразование Лапласа неприемлемо, можно попытаться поискать какое-либо другое эффективное интегральное пре-

образование. Для определённых специальных случаев подобные преобразования разработаны. Наиболее известные из них преобразование Меллина и Ханкеля.

1.2.4. Параметрическая передаточная функция

Второе применение преобразования Лапласа – это введение понятия передаточной функции, которую можно определить по аналогии со стационарными системами как преобразование Лапласа от весовой функции.

Рассмотрим поведение системы при экспоненциальном входном сигнале

$$g(t) = e^{st}, \quad (1.2.26)$$

где s – в общем случае комплексная величина, а $-\infty < t < \infty$. Известно, что реакция системы с постоянными параметрами на такой входной сигнал есть

$$y(t) = W(s)e^{st}, \quad (1.2.27)$$

где $W(s)$ – передаточная функция системы.

Применив интеграл (1.2.14), найдём реакцию нестационарной системы на входной сигнал (1.2.26). При этом учтём, что сигнал существует все время $-\infty < t < \infty$, поэтому верхний предел будет $+\infty$

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) e^{s(t-\theta)} d\theta = e^{st} \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) e^{-s\theta} d\theta. \quad (1.2.28)$$

Сравнивая выражения (1.2.27) и (1.2.28) можно определить параметрическую передаточную функцию нестационарной системы как преобразование Лапласа сопряжённой весовой функции

$$W(s, t) = L\{w(\theta, t - \theta)\} = \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) e^{-s\theta} d\theta. \quad (1.2.29)$$

Формула (1.2.29) может быть использована для получения передаточной функции, если предварительно получена весовая функция.

Пример 1.2.5. Получить передаточную функцию системы, описываемой уравнением

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4t \frac{dy}{dt} + 2y = g.$$

Весовая функция для такой системы была найдена в примере 1.2.3

$$w(t - v, v) = \frac{t - v}{t^2} \text{ при } v \leq t.$$

Как функция реверс-смещения она имеет вид

$$w(\theta, t - \theta) = \frac{\theta}{t^2} \text{ при } \theta \geq 0.$$

Тогда параметрическая передаточная функция будет являться преобразованием Лапласа сопряжённой весовой функции по переменной θ

$$W(s, t) = \frac{1}{t^2} L\{\theta\} = \frac{1}{t^2 s^2}. \quad (1.2.30)$$

С учётом обозначения (1.2.29) реакция системы на экспоненциальный сигнал будет равна

$$y(t) = W(s, t) \cdot e^{st}. \quad (1.2.31)$$

Дифференциальное уравнение системы (1.2.2) при входном сигнале (1.2.26) и выходном сигнале (1.2.31) будет иметь вид

$$A(p, t) (W(s, t) e^{st}) = B(p, t) e^{st}, \quad (1.2.32)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, s – комплексная величина.

Уравнение (1.2.32) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами и может служить для нахождения параметрической передаточной функции. Порядок этого уравнения тот же, что и уравнения для определения весовой функции, но его решение в некоторых случаях может оказаться проще. Поскольку входной сигнал $g(t)$ существует всё время $-\infty < t < \infty$, то $W(s, t)$ определяет только частное решение (вынужденную составляющую) уравнения (1.2.32).

Уравнение (1.2.32) можно упростить ввиду простоты дифференцирования экспоненты. Типичный член в правой части равен

$$b_{m-k}(t) p^k e^{st} = b_{m-k}(t) \frac{d^k}{dt^k} e^{st} = b_{m-k}(t) s^k e^{st},$$

поэтому

$$B(p,t)e^{st} = e^{st}B(s,t), \quad (1.2.33)$$

где $B(s,t)$ уже не оператор, а функция s и t .

Типичный член в левой части уравнения (1.2.32) равен

$$a_{n-k}(t)p^k[W(s,t)e^{st}] = a_{n-k}(t)\frac{d^k}{dt^k}[W(s,t)e^{st}].$$

В квадратных скобках произведение двух функций времени. Производная k -го порядка от произведения двух функций f и g вычисляется по формуле

$$p^k(f \cdot g) = \frac{d^k}{dt^k}(f \cdot g) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}f}{dt^{k-j}} \cdot \frac{d^jg}{dt^j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^{k-j}f \cdot p^jg,$$

где $\binom{k}{j}$ – биномиальные коэффициенты, фигурирующие в формуле би-

нома Ньютона $(a+b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j}b^j$. Полагая, что первая функция –

$W(s,t)$, а вторая – e^{st} , получим

$$p^k(W(s,t)e^{st}) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^{k-j}W(s,t) \cdot s^j \cdot e^{st} = e^{st}(p+s)^k W(s,t).$$

Следовательно, левая часть уравнения (1.2.32) примет вид

$$A(p, t)(W(s, t)e^{st}) = e^{st} A(p + s, t)W(s, t). \quad (1.2.34)$$

Окончательно с учётом выражений (1.2.33) и (1.2.34) из уравнения (1.2.32) получим уравнение относительно параметрической передаточной функции $W(s, t)$

$$A(p + s, t)W(s, t) = B(s, t), \text{ где } p = \frac{d}{dt}. \quad (1.2.35)$$

Уравнение (1.2.35) можно представить и в другом виде

$$\begin{aligned} A(s, t)W(s, t) + \frac{dA(s, t)}{ds} \cdot \frac{dW(s, t)}{dt} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 A(s, t)}{ds^2} \cdot \frac{d^2 W(s, t)}{dt^2} + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \frac{d^n A(s, t)}{ds^n} \cdot \frac{d^n W(s, t)}{dt^n} = B(s, t). \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

Если не удаётся найти точное решение уравнения (1.2.35) или (1.2.36) (а чаще всего так и бывает), то возможно применение численных методов или метода последовательных приближений. Рассмотрим этот метод более подробно. Введём для краткости в уравнении (1.2.36) обозначение

$$F[W(s, t)] = \left[\frac{dA(s, t)}{ds} \cdot \frac{dW(s, t)}{dt} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n A(s, t)}{ds^n} \cdot \frac{d^n W(s, t)}{dt^n} \right].$$

Тогда уравнение (1.2.36) примет вид

$$A(s, t)W(s, t) = B(s, t) + F[W(s, t)]. \quad (1.2.37)$$

Решение уравнения (1.2.37) ищем в виде ряда

$$W(s,t) = W_0(s,t) + W_1(s,t) + W_2(s,t) + \dots \quad (1.2.38)$$

Для определения нулевого приближения $W_0(s,t)$ полагаем в (1.2.37) $F[W(s,t)] = 0$. Получим $W_0(s,t) = \frac{B(s,t)}{A(s,t)}$. Подставляя найденное нулевое приближение в правую часть уравнения (1.2.37) и ограничиваясь в левой части двумя слагаемыми ряда (1.2.38), получим уравнение относительно первого приближения

$$W_1(s,t) = -\frac{F[W_0(s,t)]}{A(s,t)}.$$

Продолжая процедуру, для k -го приближения получаем рекуррентное соотношение

$$W_k(s,t) = -\frac{F[W_{k-1}(s,t)]}{A(s,t)}.$$

Ряд (1.2.38) сходится тем быстрее, чем медленнее меняются коэффициенты уравнения (1.2.34) $a_i(t)$ и $b_i(t)$.

Зная параметрическую передаточную функцию можно, как и в случае систем с постоянными параметрами, найти реакцию системы на произвольное воздействие. Действительно, реакция системы на произвольный входной сигнал $g(t)$, согласно выражению (1.2.13) равна

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(t-v)g(v)dv.$$

Заменим в этом интеграле входной сигнал $g(t)$ обратным преобразованием по Лапласу от его изображения $G(s)$ и поменяем местами порядок интегрирования по v и по s

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(t-v, v) \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) e^{sv} ds \right] dv = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) \left[\int_0^{\infty} w(t-v, v) e^{sv} dv \right] ds.$$

Выражение в квадратных скобках правой части – это, согласно формуле (1.2.13), реакция на экспоненту e^{sv} , которая, как было выяснено выше, равна $(e^{st} \cdot W(s, t))$, поэтому подставляя это выражение в квадратные скобки, получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) W(s, t) e^{st} ds = L^{-1}\{G(s)W(s, t)\}. \quad (1.2.39)$$

При определении обратного преобразования Лапласа относительно переменной s время t рассматривается как параметр.

Попутно следует обратить внимание, что

$$Y(s) \neq W(s, t) \cdot G(s),$$

так как $Y(s) = L\{y(t)\}$ не может быть функцией времени t .

Следует ещё раз подчеркнуть, что параметрическая передаточная функция является лишь частным решением уравнения (1.2.35). Но, несмотря на то, что при учёте общего решения будут получаться различные $W(s, t)$, можно показать, что реакция системы, вычисленная по формуле (1.2.39) при этом не изменится.

Пример 1.2.6. Найти реакцию системы, заданной дифференциальным уравнением

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4t \frac{dy}{dt} + 2y = g$$

на входной сигнал $g(t) = t e^{-t} \cdot 1(t)$.

Передаточная функция для этой системы была получена в примере 1.2.5 – $W(s, t) = \frac{1}{t^2 s^2}$. Изображение по Лапласу входного сигнала есть

$t e^{-t} \Rightarrow \frac{1}{(s+1)^2}$. Воспользовавшись формулой (1.2.39), получим

$$y(t) = L^{-1}\{G(s)W(s, t)\} = \frac{1}{t^2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = \frac{1}{t^2} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{st}}{s^2(s+1)^2} ds.$$

Обратное преобразование Лапласа вычислим, воспользовавшись теоремой о вычетах.

Вычет $\frac{e^{st}}{s^2(s+1)^2}$ в кратном полюсе $s=0$ равен

$$\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{(s+1)^2} \right) \right]_{s=0} = t - 2.$$

Вычет $\frac{e^{st}}{s^2(s+1)^2}$ в кратном полюсе $s=-1$ равен

$$\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s^2} \right) \right]_{s=-1} = (t+2)e^{-t}.$$

Окончательно получим

$$y(t) = \frac{1}{t^2} [(t-2) + (t+2)e^{-t}] = \frac{1}{t} \left[\left(1 - \frac{2}{t}\right) + \left(1 + \frac{2}{t}\right)e^{-t} \right].$$

1.2.5. Устойчивость и качество регулирования

Для систем с переменными параметрами понятие устойчивости имеет некоторые особенности. В частности, теряет смысл понятие асимптотической устойчивости.

В большом числе случаев систему можно считать квазистационарной. Будет считать такую систему устойчивой на заданном интервале времени $[0, T]$, если её нормальная функция веса затухает для всех фиксированных v , удовлетворяющих неравенству $0 \leq v \leq T$, то есть

$$I_v = \int_0^{\infty} w(\tau, v) d\tau < \infty. \quad (1.2.40)$$

Для определения устойчивости может быть использована и сопряжённая функция веса, связанная с параметрической передаточной функцией. Условие её затухания

$$I_t = \int_0^{\infty} w(\theta, t - \theta) d\theta < \infty \quad (1.2.41)$$

для всех $0 \leq t \leq T$ не всегда совпадает с условием (1.2.40). Но для систем, у которых оператор правой части дифференциального уравнения $B(p, t) = 1$, условия (1.2.40) и (1.2.41) эквивалентны.

Поскольку сопряженная весовая функция связана с передаточной функцией, то условие (1.2.41) приводит к соответствующим условиям относительно передаточной функции. В частности, это касается полюсов передаточной функции, а также критериев устойчивости Рауса-Гурвица, Михайлова и Найквиста.

Из методов исследования квазистационарных систем наиболее развиты два метода: метод замороженных коэффициентов и метод замороженных реакций.

Метод замороженных коэффициентов заключается в том, что переменные коэффициенты уравнений фиксируются («замораживаются» – отсюда и название метода) в определённые наиболее интересные с точки зрения поведения системы моменты времени. Затем получают передаточную функцию обычным порядком и на основе этой передаточной функции исследуют систему.

Метод замороженных реакций заключается в точном вычислении переходной или весовой функции, фиксации момента поступления входного воздействия v , и уже затем по полученным обычным функциям вычисляют передаточную функцию, на основе которой и исследуется система.

Качество регулирования может быть оценено по виду переходного процесса (по виду переходной функции или функции веса). Для этой цели должны использоваться нормальная переходная функция и нормальная весовая функции, определённые для фиксированных моментов поступления входного воздействия $0 \leq v \leq T$.

Критерии точности, основанные на передаточной функции, также имеют место. Например, установившуюся ошибку воспроизведения задающего воздействия в следящих системах для произвольного задающего воздействия $g(t)$ можно представить так же, как и для систем с постоянными параметрами, рядом ошибок

$$\varepsilon(t) = c_0(t)g(t) + c_1(t)\dot{g}(t) + \frac{c_2(t)}{2!}\ddot{g}(t) + \dots + \frac{c_k(t)}{k!}g^{(k)}(t) + \dots \quad (1.2.42)$$

Коэффициенты ошибки вычисляются по той же формуле, что и для систем с постоянными параметрами, но, в отличие от последних, зависят от времени

$$c_k(t) = \left. \frac{d^k}{ds^k} \Phi_\varepsilon(s, t) \right|_{s=0}, \quad (1.2.43)$$

где $\Phi_\varepsilon(s, t)$ – параметрическая передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

Представление ошибки в виде (1.2.42) и (1.2.43) предполагает, что параметрическая передаточная функция и соответствующие коэффициенты ошибки со временем меняются слабо, то есть их можно приблизительно считать не зависящими от t за время переходного процесса.

Сделаем некоторые выводы по рассмотренной теме.

1. Математическое описание системы с переменными параметрами получают в виде: уравнений с переменными коэффициентами, временных характеристик (функции веса, пе-

реходной функции) и параметрических передаточных функций.

2. Аналитическое решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами возможно только для уравнений первого порядка или для некоторых специальных видов уравнений. Как правило, для решения уравнений с переменными коэффициентами приходится пользоваться численными методами или приближенными методами.
3. Для решения нестационарных уравнений возможно применение преобразования Лапласа.
4. Для получения реакции системы на произвольное входное воздействие возможно использование весовой функции. Также выход системы может быть определён с помощью передаточной функции.
5. Переходная и весовая функции зависят от двух аргументов: различают нормальную и сопряжённую временные функции. Получить весовую функцию можно непосредственно из дифференциального уравнения системы.
6. Устойчивость и качество регулирования нестационарной системы определяются нормальной весовой функцией.
7. Передаточную функцию нестационарной системы можно получить путём решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, либо из сопряжённой весовой функции.
8. Большинство систем с переменными параметрами являются квазистационарными системами.

9. Наиболее распространёнными методами исследования квазистационарных систем являются метод замороженных коэффициентов и метод замороженных реакций.
10. Устойчивость и качество регулирования (в том числе точность) квазистационарных систем могут быть исследованы с помощью параметрической передаточной функции.

1.3. Импульсные системы

Импульсные системы относятся к дискретным системам. САУ могут быть дискретными либо потому, что задающее или возмущающее воздействие по природе дискретно, либо потому, что в цепи управления имеется хотя бы одно звено, преобразующее непрерывные (аналоговые) сигналы в дискретные. Подобного рода звено называют звеном прерывистого действия, а процесс преобразования непрерывного сигнала в дискретный – квантованием.

Импульсными системами называются системы, в которых осуществляется квантование сигнала во времени.

Устройства, осуществляющие квантование во времени, называются импульсными элементами. Выходной сигнал импульсного элемента представляет собой серию импульсов. Обычно один из параметров импульса – амплитуда, длительность, период следования – изменяется в соответствии со значениями входной непрерывной величины в дискретные моменты времени. Этот процесс изменения одного из параметров импульса в функции от входной величины называется модуляцией. Квантование же по времени вместе с модуляцией называется импульс-

ной модуляцией. Следовательно, импульсный элемент осуществляет импульсную модуляцию входного непрерывного сигнала.

Так как в импульсном элементе сохраняется линейная зависимость между непрерывным входным сигналом и соответствующим параметром импульсов, то импульсная модуляция является линейной операцией, а импульсный элемент – линейным элементом. Импульсная система является линейной, если все остальные звенья в системе – линейны.

Математическое описание импульсных систем – это разностные уравнения, z -преобразование, дискретные передаточные функции, дискретные уравнения состояния. Поскольку это математическое описание применяется также для цифровых систем, все вопросы, касающиеся анализа и синтеза импульсных систем, подробно рассмотрены в курсе «Цифровые системы автоматического управления» [2].

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Общие понятия

С точки зрения математического описания САУ делятся на линейные и нелинейные. Нелинейная система – это система, содержащая хотя бы одно нелинейное звено, то есть звено, описываемое нелинейным уравнением.

Все реальные звенья являются, строго говоря, нелинейными, однако часто имеется возможность, ограничиваясь рассмотрением малых отклонений от установившихся режимов, свести задачу к исследованию линейной модели реальной системы путём линеаризации последней.

Условия линеаризации звеньев определяют область применения рассмотренной в первой части теории линейных САУ.

Кроме того, теория линейных САУ может быть применена и для приближённого исследования систем, содержащих и существенно нелинейные звенья, если нелинейности в таких звеньях достаточно малы и ими в первом приближении можно пренебречь. Примером существенной нелинейности, которой никогда нельзя пренебречь, является релейная характеристика. Включение в систему звена с такой характеристикой придает системе принципиально новые свойства.

Нелинейности значительно усложняют исследование систем, так как нет общих методов решения описывающих их нелинейных уравнений. Однако в настоящее время имеется ряд методов решения отдельных классов нелинейных задач. Эти методы достаточно просты и позволяют

путём совместного их применения успешно решать задачи анализа нелинейных систем.

Конечно, нелинейности затрудняют исследование САУ, однако их нельзя рассматривать как обязательно нежелательное явление. Нелинейности могут в равной степени оказывать как вредное, так и полезное воздействие на работу системы. Более того, наряду с нелинейностями, присутствующими в САУ помимо нашего желания, например, в объекте управления, в устройство управления могут специально вводить различные нелинейности с целью получения определённого положительного эффекта.

Нелинейности придают САУ ряд качественно новых свойств, невозможных в линейных системах. В динамическом отношении нелинейные системы неизмеримо богаче, чем линейные.

Перечислим только основные особенности поведения нелинейных систем.

1. Выходная величина в линейных системах может неограниченно возрастать (в неустойчивых системах) только при $t \rightarrow \infty$. В нелинейных системах выходной сигнал может неограниченно возрастать на ограниченном интервале времени.
2. Выходной сигнал линейной устойчивой системы стремиться к нулю при отсутствии входного сигнала. Для нелинейной системы это не обязательно. Например, триггер имеет два устойчивых состояния, одно из которых ненулевое.
3. В линейной системе незатухающие колебания могут существовать только у системы, находящейся на границе устойчивости. При этом такая система непригодна для работы. В

нелинейных системах могут быть незатухающие колебания (автоколебания). В случае достаточной малости этих автоколебаний такая система вполне работоспособна. В пространстве состояний незатухающие колебания соответствуют замкнутой траектории под названием предельный цикл.

4. В устойчивой линейной системе при наличии входного гармонического сигнала выходной сигнал в установившемся режиме также гармонический с той же частотой, что и входной сигнал. В нелинейных системах это может быть не так.
5. При отсутствии входного воздействия в нелинейных системах в зависимости от начальных условий может быть несколько устойчивых состояний или устойчивых предельных циклов.
6. В нелинейных системах возможно резкое (скачкообразное) изменение амплитуды и (или) частоты выходной величины при плавном изменении входной величины или при плавном изменении какого-либо параметра системы.

2.2. Типовые нелинейные звенья и их уравнения

В результате математического описания нелинейных САУ составляется структурная схема, содержащая линейные (точнее, линеаризованные) и существенно нелинейные звенья. При описании последних, в свою очередь, осуществляется идеализация с целью упрощения этого описания вплоть до перехода в большинстве случаев к *типovým* нелинейностям.

Все нелинейности можно подразделить на следующие виды.

1. Статические нелинейности. Все статические характеристики являются однозначными. К типовым нелинейностям этого типа можно отнести:
 - а) релейную характеристику,
 - б) характеристику усилителя с ограничением,
 - в) характеристику усилителя с зоной нечувствительности.
2. Динамические нелинейности. К нелинейностям такого типа относятся:
 - а) петля гистерезиса,
 - б) люфт,
 - в) упор,
 - г) динамические нелинейности с нелинейными дифференциальными уравнениями, включающими произведения или нелинейные функции производных.
3. Нелинейности структуры.
4. Нелинейности логического типа.
5. Нелинейности самонастройки и оптимизации.
6. Нелинейные законы управления:
 - а) функциональные,
 - б) логические,
 - в) параметрические, когда имеются нелинейные функции от параметров, входящих в математическое описание алгоритма управления.

Рассмотрим некоторые типовые нелинейности более подробно.

2.2.1. Однозначные нелинейности

Релейную характеристику (рис. 2.1, *a*) можно описать соотношениями

$$x_2 = \begin{cases} c & \text{при } x_1 > 0, \\ 0 & \text{при } x_1 = 0, \\ -c & \text{при } x_1 < 0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где x_1 – входной сигнал нелинейного звена, x_2 – выходной сигнал.

Разновидностью характеристики (2.2.1) обладает трёхпозиционное реле или реле с зоной нечувствительности (рис.2.1, *б*) с уравнением

$$x_2 = \begin{cases} c & \text{при } x_1 > a, \\ 0 & \text{при } |x_1| \leq a, \\ -c & \text{при } x_1 < -a. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Дальнейшим развитием подобных характеристик являются многоступенчатые характеристики (рис. 2.1, *в*), получающиеся в результате квантования сигнала по уровню (амплитуде).

Усилитель с ограничением имеет идеализированную характеристику, изображённую на рис. 2.1, *г*. Аналитический вид этой зависимости

$$x_2 = \begin{cases} c & \text{при } x_1 > a, \\ kx_1 & \text{при } |x_1| \leq a, \\ -c & \text{при } x_1 < -a. \end{cases}$$

Идеализированная характеристика усилителя с зоной нечувствительности приведена на рис. 2.1, *д* и задана соотношением

$$x_2 = \begin{cases} k(x_1 - a) & \text{при } x_1 > a, \\ 0 & \text{при } |x_1| \leq a, \\ k(x_1 + a) & \text{при } x_1 < -a. \end{cases}$$

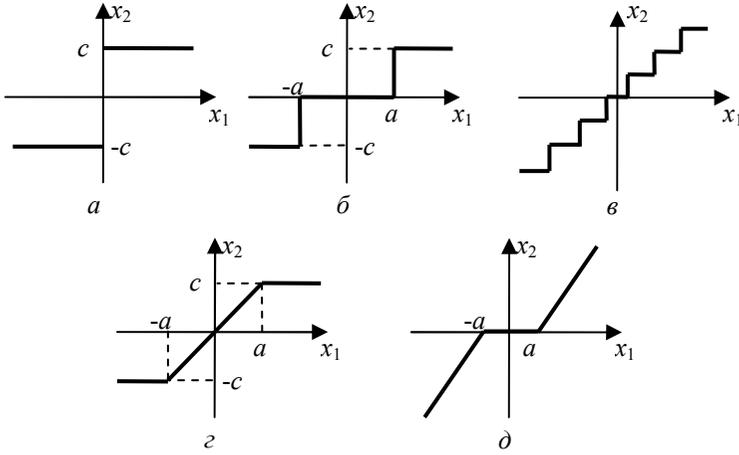


Рис. 2.1. Статические нелинейности

Разумеется, возможны и различные комбинации рассмотренных характеристик. Все подобные характеристики являются кусочно-линейными.

2.2.2. Двухзначные характеристики

Петля гистерезиса (рис. 2.2, а) является типичным представителем двухзначных характеристик. Такой вид имеет, например, кривая намагничивания в катушке со стальным сердечником. Петля гистерезиса относится к динамическим нелинейностям, поскольку значение функции зависит не только от самого аргумента, но и от скорости его изменения

(точнее, от знака скорости). Механическое реле со стальным сердечником также имеет двузначную характеристику с гистерезисом. Например, в двухпозиционном поляризованном реле при его симметричной настройке переключение контактов в одном направлении происходит при вполне определенном напряжении, а переключение в обратном направлении происходит при таком же напряжении, но противоположного знака (рис. 2.2, б). Реальное трёхпозиционное реле также обладает двузначной характеристикой с гистерезисом (рис. 2.2, в).

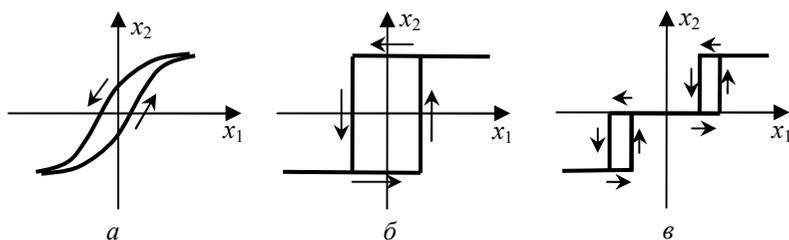


Рис. 2.2. Двузначные характеристики

2.2.3. Многозначные характеристики

К многозначным характеристикам относится характеристика звена типа «люфт» или «сухое трение». Такая нелинейность часто встречается в механических системах и связана она с наличием зазоров в системе передач вращательного или поступательного движения, либо с сухим (кулоновым) трением в таких системах. Один из примеров механической системы с нелинейностью типа «люфт», приведен на рис. 2.3, а.

Ведомый (вторичный) вал не начнет вращаться, пока не будет выбран люфт между вращающейся частью ведущего (первичного) вала и дужкой,

прикрепленной к вторичному валу. При изменении направления вращения первичного вала, последний свободно поворачивается на некоторый угол, в то время когда вторичный вал неподвижен. Таким образом, каждому угловому положению ведущего вала x_1 соответствует множество угловых положений ведомого вала x_2 , удовлетворяющих соотношению

$$k(x_1 - a) \leq x_2 \leq k(x_1 + a),$$

где k – передаточное число редуктора, $\pm a$ – величина люфта. Конкретное значение x_2 определяется максимальным или минимальным его значением, предшествующим рассматриваемому моменту времени (рис. 2.3, б).

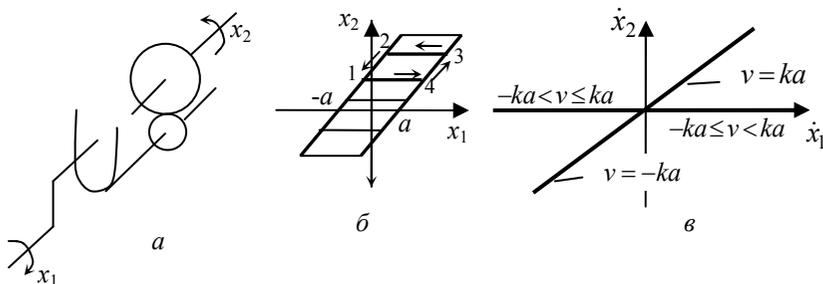


Рис. 2.3. Звено типа «люфт»

Аналитическое выражение для характеристики типа «люфт», задано формулой

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} k \dot{x}_1 & \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } v = ka, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } v = -ka, \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } -ka \leq v < ka, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } -ka < v \leq ka, \end{cases} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

где $v = kx_1 - x_2$. Согласно выражению (2.2.3) \dot{x}_2 однозначно и нелинейно зависит от двух переменных – \dot{x}_1 и v .

Зависимость \dot{x}_2 от \dot{x}_1 , заданная уравнением (2.2.3), приведена на рис. 2.3, в для различных значений v . Если ввести обозначение $\dot{x}_2 = \varphi(\dot{x}_1, v)$ для зависимости (2.2.3), то для звена типа «люфт» можно составить структурную схему, приведенную на рис. 2.4. На этом рисунке $s = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

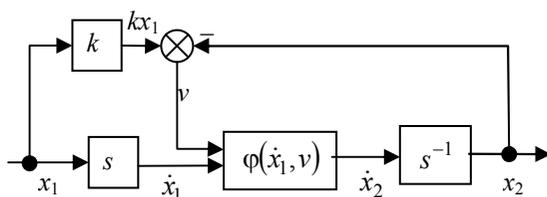


Рис. 2.4. Схема моделирования звена «люфт»

В механических, пневматических, электрических и других системах часто встречаются звенья типа «упор», когда изменение выходной величины ограничено в двух направлениях, а входная величина может меняться неограниченно. Пример такого устройства приведен на рис. 2.5, а.

Здесь ведущий вал связан с ведомым валом фрикционной муфтой, которая расщепляется, как только момент сопротивления превысит некоторое предельное значение. Ведомая же часть имеет упоры при её перемещении в двух направлениях, так что, как только ведомый вал достигнет до упора, возникает большой момент сопротивления и фрикционная муфта расщепляется, а ведущий вал продолжает вращение при неподвижном ведомом вале. Если направление вращения ведущего вала меняется, муф-

та снова входит в зацепление и ведомый вал начинает вращаться вместе с ведущим валом.

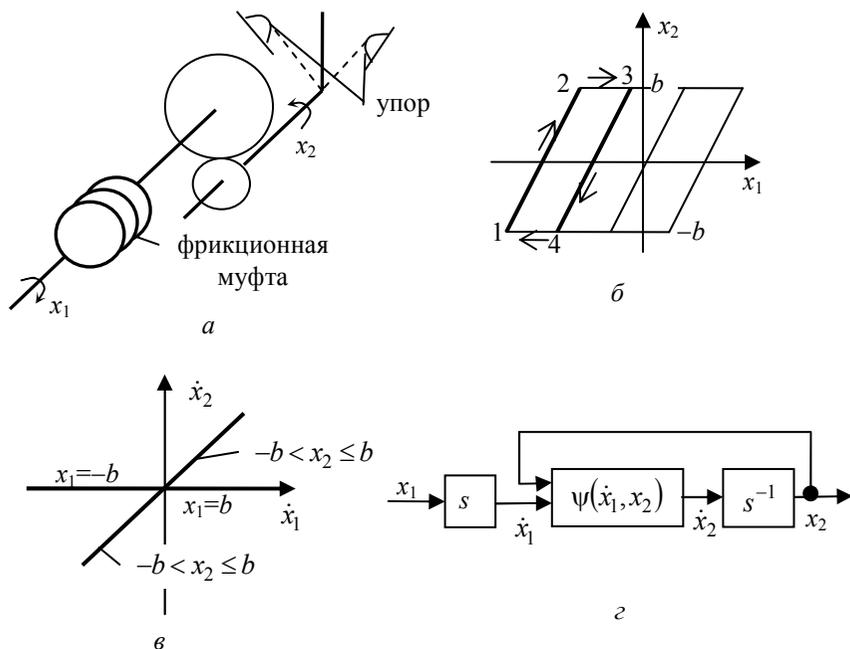


Рис. 2.5. Звено типа «упор»

Обозначая, как и прежде, через x_1 и x_2 углы поворота ведущего и ведомого вала соответственно, зависимость между ними можно изобразить графиком, представленным на рис. 2.5, б. Из этого графика видно, что каждому положению ведущего вала x_1 соответствует множество положений ведомого вала x_2 , удовлетворяющих неравенству $-b \leq x_2 \leq b$.

Аналитически соответствующие зависимости для характеристики звена типа «упор» можно представить выражением

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} k \dot{x}_1 & \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } -b \leq x_2 < b, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } -b < x_2 \leq b, \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \text{при } \dot{x}_1 > 0 \text{ и } x_2 = b, \\ \text{при } \dot{x}_1 < 0 \text{ и } x_2 = -b, \end{cases} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

где k – передаточное число редуктора. Эта зависимость приведена на рис. 2.5, в.

Из выражения (2.2.4) видно, что \dot{x}_2 является однозначной (нелинейной) функцией двух переменных – \dot{x}_1 и x_2 . Если ввести соответствующее обозначение $\dot{x}_2 = \psi(\dot{x}_1, x_2)$, то структурную схему модели, реализующей звено типа «упор», можно изобразить так, как это приведено на рис. 2.5, г.

Из сравнения нелинейных звеньев типа «люфт» и «упор» можно сделать вывод о том, что циклическое изменение входа x_1 приводит к циклическому изменению выхода x_2 . На рис. 2.3, б и 2.5, б это выражается замкнутыми контурами 1-2-3-4, но обход соответствующего контура для звена типа «люфт» осуществляется *против* часовой стрелки, а для звена типа «упор» – *по* часовой стрелке. Этот факт даёт основание считать, что при $a=b$ и $k=1$ параллельное соединение этих двух звеньев даёт безынерционное звено с единичным коэффициентом передачи. То есть эти два звена являются взаимно дополняющими в указанном выше смысле. Следовательно, вычитая из исходного сигнала выходной сигнал звена «люфт», получим звено «упор» (рис. 2.6, а). Наоборот, вычитая из исходного сигнала выходной сигнал звена «упор», получим звено «люфт» (рис. 2.6, б).

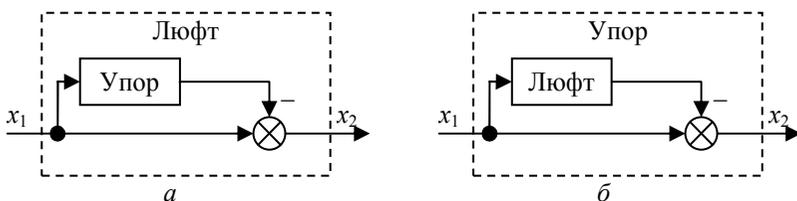


Рис. 2.6. Взаимозаменяемость звеньев типа «люфт» и «упор»

2.3. Методы исследования нелинейных систем

Строго формализованных методов построения математических моделей нелинейных систем любого типа не существует. Главная рекомендация здесь – идеализируя характеристики реальных элементов желательно выбирать наиболее простые функциональные зависимости, отражающие все-таки главные моменты изучаемых процессов. При этом следует иметь в виду, что нелинейные характеристики могут оказывать существенное влияние не только на количественную сторону процессов, но и вызывать качественно новые эффекты.

Перед тем, как приступить к изложению методов исследования нелинейных систем, уточним одно из основных понятий в теории систем вообще и теории управления в частности, а именно, – устойчивости в отношении нелинейных систем.

2.3.1. Нелинейные системы и устойчивость

В случае нелинейных систем ранее введённое понятие устойчивости линейных систем – ограниченность реакции при ограниченном воздействии – становится неправомерным.

Действительно, пусть, например, нелинейная система первого порядка описывается уравнением $\dot{y}(t) = \frac{k}{u(t)-1}y(t)$, где $u(t)$ – ограниченное управление, $y(t)$ – выход системы, а $k > 0$. Тогда при $u(t)=0$ система устойчива ($y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$), а при $u(t) > 1$ – неустойчива ($y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$).

Таким образом, в нелинейных системах речь может идти не об устойчивости или неустойчивости вообще, а об устойчивости или неустойчивости определенных режимов работы таких систем.

Большой вклад в теорию устойчивости внес русский ученый А.М. Ляпунов. Проведённые им исследования носят фундаментальный характер и потому представляют интерес до сих пор. Дадим понятие устойчивости по Ляпунову, воспользовавшись понятием фазового пространства.

Фазовое пространство – это евклидово пространство, координаты которого есть фазовые переменные состояния системы¹. Обозначим эти координаты через x_i . Возьмём некоторое решение $x_i(t)$ уравнений состояния, удовлетворяющее определенным начальным условиям $x_i(t_0)$, и назовем движение системы, соответствующее этому решению невозмущённым. Любое другое движение $x_i^*(t)$, отличающееся от невозмущённого и соответствующее другим начальным условиям $x_i^*(t_0)$, будем называть возмущённым. Тогда, согласно Ляпунову, невозмущённое движение называется устойчивым, если для любой наперед заданной области ε отклонений возмущённого движения от невозмущённого можно указать такую область δ отклонений

¹ Для линейной системы при записи её уравнений состояния в канонической форме фазовой переменной собственной параметрическая матрица системы является матрицей Фробениуса.

начальных условий, обладающую свойством, что ни одно движение, начавшееся внутри области δ , никогда не достигнет границ области ε . Это означает, что невозмущенное движение устойчиво, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенств

$$\left| x_i(t_0) - x_i^*(t_0) \right| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

следует выполнение неравенств

$$\left| x_i(t) - x_i^*(t) \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

для всех моментов времени $t > t_0$.

Если же для некоторой области отклонений ε возмущенного движения от невозмущенного невозможно найти такую область отклонений δ от начальных условий, которая обладала бы свойством, что ни одно движение, начавшееся внутри δ , никогда не достигнет границ области ε , то возмущенное движение будет неустойчивым.

Важно отметить некоторые особенности определения устойчивости по Ляпунову. Во-первых, задавая определённую область ε , мы получаем допустимую область начальных условий δ , вообще говоря, зависящую от выбранной области ε . Эту зависимость можно отметить как $\delta = \delta(\varepsilon)$. Во-вторых, начав движение из некоторой области δ начальных условий, вовсе не требуется, чтобы с течением времени система стремилась бы к невозмущенному движению. Нужно лишь, чтобы движение не выходило за пределы области ε . Если же возмущенное движение с тече-

нием времени будет стремиться к невозмущенному, то есть $x_i^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_i(t)$,

то такое невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым. В-третьих, в определении Ляпунова область ε – произвольная, в том числе и как угодно малая, поэтому и получающаяся для устойчивого движения область $\delta(\varepsilon)$, содержащаяся, вообще говоря, внутри области ε , также весьма малая. Следовательно, и наоборот, только при достаточно малых начальных отклонениях δ можно ожидать малых отклонений ε . Таким образом, устойчивость по Ляпунову – это устойчивость в малом (локальная устойчивость). Нужно понимать, что устойчивость в малом не обязательно влечет за собой устойчивости при больших или произвольных начальных отклонениях.

В нелинейных системах рассматривают, таким образом, следующие понятия устойчивости:

– устойчивость в малом – это устойчивость движения (положения равновесия) при бесконечно малых отклонениях от исходного движения (положения равновесия);

– устойчивость в большом – это устойчивость движения (положения равновесия) при конечных отклонениях от исходного движения (положения равновесия), возможных в данной системе по условиям её работы;

– устойчивость в целом – это устойчивость движения (положения равновесия) при любых отклонениях от исходного движения (положения равновесия), то есть в данном понятии устойчивости отсутствуют какие-либо ограничения на начальные отклонения;

– абсолютная устойчивость – это устойчивость в целом при любой нелинейности из определённого класса нелинейностей.

2.3.2. Первый метод Ляпунова (метод малых отклонений)

Этот метод заключается в суждении об устойчивости нелинейной системы по её линеаризованному уравнению. В данном случае речь идет о линеаризации путём разложения в ряд Тейлора, а так как такая линеаризация возможна только при малых отклонениях от интересующих нас режимов, то данный метод известен ещё как метод малых отклонений.

Проиллюстрируем этот метод для системы, описываемой уравнением второго порядка, поскольку движение системы второго порядка несложно представить на фазовой плоскости. Пусть уравнение системы имеет

вид $\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, где x – выход системы, F – некоторая нелинейная

функция. Обозначив $y = \frac{dx}{dt}$, перейдём от одного уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

В уравнениях (2.3.1) введены обозначения $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = F(x, y)$, но в общем случае функции P и Q могут быть произвольными. Для простоты будем полагать эти функции аналитическими.

Для каждой точки (x, y) фазовой плоскости (за некоторым исключением, как увидим дальше) уравнения (2.3.1) вполне однозначно задают направление касательной к фазовой траектории. Тангенс угла наклона

касательной к фазовой траектории равен $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, а деля второе из уравнений (2.3.1) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = R(x, y). \quad (2.3.2)$$

Уравнение (2.3.2) – это дифференциальное уравнение фазовых траекторий и оно задаёт угол наклона касательной к фазовой траектории в каждой точке, кроме точки, где одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

При выполнении условия (2.3.3) из уравнений (2.3.2) получаем неопределенность типа ноль, делённый на ноль. То есть через точку, удовлетворяющую условиям (2.3.3), могут проходить многие траектории. Такие точки называются особыми. Учитывая уравнения (2.3.1), для особых точек получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Но равенства (2.3.4) означают, что переменные состояния системы x, y не меняются со временем – система находится в покое. Таким образом, особые точки – это точки, соответствующие состояниям равновесия системы.

Пусть теперь одно из решений уравнений (2.3.3) – x_0, y_0 . Исследуем характер устойчивости в этом положении равновесия. Рассмотрим малую окрестность состояния равновесия $x = x_0 + \xi, y = y_0 + \eta$. Разложим правые части уравнений (2.3.1) в ряд Тейлора в окрестности особой точки. Получим

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + a\xi + b\eta + \{\text{чл. высш. порядка малости по } \xi \text{ и } \eta\}, \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + c\xi + d\eta + \{\text{чл. высш. порядка малости по } \xi \text{ и } \eta\}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Здесь коэффициенты a, b, c и d – частные производные от P и Q по x и y :

$$a = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}, \quad b = \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}, \quad c = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}, \quad d = \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}.$$

Учитывая, что в особой точке выполняются равенства (2.3.3), а также, что $\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}, \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$, получаем (отбросив члены высшего порядка малости относительно ξ и η) уравнения линейного приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Матрица системы уравнений состояния (2.3.6) есть матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, а характеристическое уравнение

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0 \quad (2.3.7)$$

Заслугой Ляпунова является то, что он строго доказал следующие теоремы, касающиеся устойчивости в малом (то есть при малых отклонениях от невозмущенного режима) и позволяющие судить об устойчивости режимов нелинейной системы по устойчивости соответствующей линеаризованной модели.

Теорема 2.3.1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то есть линеаризованная система устойчива, то невозмущённое движение реальной нелинейной системы асимптотически устойчиво, и учёт членов высшего порядка малости не может сделать систему неустойчивой.

Теорема 2.3.2. Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то есть линеаризованная система неустойчива, то невозмущённое движение реальной нелинейной системы также неустойчиво, и учёт членов высшего порядка малости не может сделать систему устойчивой.

Теорема 2.3.3. Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то реальная нелинейная система может быть как устойчивой, так и неустойчивой, то есть учёт членов высшего порядка малости может сделать систему как устойчивой, так и неустойчивой. Следовательно, в данном случае для суждения об устойчивости нелинейной системы следует привлекать другие методы.

Рассмотрим различные типы особых точек, характеризующихся разными картинами фазовых траекторий в окрестностях этих точек.

От уравнений состояния в общем виде (2.3.6) всегда можно перейти к системе канонических уравнений фазовой переменной (например, по методу Данилевского [3]), то есть от системы координат (ξ, η) перейти к системе координат (x_1, x_2) . При этом матрица системы будет иметь вид матрицы Фробениуса, и уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (cb - ad)x_1 + (a + d)x_2.\end{aligned}$$

Последнюю систему уравнений удобнее переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -px_1 - 2hx_2,\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

где $p = ad - cb$, $2h = -a - d$.

С учетом введенных обозначений характеристическое уравнение (2.3.7) примет вид

$$\lambda^2 + 2h\lambda + p = 0.\tag{2.3.9}$$

Возможны следующие случаи.

1. Корни характеристического уравнения мнимые. Очевидно, это будет при $h = 0, p > 0$. Примером такого уравнения является уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\tag{2.3.10}$$

описывающее свободное движение (переходную составляющую решения) консервативного (идеального колебательного) звена.

Как известно, решением уравнения (2.3.10) является

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.3.11)$$

где A и φ – константы, определяемые начальными значениями.

Продифференцировав последнее выражение по времени и обозначив $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ x_2 &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений нетрудно получить уравнение фазовой траектории

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{A^2 \omega_0^2} = 1,$$

представляющее собой уравнение эллипса с полуосями A и $A\omega_0$. Для различных начальных условий получаем и различные значения A . Таким образом, фазовые траектории такой системы – это семейство эллипсов, непересекающихся и вложенных друг в друга (рис. 2.7).

Решение (2.3.11) – это незатухающие колебания около положения равновесия. Изображающая точка, находясь на каком-либо эллипсе, будет все время по нему двигаться вокруг точки равновесия. Точки равновесия такого типа, когда фазовые траектории представляют собой за-

мкнутые, вложенные друг в друга кривые, окружающие точки равновесия,

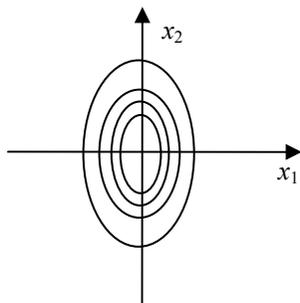


Рис. 2.7. Особая точка типа «центр»

называются центрами. Понятно, что достаточно малым начальным отклонениям от положения равновесия будет соответствовать столь же малая область на фазовой плоскости, за которую не выйдет изображающая точка. Таким образом, точка равновесия центр будет устойчивой по Ляпунову. Подобные точки равновесия характерны для консервативных (у которых нет обмена энергией с окружающей средой) систем.

2. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью. Для характеристического уравнения (2.3.9) это будет выполняться при

$$\begin{aligned} h &> 0, \\ h^2 &< p. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Решение уравнений (2.3.8) имеет вид затухающих колебаний

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-ht} \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= C_2 e^{-ht} \cos(\omega t + \varphi_2), \end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{p - h^2}$, а $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$ – константы, определяемые начальными условиями.

Поделив второе из уравнений (2.3.8) на первое, получим дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{px_1 + 2hx_2}{x_2}. \quad (2.3.13)$$

Можно показать, что последнее уравнение – это уравнение логарифмической спирали (рис. 2.8).

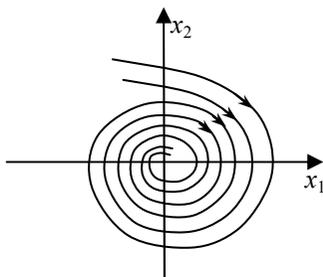


Рис. 2.8. Особая точка устойчивый фокус

Различные начальные условия дадут различные, вложенные друг в друга спирали, навивающиеся на начало координат, которое является точкой равновесия под названием устойчивый фокус. Любая фазовая траектория, начавшись в произвольной точке фазовой плоскости, с течением времени будет неограниченно приближаться к точке равновесия. Поэтому устойчивый фокус не только является устойчивым по Ляпунову, но и является асимптотически устойчивой точкой равновесия.

3. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные с положительной вещественной частью. Для характеристического уравнения (2.3.9) это будет выполняться при

$$\begin{aligned} h < 0, \\ h^2 < p. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Переходный процесс при этом колебательный с нарастающей амплитудой, а фазовые траектории – раскручивающиеся логарифмические спирали (рис. 2.9).

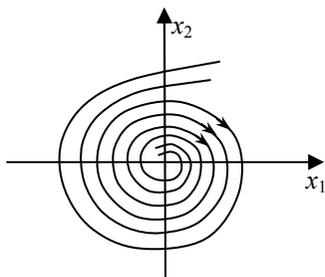


Рис. 2.9. Особая точка неустойчивый фокус

Любое сколь угодно малое отклонение от точки равновесия приведет к тому, что с течением времени изображающая точка, двигаясь по соответствующей траектории, неограниченно удаляется от точки равновесия. Следовательно, такая точка равновесия является неустойчивой и называется неустойчивым фокусом.

4. Вещественные отрицательные корни характеристического уравнения. Для характеристического уравнения (2.3.9) это означает, что

$$\begin{aligned} h &> 0, \\ h^2 &> p. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Решение дифференциальных уравнений (2.3.8) при этом будет иметь вид «затухающих» экспонент

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_2 &= C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

причем λ_1, λ_2 – отрицательные вещественные числа.

Фазовые траектории для этого случая показаны на рис. 2.10.

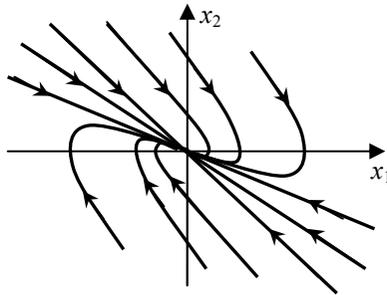


Рис. 2.10. Особая точка устойчивый узел

Из рисунка видно, что любая траектория ведет в начало координат. Особая точка в этом случае является точкой устойчивого (более того, асимптотического) равновесия и называется устойчивым узлом.

5. Вещественные положительные корни характеристического уравнения. Такие корни будут, если в условии (2.3.15) $h < 0$. Показатели экспонент в решении (2.3.16) будут положительными, и малейшие отклонения от точки равновесия приведут к неизбежному удале-

нию от точки равновесия. Следовательно, точка равновесия является неустойчивой и называется неустойчивым узлом. Изменится и направление движения по фазовым траекториям, которые будут иметь, в общем, тот же вид, что и изображенные на рис. 2.10. Фазовые траектории вблизи неустойчивого узла приведены на рис. 2.11.

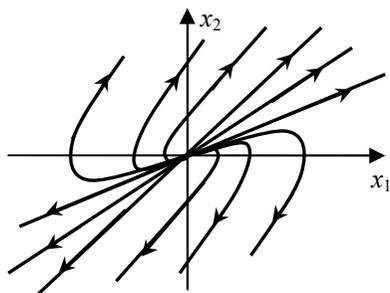


Рис. 2.11. Особая точка неустойчивый узел

6. Вещественные корни различных знаков. Такие корни будут, если в характеристическом уравнении (2.3.9) $p < 0$. Простейшим примером дифференциального уравнения, соответствующего данному случаю, будет уравнение динамики материальной точки массой m под действием силы, пропорциональной отклонению этой точки от положения равновесия

$$m\ddot{x} = kx .$$

Обозначив $x_1 = x$, перейдем от этого уравнения к канонической форме фазовой переменной

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{k}{m}x_1.\end{aligned}$$

Из последней системы уравнений получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k}{m} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$

Полученное уравнение легко интегрируется разделением переменных

$$\frac{x_2^2}{k} - \frac{x_1^2}{m} = C, \quad (2.3.17)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

Уравнение (2.3.17) является уравнением семейства гипербол (рис. 2.12). Положив в частном случае $C=0$, получим две асимптоты такого семейства

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}x_1.$$

Особая точка этого типа называется седлом.

Анализ фазовых траекторий на рис. 2.12 показывает, что движение, начавшееся из любой точки фазовой плоскости, приведет с течением времени к бесконечному удалению изображающей точки от точки равновесия. Единственное исключение – это нахождение начальной точки точно на асимптоте $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_1$. Однако сколь угодно малое отклонение

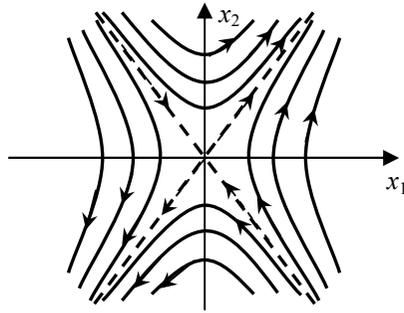


Рис. 2.12. Особая точка седло

от этой траектории приведет, в конечном итоге, к удалению от точки равновесия. Следовательно, седло является точкой неустойчивого равновесия.

Подводя итог, нарисуем в координатах (p, h) области, соответствующие различным типам особых точек (рис. 2.13).

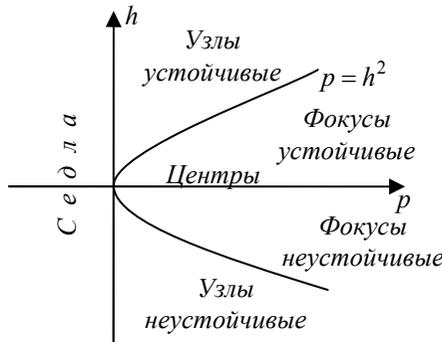


Рис. 2.13. Типы особых точек

Парабола $p = h^2$ разделяет колебательное и аperiодическое движение, то есть отделяет область фокусов от области узлов. Отрицательные значения p соответствуют седлам. Центры ($h=0$) разделяют устойчивые и неустойчивые фокусы, то есть сколь угодно малые изменения параметра h в положительную или отрицательную сторону меняют центр на фокус.

Поэтому практически в линейных системах (если они не являются строго консервативными) особых точек типа центр, а, следовательно, и замкнутых траекторий не наблюдается.

К устойчивым особым точкам сходятся все фазовые траектории, начавшиеся из любой начальной точки. То есть эти особые точки как бы притягивают к себе все решения уравнений динамики. Вообще, зоны притяжения решений дифференциальных уравнений называются аттракторами. Следовательно, устойчивые особые точки являются частным видом аттракторов.

2.3.3. Метод фазовой плоскости

Возможность наглядно проследить поведение системы при различных начальных условиях и различных внешних воздействиях делает фазовую плоскость весьма привлекательным инструментом исследования систем второго порядка. Достоинством метода фазовой плоскости является также то, что для построения фазовых траекторий часто нет необходимости решать дифференциальное уравнение (2.3.2), описывающее эти траектории. Такое построение осуществляется так называемым методом изоклин. Рассмотрим на фазовой плоскости линии, соответствующие алгебраическому уравнению

$$R(x, y) = C,$$

где C – константа, для которой задан ряд значений от $-\infty$ до $+\infty$.

На фазовой плоскости получаем семейство линий, каждой из которых соответствует своё значение C . Эти линии называются изоклинами.

Разные типы движений системы в непосредственной окрестности особых точек были рассмотрены выше. Вблизи обыкновенной точки характер движения полностью определяется фазовой траекторией, проходящей через эту точку.

Через обыкновенную точку проходит только одна фазовая траектория, имеющая наклон $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Q}{P}$ (ср. (2.3.2)). Поэтому отрезок траектории вблизи этой точки можно изобразить в виде отрезка прямой, направленной под упомянутым углом к оси абсцисс. Отрезки фазовых траекторий в окрестности (достаточно малой) обыкновенной точки будут в первом приближении также изображаться отрезками прямых, имеющих тот же наклон, что и наклон отрезка траектории, проходящей через эту точку. Таким образом, движение системы в окрестности обыкновенной точки на фазовой плоскости можно изобразить пучком параллельных отрезков.

Изучение динамики системы, как правило, не ограничивается определением характера движения в окрестностях особых или обыкновенных точек. В большинстве случаев требуется знать характер фазовых траекторий на всей фазовой плоскости или, как говорят, нужен фазовый портрет системы. При этом большое значение приобретает изучение особых траекторий.

Принято выделять три типа особых траекторий.

1. Особые точки, которые являются вырожденным случаем траектории.
2. Предельные циклы, представляющие собой замкнутые изолированные траектории.
3. Сепаратрисы – траектории, разделяющие области с качественно разным характером динамики системы.

Особые точки были разобраны выше.

С замкнутыми траекториями мы уже сталкивались, когда речь шла о точке равновесия «центр». Но там рассматривалась консервативная линейная система. И соседние траектории с любой замкнутой там также были замкнутые. Поэтому не было никаких оснований выделять какую-либо замкнутую траекторию и называть её особой.

В неконсервативных нелинейных же системах замкнутые траектории играют принципиально другую роль. Можно строго доказать, что в таких системах имеются только **изолированные** замкнутые траектории, так что любая соседняя с ней уже не является замкнутой. Наличие в фазовом портрете системы предельного цикла говорит о возможном существовании в системе автоколебаний, то есть незатухающих колебаний с определенной амплитудой и частотой.

Например, можно представить себе неустойчивую линейную систему, в которой для обеспечения её устойчивости применено в обратной связи нелинейное звено с зоной нечувствительности. При малой величине выходного сигнала корректирующее звено «не работает» и в системе возникают расходящиеся колебания. Если выходной сигнал превышает зону нечувствительности, корректирующее звено делает систему устойчивой и колебания затухают. Таким образом, в системе устанавливаются незатухающие колебания с амплитудой, определяемой зоной нечувствительности корректирующего звена.

Предельные циклы бывают устойчивыми, неустойчивыми и полуустойчивыми.

Устойчивый предельный цикл будет существовать в приведённом выше примере, когда фазовые траектории приближаются к предельному циклу, начинаясь как изнутри, так и снаружи последнего (траектории

притягиваются к предельному циклу с обеих сторон – рис. 2.14, а). Таким образом, устойчивый предельный цикл также является одним из видов аттракторов.

В неустойчивом предельном цикле любое отклонение от него в ту или другую сторону приводит к удалению от предельного цикла (траектории «разматываются» с предельного цикла как с одной, так и с другой стороны – рис. 2.14,б – цикл 1).

В полуустойчивом цикле траектории с одной стороны «наматываются», а с другой стороны «разматываются» (рис. 2.14, в, г).

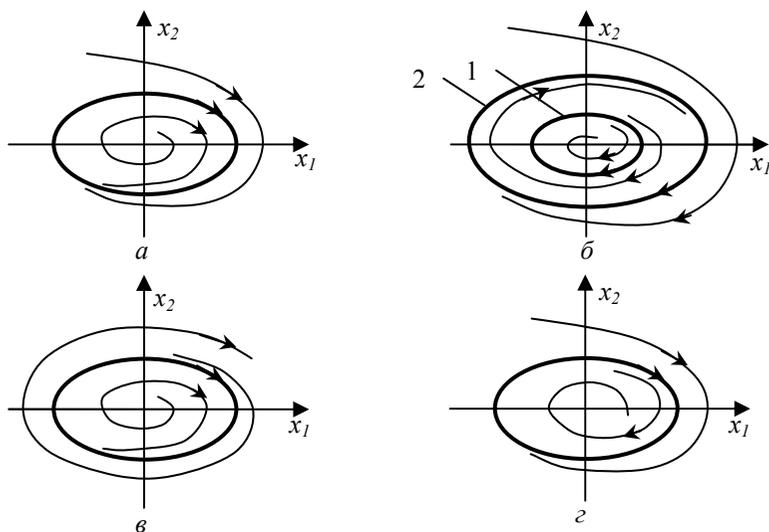


Рис. 2. 14. Предельные циклы

Системы с фазовым портретом, изображённым на рис. 2.14, а, называются системами с мягким режимом возбуждения колебаний. В таких системах после их включения устанавливаются автоколебания независимо от начальных условий или внешних воздействий.

Системы с фазовым портретом на рис. 2.14, б называются системами с жестким режимом возбуждения колебаний. При малых отклонениях от точки равновесия такие системы устойчивы, то есть колебания затухают (внутри области, определяемой неустойчивым предельным циклом 1), а при достаточно больших отклонениях, вызванных, например, внешним воздействием, движение системы неограниченно приближается к устойчивому предельному циклу 2.

Третий вид особых траекторий – сепаратрисы – разделяют фазовую плоскость на области с разным характером траекторий. «Усы» седла это типичный пример сепаратрисы. На рис. 2.12 видно, что «усы» седла (асимптоты гипербол) разделяют области с разным характером динамики системы. Если вблизи особой точки «ус» – прямая линия, то на достаточном удалении он может быть уже кривой или даже замкнутой линией.

Итак, определив все особые траектории, мы получаем основу, скелет всех возможных движений в системе. Особые траектории разделяют фазовую плоскость на области с разным характером фазовых траекторий; динамику системы в каждой области нетрудно определить, зная типы особых точек и предельных циклов. Таким образом получают полную картину динамики системы.

2.3.4. Метод интегрируемой аппроксимации

Основная трудность при исследовании нелинейных систем – это невозможность аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений в общем виде, то есть получения решения в виде конечной комбинации элементарных функций. Идея метода заключается в приближённой замене нелинейности $f(t)$, не допускающей аналитического

решения уравнения, на функцию $\varphi(t)$, при которой такое решение возможно. Поиск такой функции – задача сама по себе неординарная. Но существует метод аппроксимации, который годится практически всегда, – это кусочно-линейная аппроксимация, то есть замена нелинейной зависимости на ломаную линию. При этом на каждом линейном участке такой ломаной дифференциальное уравнение в целом получается линейным и легко решается. Остаётся согласовать (или как говорят, сшить – отсюда и название метода: метод сшивания или припасовывания) отдельные решения в точках излома соответствующим подбором постоянных интегрирования.

Пример 2.3.1. Рассмотрим релейную систему, структурная схема которой приведена на рис. 2.15.

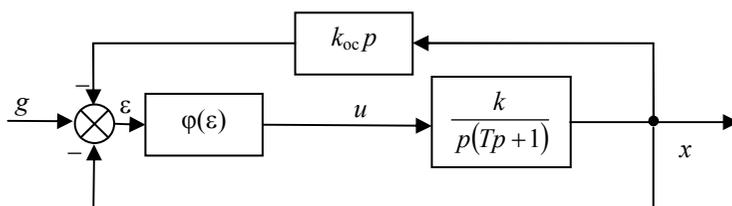


Рис. 2.15. Нелинейная система

Нелинейный элемент – это электромагнитное поляризованное реле с характеристикой, показанной на рис. 2.16.

При увеличении входного напряжения $\varepsilon > \delta$ реле срабатывает, и выходной сигнал принимает значение $+1$. При уменьшении входного сигнала ε реле отпускает при меньшем напряжении $\lambda \varepsilon$ ($0 < \lambda \leq 1$). Это происходит по причине эффекта остаточного намагничивания стального сердечника

катушки реле. При отрицательных значениях ε наблюдается симметричная картина.

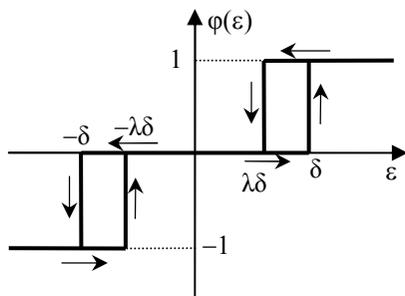


Рис. 2.16. Релейная характеристика

Для простоты положим задающее воздействие равным нулю $g=0$.

Запишем уравнения, связывающие переменные в системе, структурная схема которой приведена на рис. 2.15:

$$\begin{aligned} p(Tp + 1)x &= ku, \\ u &= \varphi(\varepsilon), \\ \varepsilon &= -(1 + k_{oc}p)x. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Исключив промежуточные переменные, сведем систему уравнений (2.3.8) к одному уравнению

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k\varphi\left(x + k_{oc} \frac{dx}{dt}\right). \tag{2.3.9}$$

Правая часть уравнения (2.3.9) может принимать три значения: -1 , 0 и $+1$. При каждом из этих трёх значений уравнение (2.3.9) является линейным и, следовательно, легко интегрируется.

Начнём рассмотрение системы с простейшего случая при отключенной местной обратной связи (это будет, если положить $k_{oc}=0$). Уравнение (2.3.9) преобразуется тогда в уравнение

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k\varphi(x). \quad (2.3.10)$$

Имея в виду построение фазового портрета системы, перейдём от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, введя обозначение $y = \frac{dx}{dt}$

$$\begin{aligned} T \frac{dy}{dt} + y &= -k\varphi(x), \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Положим вначале $\lambda=1$ (см. рис. 2.16). В этом случае уравнения (2.3.10) можно переписать как

$$\begin{aligned} T \frac{dy}{dt} + y &= \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < \delta, \\ -k & \text{при } x > \delta, \\ +k & \text{при } x < -\delta, \end{cases} \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Поделив второе из уравнений (2.3.12) на первое, получим дифференциальные уравнения фазовых траекторий для трёх случаев.

1. При $|x| < \delta$

$$T \frac{dy}{dx} = -k. \quad (2.3.13)$$

2. При $x > \delta$

$$T \frac{dy}{dx} = -\frac{y+k}{y}. \quad (2.3.14)$$

3. При $x < -\delta$

$$T \frac{dy}{dx} = -\frac{y-k}{y}. \quad (2.3.15)$$

Таким образом, вся фазовая плоскость делится на три зоны.

Интегрируя уравнение (2.3.13), получаем семейство траекторий для первой зоны

$$T(y - y_0) = k(x_0 + x), \quad (2.3.16)$$

где x_0, y_0 – начальные значения.

Уравнение (2.3.16) описывает семейство прямых линий (рис. 2.17).

Уравнение фазовых траекторий в зоне 2 получим интегрированием уравнения (2.3.15). Разделив переменные, имеем

$$T \frac{y dy}{y+k} = -dx \quad \text{или} \quad T \left(dy - \frac{k dy}{y+k} \right) = -dx.$$

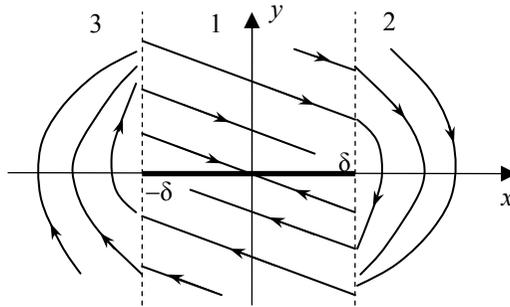


Рис. 2.17. Фазовый портрет системы при $\lambda=1, k_{oc}=0$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$T(y - y_0) + Tk \ln \frac{y_0 + k}{y + k} = x_0 - x, \quad (2.3.17)$$

где x_0, y_0 – начальные значения.

Траектории, построенные по уравнению (2.3.17), также приведены на рис. 2.17. Из сравнения уравнений (2.3.14) и (2.3.15) легко видеть, что траектории для зоны 2 и зоны 3 симметричны относительно начала координат, то есть достаточно повернуть траектории зоны 2 на 180° относительно начала координат, и мы получим траектории для зоны 3.

Состояние равновесия системы определяется соотношениями $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Сопоставив эти условия с уравнениями (2.3.11), приходим к выводу, что состояния равновесия системы характеризуются требованием $\varphi(x) = 0$, а это справедливо при $|x| < \delta$. Условиям

$$y = 0, |x| < \delta$$

соответствует отрезок равновесия на оси x , показанный на рис. 2.17 жирной линией. Каждая точка этого отрезка является точкой равновесия, причём устойчивого равновесия, так как в зоне 1 все траектории идут **по** направлению к отрезку равновесия, а не **от** него.

С течением времени изображающая точка, начинаясь из произвольной точки фазовой плоскости (кроме отрезка равновесия) перемещается по фазовой плоскости. При переходе из одной зоны в другую одно из трёх линейных уравнений (2.3.13–2.3.15) сменяется другим вследствие переключения управления (срабатывания реле). Поэтому границы между зонами носят название линий переключения (на рис. 2.17 они показаны пунктиром). Из рис. 2.17 видно, что движение, начавшись из любой точки, заканчивается отрезком равновесия, то есть в системе отсутствуют автоколебания (предельного цикла нет).

Пусть теперь $\lambda < 1$. Поскольку функция $\varphi(x)$ по-прежнему принимает только три фиксированных значения, именно, -1 , 0 и $+1$, характер фазовых траекторий во всех трёх зонах сохраняется, но меняются границы между зонами. Отпускание реле при уменьшении входного сигнала (то есть при отрицательной скорости $\frac{dx}{dt} = y < 0$ и положительной величине x) происходит при $\varepsilon = \lambda\delta$. Это означает, что при $x > 0$ часть линии переключения, расположенная ниже оси x , сдвинется *влево* (рис. 2.18).

Аналогично при $x < 0$ верхняя часть линии переключения сдвинется *вправо*.

Исследование фазового портрета системы, приведённого на рис. 2.18, показывает, что при определённых соотношениях параметров движение

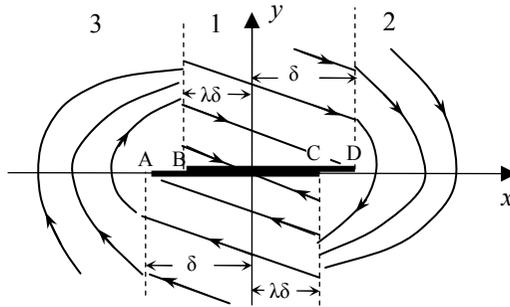


Рис. 2.18. Фазовый портрет системы при $\lambda < 1$, $k_{oc} = 0$

системы может стать расходящимся. Отрезок равновесия также приобретает новые черты. Если точки, принадлежащие отрезку BC, являются точками обычного вида (к ним можно приблизиться как, двигаясь из верхней полуплоскости, так и из нижней), то, например, к точкам отрезка AB можно подойти только по траекториям, расположенным в нижней полуплоскости. Аналогично, к точкам отрезка CD можно подойти только по траекториям, расположенным в верхней полуплоскости.

В общем случае $k_{oc} > 0$, следовательно, при положительном x реле будет срабатывать при входном сигнале $\varepsilon = \delta$, но $\varepsilon = x + k_{oc}y$. Поэтому уравнение линии переключения при $x > 0$, $y > 0$ будет

$$x + k_{oc}y = \delta. \quad (2.3.18)$$

Отпускать реле будет при входном сигнале $\varepsilon = \lambda\delta$. Следовательно, уравнение линии переключения при $x > 0$, $y < 0$ будет

$$x + k_{oc}y = \lambda\delta. \quad (2.3.19)$$

При $x < 0$ картина будет симметричная, и уравнения линий переключения будут следующие:

$$x + k_{oc}y = \begin{cases} -\delta & \text{при } y < 0, \\ -\lambda\delta & \text{при } y > 0. \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Фазовый портрет системы вместе с линиями переключения, построенными по уравнениям (2.3.18 – 2.3.20), приведён на рис. 2.19.

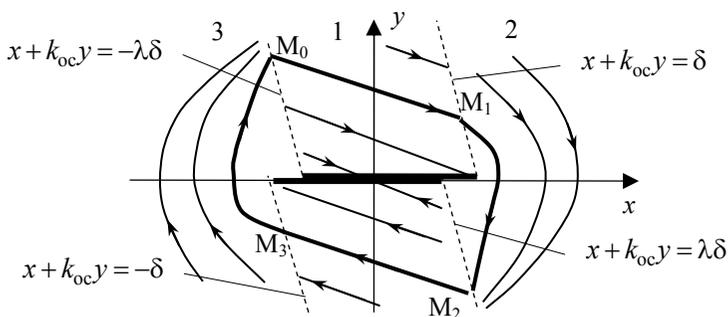


Рис. 2.19. Фазовый портрет системы при $\lambda < 1, k_{oc} > 0$

Можно показать, что при определённых условиях в системе возникнут незатухающие колебания (предельный цикл – замкнутая траектория на рис. 2.19). Точки переключения, расположенные на предельном цикле – M_0, M_1, M_2 и M_3 . Обозначив соответствующими индексами координаты этих точек, придём к выводу, что необходимым (но недостаточным) условием существования предельного цикла будет

$$x_1 >, y_1 > 0. \quad (2.3.21)$$

Ввиду симметрии предельного цикла достаточным условием будет симметричность точек M_0 и M_2 (равно как и точек M_1 и M_3). То есть, дополнительно к неравенствам (2.3.21) должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} x_0 &= -x_2, \\ y_0 &= -y_2. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

С одной стороны, точки M_0 и M_2 лежат на фазовых траекториях, а с другой – они расположены на линиях переключения, уравнения которых заданы формулами (2.3.19 – 2.3.20). Анализ выполнения соотношений (2.3.21), (2.3.22) совместно с уравнениями (2.3.19 – 2.3.20) показывает, что необходимое и достаточное условие существования предельного цикла будет [4]

$$e^{-2\delta} \leq 1 - \delta \frac{1 + \lambda}{1 - k_{oc}}. \quad (2.3.23)$$

Если предельный цикл в системе существует, то выполняется неравенство (2.3.23) и вся фазовая плоскость делится на три области (рис. 2.20)

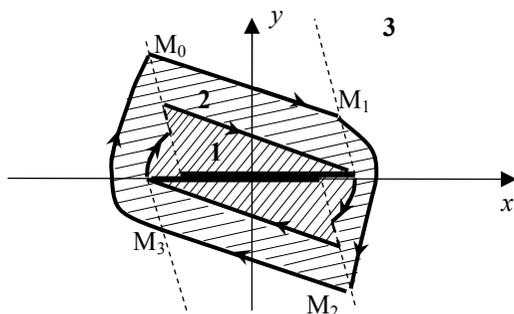


Рис. 2.20. Области устойчивости и неустойчивости

Область 1 является областью устойчивости, так как фазовая траектория, начавшись из любой точки этой области, после, возможно, полуколебания приближается к отрезку устойчивости. В области 2 наблюдаются расходящиеся колебания, приближающиеся, в конце концов, к предельному циклу изнутри. Область 3 – область с затухающими колебаниями (фазовые траектории «наматываются» снаружи на предельный цикл).

Рассмотренный выше пример показывает, что точное исследование даже столь простой релейной системы наталкивается на значительные трудности (а ведь в этом примере ещё не рассмотрено влияния параметров на возникновение или прекращение автоколебаний). Поэтому желательно иметь какие-нибудь приближённые методы, предлагающие хотя бы достаточные условия устойчивости. Такие методы будут рассмотрены ниже.

2.3.5. Метод точечных преобразований

Вообще, метод точечных преобразований Пуанкаре и Биркгоф предложили довольно давно. Идею применить этот метод к исследованию нелинейных САУ впервые высказал академик А.А. Андронов в 1944 г.

Для пояснения метода точечных преобразований представим, что в некоторый момент времени изображающая точка находится на положительной полуоси x . Пусть абсцисса этой точки равна x_0 (рис. 2.21, a).

Если в системе есть колебания, то через период (после обхода начала координат или другой точки равновесия) фазовая траектория пересечет положительную полуось x в некоторой другой точке x_1 . Определение точки x_1 по точке x_0 называется точечным преобразованием.

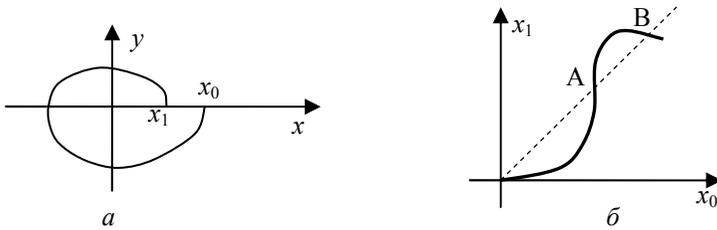


Рис. 2.21. Метод точечного преобразования

Поскольку через каждую (кроме особой) точку полуоси x проходит только одна фазовая траектория, существует однозначная функция, преобразующая произвольную точку полуоси в другую точку той же полуоси после обхода изображающей точкой начала координат $x_1 = f(x_0)$. График этой функции называется диаграммой точечного преобразования (рис. 2.21, б). Зависимость $x_1 = f(x_0)$ определяет точечное преобразование положительной полуоси (или любой другой полупрямой, выходящей из начала координат) в саму себя.

Если в результате точечного преобразования некоторая точка переходит сама в себя (то есть остаётся неподвижной $x_1 = x_0$), то это означает, что через эту точку проходит замкнутая траектория (предельный цикл). Определив такие точки (на рис. 2.21, б это точки пересечения диаграммы точечного преобразования с биссектрисой прямого угла) мы определим параметры предельного цикла. Смысл точечного преобразования в том, что для нахождения неподвижных точек нет необходимости строить фазовый портрет системы. Это можно проделать непосредственно по уравнениям системы.

Часть диаграммы точечного преобразования, лежащая под биссектрисой прямого угла, соответствует затухающим колебаниям, а часть, распо-

ложенная выше – расходящимся. Поэтому точка А на рис. 2.21, а соответствует неустойчивому предельному циклу, а точка В – устойчивому.

Метод точечного преобразования удобен также для выяснения влияния изменяемых параметров на динамику системы, в частности, для определения критических (так называемых бифуркационных) значений параметров, качественно меняющих поведение системы. В качестве примера на рис. 2.22 приведены диаграммы преобразований для трёх разных значений параметров.

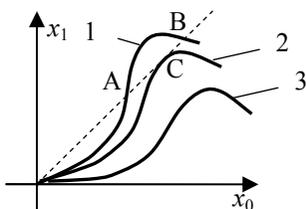


Рис. 2.22. Влияние параметров системы на диаграмму точечного преобразования

Диаграмма 1 соответствует существованию неустойчивого (точка А) и устойчивого (точка В) предельного цикла. Диаграмма 3 соответствует устойчивости системы в целом. Диаграмма 2 касается биссектрисы в точке С, которая соответствует полуустойчивому предельному циклу. Малейшее изменение параметра системы в одну сторону приводит к устойчивости системы в целом, а в другую – к наличию незатухающих колебаний. Таким образом, кривая 2 соответствует бифуркационному значению параметра.

2.3.6. Второй метод Ляпунова

Второй метод Ляпунова, называемый ещё прямым методом, даёт достаточные условия устойчивости. Он применим к любым нелинейным системам. По сути, Ляпунов в своём методе обобщил известную теорему Дирихле, согласно которой устойчивой является точка равновесия с минимумом потенциальной энергии. Первоначально Ляпунов разработал второй метод для определения локальной устойчивости, то есть устойчивости в малом (при достаточно малых отклонениях от точек равновесия). Впоследствии этот метод был распространён и для исследования устойчивости в большом или в целом.

Ляпунов предложил ввести в рассмотрение функцию переменных состояния системы $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, до известной степени напоминающую потенциальную энергию материальной точки. Рассмотрим в пространстве состояний замкнутую поверхность произвольной формы, например, гиперсферу (рис. 2.23 для трёхмерного пространства)

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = C^2, \quad (2.3.24)$$

где C – радиус гиперсферы.

С уменьшением C поверхность сжимается, то есть сфера с меньшим C находится целиком внутри сферы с большим C (на рис. 2.23 $C_1 < C_2 < C_3$). Наконец, если $C \rightarrow 0$, поверхность стягивается в начало координат, то есть $V(0, 0, \dots, 0) = 0$. Таким образом, функция V во всём пространстве состояний имеет один знак (в случае (2.3.24) – положительный), а в начале координат обращается в нуль. Функции с такими свойствами называются знакоопределёнными.

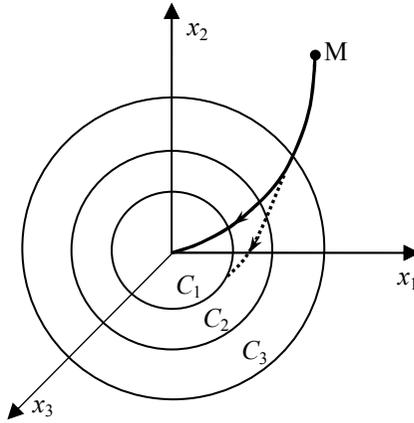


Рис. 2.23. Ко второму методу Ляпунова

Если при всех движениях системы, например, из произвольной точки M (см. рис. 2.23), будет выполняться условие

$$\frac{dV}{dt} < 0, \quad (2.3.25)$$

это будет означать, что изображающая точка все время переходит с поверхности с бóльшим C на поверхность с мéньшим C , асимптотически приближаясь, в конце концов, к точке равновесия (началу координат). Самое интересное, что для нахождения полной производной по времени (2.3.25) совсем не обязательно решать дифференциальное уравнение, описывающее динамику системы; для этого достаточно представить уравнение системы в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
&\dots, \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}
\tag{2.3.26}$$

Тогда производная (2.3.25) будет равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot f_k. \tag{2.3.27}$$

Правая часть выражения (2.3.27) зависит только от переменных состояния и в силу условия (2.3.25) является знакоопределённой (в нашем случае отрицательно-определённой) функцией.

Таким образом, можно сформулировать следующее условие устойчивости нелинейной системы: для асимптотической устойчивости возмущённого движения достаточно существования такой знакоопределённой функции, полная производная которой по времени, вычисленная на основе дифференциальных уравнений системы, также является знакоопределённой, но противоположного знака.

Если производная $\frac{dV}{dt}$ обращается в нуль не только в начале координат, но и в каких-то других точках, например, на сфере C_1 (рис. 2.23), то соответственно получаем более слабое условие устойчивости, а именно, неасимптотическую устойчивость. В этом случае изображающая точка

может остаться на сфере C_1 , не дойдя до начала координат (пунктирная линия на рис. 2.23).

Собственно, второй метод Ляпунова и заключается в отыскании такой функции, которая бы удовлетворяла сформулированному выше условию устойчивости. Такие функции и назвали функциями Ляпунова.

Как уже было отмечено выше, для определения знака производной вовсе не требуется решать дифференциальные уравнения системы. Это, конечно, плюс. Минусом же является то, что не существует общего правила для нахождения функции Ляпунова для любых нелинейных систем. Часто отыскание функции Ляпунова требует определённого искусства и математической интуиции.

Много для развития прямого метода Ляпунова сделал А.И. Лурье, указавший общий метод выбора функций Ляпунова для целого класса нелинейных систем.

Сам Ляпунов предложил для линейных (линеаризованных) систем производную $\frac{dV}{dt}$ задавать в виде суммы квадратов переменных состояния с обратным знаком

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^n x_k^2 = U_0, \quad (2.3.28)$$

а функцию V – в виде квадратичной формы

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad (2.3.29)$$

где $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор состояния, \mathbf{B} – симметрическая матрица квадратичной формы.

Элементы матрицы \mathbf{B} можно найти, взяв производную по времени от выражения (2.3.29) с учетом линеаризованных уравнений состояния и приравняв полученное выражение к правой части формулы (2.3.28).

Пример 2.3.2 [5]. Динамика системы задана уравнениями состояния

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(x_1 - \beta x_2)(1 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(x_2 + \alpha x_1)(1 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2),\end{aligned}\tag{2.3.30}$$

где α , β , a и b – положительные коэффициенты.

Выберем функцию V в виде

$$V = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2.\tag{2.3.31}$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{dV}{dt} = 2\alpha x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\beta x_2 \frac{dx_2}{dt}.$$

Подставив в последнее выражение правые части уравнений (2.3.30), получим

$$\frac{dV}{dt} = -2(1 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2).$$

Понятно, что $dV/dt < 0$ при выполнении неравенства

$$ax_1^2 + bx_2^2 < 1. \quad (2.3.32)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.3.32) функция (2.3.31) является функцией Ляпунова, а этого достаточно для того, чтобы движение системы (2.3.30) была асимптотически устойчивым внутри эллипса

$$ax_1^2 + bx_2^2 = 1. \quad (2.3.33)$$

Сам же эллипс (2.3.33) является границей устойчивости, а в плоскости состояний представляет собой неустойчивый предельный цикл.

Следует ещё раз подчеркнуть, что второй метод Ляпунова даёт только достаточные условия устойчивости. Следовательно, определив какую-либо функцию Ляпунова, мы найдём только ту область фазового пространства, где система точно устойчива, но вне этой области сказать об устойчивости уже ничего нельзя. То есть мы определяем только часть общей области устойчивости. Величина этой части зависит от того, насколько удачно выбрана функция Ляпунова.

2.3.7. Частотный критерий абсолютной устойчивости

В.М. Попова

Во многих случаях нелинейную систему можно представить соединением линейной части и нелинейного звена в обратной связи (рис. 2.24, *а*).

Рассматриваемый критерий касается статических нелинейностей, характеристики которых располагаются в первом и третьем квадрантах между осью абсцисс и прямой kx (рис. 2,24, *б*), то есть нелинейность задана

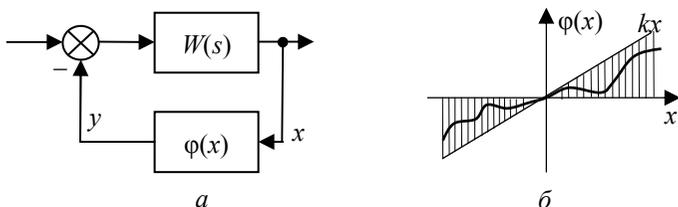


Рис. 2.24. Нелинейная система

неравенством

$$0 < \varphi(x)x < kx^2, \quad (x \neq 0).^1 \quad (2.3.24)$$

Сами нелинейные характеристики могут иметь любой вид, поэтому, по сути, рассматривается не конкретная нелинейная характеристика, а целый класс нелинейностей, удовлетворяющих условию (2.3.24). Асимптотическая устойчивость в целом для некоторого класса нелинейностей называется абсолютной устойчивостью.

В 1949 г. М.А. Айзерман предположил, что если будут асимптотически устойчивы все линейные системы, в которых нелинейность заменена на линейную зависимость $\varphi(x) = ax$ и $0 < a < k$ (то есть линейная зависимость лежит в секторе $(0, k)$), то будет устойчива и любая нелинейная система, в которой нелинейность удовлетворяет условию (2.3.24). Это предположение известно под названием гипотезы или проблемы Айзермана. Позднее гипотеза Айзермана была доказана для систем второго порядка (исключая асимптотическое приближение нелинейности к краям луча), но для систем более высокого порядка были придуманы примеры, противоречащие этой гипотезе.

¹ В таком случае говорят, что нелинейность задана в секторе $(0, k)$.

Поиски наиболее широкого луча для абсолютной устойчивости системы привели к разработке в 1959 г. румынским ученым В.М. Поповым частотного критерия, в известном смысле обобщающего критерий устойчивости Найквиста и дающего достаточные условия абсолютной устойчивости. Приведём критерий без доказательства. Начнём со случая, когда линейная часть системы является устойчивой.

Теорема 2.3.4. Для абсолютной устойчивости нелинейной системы (рис. 2.24) с нелинейной однозначной характеристикой (2.3.24) и устойчивой линейной частью достаточно, чтобы существовало такое вещественное число q , при котором для $0 \leq \omega < \infty$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega)W(j\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (2.3.25)$$

Графическая иллюстрация неравенства (2.3.25) весьма наглядна. Введём в рассмотрение видоизменённую частотную передаточную функцию

$$W^*(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) + \omega \operatorname{Im} W(j\omega). \quad (2.3.26)$$

Передаточная функция (2.3.26) получается из передаточной функции непрерывного звена $W(j\omega)$ умножением на ω ординат последней. Тогда геометрическая формулировка критерия Попова следующая.

Для абсолютной устойчивости нелинейной системы (рис. 2.24) с нелинейной однозначной характеристикой (2.3.24) и устойчивой линейной частью достаточно, чтобы в комплексной плоскости через точку вещественной оси с абсциссой $-\frac{1}{k}$ можно было провести прямую так, чтобы видо-

измененная частотная характеристика $W^*(j\omega)$ целиком располагалась *справа* от этой прямой.

Прямая, упомянутая в приведённой выше формулировке, называется прямой Пóпова. На рис. 2.25, *а* приведен пример, когда прямая Пóпова может быть проведена (причем не одна), на рис. 2.25, *б* – когда такую прямую провести нельзя. В последнем случае, поскольку критерий Пóпова является достаточным, сказать об устойчивости ничего нельзя.

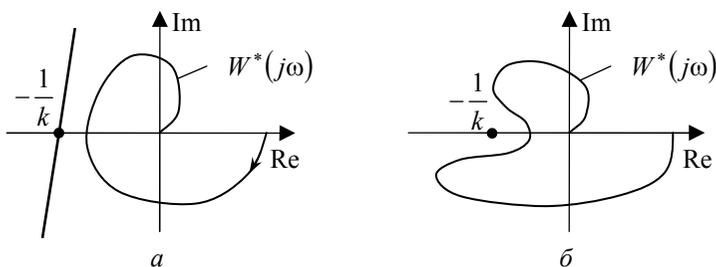


Рис. 2.25. Критерий Пóпова

Так как у характеристик $W(j\omega)$ и $W^*(j\omega)$ одинаковые вещественные части, они пересекают вещественную ось в одних и тех же точках. Если годограф $W^*(j\omega)$ имеет выпуклую форму, то критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова совпадает с критерием Найквиста для линейной системы при замене нелинейности $\varphi(x)$ прямой kx . Действительно, в этом случае условие неохвата годографом $kW(j\omega)$ критической точки $(-1, j0)$ совпадает с условием абсолютной устойчивости В.М. Попова. Такие нелинейные системы называют системами, устойчивыми в гурвицевом угле, понимая под гурвицевым углом угол, образованный прямой

$y = k_{пр}x$, где $k_{пр}$ – предельный коэффициент усиления линейной системы, и горизонтальной осью.

Теперь разберем случай неустойчивой линейной части. Если линейная часть системы с передаточной функцией $W(s)$ неустойчива, можно сделать её устойчивой с помощью жесткой отрицательной обратной связи с некоторым коэффициентом передачи k_{ϕ} . Попутно обратим внимание на то, что если сделать линейную часть устойчивой таким методом невозможно, то это уже означает отрицательный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости нелинейной системы, поскольку даже замена нелинейной характеристики $\varphi(x)$ на линейную с любым наклоном не делает систему устойчивой.

Преобразуем структурную схему системы (см. рис. 2.24, а), введя два фиктивных звена с коэффициентами передачи k_{ϕ} в обратных связях линейной и нелинейной части (рис. 2.26).

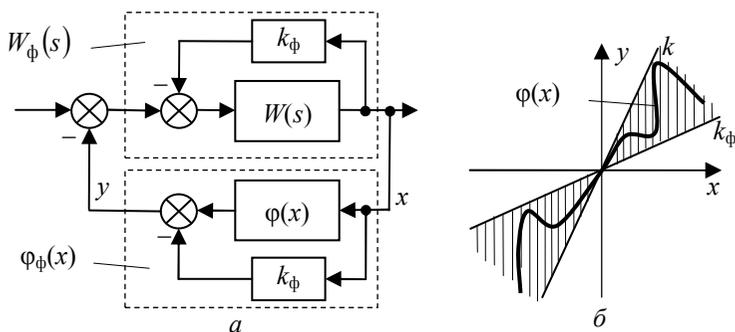


Рис. 2.26. К критерию Пóпова для системы с неустойчивой линейной частью

Разумеется, в системе ничего не изменится, так как выходные сигналы этих фиктивных звеньев взаимно компенсируются на входе линейной части. Но теперь линейная часть с передаточной функцией

$$W_{\Phi}(s) = \frac{W(s)}{1 + k_{\Phi}W(s)}$$

является устойчивой и возможно применение критерия Пóпова при нелинейности

$$\varphi_{\Phi}(x) = \varphi(x) - k_{\Phi}x. \quad (2.3.27)$$

Поскольку теперь новая нелинейная характеристика (2.3.27) расположена в секторе $(0, k - k_{\Phi})$, для абсолютной устойчивости системы достаточно, чтобы прямая Пóпова проходила через точку $-\frac{1}{k - k_{\Phi}}$ на вещественной оси. При этом первоначальная характеристика $\varphi(x)$ должна располагаться в секторе (k_{Φ}, k) (рис. 2.26, б).

Можно распространить критерий Пóпова и на более общий случай нелинейности, когда последняя лежит в секторе (k_1, k_2) , где k_1 может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Действительно, этот случай сводится к случаю нелинейности в секторе $(0, k)$, если преобразовать структурную схему системы наподобие схемы рис. 2.26, а, положив $k_{\Phi} = k_1$. Тогда получим систему с нелинейностью

$$\varphi_{\Phi}(x) = \varphi(x) - k_1x,$$

расположенной в секторе $(0, k)$, где $k = k_2 - k_1$, и линейную часть с передаточной функцией

$$W_{\Phi}(s) = \frac{W(s)}{1 + k_1 W(s)}.$$

Если линейная часть находится на границе устойчивости, то есть передаточная функция $W(s)$ имеет полюс в начале координат или на мнимой оси, то формулировка критерия Попова остается такой же, как для устойчивой линейной части, но требует двух дополнений.

1. Устойчивой должна быть линейная система с передаточной функцией $kW(s)$ при $k \rightarrow 0$.

2. Нелинейная характеристика не должна касаться оси абсцисс, то есть нелинейность располагается в секторе (ε, k) , где ε – бесконечно малая величина.

2.3.8. Методы малого параметра

Эти методы являются приближенными и позволяют исследовать устойчивость различных режимов в нелинейных системах, определять параметры автоколебаний (предельных циклов), а также их устойчивость. Разработано много различных вариантов методов малого параметра. Самыми ранними работами по подобным методам являются, видимо, работы Пуанкаре, Ляпунова, Рэйли и Ван-дер-Поля. Впоследствии методами малого параметра занимались Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, А.А. Андронов, Б.В. Булгаков и другие исследователи. Все подобные методы предполагают, что нелинейности достаточно малы (отсюда и название

методов – методы малого параметра), поэтому эти методы хорошо «работают» только при незначительном отличии рассматриваемой системы от соответствующего линейного аналога.

Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка¹

$$\ddot{x} + x = \mu \varphi(x, \dot{x}), \quad (2.3.28)$$

где φ – произвольная аналитическая непрерывная однозначная дифференцируемая нелинейная функция, μ – постоянное, малое по величине число (это и есть малый параметр).

При $\mu=0$ уравнение (2.3.28) превращается в линейное

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (2.3.29)$$

имеющее решение

$$x = x_0 = A \cos t, \quad (2.3.30)$$

где частота колебаний $\omega=1$, а амплитуда A определяется начальными условиями.

Эксперименты показывают, что в реальной системе (то есть при $\mu \neq 0$), описываемой уравнением (2.3.28), возникают автоколебания с частотой, близкой к единице, но всё же не равной ей, и амплитудой, независимой от начальных условий и определяемой параметрами системы.

¹ Этим уравнением описывается, например, ламповый генератор с мягким режимом возбуждения колебаний.

Естественно предположить, что решение уравнения (2.3.28) можно представить в виде суммы решения приближения нулевого порядка x_0 и бесконечных малых добавок

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \quad (2.3.31)$$

где x_1, x_2 и т.д. – решения приближений соответственно первого, второго и т.д. порядков.

Разложим функцию φ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, \dot{x}_0) , обозначив приращения $x - x_0 = \varepsilon, \dot{x} - \dot{x}_0 = \delta$

$$\varphi(x, \dot{x}) = \varphi(x_0, \dot{x}_0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \varepsilon + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \delta + \dots \quad (2.3.32)$$

В соответствии с выражением (2.3.31) отклонения ε и δ равны

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \\ \delta &= \mu \dot{x}_1 + \mu^2 \dot{x}_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Подставляя выражения (2.3.33) в формулу (2.3.32), а затем вместе с обозначением (2.3.31) в уравнение системы (2.3.28), получим

$$\begin{aligned} &(\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = \\ &= \mu \varphi(x_0, \dot{x}_0) + \mu^2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot x_1 + \mu^2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot \dot{x}_1 + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая сомножители при μ в одинаковых степенях в правой и левой частях последнего соотношения, получаем бесконечную систему теперь уже линейных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= \varphi(x_0, \dot{x}_0), \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot x_1 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot \dot{x}_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Последовательно решая эти уравнения, начиная с первого, получаем добавки x_1 , x_2 и т.д., формируя, таким образом, окончательное решение (2.3.31).

На первый взгляд, этот метод позволяет получить неограниченную точность, но в действительности часто ряд, полученный в результате решения уравнений (2.3.34), плохо, даже качественно, отражает реальную ситуацию при больших значениях t . Рассмотрим это на следующем примере.

Пример 2.3.3. Задано уравнение нелинейной системы

$$\ddot{x} + x = \mu(a - bx^2)\dot{x}. \quad (2.3.35)$$

Нелинейность φ , как следует из сравнения уравнения (2.3.35) с уравнением (2.3.28) равна $\varphi(x, \dot{x}) = (a - bx^2)\dot{x}$. Решение уравнения нулевого приближения (первого из уравнений системы (2.3.28)) с начальными условиями $x_0(0) = A$, $\dot{x}_0(0) = 0$ есть $x_0 = A \cos t$, следовательно, правая

часть уравнения первого приближения (второго из уравнений системы (2.3.28)) равна

$$\varphi(x_0, \dot{x}_0) = (a - b \cos^2 t)(-A \sin t),$$

а само это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= (a - b \cos^2 t)(-A \sin t) = \\ &= \left(\frac{bA^3}{4} - aA \right) \sin t + \frac{bA^3}{4} \sin 3t = M \sin t + N \sin 3t, \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

где $M \neq 0$ при произвольном A .

Начальные условия для переменной x_1 и других слагаемых ряда (2.3.31) – нулевые.

Поскольку вынуждающая сила в уравнении (2.3.36) имеет составляющую, производная которой совпадает с общим решением однородного уравнения (2.3.29), то есть с $\cos t$, то в решении для x_1 будет составляющая с бесконечно нарастающей амплитудой $t \cos t$. Таким образом, решение уравнения (2.3.36) можно представить в форме

$$x_1(t) = \phi_{11}(t) + t\phi_{12}(t),$$

где ϕ_{11} и ϕ_{12} – гармонические функции.

Поскольку амплитуда решения x_1 непрерывно нарастает, будет нарастать и амплитуда приближенного решения

$$x_{\text{пр}}(t) = A \cos t + \mu\phi_{11}(t) + t\mu\phi_{12}(t).$$

Следующее приближение x_2 даст более точное решение на большем промежутке времени, но оно по-прежнему непригодно для исследования установившихся процессов, поскольку содержит уже член с t^2

$$x_{\text{пр}}(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) = A \cos t + \mu \phi_{11}(t) + t \mu \phi_{12}(t) + \mu^2 \phi_{21}(t) + t \mu^2 \phi_{22}(t) + t^2 \mu^2 \phi_{23}(t).$$

Приведённый пример показывает, что не всегда уравнения (2.3.34) дают решение, соответствующее поведению реальной системы.

Члены с возрастающей амплитудой, то есть содержащие множители t , t^2 и т.д., называются вековыми или секулярными. Если мы хотим, чтобы найденное решение уравнения (2.3.35) действительно отражало бы характер реального процесса, вековые члены должны исчезнуть. Вековой член в решении x_1 пропадёт, если в правой части уравнения (2.3.36) коэффициент M при $\sin t$ обратить в нуль. Это условие даст уравнение для A . Но самое неприятное, что следующее уравнение (для x_2) приведёт к уравнению, противоречащему первому. Поэтому избавиться от вековых членов подобным образом не получится.

Для поисков методов борьбы с вековыми членами следует, прежде всего, разобраться в причинах их появления. Дело в том, что ряд (2.3.31), получающийся в результате решения уравнений (2.3.34), даёт гармонические функции частот, кратных частоте решения нулевого приближения, то есть единице. Однако точное решение уравнения (2.3.35) отличается от решения нулевого приближения не только несинусоидальностью, но и – самое важное – частотой. Реальная частота колебаний не равна единице

$\omega \neq 1$, и эта даже небольшая разница с течением времени приводит к всё большому отличиям получаемого решения от реального процесса.

Ляпунов и независимо от него Рэйли предложили несколько видоизменить составление уравнений (2.3.34). Они предложили частоту нулевого приближения взять равной не единице, а некоторому неизвестному пока значению $\omega \neq 1$. Поскольку при $\mu = 0$ должно выполняться равенство $\omega = 1$ или $\omega^2 = 1$, частота ω должна зависеть от μ

$$\omega^2 = \omega^2(\mu) = 1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots, \quad (2.3.37)$$

где h_1, h_2 и т.д. – частотные поправки.

Перепишем уравнение (2.3.28) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + \mu \varphi(x, \dot{x}). \quad (2.3.38)$$

Подставив ряды (2.3.31) и (2.3.37) в уравнение (2.3.38), получим

$$\begin{aligned} & (\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + \dots) + \omega^2 (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = (\mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots) \times \\ & \times (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) + \mu \varphi(x_0, \dot{x}_0) + \mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot x_1 + \mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot \dot{x}_1 + \dots \end{aligned}$$

Далее процедура известна – раскрываем скобки и приравниваем множители при μ в одинаковых степенях в правой и левой частях полученного выражения. В результате получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0, \\
\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= h_1 x_0 + \varphi(x_0, \dot{x}_0), \\
\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= h_1 x_1 + h_2 x_0 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot x_1 + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \cdot \dot{x}_1, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Последовательно решая уравнения (2.3.39), получаем все больше и больше членов ряда (2.3.31). Частотные поправки h_k вычисляются из условий равенства нулю вековых членов последовательно по всей цепочке уравнений. Попутно узнаём всё точнее неизвестную частоту ω в соответствии с формулой (2.3.37).

2.3.9. Гармоническая линеаризация

Метод гармонической линеаризации предложили Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов в 1934 г. В приложении к САУ этим методом занимались Л.С. Гольдфарб и Е.П. Попов. В учебной и технической литературе встречаются и другие названия этого метода – метод гармонического баланса, метод описывающих функций, метод эквивалентной линеаризации.

Рассматриваемый метод применяется для определения условий возникновения и параметров автоколебаний, а, следовательно, и определения областей устойчивости и неустойчивости. Кроме того, гармоническая линеаризация может быть применена для исследования вынужденных колебательных режимов и переходных процессов при медленно меняющихся воздействиях.

По-прежнему представляем систему состоящей из нелинейного звена

с характеристикой $\varphi(x)$ и линейной части, заданной передаточной функцией $W(s)$ (рис. 2.27).

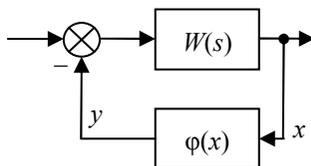


Рис. 2.27. Нелинейная система

Применение метода гармонической линеаризации основано на предположении о том, что в системе существуют автоколебания, более того, колебания на входе нелинейного звена являются моногармоническими

$$x(t) = x_0 + A \sin \omega t, \quad (2.3.40)$$

где x_0 – постоянная составляющая, A – амплитуда, а ω – частота автоколебаний.

На самом деле автоколебания в нелинейной системе не являются моногармоническими вследствие искажения сигнала нелинейным звеном. Но предположение о моногармоническом сигнале на выходе линейной части (или на входе нелинейного звена, что одно и то же) основано на факте, что в большинстве случаев линейная часть является фильтром нижних частот (гипотеза фильтра). Это означает, что амплитуды высших гармоник много меньше, чем амплитуда основной частоты ω . Поскольку частота автоколебаний ω выясняется только в результате применения метода гармонической линеаризации и заранее неизвестна, проверку гипотезы фильтра возможно провести только в конце исследования. Если в результате такой проверки гипотеза фильтра не подтверждается, к полу-

ченным результатам следует подходить с осторожностью и, по возможности, провести дополнительное исследование каким-либо другим методом.

На выходе нелинейного звена сигнал уже не будет моногармоническим из-за нелинейных искажений (на рис. 2.28 показан пример прохождения синусоидального сигнала через усилительное звено с зоной нечувствительности).

Поскольку сигнал y на выходе нелинейного звена периодический, можно разложить его в ряд Фурье, а так как через линейную часть проходит только первая гармоника (гипотеза фильтра), то имеет смысл интересоваться именно этой гармоникой. В результате получим

$$y(t) = \varphi(x) = y_0 + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (2.3.41)$$

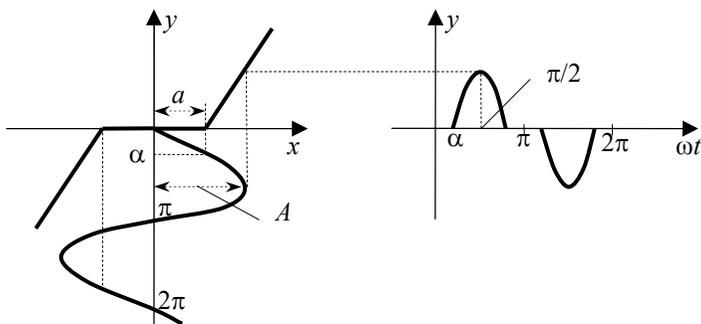


Рис. 2.28. Искажение сигнала нелинейным звеном

где постоянная составляющая $y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) d(\omega t)$, а коэффициенты

Фурье C_1 и C_2 вычисляются по известным формулам

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin \omega t d(\omega t),$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos \omega t d(\omega t).$$

Выражение (2.3.41) удобнее представить несколько в другом виде. Найдём из формулы (2.3.40) $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{x - x_0}{A}, \quad \cos \omega t = \frac{p(x - x_0)}{A\omega}, \quad (p = \frac{d}{dt})$$

и подставим в формулу (2.3.41). Получим

$$y = k_{r0} x_0 + \left(k_r + \frac{k'_r}{\omega} p \right) (x - x_0) \quad (2.3.42)$$

или

$$y = y_0 + \left(k_r + \frac{k'_r}{\omega} p \right) (x - x_0). \quad (2.3.43)$$

В приведённых соотношениях введены обозначения

$$k_{r0} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{x_0 2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) d(\omega t),$$

$$k_r = \frac{C_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin(\omega t) d(\omega t),$$

$$k'_r = \frac{C_2}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (2.3.44)$$

Коэффициенты k_{r0} , k_r и k'_r , согласно формулам (2.3.44), являются функциями постоянной составляющей x_0 , амплитуды A и частоты ω . Если величины x_0 , A и ω постоянны, то постоянны и коэффициенты k_{r0} , k_r и k'_r . Следовательно, и уравнения (2.3.42), (2.3.43) являются линейными для гармонического сигнала (2.3.40). Таким образом, нелинейное уравнение $y = \varphi(x)$ приближённо (без учёта высших гармоник) заменяется линейным уравнением (2.3.42) или (2.3.43). Такая замена и называется гармонической линейризацией.

Коэффициенты k_{r0} , k_r и k'_r называются коэффициентами гармонической линейризации или гармоническими коэффициентами передачи.

Уравнения (2.3.42), (2.3.43) можно условно представить в виде схем, представленных на рис. 2.29, *а* и *б* соответственно.

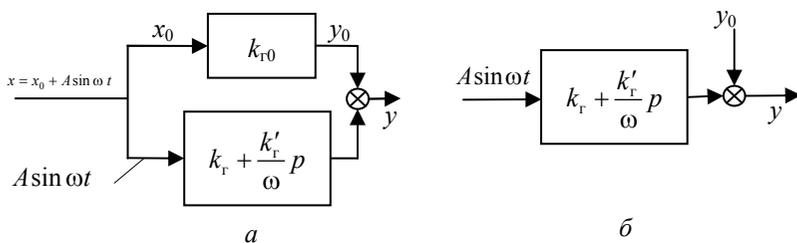


Рис. 2.29. Гармоническая линейризация

Появление постоянной составляющей y_0 возможно по двум причинам: либо к системе приложено постоянное внешнее воздействие, либо нелинейная характеристика является несимметричной относительно начала координат. В последнем случае нельзя выразить y_0 через x_0 с помощью

коэффициента k_{r0} , то есть в виде $y_0 = k_{r0}x_0$, поскольку здесь $y_0 \neq 0$ даже если $x_0 = 0$. Поэтому для несимметричных нелинейностей следует вместо формулы (2.3.42) пользоваться формулой (2.3.43).

Если внешнее воздействие отсутствует и нелинейная характеристика симметричная, уравнение (2.3.42) принимает вид

$$y = \left(k_r + \frac{k'_r}{\omega} p \right) x = W_n(p)x, \quad (2.3.45)$$

где $W_n(p) = k_r + \frac{k'_r}{\omega} p$ – передаточная функция эквивалентного линейного звена, называемая гармонической передаточной функцией нелинейного звена.

Представим в выражении (2.3.45) входной сигнал x нелинейного звена в комплексной форме $x = e^{j\omega t}$. Получим

$$y = \left(k_r + \frac{k'_r}{\omega} p \right) e^{j\omega t} = (k_r + jk'_r) e^{j\omega t} = C(A) e^{j\psi(A)} e^{j\omega t} = W_n(A) e^{j\omega t}.$$

Здесь $W_n(A) = k_r + jk'_r = C(A) e^{j\psi(A)}$ – комплексный гармонический коэффициент передачи (другие названия – амплитудно-фазовая характеристика, описывающая функция) нелинейного звена.

В отличие от линейных систем, коэффициент усиления по амплитуде $C = \sqrt{k_r^2 + k_r'^2}$ и фазовый сдвиг $\psi = \arctg(k'_r/k_r)$ не зависят от частоты, но являются функциями амплитуды входного сигнала. Это отражено в соответствующих выражениях.

Из формул (2.3.42), (2.3.43) следует, что коэффициент k_r определяет выходную гармоническую составляющую, совпадающую по фазе с входным сигналом, а коэффициент k'_r – выходную составляющую, сдвинутую по фазе на $\pi/2$ вперёд или назад в зависимости от знака этого коэффициента. Коэффициент k'_r отличен от нуля только для неоднозначных нелинейностей.

Для однозначной безынерционной нелинейной характеристики основная гармоника на выходе всегда совпадает по фазе с входным сигналом нелинейного звена. Поэтому для таких нелинейностей уравнение (2.3.42) можно переписать в виде

$$y = k_{r0}(A, x_0)x_0 + k_r(A, x_0)(x - x_0). \quad (2.3.46)$$

В последнем уравнении ещё раз подчеркнута зависимость коэффициентов гармонической линеаризации от амплитуды A и постоянной составляющей x_0 .

Наконец, при нечётной однозначной нелинейности и отсутствии постоянного входного воздействия уравнение (2.3.46) становится совсем простым

$$y = k_r(A)x.$$

Для типовых нелинейностей в учебной и справочной литературе по теории автоматического управления существуют таблицы коэффициентов гармонической линеаризации, посчитанные по формулам (2.3.44) [6].

Пример 2.3.4. Вычислим коэффициент k_r для усилителя с зоной нечувствительности (рис. 2.28). Для простоты положим наклон линейной части равным единице. Тогда аналитическое выражение для нелинейной зависимости можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq a, \\ x - a & \text{при } x > a, \\ x + a & \text{при } x < -a. \end{cases}$$

Воспользуемся первой из формул (2.3.44). При этом учтём симметрию выходной кривой относительно точки $\psi = \omega t = \pi/2$, что позволяет верхний предел в интеграле заменить на $\pi/2$, а результат учетверить

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} (A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi + \frac{4a}{A\pi} \cos \psi \Big|_{\alpha}^{\pi/2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi - \frac{4a \cos \alpha}{A\pi} = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{\pi} - \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\pi} = 1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}. \end{aligned}$$

В полученном выражении учтено, что $\sin \alpha = \frac{a}{A}$. Кроме того, приведённая формула справедлива при $A > a$.

На рис. 2.30 приведена зависимость k_r от отношения A/a . Качественный характер кривой $k_r(A/a)$ можно было предвидеть и без аналитических выкладок. Действительно, до тех пор, пока $A < a$, выходной сигнал равен нулю и $k_r = 0$. При увеличении отношения A/a больше единицы появляется выходной сигнал, и коэффициент k_r возрастает от нуля.

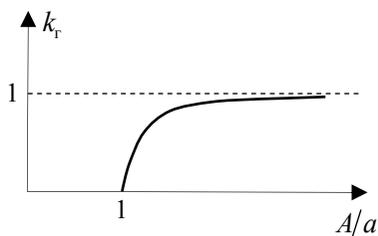


Рис. 2.30. Коэффициент гармонической линеаризации для усилителя с зоной нечувствительности

Дальнейшее увеличение величины A/a приводит к всё меньшему влиянию зоны нечувствительности по сравнению с амплитудой входного сигнала, и при $A/a \rightarrow \infty$ выходной сигнал становится равным входному сигналу, то есть коэффициент усиление стремится к единице.

Вернёмся к системе, изображённой на рис. 2.27. После линеаризации получим структурную схему, представленную на рис. 2.31.

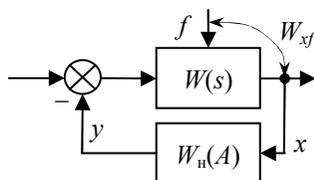


Рис. 2.31. Линеаризованная система

Для постоянной амплитуды A полученная система является линейной. Незатухающие колебания в линейной системе возможны, если эта система находится на колебательной границе устойчивости. Критерии нахождения системы на границе устойчивости могут быть самые разные: по алгебраическому критерию это равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица, по критерию Михайлова – прохождение кривой Михай-

лова для замкнутой системы через начало координат, по критерию Найквиста – прохождение кривой АФЧХ разомкнутой системы через критическую точку $(-1, j0)$. Чаще всего применяется последний критерий, а именно, критерий Найквиста.

АФЧХ разомкнутой системы (рис. 2.31) равна

$$W(j\omega)W_n(A). \quad (2.3.47)$$

Условие нахождения замкнутой системы на границе устойчивости

$$W(j\omega)W_n(A) = -1.$$

Последнее условие можно представить в виде

$$W(j\omega) = -\frac{1}{W_n(A)}. \quad (2.3.48)$$

Метод Л.С. Гольдфарба решения уравнения (2.3.48) и тем самым определения параметров возможных автоколебаний заключается в нахождении точки пересечения кривой АФЧХ линейной части $W(j\omega)$ как функции частоты и кривой $-1/W_n(A)$ как функции амплитуды (рис. 2.32).

Частота автоколебаний ω определяется по годографу $W(j\omega)$, а амплитуда – по годографу $-1/W_n(A)$. Определить, какая из точек пересечения (на рис. 2.32 – точки М и N) соответствует устойчивому (то есть реально существующему) предельному циклу, а какая неустойчивому, можно руководствуясь следующим простым правилом: если точка на годографе $-1/W_n(A)$, соответствующая бóльшему, чем точка пересечения, значению

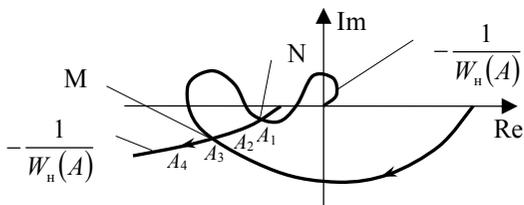


Рис. 2.32. Метод Гольдфарба

амплитуды A , охватывается годографом $W(j\omega)$, то эта точка соответствует неустойчивому предельному циклу, если не охватывается, – то устойчивому. То есть, если на рис. 2.32 выполняются неравенства $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$, то точка N соответствует неустойчивому, а точка M – устойчивому предельному циклу. Если точек пересечения годографов $W(j\omega)$ и $-1/W_n(A)$ нет, это означает отсутствие автоколебаний в системе.

Можно также искать точки пересечения годографа обратной АФЧХ линейной части $1/W(j\omega)$ и годографа $-W_n(A)$, но это будет уже метод Коченбургера.

В случае постоянного внешнего воздействия f_0 (рис. 2.31) оно вызывает на входе нелинейного элемента постоянную составляющую x_0 , и автоколебания следует искать в форме (2.3.40)

$$x = x_0 + A \sin \omega t .$$

При однозначной нечётной характеристике линеаризованное уравнение нелинейного элемента принимает вид

$$y = k_{r0}x_0 + (k_r + jk'_r)(x - x_0) .$$

Здесь уже три подлежащие определению неизвестные параметра: A , ω и x_0 .

Для постоянной составляющей имеем уравнение

$$x_0 = \Phi_{x_f}(0)f_0 = \frac{W_{x_f}(0)}{1 + k_{r0}(A, \omega, x_0)W(0)}f_0. \quad (2.3.49)$$

Для гармонической составляющей справедлива та же передаточная функция (2.3.47).

Процедура определения параметров автоколебаний остаётся, в общем, той же, с той лишь разницей, что к уравнению (2.3.48), определяющему условия нахождения системы на границе устойчивости, добавляется уравнение (2.3.49). Можно предложить следующий порядок решения.

Сначала из уравнения (2.3.48) находим A и ω как функции постоянной составляющей x_0 , считая x_0 постоянным неизвестным пока параметром

$$\begin{aligned} A(x_0), \\ \omega(x_0). \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

Далее подставляем эти зависимости в уравнение (2.3.49) и, решая полученное нелинейное уравнение, находим x_0 . Наконец, из зависимостей (2.3.50) определяем A и ω .

Если нелинейная характеристика несимметрична, при линеаризации нельзя применять коэффициент k_{r0} , а следует пользоваться схемой рис. 2.29, \bar{b} и соответствующим уравнением (2.3.43)

$$y = y_0 + (k_r + jk_r')(x - x_0).$$

Поскольку при таком представлении нелинейного звена оно в явном виде не замыкает систему по постоянной составляющей, вместо уравнения (2.3.49) нужно пользоваться уравнением

$$x_0 = -W(0)y_0(A, \omega, x_0) + W_{xf}(0)f_0. \quad (2.3.51)$$

Если в системе постоянное внешнее воздействие отсутствует, последнее слагаемое в выражении (2.3.51) исчезнет.

Описанный выше метод гармонической линеаризации может быть применен и для систем, содержащих несколько нелинейностей, разделённых линейными звеньями. При этом если последние являются фильтрами нижних частот, каждая из нелинейных характеристик линеаризуется отдельно. В противном случае эти нелинейности вместе с промежуточными линейными звеньями следует рассматривать как одну сложную нелинейность.

Методику исследования автоколебаний при постоянном внешнем воздействии можно использовать и при медленно меняющихся (по сравнению с периодом автоколебаний) воздействиях. В частотной интерпретации это означает, что максимальная частота входного сигнала должна быть значительно меньше минимально возможной частоты автоколебаний в системе. Тогда можно считать, что за период колебаний входное воздействие практически постоянно.

Все приведённые формулы сохраняют силу, за исключением того, что в уравнениях (2.3.49), (2.3.51) для постоянной составляющей уже нельзя полагать $p=0$ и эти уравнения принимают вид:

– для симметричных нелинейностей

$$x_0(t) = \Phi_{xf}(p)f(t) = \frac{W_{xf}(p)}{1 + k_{r0}(A, \omega, x_0(t))W(p)} f(t); \quad (2.3.52)$$

– для несимметричных нелинейностей

$$x_0(t) = -W(p)y_0(A, \omega, x_0(t)) + W_{xf}(p)f(t). \quad (2.3.53)$$

Последовательность решения сохраняется: по уравнению (2.3.48) находим зависимости $A(x_0)$, $\omega(x_0)$; подставив найденные зависимости в выражения для $y_0(A, \omega, x_0)$, получаем нелинейную зависимость y_0 только от x_0 ; подставляя полученное выражение в уравнения (2.3.52) или (2.3.53) получаем уравнение относительно только x_0 ; решая эти уравнения, определяем x_0 и по зависимостям $A(x_0)$, $\omega(x_0)$ находим окончательно параметры автоколебаний.

Процесс решения уравнений (2.3.52) или (2.3.53) облегчается тем, что входящая в них нелинейная зависимость y_0 от x_0 часто довольно плавная даже для релейных нелинейностей и допускает обычную линеаризацию. То есть в значительном диапазоне изменения x_0 коэффициент $k_{r0} = y_0/x_0$ можно считать постоянным. Такое явление сглаживания нелинейной зависимости колебательной составляющей сигнала называется вибрационной линеаризацией. Благодаря этому эффекту даже релейная система при наличии колебаний ведёт себя по отношению к медленно меняющимся воздействиям как обычная линейная система.

2.4. Качество переходных процессов и коррекция

2.4.1. Оценка качества нелинейных систем

Оценка качества работы нелинейных систем производится по тем же критериям, что и обыкновенных линейных систем. Если речь идет о переходном процессе, то это перерегулирование, колебательность, время переходного процесса. Для линейных систем эти показатели качества определяются только параметрами системы. В нелинейных же системах критерии качества зависят также от внешних воздействий, вызвавших переходной процесс.

Самый простой случай, когда заранее предполагается, что нелинейности, присутствующие в системе, оказывают незначительное влияние на динамику системы. Тогда можно в первом приближении исследовать качество переходного процесса и сам процесс без учёта этих нелинейностей, то есть рассматривать систему как линейную. Это возможно, например, для САУ с усилителем с ограничением, с малой зоной нечувствительности, с достаточно узкой петлей гистерезиса и т.п. Далее оценивается влияние нелинейностей на переходной процесс. Точное построение переходных процессов с учётом нелинейностей можно проводить методами численного интегрирования с применением ЭВМ. При невозможности точной оценки погрешности, допускаемой в результате неучёта малых нелинейностей, производится оценка сверху подобных погрешностей.

Для систем второго порядка, если их исследование проводится методом фазовой плоскости, качество переходных процессов полностью определяется по фазовому портрету системы.

Приближенная оценка влияния нелинейностей может быть сделана с применением метода гармонической линеаризации. Для этого нелинейное звено гармонически линеаризуется, а затем в первом приближении предполагают, что его гармонический коэффициент передачи остаётся таким же и для произвольного, а не только для моногармонического сигнала. Таким образом получают зависимость параметров передаточной функции от входного сигнала. Далее обычными методами определяем зависимость качества переходных процессов в теперь уже линейной системе от параметров передаточной функции, и в конечном итоге определяем влияние нелинейности на переходной процесс. При такой методике удобно пользоваться частотными критериями качества, в частности, можно применять показатель колебательности M и полосу пропускания как показатель быстродействия. Но в отличие от линейных систем, здесь получается не одна частотная характеристика, а семейство таких характеристик в зависимости от амплитуды внешнего воздействия. Следовательно, и качество переходного процесса также будет зависеть от внешнего сигнала.

Для оценки длительности переходного процесса в нелинейных системах введём понятие степени устойчивости η . При этом длительность переходного процесса в нелинейной системе сравнивается с длительностью затухающей экспоненты $e^{-\eta t}$. Длительность последней равна, как известно $3/\eta$ ¹ ([7], подраздел 4.3.3). Пусть теперь найдено такое максимальное значение η , при котором для всех движений выполняется условие $x(t)e^{\eta t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а при превышении этого значения данное

¹ Для 5-и процентной ошибки.

условие не выполняется¹. Это означает, что переходной процесс затухает не медленнее, чем экспонента $e^{-\eta t}$. Таким образом, найденная величина η является оценкой сверху времени переходного процесса t_n в системе

$$t_n \leq \frac{3}{\eta}.$$

В линейной системе переходная составляющая решения $x(t)$ (то есть решение однородного уравнения) представляется в виде суммы экспонент (возможно и комплексных), поэтому умножение $x(t)$ на $e^{\eta t}$ равносильно уменьшению на η вещественных частей корней характеристического уравнения. То есть введённая здесь степень устойчивости для нелинейных систем совпадает с известной степенью устойчивости как минимальной вещественной части корней характеристического уравнения линейной системы.

В линейных системах для определения степени устойчивости применялись критерии устойчивости, применённые к уравнениям, изменённым таким образом, что это соответствовало умножению решения на $e^{\eta t}$. Аналогично и в нелинейных системах возможно для определения величины степени устойчивости η использовать критерии устойчивости нелинейных систем: второй метод Ляпунова и частотный критерий абсолютной устойчивости Попова.

При применении второго метода Ляпунова предварительно требуется в уравнениях системы заменить $x(t)$ на $x(t)e^{\eta t}$.

¹ Речь в данном случае идёт об асимптотической устойчивости в окрестности устойчивой особой точки в начале координат.

Если применяется частотный критерий абсолютной устойчивости Попова, то условием наличия у системы степени устойчивости не менее заданного η является выполнение этого критерия для видоизменённой частотной АФЧХ $W^*(-\eta + j\omega)$ вместо $W^*(j\omega)$.

Метод гармонической линеаризации может быть также применен для определения степени устойчивости η . При этом предполагается, что в системе имеются затухающие колебания $Ae^{-\eta t} \sin \omega t$. Гармоническая линеаризация в таком случае предполагает, что входной сигнал нелинейного звена имеет вид

$$x = x_0 + Ae^{-\eta t} \sin \omega t . \quad (2.4.1)$$

Коэффициенты гармонической линеаризации получаются в виде функций уже четырёх неизвестных параметров x_0 , A , ω и η , входящих в предполагаемое решение (2.4.1). В процессе исследования как раз и определяются упомянутые параметры. Если речь идёт о синтезе, то подобным образом может быть найдена, например, зависимость степени устойчивости η от варьируемых параметров системы путём построения линий равных значений η в плоскости этих параметров. Процедура определения степени устойчивости здесь та же, что и линейных системах.

2.4.2. Коррекция нелинейных систем

Коррекция нелинейных систем, равно как и линейных, проводится с помощью корректирующих звеньев, которые могут быть линейными или нелинейными. Линейные корректирующие звенья рассматривались в первой части пособия [7], и все изложенное о них для коррекции линей-

ных систем справедливо в полной мере и для коррекции нелинейных САУ. Поэтому остановимся только на принципиально новых возможностях, которые предоставляют для коррекции нелинейные звенья.

Прежде всего, нелинейными звеньями можно компенсировать вредное влияние присутствующих в САУ нелинейностей. С помощью нелинейных звеньев со специально подобранной статической характеристикой можно сделать статическую характеристику САУ линейной или даже деформировать её требуемым образом.

Устранение нежелательного влияния отдельных нелинейностей возможно также применением вибрационной линеаризации, заключающейся в сглаживании нелинейностей высокочастотным сигналом. Различают четыре способа вибрационной линеаризации: путем создания условий для появления автоколебаний, с помощью вынужденных детерминированных колебаний, создаваемых специальным генератором, с помощью случайных колебаний, формируемых генератором случайных сигналов и, наконец, применением скользящих режимов [6].

Другая область применения нелинейных корректирующих звеньев – это коррекция динамических качеств. Для этих целей безынерционные нелинейные корректирующие звенья, как правило, применяются в комбинации с линейными динамическими звеньями, образуя в комплексе нелинейные динамические корректирующие звенья. Если пользоваться описанием таких звеньев в частотной области (после гармонической линеаризации), то их применение преследует одну из двух целей. Во-первых, они применяются для получения определённой желаемой зависимости частотных характеристик от величины внешнего сигнала, например, для получения различной реакции системы на разные по величине входные воздействия, либо, наоборот, для устранения таких зависи-

мостей, если они нежелательны. Во-вторых, эти звенья применяются для преодоления той жесткой зависимости между амплитудной и фазовой частотными функциями, которая существует в линейных звеньях, с целью независимого изменения каждой из этих функций. В последнем случае часто применяют так называемые псевдолинейные корректирующие звенья.

Псевдолинейные звенья – это нелинейные корректирующие звенья, эквивалентные амплитудная и фазовая характеристики которых не зависят от величины входного сигнала (потому и называются псевдолинейными) [6]. Основным свойством данной группы звеньев является практически отсутствующая связь между эквивалентными амплитудной и фазовой характеристиками. Как известно [7], у минимально-фазовых линейных звеньев есть взаимно однозначная связь между АЧХ и ФЧХ. Применение неминимально-фазовых звеньев позволяет менять АЧХ без изменения ФЧХ и наоборот, но только в ограниченных пределах. Псевдолинейные звенья позволяют произвольно формировать каждую из этих характеристик отдельно, что существенно облегчает проведение синтеза и создает новые возможности повышения устойчивости и качества переходных процессов.

В качестве примера псевдолинейного звена на рис. 2.33 приведена структурная схема звена, у которого ФЧХ практически равна нулю, а АЧХ задана.

На этой схеме звено 1 имеет релейную характеристику, 2 – фильтр низких частот ФНЧ, звено 3 вычисляет модуль сигнала x_1 , 4 – перемножитель. Сигнал x_1 не зависит от амплитуды входного сигнала x благодаря релейному звену 1 и меняется с частотой в соответствии с амплитудно-частотной характеристикой ФНЧ 2. Выходной сигнал y – это произведе-

ние входного сигнала x на модуль x_1 . В итоге приведённая схема имеет независимую от амплитуды входного сигнала АЧХ, близкую к АЧХ фильтра низких частот, и нулевой фазовый сдвиг.

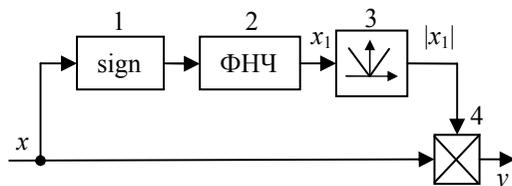


Рис. 2.33. Нелинейный фильтр с амплитудным ослаблением

Нелинейная коррекция позволяет повышать качество САУ (в частности, линейных САУ) с результатом, принципиально недостижимым при линейной коррекции.

Например, в линейных системах существует известное противоречие между быстродействием и колебательностью. Увеличение быстродействия с помощью, скажем, повышения общего коэффициента усиления разомкнутой цепи приводит к большой (или недопустимой) колебательности. Можно, конечно, применить линейную коррекцию, которая позволит повысить верхний предел коэффициента усиления, но все же это не снимает противоречия между требованием повышения быстродействия и увеличения запаса устойчивости. На рис. 2.34 приведён пример двух переходных процессов в линейной системе (показаны пунктиром): 1 – с большим коэффициентом усиления, но с недопустимой колебательностью и 2 – с большим запасом устойчивости, но с малым быстродействием. Было бы замечательно реализовать такой переходной процесс, у которого начальный участок принадлежал первому процессу, а конечный участок – второму (сплошная кривая).

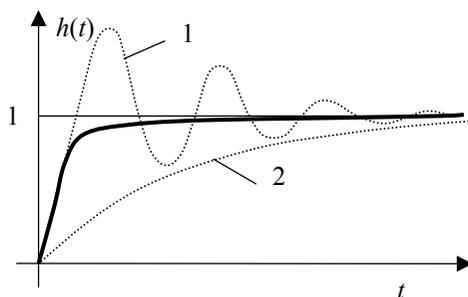


Рис. 2.34. Переходной процесс при нелинейной коррекции

В рамках линейной теории такое невозможно, но если менять коррекцию в ходе переходного процесса так, чтобы при больших отклонениях от установившегося значения (в начале процесса) коррекция определялась только по соображениям быстродействия, а в конце (при малых отклонениях) – по требованиям запаса устойчивости и колебательности, то вполне возможно получение переходного процесса, приведённого на рис. 2.34. Но такая коррекция является уже нелинейной. Реализовать её можно либо релейным переключением корректирующих звеньев в системе в функции выходной величины или величины ошибки (тогда это будет самоорганизующаяся система или система с переменной структурой), либо с помощью нелинейных звеньев со специально подобранными характеристиками, изменяющими общий коэффициент усиления в процессе регулирования. Последняя цель достигается, например, последовательным включением в канал регулирования нелинейного звена с приведённой на рис. 2.35 характеристикой, меняющей коэффициент передачи разомкнутой цепи в функции сигнала ошибки.

Несмотря на отмеченные преимущества нелинейной коррекции, следует понимать, что она по своей природе более специализированная по

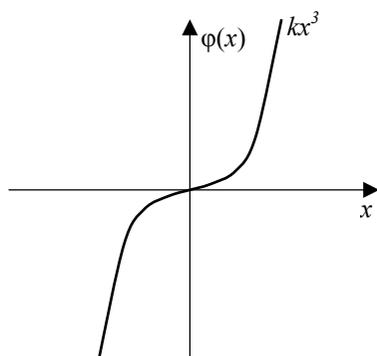


Рис. 2.35. Нелинейное корректирующее звено

отношению к тем режимам, для которых применяется. Это означает, что нелинейная коррекция, выбранная для определённого типа внешнего воздействия, может оказаться не столь эффективной (а может быть и недопустимой) для других типов воздействий. К тому же не существует общей методики для выбора нелинейных корректирующих звеньев, и приходится пользоваться опытом и рекомендациями по применению отдельных частных приёмов и схем нелинейной коррекции, изложенных в многочисленной учебной и справочной литературе по теории автоматического управления.

Подведем некоторый итог данного раздела.

1. Все реальные системы являются, строго говоря, нелинейными. Деление систем на линейные и нелинейные зависит от степени идеализации при их математическом описании.
2. Нелинейности, которыми никогда нельзя пренебречь – это релейные и неоднозначные характеристики.

3. Динамика нелинейных систем значительно разнообразнее, чем линейных. В нелинейных системах существуют, например, такие специфические режимы, как автоколебания.
4. Если линейные системы могут быть устойчивыми или неустойчивыми, то в нелинейных системах речь может идти об устойчивости или неустойчивости отдельных режимов работы при определённых внешних воздействиях и (или) начальных условиях. При этом различают следующие виды устойчивости: асимптотическую, в малом (по Ляпунову), в большом, в целом, абсолютную.
5. В нелинейных системах не выполняется принцип суперпозиции, поэтому не существует общей теории нелинейных систем, имеются лишь некоторые частные методы исследования таких систем.
6. К точным методам исследования нелинейных систем относятся метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, второй (прямой) метод Ляпунова, частотный критерий Попова.
7. Приближёнными методами являются: первый метод Ляпунова, метод интегрируемой аппроксимации, метод гармонической линеаризации, методы малого параметра.
8. Качество нелинейных систем оценивается по тем же критериям, что и линейных систем: время переходного процесса, колебательность, степень устойчивости, полоса пропускания и др. Для оценки качества переходных процессов могут применяться: метод гармонической линеаризации, прямой метод Ляпунова, частотный критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова, для систем второго порядка – метод фазовой плоскости.

9. Для коррекции нелинейных систем применяются линейные и нелинейные корректирующие звенья, которые могут включаться последовательно, параллельно или в обратную связь.
10. Линейная коррекция нелинейных САУ подчинена тем же принципам, что и линейных САУ.
11. Применение нелинейных корректирующих звеньев предоставляет принципиально новые возможности при коррекции как нелинейных, так и линейных систем.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА САУ

В этом разделе рассмотрим поведение САУ при случайных изменениях внешних воздействий на неё. Речь идет, прежде всего, о различных заранее не предсказуемых помехах, мешающих работе САУ.

По происхождению все помехи можно разделить на естественные и искусственные. Первые возникают независимо от человека, вторые являются прямым или косвенным результатом деятельности человека.

Естественные помехи, в свою очередь, делятся на внешние и внутренние. К внешним помехам относятся случайные воздействия на объект управления внешней среды, помехи в каналах связи между регулятором и объектом и между задающим воздействием и регулятором. К внутренним помехам можно отнести шумы в радиотехнических устройствах, обусловленные тепловым шумом резисторов, шумами полупроводниковых приборов, дробовым эффектом в электронных лампах.

Искусственные помехи бывают неорганизованными и организованными. Неорганизованные помехи – это, прежде всего, промышленные помехи, источником которых являются объекты, создающие электромагнитные излучения: сварочные аппараты, рентгеновские аппараты, искрящие контакты электрических машин и др. Пример организованных помех – это радиопротиводействие системам противоракетной обороны.

По характеру поведения помех во времени можно все помехи поделить условно на узкополосные, импульсные и гладкие (или флуктуационные). К узкополосным помехам относятся помехи от передач радиостанций, наводки от электросети, фон двойной промышленной частоты от двухполупериодных выпрямителей в источниках питания и т.д. Им-

пульсные помехи имеют широкий частотный спектр и представляют собой хаотическую последовательность импульсов, причем переходной процесс в системе от каждого импульса успевает затухнуть до прихода следующего. Гладкие помехи – это, например, шумы радиоэлектронных устройств. Эти помехи можно представить себе как результат действия большого количества малых хаотических импульсов, следующих настолько часто, что переходной процесс от каждого из них не успевает затухнуть к приходу следующего, в результате чего образуется единый незатухающий хаотический процесс. Частотный спектр флуктуационных помех часто считают равномерным в достаточно широкой полосе частот.

Следующее нередкое проявление случайностей в САУ – это заранее непредсказуемое изменение задающего воздействия. Например, для системы самонаведения ракеты задающим воздействием является азимут самолета, который она (ракета) намеревается уничтожить. Но траектория полета самолета заранее неизвестна не только ракете, но и самому летчику, задача которого при обнаружении нападения ракеты увильнуть от последней, совершая неожиданные маневры. Кроме этого, в более сложных, самонастраивающихся системах для идентификации отдельных звеньев могут применяться специально формируемые случайные воздействия, используемые для настройки системы и являющиеся полезными сигналами, предназначенными для получения дополнительной информации.

Наконец, случайным образом могут меняться и сами системы, в частности, их состав, связи между подсистемами, параметры последних.

Учет вышеперечисленных случайных изменений в САУ приводит к структурной схеме, приведенной на рис. 3.1.

На этом рисунке случайными являются как помехи в каналах связи h_1 , h_2 , h_3 , так и само задающее воздействие g . Также случайными являются возможные вариации параметров регулятора δK_p и объекта δK_o .

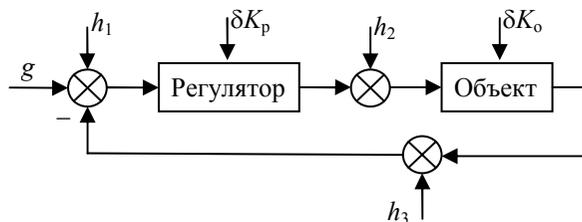


Рис. 3.1. Схема системы с учетом случайных воздействий

Все вышеизложенное делает необходимым применение статистических методов, основанных на статистических свойствах случайных процессов, происходящих в САУ.

3.1. Случайные события, величины и процессы

Вспомним основные понятия и формулы теории вероятности, которые потребуются для дальнейшего понимания излагаемых вопросов. В теории вероятности рассматриваются три класса вероятностных объектов: случайные события, случайные величины, и случайные функции.

3.1.1. Случайные события

Случайным событием A называется событие, которое может произойти, а может и не произойти. Характеризовать случайное событие можно частотой его появления. Если в N опытах m раз появилось событие A , то

говорят, что частота появления события A равна m/N . Частота появления события A является, вообще говоря, также случайной величиной. При увеличении числа опытов $N \rightarrow \infty$ частота появления события A стремится к некоторой неслучайной величине, называемой вероятностью появления события A — $P(A)$. Эта вероятность удовлетворяет неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$. Если $P(A) = 0$, событие называется невозможным, если $P(A) = 1$ — достоверным.

Если события A_1, A_2, \dots, A_k несовместимы, то есть любые два события не могут произойти в одном эксперименте, то вероятность $P(A)$ события, заключающегося в появлении хотя бы одного из них, равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

Если одно из событий A_1, A_2, \dots, A_k произойдет наверняка, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = 1,$$

и такая группа событий называется полной.

Если есть два события A и B , и появление события B влияет на вероятность появления события A , то соответствующая вероятность называется условной вероятностью и обозначается как $P(A/B)$ (вероятность события A при условии события B).

Пусть имеется полная группа несовместимых событий A_1, A_2, \dots, A_k и связанное с этими событиями событие B . Тогда справедлива формула Байеса

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^k P(A_i)P(B/A_i)}. \quad (3.1.1)$$

Здесь $P(A_i/B)$ – апостериорная (буквально – после опыта) вероятность, $P(A_i)$ и $P(B/A_i)$ – априорные (до опыта) вероятности.

3.1.2. Случайные величины

Следующая по сложности конструкция в мире случайностей – случайная величина. Это такая величина, которая в результате эксперимента принимает одно и только одно значение из некоторого множества возможных значений. Чтобы охарактеризовать случайную величину X , требуется, прежде всего, задать это множество.

Если множество возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины X конечно ($n < \infty$) или счётно ($n = \infty$), задаются вероятности появления каждого её значения – $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$. Ясно, что события $X=x_k$ для разных k образуют полную группу несовместимых событий.

Если множество возможных значений случайной величины X континуально, применяется другая форма описания её характеристик. Наиболее общей формой такого описания является функция распределения $F(x)$, называемая ещё интегральным законом распределения. Функция распределения $F(x)$ по определению есть зависимость вероят-

ности того, что случайная величина примет значение, меньшее значения аргумента x , от этого аргумента

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.1.2)$$

Интегральный закон распределения – монотонная неубывающая функция своего аргумента.

Если область задания случайной величины X – вся вещественная ось, то функция $F(x)$ является непрерывной, при этом $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$. Для непрерывной случайной величины можно взять производную от $F(x)$ по x

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (3.1.3)$$

где $p(x)$ называется плотностью распределения вероятности (или просто плотностью вероятности) или дифференциальным законом распределения.

Величина $p(x)dx$ есть вероятность попадания случайной величины в интервал $x \leq X < x + dx$. Очевидное условие нормировки для плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a, b)$ равна

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b p(x)dx = F(b) - F(a).$$

Важными характеристиками случайной величины являются её моменты. Начальным моментом k -го порядка называется постоянное число

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx .$$

Самыми часто употребляемыми являются момент первого порядка α_1 , называемый математическим ожиданием или средним значением случайной величины X

$$\alpha_1 = m_X = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx , \quad (3.1.4)$$

и средний квадрат

$$\alpha_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx . \quad (3.1.5)$$

Центральным моментом k -го порядка называется неслучайное число μ_k

$$\mu_k = M\left((X - m_X)^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k p(x) dx .$$

Важнейшим из них является момент второго порядка – дисперсия

$$D_X = \mu_2 = M\left((X - m_X)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p(x) dx . \quad (3.1.6)$$

Корень квадратный из дисперсии называется среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} .$$

Для нескольких случайных величин может быть определен как интегральный, так и дифференциальный законы распределения, задаваемые формулами, аналогичными формулам (3.1.2) и (3.1.3). Так, например, плотность совместного распределения случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , помноженная на бесконечно малые приращения переменных – $p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$, – есть вероятность сложного события, заключающегося в том, что величина X_1 попадёт в интервал $x_1 \leq X_1 < x_1 + dx_1$, X_2 – в интервал $x_2 \leq X_2 < x_2 + dx_2$, и т.д. до попадания величины X_n в интервал $x_n \leq X_n < x_n + dx_n$.

Можно определить также математическое ожидание величины X_k ($k=1, 2, \dots, n$)

$$m_{X_k} = M(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

и центральные моменты второго порядка

$$M_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - M(X_j)) \cdot (x_k - M(X_k)) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n .$$

Последнее выражение при $j=k$ задает дисперсию, а при $j \neq k$ получаем ковариацию случайных величин X_j и X_k . Ковариация является мерой статистической зависимости упомянутых случайных величин: если величины X_j и X_k независимы, ковариация равна нулю¹. Удобно использовать также безразмерный коэффициент

$$R_{jk} = \frac{M_{jk}}{\sqrt{M_{jj} \cdot M_{kk}}},$$

который называется коэффициентом корреляции.

3.1.3. Случайные процессы

Случайной функцией называется функция, которая при каждом значении аргумента является случайной величиной. Если независимым аргументом является время, то такая функция называется случайным процессом (другие названия – вероятностный или стохастический процесс). Привычное обозначение детерминированной функции времени $x(t)$ подразумевает, что каждому значению времени t соответствует определенное значение x . В стохастических процессах, протекающих в однотипных системах при неизменных условиях, в каждом эксперименте будут получаться *разные* функции $x(t)$ – разные экземпляры (реализации) стохастического процесса. Предсказать заранее, какова будет реализация случайного процесса в конкретном эксперименте, невозможно. Можно найти только статистические, усредненные характеристики множества реализаций стохастического процесса.

¹ Обратное, вообще говоря, неверно, потому, что ковариация является мерой только **линейной** статистической связи двух случайных процессов.

Одной из таких характеристик является одномерная плотность вероятности $p_1(x_1, t_1)$. Произведение $p_1(x_1, t_1)dx_1$ есть вероятность того, что в момент времени t_1 выполняется неравенство $x_1 \leq x < x_1 + dx_1$. Одномерная плотность вероятности зависит от времени, то есть в разные моменты времени закон распределения случайной величины, вообще говоря, может быть различным.

Одномерная плотность вероятности не может характеризовать связь между значениями стохастического процесса в разные моменты времени. Для такой характеристики можно ввести двумерную плотность вероятности $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Тогда величина $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2$ представляет собой вероятность того, что в момент времени t_1 случайная величина x попадёт в интервал $x_1 \leq x < x_1 + dx_1$, а в момент времени t_2 – в интервал $x_2 \leq x < x_2 + dx_2$. Но и это ещё не полная характеристика случайного процесса. Продолжая подобные рассуждения, введём n -мерную плотность вероятности $p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$. Максимально полную информацию о стохастическом процессе мы будем иметь, если знаем все n -мерные плотности вероятности для **любого** n .

Однако существуют случайные процессы, для полной характеристики которых вовсе необязательно знать все многомерные плотности вероятности. Самый простой пример такого процесса – чисто случайный процесс, когда случайные величины для разных моментов времени являются независимыми. В этом случае все n -мерные плотности вероятности представляются произведением одномерных плотностей

$$p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \cdot p_1(x_2, t_2) \cdot \dots \cdot p_1(x_n, t_n).$$

Другой пример – так называемые марковские процессы, для которых все плотности вероятности получаются из двумерной плотности $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Марковские случайные процессы рассматриваются, как правило, в дискретном времени, и тогда поведение процесса в следующий момент времени зависит только от значения случайной величины в предшествующий момент и не зависит от того, какова была предыстория процесса.

Стохастические процессы можно поделить на стационарные и нестационарные. Стохастический процесс называется стационарным (в узком смысле), если все n -мерные плотности вероятности не зависят от одинакового сдвига τ всех точек t_1, t_2, \dots, t_n по временной оси, то есть выполняется равенство

$$p_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau). \quad (3.1.7)$$

Статистические характеристики стационарного стохастического процесса не меняются во времени. Стационарный процесс в известном смысле является аналогом установившегося процесса. Любой переходной процесс не является стационарным.

Из равенства (3.1.7) в частности следует, что одномерная плотность вероятности стационарного процесса не зависит от времени

$$p_1(x_1, t_1) = p_1(x_1, t_1 + \tau) = p_1(x_1), \quad (3.1.8)$$

а двумерная плотность вероятности зависит только от разности моментов времени $t_2 - t_1$

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_2(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau) = p_2(x_1, x_2, t_2 - t_1). \quad (3.1.9)$$

Если есть два случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$, то для оценки их статистической взаимосвязи можно применять плотности совместных вероятностей значений процесса $x(t) - x_1, x_2, \dots, x_n$ и процесса $y(t) - y_1, y_2, \dots, y_n$ в различные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . Если все такие функции не зависят от одинакового сдвига во времени, эти процессы называются стационарно связанными.

Для описания стохастических процессов используют те же средства, что и для случайных величин. Математическое ожидание вычисляется по формуле (3.1.4), но теперь оно в общем случае является функцией времени

$$m_x(t) = M(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p_1(x, t) dx. \quad (3.1.10)$$

Для стационарных процессов математическое ожидание (3.1.10) не зависит от времени и является константой, поскольку плотность вероятности p_1 , входящая в подынтегральное выражение правой части (3.1.10) согласно (3.1.8) не зависит от времени t

$$m_x = M(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p_1(x) dx. \quad (3.1.11)$$

Связь значений стохастического процесса для двух разных моментов времени может быть охарактеризована корреляционной (или, точнее, автокорреляционной) функцией

$$K_x(t_1, t_2) = M(x(t_1) \cdot x(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (3.1.12)$$

В выражении (3.1.12) использованы обозначения $x(t_1) = x_1$ и $x(t_2) = x_2$.

Если в формуле (3.1.12) положить $t_1 = t_2 = t$, получим средний квадрат

$$M(x^2(t)) = K_x(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) p_1(x, t) dx. \quad (3.1.13)$$

Для центрированного случайного процесса $x^\circ(t) = x(t) - m_x(t)$ средний квадрат совпадает с дисперсией, то есть

$$\begin{aligned} M(x^{\circ 2}(t)) &= D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x(t))^2 p_1(x, t) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x, t) dx - m_x^2(t) = K_x(t, t) - m_x^2(t). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Мерой статистической взаимосвязи двух стохастических процессов $x(t)$ и $y(t)$ является взаимная корреляционная функция

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) y(t_2) p_2(x, t_1; y, t_2) dx dy, \quad (3.1.15)$$

где $p_2(x, t_1; y, t_2)$ – двумерная совместная плотность распределения процессов $x(t)$ и $y(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 .

Иногда используют нормированные корреляционные функции – нормированную автокорреляционную функцию

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)K_x(t_2, t_2)}}$$

и нормированную взаимную корреляционную функцию

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)K_y(t_2, t_2)}}.$$

Смысл введения нормированных функций в том, что, как нетрудно показать, их величина не превышает единицы $\rho_x(t_1, t_2) \leq 1$, $\rho_{xy}(t_1, t_2) \leq 1$ и является безразмерной величиной.

Для стационарных процессов корреляционная функция зависит не от двух моментов времени t_1 и t_2 , а от их разности $\tau = t_2 - t_1$

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (3.1.16)$$

а дисперсия является константой

$$D_x = K_x(0) - m_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx - m_x^2. \quad (3.1.17)$$

Если два процесса $x(t)$ и $y(t)$ являются стационарными и при этом стационарно связанными, их взаимная корреляционная функция зависит только от $\tau = t_2 - t_1$

$$K_{xy}(\tau) = M(x(t_1)y(t_1 + \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p(x, y, \tau) dx dy.$$

Во многих практических случаях моменты более высокого порядка не нужны, и можно пользоваться только первыми двумя моментами: математическим ожиданием и корреляционной функцией. Теории, ограничивающиеся только этими характеристиками, называются корреляционными теориями. Естественно считать, что в рамках корреляционной теории стационарными процессами будут те, у которых математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности моментов времени. Такие процессы называются стационарными в широком смысле. Разумеется, процессы, стационарные в узком смысле, непременно стационарны в широком смысле, обратное же утверждение не всегда справедливо. Попутно отметим, что два первых момента определяют все последующие моменты для нормального закона распределения. Поэтому можно сказать, что корреляционная теория есть общая теория стохастических процессов с нормальным законом распределения. Дальнейшее изложение будет вестись именно в рамках корреляционной теории.

Вычисление статистических характеристик по формулам (3.1.11), (3.1.16) и (3.1.17) требует тщательной и кропотливой работы, поскольку усреднение ведётся по ансамблю реализаций и необходимы многочисленные эксперименты. Дело облегчается тем, что для многих стационарных стохастических процессов усреднение можно проводить не **по множеству реализаций**, а **по времени**. Среднее по времени вычисляется только по одной (но достаточно длинной) реализации стационарного стохастического процесса. На конечном интервале $2T$ среднее по времени определяется формулой

$$\overline{x_T} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt . \quad (3.1.18)$$

Среднее по времени на бесконечном интервале вычисляется по той же формуле (3.1.18) при $T \rightarrow \infty$

$$\overline{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt .$$

Стационарный стохастический процесс называется эргодическим, если среднее по ансамблю реализаций от величины, характеризующий процесс, равно среднему по времени.

Таким образом, для эргодических процессов математическое ожидание может быть вычислено по формуле

$$m_x = \overline{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt , \quad (3.1.19)$$

а корреляционная функция – по формуле

$$K_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt . \quad (3.1.20)$$

Ограничивая интервал T , получаем некоторые оценки соответствующих величин, которые (оценки) тем точнее, чем больше этот интервал.

При $\tau = 0$ выражение (3.1.20) дает средний квадрат

$$K_x(0) = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt . \quad (3.1.21)$$

Если интерпретировать процесс $x(t)$ как напряжение, приложенное к единичному сопротивлению, то энергия, рассеиваемая этим сопротивлением, численно равна квадрату амплитуды этого напряжения, помноженному на время действия функции $x(t)$. Это дает основание назвать среднюю энергию, рассеиваемую за единицу времени, то есть средний квадрат (3.1.21), мощностью процесса, являющейся мерой интенсивности процесса.

Разумеется, те же формулы (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21) могут быть применены и для определения математического ожидания и корреляционной функции детерминированных процессов.

Пример 3.1.1. Математическое ожидание постоянной величины a равно $m_a = a$, а корреляционная функция – $K_a(\tau) = a^2$.

Пример 3.1.2. Среднее значение синусоиды $x(t) = A \sin \omega t$ равно, очевидно, нулю: $m_x = 0$. Корреляционную функцию вычислим по формуле (3.1.20):

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{A^2 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \omega\tau)dt = \\ &= \frac{A^2 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} (\cos \omega\tau - \cos(2\omega t + \omega\tau))dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau. \end{aligned}$$

Мощность такого синусоидального сигнала равна $\overline{x^2} = A^2/2$.

Рассмотрим некоторые свойства корреляционной функции. Во-первых, автокорреляционная функция является четной, что следует из

равнозначности моментов времени в формуле (3.1.12) – от перестановки сомножителей произведение не меняется¹. В частности, для стационарного процесса $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$.

Далее, автокорреляционная функция $K(\tau)$ принимает максимальное значение при $\tau=0$, то есть

$$K(\tau) \leq K(0).$$

С увеличением разницы между моментами времени $t_2 - t_1 = \tau$ корреляционная функция централизованного процесса убывает и при $\tau \rightarrow \infty$ уменьшается до нуля.

Взаимная корреляционная функция удовлетворяет так называемому неравенству Буняковского

$$K_{xy}(\tau) \leq \sqrt{K_x(0)} \cdot \sqrt{K_y(0)}.$$

Из формул (3.1.13), (3.1.14), (3.1.17) и (3.1.21) следует, что из корреляционной функции стационарного стохастического процесса можно получить:

– математическое ожидание

$$m_x = \bar{x} = \sqrt{K_x(\infty)},$$

– средний квадрат

¹ Отметим, что взаимная корреляционная функция $K_{xy}(\tau)$, вообще говоря, не является четной.

$$\overline{x^2} = K_x(0),$$

– дисперсию

$$D_x = K_x(0) - K_x(\infty),$$

– среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{K_x(0) - K_x(\infty)}.$$

Эффективной альтернативой исследованию детерминированных процессов во времени является переход в частотную область с применением преобразования Фурье. Непосредственное применение преобразования Фурье к стохастическим процессам не очень оправдано, поскольку в этом случае получается также некоторая случайная функция, но вот применить преобразование Фурье к неслучайной функции времени, характеризующей стохастический процесс, было бы, вероятно, весьма продуктивно. Такой неслучайной функцией является корреляционная функция. А.Я. Хинчин доказал, что для корреляционных функций стационарных эргодических процессов существуют интегралы Фурье.

Преобразование Фурье корреляционной функции называется спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.1.22)$$

Поскольку преобразование Фурье взаимно-однозначно, обратное преобразование спектральной плотности даст корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\tau\omega} d\omega. \quad (3.1.23)$$

Автокорреляционная функция четная, поэтому связь её со спектральной плотностью может быть выражена косинус-преобразованием Фурье

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.1.24)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.1.25)$$

Из формулы (3.1.24) в частности следует, что спектральная плотность $S_x(\omega)$ так же, как и автокорреляционная функция, является четной.

Положив в выражении (3.1.23) $\tau = 0$, получим

$$K_x(0) = \overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (3.1.26)$$

Выражение (3.1.26) показывает, что мощность стохастического процесса является суммой бесконечно малых парциальных слагаемых $\frac{1}{\pi} S_x(\omega) d\omega$, представляющих мощность процесса, соответствующую интервалу частот спектра процесса от ω до $\omega + d\omega$. Таким образом, спектральная плотность по физическому смыслу описывает распределение мощности процесса по частотному спектру.

Для двух взаимно эргодических процессов $x(t)$ и $y(t)$ можно ввести взаимную спектральную плотность $S_{xy}(j\omega)$, вычисляемую по формуле, аналогичной формуле (3.1.22)

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.1.27)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция $K_{xy}(\tau)$, вообще говоря, не обязательно четная, то взаимная спектральная плотность $S_{xy}(j\omega)$ также не всегда четная и может содержать мнимую часть, что и отражено в аргументе $(j\omega)$.

Обратное преобразование Фурье переводит взаимную спектральную плотность опять во взаимную корреляционную функцию

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.1.28)$$

Во многих случаях идеализированное представление процесса приводит к появлению в спектральной плотности δ -функций. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3.1.3. Пусть спектральная плотность задана выражением

$$S_x(\omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega). \quad (3.1.29)$$

Корреляционную функцию найдем по формуле (3.1.23)

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\tau\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a^2 \delta(\omega) e^{j\tau\omega} d\omega = a^2.$$

При получении последнего выражения применено фильтрующее свойство δ -функции¹.

Сопоставляя полученный результат с примером 3.1.1, делаем вывод о том, что присутствие в составе спектральной плотности бесконечного импульса на нулевой частоте говорит о существовании в стохастическом процессе постоянной составляющей и наоборот, наличие в процессе постоянной составляющей приводит к появлению в спектральной плотности бесконечного импульса $\delta(\omega)$.

Пример 3.1.4. Пусть теперь в составе спектральной плотности имеются бесконечные импульсы на некоторой ненулевой частоте, то есть

$$S_x(\omega) = \pi \frac{A^2}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.1.25), получим

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \pi \frac{A^2}{2} \delta(\omega - \omega_0) \cos \omega \tau d\omega = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Сравнивая полученный результат с корреляционной функцией примера 3.1.2, резюмируем, что наличие бесконечных импульсов на ненулевой частоте в спектральной плотности говорит о моногармонической состав-

¹ Интеграл от произведения δ -функции на произвольную функцию равен значению этой функции в точке, в которой δ -функция принимает бесконечное значение.

ляющей в составе исходного процесса и наоборот, детерминированная гармоническая составляющая в стохастическом процессе дает бесконечный всплеск на частоте этой составляющей в выражении для спектральной плотности.

Пример 3.1.5. Пусть корреляционная функция задана выражением

$$K_x(\tau) = N\delta(\tau). \quad (3.1.30)$$

Спектральная плотность в соответствии с формулой (3.1.22) будет равна

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = N. \quad (3.1.31)$$

Из выражения (3.1.30) вытекает, что сколь угодно малый интервал между моментами времени в стохастическом процессе приводит к некоррелированности соответствующих случайных величин, то есть, получаем идеальный случайный процесс, в котором случайные величины в любые соседние моменты времени являются взаимно независимыми. Спектральная плотность такого идеального случайного процесса в соответствии с выражением (3.1.31) не зависит от частоты и является константой. Такой идеальный стохастический процесс называется белым шумом (по аналогии с белым светом, в котором представлены все участки спектра).

Белый шум часто применяют в исследованиях САУ при случайных воздействиях как модель различных помех.

3.2. Стохастические процессы в линейных САУ

3.2.1. Прохождение случайного сигнала через линейные звенья

Приступим к изучению одной из задач исследования стохастики САУ, именно, – к задаче анализа¹.

Представим себе линейное звено с передаточной функцией $W(s)$ и соответствующей ей весовой функцией $w(t)$, на входе которого действует стационарный эргодический случайный сигнал $x(t)$ с известными статистическими характеристиками $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ (рис. 3.2).

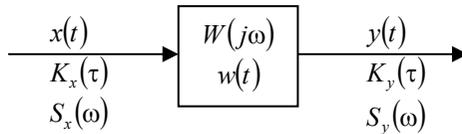


Рис. 3.2. Преобразование случайного сигнала линейным звеном

Сам сигнал на выходе звена определяется интегралом свёртки

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (3.2.1)$$

Этой же формулой можно пользоваться для определения математического ожидания и корреляционной функции.

¹ Вторая задача – задача синтеза.

² Эта формула предполагает, что входной сигнал существует все время, то есть начинается он при $t \rightarrow -\infty$.

Действительно, усреднив по времени t обе части выражения (3.2.1) и учитывая, что усреднение – операция линейная, допускающая изменение порядка интегрирования по t и по τ_1 , получим

$$m_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt = \int_0^{\infty} w(\tau_1) \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \right) d\tau_1 = m_x \int_0^{\infty} w(\tau_1) d\tau_1. \quad (3.2.2)$$

Если интеграл в правой части выражения (3.2.2) конечен (нелишне вспомнить, что это является необходимым и достаточным условием устойчивости звена), то среднее значение выходного сигнала является постоянной величиной.

Автокорреляционная функция процесса на выходе может быть получена по формуле (3.1.20)

$$K_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau) dt.$$

Подставляя в эту формулу $y(t)$ из формулы (3.2.1) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} w(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2)x(t+\tau-\tau_2)d\tau_2 dt = \\ &= \int_0^{\infty} w(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2)K_x(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Из последней формулы может быть получено выражение для мощности выходного сигнала

$$\overline{y^2} = K_y(0) = \int_0^{\infty} w(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2. \quad (3.2.4)$$

Альтернативная, более удобная в практическом применении формула будет получена ниже через спектральные плотности.

Аналогично выражению (3.2.3) получается формула для взаимной корреляционной функции процесса на входе и процесса на выходе звена

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} w(\tau_1) K_x(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (3.2.5)$$

Сравнивая выражение (3.2.5) с выражением (3.2.1), замечаем, что они по форме совпадают, поэтому можно условно считать, что при поступлении на вход линейного звена «воздействия» $K_x(t)$ выходной «сигнал» будет равен $K_{xy}(t)$. Если таким «воздействием» будет дельта-функция, то «реакцией» по определению является весовая функция, поэтому при поступлении на вход звена белого шума единичной интенсивности (для него $K_x(t) = \delta(t)$) взаимная корреляционная функция будет равна весовой функции

$$K_{xy}(\tau) = w(\tau).$$

Это непосредственно следует из формулы (3.2.5).

Пример 3.2.1. На вход апериодического звена первого порядка поступает белый шум интенсивностью N с автокорреляционной функцией

$$K_x(\tau) = N\delta(\tau).$$

Требуется найти автокорреляционную функцию сигнала на выходе $K_y(\tau)$ и взаимную корреляционную функцию входного и выходного сигналов $K_{xy}(\tau)$.

Весовая функция апериодического звена первого порядка равна

$$w(t) = \begin{cases} \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

По формуле (3.2.3) получаем

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \frac{K^2 N}{T^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_1}{T}} d\tau_1 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_2}{T}} \delta(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_2 = \\ &= \frac{K^2 N}{T^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_1}{T}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau_1+\tau}{T}} & \text{при } \tau + \tau_1 \geq 0 \\ 0 & \text{при } \tau + \tau_1 < 0 \end{pmatrix} d\tau_1 = \frac{K^2 N}{T^2} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{2\tau_1+\tau}{T}} d\tau_1 \text{ при } \tau \geq 0 \right) = \\ &= \frac{K^2 N}{2T} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau}{T}} & \text{при } \tau \geq 0 \\ e^{\frac{\tau}{T}} & \text{при } \tau < 0 \end{pmatrix} = \frac{K^2 N}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}. \end{aligned}$$

Взаимную корреляционную функцию найдем по формуле (3.2.5)

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^\infty w(\tau_1) K_x(\tau - \tau_1) d\tau_1 = \frac{KN}{T} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_1}{T}} \delta(\tau - \tau_1) d\tau_1 = \frac{KN}{T} e^{-\frac{\tau}{T}}.$$

Найдем теперь связь между спектральными плотностями процессов на выходе и на входе. Для этого применим преобразование Фурье к обеим частям формулы (3.2.3)

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_0^{\infty} w(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2) K_x(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_2 .$$

В правой части последнего выражения поменяем местами порядок интегрирования, сделав внутренним интеграл по τ . Умножим подынтегральное выражение на $1 = e^{j\omega\tau_1} e^{-j\omega\tau_1} e^{j\omega\tau_2} e^{-j\omega\tau_2}$ и разделим переменные, преобразовав тройной интеграл в три независимых интеграла. Предполагая физическую реализуемость звена (весовая функция тождественно равна нулю при отрицательном аргументе), расширим также нижние пределы интегрирования по τ_1 и по τ_2 до минус бесконечности

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau + \tau_1 - \tau_2) e^{-j\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d\tau .$$

Последний интеграл после замены переменной $\tau_0 = \tau + \tau_1 - \tau_2$ есть спектральная плотность $S_x(\omega)$, а два первых – это Фурье-изображения весовой функции, то есть частотные передаточные функции от аргумента $(-j\omega)$ и $(j\omega)$ соответственно. Окончательно получим

$$S_y(\omega) = W(-j\omega)W(j\omega)S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) . \quad (3.2.6)$$

Аналогичным образом из формулы (3.2.5) можно получить выражение для взаимной спектральной плотности

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega)S_x(\omega). \quad (3.2.7)$$

Мощность выходного сигнала с учетом формулы (3.1.26) и выражения (3.2.6) будет равна

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (3.2.8)$$

Формула (3.2.8) удобнее для практического применения, чем выражение (3.2.4) и часто применяется для вычисления среднеквадратических ошибок в САУ. Для удобства получения этих ошибок существуют таблицы интегралов, вычисленных по выражению (3.2.8) (см., например, П.17 в [8]).

Пример 3.2.2. На вход апериодического звена первого порядка поступает белый шум со спектральной плотностью $S_x(\omega) = N$. Найдем спектральные плотности $S_y(\omega)$, $S_{xy}(\omega)$ и мощность сигнала на выходе.

Частотная передаточная функция апериодического звена равна $W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$. По формулам (3.2.6), (3.2.7) получаем

$$S_y(\omega) = \frac{K^2 N}{1 + \omega^2 T^2} \text{ и } S_{xy}(\omega) = \frac{KN}{1 + j\omega T}.$$

Можно проверить, что применение обратного преобразования Фурье к полученным спектральным плотностям даст выражения для корреляционных функций из примера 3.2.1.

Мощность выходного сигнала можно подсчитать по формуле (3.2.8), воспользовавшись табличным интегралом при $n=1$ (см. П.17 в [8])

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N}{|1 + j\omega T|} d\omega = \frac{K^2 N}{2T}.$$

Учитывая выражение (3.2.8), можно ввести понятие эквивалентной полосы пропускания для белого шума, имея в виду под последней полосу пропускания идеального фильтра низких частот $W_{\text{экв}}$ с единичным коэффициентом передачи (рис. 3.3), дающим на выходе такую же мощность сигнала, что и реальное звено с частотной передаточной функцией $W(j\omega)$.

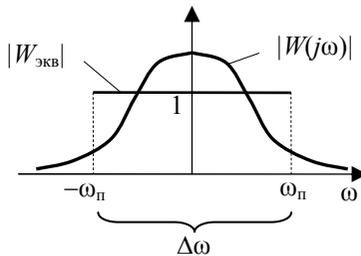


Рис. 3.3. Эквивалентная полоса пропускания

Если на вход идеального фильтра поступит белый шум интенсивностью N ($S_x(\omega) = N$), то мощность выходного сигнала будет, очевидно

$$\overline{y^2} = \frac{\omega_p}{\pi} N = N \frac{\Delta\omega}{2\pi} = N \cdot \Delta f, (\text{Гц}). \quad (3.2.9)$$

Мощность сигнала на выходе реального звена в соответствии с формулой (3.2.8) равна

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{N}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega.$$

Сравнивая последнее соотношение с формулой (3.2.9), получаем выражение для эквивалентной полосы пропускания

$$\Delta f, (\text{Гц}) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_n}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.2.10)$$

3.2.2. Определение статистически оптимальных параметров

Переходим к задаче синтеза. По сути, любая задача синтеза – это задача поиска оптимальной в определённом смысле системы. Поскольку в данном разделе речь идет о статистической динамике систем, критерии оптимальности также рассматриваются статистические. Наиболее распространенный критерий – это средний квадрат ошибки. Распространенность этого критерия связана, во-первых, с простотой соответствующих вычислений, а, во-вторых, с очевидным требованием повышения точности САУ. Вообще, кроме этого критерия в различных системах могут быть использованы и другие статистические критерии: отношение сигнал/шум, вероятность обнаружения цели, если речь идет об обнаружении сигнала цели, например, в радиолокационных системах ПВО, вероятность ложной тревоги в вышеупомянутых радиолокационных системах и др.

Начнем с простейшего случая параметрического синтеза, когда известна передаточная функция САУ, но не заданы или могут меняться параметры этой передаточной функции.

Пусть на входе простейшей одноконтурной системы с единичной обратной связью имеется задающее воздействие $g(t)$ и аддитивная приведенная к входу помеха $n(t)$ (верхняя ветвь схемы на рис. 3.4, *a*). Считаем полезный сигнал и помеху случайными стационарными эргодическими

независимыми процессами с заданными спектральными плотностями. Идеальный сигнал $y_{\text{эт}}(t)$ получается после преобразования задающего полезного сигнала воображаемой идеальной системой с передаточной функцией $W_{\text{эт}}$ (нижняя ветвь схемы на рис. 3.4, а). Разница между идеальной (требуемой) выходной величиной и реально получаемой величиной представляет собой ошибку.

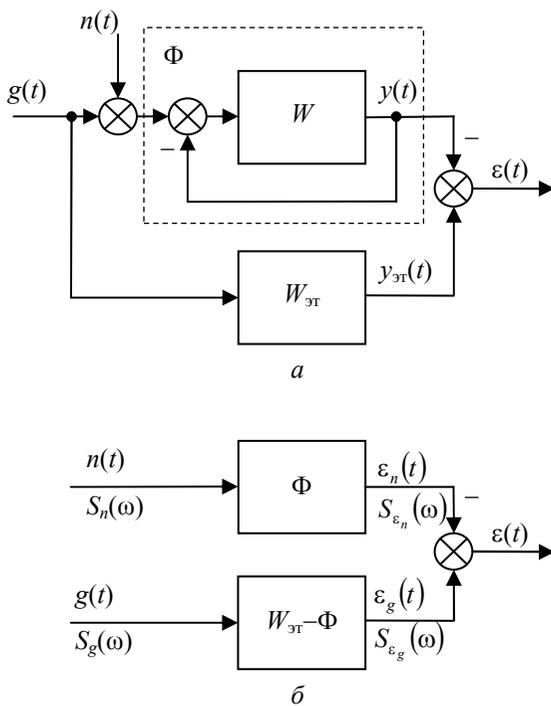


Рис. 3.4. Формирование сигнала ошибки

Запишем выражение для ошибки в операторной форме

$$\begin{aligned}
 E(s) &= Y_{\text{зт}}(s) - Y(s) = G(s)W_{\text{зт}}(s) - (G(s) + N(s)) \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \\
 &= G(s)(W_{\text{зт}}(s) - \Phi(s)) - N(s)\Phi(s) = E_g(s) - E_n(s).
 \end{aligned}
 \tag{3.2.11}$$

Структурная схема, построенная по выражению (3.2.11), приведена на рис. 3.4, б. Первое слагаемое в правой части формулы (3.2.11) это ошибка, обусловленная задающим воздействием, а второе – ошибка, связанная с помехой.

Вид эталонной передаточной функции зависит от решаемой задачи:

– для системы автоматического регулирования важна точная отработка задающего воздействия, поэтому $W_{\text{зт}}(s) = 1$,

– для системы связи допустима некоторая временная задержка и $W_{\text{зт}}(s) = Ke^{-\tau s}$,

– для вычислительного устройства идеальная передаточная функция имеет вид в соответствии с выполняемой математической операцией, например, для интегратора $W_{\text{зт}}(s) = K_{\text{и}}/s$, для дифференциатора $W_{\text{зт}}(s) = K_{\text{д}}s$ и т.п.,

– для экстраполятора $W_{\text{зт}}(s) = e^{\tau s}$, и т.д.

В дальнейшем будем полагать, что рассматривается система автоматического регулирования, то есть $W_{\text{зт}}(s) = 1$.

Ввиду независимости процессов $g(t)$ и $n(t)$ корреляционная функция ошибки $K_{\varepsilon}(\tau)$ равна сумме корреляционных функций процессов $\varepsilon_g(t)$ и $\varepsilon_n(t)$

$$K_{\varepsilon}(\tau) = K_{\varepsilon_g}(\tau) + K_{\varepsilon_n}(\tau),$$

и, следовательно, спектральная плотность $S_\varepsilon(\omega)$ равна сумме соответствующих спектральных плотностей

$$S_\varepsilon(\omega) = S_{\varepsilon_g}(\omega) + S_{\varepsilon_n}(\omega) = |1 - \Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega). \quad (3.2.12)$$

В выражении (3.2.12) применена формула (3.2.6) и учтено, что $W_{гр}(s) = 1$.

Средний квадрат ошибки найдём из формулы (3.2.12) по выражению (3.2.8)

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |1 - \Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \quad (3.2.13)$$

Минимизируя средний квадрат ошибки по изменяемому параметру a_k , например, используя необходимое условие минимума

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial a_k} = 0,$$

можно определить оптимальные значения варьируемых параметров системы.

Пример 3.2.3. Замкнутая система представляет собой аperiodическое звено первого порядка, то есть её передаточная функция равна $\Phi(s) = K/(1 + Ts)$. Полезный сигнал задан спектральной плотностью $S_g(\omega) = 1/(1 + \omega^2)$, а помеха представляет собой белый шум интенсивностью N . Требуется найти оптимальное значение коэффициента передачи K .

Частотная передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна

$$1 - \Phi(j\omega) = \frac{1 - K + Tj\omega}{1 + Tj\omega}.$$

Подставляя соответствующие выражения в формулу (3.2.13), получим

$$S_{\varepsilon}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - K + Tj\omega}{1 + Tj\omega} \right|^2 \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N}{|1 + Tj\omega|^2} d\omega. \quad (3.2.14)$$

Второе слагаемое полученной формулы уже было найдено (см. пример 3.2.2) – оно равно $K^2 N / 2T$.

Подынтегральное выражение первого слагаемого приведем к табличному виду

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - K + Tj\omega}{1 + Tj\omega} \right|^2 \frac{1}{1 + \omega^2} &= \frac{(Tj\omega + 1 - K)(-Tj\omega + 1 - K)}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)(1 + j\omega)(1 - j\omega)} = \\ &= \frac{-T^2(j\omega)^2 + (1 - K)^2}{|(1 + Tj\omega)(1 + j\omega)|^2} = \frac{-T^2(j\omega)^2 + (1 - K)^2}{|T(j\omega)^2 + (T + 1)j\omega + 1|^2}. \end{aligned}$$

Далее по приложению 17 [8] для $n=2$ находим значение первого слагаемого формулы (3.2.14) и окончательно получаем выражение для среднего квадрата ошибки в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{T - (1 - K)^2}{2(T + 1)} + \frac{K^2 N}{2T}.$$

Оптимальное значение $K_{\text{опт}}$ определим из выражения

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^2}{\partial K} = \frac{K-1}{T+1} + \frac{NK}{T} = 0,$$

откуда

$$K_{\text{опт}} = \frac{T}{T + N(T+1)}.$$

3.2.3. Синтез статистически оптимальной системы

Перейдем теперь к более сложному случаю, когда не задан даже сам вид передаточной функции системы. Требуется по известным статистическим характеристикам полезного сигнала и помехи определить передаточную (или весовую) функцию оптимальной в смысле минимума среднего квадрата ошибки системы.

Эта задача впервые была поставлена и решена акад. А.Н. Колмогоровым для дискретной случайной последовательности. Для непрерывного случая эта задача была решена несколько другим путем американским ученым Н. Винером.

Пусть на вход системы с передаточной функцией $W(j\omega)$ и соответствующей ей весовой функцией $w(t)$ поступает задающее воздействие (полезный сигнал) $g(t)$ и аддитивная помеха (шум) $n(t)$. Сигнал и шум являются взаимно независимыми стационарными эргодическими стохастическими процессами с известными корреляционными функциями $K_g(\tau)$ и $K_n(\tau)$ соответственно. Необходимо найти передаточную функцию оптимальной системы, обеспечивающей минимум среднего квадрата ошибки.

Будем вести речь о системе автоматического регулирования, то есть идеальная передаточная функция для задающего воздействия $W_{\text{зт}}(j\omega) = 1$.

Величина ошибки, следовательно, равна (с учетом формулы (3.2.1))

$$\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^{\infty} w(\tau)(g(t-\tau) + n(t-\tau))d\tau.$$

Предполагая физическую реализуемость системы (тождественное равенство нулю весовой функции при отрицательном аргументе), нижний предел в последнем интеграле можно изменить на $-\infty$.

Квадрат ошибки равен

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= g^2(t) - 2g(t) \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)(g(t-\tau) + n(t-\tau))d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)w(\nu)(g(t-\tau) + n(t-\tau))(g(t-\nu) + n(t-\nu))d\tau d\nu. \end{aligned}$$

Здесь произведение двух независимых интегралов представлено в виде двойного интеграла.

Проводя усреднение последнего выражения с учетом независимости $g(t)$ и $n(t)$, получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = K_g(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)K_g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)w(\nu)K_{g+n}(\tau-\nu)d\tau d\nu, \quad (3.2.15)$$

где $K_{g+n}(\tau)$ – корреляционная функция суммы сигнала $g(t)$ и помехи $n(t)$ ¹

¹ В случае независимости сигнала и помехи $K_{g+n}(\tau) = K_g(\tau) + K_n(\tau)$.

Минимизировать полученное выражение можно методами вариационного исчисления. Положим $w_{\text{опт}}(t)$ – весовая функция, минимизирующая выражение (3.2.15). Заменим в выражении (3.2.15) функцию $w(t)$ функцией $w_{\text{опт}}(t) + \lambda f(t)$, где λ – некоторое число, а $f(t)$ – любая функция из того же класса функций, что и $w_{\text{опт}}(t)$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = A + 2B\lambda + C\lambda^2, \quad (3.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} A &= K_g(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\tau) K_g(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\tau) w_{\text{опт}}(\nu) K_{g+n}(\tau - \nu) d\tau d\nu, \\ B &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) K_g(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w_{\text{опт}}(\nu) K_{g+n}(\tau - \nu) d\tau d\nu, \\ C &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(\nu) K_{g+n}(\tau - \nu) d\tau d\nu. \end{aligned}$$

Величина $\overline{\varepsilon^2}$ будет минимальной при $\lambda = 0$. Единственное значение λ , отвечающие минимуму выражения (3.2.16), определяется из уравнения

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial \lambda} = 0 = 2B + 2C\lambda,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{B}{C}.$$

Из последнего выражения следует, что необходимым условием минимума $\overline{\varepsilon^2}$ является $B=0$ или

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)K_g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)w_{\text{опт}}(\nu)K_{g+n}(\tau-\nu)d\tau d\nu = 0.$$

Полученное уравнение можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\nu)K_{g+n}(\tau-\nu)d\nu - K_g(\tau) \right] d\tau = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться для произвольной функции $f(t)$, нулю будет равно выражение в квадратной скобке

$$K_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{опт}}(\nu)K_{g+n}(\tau-\nu)d\nu. \quad (3.2.17)$$

Уравнение (3.2.17) относится к классу интегральных уравнений Винера–Хопфа. Можно показать, что уравнение (3.2.17) является не только необходимым, но и достаточным условием минимума $\overline{\varepsilon^2}$. Решение этого уравнения дает оптимальную весовую функцию системы. Нелишне напомнить, что в уравнении (3.2.17) предполагается равенство нулю весовой функции при отрицательном аргументе.

Решить уравнение Винера–Хопфа (3.2.17) несложно, если отвлечься от условия физической реализуемости системы. Действительно, применив к уравнению (3.2.17) теорему о свертке во временной области¹, получим

¹ Изображение свертки оригиналов равно произведению изображений.

$$S_g(\omega) = W_{\text{опт}}(j\omega)S_{g+n}(\omega),$$

откуда

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_{g+n}(\omega)} \quad (3.2.18)$$

или в случае независимости сигнала и шума

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_n(\omega)}. \quad (3.2.19)$$

Применив к обеим частям выражения (3.2.19) преобразование Фурье, получим

$$w_{\text{опт.н}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{опт}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_n(\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2.20)$$

К сожалению, вычисленная по формуле (3.2.20) весовая функция физически нереализуема, поскольку согласно правой части выражения (3.2.19) является четной, то есть не равной нулю при $t < 0$. Следовательно, нереализуема и передаточная функция (3.2.19).

Строгое решение уравнения Винера–Хопфа (3.2.17) слишком громоздко, поэтому ограничимся нестрогим выводом, воспользовавшись результатами работ Г. Бодэ и К. Шеннона.

Представим спектральную плотность суммы стохастических процессов на входе системы $S_{g+n}(\omega)$ в виде произведения двух сопряжённых функций (в большинстве случаев такое возможно)

$$S_{g+n}(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega). \quad (3.2.21)$$

Представление спектральной плотности в виде такого произведения называется факторизацией.

Тогда, в соответствии с формулой (3.2.6) можно считать, что воздействие на входе системы является результатом прохождения белого шума с единичной интенсивностью через некоторое фиктивное линейное звено с частотной передаточной функцией $\psi(j\omega)$.

Доказано, что физически реализуемо лишь то звено, у которого полюсы частотной передаточной функции $\psi(j\omega)$ расположены в верхней части комплексной плоскости. В дальнейшем считаем, что для функции $\psi(j\omega)$ это условие выполняется. Тогда у сопряженной функции $\psi(-j\omega)$ полюсы расположены в нижней части комплексной плоскости.

Частотная передаточная функция оптимальной системы, полученная в виде (3.2.18) или (3.2.19), физически нереализуема, поэтому обозначим её $W_{\text{опт.н}}(j\omega)$ («н» – нереализуемая).

С учетом вышеизложенного структурная схема системы, учитывающая передаточную функцию $\psi(j\omega)$, приведена на рис. 3.5.

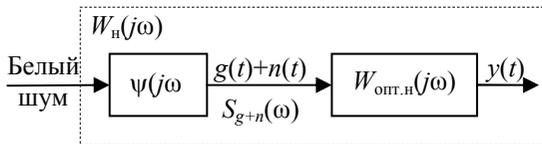


Рис. 3.5. Оптимальная нереализуемая система

Общая передаточная функция $W_n(j\omega)$ также, очевидно, нереализуема и имеет вид с учетом (3.2.18), (3.2.19) и (3.2.21)

$$W_H(j\omega) = \psi(j\omega)W_{\text{опт.н}}(j\omega) = \psi(j\omega) \frac{S_g(\omega)}{S_{g+n}(\omega)} = \frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)}$$

Функция веса, соответствующая этой передаточной функции, тоже, конечно, нереализуема и равна

$$w_H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2.22)$$

Реализуемая весовая функция $w_p(t)$ совпадает с нереализуемой функцией (3.2.22) при $t > 0$ и тождественно равна нулю при $t < 0$

$$w_p(t) = \begin{cases} w_H(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Фурье-изображение весовой функции $w_p(t)$ есть частотная передаточная функция реализуемой системы, и выражается формулой

$$W_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_p(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} w_H(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

Найденная передаточная функция состоит из последовательно соединённых звена с передаточной функцией $\psi(j\omega)$ и оптимальной реализуемой системы, передаточная функция которой равна

$$W_{\text{опт.п}}(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{\psi(j\omega)} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (3.2.23)$$

Применение обратного преобразования Фурье к последнему выражению дает функцию веса физически реализуемой системы

$$w_{\text{опт.р}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{опт.р}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2.24)$$

Полученная весовая функция (3.2.24) является решением уравнения Винера–Хопфа (3.2.17) и удовлетворяет условиям физической реализуемости.

Вычисления по формуле (3.2.23) не настолько сложные, как это может показаться на первый взгляд. Рассуждаем следующим образом. Если бы $\frac{S_g}{\psi(-j\omega)}$ было Фурье-изображением физически реализуемой весовой функции $w'(t)$, то операция в квадратной скобке получает оригинал $w'(t)$ из изображения, а в следующей операции – интегрирования от 0 до ∞ нижний предел можно поменять на $-\infty$, поскольку $w'(t)=0$ при $t<0$, и мы опять получаем изображение из оригинала. Таким образом, обе операции компенсировали бы друг друга, и оптимальная передаточная функция соответствовала бы выражению (3.2. 18). В действительности $\frac{S_g}{\psi(-j\omega)}$ не Фурье-изображение физически реализуемой весовой функции. Но оказывается, что для широкого круга задач можно разложить это выражение на простые дроби

$$\frac{S_g}{\psi(-j\omega)} = \left[\frac{S_g}{\psi(-j\omega)} \right]_+ + \left[\frac{S_g}{\psi(-j\omega)} \right]_-, \quad (3.2.25)$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой функцию с полюсами в верхней комплексной полуплоскости, а второе – с полюсами в нижней полуплоскости¹.

Первое слагаемое с полюсами в верхней полуплоскости является Фурье-изображением физически реализуемой функции $w'(t)$, равной нулю при $t < 0$. Можно показать, что второе слагаемое, имеющее полюсы только в нижней полуплоскости, является Фурье-изображением такой весовой функции $w''(t)$, которая равна нулю при $t > 0$. Но тогда операция в квадратной скобке переводит второе слагаемое в $w''(t)$, а следующая операция – интегрирование от 0 до ∞ – в нуль, так как $w''(t) = 0$ при $t > 0$. Поэтому после подстановки суммы (3.2.25) в формулу (3.2.23) первое слагаемое после двух преобразований даст исходное выражение $\left[\frac{S_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+$, а

второе слагаемое даст нуль.

Окончательно выражение (3.2.23) для передаточной функции оптимальной реализуемой системы будет иметь вид

$$W_{\text{опт.р}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[\frac{S_g}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ \quad (3.2.26)$$

Сравнив полученное выражение с формулой (3.2.18) с учетом выражения (3.2.21)

$$W_{\text{опт.н}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left(\frac{S_g}{\Psi(-j\omega)} \right), \quad (3.2.27)$$

¹ Такая операция называется расщеплением.

можно сделать вывод, что в физически реализуемой системе используется только реализуемая часть выражения $\frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)}$ в отличие от формулы (3.2.27), где фигурирует все это выражение.

Пример 3.2.4. Спектральная плотность полезного сигнала равна $S_g(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Помеха – это белый шум с единичной интенсивностью $S_n(\omega) = 1$. Требуется определить передаточную функцию оптимальной системы.

Проводим факторизацию по формуле (3.2.21)

$$S_{g+n}(\omega) = S_g(\omega) + S_n(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} + 1 = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2} = \left(\frac{\sqrt{2}+j\omega}{1+j\omega} \right) \left(\frac{\sqrt{2}-j\omega}{1-j\omega} \right).$$

Далее производим расщепление согласно выражению (3.2.25)

$$\begin{aligned} \frac{S_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} &= \frac{1-j\omega}{(1+\omega^2)(\sqrt{2}-j\omega)} = \frac{1}{(1+j\omega)(\sqrt{2}-j\omega)} = \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})(1+j\omega)} + \frac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-j\omega)}. \end{aligned}$$

Наконец, по формуле (3.2.26) определяем оптимальную передаточную функцию

$$W_{\text{опт.р}}(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\sqrt{2}+j\omega} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{2})(1+j\omega)} = \frac{1}{(2+\sqrt{2}) \left(1+j \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right)}.$$

3.3. Стохастические процессы в нелинейных САУ

3.3.1. Прохождение случайного сигнала через нелинейные звенья

Выше при рассмотрении прохождения случайного сигнала через линейные звенья использовалось усреднение по времени. Для нелинейных же звеньев основой является усреднение по ансамблю.

Как и в случае детерминированных воздействий методы исследования прохождения случайного сигнала через нелинейные звенья и системы существенно отличаются от подобных методов для линейных систем: они значительно сложнее и разнообразнее. Эти методы существенно различаются в зависимости от одно- или многозначности нелинейной характеристики, её динамических свойств, наличия или отсутствия в системе обратных связей и т.д. Из-за сложности или невозможности получения точных решений широкое распространение получили приближенные методы. Наиболее разработаны, конечно, самые простые случаи – именно, прохождение случайного сигнала через нелинейное звено с однозначной безынерционной характеристикой.

Рассмотрим как раз такой случай. На вход звена поступает стохастический процесс $x(t)$ с плотностью вероятности $p_x(t)$. Процесс на выходе обозначим через $y(t)$ с плотностью вероятности $p_y(t)$. Пусть нелинейное звено имеет однозначную монотонную возрастающую статическую характеристику $y = \varphi(x)$. Обратную функцию обозначим $x = \varphi^{-1}(y)$, так, что $x = \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Поскольку характеристика безынерционна, то плот-

ность вероятности на выходе звена в конкретный момент времени t_1 зависит только от плотности вероятности на входе в тот же момент времени. Плотность вероятности сигнала на выходе звена может быть найдена из условия равенства вероятностей попадания входной величины в интервал от x до $x+dx$, а выходной величины – в интервал от y до $y+dy$ (рис. 3.6)

$$p_y(y)dy = p_x(x)dx . \quad (3.3.1)$$

Из формулы (3.3.1) следует

$$p_y(y) = p_x(\varphi^{-1}(y)) \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} . \quad (3.3.2)$$

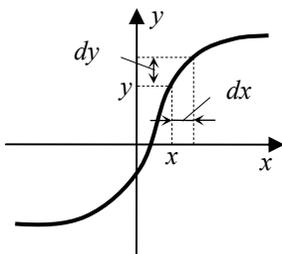


Рис. 3.6. Нелинейная характеристика

Пример 3.3.1. На вход нелинейного звена с экспоненциальной характеристикой $y = e^x$ поступает сигнал x с нормальным (гауссовым) распределением

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} .$$

Найдем распределение вероятности на выходе этого звена. Обратная функция равна $x = \ln y$ при $y > 0$. По формуле (3.3.2) получаем

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\ln y)^2} \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} y^{-\ln y} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^{-(1+\ln y)} \text{ при } y > 0.$$

Поскольку выходная величина не может принимать отрицательные значения, вероятность их появления равна нулю. Окончательно получаем

$$p_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^{-(1+\ln y)} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Не столь просто обстоит дело, если обратная функция φ^{-1} является неоднозначной. Такие нелинейности рассматривать не будем.

Математическое ожидание выходного процесса можно подсчитать по формуле (3.1.4)

$$m_y = M(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy. \quad (3.3.3)$$

Учитывая, что $y = \varphi(x)$ выражение (3.3.3) можно представить и в другой форме

$$m_y = M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p_x(x) dx. \quad (3.3.4)$$

Практически пользоваться можно либо выражением (3.3.3) либо формулой (3.3.4) в зависимости от удобства вычислений в том или другом случае.

Из формул (3.3.3), (3.3.4) следует, что связь математических ожиданий на входе и на выходе неоднозначная и зависит как от нелинейной характеристики, так и от плотности распределения сигнала на входе.

Довольно часто решается задача преобразования сигнала с нормальным законом распределения, который определяется только математическим ожиданием m_x и дисперсией (или среднеквадратичным отклонением σ_x). В таком случае среднее значение на выходе зависит от нелинейной зависимости $\varphi(x)$, и от m_x и σ_x как параметров

$$m_y = m_y(m_x, \sigma_x).$$

Средний квадрат определится по формуле

$$\overline{y^2} = M(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_y(y) dy \quad (3.3.5)$$

или по эквивалентному выражению

$$\overline{y^2} = M(\varphi(x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2 p_x(x) dx. \quad (3.3.6)$$

Дисперсия может быть посчитана по формуле

$$D_y = M((y - m_y)^2) = M(y^2 - 2y \cdot m_y + m_y^2) = M(y^2) - m_y^2 = \overline{y^2} - m_y^2. \quad (3.3.7)$$

Из формул (3.3.5 – 3.3.7) вытекает, что преобразование вторых моментов нелинейным звеном зависит, как и в случае средних значений, от плотности вероятности сигнала на входе. В частности, для нормального распределения, например, дисперсия на выходе зависит от дисперсии σ_x^2 и среднего значения m_x как от параметров

$$D_y = \sigma_y^2 = D_y(D_x, m_x) = D_y(\sigma_x^2, m_x).$$

Еще более сложные вычисления предстоит выполнить, если требуется определить корреляционную функцию. Автокорреляционную функцию стационарного процесса можно найти по общей формуле (3.1.16)

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= M(y(t)y(t+\tau)) = M(\varphi(x(t))\varphi(x(t+\tau))) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\varphi(x_2)p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Здесь $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t+\tau)$, а $p_2(x_1, x_2, \tau)$ – двумерная плотность распределения.

Спектральная плотность, как обычно, определится как преобразование Фурье от корреляционной функции (3.3.8) по формуле (3.1.22).

Пример 3.3.2. Найти автокорреляционную функцию и спектральную плотность нормального (гауссова) процесса, преобразованного квадратичным детектором $y = x^2$.

Двумерная плотность вероятности для нормального процесса равна

$$p_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\rho_x(\tau)}{2\sigma_x^2(1-\rho_x^2(\tau))}\right\},$$

где $\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}$ – нормированная корреляционная функция.

Подставляя это выражение в формулу (3.3.8), получим

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1^2 x_2^2}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\rho_x(\tau)}{2\sigma_x^2(1-\rho_x^2(\tau))}\right\} dx_1 dx_2.$$

Не вдаваясь в подробности вычисления этого двойного интеграла, отметим, что результат получается весьма простым

$$K_y(\tau) = \sigma_x^4 + 2K_x^2(\tau). \quad (3.3.9)$$

Наличие в корреляционной функции постоянной составляющей говорит о присутствии в выражении для спектральной плотности дельта-функции.

Спектральную плотность определим по формуле (3.1.22)

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi\sigma_x^4\delta(\omega) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Второе слагаемое в последнем выражении преобразуем по теореме о свёртке в области изображений¹. Окончательно получим

¹ Изображение произведений оригиналов равно свёртке изображений.

$$S_y(\omega) = 2\pi\sigma_x^4\delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1)S_x(\omega - \omega_1)d\omega_1 .$$

Значительно сложнее исследовать преобразование нелинейным звеном суммы сигнала и помехи. На этом останавливаться не будем.

3.3.2. Статистическая линеаризация

Сложность точных решений статистических задач для нелинейных звеньев ещё больше возрастает для систем с обратной связью. Это обстоятельство заставляет применять приближенные методы исследования.

Одним из распространенных подобных методов является метод статистической линеаризации. Этот метод разработан И.Е. Казаковым и Дж. Бутоном в 1953–1954 г.г. и заключается в приближенной замене нелинейного преобразования стохастических процессов неким линейным, статистически эквивалентным преобразованием. В результате система в целом линеаризуется, и для её исследования можно применять аппарат линейной теории.

Пусть на входе нелинейного звена с характеристикой $y = \varphi(x)$ имеется стационарный случайный процесс

$$x(t) = m_x + x^\circ(t),$$

где $x^\circ(t)$ – центрированная случайная составляющая.

Начнем с однозначной нечетной нелинейной зависимости $\varphi(x)$. Процесс на выходе звена можно представить в виде суммы математического ожидания и центрированной случайной составляющей

$$y(t) = m_y + y^\circ(t).$$

При замене нелинейной зависимости эквивалентной линейной зависимостью следует установить критерии такой эквивалентности. В качестве подобных критериев, как правило, используют два: первый – это равенства средних значений и дисперсий эквивалентного и реального процессов и второй – минимум среднеквадратичного отклонения эквивалентного и реального процессов.

Рассмотрим первый критерий. Согласно ему должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} m_{y_3} &= m_y, \\ D_{y_3} &= D_y. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Первое равенство (3.3.10) говорит об эквивалентности линейного звена при прохождении детерминированной составляющей входного процесса (среднего значения). Второе равенство является условием эквивалентности при прохождении центрированной случайной составляющей.

Тогда уравнение эквивалентного линейного звена можно представить в виде

$$y_3(t) = m_{y_3} + y_3^\circ(t) = k_{c0}m_x + k_{c1}x^\circ(t). \tag{3.3.11}$$

Согласно уравнению (3.3.11) эквивалентная линейная зависимость может быть представлена двумя параллельными безынерционными звеньями, одно из которых (с коэффициентом передачи k_{c0}) пропускает

только детерминированную, а другое (с коэффициентом передачи k_{c1}) – центрированную случайную составляющую (рис. 3.7, а).

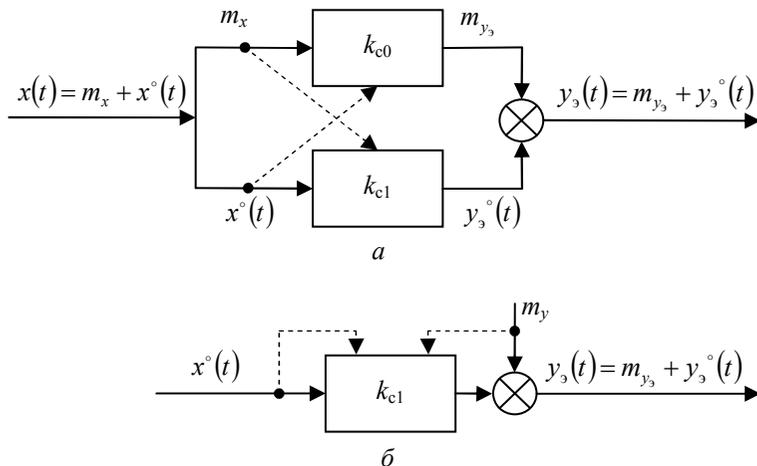


Рис. 3.7. Статистическая линеаризация

Коэффициенты k_{c0} , k_{c1} можно найти из равенств (3.3.10). Из первого равенства следует, что коэффициент передачи для детерминированной составляющей (математического ожидания) равен

$$k_{c0} = \frac{m_y}{m_x} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p_x(x) dx. \quad (3.3.12)$$

Из второго равенства вытекает, что коэффициент передачи случайной составляющей равен

$$k_{c1} = \pm \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \pm \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2 p_x(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.13)$$

Действительно, возведя в квадрат уравнение $y_3^\circ(t) = k_{c1} x^\circ(t)$ и усреднив, получим $D_{y_3} = k_{c1}^2 D_x$, откуда непосредственно следует выражение (3.3.13).

Коэффициенты k_{c0} , k_{c1} называются коэффициентами статистической линеаризации. Знак у коэффициента (3.3.13) определяется нелинейной функцией: если она возрастает в точке $x = m_x$, то берется знак «плюс», если уменьшается, то знак «минус».

Из формул (3.3.12), (3.3.13) следует, что каждый из коэффициентов статистической линеаризации зависит от плотности вероятности процесса на входе нелинейного звена, то есть коэффициент k_{c0} зависит, в том числе от σ_x , а коэффициент k_{c1} — от m_x , что и показано штриховыми стрелками на рис. 3.7.

Поскольку математическое ожидание и дисперсия полностью определяют только нормальный закон распределения, то применение метода статистической линеаризации основано на предположении о нормальности распределения случайного сигнала на входе и о неискажении нормального распределения нелинейным звеном. Это обстоятельство и определяет погрешность данного метода линеаризации.

Рассмотрим второй критерий. Согласно ему уравнение эквивалентного линейного звена определяется из условия

$$M((y - y_3)^\circ)^2 \rightarrow \min. \quad (3.3.14)$$

Здесь уже коэффициенты уравнения (3.3.11) будут другими. Подставим выражение (3.3.11) в левую часть условия (3.3.14)

$$M\left((y - k_{c0}m_x - k_{c1}x^\circ(t))^2\right) = M(y^2) + k_{c0}^2m_x^2 + k_{c1}^2D_x - 2k_{c0}m_xm_y - 2k_{c1}M(x^\circ y).$$

Необходимое условие минимума полученного выражения – равенство нулю частных производных по коэффициентам k_{c0} и k_{c1} , откуда нетрудно получить

$$\begin{aligned} k_{c0} &= \frac{m_y}{m_x}, \\ k_{c1} &= \frac{1}{D_x} M(yx^\circ) = \frac{1}{D_x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x^\circ \cdot p_x(x) dx. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Как видно из выражений (3.3.15), первый коэффициент совпадает с ранее найденным, а выражение для второго коэффициента получается другим.

Для типовых нелинейностей и нормального закона распределения существуют таблицы коэффициентов статистической линейаризации, которые можно найти в многочисленной справочной литературе по теории автоматического управления.

Погрешность в расчетах, проведенных по первому и по второму критерию, примерно одинакова, но, как правило, имеет разный знак, в связи с чем рекомендуется для повышения точности для коэффициента k_{c1} брать среднее арифметическое, посчитанное по обоим критериям.

Если нелинейная характеристика $\varphi(x)$ неоднозначна, уравнение такого звена, кроме самой переменной x будет содержать ещё и производную dx/dt . В этом случае формулы (3.3.12), (3.3.13) и (3.3.15) неправомерны, и их нужно усложнять с учетом производной dx/dt .

Если характеристика $\varphi(x)$ несимметрична относительно начала координат, то есть не является нечетной, то проявляется эффект выпрямления входного сигнала. Это означает, что среднее значение выходного сигнала m_y не будет равно нулю даже, если среднее значение сигнала на входе $m_x = 0$. Поэтому в данном случае нельзя среднее значение m_{y_3} выражать через m_x с помощью коэффициента k_{c0} , то есть нельзя записывать

$$m_{y_3} = k_{c0} m_x,$$

и, соответственно, вместо схемы на рис. 3.7, а следует пользоваться схемой на рис. 3.7, б. Уравнение (3.3.11) также несколько видоизменяется и превращается в уравнение

$$y_3(t) = m_{y_3} + y_3^\circ(t) = m_y + k_{c1} x^\circ(t),$$

где m_y вычисляется по формуле (3.3.4).

3.3.3. Применение статистической линеаризации для исследования точности замкнутых САУ

Рассмотрим стандартную схему простейшей одноконтурной системы с единичной обратной связью (рис. 3.8), содержащую нелинейное звено, заданное нелинейной характеристикой $\varphi(x)$ и линейную часть $W(s)$. На вход системы поступает сумма детерминированного задающего воздей-

ствия $g(t)$ и приведенного к входу случайного шума $n(t)$. Задающее воздействие будем считать достаточно медленно¹ изменяющимся, а сигнал помехи – нормально распределённым, стационарным процессом с нулевым средним, корреляционной функцией $K_n(\tau)$ и спектральной плотностью $S_n(\omega)$. Нелинейность предполагаем однозначной и нечетной.

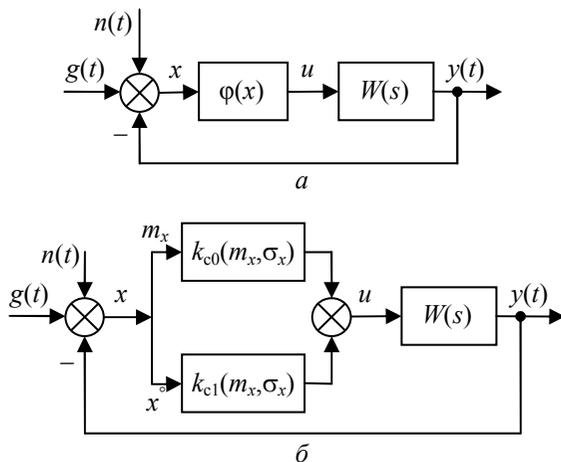


Рис. 3.8. Статистическая линейризация замкнутой системы

Проведя линейризацию нелинейного звена, получим схему, показанную на рис. 3.8, б. Здесь детерминированная составляющая проходит по верхней ветви схемы через звено с коэффициентом передачи $k_{c0}(m_x, \sigma_x)$, а центрированная случайная составляющая – по нижней ветви через звено с коэффициентом передачи $k_{c1}(m_x, \sigma_x)$. В скобках для коэффициентов статистической линейризации показано, что они зависят от неизвестных пока среднего m_x и среднеквадратичного σ_x .

¹ Термин «достаточно медленно» означает, что переходные процессы, вызванные задающим воздействием, не принимаются во внимание.

Выше было выяснено, что проведение статистической линеаризации обосновано, если распределение сигнала на входе нелинейного звена подчиняется нормальному закону распределения. В нашем случае сигнал на входе нелинейного звена $x = g + n - y$. При этом воздействие g – детерминированное, воздействие n распределено по нормальному закону, следовательно, предположение о нормальности сигнала x справедливо, только если нормальное распределение имеет сигнал y . Если сигнал на входе нелинейного звена имеет нормальный закон распределения, то пройдя через нелинейное звено, он будет иметь закон распределения, отличный от нормального. Но, как правило, линейная часть является фильтром низких частот, имея конечную полосу пропускания. Чем уже полоса пропускания, тем ближе закон распределения к нормальному. Поэтому гипотеза фильтра чаще всего выполняется, и можно с полным основанием считать возможным проведение статистической линеаризации¹.

Уравнение для детерминированной составляющей имеет вид

$$M_x(s) = G(s) \frac{1}{1 + k_{c0} W(s)}, \quad (3.3.16)$$

где $M_x(s)$ и $G(s)$ – лапласовы изображения среднего значения m_x и задающего воздействия g соответственно.

Установившееся значение можно найти из выражения (3.3.16) по теореме о конечном значении

¹ Можно провести аналогию с подобной гипотезой фильтра в методе гармонической линеаризации.

$$m_x = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + k_{c0}(m_x, \sigma_x)W(s)}. \quad (3.3.17)$$

Для спектральной плотности центрированной составляющей x° справедливо уравнение

$$S_{x^\circ}(\omega) = S_n(\omega) \left| \frac{1}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x)W(j\omega)} \right|^2.$$

Дисперсию сигнала x найдем из последнего выражения по формуле (3.2.16) с учетом того, что дисперсия центрированного процесса равна среднему квадрату

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_n(\omega) \left| \frac{1}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x)W(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (3.3.18)$$

Таким образом, получили два уравнения – (3.3.17) и (3.3.18) относительно четырёх неизвестных: k_{c0} , k_{c2} , m_x и σ_x . Остальные два уравнения для определения этих неизвестных – это уравнения, полученные в результате статистической линеаризации, заданные формулами (3.3.12), (3.3.13) или (3.3.15) в зависимости от применяемого критерия. Решать совместно эти нелинейные уравнения можно методом последовательных приближений или графически. В результате решения получаем значения коэффициентов статистической линеаризации k_{c0} , k_{c1} , среднее значение m_x и среднеквадратичное отклонение σ_x .

Так как помеха $n(t)$ не имеет постоянной составляющей, найденное среднее значение m_x характеризует установившуюся ошибку системы, обусловленную задающим воздействием, при наличии помех.

Случайная составляющая ошибки определяется по спектральной плотности составляющей сигнала на выходе системы, связанной с помехой аналогично тому, как это сделано в выражении (3.2.13)

$$S_{y^o}(\omega) = S_n(\omega) \left| \frac{k_{c1}W(j\omega)}{1+k_{c1}W(j\omega)} \right|^2. \quad (3.3.19)$$

Дисперсию случайной ошибки найдем с помощью интеграла (3.2.16)

$$D_y = \sigma_y^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_n(\omega) \left| \frac{k_{c1}W(j\omega)}{1+k_{c1}W(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Средний квадрат общей ошибки, очевидно, будет равен

$$\overline{\varepsilon^2} = m_x^2 + \sigma_y^2.$$

Из последнего выражения следует, что общая ошибка в системе при наличии детерминированного задающего воздействия и случайной помехи с нулевым средним может быть представлена (аналогично формуле (3.2.13)) в виде суммы составляющей ошибки, обусловленной полезным сигналом, и составляющей сигнала y , обусловленной помехой.

Сделаем некоторые выводы.

1. В реальных ситуациях роль случайностей (случайных сигналов, помех, случайных изменений параметров системы и проч.)

чрезвычайно важна.

2. Исследование стохастических процессов в САУ в большинстве случаев основано на предположении (впрочем, часто обоснованном) о стационарности и эргодичности случайных процессов.
3. Для большого класса практических задач статистической динамики САУ достаточно пользоваться математическим ожиданием и корреляционной функцией, то есть проводить исследования в рамках корреляционной теории.
4. Многие формулы, применяющиеся для исследования стохастических процессов в САУ, упрощаются при переходе в частотную область с применением спектральной плотности, являющейся Фурье-преобразованием корреляционной функции.
5. Анализ случайных ошибок в линейных САУ позволяет не только с успехом определять оптимальные в смысле статистической точности значения параметров, но и находить оптимальную передаточную функцию системы.
6. Если при рассмотрении статистической динамики линейных систем применяют усреднение по времени, то в нелинейных системах используют усреднение по реализациям.
7. Ввиду сложности точного исследования случайных процессов в нелинейных САУ широкое распространение получил метод статистической линеаризации.
8. Применение метода статистической линеаризации основано на предположении о нормальности закона распределения и о его неискажении после прохождения через нелинейное звено.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

4.1. Понятие об оптимальных системах.

Слово «оптимальные» означает наилучшие в определённом смысле. С оптимальными системами мы уже сталкивались в разделе статистической динамики САУ, когда речь шла об оптимальных параметрах линейных систем и об оптимальной весовой функции линейной системы. Перейдём теперь к более подробному изучению теории оптимальности и оптимальных процессов.

Большим толчком к развитию теории и практики систем управления с обратной связью явилась вторая мировая война. Далее следует небольшой период спячки в пятидесятых годах прошлого столетия и опять бурное развитие подобных систем, связанное с нуждами автоматизации промышленности и ещё большим развитием космической, авиационной, атомной и вычислительной техники.

Проектирование современных систем управления стало очень сложным ввиду стремления управлять в широком диапазоне внешних условий, из-за нелинейных характеристик, свойственных объектам, работающим в таких условиях, а также из-за чрезвычайно высоких требований к качеству таких систем.

Теория оптимизации предлагает специалистам по системам управления способы борьбы с указанными трудностями проектирования современных систем и служит хорошим примером использования понятий линейного векторного пространства.

Философия теории оптимизации – построение наилучшей системы. Это, конечно, подразумевает наличие некоторого критерия или показателя качества для суждения о том, что означает «наилучшая». Выбор надлежащего показателя качества зачастую представляет отдельную (нередко непростую) задачу. Обоснование выбора того или иного критерия оптимальности связано с конкретными технико-экономическими условиями работы САУ и в теории оптимального управления не рассматривается.

Различия между этими критериями дают основания для классификации оптимальных систем по оптимизируемым показателям качества. Это системы:

- оптимальные по быстродействию,
- оптимальные по расходу ресурсов,
- оптимальные по производительности,
- с минимальными потерями от управления и т.д.

Следующий вариант классификации оптимальных систем – по характеру процессов, протекающих в системах. С этой точки зрения системы делятся на системы:

- непрерывные,
- дискретно-непрерывные,
- дискретные.

Можно проводить классификацию и по типу дифференциальных уравнений, описывающих систему: линейные, нелинейные, с распределёнными параметрами (уравнения в частных производных) и т.д.

Наконец, можно классифицировать системы по характеру критерия оптимальности. В этом случае получаем системы:

- равномерно оптимальные (наилучшие в каждом отдельном случае, то есть при каждом проведённом эксперименте),
- статистически оптимальные (наилучшие в среднем, то есть при усреднении многих экспериментов),
- минимаксно оптимальные (системы, дающие наилучший результат в наихудших условиях).

По сравнению с менее строгими методами проектирования замкнутых САУ особенности теории оптимизации состоят в следующем.

1. Процедура проектирования является более чёткой, так как включает в едином показателе проектирования все существенные аспекты качества.
2. Очевидно, что проектировщик может ожидать получения наилучшего результата только в соответствии с выбранным показателем качества. Поэтому для каждой задачи указывается область ограничений.
3. Часто можно обнаружить несовместимость ряда требований качества.
4. Получающаяся в результате проектирования система управления будет адаптивной, если в процессе работы показатель качества меняется, и попутно снова вычисляются параметры регулятора.
5. Работа с нестационарными оптимальными процессами не вносит каких-либо дополнительных трудностей.
6. Непосредственно рассматриваются и нелинейные объекты управления, правда, при этом возрастает сложность вычислений.

Основные этапы построения оптимальных систем состоят в следующем.

1. Построение математических моделей физических процессов, подлежащих управлению, а также критериев качества.

2. Вычисление оптимальных управляющих воздействий.

3. Синтез регулятора, реализующего оптимальное управление.

Теория оптимизации продолжает интенсивно развиваться, пытаясь преодолеть трудности, присущие этой теории. Перечислим их.

1. Формирование значимого на языке математике критерия качества из различных требований проектирования – непростая задача. Часто на этом пути применяется метод проб и ошибок.
2. Результирующий критерий качества системы часто является очень чувствительным к различного рода ошибочным предположениям и (или) к изменениям параметров регулируемого процесса.
3. Существующие в настоящее время алгоритмы управления в случае нелинейных систем требует сложных программ вычислений и, часто, большого количества машинного времени.
4. Хорошо работающие методы проектирования регуляторов, разработанные для малых областей фазового пространства (вблизи траекторий, соответствующих номинальным режимам), сразу же оказываются неприемлемыми применительно к большим областям фазового пространства в случае нелинейных систем.

Основные методы, используемые в теории оптимизации, это:

- классическое вариационное исчисление,
- принцип максимума Понтрягина,
- динамическое программирование Беллмана,
- алгоритмы Винера-Колмогорова и Калмана-Бьюси,

- функциональный анализ,
- метрический анализ.

4.2. Вариационное исчисление в оптимальных системах

4.2.1. Постановка задач вариационного исчисления

Вариационное исчисление – это раздел математического анализа, связанный с проблемой оптимизации при условиях более общего характера, чем те, которые рассматриваются в обычной теории нахождения максимума или минимума некоторой функции. Вариационное исчисление имеет дело с максимумом или минимумом **функционалов**, когда требуется определить не одно значение функции, а целую функцию.

Функционал – это переменная величина, зависящая от некоторой функции, например, функционалом является Q :

$$Q = \int_0^T G(u(t), y(t)) dt.$$

При этом каждой функции G , взятой из некоторого класса функций, соответствует определённое значение функционала Q .

Вариационное исчисление разработано более 150 лет назад известным русским математиком Эйлером и находит применение во многих областях науки и техники, среди которых – теория управления, классическая механика, электромагнетизм, гидродинамика, оптика, аэродинамика и т.д.

В вариационном исчислении тремя основными проблемами традиционно считаются:

- задача Лагранжа,

– задача Майера,

– задача Больца.

Задача Лагранжа с одной независимой переменной связана с определением функции $\mathbf{u}(t)$, которая обеспечивает минимум интеграла от этой функции. Формализуем постановку задачи.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – n мерный вектор-столбец, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец.

2. Система начальных условий

$$x_i(t_0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.2)$$

3. Критерий оптимальности

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (4.2.3)$$

где функция F предполагается непрерывной по своим аргументам.

Необходимо найти функцию $\mathbf{u}(t)$, доставляющую минимум функционала (4.2.3) среди всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (4.2.1) с начальными условиями (4.2.2).

Задача Майера заключается в определении функции $\mathbf{u}(t)$, минимизирующей известную функцию, вычисляемую в конечной точке и содер-

жащую некоторые переменные, конечные значения которых заранее не заданы.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений (4.2.1).
2. Начальные условия (4.2.2).
3. Конечные условия

$$x_j(t_f) = b_j, \quad j \in A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4.2.4)$$

при этом t_f заранее не известно.

4. Критерий оптимальности

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f}. \quad (4.2.5)$$

Необходимо из всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (4.2.1) с начальными (4.2.2) и конечными (4.2.4) условиями найти функцию $\mathbf{u}(t)$, минимизирующую критерий (4.2.5).

В частном случае, когда критерий оптимальности имеет вид

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0,$$

задача Майера сводится к переходу от заданного начального состояния к желаемому конечному за минимальное время.

Задача Больца связана с определением функции $\mathbf{u}(t)$, минимизирующей сумму, состоящую из интеграла от некоторой функции и функции, вычисляемой в конечной точке, при этом конечные значения некоторых переменных этой функции могут быть заранее не заданы.

Дано.

1. Система дифференциальных уравнений (4.2.1).
2. Начальные значения (4.2.2).
3. Конечные значения (4.2.4).
4. Критерий

$$I = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt . \quad (4.2.6)$$

Необходимо среди всех функций $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (4.2.1) с начальными (4.2.2) и конечными (4.2.4) условиями выбрать функцию $\mathbf{u}(t)$, минимизирующую критерий (4.2.6).

Процедуру нахождения функции $\mathbf{u}(t)$ называют вариационным методом.

Если интерпретировать $\mathbf{x}(t)$ как вектор состояния объекта (процесса), а под $\mathbf{u}(t)$ понимать вектор управления, то оптимальное управление по минимуму интеграла сводится к задаче Лагранжа. Оптимальное управление конечным состоянием и управление с максимальным быстродействием – это задача Майера. К задаче Больца сводится управление по минимуму интеграла с ограничениями на конечное состояние или управление по минимуму времени перехода в заключительное состояние при ограничении на величину интеграла.

Из формулировок задач следует, что задача Больца – наиболее общая формулировка задачи вариационного исчисления. Однако всегда можно ввести некоторые дополнительные переменные, с помощью которых можно задачу Лагранжа свести к задаче Больца или к задаче Майера и наоборот.

Хотя существует много проблем оптимального управления, которые на первый взгляд не относятся ни к одной из трёх перечисленных задач, всегда можно прибегнуть к тому или иному математическому приёму, позволяющему первоначальную задачу преобразовать к одной из сформулированных выше.

Пример 4.2.1. Задача с производными высокого порядка.

Пусть требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt \quad (4.2.7)$$

при заданных начальных условиях на переменные x и \dot{x} .

Поскольку в подынтегральном выражении (4.2.7) имеется вторая производная, то ясно, что эта задача не относится непосредственно ни к одной из задач вариационного исчисления. Но путём введения дополнительной переменной y (размерность пространства состояний при этом, разумеется, увеличивается на единицу) исходную задачу можно свести к задаче Лагранжа. Действительно, обозначим $\dot{x} = y$.

Тогда критерий (4.2.7) переписется в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, y, \dot{y}, t) dt,$$

а это уже непосредственно задача Лагранжа.

Пример 4.2.2. Переход от задачи Лагранжа к задаче Майера.

Пусть требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt . \quad (4.2.8)$$

Конечные значения для \mathbf{x} заданы.

Выражение (4.2.8) совпадёт с выражением (4.2.3), если обозначить $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$. Эту задачу Лагранжа можно преобразовать к задаче Майера, если ввести дополнительную $(n+1)$ -ю вспомогательную переменную, задав её уравнением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t).$$

Тогда критерий оптимальности примет вид

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1}(t) dt = x_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_f},$$

а это уже задача Майера.

Пример 4.2.3. Задача с ограничениями в виде неравенств.

В данной задаче требуется минимизировать критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$$

при заданных конечных значениях x в предположении, что на величину \dot{x} наложено ограничение в виде неравенства

$$a \leq \dot{x} \leq b .$$

Вводя новую вспомогательную вещественную переменную y , можно заданное неравенство заменить уравнением

$$\varphi(\dot{x}, y) = (\dot{x} - a)(b - \dot{x}) - y^2 = 0.$$

4.2.2. Минимизация интегрального критерия

Поскольку любая задача вариационного исчисления может быть приведена к задаче Лагранжа, рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (4.2.9)$$

где F – непрерывная функция своих аргументов, а $x(t)$ – дважды дифференцируемая функция времени.

Начальная $x(t_0)$ и конечная $x(t_f)$ точки могут быть зафиксированы или подвижны.

Случай закреплённых конечных точек.

Зафиксируем начальное и конечное значение функции $x(t)$:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (4.2.10)$$

Найдём функцию $x(t)$, доставляющую минимум интеграла (4.2.9).

Геометрическая иллюстрация этой задачи заключается в том, чтобы найти кривую, соединяющую точки (t_0, x_0) и (t_f, x_f) , вдоль которой интеграл от функции $F(x, \dot{x}, t)$ был бы минимальным (рис. 4.1).

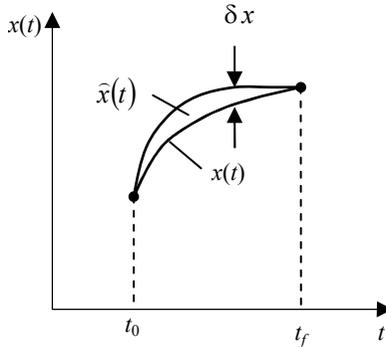


Рис. 4.1. Задача с закреплёнными конечными точками

Обозначим оптимальную траекторию через $x(t)$, а некоторую близкую к ней – через $\hat{x}(t)$. Разность между $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ называется вариацией функции $x(t)$

$$x(t) - \hat{x}(t) = \delta x.$$

Вариацию можно представить себе как некоторый малый параметр ε , умноженный на функцию $\eta(t)$ из того же класса функций, что и $x(t)$. Поскольку точки начала и конца траекторий $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ совпадают, граничные условия для функции $\eta(t)$ нулевые

$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0. \quad (4.2.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) + \delta x = x(t) + \varepsilon \eta(t), \\ \hat{\dot{x}}(t) &= \dot{x}(t) + \delta \dot{x} = \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Подставляя соотношения (4.2.12) вместо функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в интеграл (4.2.9), получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} F(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t) dt .$$

Разложив подинтегральную функцию в последнем выражении в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x, \dot{x}, t) + \varepsilon\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \text{члены с } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt . \quad (4.2.13)$$

Необходимым условием экстремума критерия I является равенство нулю частной производной выражения (4.2.13) по ε , откуда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt = 0 . \quad (4.2.14)$$

Второе слагаемое в последнем выражении интегрируем по частям

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} dt = \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt . \quad (4.2.15)$$

Учитывая нулевые граничные условия, налагаемые на функцию $\eta(t)$ (4.2.12), первое слагаемое в выражении (4.2.15) обратится в нуль, и окончательно условие (4.2.14) преобразуется в уравнение

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться для произвольной функции η , нулю должно равняться выражение в квадратных скобках

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (4.2.16)$$

Уравнение (4.2.15) известно как уравнение Эйлера-Лагранжа.

Соответствующий многомерный вариант этого уравнения имеет вид

$$\text{grad}_x F - \frac{d}{dt} (\text{grad}_x F) = 0, \quad (4.2.17)$$

где обозначено

$$\text{grad}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа является необходимым условием экстремума функционала (4.2.9), поэтому только на интегральных кривых уравнения Эйлера-Лагранжа, удовлетворяющих граничным условиям (4.2.10), может реализовываться минимум критерия I . Интегральные кривые уравнения Эйлера-Лагранжа называются экстремалиями. Экстремалии, удовлетворяющие граничным условиям, определяют путём решения краевой задачи. Это решение не всегда существует, а если и суще-

ствуется, то не всегда единственное, а если единственное, то не всегда его можно найти, то есть проинтегрировать уравнение Эйлера-Лагранжа.

Положение облегчается тем, что во многих случаях синтеза оптимальных САУ из физических или геометрических соображений довольно просто устанавливается существование решения, его единственность и то, что это решение реализует минимум критерия. Если же решений все-таки несколько, то после вычисления критерия на каждом из этих решений выбирается то из них, на котором критерий достигает наименьшей величины.

Решение уравнения Эйлера-Лагранжа в аналитическом виде возможно в следующих случаях.

1. Функция F не зависит от \dot{x} , то есть является функцией только x и t : $F(x, t)$.
2. Функция F не зависит явно от времени $F = F(x, \dot{x})$.
3. Функция F не зависит от x $F = F(\dot{x}, t)$ или $F = F(\dot{x})$.
4. Функция F линейна относительно \dot{x} , то есть имеет, например, вид $F = \alpha(x, t) + \dot{x} \cdot \beta(x, t)$.

Случай подвижных конечных точек.

Теперь рассмотрим задачу минимизации интеграла, когда конечная точка не фиксирована, а лежит на некоторой кривой. Типичный пример такого случая – задача перехвата, когда, например, самолёт-перехватчик, стартуя из заданной начальной точки, должен сблизиться с перехватываемым самолётом, летящим по определённой траектории, затратив при этом минимальное количество топлива.

По-прежнему, оптимальную траекторию обозначим через $x(t)$, а близкую к ней неоптимальную – через $\tilde{x}(t)$. Начальные условия для $x(t)$ заданы: $x(t_0) = x_0$, а конечная точка лежит на кривой с уравнением $x = c(t)$ (рис. 4.2).

Подставляя в интеграл (4.2.9) вместо оптимальной траектории $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ отличающуюся от неё неоптимальную $\tilde{x}(t)$ и $\dot{\tilde{x}}(t)$ соответственно и меняя верхний предел в интеграле на величину $t_f + \varepsilon \delta t_f$, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} F(x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}, t) dt. \quad (4.2.18)$$

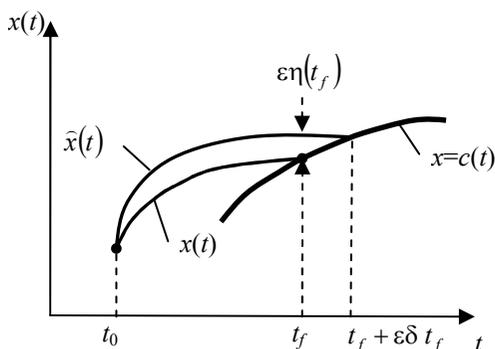


Рис. 4.2. Задача с подвижной конечной точкой

Вариация δt_f возникает потому, что конечная точка не фиксирована, а расположена на кривой $x=c(t)$. Действуя точно так же, как и в задаче с закреплённой конечной точкой, приходим к необходимому условию экстремума интеграла (4.2.18)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt + F(t_f) \delta t_f = 0.$$

Второе слагаемое под интегралом возьмём по частям и, проделав несложные преобразования, получим

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt + \eta(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} + F(t_f) \delta t_f = 0. \quad (4.2.20)$$

Рассмотрение условий в конечной точке (рис. 4.2) позволяет связать $\eta(t_f)$ и δt_f (ввиду малости соответствующих вариаций):

$$\dot{x}(t_f) \cdot \delta t_f + \eta(t_f) = \dot{c}(t_f) \cdot \delta t_f.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\eta(t_f) = \{ \dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f) \} \cdot \delta t_f. \quad (4.2.21)$$

Подставляя выражение (4.2.21) в уравнение (4.2.20), получим

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt + \left\{ F(t_f) + [\dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f)] \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0.$$

Поскольку последнее уравнение должно выполняться при любых вариациях δt_f , оно распадается на два условия

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt = 0; \quad (4.2.22)$$

$$\left\{ F(t_f) + [\dot{c}(t_f) - \dot{x}(t_f)] \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} \right\} \delta t_f - \eta(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0. \quad (4.2.23)$$

Из первого условия, как и ранее, следует уравнение Эйлера-Лагранжа (4.2.16).

Второе слагаемое в условии (4.2.23) равно нулю, если величина $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}$ ограничена, поэтому равно нулю должно быть выражение в фигурных скобках соотношения (4.2.23). Отсюда следует уравнение

$$F(t_f) = [\dot{x}(t_f) - \dot{c}(t_f)] \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f}. \quad (4.2.24)$$

Соотношение (4.2.24) называется условием трансверсальности.

Нелишне отметить, что уравнение (4.2.16) в начальный момент времени (то есть при $t = t_0$) может и не выполняться, поскольку $\eta(t_0) = 0$ и тогда условие (4.2.22) справедливо. Важно лишь, чтобы в начальный момент времени $x(t)$ была бы непрерывна, а $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ — конечна.

Если речь идёт о системе регулирования, когда осуществляется переход от одного существенного режима работы к другому, то есть от одного значения x к другому значению, конечная кривая $x = c(t)$ является горизонтальной прямой и $\dot{c}(t_f) = 0$. В этом случае условие трансверсальности (4.2.24) упрощается и принимает вид

$$F(t_f) = \dot{x}(t_f) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f}. \quad (4.2.25)$$

Можно показать, что в случае, когда функция F явно не зависит от времени, соотношения (4.2.16) и (4.2.25) сводятся к одному, а именно:

$$\bar{F}(x, \dot{x}) = \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}. \quad (4.2.26)$$

Действительно, дифференцируя обе части последнего выражения по t как сложную функцию, после упрощения получаем

$$\dot{x} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] = 0.$$

Обычно в процессе управления производная \dot{x} не обращается в нуль, поэтому нулю должно равняться выражение в квадратных скобках, а это левая часть уравнения Эйлера-Лагранжа (4.2.16).

Таким образом, оптимальную систему регулирования, осуществляющую переход от одного рабочего режима к другому за время (t_0, t_f) , определяет единственное условие (4.2.26).

4.2.3. Оптимальное управление по минимуму интегрального критерия

Теперь рассмотрим применение вариационного исчисления к задаче оптимального управления с интегральным критерием.

Пусть динамика объекта задана уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \quad (4.2.27)$$

где x – выход объекта, u – управляющее воздействие при заданном начальном значении

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.2.28)$$

Требуется сформировать управление $u(t)$, минимизирующее интегральный критерий

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u) dt. \quad (4.2.29)$$

Функция F в критерии (4.2.29) может описывать отклонение от желаемого состояния, потребление энергии, стоимость САУ и т.п.

Обозначая функции, доставляющие минимум критерия (4.2.29) через $x(t)$ и $u(t)$, а некоторые близкие к ним – через $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ соответственно, можно записать

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon\eta, \\ \hat{u} &= u + \varepsilon\xi, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

где η и ξ – в достаточной мере произвольные функции времени, определённые на интервале (t_0, t_f) , а ε – малый параметр.

Подставляя выражения (4.2.30) в критерий (4.2.29) вместо $x(t)$ и $u(t)$, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^f F(x + \varepsilon\eta, u + \varepsilon\xi) dt .$$

Разложив в последней формуле подынтегральную функцию в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории, получим

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^f \left[F(x, u) + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \text{члены с } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt . \quad (4.2.31)$$

Необходимое условие экстремума функции (4.2.31) – равенство

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 .$$

Взяв производную по ε от правой части выражения (4.2.31) и поменяв местами порядок дифференцирования по ε и интегрирования по t , приравняем полученное выражение нулю при $\varepsilon=0$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial u} \right) dt . \quad (4.2.32)$$

Вернёмся к уравнению динамики объекта (4.2.27) и заменим $x(t)$ и $u(t)$ на $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{u}(t)$ соответственно. Получим

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \varepsilon \dot{\eta} = f(x + \varepsilon\eta, u + \varepsilon\xi) .$$

Разложив правую часть последнего выражения в ряд Тейлора вблизи оптимальной траектории по малым значениям ε , и ограничиваясь линейными членами, получим

$$\dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\eta} = f(x, u) + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial u} \right).$$

С учётом уравнения (4.2.27) последнее соотношение превратится в уравнение

$$\dot{\eta} = \eta \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial u} \quad (4.2.33)$$

с начальными условиями $\eta(t_0) = 0$.

Решая уравнение (4.2.33) относительно ξ , подставим это значение в уравнение (4.2.32)

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\dot{\eta} - \eta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial u} \right] dt = 0. \quad (4.2.34)$$

Слагаемое, связанное с производной $\dot{\eta}$ в выражении (4.2.34), найдем, интегрируя по частям

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\eta} \frac{\partial F}{\partial u} dt = \eta \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right] dt. \quad (4.2.35)$$

Поскольку в начальной точке $\eta(t_0) = 0$, то первое слагаемое в последнем выражении будет равно нулю, если положить в конечной точке

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{array} \right|_{t_f} = 0. \quad (4.2.36)$$

Тогда из выражений (4.2.34) и (4.2.35) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \right) \right] dt = 0.$$

Так как последнее уравнение должно выполняться при произвольных функциях η , нулю должно равняться выражение в квадратных скобках. Таким образом, уравнение Эйлера-Лагранжа для данной задачи оптимального управления примет вид

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \right) = 0. \quad (4.2.37)$$

Решая последнее уравнение с учётом граничных условий (4.2.28) и (4.2.36), определяем оптимальное управление $u(t)$. Это классическая задача вариационного исчисления с заданными условиями на концах интервала.

Аналитическое решение двухточечной краевой задачи возможно только в исключительных случаях, поэтому, как правило, приходится прибегать к методу последовательных приближений. Этот метод состоит в выборе наугад некоторого конечного значения $x(t_f) = x_f$ и численном решении уравнения Эйлера-Лагранжа при выбранном значении x_f и заданной величине x_0 . Затем вычисляем разность между полученным

$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial f} \end{array} \right|_{t_f}$ и заданным конечными условиями. Поскольку эта разность с пер-

вого раза не будет равна нулю, процесс продолжаем до тех пор, пока эта разность не станет меньше заданной достаточно малой величины.

Можно получить и многомерный аналог уравнения Эйлера-Лагранжа (4.2.37).

4.2.4. Учёт ограничений с помощью метода множителей Лагранжа.

До сих пор рассматривались задачи оптимального управления при отсутствии каких-либо ограничений на переменные состояния или на управляющие воздействия. Но на практике всегда имеются некоторые физические ограничения, как на управляемый процесс, так и на управляющие воздействия. Обычно учёт ограничений проводят при помощи множителей Лагранжа. Этот метод даёт изящный подход к решению задачи отыскания экстремума функционала, подчинённого одному или нескольким ограничивающим зависимостям, когда последние настолько сложны, что их трудно использовать для исключения свободных пара-

метров. Метод множителей Лагранжа делает не нужным решение уравнений, задающих ограничения с целью исключения свободных параметров.

Обозначим функцию, экстремум которой требуется найти, через

$$P(\mathbf{u}) = P(u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Пусть на управление \mathbf{u} накладываются ограничения вида

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq \mathbf{c}, \quad (4.2.38)$$

где $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец.

Тогда вектор \mathbf{u} , доставляющий максимум или минимум функции P , можно найти, определив условия максимума или минимума промежуточной функции

$$G(\mathbf{u}) = P(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Q}(\mathbf{u}), \quad (4.2.39)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r]^T$ – r -мерный вектор-столбец, именуемый векторным множителем Лагранжа.

Определив экстремум этой новой функции, получим вектор \mathbf{u} как функцию векторного множителя Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$. Подставив найденный вектор

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{u}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \quad (4.2.40)$$

в систему ограничительных соотношений (4.2.38), получим r уравнений относительно r компонент вектора $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_r]^T$. Решая полу-

ченные уравнения, определяем компоненты вектора λ и, подставив эти значения в соотношение (4.2.40), получим вектор оптимального управления.

Пример 4.2.4. Пусть уравнения динамики объекта являются линейными. В общем случае эти уравнения записываются в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.2.41)$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ – как обычно, n -мерный вектор состояния объекта, $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_r]^T$ – r -мерный вектор управления, а \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы соответствующих размерностей.

Пусть требуется за время T перевести объект из заданного начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в конечное состояние¹

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}. \quad (4.2.42)$$

Найдём вектор оптимального управления $\mathbf{u}^\circ(t)$, доставляющий минимум интегрального квадратичного критерия

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^T \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} dt, \quad (4.2.43)$$

где матрица квадратичной формы \mathbf{H} является положительно определённой и симметрической.

¹ Управление, целью которого является перевод объекта в заданное конечное состояние в заданный момент времени, называется терминальным управлением.

Конечное состояние (4.2.42) можно принять за систему ограничительных соотношений.

Согласно методу множителей Лагранжа преобразуем вначале ограничительные соотношения (4.2.42) в интегральную форму, поскольку критерий оптимальности (4.2.43) задан в интегральном виде.

Как известно [1], решение уравнений состояния имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t) = e^{At}$ – переходная матрица.

В конечной точке $t=T$ вектор состояния равен

$$\mathbf{x}(T) = \Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

С учётом соотношений (4.2.42) последнее уравнение превратится в уравнение

$$\Phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0.$$

Решая это уравнение относительно \mathbf{x}_0 , и учитывая свойства переходной матрицы, получим

$$\mathbf{x}_0 = -\int_0^T \Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)dt = 0. \quad (4.2.44)$$

Теперь задачу оптимизации можно сформулировать как задачу минимизации критерия (4.2.43) по управлению \mathbf{u} при наличии ограничений (4.2.44).

С введением множителей Лагранжа сформулированная проблема сводится к минимизации критерия

$$I_1(\mathbf{u}) = \int_0^T [\mathbf{u}^T(t)\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)] dt. \quad (4.2.45)$$

Составим уравнение Эйлера-Лагранжа для критерия (4.2.45), учитывая, что выражение в квадратных скобках не зависит от производной $\dot{\mathbf{u}}(t)$:

$$\text{grad}_{\mathbf{u}} [\mathbf{u}^T(t)\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)] = 0.$$

Применяя правила дифференцирования произведения матриц, из последнего уравнения получим

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T[\Phi^{-1}(t)]^T\boldsymbol{\lambda} = 2\mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T[\Phi^{-1}(t)]^T\boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (4.2.46)$$

При получении уравнения (4.2.46) учтено, что матрица \mathbf{H} – симметрическая. Из соотношения (4.2.46) определяем вектор оптимального управления

$$\mathbf{u}^o(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T[\Phi^{-1}(t)]^T\boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (4.2.47)$$

Подставим оптимальное управление (4.2.47) в ограничения (4.2.44)

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \Phi^{-1}(t) \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T dt \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V}(T) \boldsymbol{\lambda}, \quad (4.2.48)$$

где введено очевидное обозначение $\mathbf{V}(T) = \frac{1}{2} \int_0^T \Phi^{-1}(t) \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T dt$.

Если матрица $\mathbf{V}(T)$ не вырождена, то вектор множителей Лагранжа из соотношения (4.2.48) определится как

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0.$$

Осталось подставить найденный вектор множителей Лагранжа в выражение для оптимального управления (4.2.47)

$$\mathbf{u}^o(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}^T [\Phi^{-1}(t)]^T \mathbf{V}^{-1}(T) \mathbf{x}_0.$$

Подведём некоторый итог данной темы.

1. Вариационное исчисление – это раздел математики, изучающий задачи оптимизации при более общих условиях, чем те, которые рассматриваются в обычной теории определения максимума или минимума некоторой функции.
2. В вариационном исчислении рассматриваются три основные задачи – задачи Лагранжа, Майера и Больца.
3. Для преобразования задачи одного вида к какому-либо другому виду всегда можно ввести дополнительные переменные, и большинство задач оптимального управления можно свести к одной из трёх упомянутых задач:

а) задача управления по минимуму интеграла сводится к задаче Лагранжа,

б) задача оптимального по быстродействию управления и оптимального терминального управления можно рассматривать как задачу Майера,

в) задача оптимального управления с заданными ограничениями сводится к задаче Больца.

4. Оптимизация систем управления с помощью вариационного исчисления обычно приводит к двухточечной краевой задаче. Аналитическое решение двухточечных краевых задач возможно только в исключительных случаях.
5. Ввиду того, что дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа обычно нелинейные, пользуются численным методом последовательного приближения. Этот метод заключается в переборе начальных условий и в численном интегрировании системы уравнений Эйлера-Лагранжа с учётом ограничений.
6. При проектировании систем оптимального управления трудность решения двухточечных краевых задач делает классическое вариационное исчисление малоприменимым.

4.3. Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина является одним из эффективных методов решения проблем оптимизации. Он тесно связан с классической задачей Майера. Первоначально принцип максимума был получен Л.С.Понтрягиным с помощью классического вариационного исчисления. Однако в одном отношении он отличается от классической задачи Майе-

ра. В задаче Майера управляющие воздействия имеют неограниченные пределы, а у Л.С.Понтрягина управляющие воздействия могут быть элементами замкнутого множества или, другими словами, могут подчиняться некоторым ограничениям.

4.3.1. Обобщённая задача оптимального управления

Большинство задач оптимального управления можно объединить в три основных типа задач:

- 1) задача управления для достижения максимального быстрого действия,
- 2) задача управления конечным состоянием,
- 3) задача управления по минимуму интеграла.

Рассмотрим управление объектом n -го порядка, заданного уравнениями в векторно-матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (4.3.1)$$

Здесь \mathbf{x} и \mathbf{u} – вектор состояния и вектор управления соответственно.

В каждый момент времени управляющие воздействия должны удовлетворять ограничениям в виде неравенства

$$g(\mathbf{u}) \leq 0, \quad (4.3.2)$$

что вытекает из физических ограничений, налагаемых на систему управления.

Вектор управления, удовлетворяющий ограничениям (4.3.2), называется вектором допустимого управления.

Задачу управления по минимуму времени переходного процесса можно тогда сформулировать как задачу определения вектора допустимого управления \mathbf{u} , переводящего объект из начального состояния \mathbf{x}_0 в желаемое конечное \mathbf{x}_f за минимальное время.

Задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого допустимого вектора управления \mathbf{u} , при котором за заданный интервал времени $t_f - t_0$ одна (например, x_i) или некоторая совокупность переменных состояния приобретает возможно большее или возможно меньшее значение. Другими словами, вектор допустимого управления доставляет максимум или минимум, например,

$$x_i(t_f) = F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_f} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^k c_i x_i(t_f) = F_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Big|_{t_f}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Во многих случаях приходится сталкиваться с положением, когда отклонения выходной переменной от некоторого требуемого значения является нежелательным. Часто интересует среднее значение этого отклонения (например, это может быть прибыль или убыток) за некоторый промежуток времени. В таких случаях задача системы управления состоит в минимизации интеграла этого изменения (или какой-либо функции этого изменения) в течение заданного промежутка времени. Эту задачу оптимального управления можно сформулировать как определение вектора допустимого управления \mathbf{u} , доставляющего минимум интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt.$$

Перечисленные три типовые задачи можно свести к задаче оптимизации по отношению к координатам или переменным состояния объекта, называемой обобщённой задачей оптимального управления. Задачи управления по минимуму времени, конечным состоянием и по минимуму интеграла являются частными случаями задачи минимизации по отношению к одной новой дополнительной координате. Такой переход от частных задач к обобщённой задаче оптимального управления проводится с помощью процедуры инвариантного вложения или увеличения размерности вектора состояния путём добавления новой переменной состояния.

1. Управление по максимуму быстродействия.

Уравнения состояния заданы системой

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.3)$$

Допустимое управление подчиняется ограничениям (4.3.2).

Задача состоит в переводе объекта из начального состояния \mathbf{x}_0 в желаемое конечное \mathbf{x}_f за минимальное время, то есть в обеспечении

$$\min_{\mathbf{u}} (t_f - t_0) = \min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

Зададим новую переменную состояния $x_{n+1}(t)$ уравнением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t dt.$$

Так как $x_{n+1}(t) = t - t_0$, то управление по минимуму переходного процесса означает оптимизацию по отношению к новой переменной в конечный момент времени t_f .

2. Управление конечным состоянием.

Заданы уравнения объекта (4.3.3) и ограничения на управление (4.3.2).

В общем виде задачу управления конечным состоянием можно сформулировать как задачу определения такого вектора допустимого управления \mathbf{u} , который за данный промежуток времени $t_f - t_0$ обеспечивает минимум функционала F от вектора конечного состояния $\mathbf{x}(t_f)$, то есть обеспечивает

$$\min_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}(t_f)) = \min_{\mathbf{u}} F(x_1(t_f), x_2(t_f), \dots, x_n(t_f)).$$

Введём новую переменную $x_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}(t)) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ с начальными условиями $x_{n+1}(t_0) = F(\mathbf{x}(t_0))$.

Для составления уравнения относительно этой новой переменной, возьмем производную от $x_{n+1}(t)$ по t :

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Учитывая уравнения состояния объекта (4.3.3), последнее соотношение примет вид

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Таким образом, задача управления конечным состоянием сведена к задаче минимизации новой переменной $x_{n+1}(t)$ в конечный момент времени t_f .

3. Управление по минимуму интеграла.

Объект управления и ограничения, как и прежде, заданы уравнениями (4.3.3) и (4.3.2) соответственно.

Задача заключается в определении вектора допустимого управления, переводящего объект из начального состояния \mathbf{x}_0 в заключительное состояние \mathbf{x}_f , доставляя при этом минимум интеграла

$$\min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt.$$

Введём новую переменную $x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ с начальным значением $x_{n+1}(t_0) = 0$.

Тогда уравнение для этой новой переменной имеет вид

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Задача оптимизации по минимуму интеграла сведется тогда к задаче минимизации новой компоненты вектора состояния в конечный момент времени t_f .

Все рассмотренные задачи можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания минимума функционала

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f).$$

Таким образом, обобщённую задачу оптимального управления можно сформулировать как задачу определения из всей совокупности допустимых векторов управления, удовлетворяющих ограничениям (4.3.2), такого вектора \mathbf{u} , который переводит объект, заданный уравнениями динамики (4.3.3), из начального состояния \mathbf{x}_0 в некоторую определённую замкнутую область пространства состояний, доставляя минимум функционала ρ . Принцип максимума Понтрягина даёт изящный способ проектирования таких систем управления.

Прочие задачи оптимального управления, такие, например, как задача оптимизации с заданным начальным и конечным состоянием, задача с заданным начальным и переменным конечным состоянием, задача с переменным временем управления, задача перехвата и т.д., являются частными случаями обобщённой задачи.

4.3.2. Принцип максимума

Как выяснено в предыдущем подразделе, задача оптимизации может быть сформулирована как задача отыскания минимума функции

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_f) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_f \rangle = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_f, \quad (4.3.4)$$

подчинённой некоторым функциональным ограничениям.

В выражении (4.3.4) \mathbf{x} – вектор состояния объекта, \mathbf{b} – вектор-столбец, зависящий от координат, условия минимума которых должны быть обеспечены.¹

Функция, определяемая формулой (4.3.4), носит название функции Понтрягина.

Стратегия управления, обеспечивающая минимум функции Понтрягина, называется стратегией оптимального управления. Геометрическая интерпретация стратегии оптимального управления заключается в том, чтобы вектор \mathbf{x}_f перемещался как можно дальше в направлении $-\mathbf{b}$.

Определить минимум функции Понтрягина не всегда легко. Однако решение задачи оптимизации можно облегчить, если удастся найти некоторую простую функцию, тесно связанную с функцией Понтрягина и с динамикой объекта.

Интуитивно ясно, что минимум функции Понтрягина можно определить, найдя условия максимума энергии или мощности в системе. Такое предположение приводит к выводу о существовании такой функции энергии, условия максимума которой эквивалентны условиям минимума функции Понтрягина. И такая функция действительно есть! Это функция Гамильтона H , представляющая полную энергию в системе (сумма кинетической и потенциальной энергии) и равная скалярному произведению вектора количества движения на вектор скорости

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle. \quad (4.3.5)$$

¹ Вообще-то этот класс задач содержится в рамках задачи Майера в вариационном исчислении.

В выражении (4.3.5) \mathbf{x} – вектор состояния, \mathbf{p} – вектор количества движения, \mathbf{u} – вектор управления. При записи формулы (4.3.5) учтены уравнения динамики (4.3.3).

Простота функции Гамильтона делает весьма привлекательной идею о том, что из условий максимума функции Гамильтона можно получить условия минимума функции Понтрягина. Л.С. Понтрягин первым догадался сделать такой вывод и назвал свое открытие принципом максимума.

Принцип максимума гласит, что если вектор управления \mathbf{u} оптимален, то есть доставляет минимум функции Понтрягина, то функция Гамильтона H имеет максимум по отношению к \mathbf{u} в интервале управления.

Применение принципа максимума к решению задач оптимального управления заключается в определении условий максимума гамильтониана H по отношению к вектору управления. Результатом этого этапа будет вектор оптимального управления как функция вектора количества движения $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{p})$. Но при проектировании систем оптимального управления необходимо определить закон управления как функцию вектора состояния $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$ или как функцию времени $\mathbf{u}^\circ(t)$. Потому следующий этап – подстановка найденного вектора оптимального управления $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{p})$ в канонические уравнения Гамильтона. Очередной этап состоит в решении получающейся при этом двухточечной краевой задачи с граничными условиями. В результате получаем оптимальную траекторию $\mathbf{x}^\circ(t)$ и оптимальное управляющее воздействие $\mathbf{u}^\circ(t)$.

Итак, заданы уравнения динамики основной системы (4.3.3)

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вектор количества движения определится как решение дифференциальных уравнений сопряжённой системы

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.6)$$

с граничными условиями $p_i(t_f) = -b_i$, где b_i – известные константы, входящие в функцию Понтрягина ρ (4.3.4).

Связать уравнения (4.3.3) и (4.3.6) можно с помощью функции Гамильтона (4.3.5). Продифференцируем функцию Гамильтона H сначала по p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

а затем по x_i

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Учитывая уравнения (4.3.3) и (4.3.6), получаем канонические уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

с граничными значениями $x_i(t_0) = x_{i0}$, и $p_i(t_f) = -b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Физическую интерпретацию принципа максимума можно пояснить следующим образом: функция Гамильтона H представляет собой скалярное произведение \mathbf{p} на \mathbf{f} или \mathbf{p} на $\dot{\mathbf{x}}$ и является мощностью, если \mathbf{p} рассматривать как количество движения. Поэтому для минимизации функции Понтрягина ρ необходима максимальная энергия, и наоборот, когда ρ минимальна, H максимальна.

Функция Понтрягина ρ , определяемая выражением $\rho = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_f \rangle$, и граничные условия $p_i(t_f) = -b_i$ справедливы для процессов управления с произвольным конечным состоянием. Если же на конечное состояние накладываются ограничения вида

$$R_k(\mathbf{x}_f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4.3.8)$$

то функция Понтрягина принимает вид

$$\rho = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_f + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}_f),$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – векторный множитель Лагранжа.

В этом случае канонические уравнения Гамильтона подчинены граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ p_i(t_f) &= - \left[b_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

При этом конечные условия для x_f удовлетворяют ограничениям (4.3.8).

Пример 4.3.1. Определим оптимальное управление линейным объектом первого порядка

$$\dot{x} = -ax + \gamma u ,$$

где a и γ – некоторые положительные константы.

Критерий качества – квадратичный

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(u, t) dt ,$$

а управление ограничено $|u| \leq M$.

Перейдём к обобщённой задаче оптимального управления. Для этого обозначим $x_1 = x$ и введём дополнительную компоненту вектора состояния

ния $x_2 = \int_{t_0}^t x_1^2 dt$. Тогда уравнения динамики будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma u, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2. \end{aligned}$$

В связи с тем, что минимизировать теперь требуется $x_2(t_f)$, функция Понтрягина определится выражением

$$\rho = b_1 x_1 + b_2 x_2 = x_2 ,$$

где $b_1=0, b_2=1$.

Составим функцию Гамильтона для данной системы

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1(-ax_1 + \gamma u) + p_2 x_1^2.$$

Принцип максимума требует, чтобы управление u обеспечивало бы максимум функции Гамильтона. Из вида функции Гамильтона следует, что максимальное значение она будет принимать тогда, когда знак управления u будет совпадать со знаком p_1 , а абсолютное значение u будет максимальным, то есть M . Таким образом, общий характер оптимального управления установить довольно просто

$$u^\circ = M \operatorname{sign} p_1, \quad (4.3.9)$$

где знаковая функция

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha = 0, \\ -1 & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + \gamma u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \end{cases} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = ap_1 - 2x_1 p_2, \\ \dot{p}_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Начальные условия для вектора состояния \mathbf{x}

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = 0,$$

конечные условия для вектора \mathbf{p}

$$p_1(t_f) = -b_1 = 0, p_2(t_f) = -b_2 = -1.$$

Поскольку $\dot{p}_2 = 0$, а $p_2(t_f) = -1$, то $p_2(t) = \text{const} = -1$. Подставляя оптимальное управление в канонические уравнения, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + \gamma M \text{sign } p_1, \\ \dot{p}_1 &= ap_1 + 2x_1, \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

с граничными условиями $x_1(t_0) = x_0$ и $p_1(t_f) = 0$.

По сути, мы получили двухточечную краевую задачу. Решение нелинейных уравнений (4.3.10) при заданных граничных условиях даст уравнение линии переключения $p_1(t)$, и, в соответствии с (4.3.9) – оптимальное управление u° . Процедура решения заключается в выборе наугад значения $p_1(t_0) = p_0$ и в определении, после некоторых проб и ошибок, функций $x_1(t)$ и $p_1(t)$, удовлетворяющих другому граничному условию $p_1(t_f) = 0$. Моделирование уравнений (4.3.10) приведено на рис. 4.3.

Нужно отметить, что закон управления не может быть выражен в виде аналитической функции координат системы.

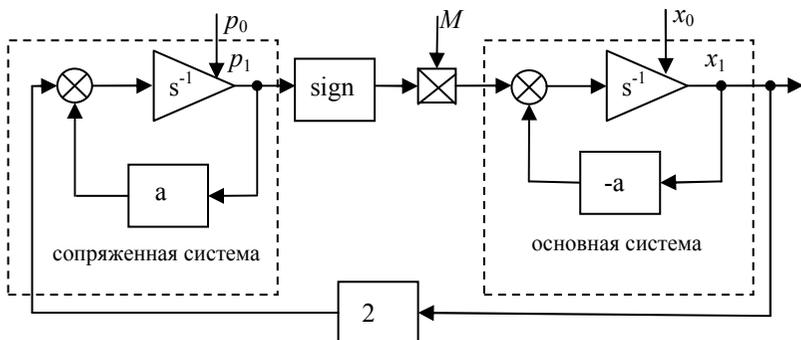


Рис. 4.3. Моделирование оптимального управления

Сделаем некоторые выводы, касающиеся принципа максимума.

1. Разные задачи оптимального управления можно привести к обобщённой задаче оптимального управления по отношению к переменным состояния. При этом применяется процедура инвариантного увеличения размерности пространства состояний.
2. В общем случае метод максимума дает необходимые условия экстремума, однако, если процесс линейный, то этот метод дает ещё и достаточные условия.
3. Применение принципа максимума приводит к тем же трудностям, что и классическое вариационное исчисление, то есть к необходимости решения двухточечной краевой задачи.
4. Принцип максимума можно применять не только системам без ограничений; его применение предполагает наличие физических ограничений на управляемый процесс и на управляющие воздействия.

5. Несмотря на необходимость решения двухточечной краевой задачи, метод максимума позволяет определить характерные черты и общую структуру системы оптимального управления.

4.4. Динамическое программирование

Из вышеизложенного ясно, что проблемы оптимизации сводятся к решению двухточечной краевой задачи. Эффективным методом решения такого рода задач является разработанный Ричардом Беллманом и его сотрудниками метод, названный ими динамическим программированием. Идея этого метода является выражением концепции инвариантного вложения, согласно которой исходная проблема заменяется рядом более простых проблем.

4.4.1. Многошаговые процессы управления

Пусть объект управления задан n -мерным вектором состояния \mathbf{x} . Разделим весь процесс управления на N шагов. На первом шаге объект преобразованием $\mathbf{x}_2 = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)$ переводится из состояния \mathbf{x}_1 в состояние \mathbf{x}_2 и выигрыш от этой операции равен $R_1 = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)$. Задача состоит в определении управления \mathbf{u}_1 , максимизирующего R_1 . Полученное решение можно назвать одношаговой стратегией оптимального управления. Ясно, что решение одношаговой проблемы элементарно. Максимальный выигрыш при этом даётся выражением

$$R_1^*(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1),$$

а решение, доставляющее максимум выигрыша, является оптимальным решением или оптимальной стратегией управления.

Перейдём ко второму шагу. Он преобразованием $\mathbf{x}_3 = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)$ переводит достигнутое в результате первого шага состояние \mathbf{x}_2 в состояние \mathbf{x}_3 . Два шага дают полный выигрыш $R_2 = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + r(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)$. Теперь задача состоит в определении последовательности управлений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, доставляющих максимум суммарному выигрышу. Таким образом получаем двухшаговую стратегию. Максимальный выигрыш получим путём определения максимума уже по двум функциям, и равен он будет

$$R_2^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} [r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + r(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2)].$$

Понятно, что двухшаговая задача является более сложной, чем одношаговая.

Сложность стремительно возрастает с увеличением количества шагов. Для N -шагового процесса задача состоит в выборе N -шаговой стратегии $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$, доставляющей максимум общему выигрышу

$$R_N = \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k). \text{ Максимальный выигрыш определится выражением}$$

$$R_N^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\{\mathbf{u}_k\}} \sum_{k=1}^N r(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k),$$

где максимум берётся по управлениям на всех N шагах.

Определение максимума на основе известных элементарных методов приводит к системе из N уравнений, которые получаются приравниванием нулю частных производных по \mathbf{u}_k от $R_N^\circ(\mathbf{x}_1)$ ($k=1, 2, \dots, N$).

Очевидно, что в случае большого N решение проблемы оптимизации становится чрезвычайно громоздким и поэтому решение задачи «в лоб» нереально.

4.4.2. Принцип оптимальности

Задача определения N -шаговой оптимальной стратегии может быть облегчена на основе применения фундаментального принципа динамического программирования – принципа оптимальности: оптимальная политика или оптимальная стратегия управления обладает свойством, что какое бы ни было начальное состояние или начальное решение, последующее решение должно быть оптимальной стратегией по отношению к состоянию, возникшему в результате первого решения.

Проиллюстрировать принцип оптимальности можно с применением понятия пространства состояний. Пусть имеется оптимальная траектория в пространстве состояний объекта, переводящая изображающую точку $\mathbf{x}(t_0)$ в точку $\mathbf{x}(t_f)$ (рис. 4.4). Оптимальность траектории означает, что

некоторый критерий оптимальности $R = \int_{t_0}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ принимает экстремальное (предположим для определённости максимальное) значение.

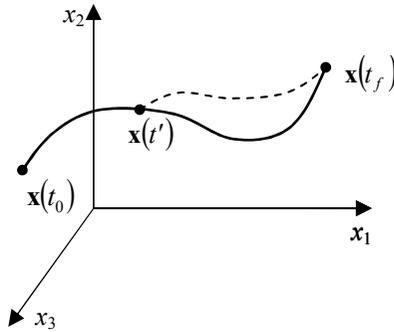


Рис. 4.4. К принципу оптимальности.

Принцип оптимальности гласит, что любая конечная часть оптимальной траектории является, в свою очередь, оптимальной траекторией. Это означает, что траектория от некоторой промежуточной точки $\mathbf{x}(t')$ до конечной точки $\mathbf{x}(t_f)$ является оптимальной, то есть обеспечивает максимум критерия $R' = \int_{t'}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$. Действительно, предположим, что это не так, а, следовательно, есть какая-то другая траектория (на рис. 4.4 показана штриховой линией), доставляющая максимум функционала R' . Но тогда и первоначальная траектория вопреки предположению не являлась оптимальной, поскольку критерий оптимальности, состоящий из суммы двух частей – максимальной на отрезке траектории от точки $\mathbf{x}(t_0)$ до точки $\mathbf{x}(t')$ и не максимальной – от точки $\mathbf{x}(t')$ до точки $\mathbf{x}(t_f)$, принимал бы не максимальное значение.

Изложенное выше справедливо, конечно, и для систем, в которых время разбито на дискретные шаги (этапы).

Таким образом, оптимальная стратегия зависит только от состояния объекта в рассматриваемый момент времени и не зависит от того как объект попал в это состояние, то есть не зависит от его предыстории.

Принцип оптимальности, описывающий основные свойства оптимальных стратегий, использует в качестве своей исходной точки концепцию инвариантного вложения, согласно которой решение исходной сложной задачи заменяется некоторым количеством аналогичных более простых задач.

Если речь идёт о многошаговых процессах оптимизации, то такой подход сводит исходную задачу к последовательному решению одношаговых процессов оптимизации. В многошаговом процессе оптимизации полных выигрыш для N шагов, согласно принципу оптимальности, можно представить в виде

$$R_N = r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + R_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1).$$

Первое слагаемое в этом выражении – начальный выигрыш, второе слагаемое – максимальный выигрыш от последующих $N-1$ шагов.

Максимальный выигрыш запишется как

$$R_N^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} (r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + R_{N-1}^\circ(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)). \quad (4.4.1)$$

Соотношение (4.4.1) справедливо для любых $N \geq 2$. Для $N=1$ получим, очевидно

$$R_1^\circ(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{u}_1} r(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1).$$

Таким образом, принцип оптимальности позволяет исходный N шаговый процесс заменить последовательностью одношаговых процессов и на каждом шаге использовать одно и то же рекуррентное соотношение (4.4.1).

Пример 4.4.1. Пусть требуется положительную величину c разделить на n частей так, чтобы их произведение было максимальным.

Обозначим через $R_n^\circ(c)$ максимальное значение произведения, x – первая часть, $(c-x)$ – оставшаяся часть. Тогда, используя соотношение (4.4.1), можно составить функциональное уравнение

$$R_n^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_{n-1}^\circ(c-x)\}, \quad n \geq 2. \quad (4.4.2)$$

Очевидно, что при $n=1$

$$R_1^\circ(c) = c \text{ и } R_1^\circ(c-x) = c-x.$$

Положим в уравнении (4.4.2) $n=2$:

$$R_2^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_1^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \{x(c-x)\}.$$

Максимум найти нетрудно, приравняв нулю производную по x от выражения в фигурных скобках. Этот максимум будет при $x = \frac{c}{2}$. Таким образом, оптимальная стратегия деления на две части – это деление на две **равные** части

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right\},$$

а максимальное значение произведения – $R_2^\circ(c) = \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Положим $n=3$. Максимальное произведение найдем из соотношения

$$R_3^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_2^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \left\{ \frac{x(c-x)^2}{4} \right\}.$$

Взяв производную и приравняв её нулю, получим $x = \frac{c}{3}$. Оставшаяся часть в $\frac{2}{3}c$, согласно предыдущему рассуждению, оптимально будет разделена на две равные части, то есть на $\frac{c}{3}$ и $\frac{c}{3}$.

Оптимальное деление на три части будет, таким образом

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3} \right\},$$

а максимальное произведение равно

$$R_3^\circ(c) = \left(\frac{c}{3}\right)^3.$$

Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводу, что при $n=k$ оптимальным делением будет деление на k равных частей

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{k}, \frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k} \right\},$$

а максимальное произведение будет

$$R_k^\circ(c) = \left(\frac{c}{k} \right)^k.$$

Методом математической индукции можно доказать, что оптимальным делением будет деление на равные части и при $n=k+1$. Действительно, полагая $n=k+1$, из соотношения (4.4.2) получим

$$R_{k+1}^\circ(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \{x \cdot R_k^\circ(c-x)\} = \max_{0 \leq x \leq c} \left\{ \frac{x(c-x)^k}{k^k} \right\}.$$

Путём простейших вычислений получаем оптимальное значение $x = \frac{c}{k+1}$, оптимальную стратегию деления $\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{k+1}, \frac{c}{k+1}, \dots, \frac{c}{k+1} \right\}$ и

максимальное произведение $R_{k+1}^\circ(c) = \left(\frac{c}{k+1} \right)^{k+1}$.

Окончательно, оптимальная стратегия деления на n частей

$$\{u_i\} = \left\{ \frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n} \right\},$$

и максимальное произведение равно

$$R_n^{\circ}(c) = \left(\frac{c}{n}\right)^n.$$

Задача, рассмотренная в данном примере, очень простая и она могла быть решена обычными методами. Но этот пример имел целью показать, каким образом данная задача может быть сформулирована как многошаговый процесс оптимизации. Во многих более сложных задачах подобная формулировка часто является ключом к их решению при применении метода динамического программирования.

4.4.3. Дискретный вариант метода динамического программирования

Начать рассмотрение метода динамического программирования проще с дискретного варианта процесса, подлежащего оптимизации.

Пусть имеются дискретные возможные значения $x \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$.

Время также течет дискретно, шагами $t = kT$.

Ставится задача из начального состояния $x(k_0)$ перейти в заключительное состояние $x(k_f)$ с минимальным показателем качества

$$R(x(k_0), u(k), k_0) = T \sum_{k=k_0}^{k_f} r(x(k), u(k), k), \quad (4.4.3)$$

то есть найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $x(k_0)$ и точку $x(k_f)$.

В критерии (4.4.3) $r(x(k), u(k))$ – потери от сделанного k -го шага. Например, это могут быть затраты энергии или штраф на k -м шаге.

Поскольку на каждом шаге (а таких шагов $N = k_f - k_0$) состояние объекта принимает только одно из l значений, то число возможных траекторий конечно и равно l^N , и, в принципе, оптимальную траекторию можно было бы найти простым перебором. Однако в реальных случаях это потребовало бы непомерно большого объема вычислений. Метод динамического программирования позволяет резко сократить объем вычислительной работы.

Возьмём некоторую промежуточную точку k_j . Показатель качества R на интервале от k_j до k_f определяется состоянием объекта $x(k_j)$ и управляющими воздействиями $u(k)$ при $k_j \leq k \leq k_f$:

$$R(x(k_j), u(k), k_j) = T \sum_{k=k_j}^{k_f} r(x(k), u(k), k). \quad (4.4.4)$$

Принцип оптимальности означает, что если выражение (4.4.3) минимально, то часть (4.4.4) также должна быть минимальной. Более того, оптимальная стратегия управления $u^\circ(k)$ на интервале (k_j, k_f) является только функцией состояния $x(k_j)$, то есть $u^\circ(k) = g_k(x(k_j))$. Поэтому оптимальное значение критерия (4.4.4) является лишь функцией состояния $x(k_j)$ и самого k_j :

$$R^\circ(x(k_j), k_j) = \min_{u(k)} \sum_{k=k_j}^{k_f} Tr(x(k), u(k), k). \quad (4.4.5)$$

Очевидно, что при $k_j = k_f$ $R^\circ(x(k_f), k_f) = 0$. Приняв это граничное условие за исходное, можно воспользоваться уравнением (4.4.5) для вычисления $u^\circ(k)$ при попятном движении от $k = k_f$ до $k = k_0$.

Действительно, на шаге $k_f - 1$ находим управление $u^\circ(k_f - 1)$, соответствующее минимальному значению R , то есть, определяем и запоминаем $R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1)$, которое будет являться функцией значения x в начале последнего шага. Поиск минимума при этом ведётся только по одной переменной $u(k_f - 1)$

$$R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1) = \min_{u(k)} Tr(x(k_f - 1), u(k_f - 1), k_f - 1).$$

Важно отметить, что и $u^\circ(k_f - 1)$, и значение R° зависят от $x(k_f - 1)$.

Переходим к шагу $k_f - 2$. Оптимальной стратегией будет $\{u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}$, соответствующая

$$R^\circ(x(k_f - 2), k_f - 2) = \min_{\substack{u(k_f - 1) \\ u(k_f - 2)}} Tr\{r(x(k_f - 2), u(k_f - 2), k_f - 2) + r(x(k_f - 1), u(k_f - 1), k_f - 1)\} = \\ \min_{u(k_f - 2)} Tr\{r(x(k_f - 2), u(k_f - 2), k_f - 2) + R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1)\}$$

Минимизировать приходится всё выражение в фигурных скобках, поскольку само значение $x(k_f - 1)$ зависит от $u^\circ(k_f - 2)$. Минимизация опять осуществляется только по одной переменной, теперь уже по $u^\circ(k_f - 2)$. В результате получаем оптимальное управление

$\{u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}$, значение $x(k_f - 1)$ в конце предпоследнего шага и величину $R^\circ(x(k_f - 2), k_f - 2)$ как функцию $x(k_f - 2)$. Заносим её в память вместо $R^\circ(x(k_f - 1), k_f - 1)$.

Далее процесс повторяется до тех пор, пока мы не придём в точку, соответствующую $k = k_0$. А значения $x(k_0)$ нам известно! Таким образом, определится стратегия оптимального управления

$$\{u^\circ(k_0), u^\circ(k_0 + 1), \dots, u^\circ(k_f - 2), u^\circ(k_f - 1)\}.$$

При получении оптимальной стратегии для вычисления $R^\circ(x(k_f - i), k_f - i)$ для каждого узла в момент времени $(k_f - i)T$ необходимо хранить временно в памяти ЦВМ $R^\circ(x(k_f - i + 1), k_f - i + 1)$ для момента времени $(k_f - i + 1)T$.

Поскольку $R^\circ(x(k_j), k_j)$ не зависит от управления u , уравнение (4.4.5) можно переписать в виде

$$\min_{u(k)} \left\{ Tr(x(k_j), u(k_j), k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_f} Tr(x(k), u(k), k) - R^\circ(x(k_j), k_j) \right\} = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно условию

$$\min_{u(k)} \left\{ r(x(k_j), u(k_j), k_j) + \frac{R^\circ(x(k_j + 1), k_j + 1) - R^\circ(x(k_j), k_j)}{T} \right\} = 0. \quad (4.4.6)$$

4.4.4. Уравнения Беллмана и Гамильтона–Якоби

При определённых ограничениях в условии (4.4.6) можно период квантования $T \rightarrow 0$, и тогда получим непрерывный аналог этого уравнения

$$\min_{u(t)} \left\{ r(x(t), u(t), t) + \frac{dR^\circ(x(t), t)}{dt} \right\} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (4.4.7)$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0; R^\circ(x(t_f), t_f) = 0$.

Данное уравнение известно как уравнение Беллмана.

В общем случае состояние объекта задано вектором $\mathbf{x}(t)$, управляющее воздействие также вектор $\mathbf{u}(t)$, и уравнение Беллмана приобретает вид

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{dR^\circ(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right\} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (4.4.8)$$

Возьмём полную производную по времени от второго слагаемого в фигурных скобках

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R^\circ}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right\} = 0.$$

Учитывая уравнения динамики объекта $\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и независимость $\frac{\partial R^\circ}{\partial t}$ от управления \mathbf{u} , получим уравнение Беллмана в виде

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ, \mathbf{f} \rangle \right\}. \quad (4.4.9)$$

Введя обозначение $\mathbf{p} = \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ$ для обобщённого вектора количества движения и $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle + r$ для функции Гамильтона, выражение (4.4.9) превратим в уравнение

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t).$$

Подставив в полученное уравнение оптимальное управление $\mathbf{u}^\circ(t)$ и оптимальную траекторию $\mathbf{x}^\circ(t)$, получим классическое уравнение Гамильтона–Якоби

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = H(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{p}, t),$$

дополненное условием

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ r(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ, \mathbf{f} \rangle \right\}. \quad (4.4.10)$$

Условие (4.4.10) обеспечивается, если приравнять нулю производную по \mathbf{u} от выражения в фигурных скобках

$$\text{grad}_{\mathbf{u}} r + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ, \mathbf{f} \rangle = 0. \quad (4.4.11)$$

Итак, в случае непрерывных систем с уравнениями объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

и интегральным критерием

$$R = \int_{t_0}^{t_f} r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

принцип динамического программирования приводит к уравнению Беллмана

$$r(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ, t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} R^\circ, \mathbf{f} \rangle = 0,$$

где $R^\circ = \min R$, а \mathbf{u}° и \mathbf{x}° - оптимальное управление и оптимальная траектория движения объекта соответственно, дополненное уравнением (4.4.11) относительно R° .

В простейшем случае, когда имеется система первого порядка и скалярное управление, уравнение объекта имеет вид $\dot{x} = f(x, u)$. Уравнение Беллмана в этом случае будет

$$r(x^\circ, u^\circ, t) + \frac{\partial R^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} \cdot f = 0, \quad (4.4.12)$$

а необходимое условие минимума критерия

$$\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial R^\circ}{\partial x} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial R^\circ}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} = P(x, u). \quad (4.4.13)$$

Подставляя выражение (4.4.13) в уравнение (4.4.12) и решая последнее относительно $\frac{\partial R^\circ}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = -r + f \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} = Q(x, u). \quad (4.4.14)$$

Продифференцируем уравнение (4.4.13) по t , а уравнение (4.4.14) – по x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^\circ}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \frac{\partial^2 R^\circ}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Приравняв правые части полученных выражений, получим уравнение относительно оптимального управления

$$\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + f \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

где P и Q определяются выражениями (4.4.13) и (4.4.14) соответственно.

Пример 4.4.2. Рассмотрим тот же линейный объект, что и в примере 4.3.1. Уравнение объекта

$$\dot{x} = -ax + \gamma u ,$$

где a и γ – некоторые положительные константы.

Критерий качества – квадратичный

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(u, t) dt ,$$

а управление ограничено $|u| \leq M$.

Введём функцию $R^\circ(x, t) = \min_u \int_t^{t_f} x^2 dt$. Тогда из формулы (4.4.9) следует

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = \min_u \left\{ r(x, u) + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} f \right\} = \min_u \left\{ x^2 + \frac{\partial R^\circ}{\partial x} (-ax + \gamma u) \right\} .$$

Из выражения в фигурных скобках видно, что его минимум будет в том случае, если знак управления противоположен знаку $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, а абсолютное значение – максимально, то есть если

$$u = -M \operatorname{sign} \frac{\partial R^\circ}{\partial x} .$$

Оптимальное управление, таким образом, будет релейным $u = \pm M$ в соответствии со знаком функции $\frac{\partial R^\circ}{\partial x}$, удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$-\frac{\partial R^\circ}{\partial t} = x^2 - ax \frac{\partial R^\circ}{\partial x} - \gamma M \left| \frac{\partial R^\circ}{\partial x} \right|$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0; R^\circ(x, t_f) = 0$.

Как видно, сравнительно легко устанавливается общий характер оптимального управления, однако определение линии переключения – отнюдь не простая задача. Аналитическое решение подобного рода задач возможно только в исключительных случаях и приходится прибегать к численным методам.

Сформулируем некоторые выводы.

1. Метод динамического программирования приводит к необходимости решения уравнения Беллмана или Гамильтона–Якоби.
2. Для решения уравнений Гамильтона–Якоби можно воспользоваться методами, описанными в стандартных учебниках классической механики и курсах прикладной математики для некоторых частных случаев.
3. В общем случае нет метода, позволяющего определить R° и u° в аналитическом виде. Для решения же задач численными методами требуется объем вычислений, затруднительный даже для современных ЦВМ.

4. В процессе решения задач оптимизации управление определяется как функция координат состояния объекта, что облегчает синтез замкнутых САУ.
5. Метод динамического программирования применим как для равномерно оптимальных, так и для статистически оптимальных САУ.
6. Решение задач оптимального управления методом динамического программирования приводит к получению оптимизирующих функций R° , являющихся одновременно функциями Ляпунова для замкнутых систем. Таким образом, соответствующее этим функциям оптимальное управление \mathbf{u}° и реализующие это управление регуляторы обеспечивают не только минимальное значение критериев качества, но и устойчивость замкнутой системы.
7. Метод динамического программирования даёт физически прозрачные результаты и напрямую направлен на решение задач оптимизации с помощью ЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпов А.Г.* Математические основы теории систем. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 138 с.
2. *Карпов А.Г.* Цифровые системы автоматического управления (Основы теории): Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 288 с.
3. *Решетникова Г.Н.* Моделирование систем: Учебное пособие. – Томск: Томск. гос. ун-т сист. упр. и радиоэлектроники, 2005. – 261 с.
4. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. М.: «Наука», 1971. – 744 с.
5. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1965, 207 с.
6. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления. Л.: «Энергия», 1975. – 416 с.
7. *Карпов А.Г.* Теория автоматического управления. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТМЛ-Пресс, 2011. – 212 с.
8. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под ред. Бесекерского В.А. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Учебное издание

Александр Георгиевич Карпов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Часть 2

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции
Верстка макета и обложки В.К. Савицкого

Подписано к печати 29.01.2012. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Ризография. Гарнитура «Times».
Усл. п. л. 15,35. Уч.-изд. л. 14,6. Тираж 100 экз.

ООО «Издательство ТМЛ-Пресс»
634050, г. Томск, ул. Советская, 33,
Тел. (382-2)-52-87-15

Отпечатано на оборудовании
Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40