

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ В УПРАВЛЕНИИ
И ПРОЕКТИРОВАНИИ

А.Г. Карпов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Часть 1

Учебное пособие

Томск – 2011

УДК 519.71(075.9); 681.5

К26 **Карпов А.Г.** Теория автоматического управления. Часть 1:
Учебное пособие. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2011. – 212 с.

ISBN 978-5-9130-2131-1

В учебном пособии изложены основы классической теории автоматического управления и элементы современной теории управления. В первой части приведено математическое описание, основы анализа и синтеза линейных систем автоматического управления.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов, бакалавров и магистров «Управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника», а также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, аспирантами и инженерами.

УДК 519.71(075.9); 681.5

Рецензент: зав. каф. Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, профессор **А.Г. Гарганеев**

ISBN 978-5-9130-2131-1

© А.Г.Карпов, макет, 2011
© Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
1. ВВЕДЕНИЕ.....	7
1.1. Краткая история возникновения и развития ТАУ	7
1.2. Основные понятия и определения. Место ТАУ в системе наук об управлении	11
1.3. Классификация САУ.....	15
1.4. Общая характеристика процессов в САУ.....	24
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ САУ.....	28
2.1. Постановка задачи. Разбиение системы на звенья	28
2.2. Уравнения и характеристики звеньев	29
2.2.1. Уравнения звеньев. Линеаризация.....	29
2.2.2. Временные характеристики.....	37
2.2.3. Частотные характеристики	47
2.2.4. Соединения звеньев	52
2.2.5. Типовые звенья	56
2.3. Классическое (частотное) описание САУ	67
2.3.1. Структурный анализ САУ.....	67
2.3.2. Уравнения и передаточные функции одноконтурной САУ	71
2.3.3. Линейные законы регулирования.	76
2.4. Описание САУ в пространстве состояний	78
2.4.1. Уравнения состояния.....	79
2.4.2. Стандартная форма уравнений состояния	80
2.4.3. Нормальная (каноническая) форма уравнений состояния	82
2.4.4. Взаимосвязь классического (частотного) и векторно- матричного описания САУ	83
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ.....	86
3.1. Понятие устойчивости.....	86

3.1.1.	Определение устойчивости.....	86
3.1.2.	Необходимое и достаточное условие устойчивости.....	88
3.1.3.	Устойчивость и уравнения состояния.	94
3.2.	Алгебраические критерии устойчивости.....	95
3.2.1.	Необходимый критерий устойчивости.....	95
3.2.2.	Устойчивость систем третьего порядка.	97
3.2.3.	Критерий Гурвица.....	99
3.2.4.	Критерий Рауса	101
3.3.	Частотные критерии устойчивости	103
3.3.1.	Критерий Михайлова.....	103
3.3.2.	Критерий Найквиста.....	108
3.4.	D -разбиение	115
3.4.1.	Определение D -разбиения	115
3.4.2.	D -разбиение в области 1-го параметра.....	117
3.4.3.	D -разбиение в области 2-х параметров	122
4.	КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	124
4.1.	Оценки качества регулирования.....	124
4.2.	Точностные критерии качества	125
4.2.1.	Статический режим САУ	125
4.2.2.	Точность САУ при воздействии, меняющемся с постоянной m -ой производной	130
4.2.3.	Точность САУ при гармоническом воздействии	132
4.2.4.	Коэффициенты ошибок.....	134
4.3.	Качество переходных процессов.....	137
4.3.1.	Оценка качества по переходной характеристике	137
4.3.2.	Частотные критерии качества.....	140
4.3.3.	Корневые критерии качества.....	144
4.3.1.	Интегральные критерии	151
5.	ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	155

5.1.	Постановка задачи	155
5.2.	Повышение точности САУ	155
5.2.1.	Общие методы.....	155
5.2.2.	Теория инвариантности и комбинированное управление	160
5.2.3.	Неединичные обратные связи	166
5.3.	Улучшение качества процесса регулирования	169
5.3.1.	Последовательные корректирующие звенья.....	170
5.3.2.	Параллельные корректирующие звенья	174
5.3.3.	Обратные связи	177
5.4.	Методы повышения запаса устойчивости.....	178
5.5.	Методы синтеза САУ.....	181
5.5.1.	Корневой метод.....	181
5.5.2.	Метод корневых годографов	182
5.5.3.	Метод логарифмических амплитудных характеристик.....	183
5.6.	Синтез САУ в пространстве состояний.....	185
5.6.1.	Понятие управляемости и наблюдаемости систем	185
5.6.2.	Определение управляемости и наблюдаемости по уравнениям состояния.....	187
5.6.3.	Блочное разбиение системы	189
5.6.4.	Модальное управление.....	195
	ЛИТЕРАТУРА	200

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория автоматического управления (ТАУ) является одной из многих общепрофессиональных технических дисциплин, входящих под тем или иным названием во все программы инженерного образования. Основой ТАУ являются различные по идеям и методам исследования разделы высшей математики и физики, такие как дифференциальное и интегральное исчисление, теория функций комплексного переменного, теория матриц, теория оптимальных процессов, математическая логика, теория вероятности и случайные процессы, механика, электричество и магнетизм и др. Поэтому так важно перед изучением курса ТАУ повторить соответствующие разделы ранее изученных дисциплин «Математические основы теории систем» [1], «Основы теории цепей», «Теория вероятности, математическая статистика и случайные процессы», «Электроника и электротехника». Курс ТАУ предваряет изучение таких дисциплин как "Цифровые системы автоматического управления", "Технические средства автоматизации и управления", "Моделирование систем управления " и некоторые другие.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткая история возникновения и развития ТАУ

Ещё в стародавние времена первобытные люди пытались создать устройства, облегчающие им жизнь. Видимо, первыми автоматическими (то есть работающими без непосредственного участия человека) устройствами можно считать ловушки для охоты на диких животных.

Следующий этап развития человечества – рабовладельческое общество – характеризовался, с точки зрения развития автоматизации, появлением автоматов, предназначенных преимущественно для развлечения и потребностей культа. Эти устройства, объединяющие немалое количество элементов, были способны совершать сложные взаимосвязанные движения. В них получают дальнейшее развитие отдельные детали и элементы, которые использовались и в ловушках.

Очередной период истории – феодализм. Здесь широкое распространение получило производство часовых механизмов и мельниц. Изобретение таких элементов, как маятник, балансир, анкерный ход позволило создать достаточно точные для того времени часовые механизмы, а в мельницах уже действовали такие высокоавтоматизированные устройства, как просеивающий механизм и механизм потряски. В мельницах уже имелись все существенные элементы машин: двигатель (первоначально, конечно, водяной или ветряной), передаточный механизм, рабочая машина.

Промышленный переворот в Европе начался с изобретением паровых машин и таких устройств как суппорт и прядильный механизм, позволявших автоматизировать соответствующие рабочие процессы. Собственно, с этого момента стало возможным производство машин с помощью машин. Принцип действия паровой машины всем известен и понятно, что для нормальной её работы необходимо постоянное поступление воды в паровой котёл. Поэтому ясно, насколько был рад ленивый оператор паровой

машины после изобретения И.И.Ползуновым поплавкового регулятора уровня воды в котле. Принцип действия этого регулятора предельно прост и знаком каждому, кто хоть раз разобрал (или собрал) смывной бачок унитаза.

Следующее изобретение автоматического регулятора связано с необходимостью поддержания постоянной скорости вращения вала паровой машины в ткацком производстве, при металлообработке, в мукомольном производстве и проч. Это регулятор Уатта, который состоял из двух грузов, подвешенных на шарнирах вдоль вертикальной оси вала. Грузы системой рычагов связаны с заслонкой, перекрывающей отверстие, через которое поступает пар из котла в цилиндр паровой машины. Конструкция рычагов и заслонки была такой, чтобы сечение отверстия для прохода пара обеспечивало заданную скорость вращения вала. Если эта скорость увеличивалась, грузики под действием центробежной силы расходились, уменьшая через систему рычагов и заслонку поступление пара в цилиндр и тем самым уменьшая скорость вращения. Если скорость вращения по каким-либо причинам уменьшалась, то грузы опускались и передвигали заслонку таким образом, чтобы увеличить впуск пара в цилиндр. Таким образом, регулятор Уатта, заменяя человека, выполнял некоторую управляющую функцию «... если скорость машины больше требуемой, следует уменьшить впуск пара, если меньше, то впуск пара надо увеличить».

Перечислим в хронологическом порядке известные факты изобретения первых регуляторов: маятниковый регулятор хода часов (Х. Гюйгенс, 1675 г.), поплавковый регулятор уровня воды в котле паровой машины (И.И. Ползунов, 1765 г.), центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины (Дж. Уатт, 1784 г.), программное устройство управления ткацким станком с помощью перфокарты (Ж. Жаккар, 1808 г.), различные регуляторы (Ж. Понселе, братья Сименс, 1830 г.).

Простота принципа действия регулятора Уатта и широчайшее распространение паровых машин (достаточно сказать, что только в Англии в конце 19-го века было более 75 тысяч паровых машин) привели к большому разнообразию конструкций систем «паровая машина – регулятор Уатта». Опыт эксплуатации некоторых из таких систем был печальным: паровая машина выходила из-под контроля (говоря современным языком, система становилась *неустойчивой*). Поиск причин такого поведения машин и дал толчок к развитию теории автоматического управления.

Самой ранней дошедшей до нас печатной работой считается публикация Д.С. Чижова (1823 г.). Но на практику проектирования регуляторов эта работа особого влияния не оказала. Коренной же перелом в подходе к проблеме и к методологии исследований внесли три основополагающие работы: английского физика Дж. К.Максвелла (годы жизни 1831-79 гг.) «О регуляторах» (1868 г.) и русского учёного И.А. Вышнеградского (годы жизни 1832-95 гг.) «Об общей теории регуляторов» (1876 г.) и «О регуляторах прямого действия» (1877 г.). Дж. К.Максвелл и И.А. Вышнеградский рассмотрели паровую машину и регулятор как единую динамическую систему, обосновали общий методологический подход к исследованию систем различной физической природы, заложили основы теории устойчивости, установили ряд важных закономерностей регулирования по принципу обратной связи. Большой вклад в развитие теории автоматического регулирования внёс Н.Е. Жуковский, автор первого учебника «Теория регулирования хода машин» (1909 г.). Говоря об основоположниках ТАУ как науки, нельзя не упомянуть о работах словацкого теплотехника А. Стодолы (1859-1942 гг.) и русского математика А.А. Ляпунова (1857-1918 гг.). Более подробные сведения об основных вехах развития ТАУ и вкладе отечественных и зарубежных ученых в теорию и практику автоматического управления можно найти в [2].

Историю развития ТАУ можно условно поделить на два этапа:

1) классический (с начала 70-х годов 19-го века – до 40-х годов 20-го века),

2) современный (с 50-х годов 20-го века по настоящее время).

Исторически первой была поставлена простейшая задача управления, состоящая в поддержании заранее заданных, постоянных во времени значений выхода объекта при изменяющихся возмущениях, действующих на него. Начальный этап развития ТАУ характеризовался детерминистским подходом к постановке и решению задач управления.

Бурное и интенсивное развитие получила теория автоматического управления после второй мировой войны. Это обусловлено возникновением и развитием космической и ракетной техники, появлением и стремительным совершенствованием электронно-вычислительных машин, средств современной связи, радиоэлектроники и использованием ядерной энергии.

Теория автоматического управления на всех этапах своего развития с одной стороны опиралась на строгие математические методы изучения процессов управления и проектирования систем управления, а с другой стороны, сама стимулировала развитие этих методов. Отдельные разделы математики были вызваны к жизни потребностями теории управления. Такой симбиоз дал замечательные результаты, и в настоящее время буквально все окружающие нас технические устройства содержат то или иное количество автоматических регуляторов. Автопилот, система самонаведения ракеты на цель, стабилизатор напряжения, автоматическая регулировка усиления в телевизионных и радиоприёмниках, станки с числовым программным управлением, система стабилизации скорости вращения диска винчестера в компьютерах, термостат холодильника и т.д. и т.п. – это всё примеры систем автоматического управления (САУ).

1.2. Основные понятия и определения. Место ТАУ в системе наук об управлении

Прежде всего, нужно договориться, что такое управление. **Управление каким-либо объектом – это воздействие на него с целью обеспечения требуемого течения процессов в нём и (или) требуемого изменения его состояния.**

Вообще говоря, наука, которая занимается проблемами управления – это **кибернетика**. Более конкретно, кибернетика – наука об общих закономерностях процессов управления – основывается на изучении объектов управления при внешних воздействиях, получении информации о протекании процессов в этих объектах и выработки управляющих воздействий, обеспечивающих оптимальное в определённом смысле состояние объектов.

Всю кибернетику условно можно разделить на **теоретическую кибернетику** и **прикладную кибернетику** (рис. 1.1).

Предметом рассмотрения теоретической кибернетики являются алгоритмические языки, теория алгоритмов, теория идентификации, искусственный интеллект и т.п.

Объектами управления могут быть: живые организмы, коллективы людей, производственные предприятия, цехи, производственные процессы, отдельные станки, машины, технические устройства и т.д. В соответствии с этим прикладную кибернетику можно разделить на биокибернетику, кибернетику организационных систем, техническую кибернетику и т.д. Разделами технической кибернетики являются теория информационных устройств и теория автоматического управления. Теория информационных устройств связана со сбором, переработкой и передачей информации, необходимой для управления техническими объектами человеком. Теория автоматического управления занимается управлением техническими устройствами без непосредственного участия человека.



Рис. 1.1. Место ТАУ в системе наук об управлении

Таким образом, управление без участия человека называется автоматическим, а автоматическое управление техническими объектами есть предмет рассмотрения ТАУ.

Для реализации автоматического управления необходимо иметь то, чем управляют, то есть объект управления, и то, что управляет, то есть автоматическое управляющее устройство (УУ) или регулятор. Совокупность управляемого объекта и регулятора называют системой автоматического управления (САУ) или автоматической системой управления.

Состояние объекта определяется рядом величин, характеризующих как воздействие на объект внешней среды и управляющих устройств, так и протекание процессов внутри самого объекта. Одни из этих величин изме-

ряются в процессе управления и называются контролируемыми. Другие, влияющие на режим работы объекта, не измеряются и называются неконтролируемыми. Какие из величин должны быть контролируемые, а какие неконтролируемые, зависит от цели управления.

Физическая величина, подлежащая управлению (напряжение, скорость, угловое положение, температура, давление и т.д.), называется управляемой величиной Y . В САУ действует много воздействий, основные из которых: управляющее воздействие U , возмущающее воздействие F и задающее воздействие G (рис. 1.2).

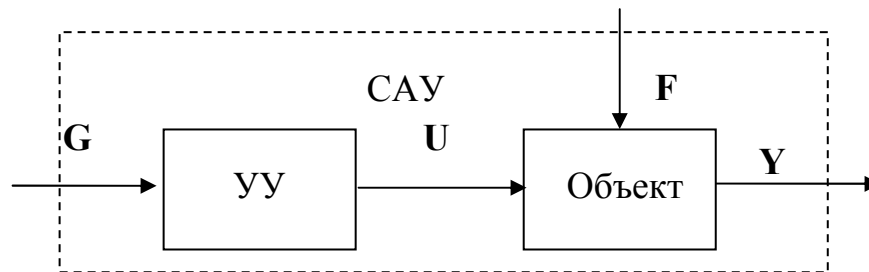


Рис. 1.2. Функциональная схема САУ

Понятие "воздействие" при решении задач управления рассматривается только в информационном смысле.

Возмущающее воздействие вызывает нежелательные, а часто и непредсказуемые отклонения управляемой величины. Это шумы или помехи, которые могут быть либо внешними, либо внутренними.

Задающее воздействие поступает на вход управляющего устройства и является заранее предусмотренным воздействием. Это команда, приказ УУ, согласно которому по определённому алгоритму последнее осуществляет управляющее воздействие на объект.

Все вышперечисленные воздействия могут быть как скалярными, так и векторными величинами.

В состав УУ могут входить измерительный элемент (чувствительный элемент или датчик Д) и исполнительное устройство (исполнительный механизм ИМ) (рис. 1.3). Задача датчика – преобразование поступающей

на его вход информации в форму, удобную для дальнейшей переработки

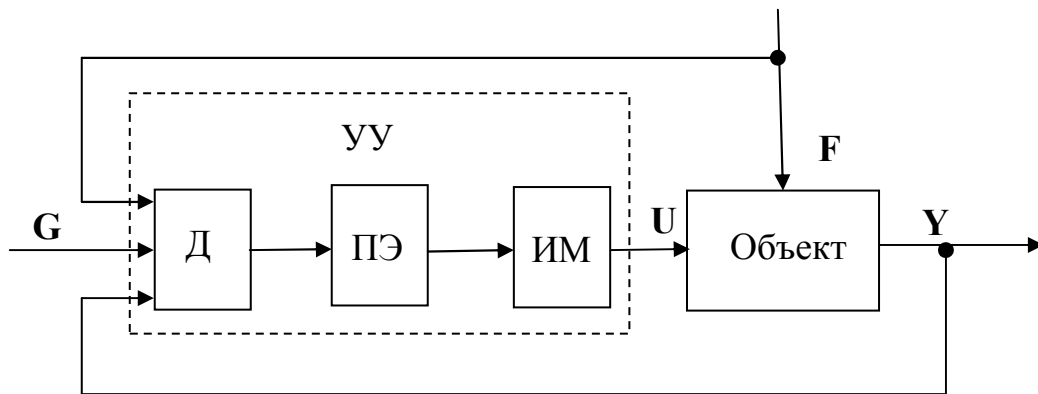


Рис. 1.3. Уточнённая функциональная схема

(обычно в сигнал в виде тока или напряжения). Существует громадное множество различных видов и типов датчиков: датчики положения, скорости, ускорения, температуры, давления и т.д. В общем случае, как это будет ясно из дальнейшего изложения, на вход датчиков может поступать также информация о возмущающих воздействиях и об управляемой величине. Это также отражено на рис.1.3.

Исполнительный механизм предназначен для непосредственного воздействия на объект, например, в случае автопилота – это электроприводы элеронов самолёта.

Между датчиком и исполнительным устройством могут находиться элементы (усилители, вычислители, преобразователи и т.п.), которые называются промежуточными (ПЭ). По сути, промежуточные элементы реализуют требуемый закон регулирования (о законах регулирования речь будет идти дальше). В простейшем случае ПЭ осуществляют простые математические операции, такие, как операция сравнения (вычисление разности $G-Y$), операции интегрирования, дифференцирования, статического нелинейного преобразования и т.п. В более сложных случаях в составе ПЭ может быть ЭВМ или даже комплекс ЭВМ.

1.3. Классификация САУ

Классифицировать САУ можно по разным признакам.

С точки зрения общности классификации наиболее удобным классификационным признаком можно, видимо, считать использование информации об управляемом объекте. Различают два вида такой информации: априорная и рабочая.

Необходимой априорной информацией называется совокупность сведений об объекте и управляемом процессе, требуемая для построения и функционирования данной САУ. Априорная информация может быть полной или неполной. Точное знание характеристик управляемого процесса и управляемого объекта назовём полной информацией. Необходимость полной начальной информации присуща широкому, наиболее старому и хорошо разработанному классу систем – обыкновенным системам (рис.1.4).

Если априорная информация неполная, то получаем класс систем под общим названием адаптивные (самоприспосабливающиеся) системы. Последние делятся в свою очередь на экстремальные системы, системы с самонастройкой параметров или самонастраивающиеся, и самоорганизующиеся системы или системы с переменной структурой.

Экстремальные системы – это системы, поддерживающие в процессе управления экстремум (максимум или минимум) некоторого функционала. В подобных системах есть формирова́тель функционала, или сам объект имеет экстремальную характеристику. Понятно, что в экстремальных системах исходная информация является неполной: известно, что есть экстремум, но его координаты неизвестны.

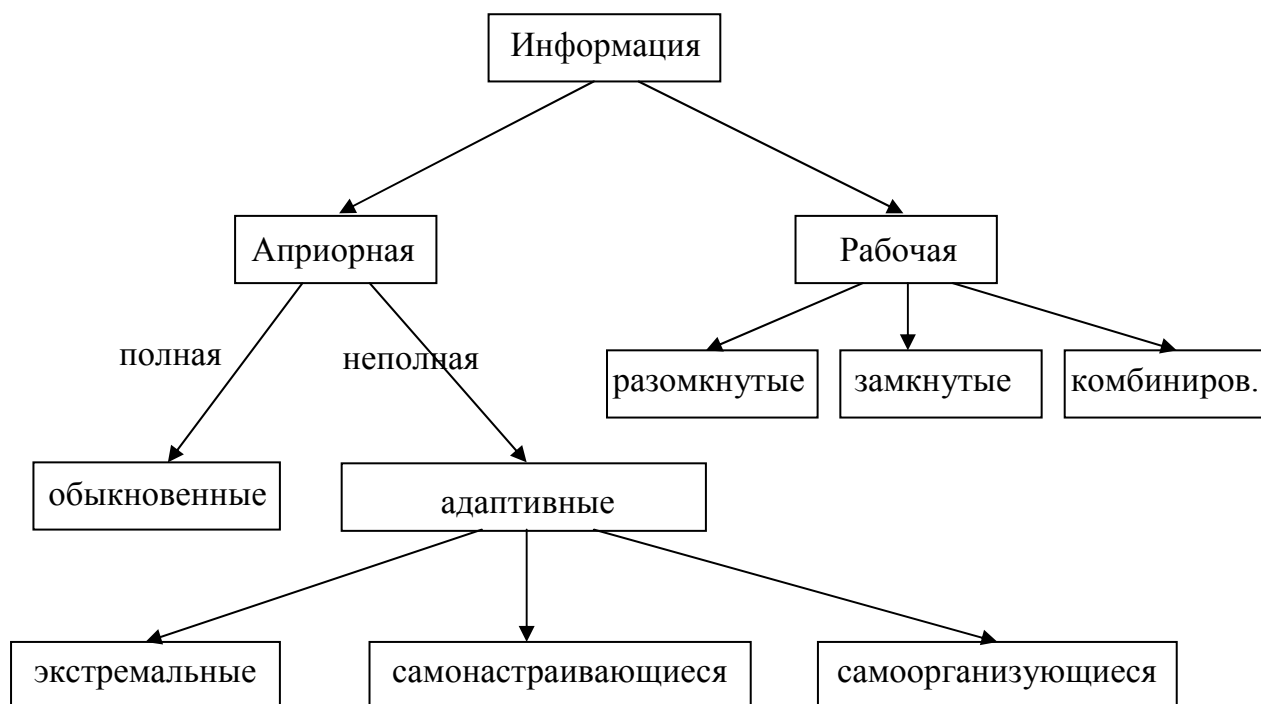


Рис. 1.4. Классификация САУ по использованию информации об объекте.

Если параметры объекта известны не точно или могут меняться в процессе работы в некоторых пределах, то для поддержания постоянным некоторого желаемого качества работы системы необходимо подстраивать параметры УУ. В этом случае мы приходим к системам с самонастройкой параметров. При этом в системе должен быть анализатор качества работы объекта по какому-нибудь заданному критерию. Этот анализатор (А) определяет отклонение качества работы системы от требуемого качества и передаёт соответствующий сигнал на настраивающее устройство (НУ), которое меняет параметры УУ в нужную сторону, чтобы ликвидировать нежелательное ухудшение качества работы системы. Таким образом, функциональную схему самонастраивающейся системы можно изобразить рисунком 1.5.

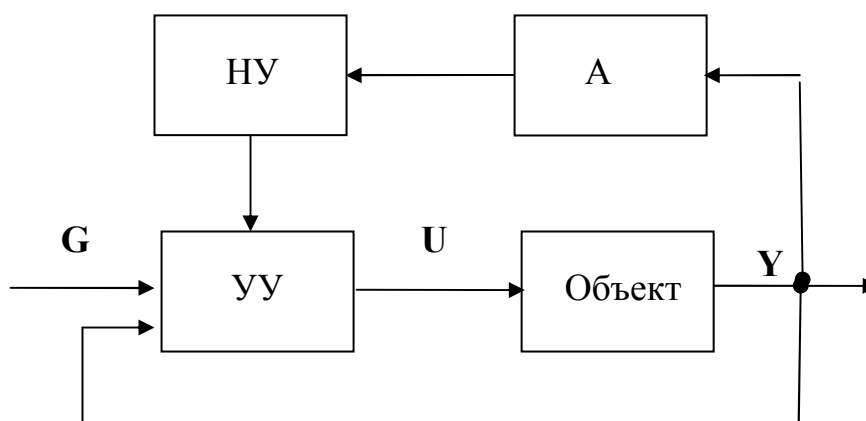


Рис. 1.5. Система с самонастройкой параметров.

Дальнейшим развитием этого вида систем являются оптимальные системы с самонастройкой параметров. В этом случае анализатор заменяется оптимизатором. Если задачей обычной самонастраивающейся системы было *сохранение* заданного качества, то задача оптимизатора – настраивать параметры УУ так, чтобы получать *максимальное* качество.

Целесообразно иногда задачи самонастройки и некоторые новые задачи решать не путём изменения параметров УУ, а путём изменения структуры УУ. В этом случае мы приходим к самоорганизующимся системам, то есть к системам с автоматическим изменением структуры УУ не заранее заданным образом.

По типу использования рабочей информации или по принципу управления САУ делятся на разомкнутые, замкнутые и комбинированные системы.

В разомкнутой системе применяется принцип управления по задающему воздействию, то есть работа всех элементов однонаправленной разомкнутой цепи жестко и однозначно связана с задающим воздействием и управляемая величина не контролируется. Функциональная схема разомкнутой системы, по сути, приведена на рис.1.2. Так как выходная величина в таких системах не контролируется, точность будет зависеть от возмущающих воздействий.

Уменьшение влияния возмущающих воздействий на управляемую величину и на ошибку возможно путём автоматического регулирования по возмущению. При этом возмущающие воздействия измеряются и подаются на устройство управления, которое компенсирует влияние этих возмущений на объект (рис. 1.6). Регулирование по возмущению сложно реализовать, если есть много возмущений и невозможно – если имеются внутренние помехи. Хотя разомкнутые системы и являются наиболее простыми, в таких системах могут возникать большие ошибки, потому что выход, то есть исполнение приказа G , никак не контролируется. Для контроля необходимо использовать информацию о выходе объекта в управляющем устройстве, то есть необходимо замкнуть систему.

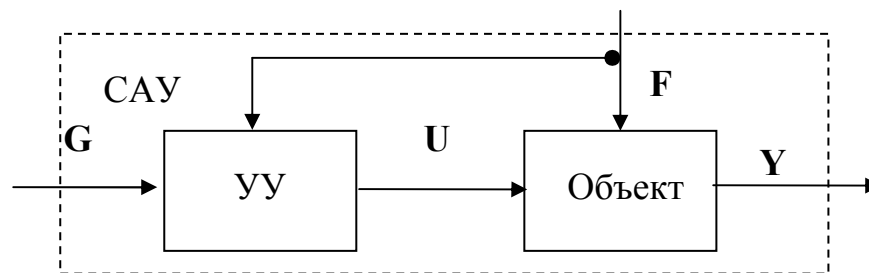


Рис. 1.6. Система управления по задающему и по возмущающему воздействию.

В замкнутой системе на вход УУ подаются задающее воздействие $G(t)$ и регулируемая величина $Y(t)$. Исходя из величины $G(t)$ УУ определяет соответствующее требуемое значение $Y_{\text{тр}}(t)$ и, имея информацию о $Y(t)$, обеспечивает необходимое соответствие между $G(t)$ и $Y(t)$ путём выработки управляющего воздействия на объект. Таким образом, вводится обратная связь и получается система, реализующая принцип управления по отклонению или по ошибке $Y_{\text{тр}}(t) - Y(t)$ (рис.1.7).

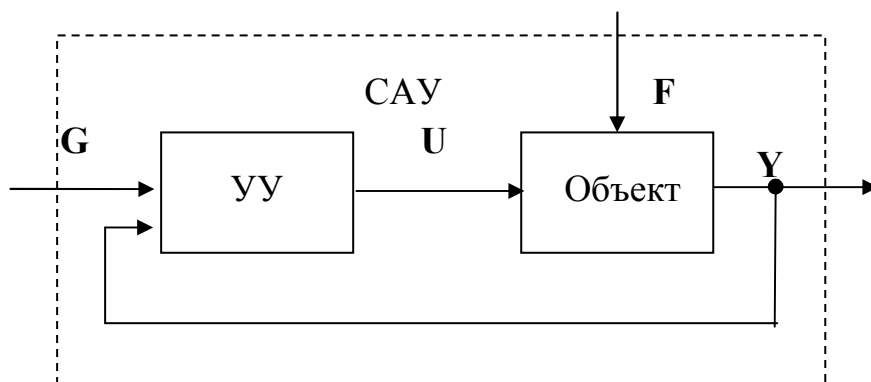


Рис. 1.7. Система управления по ошибке.

Комбинированные САУ представляют собой объединение в одну систему замкнутой системы по отклонению и разомкнутой системы по внешнему (задающему или возмущающему) воздействию.

Замкнутые системы могут в принципе обеспечить неограниченную точность и являются основным видом САУ.

Частным, но весьма важным видом САУ являются системы автоматического регулирования (САР). Задачей САР является поддержание выходной величины объекта $Y(t)$ на заданном уровне $G(t)$, то есть в поддержании равенства $G(t) = Y(t)$. При этом в зависимости от характера задающего воздействия САР делятся на системы:

- стабилизации (задающее воздействие постоянно и не зависит от времени $G(t) = \text{const}$),
- программного управления (задающее воздействие $G(t)$ меняется по заранее заданному закону – программе),
- следящие (задающее воздействие $G(t)$ заранее не известно).

Можно классифицировать САУ и по другим признакам.

По характеру уравнений, описывающих САУ, последние делятся на линейные и нелинейные системы. Линейная система – это система, процессы в которой описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Чтобы система была нелинейной, достаточно иметь в её составе хотя бы одно нелинейное звено, то есть звено, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением.

Для линейных систем всегда выполняется принцип суперпозиции. Он заключается в том, что реакция системы на любую линейную комбинацию внешних воздействий равна этой линейной комбинации реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. Принцип суперпозиции позволяет выразить реакцию системы на любое произвольное воздействие через реакцию на элементарное типовое воздействие, например, в виде единичной ступенчатой функции. Благодаря принципу суперпозиции разработана общая теория линейных САУ, основанная на общей теории решения линейных дифференциальных уравнений.

К нелинейным системам принцип суперпозиции не применим. Нет поэтому и общей теории нелинейных дифференциальных уравнений, на основе которой могла бы быть создана общая теория нелинейных САУ. Существуют лишь ряд частных методов для решения некоторых видов нелинейных уравнений.

На практике, как правило, все системы являются нелинейными. Но трудность исследования нелинейных систем заставляет упрощать их описание, например, сведением нелинейных уравнений к линейному виду в нескольких интересующих нас режимах. Этот процесс замены нелинейных уравнений линейными (приближённый, конечно) называется линеаризацией.

Линейные САУ, в свою очередь, делятся на обыкновенные и особые. Процессы в обыкновенных системах описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Особые линейные системы – это:

- системы с запаздыванием, когда в одном или нескольких звеньях системы имеется постоянное запаздывание выходного сигнала по отношению к входному сигналу,

- системы с распределёнными параметрами, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных,
- системы с переменными параметрами или нестационарные системы, коэффициенты в уравнениях которых меняются со временем,
- импульсные системы, в которых имеется квантование по времени.

По характеру изменения сигналов системы делятся на непрерывные и дискретные (рис. 1.8).

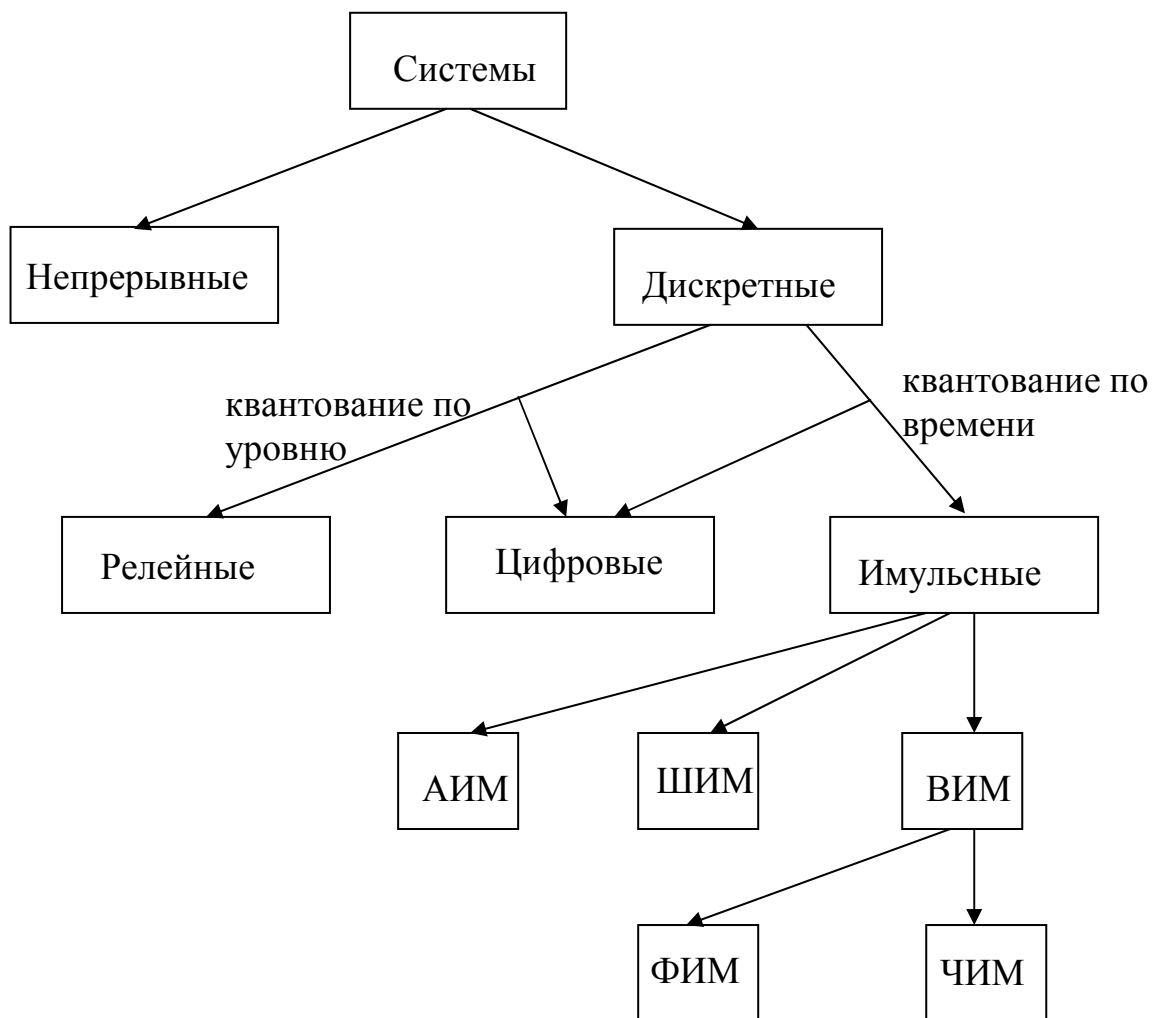


Рис. 1.8. Классификация САУ по характеру сигналов.

САУ могут быть дискретными либо потому, что задающее или возмущающее воздействие по природе дискретно, либо потому, что в цепи управления имеется хотя бы одно звено, преобразующее непрерывные

(аналоговые) сигналы в дискретные. Подобного рода звено называют звеном прерывистого действия, а процесс преобразования непрерывного сигнала в дискретный – квантованием. Различают квантование по уровню (по величине) и по времени.

Устройства, осуществляющие квантование по уровню, имеют релейные и многоступенчатые характеристики. Все устройства, осуществляющие квантование по уровню, являются нелинейными звеньями, так как их характеристики существенно нелинейные. Квантование по уровню – всегда нелинейная операция. Применение реле (и вообще нелинейных звеньев) часто выгодно из-за простоты получающейся системы, меньших габаритов, а иногда и лучшего качества управления.

Устройства, осуществляющие квантование по времени, называются импульсными элементами. Выходной сигнал импульсного элемента представляет собой серию импульсов. Обычно один из параметров импульса – амплитуда, длительность, период следования – изменяется в соответствии со значениями входной непрерывной величины в дискретные моменты времени. Этот процесс изменения одного из параметров импульса в функции или зависимости от входной величины называется модуляцией. Квантование же по времени вместе с модуляцией называется импульсной модуляцией. Следовательно, импульсный элемент осуществляет импульсную модуляцию входного непрерывного сигнала. В соответствии с тем, какой параметр импульса изменяется, различают амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), когда меняется амплитуда импульса; широтно-импульсную модуляцию (ШИМ), когда меняется длительность импульса, и времяимпульсную модуляцию (ВИМ). Последняя, в свою очередь, делится на фазоимпульсную модуляцию (ФИМ), когда меняется временное положение импульса относительно некоторого опорного сигнала, и частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ), при которой меняется частота следования импульсов. Так как в импульсном элементе сохраняется ли-

нейная зависимость между непрерывным входным сигналом и соответствующим параметром импульсов, то импульсная модуляция является линейной операцией, а импульсный элемент – линейным элементом. Импульсная система является линейной, если все остальные звенья в системе – линейны.

Наконец, одновременное квантование по уровню и по времени присутствует в цифровых системах, то есть в системах, в контуре управления которых имеются элементы цифровой техники, либо ЦВМ или даже комплексы ЦВМ. Квантование по уровню связано с тем, что непрерывно изменяющиеся сигналы представляются в цифровой, то есть дискретной форме. Квантование по времени обусловлено тем, что сигнал на выходе ЦВМ выдается в дискретные моменты времени, в промежутке между которыми ЦВМ производит вычисления.

В зависимости от количества выходных координат объекта управления, образующих вектор выходной величины Y , САУ подразделяются на одномерные (выходная величина – скаляр) и многомерные (выходная величина – вектор). Многомерные САУ делятся, в свою очередь, на системы связанного и несвязанного управления. Системы несвязанного управления имеют несколько управляющих устройств, каждое из которых осуществляет управление своей выходной величиной. При этом все эти устройства не имеют взаимных связей, вследствие чего изменение одной выходной величины не влияет на остальные выходные величины. Если подобные связи есть, то система является системой связанного управления.

Перечисляя различные классификационные признаки, следует отметить, что во многих САУ, помимо преобразований сигналов, описываемых уравнениями, существуют преобразования, соответствующие логическим функциям «И», «ИЛИ», «НЕ», «ЕСЛИ, ТО...» и др.

1.4. Общая характеристика процессов в САУ

Как и у всякой динамической системы, процессы в САУ делятся на установившиеся и неустойчивые (рис. 1.9).

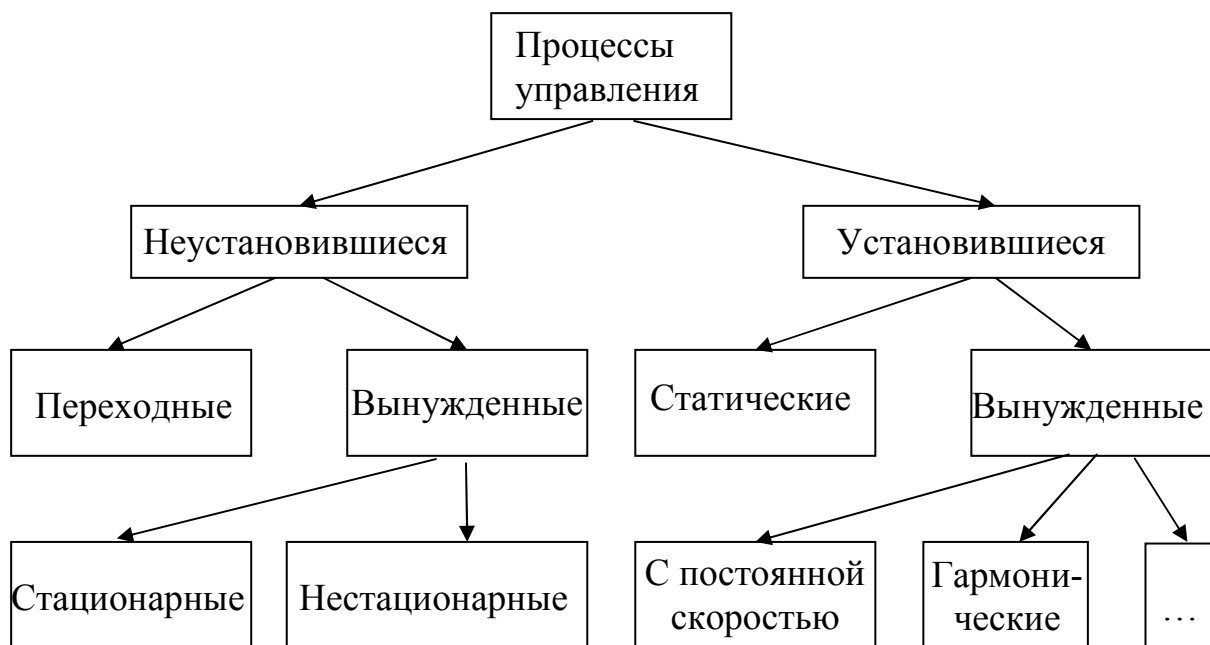


Рис. 1.9. Процессы управления.

Вообще говоря, любой процесс на выходе САУ можно представить как сумму переходного и установившегося процессов.

Можно определить переходной процесс как собственное (свободное) движение системы или движение выведенной из состояния равновесия системы вновь к равновесному состоянию после снятия вынуждающей силы. Характеризовать собственное движение можно, например, продолжающимся изменением выходной (управляемой) величины после прекращения изменения всех входных воздействий. Поясним это на простейшем примере.

Пусть до момента времени $t = t_1$ управляемая величина равнялась $y(t) = y_{01}$, что соответствует определённому задающему воздействию $g(t) = g_1$ при равных нулю возмущающих воздействиях (рис. 1.10). В мо-

мент времени $t = t_1$ задающее воздействие скачком изменяется до величины $g(t) = g_2$ (рис. 1.10, *а*). Тогда управляемая величина должна измениться до соответствующего уровня $y(t) = y_{02}$. Однако это новое значение установится не сразу, а после переходного процесса. Переходной процесс может протекать с колебаниями (колебательный переходной процесс) (рис. 1.10, *б*), а может быть неколебательным или, как говорят, аperiodическим (рис. 1.10, *в*). Переходной процесс полностью характеризует динамические свойства САУ.

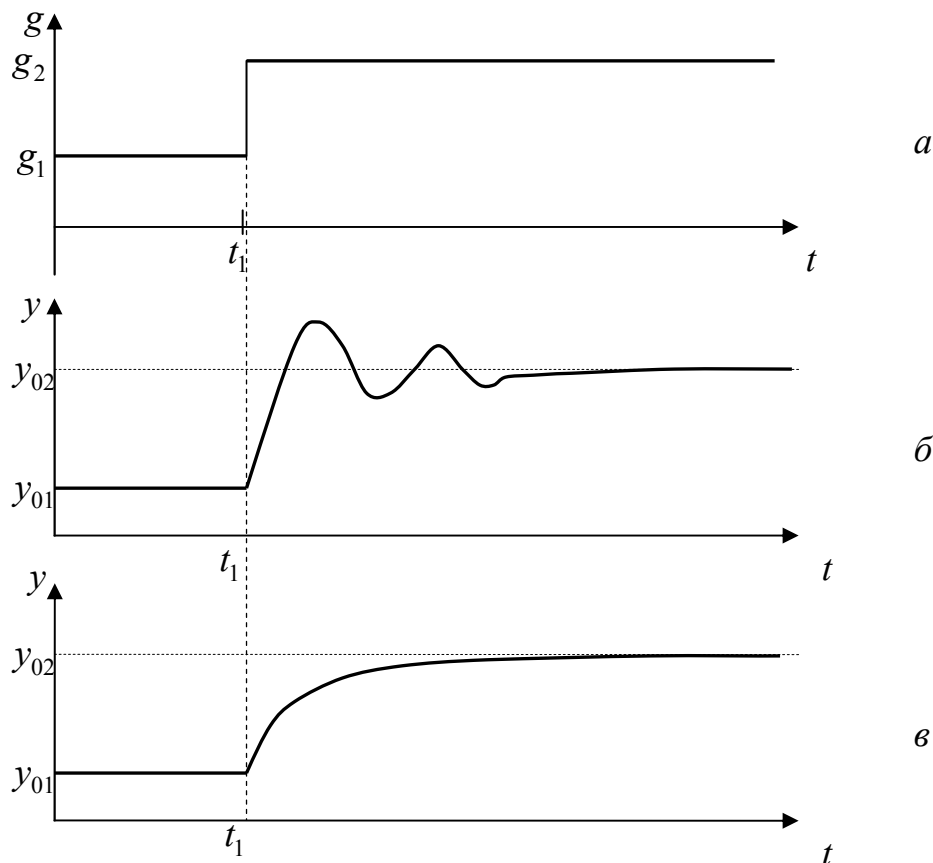


Рис. 1.10. Переходные процессы.

Если на вход САУ поступает регулярный сигнал, например, имеется только задающее воздействие, меняющееся по заданному закону, то установившийся процесс – это процесс на выходе за вычетом переходной составляющей. Поскольку переходной процесс в устойчивых системах

со временем затухает, то, в конце концов, на выходе САУ будет наблюдаться только установившийся процесс.

Если задающее воздействие постоянно ($g(t) = g_0 = const$), то установившийся процесс является статическим. В установившемся статическом процессе проявляются статические свойства САУ. Статические свойства характеризуют равновесное состояние системы при разных по величине, но постоянных во времени входных воздействиях. Статические свойства полностью определяются статическими характеристиками. Статической характеристикой называется зависимость выходной величины от одной из входных величин в установившемся статическом процессе при всех других входных величинах равных нулю или постоянных.

Если задающее воздействие меняется по гармоническому закону, с постоянной скоростью, с постоянным ускорением и т.п. (такие воздействия называются типовыми), то на выходе САУ с течением времени также будет наблюдаться установившийся вынужденный процесс, меняющийся соответственно по гармоническому закону, с постоянной скоростью, с постоянным ускорением и т.п. Следовательно, установившийся вынужденный процесс есть несобственное движение системы под действием регулярных входных воздействий. Следует отметить, что хотя переходной процесс и отсутствует в установившемся вынужденном процессе, последний всё же частично характеризует динамические свойства САУ. Это выражается, например, в сдвиге по фазе и изменении амплитуды колебаний в установившемся вынужденном гармоническом режиме. Если же в гармоническом режиме ещё менять и частоту колебаний от нуля до бесконечности и измерять амплитуду и фазу выходных колебаний, то можно получить не частичную, а полную информацию о динамических свойствах данной САУ.

Но в САУ могут наблюдаться случаи, когда из выходного сигнала нельзя выделить установившийся процесс. Это будет тогда, когда входное воздействие меняется случайным образом, то есть представляет собой случайный процесс. При этом получаем не установившийся вынужденный процесс. В зависимости от того, является случайный процесс стационарным или нестационарным, получаем и соответствующие не установившиеся вынужденные процессы.

При рассмотрении процессов в САУ большое значение имеют устойчивость и качество процессов управления.

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением. Замкнутые САУ, как всякие замкнутые системы, весьма склонны к потере устойчивости, что чаще всего проявляется в возникновении расходящихся колебаний.

Качество процессов управления характеризуется тем, насколько процесс управления близок к желаемому. Количественно оно определяется критериями качества, которые выбираются в соответствии с целью управления. Как правило, в качестве процессов управления включают качество переходных процессов и точность управления, которая характеризуется погрешностью системы в типовых установившихся режимах.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ САУ

2.1. Постановка задачи. Разбиение системы на звенья

Целью рассмотрения САУ может быть решение одной из двух задач – задачи анализа и задачи синтеза. В первом случае даётся система, включая значения её параметров, и требуется определить свойства этой системы. Во втором случае наоборот, заданы свойства САУ, то есть требования, которым должна удовлетворять система, и необходимо спроектировать систему, обладающую этими свойствами.

В самом общем виде порядок исследования САУ в обоих случаях включает:

- математическое описание системы,
- исследование её установившихся режимов,
- исследование переходных процессов.

Математическое описание начинается с разбиения системы на звенья и описания этих звеньев. Последнее может осуществляться либо аналитически (уравнениями), либо графически (характеристиками). По уравнениям или характеристикам звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании чего и исследуется система.

Разбиение системы на звенья отличается от разбиения на блоки в функциональной схеме. Там разбиение осуществлялось исходя из выполняемых функций, то есть назначения блоков, а при математическом описании разбиение осуществляется исходя из удобства получения этого описания.

Для удобства описания систему следует разбивать на возможно более простые (мелкие) звенья. Но вместе с тем необходимо, чтобы эти звенья обладали направленностью действия. Звеном направленного действия называется звено, передающее воздействие только в одном направ-

лении – с входа на выход, так, что изменение его состояния не влияет на состояние предшествующих звеньев.

При таком разбиении математическое описание звена направленного действия составляется без учёта связи с другими звеньями. Соответствующее математическое описание всей системы в целом может быть получено как совокупность независимо составленных уравнений звеньев дополненное уравнениями связи между звеньями.

В результате такого разбиения составляется структурная схема САУ. Структурная схема состоит из прямоугольников, изображающих звенья, и связей со стрелками, соединяющими входы и выходы звеньев. Стрелками показываются также внешние воздействия, приложенные к отдельным звеньям. Каждому звену придается описывающее его уравнение или характеристика. Таким образом, функциональная схема позволяет понять, как работает система, а структурная схема – как её работу удобнее описать.

Получение структурной схемы является конечной целью математического описания системы.

2.2. Уравнения и характеристики звеньев

Составление уравнений звеньев основано на физических законах, описывающих протекание процессов в конкретных звеньях, и является предметом рассмотрения специальных дисциплин, в которых эти звенья изучаются.

2.2.1. Уравнения звеньев. Линеаризация

Основная сложность, которая существует при выводе уравнений звеньев, заключается в необходимости установления допустимой степени идеализации и упрощения звеньев. Главным упрощением, к которому следует стремиться, является их линеаризация, то есть описание звеньев линейными дифференциальными уравнениями.

Вообще, линеаризация нелинейностей, содержащихся в уравнении, заключается в замене этих нелинейностей приближенными линейными зависимостями.

Рассмотрим простейший метод линеаризации, заключающийся в разложении в ряд Тейлора.

Пусть, например, уравнение звена второго порядка, изображенного на рис. 2.1, имеет вид:

$$F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1, x_1) = \varphi(\dot{f}, f), \quad (2.2.1)$$

где F и φ - некоторые нелинейные функции своих аргументов.

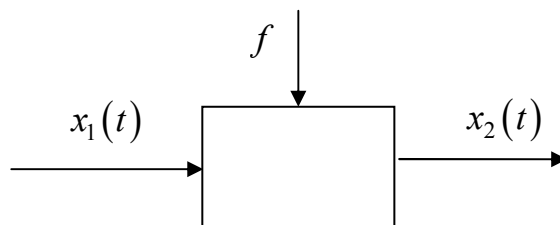


Рис. 2.1. Схема звена.

Допустим, что в этом звене установившийся процесс имеет место при некоторых постоянных значениях: $x_1 = x_1^\circ, x_2 = x_2^\circ, f = f^\circ$. Тогда уравнение установившегося режима будет

$$F(0, 0, x_2^\circ, 0, x_1^\circ) = \varphi(0, f^\circ). \quad (2.2.2)$$

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные x_1, x_2 меняются так, что их отклонения от установившихся значений остаются достаточно малыми. Обозначим эти отклонения через $\Delta x_1, \Delta x_2$. Тогда в динамическом режиме получим:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1^\circ + \Delta x_1(t), \\
x_2(t) &= x_2^\circ + \Delta x_2(t), \\
\dot{x}_1(t) &= \Delta \dot{x}_1(t), \\
\ddot{x}_2(t) &= \Delta \ddot{x}_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= \Delta \dot{x}_2(t).
\end{aligned}$$

Условия достаточной малости динамических отклонений переменных от некоторых установившихся значений для систем автоматического регулирования и следящих систем обычно выполняются. Этого требует сам принцип работы замкнутой САР. Внешнее воздействие f не зависит от работы САР, его изменение может быть произвольным и поэтому правая часть уравнения (2.2.1) обычно линеаризации не подлежит.

Первый способ линеаризации. Разложим функцию F в ряд Тейлора по степеням указанных малых отклонений в точке установившегося режима:

$$\begin{aligned}
F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1, x_1) &= F(0, 0, x_2^\circ, 0, x_1^\circ) + \left. \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right|_0 \Delta \ddot{x}_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right|_0 \Delta \dot{x}_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right|_0 \Delta \dot{x}_1 + \\
&+ \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 + \theta = \varphi(\dot{f}, f),
\end{aligned}$$

где θ - члены высшего порядка малости по отклонениям, а все частные производные вычисляются в точке установившегося режима, то есть при $\ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, x_2 = x_2^\circ, \dot{x}_1 = 0, x_1 = x_1^\circ$.

Учитывая соотношение (2.2.2.) и пренебрегая членами высшего порядка малости, получим

$$\begin{aligned}
F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1, x_1) &= \left. \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right|_0 \Delta \ddot{x}_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right|_0 \Delta \dot{x}_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0 \Delta x_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right|_0 \Delta \dot{x}_1 + \\
&+ \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_0 \Delta x_1 = \varphi(\dot{f}, f) - \varphi(0, f^\circ).
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Полученное уравнение (2.2.3) так же, как и уравнение (2.2.1), описывает тот же динамический процесс в том же звене, но отличается следующим:

- уравнение (2.2.3) является приближённым, причем точность приближения тем больше, чем меньше отклонения от установившегося режима,

- неизвестные функции времени не x_1, x_2 , а их отклонения от установившегося режима,

- полученное уравнение линейное относительно отклонений.

Приведём графическую иллюстрацию этой линеаризации. Изобразим графически зависимость F , например, от x_1 (рис.2.2, а)

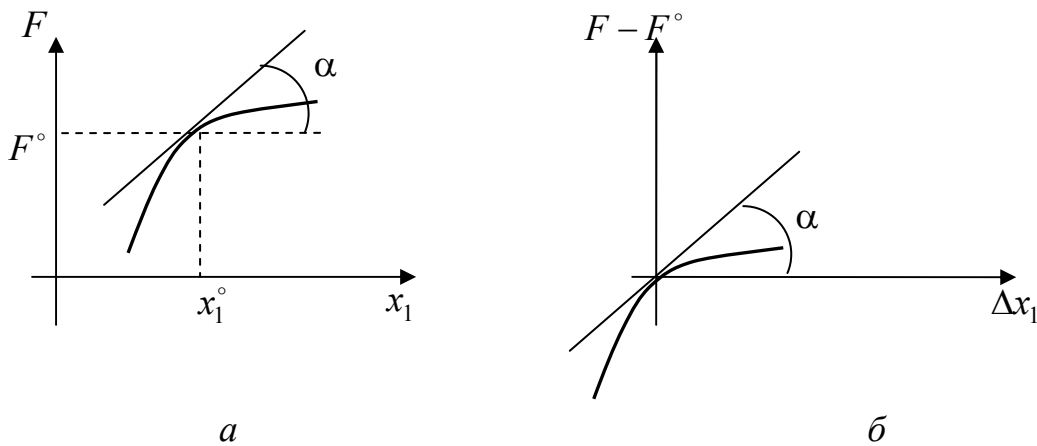


Рис. 2.3. К линеаризации.

Из графика видно, что линеаризация может трактоваться как замена кривой на касательную в точке установившегося режима (рис. 2.3.б). Част-

ная производная $\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_0$ представляет собой тангенс угла наклона α касательной к зависимости F от x_1 в точке x_1° : $\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_0 = \operatorname{tg} \alpha$. Эта замена тем точ-

нее, чем меньше Δx_1 . Границы отклонений Δx_1 могут быть тем больше,

нее, чем меньше Δx_1 . Границы отклонений Δx_1 могут быть тем больше,

чем ближе кривая к касательной. Последним обстоятельством и определяются те границы, внутри которых отклонения можно считать «достаточно малыми».

Второй способ линеаризации. Из приведённой графической иллюстрации вытекает второй способ линеаризации, который весьма часто применяется на практике. Этот способ заключается в том, что все криволинейные зависимости, используемые для составления уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (по касательной к соответствующей кривой). Тогда уравнения сразу получаются линейными.

Замечания. 1. Данный вид линеаризации (разложение в ряд Тейлора) допустим при малых отклонениях от установившегося режима. При этом точность растёт с уменьшением этих отклонений.

2. Такую линеаризацию можно применять только к непрерывно дифференцируемым нелинейностям. Такие нелинейности называются линеаризуемыми. Нелинейные звенья, не удовлетворяющие этому требованию, называют существенно нелинейными. К ним относятся звенья с прерывистыми характеристиками типа релейных или многоступенчатых характеристик, и с неоднозначными характеристиками типа петли гистерезиса. Нужно помнить, что линеаризацию нельзя проводить только в точках *разрыва* прерывистых характеристик, в остальных точках линеаризацию проводят как обычно.

За долгую историю развития в ТАУ сложились определённые традиции при записи линейных (линеаризованных) уравнений.

Первая стандартная форма записи дифференциального уравнения получится, если выходная величина и все её производные находятся в левой части уравнения, а входные величины – в правой части. Кроме того, сама выходная величина берётся с коэффициентом 1. Посмотрим, как это делается, например, в случае уравнения (2.2.3). Введём в этом уравнении следующие обозначения:

$$T_2^2 = \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right|_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0}, T_1 = \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right|_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0}, K_2 = -\frac{\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right|_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0}, K_1 = -\frac{\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0}, K_3 = \frac{1}{\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_0}, f_1 = \varphi(\dot{f}, f) - \varphi(0, f^0).$$

Тогда уравнение (2.2.3) примет следующий вид

$$T_2^2 \Delta \ddot{x}_2 + T_1 \Delta \dot{x}_2 + \Delta x_2 = K_2 \Delta \dot{x}_1 + K_1 \Delta x_1 + K_3 f_1. \quad (2.2.4)$$

Уравнение (2.2.4) удобно записывать в символическом виде, обозначив оператор дифференцирования через $p = \frac{d}{dt}$. Таким образом, получаем *первую форму записи* уравнения звена:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \Delta x_2(t) = (K_2 p + K_1) \Delta x_1(t) + K_3 f_1(t). \quad (2.2.5)$$

Стандартную форму записи (2.2.5) можно использовать как для размерных отклонений реальных величин на входе и выходе звеньев, так и для любых *относительных отклонений*, вводимых иногда для упрощения вида уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_1^0}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2^0} \text{ и т.д.}$$

Коэффициенты T_1, T_2 носят название постоянных времени звена и имеют размерность времени (с), а коэффициенты K_1, K_2, K_3 называются коэффициентами передачи. Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то K_1 – безразмерная величина. Термин «коэффициент передачи» можно пояснить так: если на вход звена подать постоянное воздействие Δx_1^0 и найти установившееся значение выхода Δx_2^0 (при этом обнуляются все производные входного и выходного сигналов), то из уравнения (2.2.5) получим $\Delta x_2^0 = K_1 \Delta x_1^0$, то есть коэффициент передачи K_1 – это отношение выходной величины к входной в *установившемся статическом режиме*. Таким образом, K_1 – это наклон (с учётом масштаба по

осям координат) линейной статической характеристики звена. В размерность коэффициента передачи может входить время, например, K_2 имеет размерность времени.

Вторая форма записи. Считаем условно оператор дифференцирования p алгебраической величиной и из уравнения (2.2.5) найдем Δx_2

$$\begin{aligned} \Delta x_2(t) &= \frac{K_2 p + K_1}{T_2 p^2 + T_1 p + 1} \Delta x_1(t) + \frac{K_3}{T_2 p^2 + T_1 p + 1} f_1(t) = \\ &= W_1(p) \Delta x_1(t) + W_2(p) f_1(t) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Выражения $W_1(p) = \frac{K_2 p + K_1}{T_2 p^2 + T_1 p + 1}$, $W_2(p) = \frac{K_3}{T_2 p^2 + T_1 p + 1}$ называются передаточными функциями. Вообще говоря, более строго передаточные функции определяются через преобразование Лапласа. Известно, что преобразование Лапласа (одностороннее) некоторой функции времени $f(t)$ определяется следующей парой формул:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \\ L^{-1}\{F(s)\} &= f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа находит широкое применение при решении дифференциальных уравнений и смысл его применения заключается в том, что *дифференциальные* уравнения относительно функций времени преобразуются в *алгебраические* уравнения относительно соответствующих изображений по Лапласу. Применив преобразование Лапласа к уравнению (2.2.5) при нулевых начальных условиях, получим

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) \Delta X_2(s) = (K_2 s + K_1) \Delta X_1(s) + K_3 F_1(s). \quad (2.2.7)$$

Решим уравнение (2.2.7) относительно $\Delta X_2(s)$

$$\begin{aligned}\Delta X_2(s) &= \frac{K_2 s + K_1}{T_2 s^2 + T_1 s + 1} \Delta X_1(s) + \frac{K_3}{T_2 s^2 + T_1 s + 1} F_1(s) = \\ &= W_1(s) \Delta X_1(s) + W_2(s) F_1(s)\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

Из уравнения (2.2.8) видно, что **передаточная функция** есть отношение изображений по Лапласу выходной величины к входной величине при нулевых начальных условиях и нулевых остальных воздействиях:

$$W_1(s) = \frac{\Delta X_2(s)}{\Delta X_1(s)} = \frac{K_2 s + K_1}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{\Delta X_2(s)}{F_1(s)} = \frac{K_3}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Сравнивая уравнения (2.2.6) и (2.2.8), замечаем, что вид этих уравнений совпадает, но нужно помнить, что в **дифференциальном уравнении (2.2.6)** p – это оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, а в **алгебраическом уравнении (2.2.8)** s – это комплексная переменная $s = c + j\omega$.

В общем случае линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m g(t),$$

где $g(t)$ – сигнал на входе, а $y(t)$ – сигнал на выходе звена.

Сокращенная символическая запись этого уравнения

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 p^m g(t) + b_1 p^{m-1} g(t) + \dots + b_m g(t) \quad (2.2.9)$$

или $(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t)$.

Другая форма записи этого же уравнения

$$y(t) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} g(t) = W(p) g(t)$$

Уравнение относительно изображений по Лапласу

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)R(s)$$

или $Y(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} R(s) = W(s)R(s).$ (2.2.10)

Понятие передаточной функции весьма удобно при анализе структурных схем. Так, звено, приведённое на рис.2.1, после проведённой линеаризации можно представить в виде схемы рис.2.2.

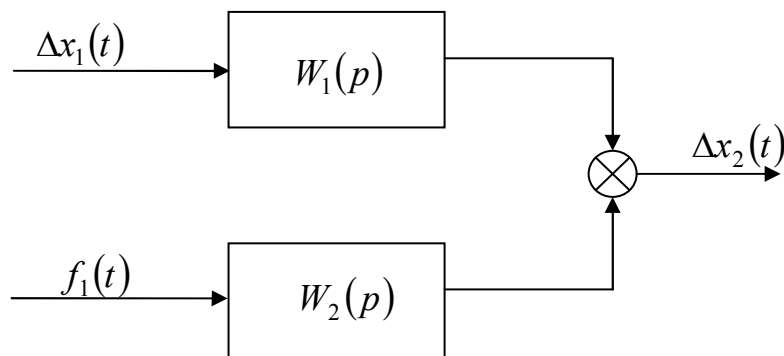


Рис.2.2. Структурная схема звена.

Передаточные функции звеньев или отдельных участков структурной схемы позволяют легко получить общее уравнение всей системы.

Первая и вторая формы записи уравнений используются при классическом (частотном) описании САУ.

2.2.2. Временные характеристики

Помимо уравнений (или передаточных функций) и звенья и системы можно описывать характеристиками. Различают временные и частотные характеристики. Поведение звеньев во времени описывается временными характеристиками. К временным характеристикам относятся переходная характеристика и импульсная переходная характеристика.

Графическое изображение выхода звена при поступлении на его вход сигнала в виде единичной ступенчатой функции называется переходной характеристикой. Аналитическое выражение переходной характеристики называется переходной функцией и часто обозначается как $h(t)$.

Символическое обозначение единичной ступенчатой функции – это

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если на вход звена поступает единичная ступенчатая функция $1(t)$, то выход звена, то есть решение соответствующего дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях есть переходная функция $h(t)$.

Отсюда следует *первый метод* нахождения переходной функции – непосредственное решение дифференциального уравнения при входном воздействии – $1(t)$. Пусть задано уравнение звена в общем виде (2.2.9). Для получения переходной функции положим $g(t) = 1(t)$. Общее решение уравнения (2.2.9), как и любого другого обыкновенного дифференциального уравнения, состоит из суммы общего решения однородного уравнения

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = 0 \quad (2.2.11)$$

и частного решения неоднородного уравнения (2.2.9). Нетрудно видеть,

что при $t > 0$ частное решение будет $y_n(t) = \frac{b_m}{a_n}$. Общее решение однородного уравнения равно

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^n C_i y_i = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где p_i – некрратные корни характеристического уравнения, а C_i – константы, зависящие от начальных условий.

Таким образом, $y(t) = \sum_{i=0}^n C_i e^{p_i t} + \frac{b_m}{a_n}$. Введём вспомогательную пе-

ременную

$$z(t) = y(t) - b_m / a_n = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}. \quad (2.2.12)$$

Приведённое выражение подобно решению однородного уравнения $a_0 s^n z(t) + a_1 s^{n-1} z(t) + \dots + a_n z(t) = 0$ с начальными условиями для $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(+0) &= y(+0) - \frac{b_m}{a_n}, \\ \dot{z}(+0) &= \dot{y}(+0), \\ \ddot{z}(+0) &= \ddot{y}(+0) \dots \\ z^{(n-1)}(+0) &= y^{(n-1)}(+0). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Обозначение $+0$ показывает, что начальные условия заданы непосредственно после поступления на вход единичной ступенчатой функции. Найдя $z(t)$, легко получить и решение для $y(t)$ из выражения (2.2.12).

Теперь обсудим начальные условия для $y(t)$, поскольку они, согласно формуле (2.2.13), необходимы для определения начальных условий для $z(t)$. Начальные условия в момент времени -0 равны нулю, что соответствует нулевой запасённой энергии в звене до поступления входного воздействия. Начальные же условия сразу после приложения единичного ступенчатого воздействия можно определить из уравнения (2.2.9) следующим образом: первые $(n-m)$ начальных условий – нулевые

$$y(+0) = \dot{y}(+0) = \dots = y^{(n-m-1)}(+0) = 0.$$

Для остальных начальных условий есть следующие выражения:

$$\begin{aligned} y^{(n-m)}(+0) &= \frac{b_0}{a_0}, \\ y^{(n-m+1)}(+0) &= \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} y^{(n-m)}(+0), \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(+0) &= \frac{b_{m-1}}{a_0} - \frac{a_{m-1}}{a_0} y^{(n-m)}(+0) - \dots - \frac{a_1}{a_0} y^{(n-2)}(+0). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Пример 2.1. Уравнение звена

$$0,04 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0,32 \frac{dy}{dt} + y = 0,1 \frac{dg}{dt} + g. \quad (2.2.15)$$

Найдём переходную функцию $h(t)$. Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (2.2.15), равно

$$0,04 p^2 + 0,32 p + 1 = 0.$$

Его корни $p_{1,2} = -\gamma \pm \lambda j = -4 \pm 3j$. Для уравнения (2.2.15) имеем $n = 2$; $m = 1$; $a_0 = 0,04$; $a_1 = 0,32$; $a_2 = 1$; $b_0 = 0,1$; $b_1 = 1$. Определим начальные условия для $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(+0) &= 0, \\ \dot{y}(+0) &= \frac{b_0}{a_0} = \frac{0,1}{0,04} = 2,5 \text{ (сек}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

Введём новую переменную в соответствии с (2.2.12)

$$z(t) = y(t) - \frac{b_1}{a_2} = y(t) - 1. \quad (2.2.16)$$

Поскольку корни характеристического уравнения комплексные, решение для $z(t)$ записываем в виде гармонических функций

$$z(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t). \quad (2.2.17)$$

Начальные условия для $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(+0) &= -\frac{b_1}{a_2} = -1, \\ \dot{z}(+0) &= \dot{y}(+0) = 2,5 \text{ (сек}^{-1}\text{)}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Взяв производную от правой и левой части формулы (2.2.17) и подставив в саму переменную и её производную $t=0$, определим постоянные интегрирования A и B , удовлетворяющие начальным условиям (2.2.18):

$$\begin{aligned} z(+0) &= A = -1, \\ \dot{z}(+0) &= -\gamma \cdot A + \lambda \cdot B = 4 + 3B = 2,5. \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (2.2.17) найденные постоянные интегрирования, получаем решение для $z(t)$

$$z(t) = -e^{-4t} (\cos 3t + 0,5 \sin 3t).$$

Окончательно с учётом (2.2.16) получаем переходную функцию

$$h(t) = y(t) = (1 - e^{-4t} (\cos 3t + 0,5 \sin 3t)) 1(t). \quad (2.2.19)$$

Умножение на $1(t)$ в последнем выражении говорит о том, что переходная функция не равна нулю только при положительном времени.

Второй метод определения переходной характеристики – экспериментальный – состоит в подаче на вход звена сигнала в виде единичной ступеньки и измерении выхода звена.

Третий метод – определение переходной функции по *весовой функции* (формула (2.2.27)).

Импульсная переходная или *весовая характеристика* – это графическое изображение выхода звена при поступлении на его вход идеального импульса единичной мощности. Аналитическое выражение *весовой характеристики* называется *весовой функцией* и обозначается как $w(t)$.

Математическое обозначение идеального импульса – это дельта-функция $\delta(t)$. Дельта-функцию $\delta(t)$ можно представить как предел положительного импульса с единичной площадью, когда его длительность стремится к нулю. Поскольку этот положительный импульс в свою очередь можно представить как разницу двух единичных ступенчатых функций, сдвинутых по времени на величину длительности импульса, то это даёт основание считать, что дельта-функция есть производная от единичной ступенчатой функции

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (2.2.20)$$

Запись (2.2.20) следует считать только как символическую, поскольку строго говоря, производная от $1(t)$ в нуле не определена, так как в этой точке функция $1(t)$ терпит разрыв*.

Так же, как и для переходной функции, *первый метод* определения весовой функции – непосредственное решение дифференциального уравнения звена при возмущающей функции на входе $\delta(t)$.

Рассмотрим уравнение

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = \delta(t). \quad (2.2.21)$$

Это частный случай уравнения (2.2.9) когда правая часть не содержит производных.

Так как звено не возбуждено при $t < 0$, то $y = 0$ при $t < 0$. В связи с тем, что возмущающая функция $\delta(t)$ отлична от нуля только при $t = 0$, общее решение уравнения (2.2.21) совпадает при $t > 0$ с общим решением однородного уравнения (2.2.11)

$$y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Для вычисления n постоянных интегрирования нужно знать n начальных условий. Поскольку коэффициенты уравнения (2.2.21) не зависят от времени, начальные условия находятся непосредственно по этим коэффициентам. В момент времени $t = 0$ n -я производная решения в отличие от производных низшего порядка, содержит мгновенный импульс. Только в этом случае удовлетворяется уравнение (2.2.21) при $t = 0$. Действительно, если одна из низших производных содержала бы мгновенный импульс, то производная $\frac{d^n y}{dt^n}$ содержала бы специальную функцию более высокого

порядка. Поскольку в действительности $a_0 \frac{d^n y}{dt^n}$ содержит единичный

* С математической точки зрения удобнее определять δ -функцию как предел какой-либо гладкой функции, например,

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}.$$

мгновенный импульс при $t=0$, то согласно (2.2.20), производная $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$

должна претерпевать скачок от 0 до $\frac{1}{a_0}$ в момент времени $t=0$, а все

остальные производные в начальный момент должны быть непрерывными и равными нулю. Таким образом, n начальных условий будут иметь вид

$$y(+0) = \dot{y}(+0) = \dots = y^{(n-2)}(+0) = 0,$$

$$y^{(n-1)}(+0) = \frac{1}{a_0}.$$

Если в общем случае в правой части уравнения (2.2.9) коэффициенты b_i отличны от нуля, то изложенная выше процедура требует видоизменения. В этом случае правая часть уравнения (2.2.9) при $g(t) = \delta(t)$ содержит специальные функции различного порядка. Один из удобных подходов предполагает, что поскольку $y(t)$ – функция непрерывная, то при малых неотрицательных моментах времени она может быть разложена в ряд Тейлора (см. следующий пример).

Пример. 2.2. Найдём весовую функцию для звена из примера 2.1.

Уравнение звена $0,04 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0,32 \frac{dy}{dt} + y = 0,1 \frac{dg}{dt} + g$. Положим

$g(t) = \delta(t)$. Разлагая y в ряд Тейлора около точки $t=0$, получим

$$y(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) 1(t),$$

где c_i – неизвестные пока коэффициенты.

Вычислим производные

$$\frac{dy}{dt} = c_0 \delta(t) + (c_1 + 2c_2 t + \dots) 1(t),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c_0 \dot{\delta}(t) + c_1 \delta(t) + (2c_2 + \dots) 1(t).$$

Подставим y и её производные в уравнение звена и приведём подобные

$$0,04c_0 \cdot \dot{\delta}(t) + (0,04c_1 + 0,32c_0) \cdot \delta(t) + (0,04 \cdot 2c_2 + 0,32c_1 + c_0) \cdot 1(t) = 0,1\dot{\delta}(t) + \delta(t).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в правой и левой части полученного уравнения, получаем систему уравнений относительно коэффициентов c_0 и c_1 :

$$0,04c_0 = 0,1;$$

$$0,04c_1 + 0,32c_0 = 1.$$

Отсюда получаем $c_0 = 2,5$; $c_1 = 5$.

Для момента времени $t=+0$

$$y(+0) = c_0 = 2,5; \dot{y}(+0) = c_1 = 5.$$

Из уравнения звена следует, что общее решение соответствующего однородного уравнения при $t > 0$

$$y_o(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) = e^{-4t} (A \cos 3t + B \sin 3t).$$

Вычисляя A и B по определённым начальным условиям, получим $A=2,5$; $B=5$. Окончательно получим, что при $t > 0$

$$w(t) = e^{-4t} (2,5 \cos 3t + 5 \sin 3t). \quad (2.2.22)$$

Второй метод – экспериментальный – измерение процесса на выходе при подаче на вход импульсного воздействия (по возможности приближённого к идеальному импульсному воздействию $\delta(t)$).

Учитывая соотношение (2.2.20), связь между весовой $w(t)$ и переходной $h(t)$ функцией выражается формулой

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.2.23)$$

Применение формулы (2.2.23) даёт *третий метод* определения весовой функции.

Проинтегрировав правую и левую часть выражения (2.2.23) и учитывая физическую реализуемость звена (тождественное равенство нулю весовой и переходной функций при отрицательном времени, то есть до поступления входных воздействий), получим

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau. \quad (2.2.24)$$

Подадим δ -функцию на вход звена с уравнением (2.2.9). На выходе звена получим весовую функцию $w(t)$. Учитывая, что изображение по Лапласу δ -функции есть единица, получим $G(s) = L\{g(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$. Тогда, воспользовавшись формулой (2.2.10), увидим, что изображение по Лапласу весовой функции есть передаточная функция $W(s)$

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (2.2.25)$$

Таким образом, зная передаточную функцию звена $W(s)$, по формуле обратного преобразования Лапласа можно найти весовую функцию

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s) e^{st} ds. \quad (2.2.26)$$

Пример. 2.3. Найдём весовую функцию звена из примера 2.1, воспользовавшись соотношением (2.2.26). Передаточная функция звена равна

$$W(s) = \frac{0,1s + 1}{0,04s^2 + 0,32s + 1}.$$

Представим передаточную функцию в более удобной форме и найдём по таблицам оригинал

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{0,1s + 1}{0,04s^2 + 0,32s + 1} = \frac{0,1s + 1}{0,04(s^2 + 8s + 1)} = \frac{0,1(s + 4) + 0,6}{0,04((s + 4)^2 + 3^2)} = \\ &= \frac{2,5(s + 4) + 15}{((s + 4)^2 + 3^2)} = 2,5 \frac{s + 4}{((s + 4)^2 + 3^2)} + 5 \frac{3}{((s + 4)^2 + 3^2)} \Rightarrow e^{-4t} (2,5 \cos 3t + 5 \sin 3t). \end{aligned}$$

Таким образом, при $t > 0$ весовая функция совпадает с выражением (2.2.22).

Аналогичным образом можно получить формулы, связывающие переходную функцию $h(t)$ с передаточной функцией $W(s)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(s)}{s} e^{st} ds; \quad (2.2.27)$$

$$W(s) = s \cdot \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (2.2.28)$$

Формулы (2.2.27), (2.2.28) задают преобразование *Карсона-Хевисайда*.

Пример 2.4. Опять рассмотрим то же звено, что и в примере 2.1. Применим к уравнению (2.2.15) преобразование Лапласа и учтём, что изображение единичной ступенчатой функции есть s^{-1} , а начальные условия – нулевые

$$(0,04s^2 + 0,32s + 1)Y(s) = (0,1s + 1)\frac{1}{s}.$$

Решив последнее уравнение, найдём изображение переходной функции

$$H(s) = Y(s) = \frac{0,1s + 1}{(0,04s^2 + 0,32s + 1)s}. \quad (2.2.29)$$

Осталось найти оригинал, применив к последнему выражению обратное преобразование Лапласа. Обратное преобразование найдём, разложив правую часть выражения (2.2.29) на простые дроби и переходя к оригиналу от каждой из дробей по таблицам преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} \frac{0,1s + 1}{(0,04s^2 + 0,32s + 1)s} &= \frac{1}{s} + \frac{-s - 5,5}{(s^2 + 8s + 25)} = \frac{1}{s} + \frac{-(s + 4) - 1,5}{((s + 4)^2 + 3^2)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 3^2} - 0,5 \frac{3}{(s + 4)^2 + 3^2} \Rightarrow (1 - e^{-4t}(\cos 3t + 0,5 \sin 3t))1(t). \end{aligned}$$

Учитывая теорему о свёртке для преобразования Лапласа* по формуле (2.2.10) можно найти реакцию звена (системы) на произвольное воздействие $g(t)$ по весовой $w(t)$ (или переходной $h(t)$) функции

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (2.2.30)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\dot{g}(\tau)d\tau.$$

Для физически реализуемого звена (системы) верхний предел в интегралах (2.2.30) можно изменить на ∞ .

2.2.3. Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают поведение звена (системы) при гармонических воздействиях на входе. Воспользуемся представлением гармонической функции с амплитудой A и частотой ω_0 в экспоненциальной форме $Ae^{j\omega_0 t}$. Дифференциальное уравнение звена (системы) в общем виде задано формулой (2.2.9)

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 p^m g(t) + b_1 p^{m-1} g(t) + \dots + b_m g(t).$$

Пусть входное воздействие – гармоническая функция $g(t) = Ae^{j\omega_0 t}$.

Учитывая, что преобразование Лапласа входного воздействия равно

$$G(s) = L\{Ae^{j\omega_0 t}\} = \frac{A}{s - j\omega_0},$$

применим формулу (2.2.10). Тогда

$$Y(s) = W(s) \cdot \frac{A}{s - j\omega_0}. \quad (2.2.31)$$

К последнему выражению применим обратное преобразование Ла-

* Произведение изображений равно изображению свёртки оригиналов

$$F_1(s)F_2(s) = L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\}$$

пласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s) \cdot \frac{A}{s - j\omega_0} e^{st} ds. \quad (2.2.32)$$

Интеграл в правой части выражения (2.2.32) найдём, применив теорему о вычетах*. Для этого замкнём контур интегрирования через левую полуплоскость. При этом в замкнутый контур попадут все полюсы передаточной функции $W(s)$ и единственный полюс входного воздействия $s = j\omega_0$. В решении (2.2.32) возьмём только установившуюся составляющую, которая определяется полюсом входного воздействия. Тогда

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{вычет} \left\{ W(s) \frac{A}{s - j\omega_0} e^{st} \right\} \Bigg|_{\text{в полюсе } s=j\omega_0} = (s - j\omega_0) \cdot W(s) \frac{A}{s - j\omega_0} e^{st} \Bigg|_{s=j\omega_0} = \\ &= W(j\omega_0) A e^{j\omega_0 t} = |W(j\omega_0)| A e^{j(\omega_0 t + \arg W(j\omega_0))}. \end{aligned}$$

Передаточная функция звена после подстановки в неё чисто мнимого значения $s = j\omega$ называется частотной передаточной функцией или амплитудно-фазовой частотной характеристикой – АФЧХ (или просто частотной характеристикой) звена.

Полученное выражение говорит о том, что установившийся процесс на выходе является гармоническим с той же частотой ω_0 , с амплитудой, определяемой модулем АФЧХ и фазовым сдвигом, равным аргументу АФЧХ.

Известно, что преобразование Лапласа при подстановке $s = j\omega$ переходит в преобразование Фурье (если таковое существует). Поэтому, исходя из определения передаточной функции как отношения преобразований Лапласа выхода и входа, можно дать определение **АФЧХ как отношение преобразования Фурье выхода звена к преобразованию Фурье**

* Интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, расположенных внутри этого контура с коэффициентом $2\pi j$.

входа при нулевых начальных значениях (при условии, что соответствующие преобразования существуют).

Модуль АФЧХ как функция частоты носит название амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $A(\omega) = |W(j\omega)|$, а аргумент АФЧХ как функция частоты – фазовой частотной характеристики (ФЧХ) $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Комплексную функцию $W(j\omega)$ можно представить как в показательной, так и в алгебраической форме

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ вещественная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно.

Связь между перечисленными характеристиками очевидна

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega),$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Из определения частотных характеристик следует, что любому звену можно однозначно сопоставить АФЧХ $W(j\omega)$ или любую из пар характеристик $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Но оказывается, что для некоторых звеньев существует взаимно однозначная зависимость $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, а также $U(\omega)$ и $V(\omega)$.

Однозначная связь $U(\omega)$ и $V(\omega)$ существует у устойчивых звеньев (у таких звеньев все полюсы передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части). В этом случае связь $U(\omega)$ и $V(\omega)$ выражается *преобразованием Гильберта*

$$U(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{\xi - \omega} d\xi,$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Взаимно однозначная зависимость $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ наблюдается у минимально-фазовых звеньев (в передаточной функции минимально-фазовых звеньев не только полюсы, но и нули имеют отрицательные или равные нулю вещественные части).

При исследовании систем автоматического управления АЧХ и ФЧХ удобно строить в *логарифмическом масштабе*. Это удобство связано с двумя моментами.

Во-первых, в логарифмических координатах характеристики видоизменяются таким образом, что в большинстве практических случаях можно приближённо изображать амплитудные характеристики ломаными асимптотическими прямыми практически без всякой вычислительной работы.

Во-вторых, строить логарифмические амплитудные характеристики (ЛАХ) цепочки последовательно соединённых звеньев легко простым суммированием соответствующих ЛАХ отдельных звеньев. Действительно, из самого определения амплитудных частотных характеристик следует, что амплитудная частотная характеристика цепочки последовательно соединённых звеньев равна произведению АЧХ составляющих её звеньев, а логарифм произведения равен сумме логарифмов.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика строится в виде зависимости $20 \lg A(\omega)$ от $\lg \omega$, то есть

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (2.2.33)$$

Единицей измерения величины $L(\omega)$ является *децибел* (дБ), равный одной десятой бела. *Бел* – единица десятичного логарифма коэффициента

усиления сигнала по мощности, то есть 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз, 2 бела – в 100 раз, 3 бела – в 1000 раз и т.д. Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg A^2 = 2\lg A$, то усиление в белах, выраженное через отношение амплитуд A , равно $2\lg A$ или в децибелах $20\lg A$. Отсюда и коэффициент 20 в формуле (2.2.33).

Логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) строится в полупологарифмическом масштабе, то есть в виде зависимости φ от $\lg \omega$ таким образом, чтобы и ЛАХ и ЛФХ были связаны одним масштабом по оси абсцисс. Использование логарифмического масштаба по оси ординат для ЛФХ не имеет смысла, так как фазовый сдвиг цепочки последовательно соединённых звеньев и так получается в виде суммы фазовых сдвигов отдельных звеньев. Часто отрицательное значение ЛФХ откладывается по направлению вверх, а нуль ЛАХ совмещают со значением фазового сдвига, равного $-\pi$.

На оси абсцисс отмечают значения $\lg \omega$, либо, что практически более удобно и поэтому чаще применяется, значения самой частоты в логарифмическом масштабе. В первом случае единицей измерения является декада, соответствующая изменению частоты в 10 раз*. Поскольку точка, соответствующая нулевой частоте, находится слева в бесконечности ($\lg 0 \rightarrow -\infty$), то построение логарифмических характеристик начинается не с нулевой частоты, а с достаточно малой, но конечной её величины, так, чтобы все основные изменения характеристик происходили справа от оси ординат. Частота, при которой ЛАХ пересекает ось абсцисс, называется частотой среза ω_c , а частота, при которой ЛФХ пересекает уровень $-\pi$, носит название частоты переворота $\omega_{-\pi}$.

* Иногда применяется деление оси абсцисс на октавы. Октава соответствует изменению частоты в два раза. Одна октава равна 0,303 декады, так как $\lg 2 = 0,303$.

2.2.4. Соединения звеньев

Рассмотрим пока наиболее простые виды соединений звеньев. Это последовательное, параллельное и встречно-параллельное (соединение обратной связью). Уравнения, временные и частотные характеристики различного соединения звеньев можно получить по уравнениям и соответствующим характеристикам отдельных звеньев, но гораздо проще рассматривать соединения звеньев на уровне передаточных функций.

Последовательное соединение получается, если выход каждого звена соединен с входом последующего звена (рис. 2.3).

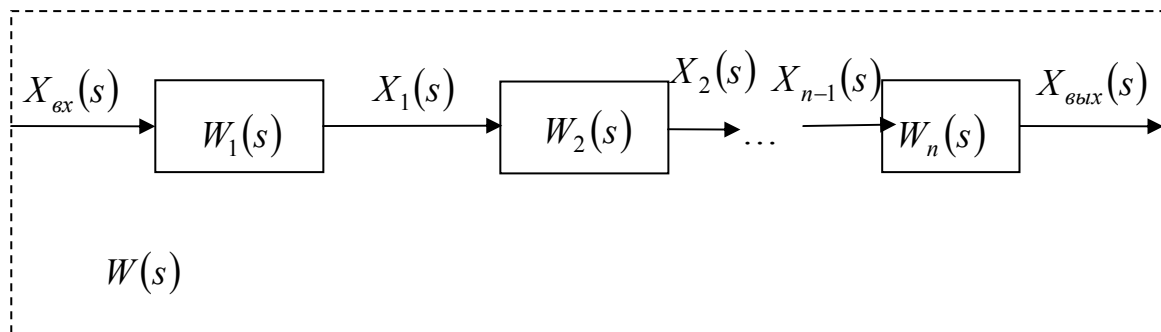


Рис.2.3. Последовательное соединение звеньев.

Найдём передаточную функцию последовательного соединения звеньев. Для каждого звена имеем

$$X_1(s) = W_1(s)X_{ex}(s),$$

$$X_2(s) = W_2(s)X_1(s),$$

...

$$X_{вых}(s) = W_n(s)X_{n-1}(s).$$

Исключая последовательно все промежуточные переменные, получим

$$X_{вых}(s) = W_1(s)W_2(s)\dots W_n(s)X_{ex}(s) = \prod_{k=1}^n W_k(s)X_{ex}(s).$$

Таким образом, передаточная функция цепочки последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в эту цепочку

$$W(s) = \prod_{k=1}^n W_k(s). \quad (2.2.34)$$

Параллельное соединение имеет место, когда на входы всех звеньев поступает один и тот же входной сигнал, а выходной сигнал равен сумме сигналов всех звеньев (рис.2.4)

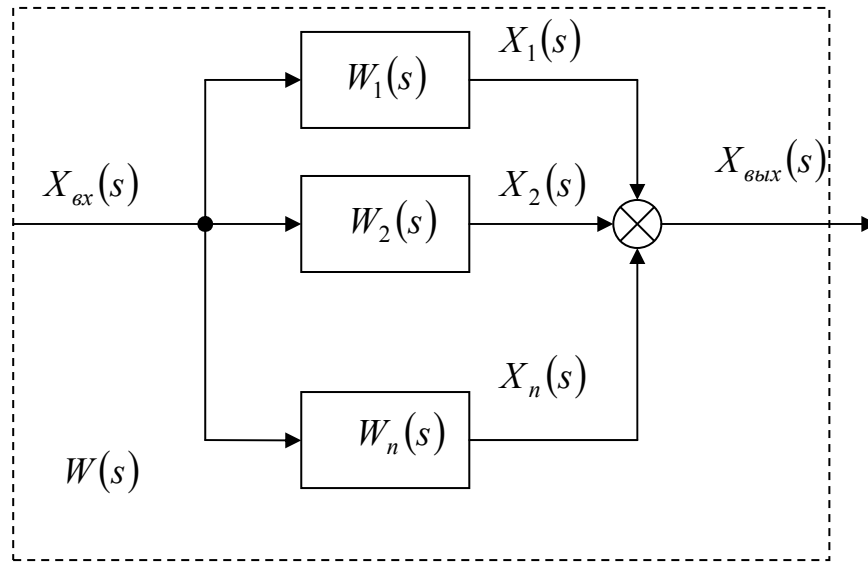


Рис. 2.4. Параллельное соединение звеньев.

Для каждого звена имеем

$$X_1(s) = W_1(s)X_{ex}(s),$$

$$X_2(s) = W_2(s)X_{ex}(s),$$

...

$$X_n(s) = W_n(s)X_{ex}(s).$$

Суммируя почленно все уравнения, получим

$$X_{вых}(s) = \sum_{k=1}^n X_k(s) = \sum_{k=1}^n W_k(s) \cdot X_{ex}(s).$$

Следовательно, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций звеньев

$$W(s) = \sum_{k=1}^n W_k(s). \quad (2.2.35)$$

Важным видом соединений двух звеньев является соединение обратной связью, когда выход первого звена подключен к входу второго, а сигнал с выхода последнего поступает на вход первого звена (рис. 2.5).

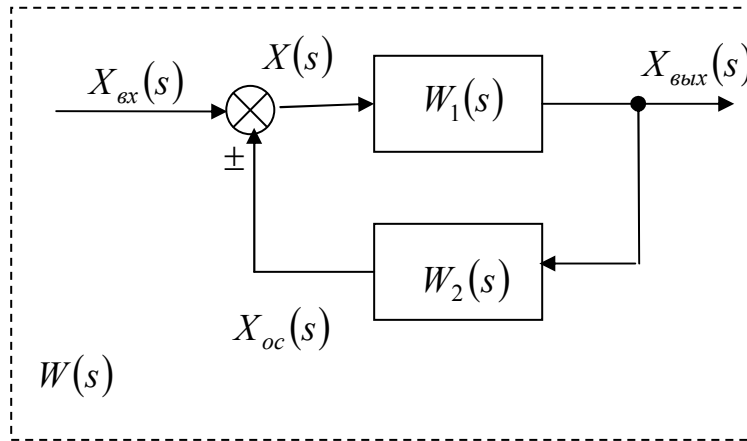


Рис.2.5. Антипараллельное соединение (соединение обратной связью).

Обратная связь может быть положительной, когда сигнал обратной связи $X_{oc}(s)$ складывается с входным сигналом $X_{ex}(s)$ (знак «плюс» у суммирующего элемента на рис.2.5), или отрицательной, когда $X_{oc}(s)$ вычитается из $X_{ex}(s)$ (знак «минус» на рис.2.5). Запишем уравнения, связывающие переменные в схеме рис. 2.5

$$\begin{aligned} X_{вых}(s) &= W_1(s)X(s), \\ X_{oc}(s) &= W_2(s)X_{вых}(s), \\ X(s) &= X_{ex}(s) \pm X_{oc}(s). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее из приведённых уравнений промежуточные переменные из первых двух уравнений, получим

$$\frac{X_{вых}(s)}{W_1(s)} = X_{ex}(s) \pm W_2(s)X_{вых}(s),$$

откуда

$$X_{вых}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)} X_{ex}(s).$$

Окончательно передаточная функция соединения звеньев обратной связью равна

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}. \quad (2.2.36)$$

Знак «минус» в формуле (2.2.36) соответствует положительной, а знак «плюс» - отрицательной обратной связи. Формула (2.2.36) очень важна при получении передаточных функций замкнутых систем, её нужно хорошо помнить и понимать.

Рассмотрим в качестве примера применения обратной связи операционный усилитель* с коэффициентом усиления K , в обратной связи которого подключён импеданс (реактивное сопротивление) z_2 , а в прямой связи

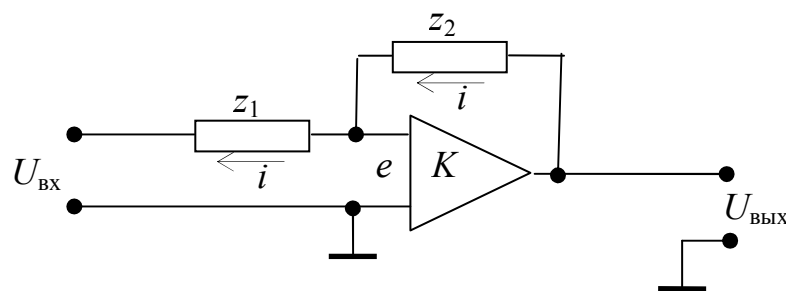


Рис. 2.6. Операционный усилитель с обратной связью

– z_1 (см. рис. 2.6).

Полагая входное сопротивление усилителя достаточно большим (теоретически – бесконечным), запишем уравнения, связывающие ток и напряжение в схеме рис. 2.6

$$U_{\text{ВЫХ}} = -Ke,$$

$$i = \frac{U_{\text{ВЫХ}} - e}{z_2} = \frac{e - U_{\text{ВХ}}}{z_1}.$$

* Операционный усилитель – это усилитель с нечётным числом каскадов с большой полосой пропускания и большим коэффициентом усиления порядка нескольких сотен тысяч или даже миллионов. Современные операционные усилители выполняются в виде микросхем.

Исключая из этих уравнений промежуточную переменную i , найдём передаточную функцию

$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{1}{\frac{1+K}{K} + \frac{z_2}{Kz_1}}.$$

Поскольку коэффициент усиления K достаточно большой, то из последней формулы получаем при $K \rightarrow \infty$

$$W(s) \approx -\frac{z_2}{z_1}. \quad (2.2.37)$$

Полученные выражения (2.2.33) – (2.2.36) позволяют упрощать структурные схема САУ, сворачивая цепочки различного соединения звеньев в один блок с общей передаточной функцией.

2.2.5. Типовые звенья

Как уже было заявлено, для получения структурной схемы САУ следует разбивать на возможно более мелкие, простые звенья. Обычно это звенья, дифференциальные уравнения которых являются уравнениями не выше второго порядка. Такие звенья принято называть типовыми звеньями.

Общее уравнение второго порядка имеет вид

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)x_2(t) = (b_0 p^2 + b_1 p + b_2)x_1(t).$$

Нетрудно подсчитать, что общее число различных типовых звеньев, определяемых различным сочетанием коэффициентов a_i, b_j , достаточно большое. Поэтому рассмотрим только наиболее часто встречающиеся типовые звенья. При этом будем считать, что все коэффициенты a_i, b_j не меньше нуля*.

* Если один из коэффициентов $a_i < 0$, то получаем *неустойчивое* звено; если один из коэффициентов $b_i < 0$, то получаем *неминимально-фазовое* звено.

Апериодическое (инерционное) звено первого порядка имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$. Предполагается, что коэффициент передачи K и постоянная времени T – положительные величины $K > 0, T > 0$. Уравнение этого звена имеет вид

$$(Tp + 1)x_{\text{вых}}(t) = K x_{\text{вх}}(t). \quad (2.2.38)$$

Пример реализации апериодического звена на RC -элементах приведён на рис. 2.7, а, а на операционном усилителе – на рис. 2.7, б.

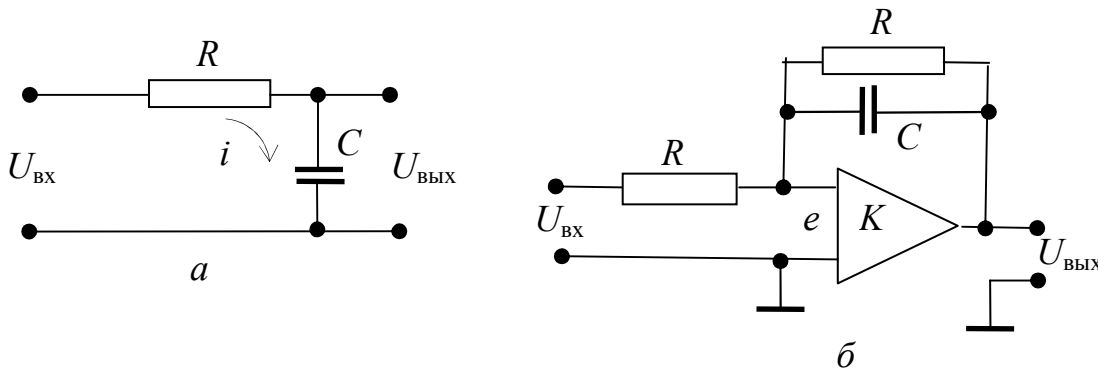


Рис. 2.7. Примеры апериодических звеньев

В первом случае (рис. 2.7, а) передаточную функцию найдём с учётом того, что ток i , протекающий через сопротивление R и ёмкость C одинаков

$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{z_C}{z_R + z_C} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1},$$

где $T=RC$.

Во втором случае (рис. 2.7, б) воспользуемся формулой (2.2.37)

$$W(s) = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}.$$

Переходная функция апериодического звена первого порядка найдётся как решение уравнения (2.2.38) при $x_{\text{вх}}(t)=1(t)$ и нулевых начальных условиях

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \text{ при } t \geq 0.$$

Весовую функцию можно найти либо продифференцировав $h(t)$ (согласно (2.2.23)), либо применив обратное преобразование Лапласа к передаточной функции $W(s)$ (согласно (2.2.25))

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \text{ при } t \geq 0.$$

На рис.2.8 *а, б* приведены соответствующие характеристики.

Если эти характеристики получены экспериментально, то по ним можно определить значения K и T , как показано на рисунках, и восстановить передаточную функцию звена.

Значение постоянной времени звена T характеризует инерционность звена: чем больше постоянная времени, тем длительнее переходной процесс. Теоретически переходной процесс длится бесконечно большое время, практически же за длительность переходного процесса принимают время, прошедшее от начала процесса до момента, когда разница между выходной величиной и её установившимся значением достигает некоторой достаточно малой величины, например, 5% от установившегося значения. В случае $h(t)$ в виде экспоненты это время равно $3T$.

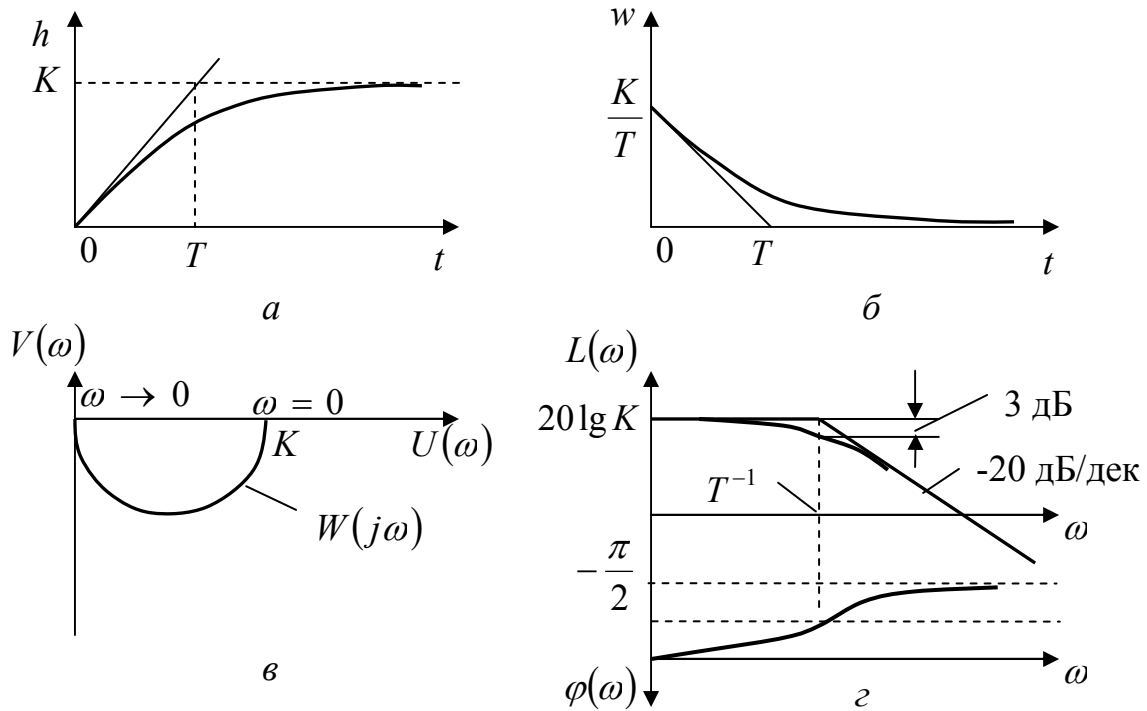


Рис. 2.8. Характеристики аperiodического звена 1-го порядка

АФЧХ инерционного звена имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} = \frac{K - jKT\omega}{1 + T^2\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$U(\omega) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

График АФЧХ показан на рис.2.8, в. Эта характеристика представляет собой полуокружность с радиусом $K/2$ и центром в точке $K/2$ на действительной оси.

АЧХ и ФЧХ получаются как модуль и аргумент частотной функции

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right| = \frac{|K|}{|1 + jT\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad (2.2.39)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{K}{1 + jT\omega} = \arg K - \arg(1 + jT\omega) = -\arctg T\omega.$$

ЛАХ равна

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (2.2.40)$$

Логарифмическая амплитудная характеристика приведена на рис. 2.8, з. Эта ЛАХ приближенно может быть представлена ломаной линией, которая называется асимптотической ЛАХ. Такое название связано с тем, что асимптотическая ЛАХ состоит из двух асимптот, к которым стремится реальная ЛАХ при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$.

При малых значениях частоты $\omega < T^{-1}$ выполняется неравенство $1 > T^2 \omega^2$. Тогда в выражении (2.2.40) во втором слагаемом под знаком квадратного корня можно пренебречь членом $T^2 \omega^2$. В этом случае получаем уравнение первой асимптоты

$$L_1(\omega) = 20 \lg K.$$

Это прямая линия, параллельная оси абсцисс и отстоящая от неё на величину $20 \lg K$.

На частотах $\omega > T^{-1}$ пренебречь можно единицей по сравнению с $T^2 \omega^2$, и из выражения (2.2.40) получаем уравнение второй асимптоты

$$L_2(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg T\omega = 20 \lg K - 20 \lg T - 20 \lg \omega.$$

Вторая асимптота представляет собой прямую линию, проходящую через точку с абсциссой $\omega_c = T^{-1}$ и ординатой $20 \lg K$, имеющую наклон -20 дБ/дек. Обе асимптоты пересекаются в точке, соответствующей частоте $\omega_c = T^{-1}$, поэтому эта частота называется сопрягающей частотой.

Ясно, что максимальная ошибка между реальной ЛАХ и асимптотической ЛАХ будет на сопрягающей частоте. Поскольку при $\omega_c = T^{-1}$, согласно (2.2.40)

$$L(\omega_c) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{2} = 20 \lg K - 3 \text{ дБ},$$

то максимальное расхождение между асимптотической и истинной ЛАХ будет равно 3дБ. Эта величина достаточно маленькая, и при практическом построении достаточно использовать асимптотическую ЛАХ.

ФЧХ по выражению (2.2.39) построена там же на рис. 2.8, з. При частоте, меняющейся от нуля до бесконечности, φ меняется от 0 до $-\pi/2$. В точке, соответствующей сопрягающей частоте, $\varphi = -\pi/4$.

Если частотные характеристики получены экспериментально, по ним можно найти параметры звена K и T согласно рис. 2.8, з.

Если величина постоянной времени T инерционного звена достаточно мала, так, что ей можно пренебречь, то апериодическое звено превращается в безынерционное звено с уравнением

$$x_{\text{вых}}(t) = Kx_{\text{вх}}(t) \quad (2.2.41)$$

и передаточной функцией $W(s) = K$.

Колебательное звено чаще всего задаётся уравнением

$$(T^2 p^2 + 2T\zeta p + 1)x_{\text{вых}}(t) = Kx_{\text{вх}}(t) \quad (2.2.42)$$

при условии, что коэффициент затухания $0 < \zeta < 1$.

Корни характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2T\zeta p + 1 = 0, \quad (2.2.43)$$

соответствующего уравнению (2.2.42), комплексные

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} = -\alpha \pm j\omega,$$

где вещественная часть корней $\alpha = \frac{\zeta}{T}$ определяет быстроту затухания колебательного процесса, а мнимая часть $\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}$ равна фактической

(собственной) частоте затухающих колебаний.

Внимательные читатели могут заметить, что уравнение звена (2.2.15) из примеров 2.1 – 2.4 как раз представляет собой уравнение коле-

бательного звена, поэтому на получении временных характеристик останавливаться не будем.

АЧХ колебательного звена имеет максимум на частоте $\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}$, который тем больше, чем меньше величина коэффициента затухания ζ . ЛАХ состоит из двух асимптот, одна из которых (как и в случае апериодического звена первого порядка) проходит параллельно оси абсцисс на уровне $20\lg K$, а вторая проходит через точку с абсциссой $\omega_0 = T^{-1}$ и ординатой $20\lg K$ и имеет наклон -40дБ/дек . Исследования показали, что расхождение между асимптотической и реальной ЛАХ не превышает 3дБ при $0,4 < \zeta < 0,7$, поэтому при таких значениях ζ достаточно довольствоваться асимптотическими ЛАХ. При других значениях ζ асимптотическую ЛАХ приходится корректировать с помощью готовых графиков поправок. Эти графики поправок для нормированной частоты $\omega_0 = 1$ и нормированного коэффициента передачи $K = 1$ можно найти в справочной литературе по теории автоматического регулирования.

ФЧХ при изменении частоты от нуля до бесконечности меняется от нуля до $-\pi$. В точке, соответствующей частоте свободных колебаний ω_0 , $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

При $\zeta \rightarrow 0$ уравнение (2.2.42) превращается в уравнение идеального (без затухания) колебательного звена, которое называют *консервативным* звеном

$$(T^2 p^2 + 1)x_{\text{вх}}(t) = K x_{\text{вх}}(t).$$

Величина резонансного пика АЧХ консервативного звена стремится к бесконечности, частота колебаний $\omega \rightarrow \omega_0$, где $\omega_0 = \frac{1}{T}$ – частота свободных (без затухания) колебаний, а ФЧХ имеет скачок от 0 до $-\pi$.

Переходная и весовая характеристики консервативного звена представляют собой незатухающие колебания с частотой ω_0 и амплитудой K .
Переходная характеристика имеет постоянную составляющую величиной K , весовая характеристика постоянной составляющей не имеет.

Если $\zeta > 1$, то корни характеристического уравнения (2.2.43) вещественные. В этом случае уравнение (2.2.42) удобнее представить в виде

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_{\text{вых}}(t) = K x_{\text{вх}}(t), \quad (2.2.44)$$

где $T_1 > 2T_2$.

Звено с уравнением (2.2.44) носит название апериодического звена второго порядка. Левую часть уравнения (2.2.44) можно разложить на множители с вещественными коэффициентами, и тогда уравнение будет иметь вид

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)x_{\text{вых}}(t) = K x_{\text{вх}}(t),$$

где $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$.

Таким образом, передаточная функция апериодического звена второго порядка задана формулой

$$W(s) = \frac{K}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

и может быть представлена произведением передаточных функций двух апериодических звеньев первого порядка.

Все звенья, заданные уравнениями (2.2.38), (2.2.41), (2.2.42), (2.2.44) в установившемся статическом режиме описываются одним и тем же уравнением $x_{\text{вых}}^\circ = K x_{\text{вх}}^\circ$, что даёт основания объединить эти звенья в одну группу позиционных звеньев.

К группе интегрирующих звеньев относятся идеальное интегрирующее, интегрирующее с замедлением и изодромное звенья.

Идеальное интегрирующее звено имеет уравнение

$$\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} = K x_{\text{ex}}(t) \text{ или } x_{\text{вых}}(t) = K \int_0^t x_{\text{ex}}(\tau) d\tau + x_{\text{вых}}(0)$$

и соответствующую передаточную функцию $W(s) = \frac{K}{s}$. Название этого звена возникло потому, что выходной сигнал пропорционален интегралу от входного сигнала.

Интегрирующее звено с замедлением или реальное (инерционное) интегрирующее звено задано уравнением

$$T \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} = K x_{\text{ex}}(t)$$

с передаточной функцией $W(s) = \frac{K}{(Ts + 1)s}$. Следовательно, такое звено можно представить последовательным соединением идеального интегрирующего и апериодического звеньев.

Изодромное звено имеет передаточную функцию

$$W(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s},$$

и его можно представить на структурной схеме как параллельное соединение безынерционного и идеального интегрирующего звеньев.

Группа дифференцирующих звеньев включает в себя идеальное дифференцирующее, дифференцирующее с замедлением и форсирующее звенья.

Идеальное дифференцирующее звено задано уравнением

$$x_{\text{вых}}(t) = K \frac{dx_{\text{ex}}(t)}{dt},$$

или передаточной функцией $W(s) = K s$.

Дифференцирующее с замедлением или реальное (инерционное) дифференцирующее звено имеет передаточную функцию

$W(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$, то есть это звено можно представить как последовательное соединение апериодическое звено первого порядка и идеального дифференцирующего звена.

Форсирующее звено задано передаточной функцией $W(s) = K_1 + K_2 s$, и его можно на структурной схеме представить параллельным соединением безынерционного звена и идеального дифференцирующего звена.

Характеристики вышперечисленных звеньев читателю предлагается получить самостоятельно по примеру апериодического звена первого порядка.

Иногда из группы типовых звеньев выделяют элементарные звенья, то есть такие звенья, из которых соответствующим их соединением можно получить все остальные звенья. К таким элементарным звеньям относятся безынерционное (усилительное), идеальное интегрирующее и идеальное дифференцирующее звенья.

Действительно, апериодическое звено первого порядка можно получить, например, охватом идеального интегрирующего звена отрицательной обратной связью (рис. 2.9).

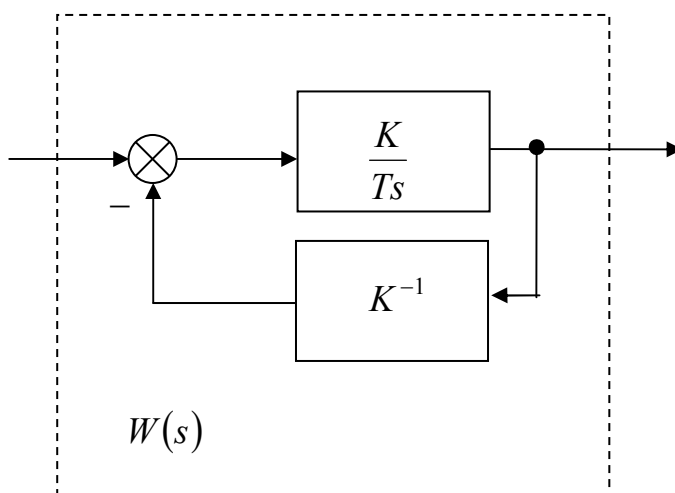


Рис. 2.9. Структурная схема апериодического звена 1-го порядка

Передаточную функцию такого соединения получают по формуле (2.2.35):

$$W(s) = \frac{\frac{K}{Ts}}{1 + \frac{K}{Ts} \cdot \frac{1}{K}} = \frac{K}{Ts + 1}.$$

Таким образом, схема, приведённая на рис. 2.9, представляет собой апериодическое звено 1-го порядка с общим коэффициентом передачи K и постоянной времени T .

Колебательное звено можно получить, например, соединением элементарных звеньев, приведённым на рис.2.10.

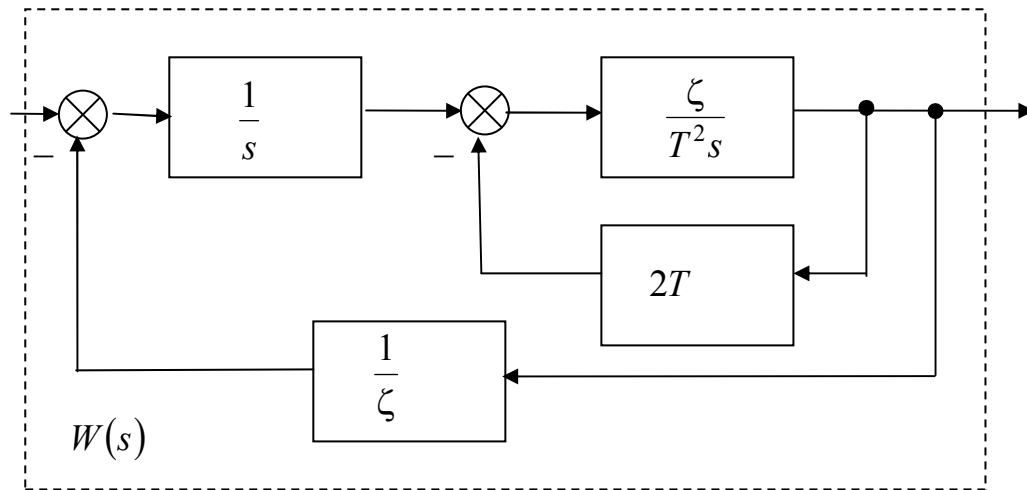


Рис. 2.10. Структурная схема колебательного звена

Получим передаточную функцию схемы, изображённой на рис.

2.10.

$$W(s) = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta}{T^2 s}}{1 + \frac{\zeta}{T^2 s} \cdot 2T} = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta}{(T^2 s + \zeta 2T)}}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta}{(T^2 s + \zeta 2T)}} = \frac{\zeta}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}.$$

Нетрудно заметить, что полученная передаточная функция соответствует уравнению колебательного звена (2.2.42).

Подробный анализ типовых звеньев можно найти в [3].

2.3. Классическое (частотное) описание САУ

После разбиение системы на звенья направленного действия и получения математического описания звеньев в виде передаточных функций или характеристик составляется структурная схема всей САУ. После этого можно получить уравнения, передаточные функции или характеристики системы в целом. Временные и частотные характеристики системы можно получить по соответствующим характеристикам звеньев, но проще получать эти характеристики по передаточной функции системы, воспользовавшись формулами (2.2.26), (2.2.27) для временных характеристик и непосредственным определением частотных характеристик.

2.3.1. Структурный анализ САУ

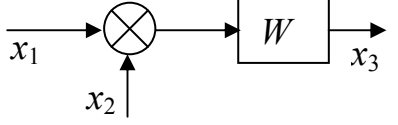
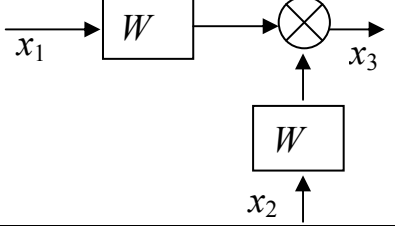
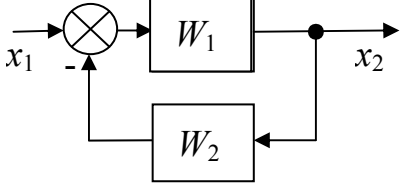
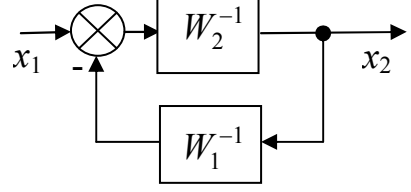
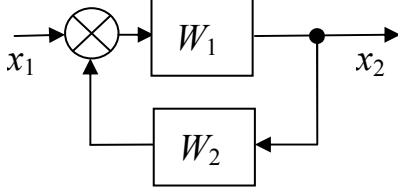
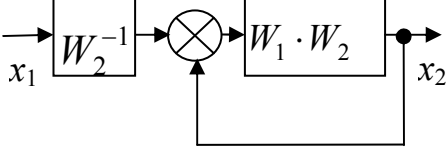
Основная задача структурного анализа – упрощение сложных структурных схем. Получение передаточной функции сложной структурной схемы возможно двумя путями. Первый состоит в преобразовании по определённым правилам отдельных участков структурной схемы. Подобные преобразования называются эквивалентными преобразованиями. Второй путь – применение готовой формулы (формула Мейсона) для структурной схемы любой сложности.

Правила эквивалентных преобразований. Главное правило эквивалентных преобразований – это сохранение неизменными входных и выходных сигналов преобразуемого участка схемы.

По сути, простейшие правила эквивалентных преобразований уже были разобраны, когда речь шла о различных соединениях звеньев. Остальные правила можно свести в таблицу 2.1.

Табл. 2.1

Название	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	2	3
Перестановка узлов		
Перестановка сумматоров		
Перестановка звеньев		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		

1	2	3
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной связи		
Замена звена обратной связи на единичную обратную связь		

Недостатком метода эквивалентных преобразований является то, что не всегда понятно, какие именно правила следует применять для упрощения структурной схемы, то есть в сложных случаях неясно, приведёт ли применение какого-либо эквивалентного преобразования к упрощению или к усложнению схемы.

Формула Мейсона. Другой путь упрощения структурных схем заключается в применении формулы Мейсона, которая позволяет сразу получить передаточную функцию любого сколь угодно сложного участка схемы или всей системы в целом:

$$W(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \cdot \sum_i W_{\text{пр}i}(s) \cdot \Delta_i(s). \quad (2.3.1)$$

В формуле (2.3.1) $W_{\text{пр}i}(s)$ – передаточные функции отдельных прямых путей от входного воздействия до выходной величины. Знаменатель $\Delta(s)$ подсчитывается по выражению:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i W_i(s) + \sum_{i \neq j} W_i(s) \cdot W_j(s) - \sum_{i \neq j \neq k} W_i(s) \cdot W_j(s) \cdot W_k(s) + \dots, \quad (2.3.2)$$

где $W_i(s)$ в первой сумме – передаточные функции замкнутых контуров обратной связи, во второй сумме присутствуют произведения передаточных функций двух непересекающихся (то есть не имеющих общих точек) контуров, в третьей сумме – произведения передаточных функций трёх непересекающихся контуров, и т.д. Присутствующая в формуле (2.3.1) передаточная функция $\Delta_i(s)$ – это то, что остаётся от $\Delta(s)$ после изъятия из рассмотрения i -го прямого пути (при этом разрушаются все контуры обратных связей, имеющие общие точки с этим прямым путём). В выражениях (2.3.1) и (2.3.2) все передаточные функции берутся со знаком, совпадающим со знаком соответствующей прямой или обратной связи.

Пример 2.5. Структурная схема некоторого участка системы приведена на рис. 2.10.

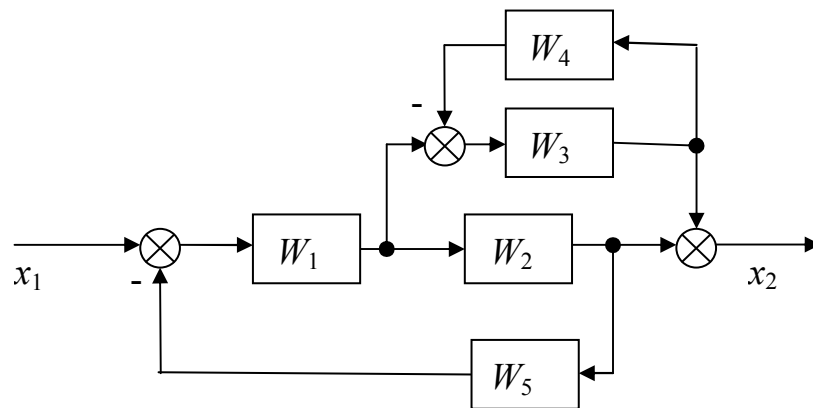


Рис. 2.10. Пример сложной многоконтурной схемы.

В этой схеме два контура обратной связи, причем обе они отрицательные: $-W_1 \cdot W_2 \cdot W_5$ и $-W_3 \cdot W_4$. Поскольку эти обратные связи не пересекаются, то формула (2.3.2) для данного примера будет иметь следующий вид:

$$\Delta(s) = 1 - (-W_1 \cdot W_2 \cdot W_5 - W_3 \cdot W_4) + (-W_1 \cdot W_2 \cdot W_5) \cdot (-W_3 \cdot W_4).$$

На схеме рис. 2.10 два прямых пути от x_1 до x_2 : $W_{\text{пр}1}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$ и $W_{\text{пр}2}(s) = W_1(s) \cdot W_3(s)$.

Теперь запишем $\Delta_1(s) = 1 + W_3(s) \cdot W_4(s)$. При этом разрушается первая обратная связь с передаточной функцией $-W_1 \cdot W_2 \cdot W_5$ и в составе Δ_1 остаётся только передаточная функция второго контура обратной связи с передаточной функцией $-W_3 \cdot W_4$. Соответственно получаем $\Delta_2(s) = 1$, поскольку при этом разрушаются обе обратные связи. Подставляя найденные передаточные функции в формулу (2.3.1), получаем итоговую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot (1 + W_3(s) \cdot W_4(s)) + W_1(s) \cdot W_3(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_5(s) + W_3(s) \cdot W_4(s) + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_5(s) \cdot W_3(s) \cdot W_4(s)}.$$

На практике часто эквивалентные преобразования и формула Мейсона применяются в комплексе.

2.3.2. Уравнения и передаточные функции одноконтурной САУ

Рассмотрим наиболее распространённую функциональную схему САУ, реализующую регулирование по ошибке (см. рис. 1.7). Для простоты будем считать все воздействия скалярами. В результате разбиения отдельных блоков схемы на звенья направленного действия, получения передаточных функций этих звеньев и необходимых упрощений получаем структурную схему, приведённую на рис. 2.11, а.

Здесь использованы следующие обозначения:

$$W_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad \text{— передаточная функция регулятора (устройства}$$

управления),

$$W_{ou}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{— передаточная функция объекта по регулируемому}$$

воздействию,

$W_{of}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$ – передаточная функция объекта по возмущающему

воздействию.

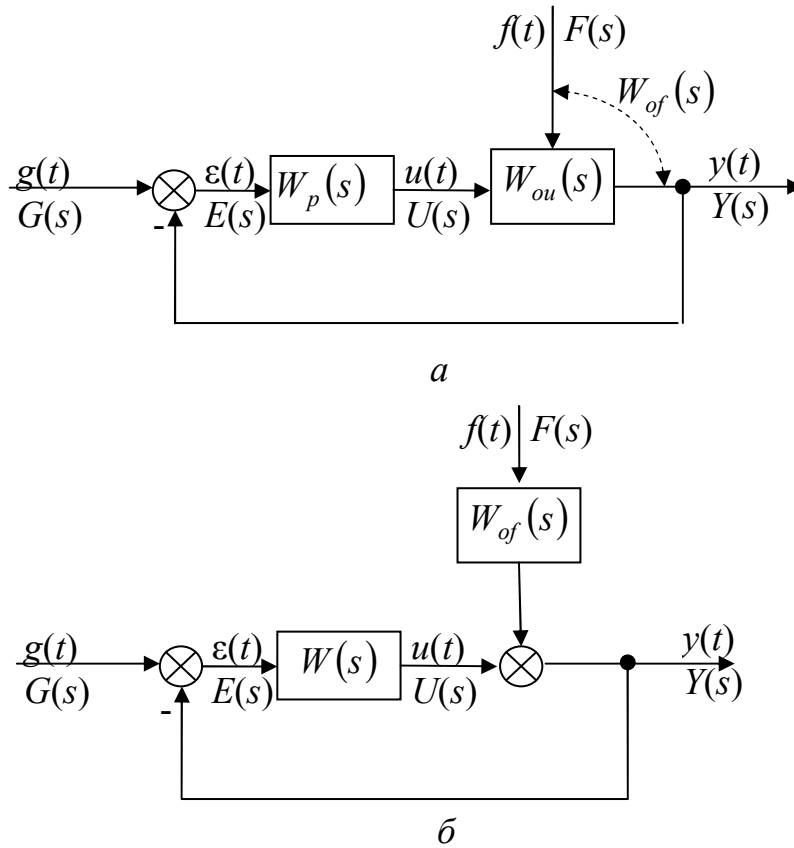


Рис. 2.11. Структурная схема одноконтурной системы.

Все упомянутые выше передаточные функции представляют собой дроби, в которых числители и знаменатели являются полиномами относительно переменной s , при этом для физически реализуемых устройств степень числителя всегда меньше степени знаменателя. То есть, можно записать:

$$W_p(s) = \frac{b_{p0}s^k + b_{p1}s^{k-1} + \dots + b_{pk}}{a_{p0}s^r + a_{p1}s^{r-1} + \dots + a_{pr}} = \frac{B_p(s)}{A_p(s)}, \quad (k < r); \quad (2.3.3)$$

$$W_{ou}(s) = \frac{b_{ou0}s^q + b_{ou1}s^{q-1} + \dots + b_{ouq}}{a_{ou0}s^p + a_{ou1}s^{p-1} + \dots + a_{oup}} = \frac{B_{ou}(s)}{A_{ou}(s)}, \quad (q < p); \quad (2.3.4)$$

$$W_{of}(s) = \frac{b_{of0}s^l + b_{of1}s^{l-1} + \dots + b_{ofl}}{a_{of0}s^d + a_{of1}s^{d-1} + \dots + a_{ofd}} = \frac{B_{of}(s)}{A_{of}(s)}, \quad (l < d). \quad (2.3.5)$$

С учётом введённых выше обозначений дифференциальное уравнение, например, регулятора имеет вид

$$(a_{p0}p^r + a_{p1}p^{r-1} + \dots + a_{pr})u(t) = (b_{p0}p^k + b_{p1}p^{k-1} + \dots + b_{pk})\varepsilon(t). \quad (2.3.6)$$

Принимая во внимание принцип суперпозиции и правила соединения звеньев, схему рис. 2.11, а можно преобразовать в схему рис. 2.11, б. На этом рисунке $W(s) = W_p(s) \cdot W_{ou}(s)$.

Случай 1. Положим $f(t) = 0, g(t) \neq 0$ и разорвем обратную связь. Тогда связь выходной (регулируемой) величины и входного (задающего) воздействия выражается дифференциальным уравнением

$$y(t) = W(p)g(t).$$

Функция $W(s)$ называется передаточной функцией разомкнутой системы (по задающему воздействию). Передаточная функция $W(s)$ согласно обозначениям (2.3.3), (2.3.4) представляет собой правильную рациональную дробь

$$W(s) = W_p(s) \cdot W_{ou}(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} \cdot \frac{B_{ou}(s)}{A_{ou}(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0^\circ s^n + a_1^\circ s^{n-1} + \dots + a_n^\circ} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.3.7)$$

где $m = k + q, n = r + p$, при этом $m < n$.

Знаменатель передаточной функции (2.3.7), то есть полином $A(s)$ — это характеристический полином разомкнутой системы.

Случай 2. Пусть по-прежнему $f(t) = 0, g(t) \neq 0$, но обратная связь теперь замкнута. Передаточную функцию, связывающую вход и выход системы, можно получить или по формуле соединения звеньев обратной связью, или по формуле Мейсона (с учётом того, что передаточная функция звена в обратной связи равна единице). Дифференциальное уравнение, свя-

зывающее задающее воздействие и регулируемую величину, будет тогда иметь вид

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g(t) = \Phi(p)g(t). \quad (2.3.8)$$

В уравнении (2.3.7) функция

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} \quad (2.3.9)$$

называется передаточной функцией замкнутой системы (по задающему воздействию) или главным оператором системы. Передаточная функция $\Phi(s)$ – правильная рациональная дробь и с учётом обозначений (2.3.7) может быть представлена в виде

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)} = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.3.10)$$

Дифференциальное уравнение системы (2.3.8) с учётом выражения (2.3.10) примет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)g(t). \quad (2.3.11)$$

Знаменатель передаточной функции $\Phi(s)$, то есть полином $D(s)$, называется характеристическим полиномом замкнутой системы.

Случай 3. Теперь пусть $f(t) \neq 0$, $g(t) = 0$ и обратная связь опять разомкнута. Дифференциальное уравнение, связывающее входное (в данном случае возмущающее) воздействие и выходную величину, будет иметь вид

$$y(t) = W_{of}(p)f(t).$$

Случай 4. При прежних условиях, что и в случае 3 ($f(t) \neq 0$, $g(t) = 0$) замкнём обратную связь. Полученное уравнение имеет вид

$$y(t) = \frac{W_{of}(p)}{1+W(p)} f(t) = \Phi_{fy}(p) f(t), \quad (2.3.12)$$

где $\Phi_{fy}(s)$ – передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию – получена по формуле Мейсона.

Случай 5. В общем случае, когда в системе есть и задающее и возмущающее воздействие, в соответствии с принципом суперпозиции получаем

$$y(t) = \Phi(p)g(t) + \Phi_{fy}(p)f(t). \quad (2.3.13)$$

Если в системе имеется несколько возмущающих воздействий, второе слагаемое в выражении (2.3.13) превращается в сумму

$$y(t) = \Phi(p)g(t) + \sum_k \Phi_{f_k y}(p)f_k(t).$$

Часто в САР интерес представляет величина ошибки регулирования $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$. Уравнение замкнутой системы относительно ошибки будет иметь вид

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1+W(p)} g(t) - \frac{W_{fy}(p)}{1+W(p)} f(t) = \Phi_{g\varepsilon}(p)g(t) + \Phi_{f\varepsilon}(p)f(t), \quad (2.3.14)$$

где передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия $\Phi_{g\varepsilon}(s)$ и передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно возмущающего воздействия $\Phi_{f\varepsilon}(s)$ могут быть получены по формуле Мейсона, и с учётом формулы (2.3.9) задаются выражениями:

$$\Phi_{g\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = 1 - \Phi(s), \quad (2.3.15)$$

$$\Phi_{f\varepsilon}(s) = \frac{-W_{fy}(s)}{1+W(s)} = (\Phi(s) - 1)W_{fy}(s). \quad (2.3.16)$$

Передаточная функция по ошибке $\Phi_{g\varepsilon}(s)$ – неправильная (степень числителя равна степени знаменателя) дробь и согласно (2.3.7) равна

$$\Phi_{g\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{A(s)}{A(s)+B(s)}.$$

2.3.3. Линейные законы регулирования.

Закон регулирования или, в более общем случае, закон управления – это, по сути, алгоритм преобразования входных воздействий регулятора (устройства управления) в управляющие воздействия на объект управления. Линейные законы определяются линейными дифференциальными уравнениями. В системе, реализующей принцип регулирования по ошибке (см. рис. 2.9, а), уравнение регулятора имеет вид (2.3.6)

$$(a_{p0}p^r + a_{p1}p^{r-1} + \dots + a_{pr-1}p + a_{pr})u(t) = (b_{p0}p^k + b_{p1}p^{k-1} + \dots + b_{pk})\varepsilon(t)$$

Если свободный член левой части не равен нулю $a_{pr} \neq 0$, то полином в левой части $A_p(p) = a_{p0}p^r + a_{p1}p^{r-1} + \dots + a_{pr-1}p + a_{pr}$ определяет свободное движение (переходной процесс) в регуляторе.

Если $a_{pr} = 0$, то полином в левой части можно представить в виде $A_p(p) = a_{p0}p^r + a_{p1}p^{r-1} + \dots + a_{pr-1}p = (a_{p0}p^{r-1} + a_{p1}p^{r-2} + \dots + a_{pr-1})p = A_{p1}(p)p$ и тогда уравнение регулятора будет

$$A_{p1}(p)u(t) = \frac{B_p(p)}{p}\varepsilon(t).$$

Свободное движение регулятора будет в этом случае определяться полиномом $A_{p1}(p)$.

В общем случае в полиноме левой части нулю могут равняться несколько (пусть их будет ν) последних коэффициентов

$$a_{pr} = a_{pr-1} = \dots = a_{pr-\nu+1} = 0.$$

Тогда уравнение регулятора будет $A_{p\nu}(p)u(t) = \frac{B_p(p)}{p^\nu}\varepsilon(t)$ и переходной процесс определится полиномом $A_{p\nu}(p)$.

В понятие алгоритма управления переходной процесс не входит (он краткосрочный по сравнению с процессом управления), поэтому линейные законы регулирования задаются общей формулой

$$u(t) = \frac{B_p(p)}{p^v} \varepsilon(t). \quad (2.3.17)$$

В зависимости от числа v и от вида полинома в выражении (2.3.17) получаем различные законы регулирования. Рассмотрим основные виды таких законов.

Позиционный (пропорциональный) закон. В этом случае $v=0$, $B_p(s) = K_{\Pi}$ и формула (2.3.17) превратится в $u(t) = K_{\Pi} \varepsilon(t)$. Таким образом, управление *пропорционально* величине ошибке (отсюда и название закона). Регулятор, реализующий этот закон, называется пропорциональным регулятором или П-регулятором.

Интегральный закон. Простейший интегральный закон получим, если $v=1$, $B_p(p) = K_{\text{И}}$. Тогда уравнение (2.3.17) будет иметь вид

$$u(t) = K_{\text{И}} p^{-1} \varepsilon(t)$$

или, учитывая, что p^{-1} означает операцию интегрирования в дифференциальных уравнениях,

$$u(t) = K_{\text{И}} \int \varepsilon(t) dt .$$

Из последней формулы ясно, что управление пропорционально *интегралу* от ошибки, поэтому соответствующий регулятор носит название интегрального регулятора или И-регулятора.

Изодромный закон. Положим $v=1$ и $B_p(p) = K_{\text{И}} + K_{\Pi} p$. Подставляя эти значения в формулу (2.3.17), получим

$$u(t) = \frac{K_{\text{И}} + K_{\Pi} p}{p} \varepsilon(t) = K_{\Pi} \varepsilon(t) + K_{\text{И}} p^{-1} \varepsilon(t).$$

Изодромный закон содержит две составляющие – пропорциональную и интегральную, поэтому этот закон называют ещё пропорционально-

интегральным, а регулятор, реализующий этот закон, называют пропорционально-интегральным или ПИ-регулятором.

Пропорционально-дифференциальный закон. Из названия следует, что в этом законе присутствуют пропорциональная и дифференциальная составляющие. При этом $v=0$, а $B_p(p) = K_{\Pi} + K_{\text{Д}} p$. Тогда

$$u(t) = K_{\Pi} \varepsilon(t) + K_{\text{Д}} p\varepsilon(t).$$

Соответствующий этому закону регулятор называется пропорционально-дифференциальным или ПД-регулятором.

Наконец, если в законе регулирования есть все три составляющие – пропорциональная, интегральная и дифференциальная, то получаем пропорционально-интегрально-дифференциальный закон и соответственно ПИД-регулятор. В данном случае связь управляющего воздействия $u(t)$ и ошибки $\varepsilon(t)$ задаётся формулой

$$u(t) = K_{\Pi} \varepsilon(t) + K_{\text{И}} p^{-1} \varepsilon(t) + K_{\text{Д}} p\varepsilon(t).$$

Рассмотрены только самые простые виды законов. В более сложных случаях в составе закона могут присутствовать производные второго или более высокого порядка, двойные, тройные и т.д. интегралы. Необходимо понимать, что дифференциальный закон в чистом виде, то есть когда в законе имеется только производная от ошибки, не применяется, поскольку в этом случае управляющее воздействие $u(t)$ не зависит от величины ошибки (она может быть как угодно большая, что недопустимо), а от скорости её изменения.

2.4. Описание САУ в пространстве состояний

Метод пространства состояний имеет ряд преимуществ по сравнению с классическим (частотным) методом:

- удобство решения задач на ЦВМ;
- единообразие описания одномерных и многомерных систем;

- возможность применения к некоторым типам нелинейных и нестационарных систем.

В общем случае состояние системы можно определить как минимальную информацию о системе, необходимую для определения (при известной входной функции) ее выхода, а также ее состояния в будущем. Таким образом, переменные состояния системы – это такие переменные, знание значений которых в некоторый начальный момент времени t_0 позволяет определить поведение системы в текущий момент времени $t > t_0$ (естественно, если известны входные воздействия системы на интервале (t_0, t)).

2.4.1. Уравнения состояния

Как известно [1], линейные уравнения состояния, записанные в векторно-матричной форме, в общем виде имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

В выражении (2.4.1) использованы обозначения:

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – n -мерный вектор-столбец переменных состояния системы;

$\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t))^T$ – p -мерный вектор-столбец входных воздействий;

$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t))^T$ – l -мерный вектор-столбец регулируемых величин;

$\mathbf{A}(t) = [a_{ik}(t)]$ – $(n \times n)$ -мерная матрица системы (основная или собственная параметрическая матрица системы);

$\mathbf{B}(t) = [b_{ik}(t)]$ – $(n \times p)$ -мерная матрица связи (структура этой матрицы определяет характер связи входных воздействий с переменными состоянием);

$\mathbf{C}(t) = [c_{ik}(t)]$ – $(l \times n)$ -мерная матрица связи (именно, связи переменных состояний с выходными (регулируемыми) воздействиями);

$\mathbf{D}(t) = [d_{ik}(t)]$ – $(l \times p)$ -мерная матрица связи входных переменных непосредственно с выходными переменными*.

Система, описываемая уравнениями (2.4.1), – нестационарная система (система с переменными параметрами). Если параметры системы со временем не меняются, то элементы матриц не зависят от времени, и уравнения (2.4.1) упрощаются и обретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

По сути выражения (2.4.2) представляют собой две системы уравнений. Первая называется собственно уравнениями состояния, а вторая – уравнениями выхода.

2.4.2. Стандартная форма уравнений состояния

Переменные состояния могут быть заданы различным образом. Один из распространённых методов (особенно просто применять этот метод в системах с одним входом и одним выходом) заключается в переходе к фазовым координатам системы.

Пусть имеется уравнение системы, например, в виде (2.3.11). Для простоты положим в этом уравнении полином в правой части равным единице. Кроме того, положим коэффициент при старшей производной $y(t)$ также равным единице $a_0 = 1$. Это всегда можно проделать, поделив почленно все слагаемые на a_0 . Тогда получим

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)y(t) = g(t). \quad (2.4.3)$$

Зададим переменные состояния следующим образом:

* Часто для реальных систем матрица \mathbf{D} является нулевой матрицей, так что непосредственная связь входа с выходом отсутствует.

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t), \\
x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = py(t), \\
x_3(t) &= \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = p^2 y(t), \\
&\dots, \\
x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) = p^{n-1} y(t).
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Перепишем уравнения (2.4.4) в форме Коши, то есть расположим производные в левой части уравнений, а всё остальное – в правой. Добавим сюда уравнение для n -ой компоненты вектора состояния. Это уравнение получим, подставив в выражение (2.4.3) вместо производных выходной величины $y(t)$ компоненты вектора состояния в соответствии с обозначениями (2.4.4). Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\
&\dots, \\
\dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\
\dot{x}_n(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + g(t); \\
y(t) &= x_1(t).
\end{aligned}$$

Представив полученную систему уравнений в векторно-матричной форме (2.4.2), получаем следующий вид соответствующих матриц **A**, **B**, **C** и **D**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{2.4.5}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Матрица \mathbf{A} вида (2.4.5) называется матрицей Фробениуса, а уравнения состояния с такой матрицей \mathbf{A} – уравнениями в стандартной форме или в канонической форме фазовой переменной.

2.4.3. Нормальная (каноническая) форма уравнений состояния

При исследовании систем методом пространства состояний желательно, чтобы уравнения состояния были бы независимы друг от друга, то есть в каждом уравнении состояния присутствовали только одноименные компоненты вектора состояния. В этом случае матрица \mathbf{A} в уравнениях (2.4.2) является диагональной. Система координат, в которой матрица \mathbf{A} имеет диагональный вид, называется нормальной системой, а сами координаты – нормальными координатами. Уравнения состояния, записанные в нормальной системе координат, называются уравнениями состояния в нормальном или каноническом виде.

Если первоначальная форма записи не является канонической, то существующие методы теории матриц позволяют перейти к диагональному виду матрицы \mathbf{A} .

Из теории матриц известно, что одним из часто применяемых методов диагонализации является применение преобразования подобия, когда в качестве преобразующей матрицы используется модальная матрица:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}, \quad (2.4.5)$$

где \mathbf{A} – произвольная квадратная ($n \times n$)-мерная матрица с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; \mathbf{M} – модальная матрица.*

Если матрица \mathbf{A} имеет различные характеристические числа или при кратном характеристическом числе λ_i вырожденность соответствующей характеристической матрицы $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ полная (дефект характеристической матрицы $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равен кратности корня λ_i), преобразование

* Модальная матрица – это матрица, столбцы которой являются характеристическими векторами, соответствующими собственным числам λ_i .

(2.4.5) приводит к диагональной матрице Λ с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали.

Пусть система задана уравнениями состояния в общем виде (2.4.2). Произведем линейное преобразование координат $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$, где \mathbf{M} – модальная матрица. Тогда уравнения (2.4.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Умножив первое из уравнений (2.4.6) на \mathbf{M}^{-1} , получим

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{g}(t).$$

Так как матрица \mathbf{M} является модальной матрицей, преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ даст при известных условиях диагональную матрицу с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ по диагонали. Окончательно получаем уравнения состояния в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \Lambda\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}_n\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_n\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}_n\mathbf{g}(t), \end{aligned}$$

где $\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M}$, $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}$.

Если дефект характеристической матрицы $[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}]$ меньше кратности корня λ_i , преобразование (2.4.5) уже не приведёт к диагональной матрице. Но в этом более общем случае преобразование (2.4.5) даёт каноническую форму Жордана. Попутно заметим, что симметрические матрицы всегда подлежат диагонализации.

2.4.4. Взаимосвязь классического (частотного) и векторно-матричного описания САУ

Поскольку метод пространства состояний может с равным успехом применяться как для одномерных, так и для многомерных систем, для выяснения связи классического (частотного) метода и метода пространства состояний в случае многомерных систем введём матричную передаточную функцию $\mathbf{W}(s)$.

Пусть многомерная система описывается векторно-матричным уравнением

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{G}(s), \quad (2.4.7)$$

где $\mathbf{Y}(s) = [Y_1(s) \ Y_2(s) \ \dots \ Y_l(s)]^T$ представляет преобразование Лапласа l -мерного вектора-столбца регулируемых величин $\mathbf{y}(t)$;

$\mathbf{G}(s) = [G_1(s) \ G_2(s) \ \dots \ G_p(s)]^T$ есть преобразование Лапласа p -мерного вектора-столбца входных сигналов $\mathbf{g}(t)$, а

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1p}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2p}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{l1}(s) & W_{l2}(s) & \dots & W_{lp}(s) \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

есть матрица, элементами которой являются $W_{ij}(s)$ – передаточные функции от j -го входа к i -му выходу. Эта матрица (2.4.8) называется матричной передаточной функцией.

К уравнениям (2.4.2) применим преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях. Получим

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{G}(s), \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{G}(s). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Из уравнения состояния (2.4.9) найдём $\mathbf{X}(s)$ и подставим в уравнение выхода:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}(s) + \mathbf{D}\mathbf{G}(s). \quad (2.4.10)$$

Сравнивая уравнения (2.4.10) и (2.4.7), приходим к выводу, что матричная передаточная функция равна

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2.4.11)$$

В последнем выражении можно перейти из частотной области в область времени, применив к выражению (2.4.11) обратное преобразование

Лапласа. Тогда, согласно (2.2.26), получим матричную весовую функцию системы

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t),$$

где через $\Phi(t)$ обозначена переходная матрица уравнений состояния, а

$$\delta(t) = \left[\underbrace{\delta(t) \quad \delta(t) \quad \dots \quad \delta(t)}_l \right]^T - l\text{-мерный вектор-столбец дельта-функций.}$$

В заключение темы, посвященной математическому описанию звеньев и систем в целом, отметим, что принятое выше описание их с помощью передаточных функций, частотных и переходных характеристик или уравнений состояния является достаточно полным только с точки зрения исследования процессов управления. При этом мы не принимаем во внимание не только физическую природу входных и выходных переменных, но и их энергетические характеристики; учитываются только информационные стороны процессов.

Когда же дело доходит до реализации определённой структурной схемы в виде соответствующей аппаратуры, такого описания недостаточно. Необходимо учитывать физическую природу сигналов и ряд других их свойств, в том числе и мощность. Однако этот аспект выходит за рамки данного курса и относится к задаче расчета и проектирования аппаратуры.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ

После того, как получено математическое описание системы, можно перейти к одной из задач, ради которых, собственно, и получалось это математическое описание – к задаче анализа.* Первой и главной задачей анализа является определение устойчивости системы. Этот вопрос важен, во-первых, потому, что в большинстве случаев неустойчивая система непригодна для практического использования, и, во-вторых, потому, что даже в устойчивых системах нужно знать, какие запасы устойчивости она (система) имеет. В результате анализа устойчивости обычно недостаточно получить прямой и однозначный ответ на вопрос, устойчива ли система. В большинстве практических случаев инженеру-проектировщику необходимо ясно представлять себе, какие из параметров элементов системы наиболее сильно влияют на устойчивость, и как их следует изменить, чтобы обеспечить необходимый запас устойчивости.

3.1. Понятие устойчивости

3.1.1. Определение устойчивости

Понятие устойчивости системы связано с её способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели систему из этого состояния.

Интуитивно ясно, что шарик, находящийся на вогнутой поверхности, можно назвать находящимся в состоянии устойчивого равновесия, поскольку после выведения его из состояния равновесия какой-либо силой и прекращения действия этой силы, шарик, в конце концов, вернётся в положение, близкое к первоначальному состоянию равновесия. Напротив, шарик, находящийся на вершине выпуклой поверхности, находится в состоянии неустойчивого равновесия, так как, если его вывести из этого

* Вторая задача – задача синтеза.

состояния (например, толкнуть), никогда сам не вернётся (сколь бы долго мы этого не ожидали) в положение, близкое к первоначальному состоянию равновесия. Назовём первоначальное состояние шарика **невозмущённым** состоянием, а состояние после приложения внешней силы – **возмущённым**.

Тогда по аналогии с этим примером понятие устойчивости можно было бы сформулировать так: *система называется устойчивой, если из возмущённого состояния она с течением времени перейдёт в некоторую конечную область, окружающую невозмущённое состояние равновесия и неустойчивой, если из возмущённого состояния она никогда не перейдёт в конечную область, окружающую невозмущённое состояние равновесия.*

Однако в действительности система управления не всегда находится в статике; в ней происходят какие-то изменения входных, выходных или внутренних переменных. Приведённое выше понятие устойчивости можно распространить и на случай движения некоторой системы.

Пусть состояние системы определяется вектором состояния $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$. Заданное движение определится некоторым законом изменения координат $\mathbf{x}_0(t) = [x_{10}(t) \ x_{20}(t) \ \dots \ x_{n0}(t)]^T$. Аналогично случаю равновесного положения заданное движение можно назвать невозмущённым движением. Приложение к рассматриваемой системе внешних сил вызовет отклонение действительного движения от заданного – $x_i(t) \neq x_{i0}(t)$. Это движение назовём возмущённым. Тогда *систему можно назвать устойчивой, если в результате приложения внешних воздействий, которые затем снимаются, возмущённое движение по истечении времени войдёт в заданную область*

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| < \varepsilon_i \quad (3.1.1)$$

и неустойчивой, если такого не произойдёт.

Но ведь могут быть (и довольно часто) случаи, когда в системе невозможно прекратить воздействие внешних сил: возмущающие воздействия непрерывно меняются, и нет времени ждать, чтобы выяснить, выполнится ли, в конце концов, неравенство (3.1.1) или нет. Конечно, можно сформулировать понятие устойчивости и этом, более общем случае. **Систему назовём устойчивой, если при ограниченных воздействиях на неё реакция (переменные состояния, либо регулируемая величина) также ограниченная, и неустойчивой, если реакция на ограниченные воздействия неограниченно возрастает.** Нетрудно видеть, что данное определение удовлетворяет и всем вышеприведённым определениям.

3.1.2. Необходимое и достаточное условие устойчивости

Получим необходимое и достаточное условие устойчивости. Запишем уравнения относительно изображения (по Лапласу) и оригинала реакции (выхода) линейной системы:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \Phi(s)F(s), \\ y(t) &= \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где $\Phi(s)$ – передаточная функция замкнутой системы, $w(t)$ – её весовая функция, $f(t)$ – внешнее воздействие.

Оценим абсолютную величину реакции системы. Поскольку абсолютная величина суммы (интеграла) не превышает абсолютной величины слагаемых (подынтегрального выражения), то

$$|y(t)| \leq \int_0^t |w(\tau)| \cdot |f(t-\tau)| d\tau. \quad (3.1.3)$$

Предположим, что внешнее воздействие ограничено, то есть $|f(t)| \leq M_0 < \infty$ при любом t , а значит и $|f(t-\tau)| \leq M_0$. Заменяя в выраже-

нии (3.1.3) верхний предел на ∞ , а в подынтегральном выражении внешнее воздействие на M_0 , мы только усилим неравенство

$$|y(t)| \leq M_0 \int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau.$$

Из полученного неравенства видно, что для ограниченной реакции системы (то есть для её устойчивости) достаточно, чтобы интеграл $\int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau$ был ограниченным. Таким образом, для устойчивости линейной системы достаточно выполнения условия абсолютной интегрируемости её весовой функции:

$$\int_0^{\infty} |w(t)| dt < \infty. \quad (3.1.4)$$

Интеграл в выражении (3.1.4) понимается в смысле главного значения.

Условие (3.1.4) является также и **необходимым**. Действительно, пусть в **устойчивой** системе условие (3.1.4) не выполняется, то есть

$$\int_0^{\infty} w(t) dt = \infty. \quad (3.1.5)$$

Тогда, выбирая при фиксированном $t=t_0$ ограниченное воздействие

$$\text{вида } f(t_0 - \tau) = \text{sign } w(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } w(\tau) > 0, \\ 0 & \text{при } w(\tau) = 0, \\ -1 & \text{при } w(\tau) < 0, \end{cases} \text{ из второго уравнения (3.1.2)}$$

получим выражение для реакции в момент времени t_0

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} w(\tau) \text{sign } w(\tau) d\tau = \int_0^{t_0} |w(\tau)| d\tau.$$

Последнее равенство справедливо при любом t_0 , в том числе и при достаточно больших t_0 . Но при $t_0 \rightarrow \infty$, как следует из равенства (3.1.5), реакция системы будет неограниченно возрастать, а именно:

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} y(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} |w(\tau)| d\tau = \infty.$$

Неограниченная реакция системы при ограниченном воздействии говорит о неустойчивости системы (но первоначально мы предполагали устойчивость системы!). Полученное противоречие доказывает необходимость условия (3.1.4) для устойчивости системы.

Таким образом, для того, чтобы линейная САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы её весовая характеристика $w(t)$ была абсолютно интегрируема.

Абсолютная интегрируемость весовой функции накладывает определённые условия на передаточную функцию (замкнутой системы) $\Phi(s)$. Связь весовой $w(t)$ и передаточной $\Phi(s)$ функций определяется формулой (2.2.25):

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Взяв левую и правую часть по модулю, получим неравенство

$$|\Phi(s)| \leq \int_0^{\infty} |w(\tau)| \cdot |e^{-s\tau}| d\tau. \quad (3.1.6)$$

В правой части комплексной плоскости s , включая мнимую ось, (то есть при $\operatorname{Re} s \geq 0$) имеет место неравенство $|e^{-s\tau}| \leq 1$. Следовательно, заменив в неравенстве (3.1.6) экспоненту на единицу, мы только усилим это неравенство

$$|\Phi(s)| \leq \int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau \quad \text{при } \operatorname{Re} s \geq 0.$$

Учитывая условие абсолютной интегрируемости весовой функции (3.1.4), приходим к выводу о том, что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы её передаточная функция была ограничена в правой части комплексной плоскости, включая мнимую ось, то есть не

имела бы там особых точек. Сформулированному условию можно придать и другую форму, а именно: для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы особые точки её передаточной функции* располагались в левой части комплексной плоскости, то есть имели отрицательную вещественную часть. Так как знаменатель передаточной функции замкнутой системы, согласно (2.3.10), – характеристический полином $D(s)$, то полюсы передаточной функции представляют собой корни характеристического уравнения системы

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.1.7)$$

А поскольку передаточные функции замкнутой системы по отношению к любым воздействиям содержат в знаменателе один и тот же характеристический полином, то сделанный вывод об устойчивости системы не зависит ни от точки приложения воздействия, ни от точки, в которой рассматривается величина, характеризующая состояние системы.

Окончательно приходим к следующему условию устойчивости: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни её характеристического уравнения располагались бы в левой полуплоскости, то есть имели бы отрицательные вещественные части.

Но корни характеристического уравнения (3.1.7) определяют общее решение дифференциального уравнения системы (которое в теории управления интерпретируется как свободное движение или переходной процесс): каждый вещественный корень s_i дает в решении аperiodическую составляющую $C_i e^{s_i t}$, а каждая пара комплексно сопряжённых корней $s_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k$ – колебательную составляющую $A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k)$. Если все вещественные корни являются отрицательными $s_i < 0$ (устойчивая система), то аperiodические составляющие $C_i e^{s_i t} \rightarrow 0$ с ростом t , и переход-

* Учитывая тот факт, что знаменатель передаточной функции – полином переменной s , особые точки будут являться **полюсами** передаточной функции.

ной процесс в целом затухает. Если какой-либо вещественный корень положительный $s_i > 0$ (система неустойчива), то соответствующая составляющая переходного процесса с течением времени возрастает, и переходной процесс в целом расходится. То же самое касается и колебательных составляющих: если вещественные части всех комплексно сопряженных корней отрицательны $\alpha_k < 0$, то соответствующие составляющие переходного процесса будут носить характер затухающих колебаний, если у какой-то пары корней $\alpha_k > 0$, то колебания с течением времени будут нарастать.

Таким образом, для затухания переходного процесса необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательны. Если хотя бы один корень будет иметь положительную вещественную часть, то переходной процесс в целом будет расходиться. **Следовательно, можно также определить устойчивую систему как систему, в которой переходные процессы являются затухающими.** И наоборот, **неустойчивая система – это система, в которой переходные процессы с течением времени расходятся.**

Корни характеристического уравнения можно изобразить в виде точек на комплексной плоскости. Тогда для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни располагались бы слева от оси мнимых. То есть мнимая ось представляет собой граничную линию в плоскости корней, за которую в устойчивой системе не должны переходить корни характеристического уравнения. Вся левая полуплоскость представляет собой при этом область устойчивости.

Преобразование системы из устойчивой в неустойчивую произойдет в том случае, если хотя бы один вещественный или пара комплексно сопряженных корней перейдет из левой полуплоскости в правую. Границей пе-

перехода будет так называемая граница устойчивости. Система будет находиться на границе устойчивости при наличии:

- 1) нулевого корня,
- 2) пары чисто мнимых корней,
- 3) «бесконечного» корня.

Во всех трёх случаях остальные корни должны иметь отрицательные вещественные части.

В случае границы устойчивости первого типа (апериодическая граница устойчивости) один корень оказывается в начале координат, например, $s_1=0$. Ясно, что это будет в том случае, если свободный член характеристического уравнения равен нулю $a_n = 0$. Характеристическое уравнение можно тогда представить в виде

$$(a_0s^{n-1} + a_1s^{n-2} + \dots + a_{n-1})s = 0. \quad (3.1.8)$$

Поскольку остальные корни (то есть корни полинома в круглой скобке уравнения (3.1.8)) имеют отрицательные вещественные части, то можно сказать, что система будет устойчива не относительно самой выходной величины $y(t)$, а относительно скорости её изменения $sy(t)$. Систему в этом случае иногда называют нейтрально устойчивой, имея в виду её безразличие к значению самой регулируемой величины.

Граница устойчивости второго типа будет при наличии пары мнимых корней, например, $s_{1,2} = j\omega_0$. В этом случае в решении соответствующего однородного уравнения будет незатухающая колебательная составляющая $y_1(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$. Поэтому граница устойчивости второго типа называется ещё колебательной границей устойчивости. Колебательная граница встречается в системах управления чаще всего.

Переход из левой полуплоскости в правую возможен также через бесконечность. Наличие «бесконечного» корня, например, $\alpha_1 \rightarrow -\infty$ говорит о том, что соответствующая составляющая решения стремиться к нулю

$C_1 e^{a_1 t} \rightarrow 0$. Таким образом, составляющих решения однородного уравнения становится на одну меньше, что говорит о понижении порядка уравнения на единицу. Такое возможно, если $a_0=0$. Граница устойчивости третьего типа встречается относительно редко.

3.1.3. Устойчивость и уравнения состояния.

Нетрудно получить условие устойчивости и для системы, математическое описание которой задано уравнениями состояния (2.4.2). Вернёмся к уравнению (2.4.11), определяющему матричную передаточную функцию – $\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$. Обратная матрица $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, согласно определению, вычисляется по формуле

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|},$$

где $\text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ – присоединённая матрица.

Таким образом, все передаточные функции $W_{ij}(s)$, являющиеся элементами матричной передаточной функции $\mathbf{W}(s)$, содержат в знаменателе определитель характеристической матрицы $|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|$. Приравнивая этот знаменатель нулю, получаем характеристическое уравнение системы

$$|s\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0. \quad (3.1.9)$$

Но уравнение (3.1.9) является уравнением для вычисления характеристических (собственных) чисел матрицы \mathbf{A} , поэтому корни характеристического уравнения замкнутой системы – суть характеристические числа матрицы \mathbf{A} . Поскольку необходимое и достаточное условие устойчивости – расположение корней знаменателя передаточной функции в левой части комплексной плоскости, то **для устойчивости системы, заданной уравнениями состояния (2.4.2), необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы \mathbf{A} имели бы отрицательные вещественные**

части, то есть располагались бы в левой части комплексной плоскости.

3.2. Алгебраические критерии устойчивости

Из условия устойчивости следует, что для того, чтобы определить, устойчива или нет система, требуется знать, где расположены корни её характеристического уравнения. Непосредственное вычисление корней, то есть решение характеристического уравнения, представляет порой значительные трудности для уравнений достаточно высокого порядка. К тому же, для ответа на вопрос, устойчива ли система, вовсе не требуется знать точное значение корней. Важно лишь знать, находятся все корни в левой полуплоскости или нет. Для ответа на этот вопрос разработано большое число различных косвенных признаков, которые называются критериями устойчивости. Вначале разберём алгебраические критерии, которые позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам её характеристического уравнения.

3.2.1. Необходимый критерий устойчивости

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты её характеристического полинома имели бы один знак (или плюс или минус).

Для доказательства представим характеристический полином в виде сомножителей

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = a_0 (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n), \quad (3.2.1)$$

где s_i – корни полинома.

Пусть система устойчива и все корни – вещественные числа. Тогда, согласно условию устойчивости, $s_i = -\alpha_i$, при этом $\alpha_i > 0$. Поставим значения корней в выражение (3.2.1): $a_0 (s + \alpha_1) \cdot (s + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (s + \alpha_n)$. Раскрыв

скобки в полученном выражении, видим, что знаки всех коэффициентов при s совпадают со знаком a_0 . Результат не изменится и при наличии комплексно сопряжённых корней с отрицательной вещественной частью $s_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$, ($\alpha_i > 0, \beta_i > 0$), так как в этом случае раскрытие скобок в соответствующих сомножителях полинома (3.2.1) даёт

$$(s + \alpha_i - j\beta_i) \cdot (s + \alpha_i + j\beta_i) = (s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2.$$

Поскольку всегда можно характеристическое уравнение почленно умножить на -1 , необходимый критерий устойчивости можно сформулировать и как положительность всех коэффициентов этого уравнения.

При использовании этого критерия следует иметь в виду, что равенство некоторых коэффициентов нулю (кроме первого a_0 и последнего a_n) говорит о неустойчивости системы.

Замечание. **Необходимый** критерий (положительность всех коэффициентов) становится также и **достаточным** для систем не выше второго порядка. Это нетрудно проверить непосредственным нахождением корней для таких уравнений.

Пример 3.1. Уравнение системы имеет вид

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 5y = 2 \frac{dg}{dt} + g.$$

Определим устойчивость системы. Запишем характеристическое уравнение, обозначив оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$:

$$p^3 + 2p^2 - 3p + 5 = 0.$$

Система неустойчива, поскольку не все коэффициенты характеристического полинома одного знака.

Пример 3.2. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4 = 0.$$

Система неустойчива, поскольку есть нулевые коэффициенты (коэффициент при первой степени s равен нулю).

Пример 3.3. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$s^2 + 2s + 3 = 0.$$

Система устойчива, так как в уравнении второго порядка все коэффициенты положительны.

Пример 3.4. Уравнение системы имеет вид

$$-2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} - 5y = 2 \frac{dg}{dt} - g.$$

Система устойчива, поскольку все коэффициенты характеристического полинома второго порядка $D(s) = -2s^2 - 3s - 5$ одного знака.

Пример 3.5. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 4 = 0. \quad (3.2.2)$$

Все коэффициенты характеристического полинома положительны, но для системы четвёртого порядка этого недостаточно, чтобы считать систему устойчивой или неустойчивой.

3.2.2. Устойчивость систем третьего порядка.

Перейдём к анализу устойчивости систем третьего порядка. Конечно, будем считать, что все коэффициенты характеристического полинома удовлетворяют необходимому критерию устойчивости, то есть являются положительными. Прежде всего, отметим, что положительного вещественного корня быть не может. Действительно, подставляя в левую часть характеристического уравнения с положительными коэффициентами

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad (3.2.3)$$

любое положительное число s , нуль получить никак нельзя. Таким образом, неустойчивость системы третьего порядка может быть связана только с появлением комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью. Эти корни могут появиться в правой полуплоскости, перейдя из левой полуплоскости, причём границей перехода будет мнимая ось. Система при переходе от устойчивого состояния в неустойчивое, будет находиться на колебательной границе устойчивости.

Найдём условие нахождения системы на колебательной границе устойчивости, то есть условие существования мнимых $s_{1,2} = \pm j\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ корней уравнения (3.2.3). Для этого подставим значения мнимых корней в уравнение (3.2.3)

$$-ja_0\omega_0^3 - a_1\omega_0^2 + ja_2\omega_0 + a_3 = 0. \quad (3.2.4)$$

Последнее уравнение выполняется, только если одновременно равны нулю вещественная и мнимая составляющие левой части выражения (3.2.4). Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -a_0\omega_0^3 + a_2\omega_0 = 0, \\ -a_1\omega_0^2 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Сократив первой из полученных уравнений на ω_0 (так как $\omega_0 \neq 0$) найдём из него ω_0^2 и подставим во второе уравнение. Получим условие колебательной границы устойчивости системы с характеристическим уравнением (3.2.3):

$$a_1 a_2 = a_0 a_3.$$

Из полученного условия ясно, что если вместо знака равенства поставить знак неравенства, то система будет, либо устойчива, либо неустойчива. Можно показать, что устойчивость системы обеспечивается выполнением неравенства

$$a_1 a_2 > a_0 a_3. \quad (3.2.5)$$

Условие (3.2.5) известно ещё как **критерий устойчивости Вышнеградского**, поскольку именно И.В.Вышнеградский в 1876 г. исследовал влияние коэффициентов уравнения третьего порядка на устойчивость системы и вывел условие (3.2.5). Лучше запоминается условие (3.2.5) в словесной формулировке: **произведение «внутренних» коэффициентов больше произведения «внешних».**

3.2.3. Критерий Гурвица

Положительности коэффициентов и выполнения условия (3.2.5) уже недостаточно для устойчивости систем выше третьего порядка. Для таких систем требуются дополнительные условия. Эти условия впервые сформулировал в 1877 г. английский математик Е.Раус, а затем в иной форме – в 1895 г. швейцарский математик А.Гурвиц. Вначале приведём формулировку таких условий по Гурвицу.

Рассмотрим характеристический полином системы, определяющий левую часть дифференциального уравнения, например, замкнутой системы (2.3.11) или, что то же самое, знаменатель соответствующей передаточной функции

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n. \quad (3.2.6)$$

Гурвиц предложил из коэффициентов этого полинома составить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}.$$

Этот определитель содержит по главной диагонали все элементы по порядку от a_1 до a_n , а справа и слева от главной диагонали – соответственно по возрастанию и по убыванию чётные и нечётные коэффициенты в зависимости от чётности или нечётности соответствующих элементов по главной диагонали. Места коэффициентов, индексы которых отсутствуют в характеристическом полиноме, заполняются нулями. Впоследствии такой определитель назвали определителем Гурвица.

Сформулируем критерий Гурвица без доказательства. **Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все главные миноры^{*}, включая сам определитель, были бы больше нуля**

$$\Delta_i > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{где } \Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots$$

Часто миноры Δ_i также называют определителями Гурвица.

Из критерия Гурвица вытекает как частный случай системы третьего порядка, критерий Вышнеградского (3.2.5).

Условия нахождения системы на границе устойчивости по Гурвицу

$$\Delta_n = 0 \tag{3.2.7}$$

при условии, что все остальные определители Гурвица больше нуля.

Учитывая, что в последнем столбце определителя Гурвица Δ_n все элементы, кроме последнего – нулевые, определитель Δ_n можно разложить по последнему столбцу $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$. Тогда условие (3.2.7) распадается на два

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \\ \Delta_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

* Главными минорами определителя называются миноры, диагональные элементы которых являются также диагональными элементами определителя.

Первое равенство, как уже было выяснено, есть условие аperiodической границы устойчивости, второе – колебательной границы.

Ввиду необходимости вычисления определителей высокого порядка, критерий в формулировке Гурвица находит практическое применение для систем не выше четвёртого – пятого порядка.

Пример 3.6. Рассмотрим систему с тем же характеристическим уравнением, что и в примере 3.5:

$$s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 4 = 0.$$

Все коэффициенты положительны, поэтому переходим к проверке условий Гурвица, учитывая, что $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 4$:

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0^*.$$

Поскольку предпоследний определитель Гурвица равен нулю, а все остальные определители положительны, система находится на колебательной границе устойчивости.

3.2.4. Критерий Рауса

Для систем выше пятого порядка удобнее пользоваться критерием в формулировке Рауса: здесь требуются более простые вычисления.

Раус предложил составлять таблицу из чисел (строим эту таблицу снизу вверх)

* При вычислении этого определителя проведено разложение по последней строке.

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

В самой нижней строке расположены чётные коэффициенты характеристического уравнения, в следующей – нечётные. Каждый элемент более высокой строки вычисляется как минор двух предшествующих строк, включающий первый столбец, то есть, например,

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}, b_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ a_0 & a_6 \end{vmatrix}, b_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, b_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \text{ и т.д.}$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы (3.2.8) были бы больше нуля. Количество элементов первого столбца со знаком «минус» равно числу корней в правой полуплоскости.

Критерий Рауса требует на каждом этапе вычисления определителей только второго порядка.

Недостатками алгебраических критериев Рауса-Гурвица считаются сложность вычислений для систем высокого порядка* и невозможность проследить влияние какого-либо параметра системы на её устойчивость, так как один и тот же параметр входит, как правило, в несколько коэффициентов характеристического уравнения. Эти обстоятельства привели к необходимости разработки других критериев.

* Особенно существенным этот недостаток был при отсутствии современных вычислительных средств.

3.3. Частотные критерии устойчивости

Все частотные критерии связаны с переходом в частотную область путём замены $s = j\omega$.

3.3.1. Критерий Михайлова

В 1938 г. советский ученый А.В.Михайлов предложил частотный критерий, который впоследствии назвали его именем. Речь по-прежнему идет о характеристическом полиноме (знаменателе передаточной функции) $D(s)$. Подставим в характеристический полином (3.2.6) вместо s мнимую переменную $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.3.1)$$

где $X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$ – вещественная часть, содержащая чётные степени ω ; $Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$ – мнимая часть, содержащая нечётные степени ω ; $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – модуль и фаза (аргумент) характеристического комплекса (3.3.1).

При заданных коэффициентах a_k каждому значению частоты ω на комплексной плоскости соответствует точка, определяемая выражением (3.3.1). Плавное изменение частоты от 0 до ∞ приводит к движению изображающей точки по комплексной плоскости. Получающаяся при этом кривая называется кривой Михайлова. Начинается кривая Михайлова на вещественной оси, поскольку при $\omega=0$, согласно (3.3.1), $D(j\omega)|_{\omega=0} = a_n$ и «уходит» в бесконечность при $\omega \rightarrow \infty$.

Критерий Михайлова можно сформулировать так: **для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от нуля до бесконечности кривая Михайлова (3.3.1), определяемая характеристическим полиномом, начиналась на вещественной положительной полуоси и имела суммарное приращение аргумента $\Delta\varphi = n\frac{\pi}{2}$,**

где n – порядок системы (порядок характеристического полинома).*

Таким образом, кривая Михайлова, начинаясь на вещественной положительной полуоси, должна огибать против часовой стрелки начало координат, последовательно проходя n квадрантов.

Докажем необходимость. Пусть система устойчива. По необходимому критерию все коэффициенты характеристического полинома больше нуля, в том числе и $a_n > 0$, следовательно, начинается кривая Михайлова, действительно, на вещественной положительной полуоси. Представим характеристический полином в виде сомножителей (3.2.1). Подставив $s = j\omega$, получим характеристический комплекс в виде произведения n скобок:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1) \dots (j\omega - s_n). \quad (3.3.2)$$

По правилам работы с комплексными числами аргумент (фаза) произведения равен сумме аргументов сомножителей. Посмотрим, как будет вести себя каждый сомножитель в произведении (3.3.2). Согласно необходимому и достаточному условию устойчивости, все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части. Для вещественного корня $s_i = -\alpha_i$ соответствующая скобка имеет вид

$$(j\omega + \alpha_i). \quad (3.3.3)$$

Изобразим вектор (3.3.3) на комплексной плоскости (см. рис. 3.1, а).

При изменении частоты от 0 до ∞ конец вектора (3.3.3) будет перемещаться по линии, параллельной мнимой оси (показано пунктиром) с суммарным изменением фазы $\frac{\pi}{2}$.

Для пары комплексно сопряжённых корней с отрицательной вещественной частью $s_{k,k+1} = -\alpha_k \pm j\beta_k$ в выражении (3.3.2) имеем

$$(\alpha_k + j(\omega + \beta_k)) \cdot (\alpha_k + j(\omega - \beta_k)). \quad (3.3.4)$$

* Если менять частоту от $-\infty$ до $+\infty$, то суммарный угол поворота кривой Михайлова будет в два раза больше, то есть для устойчивой системы $n\pi$, так как при изменении знака ω получается симметричная относительно вещественной оси картина.

Картина перемещения концов векторов (3.3.4) по комплексной плоскости приведена на рис. 3.1, б. Из рисунка видно, что один из векторов (3.3.4) при изменении частоты от 0 до ∞ повернется на угол $\frac{\pi}{2} + \gamma_k$, где $\gamma_k = \arctg \frac{\beta_k}{\alpha_k}$, а второй – на угол $\frac{\pi}{2} - \gamma_k$. Таким образом, два вектора (3.3.4) повернутся на суммарный угол π .

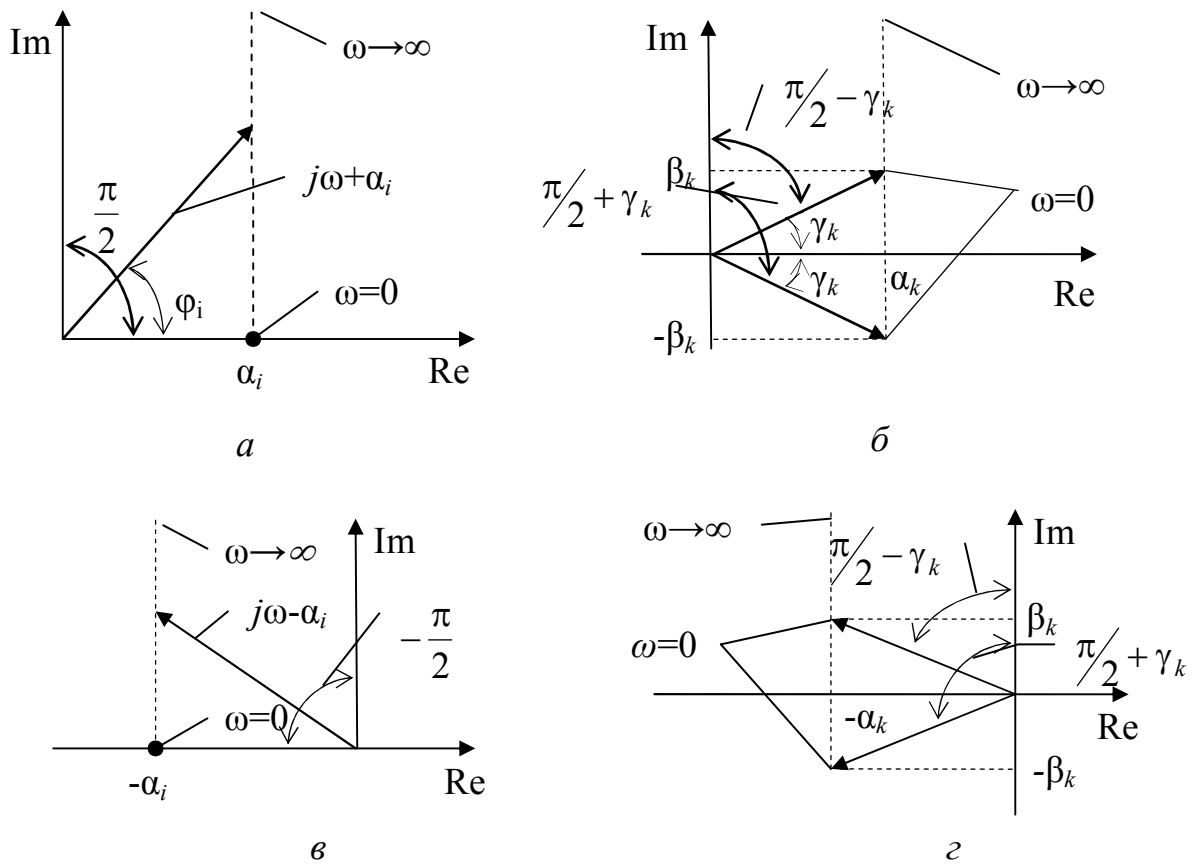


Рис. 3.1. Расположение корней на комплексной плоскости

Окончательно, число квадрантов, «пройденных» кривой Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞ , равно числу сомножителей в выражении (3.3.2), то есть для устойчивой системы – порядку системы n . Ч.т.д.

Повторив вышеизложенное в обратном порядке, получим доказательство достаточности критерия Михайлова для устойчивости системы.

Каждый вещественный положительный корень характеристического уравнения даст изменение фазы $-\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3.1, в), а каждая пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью – изменение фазы $-\pi$ (см. рис. 3.1, з).

Таким образом, в неустойчивой системе с l корнями характеристического уравнения в правой полуплоскости (и соответственно с $n-l$ – в левой) поворот кривой Михайлова будет проходить на угол

$$\Delta\varphi = (n-l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi. \quad (3.3.5)$$

По формуле (3.3.5) можно определить число корней в правой полуплоскости, если известен общий угол поворота кривой Михайлова и порядок системы.

Условие нахождения системы на границе устойчивости – прохождение кривой Михайлова через начало координат: если кривая начинается в начале координат, то это соответствует аperiodической границе устойчивости ($a_n = 0$); если кривая проходит через начало координат на ненулевой частоте $\omega_0 \neq 0$, то это соответствует колебательной границе устойчивости. В последнем случае это означает, что на частоте ω_0 вещественная и мнимая части характеристического комплекса (3.3.1) обращаются в нуль, то есть значение $s = j\omega_0$ является корнем характеристического уравнения, и в системе имеются незатухающие колебания с частотой ω_0 .

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, конец её «уходит» в бесконечность параллельно вещественной оси при чётной степени системы и параллельно мнимой оси – при нечётной. Примеры кривых Михайлова для степеней $n=1,2,3,4$ приведены на рис. 3.2.

Число квадрантов, большее, чем n , кривая Михайлова вообще не может пройти, поэтому неустойчивость системы связана с нарушениями

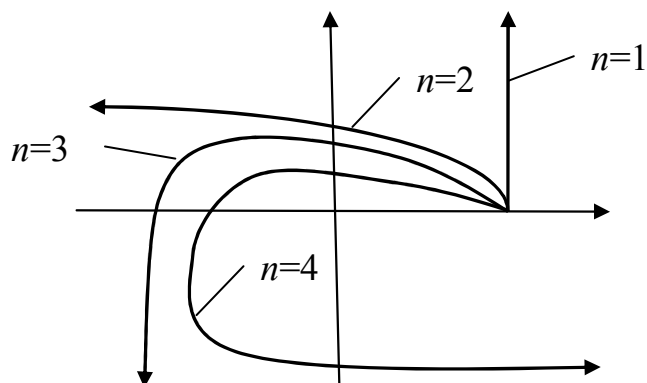


Рис. 3.2. Кривые Михайлова для устойчивых систем

прохождения последовательности квадрантов. Правильная (по порядку) последовательность прохождения квадрантов приводит к тому, что корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ для устойчивой системы должны по мере роста ω чередоваться: сначала $Y(0)=0$, затем $X(\omega_1)=0$, далее $Y(\omega_2)=0$, потом опять $X(\omega_3)=0$ и т.д., при этом $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$. Поэтому, найдя корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$, по сути дела, дальнейшего построения кривой Михайлова не требуется. Такое следствие из критерия Михайлова, как перемежаемость корней, можно принять за отдельный критерий устойчивости.

Пример 3.7. Опять рассмотрим характеристическое уравнение из примеров 3.5 или 3.6

$$s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 4 = 0.$$

Подставим в левую часть уравнения $s=j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части. Приравняв их к нулю, получим два уравнения

$$X(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 4 = 0,$$

$$Y(\omega) = -\omega^3 + 2\omega = 0.$$

Решая первое уравнение, находим его корни $\omega_1^2 = 2$. Из второго уравнения получим $\omega_0 = 0$; $\omega_2^2 = 2$. Совпадение корней уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ говорит о прохождении кривой Михайлова через начало координат, то есть о нахождении системы на колебательной границе устойчивости.

Пример 3.8. Задан характеристический полином системы

$$s^4 + 3s^3 + 10s^2 + s + 24.$$

Подставив в полином $s = j\omega$, и приравняв нулю вещественную и мнимую части, получим два уравнения

$$X(\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 24 = 0,$$

$$Y(\omega) = -3\omega^3 + \omega = 0.$$

Решение первого уравнения $X(\omega) = 0$ даёт корни $\omega_1^2 = 4$; $\omega_3^2 = 6$. После решения второго уравнения $Y(\omega) = 0$ получаются корни $\omega_0 = 0$; $\omega_2^2 = 3$. Поскольку чередование корней нарушено (сначала идут два корня уравнения для мнимой части, а затем два корня для вещественной), система является неустойчивой.

3.3.2. Критерий Найквиста

Американский радиоинженер Г. Найквист, занимаясь исследованием усилителей, обратил внимание на то, что охват усилителя отрицательной обратной связью (а это делается обычно для уменьшения нелинейных искажений) иногда приводил к неустойчивости, то есть усилитель переходил в режим самовозбуждения. Анализ этого явления позволил Найквисту в 1932 г. сформулировать условие устойчивости замкнутых усилителей, а поскольку САУ, как правило, имеют отрицательную обратную связь, то

это условие было распространено и на системы автоматического управления и получило название *критерия Найквиста*.

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости **замкнутых** систем по частотным характеристикам **разомкнутых** систем. Вспомним связь передаточных функций замкнутой и разомкнутой систем, определяемую, например, для задающего воздействия выражением (2.3.10):

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{B(s)}{A(s)}}{1+\frac{B(s)}{A(s)}}.$$

Рассмотрим знаменатель $1+W(s)$, который присутствует во всех передаточных функциях замкнутой системы. Введём в рассмотрение дополнительную передаточную функцию

$$W_1(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{A(s)}. \quad (3.3.6)$$

Заменив в выражении (3.3.6) s на $j\omega$, получим АФЧХ $W_1(j\omega)$. Теперь будем менять частоту ω от нуля до бесконечности и проследим за изменением фазы АФЧХ $W_1(j\omega)$.

Частотная передаточная функция $W_1(j\omega)$, согласно выражению (3.3.6), содержит в числителе характеристический комплекс замкнутой системы $D(j\omega)$, а в знаменателе – характеристический комплекс разомкнутой системы $A(j\omega)$, причём степени числителя и знаменателя совпадают и равны n .

По критерию Михайлова для устойчивости замкнутой системы нужно, чтобы угол поворота $D(j\omega)$ был равен $n\frac{\pi}{2}$. Характеристический

комплекс $A(j\omega)$ по критерию Михайлова поворачивается на угол $n\frac{\pi}{2} - l\pi$,

где l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы

в правой полуплоскости (см. формулу (3.3.5)). По правилам работы с комплексными числами, аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя. Поэтому приращение аргумента АФЧХ $W_1(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ для устойчивости замкнутой системы должно быть равно $n\frac{\pi}{2} - \left(n\frac{\pi}{2} - l\pi\right) = l\pi$, то есть вектор АФЧХ $W_1(j\omega)$ должен охватывать начало координат на угол $l\pi$. Но АФЧХ $W_1(j\omega)$ отличается на единицу от АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$, потому на тот же угол $l\pi$ должен поворачиваться вектор $W(j\omega)$, но уже относительно точки $(-1, j0)$ на комплексной плоскости.

По сути, вышеизложенное является доказательством критерия Найквиста. Этот критерий можно сформулировать так: **для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ совершала бы поворот (против часовой стрелки) вокруг точки $(-1, j0)$ на комплексной плоскости на угол $l\pi$, где l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости.** Если частоту менять не от 0 до ∞ , а от $-\infty$ до $+\infty$, то соответствующий угол нужно увеличить в два раза.

Если **разомкнутая система устойчива**, то в правой полуплоскости у характеристического уравнения такой системы вообще нет корней ($l=0$), и угол охвата точки $(-1, j0)$ должен быть равен нулю. В этом случае формулировку критерия Найквиста можно немного изменить: **для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ устойчивой разомкнутой системы не охватывала бы точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости.**

Пример 3.9. Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{2}{5s^3 + 12s^2 + 5s + 1}.$$

Определим устойчивость замкнутой системы. Вначале определим устойчивость разомкнутой системы. Произведение «внутренних» коэффициентов знаменателя больше произведения «внешних» $12 \cdot 5 > 5 \cdot 1$, и по критерию Вышнеградского разомкнутая система устойчива. Следовательно, для устойчивости замкнутой системы по критерию Найквиста требуется, чтобы годограф АФЧХ разомкнутой системы *не охватывал* бы точку $(-1, j0)$. Выяснить, охватывает ли годограф АФЧХ точку $(-1, j0)$ можно, проверив, правее или левее точки $(-1, j0)$ находится АФЧХ на частоте переворота фазы. Частоту переворота фазы найдём, приравняв нулю мнимую часть знаменателя частотной передаточной функции разомкнутой системы

$$-5\omega^3 + 5\omega = 0,$$

откуда $\omega_n = 1$. На этой частоте модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы меньше единицы:

$$|W(j\omega)|_{\omega=1} = \left| \frac{2}{-12 + 1} \right| = \frac{2}{11} < 1,$$

т.е. кривая АФЧХ проходит *правее* точки $(-1, j0)$ и не охватывает критическую точку. Таким образом, замкнутая система *устойчива*.

Рассмотрим теперь граничный случай, когда корни характеристического уравнения разомкнутой системы нельзя отнести ни к левой, ни к правой полуплоскости, то есть когда эти корни находятся на мнимой оси. В этом случае знаменатель частотной передаточной функции $W(j\omega)$ обращается в нуль, а сама передаточная функция устремляется в бесконечность. Облегчить применение критерия Найквиста в этом случае позволяет следующий приём. Для удобства будем менять частоту от $-\infty$ до $+\infty$. В соответствии с подстановкой $s=j\omega$ изображающая точка при этом перемеща-

ется по мнимой оси снизу вверх. Встретив при таком перемещении очередной корень, немного искажим мнимую ось, обойдя его справа по полуокружности бесконечно малого радиуса ρ таким образом, чтобы можно было причислить этот корень к левой полуплоскости (см. рис. 3.3).

Поскольку обходимый таким образом корень находится в знаменателе передаточной функции, отображение искаженной мнимой оси на плоскость $W(j\omega)$ будет соответствовать замыканию «хвостов» АФЧХ по часовой стрелке полуокружностью бесконечно большого радиуса $R = \frac{1}{\rho}$.

После такого замыкания можно применять критерий Найквиста в привычной формулировке.

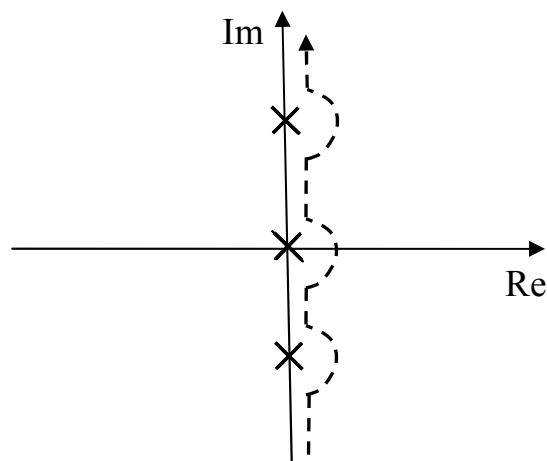


Рис. 3.3. Обход корней на мнимой оси

Таким образом, перед применением критерия Найквиста следует выяснить, является ли разомкнутая система устойчивой, и если нет, то, сколько корней в правой полуплоскости у такой системы. Это можно узнать по любому подходящему для этого случая критерию, например, по критерию Михайлова. Неустойчивость разомкнутой системы может быть связана либо с наличием в ней неустойчивых звеньев, либо неустойчивой система становится вследствие местных обратных связей. Вообще, хотя неустойчивая разомкнутая система после замыкания главной обратной

связи может теоретически стать устойчивой, таких случаев следует избегать. Это объясняется наличием некоторых нежелательных свойств, в частности, обычно присутствующие в системе нелинейности могут привести к потере устойчивости и возникновению автоколебаний.

Из формулировки критерия Найквиста следует, что замкнутая система будет находиться на границе устойчивости (колебательной), если АФЧХ разомкнутой системы проходит точно через критическую точку $(-1, j0)$. Это означает, что на некоторой частоте ω_0

$$W(j\omega_0) = -1. \quad (3.3.7)$$

Условие (3.3.7) распадается на два:

$$\begin{aligned} |W(j\omega_0)| &= 1, \\ \arg W(j\omega_0) &= -\pi. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Из уравнений (3.3.8) может быть, в частности, определено критическое значение некоторого параметра системы (например, общего коэффициента усиления).

Достоинством критерия Найквиста является его наглядность и простота для систем высокого порядка. Важной особенностью данного критерия является возможность использования для определения устойчивости экспериментально снятых частотных характеристик, что особенно удобно при отсутствии уравнений реальных звеньев.

Другое практическое преимущество критерия Найквиста заключается в том, что он может применяться при использовании логарифмических частотных характеристик. Зная, какой вид АФЧХ разомкнутой системы должен быть для устойчивости замкнутой системы, нетрудно сформулировать критерий Найквиста и для логарифмических характеристик. Например, если разомкнутая система устойчива, то при положительной ЛАХ число пересечений логарифмической фазовой характеристикой уровня $-\pi$ должно быть чётным (ноль считаем чётным числом).

Как правило, при анализе системы однозначного ответа на вопрос, устойчива ли система, недостаточно. Нужно знать ещё, какие запасы устойчивости имеет система, то есть насколько далеко она находится от границы устойчивости. Это важно знать потому, что система, имеющая малый запас устойчивости, практически непригодна для эксплуатации. Конечно, можно было бы при оценке запасов устойчивости воспользоваться всеми ранее рассмотренными критериями. Именно, по критерию Рауса-Гурвица – по тому запасу, с которым выполняются соответствующие неравенства, в случае критерия Михайлова – удалённостью кривой Михайлова от начала координат. Практическое же применение получили запасы устойчивости, вытекающие из критерия Найквиста (чаще всего в формулировке для логарифмических частотных характеристик).

Рассмотрим простейший вид АФЧХ устойчивой разомкнутой системы (см. рис. 3.4, *а*). Замкнутая система также будет устойчива, так как годограф АФЧХ не охватывает точку $(-1, j0)$. Соответствующие ЛАХ и

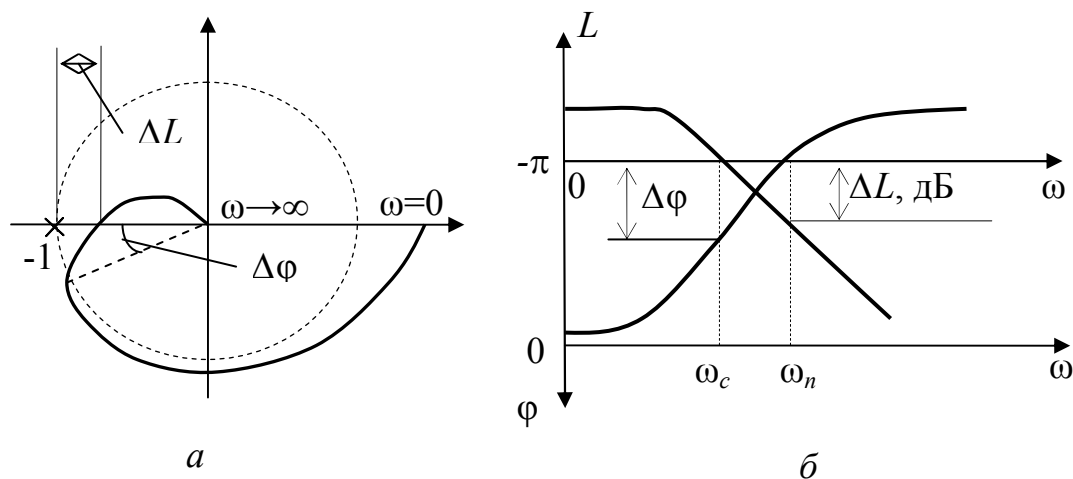


Рис. 3.4. Запасы устойчивости

ЛФХ приведены на рис. 3.4, *б*.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной $\Delta\varphi$, на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза ω_c , чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде (по модулю) определяется величиной ΔL допустимого подъёма ЛАХ на частоте переворота фазы ω_p , при котором система окажется на границе устойчивости.

Численные значения запасов устойчивости выбираются при проектировании исходя из опыта эксплуатации систем соответствующего назначения. Обычно задают $\Delta\varphi \geq 30^\circ$ и $\Delta L \geq 6$ дБ. Последнее соответствует примерно двойному запасу по общему коэффициенту передачи на частоте переворота.

Для более твёрдого усвоения критериев устойчивости (а также других тем курса) рекомендуется ознакомиться с задачами и примерами, содержащимися в [4].

3.4. *D*-разбиение

3.4.1. Определение *D*-разбиения

При проектировании САУ часто возникает вопрос о влиянии каких-либо параметров системы на её устойчивость. При этом строят области устойчивости в пространстве этих изменяемых параметров. Построение областей устойчивости можно проводить с применением любого из рассмотренных критериев. Но значительно облегчает дело разработанный в 1948 г. советским учёным Ю.И.Неймарком метод, с помощью которого можно рассмотреть все указанные ранее критерии с единых позиций. Метод Неймарка также применяется для исследования устойчивости и для доказательства ряда важных теорем.

Представим, что в системе n -го порядка имеется m изменяемых параметров. Некоторая фиксированная точка в m -мерном пространстве параметров соответствует определённым их значениям, а, следовательно, и определённым значениям коэффициентов характеристического уравнения

системы. При этом и n корней характеристического уравнения также имеют вполне фиксированное местоположение на комплексной плоскости. Пусть k корней при этом расположены в левой полуплоскости, а оставшиеся $n-k$ – в правой. Тогда множество точек, характеризующихся таким расположением корней, образует некоторую область в пространстве параметров, которую обозначим $D(k, n-k)$. Если $k=n$, то соответствующая область – область устойчивости.

Таким образом, всё m -мерное пространство параметров может быть разделено на $n+1$ область $D(k, n-k)$, $k=0,1,\dots,n$. Такое разбиение параметров Неймарк назвал **D -разбиением**. Среди всех этих областей одна, именно $D(n,0)$, является областью устойчивости.

Фрагмент D -разбиения в пространстве трёх параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, приведён на рис. 3.5.

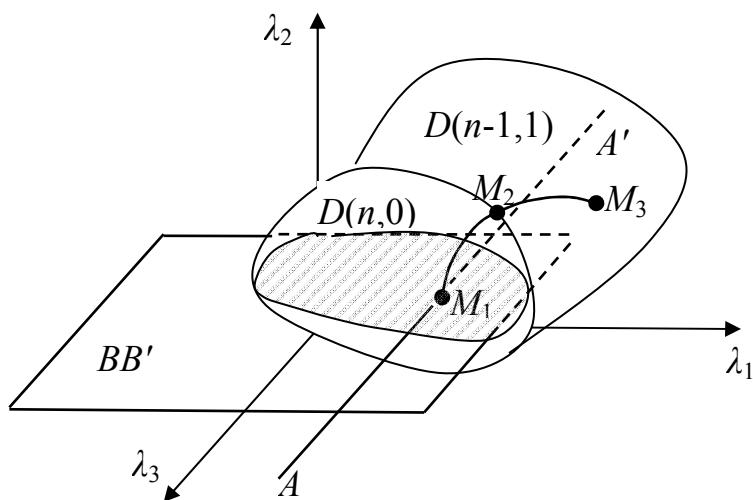


Рис. 3.5. D -разбиение

Если плавно менять значения параметров, изображающая точка M_1 движется по некоторой траектории. При этом и корни характеристического уравнения также перемещаются по комплексной плоскости. Если точка в пространстве параметров при таком движении попадает на границу, разде-

ляющую две D -области (на рис. 3.5 это точка M_2), это означает, что, по крайней мере, один корень характеристического уравнения попадает на мнимую ось в процессе перехода из одной полуплоскости в другую. Таким образом, любая точка, находящаяся на границе D -областей, соответствует корню на мнимой оси $s=j\omega$. Если подставить в характеристическое уравнение $s=j\omega$, получим два уравнения (относительно вещественной и мнимой частей). Исключив из этих уравнений частоту ω , получаем уравнение гиперповерхности в пространстве параметров, разделяющую D -области.

Таким образом, получать D -разбиение сравнительно просто. Однако, проведя D -разбиение, мы получаем не только область устойчивости, но и все другие области $D(k, n-k)$, поэтому определение D -разбиения есть операция более общая, чем определение областей устойчивости. Смысл же применения метода Неймарка заключается в том, что проводить D -разбиение в целом ряде случаев проще, чем находить области устойчивости.

После того, как проведено D -разбиение, можно выяснить влияние какого-либо параметра на устойчивость системы. Зафиксируем, например, $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_2 = \text{const}$. Меняя λ_3 , получаем перемещение изображающей точки по прямой AA' (см. рис. 3.5). Узнав точки пересечения этой прямой с D -областями, можно исследовать влияние параметра λ_3 на устойчивость системы.

Если необходимо исследовать влияние двух параметров, например, λ_1 и λ_3 , то рассекаем пространство параметров плоскостью $\lambda_2 = \text{const}$ (плоскость BB' на рис. 3.5). На этой плоскости будут линии пересечения её с D -областями, в том числе и область устойчивости в зависимости от параметров λ_1 и λ_3 .

3.4.2. D -разбиение в области 1-го параметра

Перейдём к более подробному рассмотрению D -разбиения в области одного параметра. Предположим, что некоторые коэффициенты харак-

теристического уравнения зависят линейно от некоторого изменяемого параметра τ . Тогда это уравнение можно представить в виде

$$Q(s) + \tau R(s) = 0, \quad (3.4.1)$$

где $Q(s)$ и $R(s)$ полиномы от s .

Подставив в уравнение (3.4.1) $s=j\omega$, получим границы D -разбиения. Условно будем считать, что параметр τ – комплексное число (в действительности, конечно, это вещественный параметр). Решим уравнение (3.4.1) относительно τ

$$\tau = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (3.4.2)$$

и будем менять частоту ω от $-\infty$ до $+\infty$. Геометрическое место точек, определяемых выражением (3.4.2), то есть годограф вектора τ , будет являться границей D -разбиения в комплексной плоскости параметра τ (см., например, рис. 3.6, б). Получившаяся кривая делит комплексную плоскость на ряд областей. Осталось узнать, какая из этих областей – область устойчивости. Если при некотором значении параметра τ (например, точка M на рис. 3.6, б) система устойчива, то и вся область, включающая соответствующую точку и ограниченная линией D -разбиения, будет областью устойчи-

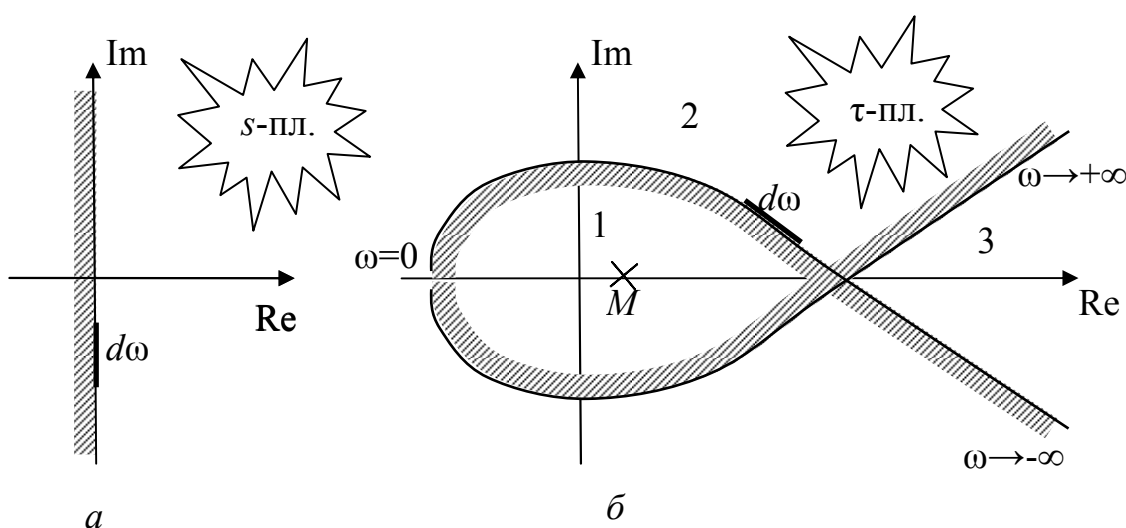


Рис. 3.6. D -разбиение в области одного параметра устойчивости.

Облегчить определение областей устойчивости помогает правило штриховки, которое приведём без строгого математического обоснования, но с некоторыми пояснениями.

При изменении частоты в сторону увеличения в соответствии с заменой $s=j\omega$, изображающая точка перемещается по мнимой оси s -плоскости. Заштрихуем область *слева* от линии изменения s (рис. 3.6, *а*). Если какой-либо корень перейдёт из заштрихованной области в незаштрихованную, то в правой полуплоскости станет на один корень больше (а в левой полуплоскости, следовательно, на один корень меньше) и наоборот. Формула (3.4.2) есть отображение s -плоскости на комплексную τ -плоскость, при этом малому отрезку $d\omega$ мнимой оси s -плоскости соответствует малый отрезок $d\omega$ кривой D -разбиения на τ -плоскости. Будем штриховать границу D -разбиения точно также, то есть *слева* по мере увеличения частоты. При этом если перейти границу D -разбиения из незаштрихованной области в заштрихованную, то в левой полуплоскости мы получим на один корень больше. Так, переходя из области 3 в область 2 (см. рис. 3.6, *б*), в левой полуплоскости окажется на один корень больше, из области 2 – в область 1 – ещё на один корень больше.

Таким образом, максимальное число корней в левой полуплоскости будет в области, куда направлены все штрихи (на рис. 3.6, *б* это область 1). Следует понимать, что данная область только *претендует* на область устойчивости. Проверить, является ли полученная область действительно областью устойчивости, можно применив любой критерий устойчивости к произвольной точке этой области.

Из частных случаев D -разбиения вытекают критерии Михайлова и Найквиста.

Посмотрим, как это делается, например, для критерия Найквиста. Пусть передаточная функция устойчивой разомкнутой системы равна

$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Поскольку разомкнутая система устойчива, корни полинома $A(s)$ расположены в левой полуплоскости. Что же будет с устойчивостью замкнутой системы? Составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$A(s) + B(s) = 0. \quad (3.4.3)$$

Введём в рассмотрение параметр τ и заменим уравнение (3.4.3) более общим уравнением

$$B(s) - \tau A(s) = 0. \quad (3.4.4)$$

Ясно, что уравнение (3.4.4) *совпадает* с характеристическим уравнением (3.4.3) при $\tau = -1$. Решив уравнение (3.4.4) относительно τ , получим

$$\tau = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s). \quad (3.4.5)$$

Начертим кривую D -разбиения в области параметра τ и проведём штриховку. Понятно, что кривая D -разбиения после подстановки в выражение (3.4.5) $s = j\omega$ будет совпадать с АФЧХ разомкнутой системы (см. рис. 3.7).

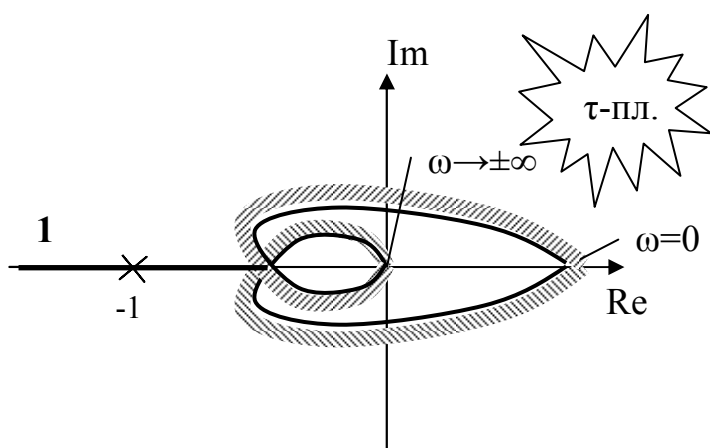


Рис. 3.7. К критерию Найквиста

Кандидатом на область устойчивости является отрезок вещественной оси **1**. Эта область действительно является областью устойчивости, так как точка $\tau \rightarrow -\infty$, принадлежащая этой области, уравнение (3.4.5) превращает в уравнение $A(s) = 0$, то есть соответствует устойчивой системе.

Поэтому, если точка $(-1, j0)$, соответствующая значению $\tau = -1$, принадлежит отрезку устойчивости, то уравнение (3.4.3) описывает **устойчивую** замкнутую систему. Отсюда следует, что АФЧХ разомкнутой системы **не должна охватывать точку $(-1, j0)$** .

Аналогично можно проследить и связь метода Неймарка с критерием Михайлова. Для этого характеристическое уравнение исследуемой системы

$$D(s) = A(s) + B(s) = 0 \quad (3.4.6)$$

заменяем более общим уравнением

$$D(s) - \tau = 0. \quad (3.4.7)$$

Уравнение (3.4.7) совпадает с уравнением (3.4.6) при $\tau = 0$. Нарисуем границы D -разбиения в области параметра τ . Подставив в уравнение (3.4.7) $s = j\omega$ и решая его относительно τ , получим, по сути, годограф Михайлова (см., например, рис. 3.8 для системы третьего порядка).

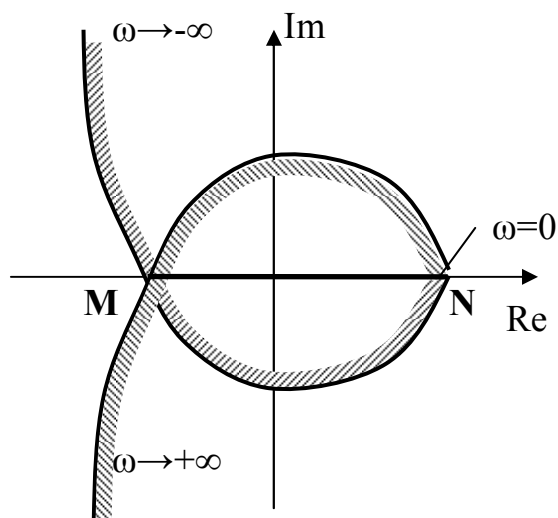


Рис. 3.8. К критерию Михайлова

Из рис. 3.8 видно, что если точка $\tau = 0$ принадлежит отрезку устойчивости MN , то система устойчива. Можно показать, что суммарное изменение фазы при $-\infty < \omega < \infty$ будет $n\pi$.

3.4.3. D -разбиение в области 2-х параметров

Рассмотрим D -разбиение в плоскости двух параметров. Пусть два параметра τ и ν входят линейно в характеристическое уравнение. Тогда можем записать характеристическое уравнение в виде

$$\tau Q(s) + \nu P(s) + R(s) = 0. \quad (3.4.8)$$

Подставим в уравнение (3.4.8) $s = j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части. Приравняв их нулю, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \tau Q_1(\omega) + \nu P_1(\omega) &= -R_1(\omega), \\ \tau Q_2(\omega) + \nu P_2(\omega) &= -R_2(\omega), \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

где полиномы с индексами 1 – вещественные части соответствующих полиномов (слагаемые с чётными степенями ω), а полиномы с индексами 2 – мнимые составляющие (слагаемые с нечётными степенями).

Решение уравнений (3.4.9) запишем по правилу Крамера

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & P_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad \nu = \frac{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2(\omega)}{\Delta(\omega)}. \quad (3.4.10)$$

Выражения (3.4.10) справедливы, если $\Delta(\omega) \neq 0$.

Меняя частоту ω от $-\infty$ до $+\infty$ по формулам (3.4.10) получаем границы D -разбиения в плоскости параметров τ и ν . Правило штриховки в этом случае несколько меняется: штриховку ведут *слева* по мере увеличения частоты, если $\Delta(\omega) > 0$, и *справа*, если $\Delta(\omega) < 0$. Поскольку при $\omega > 0$ и при $\omega < 0$ проходится одна и та же кривая, но в противоположных направлениях, а функция $\Delta(\omega)$ является *нечётной*, то кривая D -разбиения, опре-

деляемая формулами (3.4.10), штрихуется *дважды* с одной и той же стороны (рис. 3.9).

Если знаменатель выражений (3.4.10) (то есть определитель $\Delta = Q_1 P_2 - P_1 Q_2$) равен нулю при некоторых значениях частоты ω , то уравнения (3.4.9) уже не являются линейно независимыми и вырождаются в

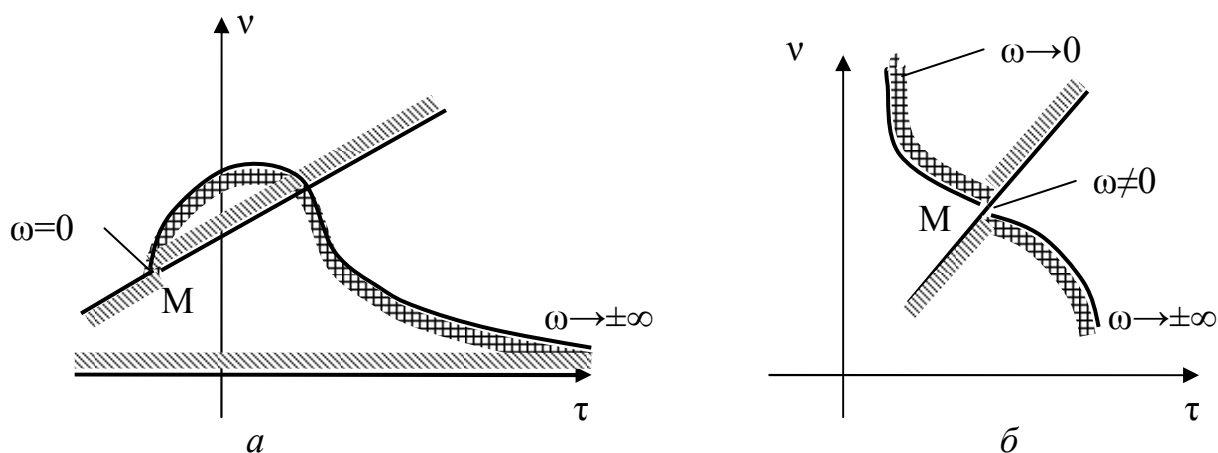


Рис. 3.9. Примеры штриховки D -разбиения для двух параметров

одно уравнение. При подобном исключительном значении ω (обычно это нуль или бесконечность) получаем не точку, а прямую на плоскости параметров. Прямые, соответствующие исключительным значениям ω , также штрихуются, причём так, чтобы полностью были заштрихованы внутренние стороны угла в точке стыка M (см. рис. 3.9, *a*). Сторона, с которой заштрихована прямая, меняется при переходе через точку M в том случае, если определитель Δ меняет свой знак (см. рис. 3.9 *б*). Если же при некотором исключительном значении частоты ω_0 определитель $\Delta=0$, но не меняет знак, то прямая, проходящая через соответствующую точку, не штрихуется и не принимается во внимание при определении областей устойчивости.

Более подробно про D -разбиение можно прочитать в [5].

4. КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ

4.1. Оценки качества регулирования

Качество работы любой системы управления, в конечном счете, определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значением регулируемой величины. В случае следящей системы ошибка – это разность между задающим воздействием $g(t)$ и регулируемой величиной $y(t)$: $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$.

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы регулируемого объекта позволяет наиболее полно судить о качестве САУ. Однако в действительности такой подход не может быть реализован, во-первых, потому, что входные воздействия часто носят случайный, непредсказуемый характер, а во-вторых, потому, что даже при известных входных воздействиях для вычисления ошибки необходимо решать дифференциальные уравнения порой достаточно высокого порядка.

Поэтому приходится оценивать качество САУ по некоторым её свойствам, проявляющимся в различных типовых режимах. Для определения качественных показателей САУ в таких случаях используют критерии качества.

К настоящему времени разработано достаточно большое количество критериев качества, которые можно условно разделить на четыре группы.

К первой группе относят критерии точности, то есть критерии, которые для оценки качества системы в той или иной степени используют ошибку системы в различных типовых режимах.

Ко второй группе критериев относятся критерии, определяющие величину запаса устойчивости, то есть удалённость системы от границы устойчивости.

Третья группа критериев определяет так называемое быстродействие системы, под которым понимается быстрота реагирования системы на возмущающее или задающее воздействие. Проще всего можно оценить быстродействие системы по времени затухания переходных процессов в ней.

При рассмотрении понятий запаса устойчивости и быстродействия можно исходить из двух существующих в настоящее время точек зрения.

Во-первых, можно рассматривать поведение системы во временной области и использовать для формирования критериев качества переходную или весовую функцию, расположение полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы.

Во-вторых, можно перейти в частотную область и основываться на некоторых частотных свойствах системы. К ним относятся полоса пропускания, высота резонансного пика, частота среза и др.

Оба эти подхода используются параллельно. Использование того или иного подхода при формировании критериев качества определяется удобствами его применения в системах конкретного вида. И то и другой подход требует изучения условий эксплуатации САУ.

Четвёртая группа критериев – комплексные критерии качества. К ним в первую очередь относятся интегральные критерии. Эти критерии оценивают свойства кривой переходного процесса интегрально, то есть в среднем.

4.2. Точностные критерии качества

Для оценки точности САУ используется величина ошибки в различных типовых режимах.

4.2.1. Статический режим САУ

Самый простой типовой режим – статический режим.

Уравнение статики САУ получается из уравнения динамики, например, из уравнения (2.3.12)

$$y(t) = \frac{W_{of}(p)}{1+W(p)} f(t) = \Phi_{fy}(p) f(t),$$

если в него подставить $p \rightarrow 0$, что соответствует постоянству всех переменных, то есть равенству нулю всех производных.

Таким образом, уравнение статики имеет вид

$$y_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{fy}(p) f_{cm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_{of}(p)}{1+W(p)} f_{cm}. \quad (4.2.1)$$

Вид $W(0)$ и $W_{of}(0)$ зависит от того, содержатся ли в системе интегрирующие звенья или нет.

Вначале рассмотрим такие САУ, которые после приведения их к одноконтурному виду содержат только статические (позиционные) звенья. Такие системы называются статическими. Для статической системы $W(0) = K$ и $W_{of}(0) = K_{of}$, так как знаменатели передаточных функций всех звеньев, входящих сомножителями в $W(p)$ и $W_{of}(p)$, при $p=0$ обращаются в единицу. В результате из выражения (4.2.1) следует

$$y_{cm} = \frac{K_{of}}{1+K} f_{cm}. \quad (4.2.2)$$

В выражении (4.2.2) $K=W(0)$ – общий коэффициент передачи системы, предварительно приведённой к одноконтурному виду; $K_{of}=W_{of}(0)$ – коэффициент передачи системы от точки приложения возмущающего воздействия $f(t)$ до выходной величины $y(t)$. Величина K_{of} определяет статическую зависимость между y_{cm} и f_{cm} при разомкнутом контуре обратной связи, то есть при отсутствии управления. Из уравнения (4.2.2) следует, что замыкание системы приводит к уменьшению статической зависимости выхода от входа в $(1+K)$ раз.

Из формулы (4.2.2) можно определить величину статического отклонения выходной величины y_{cm} , приходящуюся на единицу воздействия

f_{cm} : $\delta_{cm} = \frac{y_{cm}}{f_{cm}} = \frac{K_{of}}{1+K}$. Эта величина является мерой статической точности

системы и называется статизмом.

В частном случае следящей системы, статическая ошибка слежения за задающим воздействием g равна, согласно формулам (2.3.14), (2.3.15),

$$\varepsilon_{cm} = \frac{1}{1+W(0)} g_{cm} = \frac{1}{1+K} g_{cm}.$$

Пример 4.1. Структурная схема системы приведена на рис. 4:1.

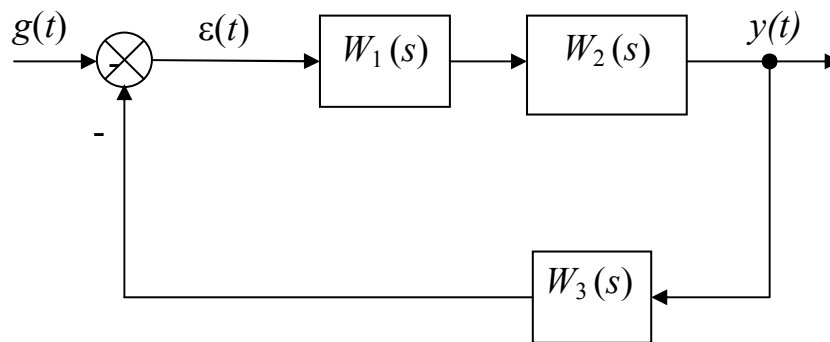


Рис.4. 1. К примеру 4.1

На рис. 4.1 передаточные функции имеют вид: $W_1(s) = \frac{5}{s+1}$,

$$W_2(s) = \frac{0,3}{0,1s+1}, W_3(s) = 1.$$

Найдем статическую ошибку, если на вход системы поступает входной сигнал $g(t) = 10 \cdot 1(t)$ (в). Согласно структурной схеме, сигнал ошибки равен: $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид:

$$\Phi_{g\varepsilon}(s) = \frac{1}{W_1(s)W_2(s)W_3(s)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{s+1} \cdot \frac{0,3}{0,1s+1}}$$

Подставляя в последнее выражение $s=0$ и умножая полученное число на входной сигнал, получим значение статической ошибки:

$$\varepsilon_{cm} = \Phi_{g\varepsilon}(0) \cdot 10 = \frac{1}{1 + 5 \cdot 0,3} \cdot 10 = 4(\text{в}).$$

Введём в статическую САУ интегрирующее звено (с передаточной функцией s^{-1}), причём так, чтобы оно находилось вне участка структурной схемы от места приложения воздействия $f(t)$ до выхода $y(t)$. Таким образом, передаточная функция этого интегрирующего звена *не входит* в передаточную функцию $W_{of}(s)$. В этом случае *статическая ошибка равна нулю*.

Действительно, из формулы (4.2.1) получаем

$$y_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_{of}(s)}{1 + \frac{1}{s}W(s)} f_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sW_{of}(s)}{s + W(s)} f_{cm} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sW_{of}(s)}{K} f_{cm} = 0.$$

Наличие интегрирующего звена между точками $f(t)$ и $y(t)$, то есть последовательно с цепью, описываемой передаточной функцией $W_{of}(s)$, не устранит статическую ошибку. Это можно понять, опять воспользовавшись формулой (4.2.1):

$$y_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}W_{of}(s)}{1 + \frac{1}{s}W(s)} f_{cm} = \frac{W_{of}(0)}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + W(s))} f_{cm} = \frac{K_{of}}{K} f_{cm}.$$

Таким образом, условием устранения статического отклонения y_{cm} от возмущения f_{cm} является наличие интегрирующего звена вне участка, входящего в передаточную функцию $W_{of}(p)$. Такую систему называют *астатической** (относительно возмущения f).

* Более точно следовало бы определить астатическую систему как систему с *нулевой статической ошибкой*, то есть систему, не имеющую статизма.

Вывод о том, что для ликвидации статического отклонения y_{cm} от воздействия f_{cm} в цепи управления нужно иметь интегрирующее звено, не входящее в передаточную функцию $W_{of}(p)$, был сделан в предположении, что упомянутая передаточная функция не содержит интегрирующих звеньев. Можно показать, что этот вывод справедлив, если функция $W_{of}(p)$ произвольная, в том числе и содержащая интегрирующие звенья.

Итак, пусть в составе передаточной функции $W_{of}(p)$ есть l интегрирующих звеньев, то есть эта передаточная функция представлена в виде

$$W_{of}(p) = p^{-l} W_{of}^*(p), \quad (4.2.3)$$

причём $W_{of}^*(0) = K_{of}$, а в передаточную функцию $W(p)$ входит r интегрирующих звеньев

$$W(p) = p^{-r} W^*(p), \quad (4.2.4)$$

где $W^*(0) = K$.

Подставляя выражения (4.2.3), (4.2.4) в формулу (4.2.1), получим

$$y_{cm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{-l} W_{of}^*(p)}{1 + p^{-r} W^*(p)} f_{cm} = p^{r-l} \Big|_{p \rightarrow 0} \frac{K_{of}}{K} f_{cm}.$$

Понятно, что из полученного выражения следует, что $y_{cm} = 0$, если $r > l$, то есть если в системе есть хотя бы одно интегрирующее звено, не входящее в $W_{of}(p)$.

Поскольку астатизм связан с наличием интегрирующего звена *вне* передаточной функции $W_{of}(p)$, то при нескольких входных воздействиях система может быть астатической по отношению к одним воздействиям и иметь статическое отклонение по отношению к другим воздействиям. Например, система может быть астатической по задающему воздействию и статической по возмущающему воздействию или наоборот.

Астатической система может быть благодаря астатическому управляющему устройству или астатическому объекту управления.

4.2.2. Точность САУ при воздействии, меняющемся с постоянной m -ой производной

В данном случае имеются в виду воздействия, изменяющиеся с постоянной скоростью v , когда $f(t)=vt$, с постоянным ускорением a , когда $f(t)=\frac{at^2}{2}$ или, в общем случае, с постоянной m -ой производной $f^{(m)}$, когда

$$f(t) = \frac{f^{(m)}}{m!} t^m. \quad (4.2.5)$$

Установившееся отклонение $y_{уст}$ можно определить, воспользовавшись теоремой о конечном значении в области преобразования Лапласа.

$$y_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{fy}(s) F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s W_{of}(s)}{1 + W(s)} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s W_{of}(s)}{1 + W(s)} \cdot \frac{f^{(m)}}{s^{m+1}}, \quad (4.2.6)$$

где $F(s) = \frac{f^{(m)}}{s^{m+1}}$ – изображение по Лапласу входного воздействия (4.2.5).

Из выражения (4.2.6) видно, что в *статической* системе, у которой $W(0) = K$ и $W_{of}(0) = K_{of}$, установившееся значение стремится к бесконечности $y_{уст} \rightarrow \infty$ при любом $K \neq 0$.

Есть два пути, позволяющие ограничить или даже ликвидировать установившееся отклонение $y_{уст}$ в данном случае. Первый путь связан с выбором передаточной функции $W(s)$, а второй – с выбором передаточной функции $W_{of}(s)$. Как будет видно из дальнейшего, первый путь сводится по-прежнему к введению интегрирующих звеньев, а второй путь – к компенсации возмущений (см. раздел 5.1.2).

Пусть в общем случае передаточная функция $W_{of}(s)$ задана выражением (4.2.3), то есть содержит l интегрирующих звеньев, а передаточная

функция $W(s)$ – формулой (4.2.4) и содержит r интегрирующих звеньев. Тогда, подставляя выражения (4.2.3) и (4.2.4) в формулу (4.2.6), получим

$$y_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^{-l} W_{of}^*(s)}{1 + s^{-r} W^*(s)} \cdot \frac{f^{(m)}}{s^{m+1}} = \frac{K_{of}}{K} f^{(m)} \lim_{s \rightarrow 0} s^{r-l-m}.$$

Из полученного выражения следует, что:

- 1) $y_{уст} \rightarrow 0$, если $(r-l) > m$;
- 2) $y_{уст} \rightarrow \infty$, если $(r-l) < m$;
- 3) $y_{уст} = \frac{K_{of}}{K} f^{(m)}$, если $(r-l) = m$.

Для оценки точности в последнем случае часто применяют понятие *добротности*, которая равна $\frac{K}{K_{of}}$.

Если значение $y_{уст}$ конечно при изменении воздействия с постоянной скоростью $f(t) = vt$, то соответствующая добротность называется добротностью по скорости $Q_v = \frac{v}{y_{уст}} = \frac{K}{K_{of}}, (c^{-1})$. Добротность по скорости имеет размерность $1/c$ и численно равна скорости изменения воздействия, дающей единичное значение $y_{уст}$.

Если значение $y_{уст}$ конечно при изменении воздействия с постоянным ускорением $f(t) = \frac{at^2}{2}$, соответствующая добротность называется добротностью по ускорению $Q_a = \frac{a}{y_{уст}} = \frac{K}{K_{of}}, (c^{-2})$ и имеет размерность $1/c^2$.

Рассматриваемый динамический установившийся режим характерен для следящих систем и систем программного управления. В этом случае интерес представляет величина установившейся ошибки, которая равна

$$\varepsilon_{уст} = g(t) - y_{уст}(t) = \frac{1}{K} g^{(m)}.$$

Таким образом, для ошибки добротность равна коэффициенту передачи K разомкнутой системы.

Систему, имеющую конечную добротность по скорости, называют астатической первого порядка и у неё одно интегрирующее звено вне участка, описываемого передаточной функцией $W_{of}(s)$: $r-l=1$. У системы с конечной добротностью по ускорению – два таких звена: $r-l=2$, а система называется астатической второго порядка и т.д. Таким образом, можно определить порядок астатизма по отношению к какому-либо воздействию как количество интегрирующих звеньев, находящихся вне участка от этого воздействия до измеряемой величины.

Если ввести понятие порядка воздействия, под которым подразумевать порядок постоянной производной входного воздействия m , то полученный результат можно сформулировать так: **установившееся отклонение равно нулю, если порядок астатизма больше порядка воздействия; постоянно в случае равенства этих порядков и возрастает до бесконечности, если порядок астатизма меньше порядка воздействия.**

4.2.3. Точность САУ при гармоническом воздействии

Моногармоническое входное воздействие часто применяется в САУ для исследования частотных свойств систем. При этом, конечно, представляет интерес величина ошибки в таких режимах.

Точность САУ при гармонических колебаниях на входе определяется частотными характеристиками системы. Действительно, частотная передаточная функция описывает установившийся процесс при гармоническом входном сигнале. Запишем дифференциальное уравнение, связывающее ошибку ε , например, с задающим воздействием g :

$$\varepsilon(t) = \Phi_{g\varepsilon}(p)g(t) = \frac{1}{1+W(p)}g(t), \quad (4.2.7)$$

где $\Phi_{g\varepsilon}(s)$ – передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия.

Возьмём входное воздействие в виде гармонического колебания с амплитудой A и частотой ω_0 : $g(t) = A \cos \omega_0 t$. Тогда установившаяся ошибка будет равна

$$\varepsilon_{уст}(t) = A_\varepsilon \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon),$$

где амплитуда установившейся ошибки A_ε определяется значением амплитудно-частотной функции на частоте ω_0 : $A_\varepsilon = |\Phi_{g\varepsilon}(j\omega_0)|A$, а фазовый сдвиг φ_ε – значением фазовой частотной функции на той же частоте: $\varphi_\varepsilon = \arg \Phi_{g\varepsilon}(j\omega_0)$.

Пример 4.2. Структурная схема системы приведена на рис. 4.2.

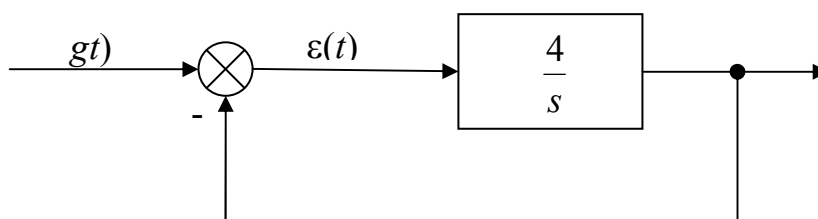


Рис. 4.2. Структурная схема системы к примеру 4.2.

Определить амплитуду установившейся ошибки при поступлении на вход гармонического сигнала $g(t) = A \sin \omega_0 t = 5 \sin 3t$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна

$$\Phi_{g\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{s}} = \frac{s}{s + 4}.$$

Подставив в полученное выражение $s = j\omega$, и далее $\omega = \omega_0 = 3$, получим значение АЧХ как модуля частотной передаточной функции на частоте входного воздействия

$$\left| \Phi_{g\varepsilon}(s) \right|_{\substack{s=j\omega \\ \omega=3}} = \left| \frac{s}{s+4} \right|_{\substack{s=j\omega \\ \omega=3}} = \left| \frac{3j}{3j+4} \right| = \frac{|3j|}{|3j+4|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}.$$

Осталось умножить полученное число на амплитуду входного сигнала и ответ готов

$$A_{\varepsilon} = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3.$$

4.2.4. Коэффициенты ошибок

Метод коэффициентов ошибок может применяться как для задающего, так и для возмущающего воздействия и позволяет вычислить величину установившейся ошибки для произвольной формы входного воздействия. Не снижая общности, рассмотрим случай, когда имеется только задающее воздействие.

Пусть функция времени $g(t)$, описывающая входной сигнал, имеет произвольную форму, но достаточно плавная вдали от начальной точки процесса в том смысле, что существенное значение имеет только m производных $\frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g}{dt^m}$. Запишем уравнение относительно изображения по Лапласу ошибки, которое получается из уравнения (4.2.7), если к последнему применить преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях

$$E(s) = \Phi_{g\varepsilon}(s)G(s) = \frac{1}{1+W(s)}G(s). \quad (4.2.8)$$

Разложив передаточную функцию замкнутой системы по ошибке $\Phi_{g\varepsilon}(s)$ в ряд Тейлора по степеням комплексной переменной s вблизи точки установившегося режима $s=0$ (что соответствует достаточно большому времени t , то есть установившемуся режиму) и, ограничиваясь при этом $(m+1)$ -м слагаемым, из уравнения (4.2.8) получим

$$E_{ycm}(s) = \left(c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \frac{c_3}{3!} s^3 + \dots + \frac{c_m}{m!} s^m \right) G(s). \quad (4.2.9)$$

Переходя в последнем уравнении к оригиналам (то есть из частотной области во временную) и учитывая, что символ s в области времени есть оператор дифференцирования p , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ycm}(t) = & \left(c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{c_m}{m!} p^m \right) g(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \\ & + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{c_m}{m!} \frac{d^m g(t)}{dt^m}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Величины c_0, c_1, c_2, \dots называются коэффициентами ошибок. Они могут быть найдены по общему правилу разложения функции в ряд Тейлора как соответствующие производные

$$\begin{aligned} c_0 &= \Phi_{g\varepsilon}(s) \Big|_{s=0}, \\ c_1 &= \frac{d\Phi_{g\varepsilon}(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \\ c_2 &= \frac{d^2\Phi_{g\varepsilon}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0}, \\ &\dots \\ c_m &= \frac{d^m\Phi_{g\varepsilon}(s)}{ds^m} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Поскольку передаточная функция по ошибке представляет собой дробно-рациональную функцию переменной s , коэффициенты ошибок проще получать не по формулам (4.2.11), а непосредственным делением числителя на знаменатель, имея в виду получить ряд по целым положительным степеням s с последующим сравнением этого ряда с рядом (4.2.9). Следует помнить, что поскольку требуется получить ряд по *возрастающим* степеням s , в таком же порядке, то есть по *возрастающим* степеням s следует располагать числитель и знаменатель при делении.

Пример 4.3. Структурная схема системы приведена на рис. 4.3.

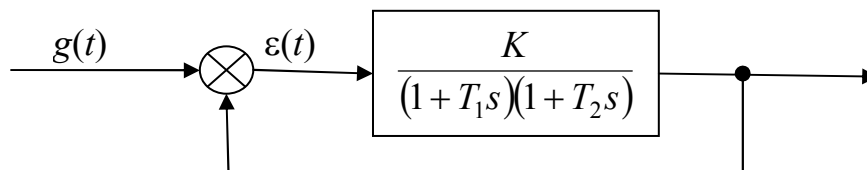


Рис. 4.3. Структурная схема системы к примеру 4.3

Найти первые два коэффициента ошибки. Составим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке

$$\begin{aligned} \Phi_{g\varepsilon}(s) &= \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1+\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}} = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)+K} = \\ &= \frac{1+(T_1+T_2)s+T_1T_2s^2}{1+K+(T_1+T_2)s+T_1T_2s^2}. \end{aligned}$$

Путём деления числителя на знаменатель получаем ряд по степеням переменной s .

$$\frac{-1 + \frac{(T_1+T_2)s + T_1T_2s^2}{1 + \frac{(T_1+T_2)s + T_1T_2s^2}{1+K}}}{\frac{(T_1+T_2)K}{1+K}s + \frac{T_1T_2K}{1+K}s^2} \quad \left| \quad \frac{1 + K + (T_1+T_2)s + T_1T_2s^2}{\frac{1}{1+K} + \frac{(T_1+T_2)K}{(1+K)^2}s + \dots}$$

Далее запишем тождество

$$c_0 + c_1s + \dots = \frac{1}{1+K} + \frac{(T_1+T_2)K}{(1+K)^2}s + \dots,$$

из которого получаем коэффициенты ошибок $c_0 = \frac{1}{1+K}$, $c_1 = \frac{(T_1+T_2)K}{(1+K)^2}$.

Коэффициент c_0 отличен от нуля только в статических системах. В системах с астатизмом первого порядка $c_0=0$, а коэффициент c_1 связан с добротностью по скорости соотношением $c_1 = \frac{1}{Q_v}$. В системах с астатиз-

мом второго порядка $c_0 = c_1 = 0$, а коэффициент c_2 связан с добротностью по ускорению соотношением $\frac{c_2}{2!} = \frac{1}{Q_a}$. И, вообще, в системе с астатизмом n -го порядка первые n коэффициентов ошибок равны нулю, а следующий коэффициент связан с соответствующей добротностью соотношением

$$\frac{c_n}{n!} = \frac{1}{Q_{(n)}}.$$

Предположение о том, что коэффициенты ошибок c_k представляют собой константы, обуславливает применение рассматриваемого метода для сравнительно медленно меняющихся воздействий, когда можно пренебречь переходной составляющей процесса и рассматривать только установившееся вынужденное движение системы.

4.3. Качество переходных процессов

4.3.1. Оценка качества по переходной характеристике

Помимо устойчивости и точности, большое значение при исследовании САУ имеет качество переходных процессов. В частности, оценку запаса устойчивости и быстродействия можно произвести по виду переходного процесса при некоторых типовых воздействиях, которыми могут быть как задающее, так и возмущающее воздействия. Обычно в таких случаях рассматривают типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции. Тогда кривая переходного процесса представляет собой *переходную характеристику системы*. Она может строиться как для регулируемой величины, так и для ошибки.

Численно охарактеризовать качество переходных процессов можно следующими показателями качества.

Время переходного процесса t_n характеризует быстродействие системы. Это время, протекающее от момента поступления на вход еди-

ничного ступенчатого сигнала до момента, после которого имеет место неравенство $|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta$, где Δ – заданная малая величина, обычно представляющая собой допустимую ошибку (рис.4.4). В следящих системах в качестве единичного скачка принимается мгновенное изменение задающего воздействия $r(t)=1(t)$. В этом случае под величиной Δ понимают некото-

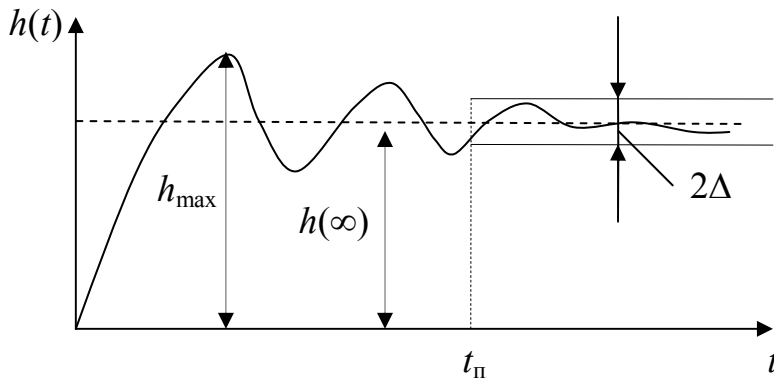


Рис. 4.4. Переходной процесс

рую долю от установившегося значения $y(\infty)$ (обычно от 1% до 5%).

Максимальное отклонение в переходном процессе h_{\max} или перерегулирование $\sigma\%$

$$\sigma\% = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\%$$

характеризует склонность системы к колебаниям, а, следовательно, и запас устойчивости (см. рис. 4.4).

Допустимое значение перерегулирования для той или иной системы определяется на основании опыта эксплуатации подобных систем и обычно составляет 10-30%.

Колебательность переходного процесса обычно определяется числом колебаний за время t_n . Иногда колебательность переходного процесса оценивают отношением соседних максимумов $\frac{h_{\max 2}}{h_{\max 1}}$. Эту величину так и называют колебательностью и выражают в процентах.

Приемлемым числом колебаний считается 1-2, однако бывают системы, в которых колебательность не допускается вообще, а в некоторых случаях возможны три и более колебания.

Задав величину перерегулирования σ и время переходного процесса

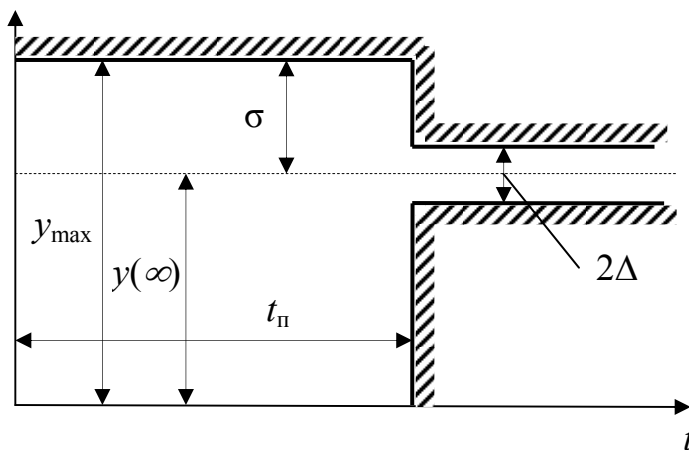


Рис. 4.5. Область допустимых отклонений

t_{π} , мы тем самым определяем некоторую область, ограничивающую отклонения регулируемой величины при единичном воздействии. Эту область можно назвать областью допустимых отклонений регулируемой величины в переходном процессе (рис. 4.5).

Уточнение ограничений на область допустимых отклонений привело к дальнейшему развитию критериев, основанных на переходной характеристике. Это такие критерии, как время нарастания, время запаздывания, время достижения первого максимума и др.

Хотя переходная функция $h(t)$ и является наиболее наглядной характеристикой качества переходных процессов, для её построения нужно решать дифференциальные уравнения, порой, достаточно высокого порядка, что само по себе является отдельной, часто непростой задачей. Поэтому хотелось бы иметь какие-то косвенные признаки, получить которые было бы проще, чем кривую $h(t)$, и по которым можно было бы судить о качестве переходных процессов. Кроме того, желательно, чтобы эти косвенные

признаки позволяли бы связать показатели качества непосредственно с параметрами системы. Такие признаки были разработаны и названы критериями качества переходных процессов.

4.3.2. Частотные критерии качества

Эти критерии позволяют судить о качестве переходных процессов по частотным характеристикам системы. Из частотных характеристик рассматривают две пары функций: это амплитудная и фазовая частотная функции $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, а также вещественная и мнимая частотные функции $U(\omega)$ и $V(\omega)$.

Связь частотных критериев с параметрами системы выражается, как правило, не слишком сложными формулами. Гораздо сложнее связь частотных критериев с переходным процессом. Дополнительно усложняет дело то, что легче получать амплитудную и фазовую частотные функции $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, а связь с переходным процессом более непосредственно выражена у вещественной и мнимой частотных функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$.

Амплитудно-частотная функция $A(\omega)$ однозначно связана с фазовой частотной функцией $\varphi(\omega)$ у минимально-фазовых систем, то есть у систем, состоящих из минимально-фазовых звеньев*. Таким образом, для минимально-фазовых систем по одной АЧХ можно определить все свойства таких систем, в том числе и качество переходных процессов.

По АЧХ можно оценить колебательность и длительность переходного процесса. Характерный вид АЧХ замкнутой системы $A_3(\omega)$ приведён на рис. 4.6. Значение АЧХ на нулевой частоте близко к единице (для астатических систем $A_3(0)=1$). При увеличении частоты $\omega \rightarrow \infty$ АЧХ уменьшается до нуля $A_3(\omega) \rightarrow 0$.

*Минимально-фазовое звено – это звено, у передаточной функции которого все нули (корни числителя) и полюсы (корни знаменателя) имеют отрицательные вещественные части.

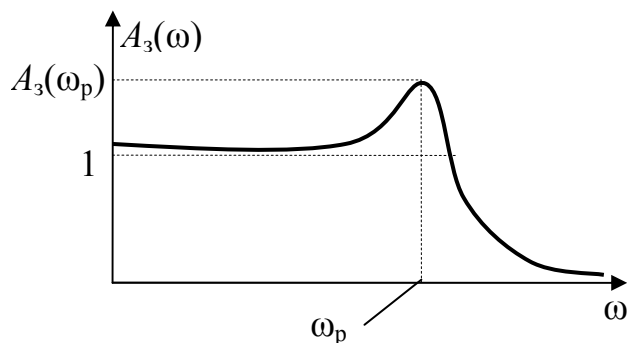


Рис. 4.6. Амплитудно-частотная характеристика

Колебательность зависит от величины относительного максимума кривой АЧХ

$$M = \frac{A_3(\omega_p)}{A_3(0)}.$$

Здесь величина M называется показателем колебательности.

Если $M < 1$, то переходной процесс неколебательный. При увеличении $M > 1$ колебательность возрастает, и при $M \rightarrow \infty$ в системе возникают незатухающие колебания. Задавая величину, например, $M < 1,5$, мы получим перерегулирование не больше 30%.

Время переходного процесса t_n определяется шириной АЧХ, при этом зависимость здесь обратно пропорциональная – чем шире частотная характеристика, тем меньше время переходного процесса, и наоборот. Это нетрудно понять, если вспомнить, что переходная функция и частотная передаточная функция связаны частотным преобразованием Карсона-Хевисайда, а для последнего в качестве одного из свойств есть теорема подобия, по которой изменение масштаба по оси времени для оригинала равносильно обратному пропорциональному изменению масштаба по оси частот.

Приблизённо время переходного процесса можно оценить по величине резонансной частоты ω_p . Рассуждаем следующим образом. Частота колебаний в переходном процессе примерно равна резонансной частоте ω_p .

Если предположить, что за время переходного процесса совершается $1 \div 2$ колебания, то

$$t_{\text{п}} \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{\text{p}}}. \quad (4.2.12)$$

В первом приближении оценить колебательность и длительность переходной характеристики замкнутой системы можно непосредственно по ЛАХ разомкнутой системы. Действительно, частота колебаний в переходном процессе замкнутой системы примерно равна частоте среза $\omega_{\text{с}}$ ЛАХ разомкнутой системы. Поэтому время колебательного переходного процесса определяется по формуле (4.2.12), если вместо ω_{p} подставить $\omega_{\text{с}}$.

$$\text{Для монотонного переходного процесса } t_{\text{п}} \approx \frac{\pi}{\omega_{\text{с}}}.$$

Колебательность считается допустимой, если на частоте среза $\omega_{\text{с}}$ разомкнутой системы наклон ЛАХ не превышает -20 дБ/дек. При этом колебательность будет тем меньше, чем шире участок с таким наклоном.

Хотя вышеприведённые критерии относятся к минимально-фазовым системам, в первом приближении они могут быть применены и к неминимально-фазовым системам.

Колебательность и время переходного процесса могут быть определены и по вещественной $U_3(\omega)$ или по мнимой $V_3(\omega)$ частотным характеристикам замкнутой системы. При этом, поскольку эти характеристики однозначно связаны не только у минимально-фазовых, но и у устойчивых систем, оценка качества переходных процессов в устойчивой системе возможно по любой из этих характеристик, как правило, по вещественной характеристике $U_3(\omega)$.

Типичный вид вещественной частотной характеристики $U_3(\omega)$ приведён на рис. 4.7. Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{п}}$, при котором $U_3(\omega) > 0$, называется интервалом положительности. Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{с}}$

называется интервалом существенных частот, если при $\omega > \omega_c$ выполняется неравенство $|U_3(\omega)| \leq \delta$, где δ – некоторая малая величина. Влиянием остальной части характеристики (при $\omega > \omega_c$) можно пренебречь. Если же при $\omega > \omega_{\pi}$ оказывается, что $|U_3(\omega)| < 0,2U_3(0)$, то при оценке качества переходных процессов в первом приближении можно принимать только интервал положительности.

Связь переходной функции $h(t)$ с вещественной частотной функцией $U_3(\omega)$ выражается не очень сложной формулой

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_3(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.2.13)$$

Анализ формулы (4.2.13) позволяет сделать следующие оценки кривой переходного процесса.

1. Статическое отклонение $h(\infty)$ равно начальному значению $U_3(0)$. Если речь идёт о скачке задающего воздействия, то в следящих системах $U_3(0)$ близко к единице (в астатических системах $U_3(0)=1$). Если же речь идёт о скачке возмущающего воздействия, то $U_3(0)$ должно быть как меньше (в астатических системах $U_3(0)=0$).
2. Чтобы перерегулирование не превышало 18%, достаточно иметь положительную невозрастающую непрерывную характеристику $U_3(\omega)$.
3. Для монотонности переходного процесса достаточно, чтобы $\frac{dU_3(\omega)}{d\omega}$ была отрицательная, убывающая по модулю, непрерывная функция, причём $U_3(\infty)=0$.
4. Простейшим признаком колебательности переходного процесса является наличие значений $U_{3\max}(\omega) > U_3(0)$.
5. Переходной процесс также будет колебательным, если характеристика $U_3(\omega)$ располагается на какой-либо частоте ω выше ступенчатой кривой

$$G(\omega) = \cos \frac{\pi}{\left[\frac{\omega_{\pi}}{\omega} \right] + 1}, \text{ где } [] \text{ означает целочисленное значение, взятое с}$$

избытком.

6. Если вещественную характеристику $U_3(\omega)$ можно представить как разность двух невозрастающих положительных функций, то перерегулирование не превысит 18%.
7. Для монотонных процессов время достижения переходной характеристикой уровня в 95% от $h(\infty)$ будет не меньше, чем $\frac{4\pi}{\omega_{\pi}}$. Если процесс колебательный, это время переходного процесса $t_{\pi} \geq \frac{\pi}{\omega_{\pi}}$. Вообще, при прочих равных условиях, быстродействие системы будет тем больше, чем больше ω_{π} .
8. Склонность системы к колебаниям тем больше, чем выше пик у вещественной характеристики. В частности, этот пик устремляется в бесконечность на некоторой ненулевой частоте, если система находится на колебательной границе устойчивости. У системы, находящейся на аperiodической границе устойчивости, пик устремляется в бесконечность в начале координат.

4.3.3. Корневые критерии качества

Эти критерии оценивают качество переходных процессов по значениям нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Вспомним уравнение (2.3.12), связывающее регулируемую величину y с каким-либо воздействием f

$$y(t) = \Phi_{fy}(p)f(t), \quad (4.2.14)$$

где передаточная функция замкнутой системы $\Phi_{fy}(s)$ задаётся выражением

$$\Phi_{fy}(s) = \frac{W_{oy}(s)}{1 + W(s)} = \frac{M(s)}{D(s)}, \quad (4.2.15)$$

где $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристический полином системы, $M(s) = m_0 s^m + m_1 s^{m-1} + \dots + m_m$ – полином, зависящий от места приложения входного воздействия f .

Представив числитель и знаменатель выражения (4.2.15) в виде сомножителей, получим

$$\Phi_{fy}(s) = \frac{m_0 \prod_{k=1}^m (s - p_k)}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \quad (4.2.16)$$

где p_k – нули, а s_i – полюсы передаточной функции $\Phi_{fy}(s)$.

В последней формуле, не снижая общности, предполагается, что кратных полюсов и нулей у передаточной функции нет.

Из выражения (4.2.16) ясно, что полюсы и нули с точностью до постоянного множителя m_0/a_0 определяют передаточную функцию, а, следовательно, и переходной процесс в системе. Попутно обратим внимание на то, что при исследовании устойчивости нас интересовали только полюсы передаточной функции, здесь же нужно учитывать также и её нули. Естественно, нули не влияют только в том случае, если их нет, то есть, если передаточная функция имеет вид

$$\Phi_{fy}(s) = \frac{m_0}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - s_i)}. \quad (4.2.17)$$

Рассмотрим вначале как раз этот случай.

Как уже было выяснено, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4.2.14) и интерпретируемого как переходной процесс, записывается в виде

$$y_o(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{s_k t}, \quad (4.2.18)$$

где s_k – корни характеристического уравнения (корни знаменателя передаточной функции (4.2.16) или (4.2.17)), а постоянные интегрирования C_k определяются начальными условиями и правой частью дифференциального уравнения, в том числе и входным воздействием.

Переходной процесс (4.2.18) для устойчивой системы состоит из затухающих экспоненциальных членов $C_k e^{-\alpha_k t}$ (для вещественных корней $s_k = -\alpha_k$) и затухающих колебательных $C_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ (для комплексных корней $s_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$). Скорость затухания и в том и в другом случае определяется вещественной частью корней α_k . Самая «медленная» составляющая, очевидно, будет та, у которой величина α_k минимальна. Понятно, что длительность всего переходного процесса будет никак не больше длительности этой самой «медленной» составляющей. Таким образом, мерой быстродействия системы может служить минимальное значение абсолютной величины вещественной части корня её характеристического уравнения. Эта мера называется степенью устойчивости η

$$\eta = \min_k |\operatorname{Re} s_k|.$$

Название «степень устойчивости» связано вовсе не с обсуждаемой здесь проблемой быстродействия, а возникло вследствие того, что геометрически величина η представляет собой расстояние от мнимой оси, которая является границей устойчивости, до ближайшего корня характеристического уравнения (см. рис. 4.7).

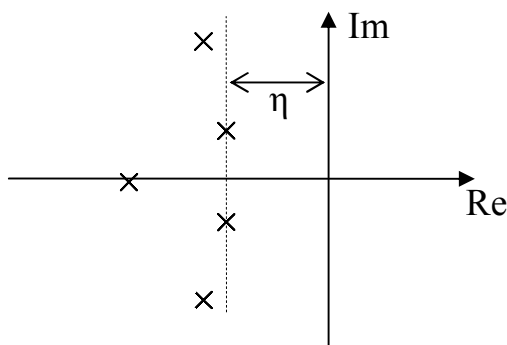


Рис. 4.7. Степень устойчивости

Задавая конкретное значение величины ошибки Δ , можно примерно определить время переходного процесса до достижения этой ошибки.

Например, при $\Delta=0,05$ получим $t_{\Pi} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}$.

Для определения степени устойчивости η вовсе необязательно решать характеристическое уравнение и находить его корни. Достаточно в характеристическом уравнении заменить старую переменную s новой переменной λ : $s=\lambda-\eta$, где η – неизвестный пока параметр. Такая замена означает сдвиг мнимой оси на плоскости s влево на величину η . Далее применяем критерий нахождения системы на границе устойчивости относительно нового характеристического уравнения, что будет означать наличие корня на мнимой оси. Очевидно, что удовлетворяющее этим условиям значение η и будет искомой степенью устойчивости.

Теперь обсудим колебательность. Ясно, что колебательность переходного процесса в целом не превышает колебательности самой колебательной составляющей в сумме (4.2.18).

Колебательность составляющей $C_k e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ определяется отношением соседних максимумов

$$\frac{y_{k \max 2}}{y_{k \max 1}} = \frac{C_k e^{-\alpha_k (t_1 + \tau_k)}}{C_k e^{-\alpha_k t_1}} = e^{-\alpha_k \tau_k},$$

где $\tau_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$ – период колебаний данной составляющей.

Таким образом, колебательность равна $e^{-2\pi \frac{\alpha_k}{\omega_k}}$. Следовательно, мерой колебательности является отношение $\frac{\omega_k}{\alpha_k}$: чем оно больше, тем больше колебательность. Наиболее колебательной является составляющая,

имеющая максимальное отношение $\frac{\omega_k}{\alpha_k}$. Эта величина и называется степенью колебательности μ

$$\mu = \max_k \frac{\omega_k}{\alpha_k}.$$

Геометрически в комплексной плоскости степень колебательности μ соответствует для наиболее колебательной составляющей углу γ между лучом, направленным через корень из начала координат и отрицательной вещественной осью (см. рис. 4.8) $\gamma = \text{arctg} \mu$.

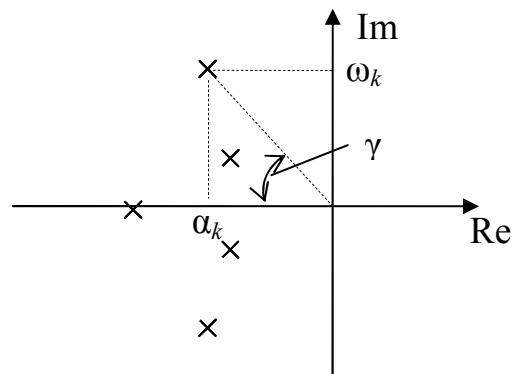


Рис. 4.8. Степень колебательности

Определить степень колебательности можно точно также, как и степень устойчивости, не находя корней характеристического уравнения. Для этого делаем в характеристическом уравнении замену старой переменной s новой переменной λ по формуле $s = -j\lambda e^{j\gamma}$, что соответствует повороту осей старой системы координат против часовой стрелки на угол γ . Далее определяем условия нахождения системы в новой системе координат на границе устойчивости. При этом один из корней попадает на мнимую ось и значение величины γ , соответствующее полученному условию и будет определять степень колебательности μ .

Задав значения μ и η , мы тем самым определяем допустимую область расположения корней характеристического уравнения (см. рис. 4.9).

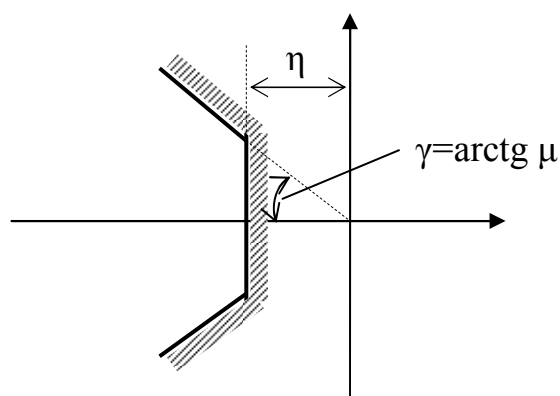


Рис. 4.9. Область расположения корней при задании μ и η

Следует понимать, что оценка колебательности и быстродействия системы по значениям μ и η является оценкой переходного процесса сверху, то есть действительный переходной процесс может иметь значительно лучшие показатели качества. Это будет в том случае, если постоянные интегрирования, соответствующие составляющим переходного процесса, по которым определяются μ и η , малы по сравнению с постоянными интегрирования других составляющих.

Теперь обсудим влияние нулей (то есть корней уравнения $M(s)=0$) передаточной функции на качество переходных процессов. Вообще влияние правой части дифференциального уравнения, определяемой нулями передаточной функции, сводится к изменению постоянных интегрирования в сумме (4.2.18). Формально представим систему с передаточной функцией (4.2.15) в виде последовательно соединённых звеньев – с передаточной функцией $\frac{1}{D(s)}$, не имеющей нулей, и с передаточной функцией

$M(s) = m_0 s^m + m_1 s^{m-1} + \dots + m_m$. Таким образом, процесс на выходе второго звена будет дополнен производными (учитывая, что s – оператор дифференцирования) от выходного воздействия первого звена. В итоге члены с положительными коэффициентами m_i приведут к повышению колебатель-

ности и убыстрению переходного процесса, а отрицательные члены – к затягиванию процесса.

Не останавливаясь на подробном анализе влияния нулей, приведём общие рекомендации по выбору расположения нулей и полюсов передаточной функции.

1. Желательно располагать нули вблизи области расположения полюсов. Удаление нулей от области расположения полюсов ведёт к увеличению амплитуд собственных колебаний в переходном процессе.
2. Для уменьшения отклонений в переходном процессе часто бывает выгодно удалять полюсы друг от друга.
3. Приближение друг к другу не представляет опасности для полюсов, находящихся далеко от мнимой оси. Эти полюсы влияют только на начальный участок переходного процесса.

Рассмотрим далее характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (4.2.19)$$

Коэффициенты этого уравнения связаны с его корнями формулами Виетта, в частности, последний коэффициент равен произведению корней

$$a_n = \prod_{k=1}^n s_k. \text{ Раз это так, то чем больше } a_n, \text{ тем при прочих равных условиях}$$

будут больше вещественные части корней, и, следовательно, короче переходной процесс.

Уравнение (4.2.19) удобно преобразовать к виду

$$s^n + A_1 \Omega_0 s^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \Omega_0^{n-1} s + \Omega_0^n = 0, \quad (4.2.20)$$

где Ω_0 – так называемый среднегеометрический корень, $A_i = \frac{a_i}{\Omega_0^i}$.

На комплексной плоскости среднегеометрический корень Ω_0 задаёт точку на вещественной оси, являющуюся геометрическим центром всех корней уравнения (4.2.19) или (4.2.20). Таким образом, среднегеометрический корень Ω_0 характеризует среднюю длительность всех составляющих переходного процесса, а, следовательно, является оценкой быстродействия системы.

Попутно вспомним, что в величину Ω_0 входит коэффициент a_n , зависящий от общего коэффициента усиления K разомкнутой системы: у статических САУ $a_n = K + 1$, у астатических – K . Отсюда следует, что с ростом коэффициента усиления растёт также и быстродействие. Таким образом, через величину Ω_0 связывается быстродействие системы с зависящей от коэффициента усиления точностью в установившихся режимах.

4.3.1. Интегральные критерии

Интегральные критерии качества дают общую оценку времени переходного процесса и величины ошибки в совокупности, без определения того или другого в отдельности.

Все интегральные критерии используются для определения оптимальных значений варьируемых параметров. Целесообразность применения интегральных критериев – в существовании готовых формул, выражающих их через коэффициенты передаточной функции системы. Используя эти готовые формулы, получают в итоге выражения для интегральных критериев через варьируемые параметры системы. Далее обычным образом находят оптимальные значения варьируемых параметров, соответствующие минимуму интегральных оценок.

Самое простая интегральная оценка переходного процесса получится, если усреднить величину отклонения от установившегося значения $\Delta y(t) = y(t) - y(\infty)$ за всё время $0 < t < \infty$, то есть сформировать интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \Delta y(t) dt. \quad (4.3.1)$$

Оценка (4.3.1) очень просто вычисляется. Запишем преобразование Лапласа от Δy

$$\Delta Y(s) = \int_0^{\infty} \Delta y(t) e^{-st} dt.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (4.3.1), понимаем, что $I_1 = \Delta Y(s) \Big|_{s=0}$.

Понятно, что наименьшее значение, равное нулю, интеграл I_1 принимает, если $\Delta y(t)=0$, то есть, если переходной процесс вообще отсутствует, и в системе с поступлением единичной ступеньки на вход мгновенно возникает установившееся значение регулируемой величины.

Правда, пользоваться оценкой (4.3.1) можно только для монотонных процессов, когда точно известно, что переходной процесс неколебательный. Для колебательных переходных процессов ошибки разных знаков компенсируются, и критерий I_1 будет стремиться к нулю, например, для системы, находящейся на колебательной границе устойчивости.

В случае колебательного переходного процесса или когда характер переходного процесса неизвестен, можно пользоваться квадратичным критерием

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\Delta y(t))^2 dt. \quad (4.3.2)$$

Идеально малое (равное нулю) значение интеграла I_2 , так же, как и интеграла I_1 , соответствует мгновенному изменению регулируемой величины. Квадратичный критерий (4.3.2) применяется значительно чаще, чем критерий (4.3.1), но и он не свободен от недостатков. Оказывается, что выбор параметров системы по минимуму I_2 часто даёт сильно колебательный процесс с недопустимо большой скоростью изменения регулируемой ве-

личины. В таких случаях в интегральную оценку, помимо отклонения Δy , включают скорость $\frac{d\Delta y}{dt}$. Получаем при этом критерий I_3

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[(\Delta y(t))^2 + T^2 \left(\frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (4.3.3)$$

где T – величина, определяющая вес скорости в подынтегральном выражении (4.3.3).

Критерий (4.3.3) состоит из двух слагаемых: первое – это уже знакомый интеграл I_2 , а второе – интеграл от скорости $\frac{d\Delta y}{dt}$. Если при неизменной площади переходного процесса, то есть при $I_2 = const$, замедлить (растянуть) процесс, это приведёт к уменьшению второго интеграла. Поэтому изменение какого-либо параметра системы, ведущее к уменьшению оценки I_3 , при прочих равных условиях приведёт к более плавному, а, следовательно, и к менее колебательному процессу. При этом, чем больше величина T , тем более растянутым будет переходной процесс.

Разницу между критериями I_2 и I_3 можно пояснить ещё так. Идеальная переходная функция, дающая минимум интегралу I_2 – это ступенчатая функция. Идеальная переходная функция, дающая минимум критерию I_3 – это экспоненциальная функция $\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)y(\infty)$. В том, что это действительно

так, можно убедиться, если провести некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} \left[(\Delta y(t))^2 + T^2 \left(\frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 \right] dt = \int_0^{\infty} \left(\Delta y(t) + T \frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 dt - \int_0^{\infty} 2T\Delta y(t) \frac{d\Delta y(t)}{dt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\Delta y(t) + T \frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 dt - T(\Delta y(0))^2. \end{aligned}$$

Ясно, что минимум критерия I_3 будет тогда, когда подынтегральное выражение в правой части последней формулы обратится в нуль

$$\Delta y(t) + T \frac{d\Delta y(t)}{dt} = 0. \quad (4.3.4)$$

Условие (4.3.4) есть не что иное, как дифференциальное уравнение относительно $\Delta y(t)$. Решение этого уравнения есть $\Delta y(t) = \Delta y(0)e^{-\frac{t}{T}}$, или, учитывая, что $\Delta y(t) = y(t) - y(\infty)$, $y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)y(\infty)$.

Находят применение и более сложные критерии, включающие вторую и более высокого порядка производные. Оптимизация систем по этим критериям приближает переходной процесс соответственно к кривым второго и более высокого порядков.

В заключение темы, посвященной критериям качества переходных процессов, перечислим рекомендации по применению того или иного вида критериев.

1. Частотные и интегральные критерии качества применяются при исследовании переходных процессов, вызванных основными (главными) воздействиями. Данные критерии позволяют учесть конкретную форму входного воздействия и начальные условия.

2. Интегральные критерии применяются в тех же случаях для определения оптимальных значений варьируемых параметров системы. Численных оценок показателей качества они не дают.

3. Корневые критерии применяют для оценки в среднем качества переходного процесса при всевозможных воздействиях и начальных условиях.

4. Для систем выше пятого порядка целесообразно использовать частотные критерии, поскольку они являются графическими.

5. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

5.1. Постановка задачи

Под синтезом САУ понимают такое её исследование, в результате которого для данных условий работы* находят необходимую структуру системы, параметры её элементов и способы реализации полученной структурной схемы. Задача синтеза – всегда задача на оптимум, но подобрать сложный критерий, как правило, невозможно. Поэтому решать общую задачу синтеза, как строгую математическую задачу по поиску экстремума некоторого критерия (то есть как вариационную задачу), практически невозможно. Существуют, конечно, и более простые постановки задачи синтеза.

Можно рассматривать синтез как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы, при котором обеспечивается выполнение некоторых технических требований к ней.

Ещё более простая постановка задачи – это рассматривать синтез, как определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы**, чтобы обеспечить требуемые динамические качества.

При инженерном синтезе САУ необходимо обеспечить, во-первых, требуемую точность и, во-вторых, приемлемый характер переходных процессов. Начнём с первого, а именно, с повышения точности.

5.2. Повышение точности САУ

5.2.1. Общие методы

К числу общих методов повышения точности САУ относятся:

* Сюда входят заданный объект управления, возможный класс задающих и возмущающих воздействий, ограничения на время работы, требуемая точность, необходимое качество переходных процессов и так далее, включая стоимость эксплуатации и проектирования.

** К неизменяемой части системы относят, прежде всего, сам объект управления, а также связанные с объектом и поэтому определяемые им исполнительные устройства, датчики, возможно, некоторые промежуточные элементы – усилители, преобразователи и т.п.

- 1) увеличение общего коэффициента усиления разомкнутой цепи,
- 2) повышение степени астатизма,
- 3) применение регулирования по производным от ошибки.

Первый метод – увеличение общего коэффициента передачи разомкнутой системы – наиболее универсальный и эффективный. Увеличить общий коэффициент усиления можно путём введения усилителей, а в некоторых случаях и за счёт повышения коэффициентов передачи отдельных звеньев.

Увеличение коэффициента усиления благоприятно сказывается в смысле уменьшения ошибки во всех типовых режимах. Это следует, в частности, из выражений для коэффициентов ошибок, в которых общий коэффициент усиления находится в знаменателе.

До нуля, конечно, этим методом ошибку не уменьшить, во-первых, потому, что для этого пришлось бы увеличивать коэффициент усиления до бесконечности, а это физически невозможно, а во-вторых, и это основное, потому, что при увеличении коэффициента усиления система приближается, как правило, к колебательной границе устойчивости.

Повышение порядка астатизма применяется для ликвидации установившейся ошибки в различных типовых режимах: в статическом режиме, при движении с постоянной скоростью, с постоянным ускорением и т.д. Формально повышение порядка астатизма сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибок: для системы с астатизмом первого порядка $c_0=0$, с астатизмом второго порядка $c_0=c_1=0$ и т.д. С точки зрения описания системы в виде передаточных функций порядок астатизма (относительно задающего воздействия) – это кратность нулевого полюса в передаточной функции разомкнутой системы.

Самый простой способ физически повысить порядок астатизма – ввести в канал регулирования интегрирующие звенья, как уже было выяс-

нено в разделе 4.2.2. Но добавление интегрирующих звеньев неблагоприятно сказывается на устойчивости системы.

Пример 5.1. Рассмотрим систему, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна $W(s) = \frac{K}{Ts+1}$. При необходимости увеличить порядок астатизма, скажем, до двух, требуется ввести последовательно два интегрирующих звена. Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет равна $W^*(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{K}{Ts+1}$. Характеристический полином замкнутой системы в этом случае будет равен

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + K.$$

Из полученного выражения видно, что в характеристическом полиноме коэффициент при первой производной равен нулю (s в первой степени отсутствует), и, согласно необходимому критерию устойчивости – положительности **всех** коэффициентов, – замкнутая система неустойчива. Причём сделать её устойчивой нельзя никаким изменением величин K и T .

Таким образом, система с двумя (или больше) интеграторами является структурно неустойчивой. Поэтому одновременно с введением интегрирующих звеньев приходится использовать корректирующие звенья, повышающие запас устойчивости.

В то же время существует путь повысить порядок астатизма без заметного или недопустимого ухудшения запаса устойчивости. Этот путь состоит в применении издромных звеньев. Передаточная функция издромного звена $W_{ид}(s) = 1 + \frac{K_{и}}{s} = \frac{K_{и}(1 + T_{и}s)}{s}$, где $T_{и} = \frac{1}{K_{и}}$. Структурная схема издромного звена и его логарифмические характеристики приведены на рис. 5.1, а, и 5.1, б соответственно.

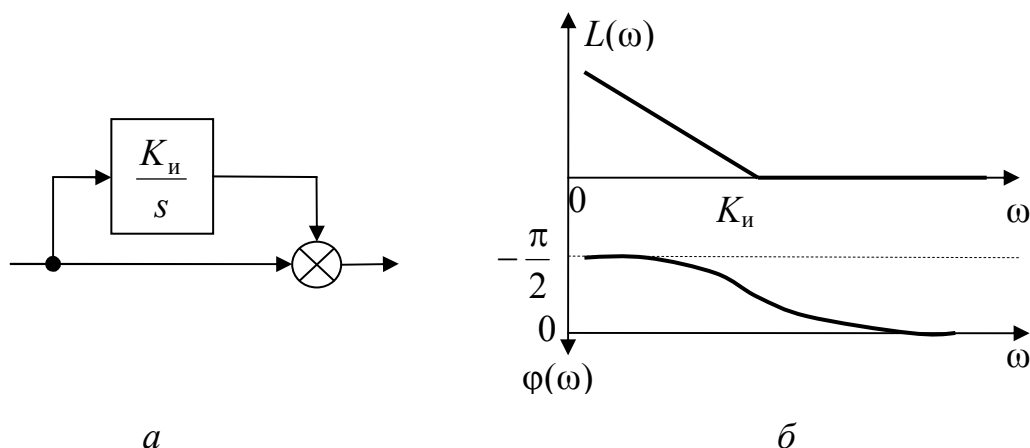


Рис. 5.1. Изодромное звено

Пример 5.2. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 5.1. Повысим порядок астатизма на два, добавив в канал регулирования два изодромных звена. Тогда передаточная функция разомкнутой системы станет равной

$$W(s) = \frac{K_{и1}(1+T_{и1}s)}{s} \cdot \frac{K_{и2}(1+T_{и2}s)}{s} \cdot \frac{K}{1+Ts} = \frac{Ks^2 + (K_{и1} + K_{и2})Ks + K_{и1}K_{и2}K}{s^2(1+Ts)}. \quad (5.2.1)$$

Характеристический полином замкнутой системы, как сумма числителя и знаменателя выражения (5.2.1), будет иметь вид

$$D(s) = Ts^3 + (1+K)s^2 + (K_{и1} + K_{и2})s + K_{и1}K_{и2}K.$$

Ясно, что при соответствующем выборе коэффициентов $K_{и1}$ и $K_{и2}$ систему можно сделать не только устойчивой, но и добиться заданного запаса устойчивости.

При малой величине коэффициента $K_{и}$ изодромное звено влияет только на начальный участок результирующей частотной характеристики. Следует иметь в виду, что применение изодромных звеньев с малым $K_{и}$ образует систему, динамические свойства которой могут быть сравнительно низкими. В итоге коэффициенты ошибок, следующие за тем коэффици-

ентом, который обратился в нуль, могут не только не уменьшиться, но даже увеличиться.

Регулирование по производным от ошибки имеет целью в большинстве случаев повысить запас устойчивости системы, что позволит увеличить общий коэффициент усиления, и тем самым повысить точность. Но регулирование по производным от ошибки может и самостоятельно повысить точность системы, даже при неизменном коэффициенте усиления. Физика этого явления заключается в том, что при регулировании по производным система «чувствует» не только саму ошибку, но и тенденцию к её изменению.

Типичный вид структурной схемы системы при регулировании с применением производных от ошибки приведён на рис. 5.2.

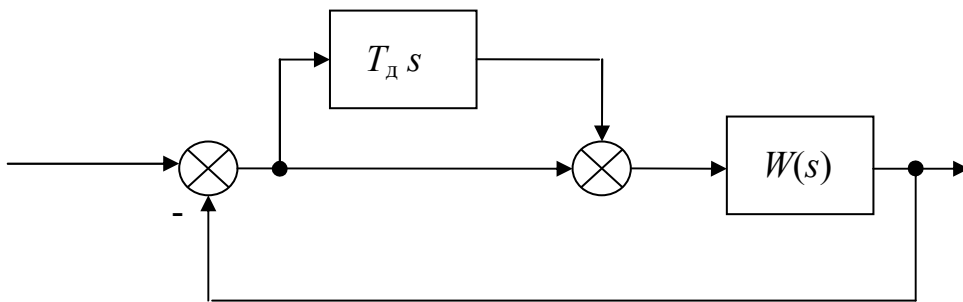


Рис. 5.2. Регулирование по производным от ошибки

Введение дифференцирующего звена не влияет на первый коэффициент ошибок, но уменьшает остальные. В связи с этим наиболее эффективное уменьшение ошибки будет при одновременном применении изомного и дифференцирующего звена.

Так как дифференцирование эквивалентно дополнительному усилению высоких частот, использование более чем двух дифференцирующих звеньев нежелательно из-за возрастающего влияния высокочастотных помех.

5.2.2. Теория инвариантности и комбинированное управление

Одним из способов, позволяющих получить высокую точность, является использование методов теории инвариантности.

САР назовём инвариантной по отношению к возмущающему воздействию, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, регулируемая величина и ошибка не зависят от этого воздействия.

САР назовём инвариантной по отношению к задающему воздействию, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, ошибка не зависит от этого воздействия.

Поскольку в обоих определениях инвариантности фигурирует ошибка, запишем дифференциальное уравнение для этой ошибки $\varepsilon(t)$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \varepsilon(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \psi(t), \quad (5.2.2)$$

где $\psi(t)$ – возмущающее или задающее воздействие.

Лапласово изображение ошибки из уравнения (5.2.2) будет иметь вид

$$E(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \Psi(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \cdot \frac{M(s)}{N(s)}, \quad (5.2.3)$$

где $\Psi(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ – лапласово изображение внешнего воздействия,

$$B(s) = b_0 s^m + \dots + b_m, \quad D(s) = a_0 s^n + \dots + a_n.$$

Решение уравнения (5.2.2), как известно, состоит из двух составляющих – переходной $\varepsilon_n(t)$ (решение соответствующего однородного уравнения) и вынужденной $\varepsilon_b(t)$ (частное решение неоднородного уравнения). Тогда при отсутствии кратных корней знаменателя в выражении (5.2.3) и в соответствии с теоремой разложения можно записать

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{п}}(t) + \varepsilon_{\text{в}}(t) = \sum_k c_k e^{s_k t} + \sum_i d_i e^{p_i t}, \quad (5.2.4)$$

где s_k – полюсы передаточной функции, то есть корни уравнения $D(s) = 0$, p_i – полюсы входного воздействия, то есть корни уравнения $N(s) = 0$, c_k и d_i – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

Вынужденная составляющая $\varepsilon_{\text{в}}(t)$ равна нулю в следующих случаях.

1. Если $M(s) = 0$, то $\varepsilon_{\text{в}}(t) = 0$. Этот случай тривиальный, и он соответствует равенству нулю входного воздействия.

2. Если $B(s) = 0$, то также $\varepsilon_{\text{в}}(t) = 0$. Этот случай соответствует абсолютной инвариантности системы по отношению к входному воздействию, которое может быть любой функцией времени. В следящих системах при рассмотрении задающего воздействия условие $B(s) = 0$ означает, что равна нулю передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{\text{ре}}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = 1 - \Phi(s).$$

С учётом правой части последнего выражения это также означает, что равна единице передаточная функция замкнутой системы $\Phi(s)$. Последнее говорит о том, что частотная передаточная функция замкнутой системы $\Phi(j\omega)$ не зависит от частоты, то есть система имеет бесконечную полосу пропускания, а это принципиально недостижимо. Если речь идёт о возмущающем воздействии, то условие $B(s) = 0$ означает, что равна нулю передаточная функция по возмущающему воздействию. Здесь в принципе можно добиться абсолютной инвариантности системы, но технически это сделать достаточно сложно.

3. Установившуюся составляющую ошибки, обусловленную полюсами входного воздействия в выражении (5.2.4), можно сделать равной нулю, если эти полюсы отсутствуют. Исчезновения полюсов входного воздействия в выражении (5.2.3) можно достичь, если значения этих полюсов будут равны значениям нулей передаточной функ-

ции по ошибке, то есть, если корни уравнения $N(s)=0$ совпадут с корнями уравнения $B(s)=0$. В этом случае, разложив полиномы $N(s)$ и $B(s)$ на множители, можно сократить одинаковые члены в числителе и знаменателе. Проектируя регулятор таким образом, чтобы добиться означенного условия для передаточной функции замкнутой системы по ошибке, мы получаем частичную инвариантность системы, именно, инвариантность по отношению к воздействию определённого вида. Понятно, что в таком случае по отношению к другим воздействиям ошибка может быть не равна нулю.

Комбинированное управление является основным методом, используемым при синтезе инвариантных систем. Этот метод предполагает, что наряду с регулированием по ошибке применяется регулирование по задающему или возмущающему воздействию. Структурная схема системы, реализующей комбинированное управление по задающему воздействию, приведена на рис. 5.3.

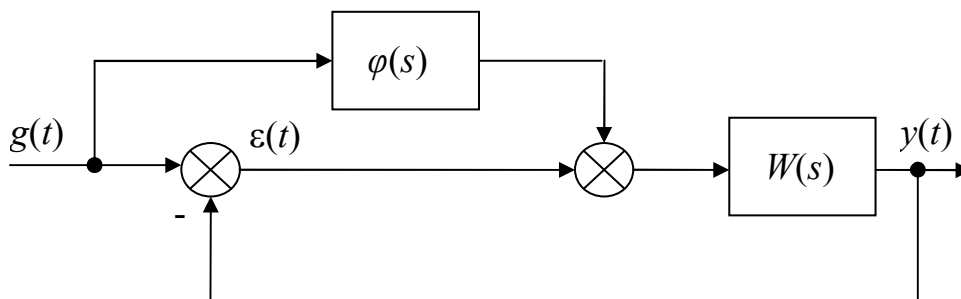


Рис. 5.3. Комбинированное управление по задающему воздействию

Дифференциальное уравнение, связывающее задающее воздействие $g(t)$ и регулируемую величину $y(t)$, имеет вид

$$y(t) = \frac{W(p)(1 + \varphi(p))}{1 + W(p)} g(t) = \Phi_s(p)g(t),$$

где $\Phi_3(s)$ – эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учётом регулирования по задающему воздействию – может быть найдена, например, по формуле Мейсона

$$\Phi_3(s) = \frac{W(s)(1 + \varphi(s))}{1 + W(s)}. \quad (5.2.5)$$

Из выражения (5.2.5) ясно, что управление по задающему воздействию не меняет знаменатель передаточной функции замкнутой системы, следовательно, не будут нарушаться не только условия устойчивости, но и сохранятся корневые оценки качества переходного процесса.

Из формулы (5.2.5) по известным соотношениям могут быть получены эквивалентные передаточная функция по ошибке

$$\Phi_{gy3}(s) = 1 - \Phi_3(s) = \frac{1 - \varphi(s)W(s)}{1 + W(s)} \quad (5.2.3)$$

и передаточная функция разомкнутой системы

$$W_3(s) = \frac{\Phi_3(s)}{1 - \Phi_3(s)} = \frac{W(s)(1 + \varphi(s))}{1 - \varphi(s)W(s)}. \quad (5.2.4)$$

Переход к эквивалентным передаточным функциям позволяет заменить структурную схему системы комбинированного управления (рис. 5.3) привычной схемой с единичной обратной связью (рис. 5.4).

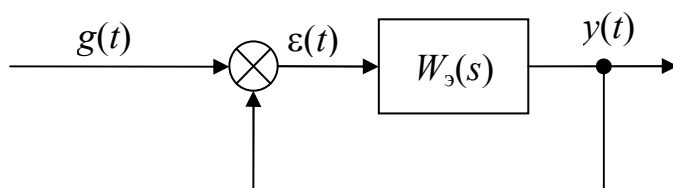


Рис. 5.4. Эквивалентная схема системы

Приравняв нулю передаточную функцию по ошибке (5.2.3), получим условие абсолютной инвариантности системы по отношению к задающему воздействию

$$\varphi(s) = \frac{1}{W(s)}.$$

Представив последнее выражение в виде степенного ряда по возрастающим степеням s , получим необходимый вид производных от задающего воздействия

$$\varphi(s) = \frac{1}{W(s)} = a_0 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2 + \dots \quad (5.2.5)$$

Этот ряд может быть конечным или бесконечным. Первое слагаемое в астатических системах, а также в большинстве статических систем оказывается равным нулю.

Обычно более или менее точно можно ввести только первую производную. Производные более высокого порядка можно ввести приближённо с использованием известных дифференцирующих звеньев. Ввиду невозможности введения бесконечного числа производных практически можно добиться только частичной инвариантности, что соответствует использованию ограниченного числа членов в разложении (5.2.5). Если ввести первую производную, то порядок астатизма повышается на единицу, если первую и вторую производные – порядок астатизма повысится на два и т.д.

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию вводится не непосредственно на вход системы, как это показано на рис. 5.3, а в некоторую точку внутри канала регулирования (см. рис.5.5).

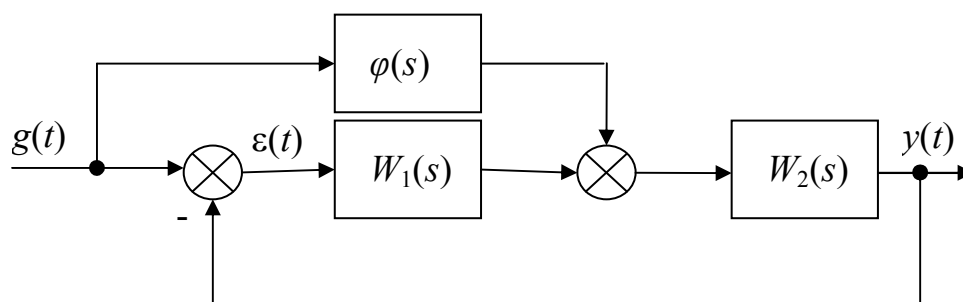


Рис. 5.5. Комбинированное управление по задающему воздействию

В этом, более общем случае эквивалентная передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s) + \varphi(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Нетрудно получить условие абсолютной инвариантности для этого случая аналогично тому, как это было сделано для системы, изображённой на рис. 5.3. Это условие задаётся выражением $\varphi(s) = W_2^{-1}(s)$.

Комбинированное управление может быть применено и для снижения ошибки, вызванной возмущающим воздействием. В этом случае одновременно с регулированием по ошибке $\varepsilon(t)$ используется регулирование по возмущающему воздействию $f(t)$ (рис. 5.6).

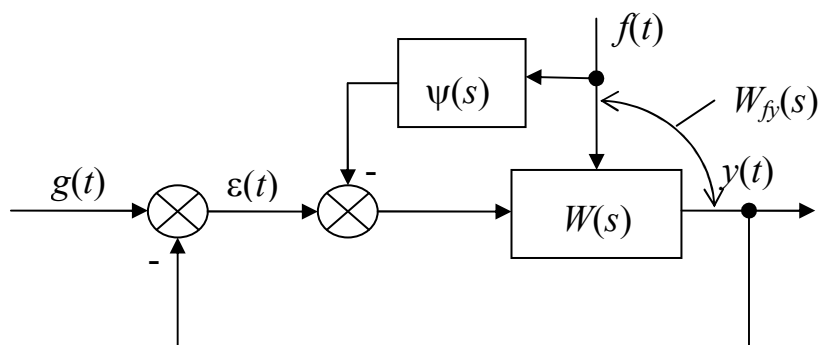


Рис. 5.6. Комбинированное управление по возмущающему воздействию

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию, как следует из схемы рис. 5.6, равна

$$\Phi_{fy\varepsilon}(s) = \frac{W_{fy}(s) - \psi(s)W(s)}{1 + W(s)}.$$

Условие абсолютной инвариантности системы по возмущению – равенство нулю передаточной функции $\Phi_{f_{y3}}(s) = 0$. Из этого условия можно получить выражение для передаточной функции $\psi(s)$

$$\psi(s) = \frac{W_{f_{y3}}(s)}{W(s)}.$$

Последнее выражение можно разложить в ряд, аналогичный ряду (5.2.5)

$$\psi(s) = K_f (a_0 + \tau_1 s + \tau_2^2 s^2 + \dots).$$

Всё изложенное относительно реализуемости инвариантной системы по задающему воздействию в равной мере касается также инвариантности и по отношению к возмущающему воздействию.

5.2.3. Неединичные обратные связи

Неединичные обратные связи применяются для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе регулирования. Из самого названия следует, что в отличие от обычной схемы регулируемая величина $y(t)$ поступает на элемент сравнения не непосредственно, а через звено с передаточной функцией $\Psi(s) \neq 1$ (рис. 5.7).

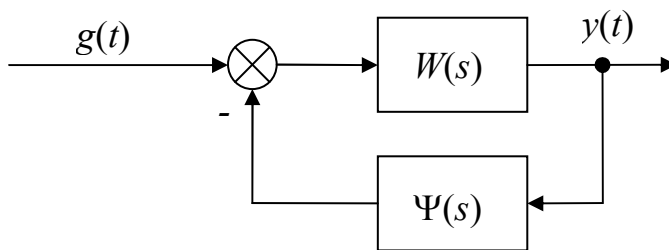


Рис. 5.7. Неединичная обратная связь

Дифференциальное уравнение, связывающее задающее воздействие $g(t)$ и регулируемую величину $y(t)$, имеет вид

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + \Psi(p)W(p)} g(t) = \Phi_s(p)g(t),$$

где эквивалентная передаточная функция замкнутой системы задана выражением

$$\Phi_{\circ}(s) = \frac{W(s)}{1 + \Psi(s)W(s)}. \quad (5.2.6)$$

Учитывая связь передаточных функций замкнутой и разомкнутой системы $\Phi_{\circ}(s) = \frac{W_{\circ}(s)}{1 + W_{\circ}(s)}$, можно на основании выражения (5.2.6) записать

эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_{\circ}(s) = \frac{W(s)}{1 - (1 - \Psi(s))W(s)}. \quad (5.2.7)$$

С учётом полученной передаточной функции (5.2.7) можно представить систему в привычном виде с единичной обратной связью (рис. 5.4).

Абсолютная инвариантность системы означает, что ошибка равна нулю, то есть регулируемая величина совпадает с задающим воздействием $y(t) = g(t)$. Это, в свою очередь, означает, что передаточная функция замкнутой системы $\Phi_{\circ}(s) = 1$. Отсюда следует условие для передаточной функции звена в обратной связи

$$\Psi(s) = \frac{W(s) - 1}{W(s)} = 1 - \frac{1}{W(s)}. \quad (5.2.8)$$

Пользуясь разложением в ряд (5.2.5), условие (5.2.8) можно представить в виде

$$\Psi(s) = 1 - \frac{1}{W(s)} = 1 - a_0 - (\tau_1 s + \tau_2^2 s^2 + \dots). \quad (5.2.9)$$

К сожалению, практическое достижение абсолютной инвариантности системы путём выполнения соотношения (5.2.9) невозможно по двум причинам. Во-первых, нельзя точно ввести высшие производные и, во-вторых, при точном выполнении условия (5.2.9) система оказывается на границе устойчивости.

И, тем не менее, применение неединичной обратной связи оказывает весьма эффективное действие, например, в статической системе. В этом случае простым изменением коэффициента передачи обратной связи можно не только уменьшить статическую ошибку, но и сделать систему астатической. Действительно, пусть статическая система имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(s) = \frac{K(1 + b_{m-1}s + \dots + b_0s^m)}{1 + c_{n-1}s + \dots + c_0s^n}. \quad (5.2.10)$$

Будем считать, что звено в обратной связи имеет передаточную функцию $\Psi(s) = \alpha_0$. Тогда, пользуясь формулой (5.2.7), запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_3(s) = \frac{K(1 + b_{m-1}s + \dots + b_0s^m)}{(1 + c_{n-1}s + \dots + c_0s^n) - (1 - \alpha_0)K(1 + b_{m-1}s + \dots + b_0s^m)}.$$

Можно увидеть, что при $(1 - \alpha_0)K = 1$ или при $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{K}$ в знаменателе последнего выражения будет множитель s , то есть система станет астатической

$$W_3(s) = \frac{K(1 + b_{m-1}s + \dots + b_0s^m)}{s(c_{n-1} - b_{m-1} + (c_{n-2} - b_{m-2})s + \dots + c_0s^{n-1})}.$$

Такая система будет иметь добротность по скорости $Q_v = \frac{K}{c_{n-1} - b_{m-1}}$.

Стоит заметить, что аналогичные результаты можно получить не менее простым способом, а именно, масштабированием входной или выходной величины (рис. 5.8).

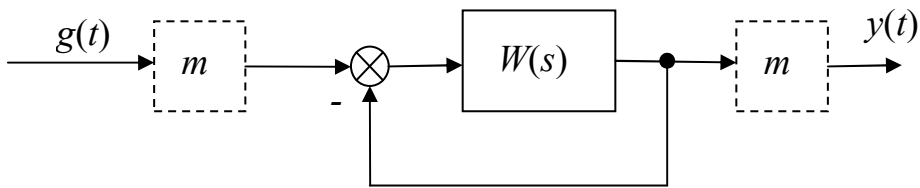


Рис. 5.8. Масштабирование входной или выходной величины

Если выбрать $m = \frac{K+1}{K}$, то дифференциальное уравнение системы будет

$$y(t) = \frac{W(s)}{1+W(s)} \cdot \frac{K+1}{K} g(t).$$

При передаточной функции разомкнутой системы (5.2.10) в установившемся режиме получаем

$$y_{ст} = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{K} g_{ст} = g_{ст},$$

что соответствует отсутствию статической ошибки.

Получить нулевую статическую ошибку с помощью этого метода возможно, только если общий коэффициент усиления K точно известен и является константой, а также если масштабирующее звено можно реализовать с соответствующим точным коэффициентом передачи.

5.3. Улучшение качества процесса регулирования

Под улучшением качества процесса управления, помимо повышения точности, понимают изменение динамических свойств системы с целью получения необходимого запаса устойчивости и быстродействия.

При решении задачи повышения запаса устойчивости необходимо попытаться рациональным образом изменить её параметры так, чтобы удовлетворить требованиям качества регулирования. При невозможности добиться заданного запаса устойчивости изменением параметров приходится

идти на изменение структуры системы. Для этой цели используют так называемые корректирующие средства, которые должны изменить динамику всей системы в нужном направлении. К корректирующим средствам относятся, прежде всего, корректирующие звенья.

Достижение требуемого быстродействия обычно обеспечивается при синтезе системы посредством выбора соответствующих элементов регулятора. Однако возможно повышение быстродействия также с введением корректирующих звеньев. Попутно нелишне заметить, что проблема повышения точности, увеличения запаса устойчивости и быстродействия является комплексной, то есть, как правило, невозможно улучшить что-либо без ухудшения чего-то другого.

Корректирующие звенья могут включаться последовательно, параллельно или обратной связью. Использование того или иного включения корректирующих звеньев определяется удобством их технической реализации. Для линейных систем возможна эквивалентная замена одного вида звеньев на другой, то есть всегда для, например, последовательного соединения можно по соответствующим формулам рассчитать передаточную функцию параллельного соединения или соединения обратной связью и наоборот.

5.3.1. Последовательные корректирующие звенья.

Последовательные звенья удобно применять в тех случаях, когда в системе регулирования используется электрический сигнал в виде напряжения или тока, величина которого функционально связана с величиной ошибки. Тогда корректирующее звено может быть реализовано при помощи R -, C - и L -элементов.

Рассмотрим только некоторые, наиболее часто применяемые корректирующие звенья.

Пассивные дифференцирующие звенья подавляют низкие частоты и вносят положительный фазовый сдвиг в некоторой полосе частот. Подавление низких частот обычно недопустимо, так как это снижает общий коэффициент усиления и приводит к увеличению ошибок. Поэтому при использовании пассивных дифференцирующих звеньев приходится восстанавливать первоначальный коэффициент передачи путём введения дополнительных усилителей.

Простейшая реализация пассивного дифференцирующего звена в виде RC -цепи приведена на рис. 5.9, *а*.

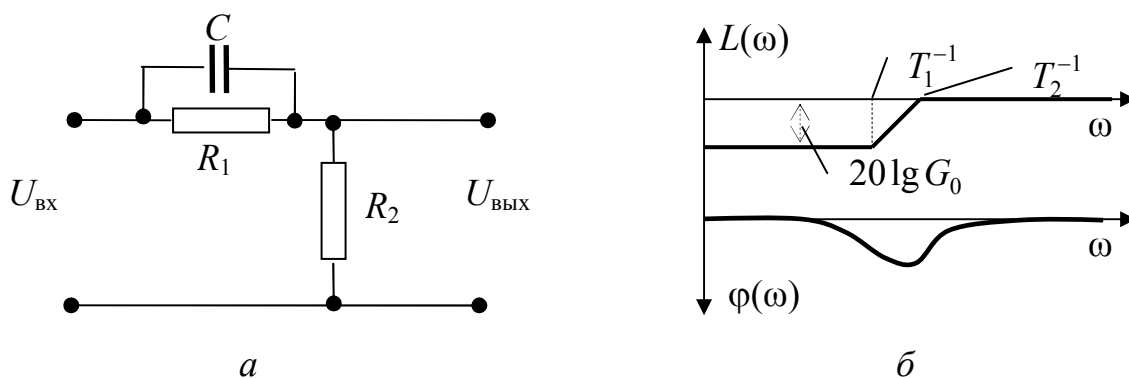


Рис. 5.9. Пассивное дифференцирующее звено

Передаточная функция звена, приведённого на рис. 5.9, *а* относительно входного и выходного напряжения, равна

$$W_{\text{пд}}(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = G_0 \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}, \quad (5.3.1)$$

где $T_1 = R_1 C$, $T_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$, $G_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_2}{T_1}$.

Из приведённых соотношений видно, что постоянная времени в знаменателе выражения (5.3.1) меньше постоянной времени в числителе $T_2 < T_1$.

Звено с передаточной функцией (5.3.1) ослабляет низкие частоты в G_0 раз. Необходимость восстановления первоначального коэффициента передачи требует применения дополнительного усилителя с коэффициентом усиления $K_{\text{доп}} = G_0^{-1} = \frac{T_1}{T_2}$. Тогда пассивное дифференцирующее звено с усилителем обладает свойством усиливать высокие частоты в $K_{\text{доп}}$ раз.

Логарифмические частотные характеристики пассивного дифференцирующего звена приведены на рис. 5.9, б.

Пассивные интегрирующие звенья подавляют усиление на высоких частотах и вносят отрицательный фазовый сдвиг в некоторой полосе частот.

Простейшая реализация пассивного интегрирующего звена в виде RC-цепи приведена на рис. 5.10, а.

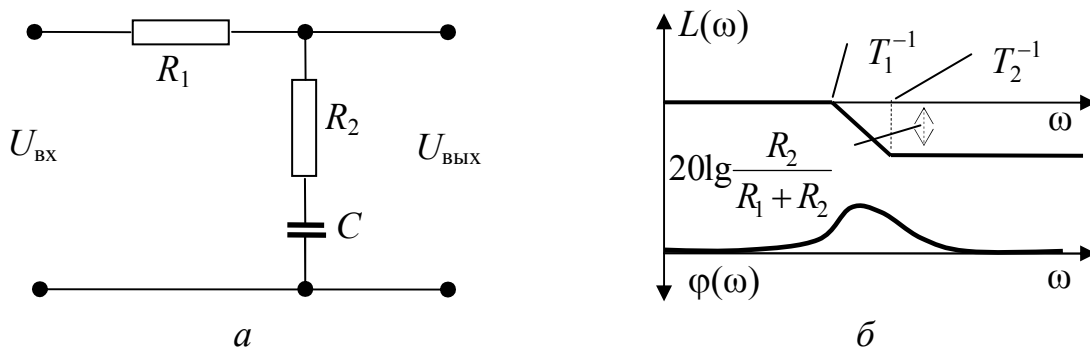


Рис. 5.10. Пассивное интегрирующее звено

Передаточная функция пассивного интегрирующего звена, изображённого на рис. 5.10, а, равна

$$W_{\text{ПИ}}(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s}, \quad (5.3.2)$$

где $T_1 = (R_1 + R_2)C$, $T_2 = R_2C$.

Из выражения для передаточной функции видно, что постоянная времени в знаменателе формулы (5.3.2) больше постоянной времени в числителе $T_1 > T_2$.

Интегродифференцирующие звенья подавляют усиление в некотором интервале средних частот, а вносимый фазовый сдвиг вначале отрицательный, а затем положительный.

Простейшая реализация интегродифференцирующего звена в виде RC -цепи является своеобразным объединением интегрирующего и диффе-

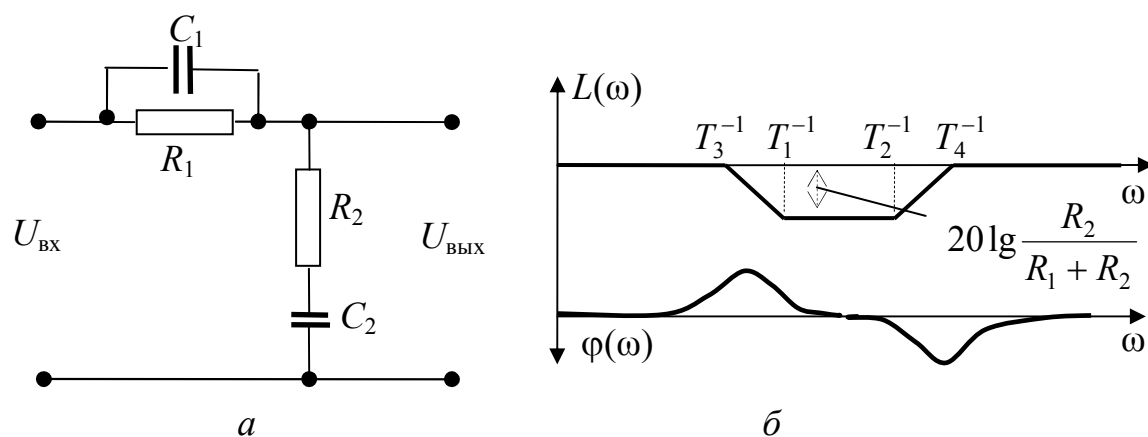


Рис. 5.11. Интегродифференцирующее звено

ренцирующего звеньев и приведена на рис. 5.11, *а*.

Передаточную функцию интегродифференцирующего звена (рис. 5.11, *а*) можно представить в следующем виде

$$W_{\text{пид}}(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)}, \quad (5.3.3)$$

где $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_3 T_4 = T_1 T_2$, $T_3 + T_4 = T_1 + T_2 + T_1 \frac{R_2}{R_1}$.

ЛАХ интегродифференцирующего звена (рис. 5.11, *а*) имеет «корытообразную» форму и приведена на рис. 5.11, *б*.

Фазосдвигающие звенья вносят отрицательный фазовый сдвиг при равенстве модуля частотной передаточной функции единице. Все фазосдвигающие звенья являются неминимальнофазовыми.

Самый простой вариант реализации фазосдвигающего звена и его фазовая частотная характеристика приведены на рис. 5.12, *а* и *б* соответственно.

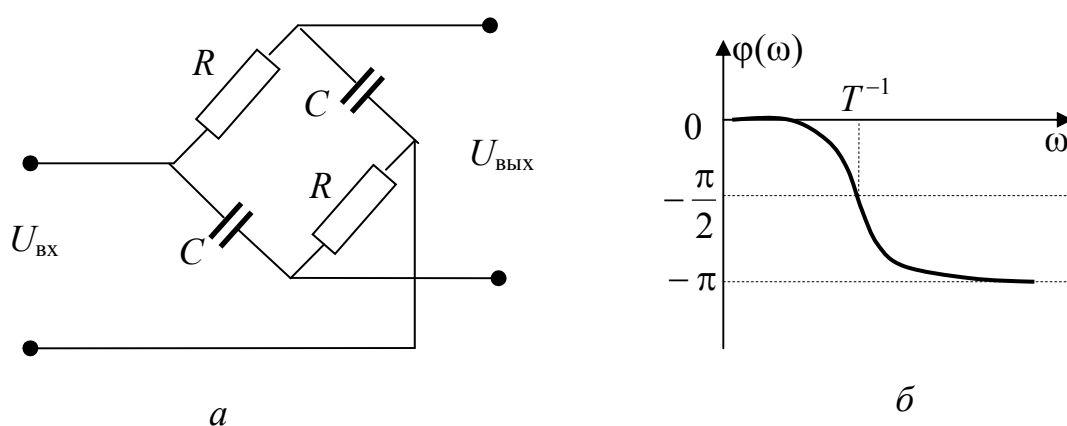


Рис. 5.12. Фазосдвигающее звено

Передаточная функция фазосдвигающего звена

$$W_{\text{фз}}(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad T = RC. \quad (5.3.4)$$

Из выражения (5.3.4) следует, что максимальный фазовый сдвиг при частоте $\omega \rightarrow \infty$ будет равен $-\pi$. Если требуется бо́льший фазовый сдвиг, то возможно применение двух последовательно соединённых звеньев, или в диагонали мостиковой схемы рис. 5.12, *а* следует добавить индуктивность L .

5.3.2. Параллельные корректирующие звенья

Корректирующие звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо реализовать сложный закон регулирования с введением интегралов или производных от сигнала ошибки.

Введение интегралов имеет целью снижение установившейся ошибки вследствие повышения порядка астатизма. Типичный пример – применение изодромных звеньев. Об этом уже шла речь в разделе 5.2.1.

Введение производных обычно преследует цель обеспечение задан-

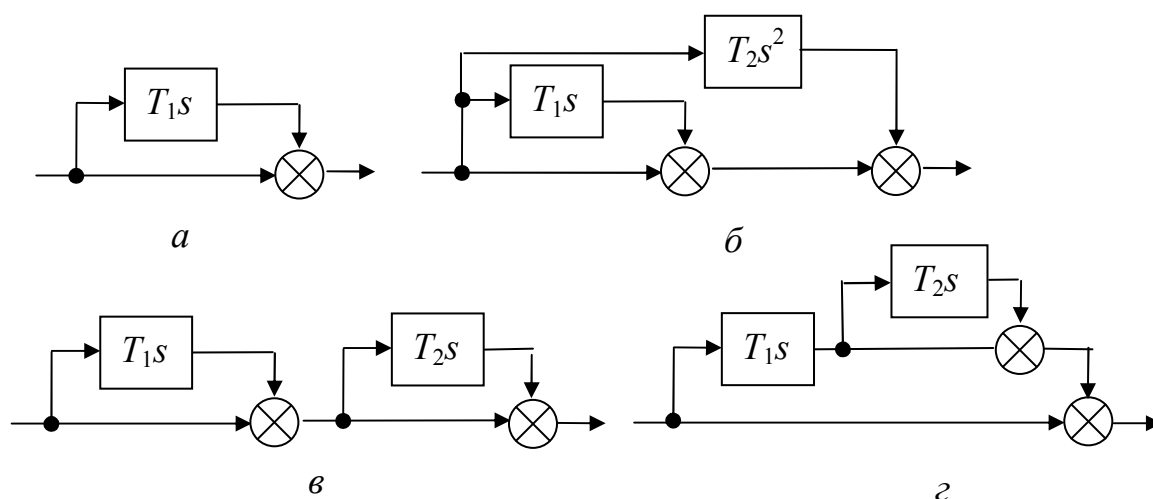


Рис. 5.13. Варианты включения дифференцирующих звеньев

ного запаса устойчивости. В этом случае используются дифференцирующие цепи, включённые параллельно основной цепи регулирования. Варианты параллельного включения дифференцирующих звеньев в цепи регулирования приведены на рис. 5.13.

Поскольку реализовать звено, вычисляющее точно вторую производную, проблематично, вариант б используется редко. Обычно для получения производных более высокого порядка, чем первый, подключение осуществляют по каскадным схемам (рис. 5.13, в, г).

Действие параллельных корректирующих звеньев, вычисляющих производные, можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть имеется система с порядком астатизма r . Тогда передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в следующем виде

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{s^r A^*(s)}, \quad (5.3.5)$$

где $A^*(0) = 1$.

Характеристический полином замкнутой системы равен сумме числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы (5.3.5)

$$D(s) = B(s) + s^r A^*(s). \quad (5.3.6)$$

Необходимое условие устойчивости – положительность всех коэффициентов при s всех степеней от 0 до n . Но, если $B(s) = K$, то из выражения (5.3.6) видно, что в характеристическом полиноме равны нулю коэффициенты при s в степени от 0 до $r-1$. Следовательно, САУ с порядком астатизма $r > 1$ является структурно неустойчивой, если нет воздействия по производным от первого до $r-1$ -го порядка. Введём в систему дифференцирующие звенья, дающие положительные дополнительные воздействия по производным от первого до $r-1$ -го порядка. Тогда характеристический полином будет иметь вид

$$D(s) = K(K_n + K_{d1}s + \dots + K_{d(r-1)}s^{r-1})B(s) + s^r A^*(s).$$

Понятно, что теперь выполняется не только необходимый критерий устойчивости, но и соответствующим подбором коэффициентов K_{di} можно обеспечить выполнение и достаточного критерия устойчивости.

Аналогичным образом поступают и при наличии в системе неустойчивых звеньев, дающих отрицательные коэффициенты при s в какой-либо степени. Применение дополнительных воздействий по производным соответствующего порядка позволяет изменить знак этих коэффициентов добавлением в них положительных слагаемых и тем самым не только обеспечить выполнение необходимого, но и достаточного критерия устойчивости.

Следует заметить, что введение параллельных корректирующих звеньев, вычисляющих интегралы, соответствует поднятию нижних ча-

стот, а введение параллельных дифференцирующих звеньев соответствует поднятию высоких частот.

5.3.3. Обратные связи

Обратные связи находят наиболее широкое применение, во-первых, вследствие простоты технической реализации, поскольку сигнал на входе звена в обратной связи, как правило, большой по величине, а работать с большими сигналами проще, и, во-вторых, потому, что отрицательные обратные связи имеют свойство ослаблять влияние нежелательных нелинейностей, которые всегда присутствуют в реальной системе.

Обратные корректирующие связи могут быть положительными и отрицательными. Чаще всего применяют отрицательные обратные связи. Охват звена с передаточной функцией $W(s)$ отрицательной обратной связью с передаточной функцией $W_{oc}(s)$ даёт передаточную функцию звена с коррекцией

$$W_{ск}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)W_{oc}(s)}. \quad (5.3.7)$$

В зависимости от того, как ведёт себя звено в обратной связи в статическом и в динамическом режиме, различают гибкую и жесткую обратную связь. Если $W_{oc}(0) = 0$, то обратная связь называется гибкой. При этом из формулы (5.3.7) следует, что в статическом режиме $W_{ск}(0) = W(0)$, то есть в статическом режиме обратная связь «не работает». Это будет в случае, если в обратной связи есть дифференцирующие звенья. Если же $W_{oc}(0) \neq 0$, то обратная связь называется жесткой – она действует и в статическом и в динамическом режимах.

В динамическом отношении обратные связи могут оказывать самое различное действие. Однако подобно тому, как это было сделано для последовательных звеньев, можно разделить обратные связи на:

- обратные связи, подавляющие высокие частоты,
- обратные связи, подавляющие низкие частоты,
- обратные связи, подавляющие средние частоты.

Положительные обратные связи находят значительно меньшее применение, в основном, их используют как корректоры ошибок.

Более подробный анализ влияния корректирующих звеньев содержится в [6].

5.4. Методы повышения запаса устойчивости

Повышение запаса устойчивости, или демпфирование, сводится в конечном итоге к рациональному перераспределению полюсов и нулей передаточных функций системы для задающего или возмущающего воздействия.

Ответить на вопрос, каким образом следует перераспределять полюсы и нули передаточной функции замкнутой или разомкнутой системы, можно на основе критериев качества и критериев устойчивости. Здесь же рассмотрим только основные идеи, которые используются при изменении динамических свойств системы с целью повышения запаса устойчивости.

Методы демпфирования будем рассматривать на основе критерия Найквиста. Пусть годограф АФЧХ устойчивой разомкнутой системы охватывает критическую точку $(-1, j0)$, то есть замкнутая система неустойчива. Наша задача не только сделать систему устойчивой, но и добиться определённого запаса устойчивости, то есть сделать так, чтобы кривая АФЧХ не заходила в некоторую окрестность критической точки (показано пунктиром на рис. 5.14).

Демпфирование с подавлением высоких частот осуществляется путём уменьшения коэффициента передачи на частотах выше некоторой частоты ω_c (рис. 5.14). Подавление высоких частот может происходить с применением последовательного пассивного интегрирующего звена или апериодического звена. Одновременно с обрезанием высоких частот вно-

сится отрицательный фазовый сдвиг. Применение этого метода приводит к тому, что система становится менее подвержена влиянию высокочастот-

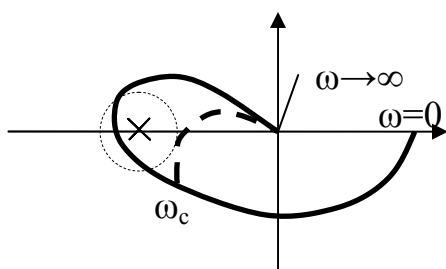


Рис. 5.14. Демпфирование с подавлением высоких частот

ных помех. Недостатком данного метода является уменьшение полосы пропускания, что приводит к снижению быстродействия системы.

Демпфирование с поднятием высоких частот приводит к введению положительных фазовых сдвигов на высоких частотах. Это означает, что высокочастотный «хвост» АФЧХ закручивается против часовой стрелки (рис. 5.15).

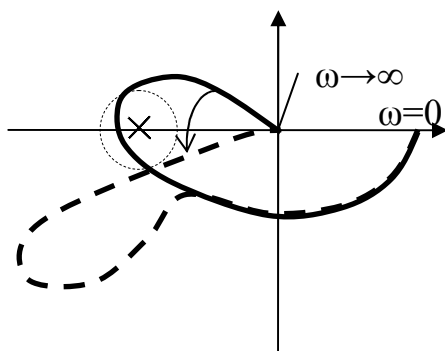


Рис. 5.15. Демпфирование с поднятием высоких частот

Реализовать данный метод можно введением параллельно основному каналу регулирования дифференцирующего звена. Тогда в области высоких частот дополнительный фазовый сдвиг будет $\frac{\pi}{2}$. Если этого фазового сдвига недостаточно, можно взять два дифференцирующих звена. Одновременно с положительным фазовым сдвигом увеличивается коэффициент передачи на высоких частотах. Поднятие высоких частот приводит к

возрастанию высокочастотных помех, поэтому данный метод демпфирования имеет ограниченную сферу применения: в основном в тех случаях, когда требуется принципиально ввести положительный фазовый сдвиг для достижения устойчивости, и нет ограничений на возрастание помех.

Демпфирование с подавлением средних частот осуществляется путём уменьшения коэффициента передачи в некоторой полосе средних частот (рис. 5.16). Этого можно добиться, например, с помощью последовательного интегродифференцирующего звена. Этот метод является

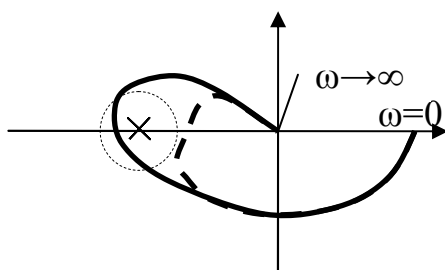


Рис. 5.16. Демпфирование с подавлением средних частот

наиболее распространённым, поскольку сохраняется полоса пропускания, а, следовательно, и быстродействие системы, а также нет возрастания помех.

Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов (рис. 5.17) может быть осуществлено, например, с помощью параллельно включённого интегрирующего звена или последовательного фазосдвигающего звена. На высоких частотах фазовый сдвиг тогда будет достигать $-\frac{\pi}{2}$. Введение отрицательного фазового сдвига приводит к тому, что высокочастотный «хвост» АФЧХ закручивается по часовой стрелке.

Разумеется, выбор того или иного метода демпфирования зависит как от передаточной функции системы, так и от условий её эксплуатации.

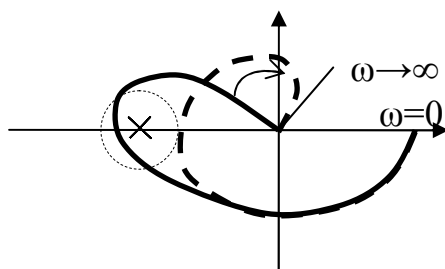


Рис. 5.17. Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов

5.5. Методы синтеза САУ

5.5.1. Корневой метод

Наиболее простой корневой метод. Суть его в следующем. Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n = 0.$$

С точки зрения скорейшего затухания переходных процессов вещественные части корней должны быть отрицательными и как можно больше. Сумма вещественных частей всех корней по теореме Виета численно равна A_n . Естественным было бы сделать все корни равными (кратными). Но расчет и исследование получающейся при этом системы показывает физическую нереализуемость отдельных звеньев такой системы. Кроме того, наличие кратных корней приводит к большой чувствительности системы к изменению её параметров.

Если в системе число варьируемых параметров позволяет задавать все коэффициенты характеристического уравнения, то требуемое качество переходных процессов можно обеспечить известными критериями качества. Но, как правило, число варьируемых параметров невелико. В этом случае выделяют два или три корня, которые определяют переходной процесс, а остальные корни «задвигают» вглубь отрицательной части ком-

плексной плоскости. Соотношение вещественных и мнимых частей этих корней не регламентируется, так как они влияют только на начальный участок переходной характеристики. Таким образом, получаем характеристическое уравнение в виде (для двух выделенных корней)

$$(s^{n-2} + c_1 s^{n-3} + \dots + c_{n-2})(s^2 + b_1 s + b_2) = 0.$$

Для уменьшения ошибок важно, чтобы коэффициент b_2 имел наибольшую возможную величину. Но следует иметь в виду, что чрезмерное увеличение b_2 приводит к сильно колебательному процессу.

Вообще, задавая требования к переходному процессу, по расположению корней квадратного уравнения всегда можно найти необходимое соотношение между коэффициентами b_1 и b_2 , а затем и определить значения варьируемых параметров в системе. Например, если стоит задача в переходном процессе иметь перерегулирование с одним колебанием, то соотношение между b_1 и b_2 , обеспечивающее затухание за период на 98% будет следующим:

$$b_2 = \frac{\pi^2 + 4}{16} b_1^2.$$

Для снижения перерегулирования можно к вышеупомянутым двум корням добавить третий вещественный отрицательный корень, равный вещественной части этих двух корней.

5.5.2. Метод корневых годографов

Качество САУ с точки зрения быстродействия и запаса устойчивости можно охарактеризовать расположением корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы, то есть расположением нулей и полюсов передаточной функции. Зная эти корни, можно изобразить их расположение на комплексной плоскости. При расчете САУ целесообразно проследить, как меняется общая картина расположения корней

при изменении отдельных параметров, например, общего коэффициента усиления, или постоянной времени какого-либо звена.

При плавном изменении значения варьируемого параметра корни будут перемещаться по комплексной плоскости, описывая некоторые кривые, которые и называются корневыми годографами или траекториями корней. Построив траектории всех корней, можно выбрать такое значение параметра, которое соответствует наилучшему с точки зрения качества переходных процессов расположению корней. Как правило, метод корневых годографов применяют в случае, когда изменяемых параметров немного, обычно один или два.

5.5.3. Метод логарифмических амплитудных характеристик

Метод ЛАХ является наиболее простым, наглядным и хорошо разработанным методом.

Синтез этим методом основан на связи переходной функции с вещественной частотной функцией замкнутой системы, которая в свою очередь связана с ЛАХ разомкнутой системы. Благодаря такой связи можно переходить от показателей качества переходных процессов к параметрам вещественной частотной характеристики и к параметрам ЛАХ разомкнутой САУ, то есть можно строить желаемую ЛАХ. Порядок синтеза при этом разбивается на ряд этапов.

1. Построение ЛАХ нескорректированной системы. Этот этап начинается с синтеза неизменяемой части САУ. Дело в том, что часть звеньев определяется сразу по заданию на разработку системы. Сюда относится объект управления и смежные с ним, а потому и определяемые им исполнительные и чувствительные звенья регулятора. Конечно, при их выборе необходимо исходить из предъявляемых к САУ требований по точности и быст-

родействию. Часто однозначно оказываются заданными и другие звенья регулятора – различные преобразователи, усилители, вычислители и проч. В результате получают костяк структурной схемы, который впоследствии должен быть дополнен корректирующими звеньями, выбор которых требует учёта устойчивости и качества переходных процессов. После математического описания звеньев, входящих в неизменяемую часть, строится ЛАХ неизменяемой части САУ.

2. Построение желаемой ЛАХ. На этом этапе идёт построение ЛАХ, при которой выполняются заданные требования к качеству регулирования (перерегулирование, время переходного процесса, запас устойчивости, ошибки в типовых режимах). Качество переходных процессов и устойчивость определяется среднечастотной частью ЛАХ, находящейся вблизи частоты среза. Как уже было выяснено выше, наклон ЛАХ в районе частоты среза для удовлетворительного качества переходных процессов не должен превышать -20дБ/дек , а ширина участка с таким наклоном и величина самой частоты среза определяются заданными значениями колебательности и длительности переходного процесса. Высокочастотная часть ЛАХ не имеет существенного значения для качества переходного процесса, поскольку она влияет только на самый начальный участок переходной характеристики. Поэтому высокочастотная часть регламентации не подлежит, она уточняется в процессе реализации желаемой ЛАХ. Низкочастотная часть ЛАХ определяет точность в установившихся режимах, поэтому выбор этой части ЛАХ осуществляют на основе точностных критериев. Порядок астатизма задаёт наклон начального участка ЛАХ: у статических систем этот наклон равен нулю, у систем с астатизмом первого порядка -20

дБ/дек, у систем с астатизмом второго порядка -40 дБ/дек и т.д. Высота начального участка ЛАХ определяется необходимым коэффициентом передачи разомкнутой системы: у статических систем он равен $20\lg K$ и той же величине на частоте $\omega=1$ у астатических.

3. Определение ЛАХ корректирующих звеньев. Наиболее просто получить ЛАХ последовательных корректирующих звеньев. ЛАХ последовательного корректирующего звена получится простым вычитанием из желаемой ЛАХ, полученной на предыдущем этапе, ЛАХ неизменяемой части системы.
4. Определение передаточной функции корректирующего звена. На этом этапе по найденной ранее ЛАХ корректирующего звена определяют передаточную функцию, а также наиболее простой способ её реализации. Здесь же определяют параметры реализованного звена и его ЛАХ.
5. На заключительном этапе проводят поверочное построение итоговой ЛАХ скорректированной системы с учётом ЛАХ реального звена и определяют показатели качества.

5.6. Синтез САУ в пространстве состояний

Синтез регулятора в случае описания объекта управления в пространстве состояний тесно связан с понятиями управляемости и наблюдаемости САУ в целом.

5.6.1. Понятие управляемости и наблюдаемости систем

Под управляемостью системы понимают возможность целенаправленного воздействия на переменные состояния системы и (или) на ее выход. Дуальным является понятие наблюдаемости, под которой понимают возможность восстановления некоторого начального состояния по

наблюдениям (измерениям) выхода системы при известном входном сигнале.

Формализуем понятия наблюдаемости и управляемости для системы, описываемой в общем случае уравнениями (2.4.1):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{g}(t).\end{aligned}$$

Система называется полностью управляемой по состоянию, если для произвольного начального момента времени t_0 существует неограниченное кусочно-непрерывное входное воздействие $\mathbf{g}(t)$, переводящее каждое начальное состояние $\mathbf{x}(t_0)$ в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}(t_f)$ за ограниченное время $t_f > t_0$.

Система называется полностью управляемой по выходу, если для произвольного начального момента времени t_0 существует неограниченное кусочно-непрерывное входное воздействие $\mathbf{g}(t)$, с помощью которого может быть достигнуто некоторое конечное значение выхода $\mathbf{y}(t_f)$ из произвольного начального значения $\mathbf{y}(t_0)$ за ограниченное время $t_f > t_0$.

Система называется абсолютно управляемой (по состоянию или по выходу), если она полностью управляема (по состоянию или по выходу) для всех t_0 и всех $t_f > t_0$.

Полная управляемость, как видно из определений, требует управляемости для *всех* начальных условий (но необязательно для *всех* конечных состояний). Абсолютная же управляемость подразумевает также и все конечные состояния, то есть является более сильным понятием. Если элементы матриц $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ являются аналитическими функциями времени t , то понятия полной и абсолютной управляемости совпадают. Тем более они совпадают для стационарных систем, заданных уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(t).\end{aligned}\tag{5.6.1}$$

Нелишне напомнить, что в последнем выражении

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – n -мерный вектор-столбец переменных

состояния системы;

$\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t))^T$ – p -мерный вектор-столбец входных воз-

действий;

$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t))^T$ – l -мерный вектор-столбец регулируемых

величин;

Система называется полностью наблюдаемой, если для некоторого момента времени t_0 состояние $\mathbf{x}(t_0)$ может быть определено по известным выходным $\mathbf{y}(t)$ и входным $\mathbf{g}(t)$ сигналам для $t_0 \leq t < t_f$, где t_f – ограниченное время.

Система называется глобально (абсолютно) наблюдаемой, если она полностью наблюдаема для всех t_0 и всех t_f .

Для стационарных систем понятия полной и глобальной наблюдаемости совпадают.

5.6.2. Определение управляемости и наблюдаемости по уравнениям состояния

Определить управляемость и наблюдаемость системы можно путём анализа её уравнений динамики. Рассмотрим стационарную систему, описываемую уравнениями (5.6.1). Существует ряд теорем, позволяющих определить управляемость и наблюдаемость по виду соответствующих матриц, входящих в уравнения (5.6.1).

Теорема 5.1. Линейная стационарная система n -го порядка

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(t)\end{aligned}$$

полностью управляема по состоянию, если и только если $(n \times n \cdot p)$ -мерная матрица управляемости

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

имеет ранг n .

Теорема 5.2. Линейная стационарная система (5.6.1) полностью управляема по состоянию, если и только если строки матрицы $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ линейно независимы.

Теорема 5.3. Пусть уравнения состояния представлены в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_n\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_n\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_n\mathbf{g}(t),\end{aligned}\tag{5.6.2}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица.

Тогда для полной управляемости системы по состоянию необходимо и достаточно, чтобы в матрице \mathbf{B}_n отсутствовали строки, полностью состоящие из нулей.

Если уравнения состояния записаны в нормальной форме Жордана (при кратных собственных числах), то нулевыми не должны быть строки матрицы \mathbf{B}_n , соответствующие последним строкам каждой клетки Жордана для кратных собственных чисел.

Теорема 5.4. Для полной управляемости системы (5.6.1) по выходу необходимо и достаточно, чтобы матрица:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}]$$

имела ранг l .

Теорема 5.5. Линейная стационарная система (5.6.1) является полностью наблюдаемой, если и только если матрица

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$$

имеет ранг n .

Теорема 5.6. Линейная стационарная система (5.6.1) полностью наблюдаема, если и только если столбцы матрицы $\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ линейно независимы.

Теорема 5.7. Линейная стационарная система, заданная уравнениями состояния в нормальной форме (5.6.2), полностью наблюдаема, если при различных собственных числах системы матрица \mathbf{C}_n не имеет столбцов, целиком состоящих из нулей.

Если имеются кратные собственные значения, то нулю не должны равняться столбцы, соответствующие первым столбцам каждой клетки Жордана.

5.6.3. Блочное разбиение системы

Представление системы в виде одного блока (на уровне «входы – выходы») нередко затушовывает сущность процессов, протекающих в системе. Облегчить понимание существа этих процессов позволяет ряд теорем, связанных с представлением системы в виде совокупности взаимосвязанных блоков (подсистем).

Теорема 5.8 (Калмана). Произвольная линейная система всегда может быть разбита на четыре подсистемы S_1, S_2, S_3, S_4 (см. рис. 5.18):

S_1 – полностью управляемая и наблюдаемая подсистема;

S_2 – полностью управляемая и ненаблюдаемая подсистема;

S_3 – неуправляемая, но полностью наблюдаемая подсистема;

S_4 – неуправляемая и ненаблюдаемая подсистема.

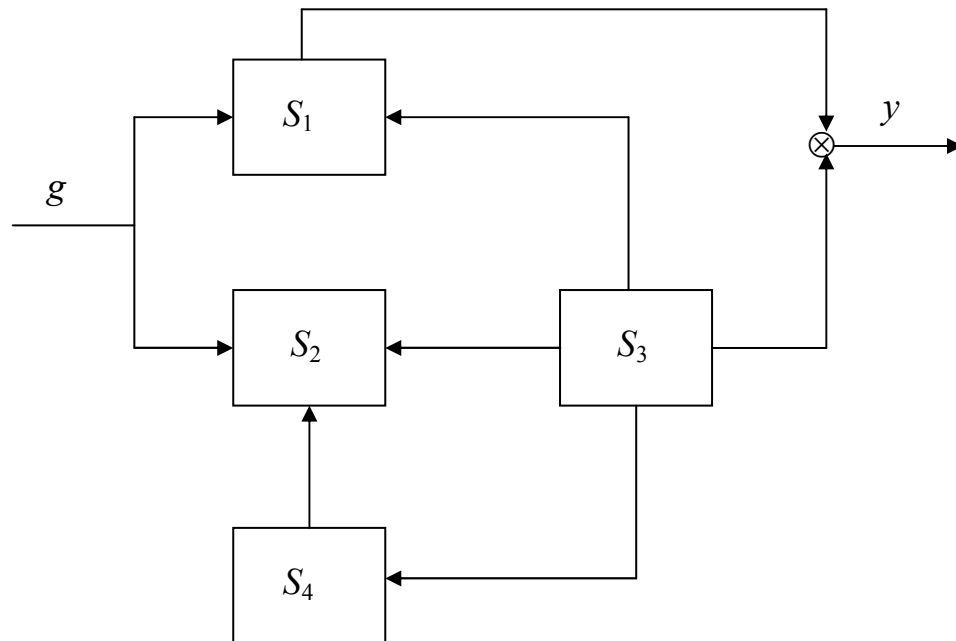


Рис. 5.18. Блочное разбиение системы

Управляемость и наблюдаемость всей системы в целом предполагает существование только подсистемы S_1 . Необходимо подчеркнуть, что неучет составляющих S_2, S_3, S_4 может привести исследователя к неверному выводу, например, о работоспособности всей системы на основании устойчивости подсистемы S_1 , в то время как в действительности система в целом будет неустойчивой благодаря неустойчивости любой из подсистем S_2, S_3 или S_4 .

Если система содержит составляющие S_2, S_3, S_4 (все или некоторые из них), то в зависимости от связей между подсистемами вся система в целом может обладать или не обладать свойствами этих подсистем.

Управляемость и наблюдаемость систем с обратной связью устанавливает следующая теорема.

Теорема 5.9 (Гильберта). Если систему можно представить соединением подсистем с обратной связью (см. рис. 5.19), то:

- порядок системы n равен сумме порядков подсистем S_a и S_b , то есть $n = n_a + n_b$;

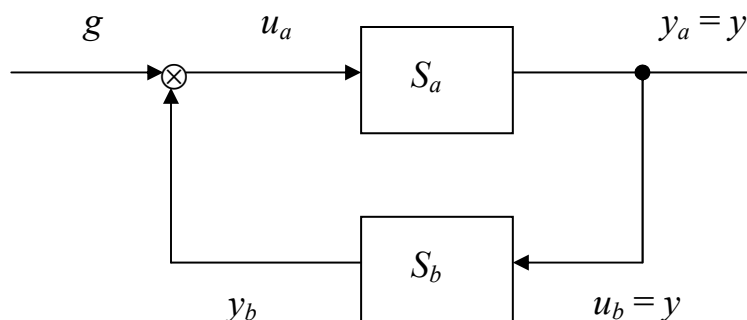


Рис. 5.19. К теореме Гильберта

- необходимым и достаточным условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость) S_{ab} (S_{ba}), где S_{ab} (S_{ba}) подсистема, образованная последовательным соединением S_a (S_b) и S_b (S_a);

- необходимым (но не достаточным) условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость) и S_a , и S_b ;

- если S_a и S_b управляемы (наблюдаемы), то любые из неуправляемых (ненаблюдаемых) координат системы с обратной связью являются неуправляемыми (ненаблюдаемыми) координатами S_{ab} (S_{ba}) и порождаются подсистемой обратной связи S_b .

Непосредственным следствием теоремы Гильберта являются следующие две теоремы об управляемости и наблюдаемости замкнутых систем с обратной связью по состоянию.

Теорема 5.10. Если линейная система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

является полностью управляемой по состоянию, то замкнутая система, получаемая с помощью обратной связи по состоянию (рис. 5.20) и описываемая уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}(t),$$

также полностью управляема по состоянию.

Если же разомкнутая система неуправляема, то сделать ее управляемой не сможет никакая обратная связь \mathbf{G} .

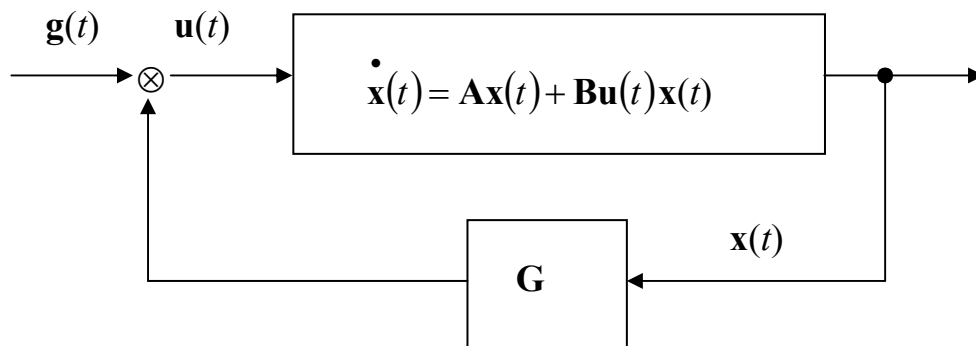


Рис. 5.20. Система с обратной связью

Теорема 5.11. Если линейная система (5.6.1) полностью управляема по состоянию и наблюдаема, то обратная связь по состоянию (рис. 5.20)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{G} \mathbf{x}(t)$$

может сделать систему ненаблюдаемой.

Большое значение при исследовании систем методом пространства состояния имеют различные преобразования координат (например, переход к нормальным координатам или к канонической форме фазовых переменных). Практически значимой поэтому является теорема об инвариантности управляемости и наблюдаемости.

Теорема 5.12. Если система является полностью управляемой (наблюдаемой), то невырожденное преобразование не меняет управляемости (наблюдаемости) системы.

Как известно, передаточная функция (матричная передаточная функция – в случае многомерных систем) является конечным итогом математического описания систем классическим частотным методом (на уровне «вход – выход»), и получается она путем описания звеньев системы и дальнейшего структурного анализа. При этом могут происходить сокращения одинаковых нулей и полюсов передаточной функции в результате преобразований передаточных функций звеньев. О том, как это связано с управляемостью и наблюдаемостью системы, говорит следующая теорема.

Теорема 5.13. Если в передаточной функции, связывающей входной и выходной сигналы стационарной системы, имеется компенсация нулей и полюсов, то в зависимости от выбора системы координат (переменных состояния) система может быть либо неуправляемой по состоянию, либо ненаблюдаемой, либо и то и другое одновременно.

Если в передаточной функции отсутствует компенсация нулей и полюсов, то всегда можно выбрать систему координат, в которой система будет описываться как полностью управляемая и наблюдаемая.

Пример 5.3. Пусть линейная система управления описывается уравнением:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{g}(t) + g(t),$$

где, как и в других случаях, через $y(t)$ обозначен выход, а через $g(t)$ – вход системы.

Введем переменные состояния таким образом, чтобы получить уравнения состояния в канонической форме фазовой переменной. Тогда уравнения состояния и уравнение выхода можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}g(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \quad 1]$.

Составляя матрицу управляемости по состоянию \mathbf{Q} , убеждаемся, что ранг этой матрицы равен 2 (матрица \mathbf{Q} является невырожденной) и согласно теореме 5.1 исследуемая система полностью управляема по состоянию:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Теперь исследуем наблюдаемость системы, составив матрицу наблюдаемости \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является вырожденной, т.е. ее ранг равен единице, и, согласно теореме 5.5, система является ненаблюдаемой.

Далее составим матрицу управляемости по выходу:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{B}] = [-1 \quad 1].$$

Эта матрица имеет ранг, равный 1, и, следовательно, система является управляемой по выходу.

Переопределим теперь переменные состояния системы таким образом, чтобы матрицы коэффициентов приняли бы другой, например, следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

Составляя соответствующие матрицы, убеждаемся, что

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \text{система неуправляема по состоянию};$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{система наблюдаема};$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{CA} \quad \mathbf{CB}] = [1 \quad 1] - \text{система управляема по выходу}.$$

Различия в управляемости и наблюдаемости системы в зависимости от выбора переменных состояния обусловлены тем, что в передаточной функции системы

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}$$

имеется компенсация полюса и нуля, что в соответствии с теоремой 5.13 и объясняет поведение системы.

5.6.4. Модальное управление

Из всех многочисленных методов синтеза, использующих понятие переменных состояния, рассмотрим синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию (случай единственного входного воздействия). Этот метод называют также модальным управлением.

Синтез данным методом предполагает предварительное определение требуемых (заданных) значений собственных чисел (корней характеристического уравнения) системы. Они могут быть определены из связи переходных процессов и расположения собственных чисел на комплексной плоскости.

Следующая теорема дает основания для проведения такого синтеза.

Теорема 5.14. Пусть уравнения состояния системы представлены в канонической форме фазовой переменной:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (5.6.4)$$

где матрица \mathbf{A} имеет форму матрицы Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix},$$

а \mathbf{B} есть матрица-столбец:

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T.$$

Тогда собственные значения системы могут быть произвольно заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$u(t) = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(t), \quad (5.6.5)$$

где $\mathbf{G} = [g_1, g_2, \dots, g_n]$.

На рис. 5.21 приведена структурная схема системы с такой обратной связью.

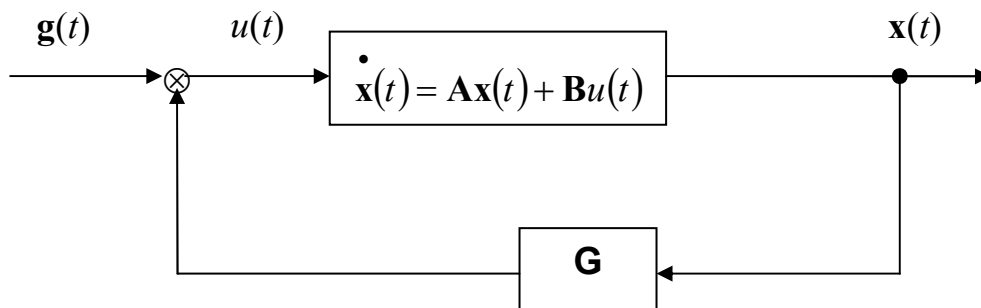


Рис. 5.21. Структурная схема системы в пространстве состояний

Предполагается, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

Доказательство. Уравнения состояния замкнутой системы с учетом (5.6.5) можно записать так:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G})\mathbf{x}(t). \quad (5.6.6)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет следующим:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}| = 0,$$

или в явном виде:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 + g_1 & a_2 + g_2 & a_3 + g_3 & \dots & \lambda + a_n + g_n \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по формуле Лапласа по последней строке, получим

$$\lambda^n + (a_n + g_n)\lambda^{n-1} + (a_{n-1} + g_{n-1})\lambda^{n-2} + \dots + (a_1 + g_1) = 0. \quad (5.6.7)$$

Характеристические числа однозначно связаны с коэффициентами характеристического уравнения (5.6.7) (например, формулами Виетта). Выяснив, какими должны быть значения этих коэффициентов, и зная a_i , всегда можно однозначно вычислить значения коэффициентов передачи обратной связи g_i , поскольку каждый элемент g_i матрицы-строки \mathbf{G} входит только в один коэффициент характеристического уравнения (5.6.7). Что и требовалось доказать.

Простота и удобство вычисления матрицы обратной связи \mathbf{G} для системы, заданной уравнениями состояния в канонической форме фазовой переменной, наводят на мысль о приведении произвольных уравнений состояния к такой форме. О такой возможности говорит следующая теорема.

Теорема 5.15. Пусть система описывается уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (5.6.8)$$

где \mathbf{A} – произвольная матрица ($n \times n$); $u(t)$ – скалярное внешнее воздействие; \mathbf{B} – произвольная матрица-столбец ($n \times 1$).

Если система (5.6.8) полностью управляема по состоянию, то существует невырожденное преобразование координат состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{z}(t), \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

переводящее уравнение (5.6.8) в каноническую форму фазовой переменной:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_1 \cdot u(t), \quad (5.6.10)$$

где \mathbf{A}_1 – матрица Фробениуса

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad (5.6.11)$$

и связана с матрицей \mathbf{A} преобразованием подобия

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{PAP}^{-1},$$

а

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{PB} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T. \quad (5.6.12)$$

Матрица \mathbf{P} имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5.6.13)$$

где

$$\mathbf{P}_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]^{-1}. \quad (5.6.14)$$

Из теории матриц известно, что преобразование подобия не меняет собственных чисел матрицы, следовательно, системы (5.6.8) и (5.6.10) имеют одинаковые собственные числа. Но для системы (5.6.10) в канонической форме фазовой переменной собственные числа всегда можно произвольным образом изменить с помощью обратной связи по состоянию \mathbf{G}_1 (согласно теореме 5.14). Коэффициенты усиления обратной связи исходной системы (5.6.8) определяются из соотношения

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P}.$$

Проведенные рассуждения, по сути, являются доказательством (правда, для случая скалярного управления $u(t)$) следующей теоремы.

Теорема 5.16. Пусть линейная система представлена уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где \mathbf{A} – произвольная $(n \times n)$ матрица; $\mathbf{u}(t)$ – вектор управлений размерностью $(p \times 1)$; \mathbf{B} – матрица $(n \times p)$ связи входных воздействий с переменными состояния. Если система является полностью управляемой по состоянию, то ее собственные числа могут быть произвольным образом заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(t),$$

где \mathbf{G} – матрица коэффициентов обратной связи размерностью $(p \times n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпов А.Г.* Математические основы теории систем. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 138 с.
2. *Кориков А.М.* Основы теории управления: Учебное пособие. 2-е изд. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – 392 с.
3. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
4. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под ред. Бесекерского В.А. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
6. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления: Учебник для втузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1975. – 414 с.

Учебное издание

Александр Георгиевич Карпов

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Часть 1

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции
Верстка макета и обложка В.К. Савицкого

Подписано к печати 21.11.2011 г. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Ризография. Гарнитура «Times».
Усл. п. л. 12,32. Уч.-изд. л. 11,6. Тираж 100 экз.

ООО Издательство «ТМЛ-Пресс»
634050, г. Томск, ул. Советская, 33, оф. 10
Тел. 8(3822)-52-87-15

Отпечатано на оборудовании
Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40