МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ В УПРАВЛЕНИИ И ПРОЕКТИРОВАНИИ

А.Г. Карпов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

Томск – 2013

УДК 681.5:19
ББК 32.817:22.1

К26

Карпов А.Г. Математические основы теории систем. Учебное пособие. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2013. – 318 с.

ISBN 978-5-91302-152-6

В учебном пособии даны общие понятия, термины и определения теории систем и системного анализа. Рассмотрено математическое описание и методы исследования различных классов систем: дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных. Приведено описание систем, как в виде уравнений высокого порядка, так и в форме уравнений состояния. Изложены также основы получения уравнений в частных производных, описывающие оптимальные системы.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов, бакалавров и магистров «Управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника», а также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, аспирантами и инженерами.

УДК 681.5:19
ББК 32.817:22.1

Рецензенты: профессор каф. оптимизации систем управления Томск. политехн. ун-та, профессор, д-р техн. наук **В.А. Силич,**
доцент каф. прикладной математики Томск. гос. ун-та, канд. техн. наук **Г.Н. Решетникова.**

ISBN 978-5-91302-152-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие составлено на основе существенно переработанных, дополненных и исправленных учебных пособий [1] и [2]. Также при написании пособия был учтен многолетний опыт автора по преподаванию одноименного курса в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Курс "Математические основы теории систем" предваряет изучение таких дисциплин как "Теория управления", "Цифровые системы автоматического управления", "Технические средства автоматизации и управления", "Моделирование систем управления " и некоторых других. В этом курсе продолжается углубленное изучение тех разделов математики, которые непосредственно связаны с описанием и исследованием динамических систем.

Ввиду ограниченности объема учебного пособия неизбежно и сознательно были выброшены некоторые чрезвычайно важные темы, такие как стохастика (этот недостаток частично ликвидирован в книге [3] при изучении теории автоматического управления) и описание цифровых систем дискретными уравнениями состояния (соответствующие разделы можно изучить по [4]).

ВВЕДЕНИЕ

Говорить о математических основах теории систем можно только после того, как будут определены сами понятия системы, модели, анализа систем и проч. Именно поэтому в первом разделе даются общие определения, термины и понятия теории систем и системного анализа. Подробное исследование этой темы проведено в [5]. Именно из [5] были заимствованы некоторые идеи, методы и приёмы системного анализа. Также в разделе 1 приведена классификация моделей и систем и дается общая математическая модель динамической системы. Важным моментом этой модели является описание входных, выходных и внутренних переменных системы. Если упомянутые переменные берутся из *конечных* множеств возможных значений, описание соответствующих систем осуществляется в рамках *теории конечных автоматов*. Описание систем в рамках этой теории приведено в разделе 2.

Если переменные в системе зависят от моментов времени, принадлежащих континуальному (непрерывному) множеству, система может быть описана дифференциальными уравнениями. Общие свойства, виды и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в разделе 3. Здесь изложены как классические методы, так и методы интегральных преобразований.

Если переменные в системе зависят от дискретных моментов времени, то получаем описание систем в виде *разностных* уравнений (импульсные или дискретные системы). В разделе 4 приведены общие свойства и методы решения таких уравнений (как классические, так и методы преобразования).

Альтернативной формой представления информации о системах является матричная форма. При такой форме представления информации исследование свойств систем сводится к выяснению свойств матриц. Основные виды, свойства и методы преобразования векторов и матриц приведены в разделе 5.

Описание систем в пространстве состояний векторно-матричными дифференциальными уравнениями изложено в разделе 6. Здесь приведены методы и формы решения как стационарных, так и нестационарных обыкновенных дифференциальных векторно-матричных уравнений состояния. Даны также общие понятия и конкретные виды уравнений в частных производных, к которым приводит описание *оптимальных* систем.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О СИСТЕМАХ И ИХ МОДЕЛЯХ

1.1 Предварительные замечания

Прежде чем обсуждать непосредственно математические основы теории систем, следует определить само понятие системы.

О системах, "системности", "системном подходе", "системном анализе", "теории систем" и т.п. пишут и говорят часто. Многое из того, что вчера называли единым, комплексным, целостным и т.п., сегодня называют модным теперь словечком *"системный"*. Но за этой модой, и это подчеркивают не только ученые, но и инженеры, педагоги, организаторы производства, деятели культуры и другие, стоит широкое осознание системности как одной из важных характеристик окружающего нас мира и осмысления ее как особого измерения этого мира.

Осознание системности мира пришло не сразу и с трудом. Но оно не могло не прийти. Системные представления возникли по объективным причинам и развиваются под действием объективных факторов.

1.1.1. Системность человеческой практики

Возьмем практическую деятельность человека, то есть его активное и целенаправленное воздействие на окружающую среду. Оно системно. Позже рассмотрим все признаки системности, а сейчас следует отметить только самое необходимое и очевидное:

– структурированность системы,

– взаимосвязанность составляющих ее частей,

– подчиненность организации всей системы определенной цели.

По отношению к человеческой деятельности эти признаки очевидны:

– всякое осознанное действие преследует определенную цель;

– во всяком действии можно выделить составные части;

– эти составные части выполняются не произвольно, а в определенном порядке.

Это и есть определенная, подчиненная цели взаимосвязь составных частей.

Можно встретить и другое менее удачное название для такого построения деятельности: *алгоритмичность*. От алгоритма в математическом смысле здесь осталось только расчлененность на части этих шагов.

Следует учитывать, что роль системных представлений в практике постоянно растет.

В качестве примера можно привести повышение производительности труда. Низший уровень системности: *механизация*. Естественный предел механизации – сам человек, который управляет работой механизмов. Следующий уровень системности – *автоматизация*. В этом случае вообще исключаем человека из производственного процесса: на машины возлагаем не только выполнение непосредственно самой работы, но и выполнение операций по регулировке хода, течению процесса работы: автопилот, самонаведение ракеты, станок с числовым программным управлением, автоматические линии. Особое место здесь, конечно, играют ЭВМ. Однако полностью возлагать на машину можно только те работы, которые детально изучены, подробно и полно описаны, точно известно, что именно, в каком порядке и как надо делать в каждом случае, и точно известны все случаи и обстоятельства, в которых может оказаться автоматическая система. Другими словами, можно автоматизировать процесс, если он *алгоритмизирован* в математическом понимании слова *алгоритм.*

Естественный предел автоматизации – это непредвиденные условия и невозможность формализации практических действий: это руководство человеческими коллективами, проектирование и эксплуатация крупных технических комплексов, воздействие на живые организмы (на человека), на природу, то есть те случаи, когда приходится взаимодействовать со сложными системами. Точное определение сложных систем будет дано позднее, а пока можно привести только один признак – это неформализуемость ряда процессов, происходящих в системе.

Повышение эффективности такого взаимодействия – это тоже необходимость, и, естественно, есть свои пути решения возникающих тут проблем. Такой путь – это третий уровень системности практической деятельности человека: *кибернетизация.*

Основная идея решения этой проблемы состоит в том, чтобы в случаях, когда автоматизация невозможна, использовать то свойство человека, которое называется *интеллектом*, а именно: способность ориентироваться в незнакомых условиях и находить решения слабо формализованных или неформализованных задач. Это выполнение таких операций, как *экспертная оценка* или сравнение неколичественных или многомерных вариантов, принятие управленческих решений, взятие на себя ответственности и т.п.

Таким образом, получаются автоматизированные (в отличие от автоматических) системы. И это не конец кибернетизации, а скорее, ее начало. Дальше – создание искусственного интеллекта. Это отдельный разговор и предмет других курсов, например курса "Прикладные системы искусственного интеллекта".

1.1.2. Системность познавательных процессов и природы

Сам процесс познания является системным, и знания, добытые человечеством, также системны. Природа бесконечна в своем многообразии. Неограниченно и желание человека в познании окружающего мира. Однако ресурсы человека, как временные, так и материальные, ограничены. Одна из особенностей познания, которая позволяет постепенно, шаг за шагом разрешать это противоречие – это наличие аналитического и синтетического образа мышления. Суть анализа – разделение целого на части, представление сложного в виде совокупности простых компонент. Обратный процесс – синтез.

Сами полученные знания тоже, с одной стороны, являются аналитическими, и это отражается в существовании различных узких наук, а с другой – имеется необходимость в синтетических пограничных науках, типа физикохимии, биохимии и т.п. Другая форма синтетических знаний – это существование наук, изучающих общие закономерности, таких, как философия, метаматематика, а также системных наук – кибернетики, теории систем и других.

По современным представлениям системность понимается не только как свойство человеческой практики, но и как свойство всей материи. Системность мышления вытекает из системности окружающего нас мира. Можно говорить о мире как о бесконечной иерархической системе систем, находящихся на разных стадиях развития, на разных уровнях иерархии, взаимодействующих друг с другом. Таким образом, системность природы не только логически выводится в рамках теоретических построений, но и практически выявляется в реально наблюдаемых явлениях, как с участием человека, так и без него.

1.1.3. Общие свойства систем

Независимо от того, как понимается системность (системность мышления, познания либо как свойство природы), все исследователи признают, что имеются определенные признаки, свойства, черты, присущие любой системе независимо от ее происхождения.

Приводимый ниже список таких свойств не является, конечно, полным, но наиболее важные моменты в этом списке отражены [5].

1. Всякая система обладает целостностью, обособленностью от окружающей среды, выступает как нечто отдельное, целое.

2. Обособленность системы не означает ее изолированности: имеется связь с внешней средой, взаимодействие, обмен энергией, материей, информацией. В этом смысле любая система является открытой, незамкнутой.

3. Целостность системы не есть однородность и неделимость: в системе можно выделить определенные составные части.

4. Наличие составных частей не означает, что эти части изолированы друг от друга. Части как раз и образуют систему благодаря связям между ними. Открытость системы (п. 2) означает, что ее части связаны и с внешней средой. Целостность же системы (п. 1) означает, что внутренние связи между частями, образующими систему, в каком-то смысле важнее, сильнее, чем внешние связи.

5. Целостность системы обусловлена тем, что система обладает такими свойствами, которые отсутствуют у составляющих ее частей. То есть свойства системы не сводятся к свойствам ее частей, не являются простой суммой этих свойств. При объединении частей в систему возникают качественно новые свойства, которые и позволяют выделять и описывать объект именно как систему. Это помогает прояснить разницу между внутренними и внешними связями: свойства системы как целого проявляются в ее взаимодействии с окружающей средой (т. е. реализуются через внешние связи как функция системы), однако сами эти свойства возникают и могут существовать только благодаря взаимодействию частей (т. е. благодаря внутренним связям, обусловленным структурой системы).

6. Еще один аспект целостности системы: изъятие какой-либо части из системы приводит к потере некоторых существенных свойств системы – получается уже другая система. Изъятая часть также теряет определенные свойства, которые могли реализовываться лишь до тех пор, пока эта часть находилась в системе.

7. Свойство под номером 2, то есть взаимосвязанность системы с окружающей средой, означает, что эта система входит как составная часть в некоторую большую систему. В результате мир можно представить как иерархическую систему вложенных друг в друга, перекрывающихся полностью или частично либо вообще разделенных, но взаимосвязанных и взаимодействующих систем.

8. При характеристике систем важным моментом является понятие *цели,* которая, в общем, определяет и структуру, и функции системы. Функцию системы можно интерпретировать как проявление целеустремленности системы, т. е. функция – это способ достижения системой цели,

а структура обеспечивает реализацию этого способа. Рассмотрение целей системы становится одной из важнейших проблем системологии.

9. Важным свойством систем является их *динамика,* то есть изменение во времени в результате внутренних и внешних воздействий. Многие явления в системах невозможно понять без учета их динамики.

1.2 Модели и моделирование

1.2.1. Понятие модели и его развитие

Понятие модели, моделирования, т. е. построения, использования и совершенствования моделей чрезвычайно важны в теории систем.

Сначала моделью называли некоторое вспомогательное средство, объект, который в определенный степени заменяет другой объект. Не сразу была понята и всеобщность моделирования: именно не просто *возможность,* но и *необходимость* представления наших знаний в виде моделей. Таким образом, довольно долго понятие «модель» относилось к материальным объектам специального вида: манекен, модели судов, самолетов, чучела.

Осмысление особенностей таких моделей привело к разработке многочисленных определений понятия модели, например: моделью называется объект-заменитель, который в определенных условиях может заменить объект-оригинал, воспроизводя интересующие нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества в виде наглядности, обозримости, доступности испытаний или другие.

Затем были осознаны модельные свойства чертежей, рисунков, планов, карт, то есть объектов искусственного происхождения, реализующих абстракцию довольно высокого уровня.

Очередной этап понимания модели – это признание того, что моделями могут быть не только реальные объекты, но и идеальные абстрактные построения. Классический и наиболее широко применяемый пример таких моделей – *математические модели*. Как известно, моделью в математике называется алгебраическая структура, в которой множество операций пусто и есть только отношения, то есть модель понимается как результат отображения с помощью этих отношений одного множества математических объектов на другое множество.

В результате развития метаматематики была создана содержательная *теория моделей*.

В 20-м веке понятие модели становится все более широким, включающим и реальные, и идеальные модели. При этом понятие абстрактной модели вышло далеко за пределы математических моделей и стало относиться к любым знаниям и представлениям о мире. Споры, кстати, вокруг такого широкого толкования модели продолжаются и поныне.

Окончательно можно сказать, что сначала в сфере научных дисциплин, таких, как информатика, математика, кибернетика, а затем и в других областях понятие модели стало осознаваться как нечто универсальное, хотя и реализуемое различными способами. Можно также сказать, что модель есть способ существования знаний.

Важно подчеркнуть также целевой характер модели. Всякий процесс труда (и отдыха, кстати) есть деятельность, направленная на достижение определенной цели. Цель – это образ желаемого будущего, то есть модель состояния, на реализацию которого направлена деятельность. Более того, системность деятельности проявляется помимо прочего и в том, что осуществляется по определенному плану, шаг за шагом. Следовательно, этот план – образ будущей деятельности, ее модель.

Модель, таким образом, не просто объект-заменитель, не вообще какое-то отображение оригинала, а отображение *целевое*. Модель отображает не сам по себе объект, а то, что в нем нас интересует в соответствии с поставленной целью. Например, лежит камень на дороге. Для проходящего или проезжающего путешественника могут представлять интерес разные модели этого камня, отражающие разные его свойства, в зависимости от целей, которые путешественник перед собой ставит:

– камень как орудие для забивания гвоздя в подметку;
– камень как носитель руды для геолога;
– камень как место для отдыха;
– камень как помеха автомобилю;
– камень как орудие преступления для бандита с большой дороги;
– и т.д.

1.2.2. Типы моделей

Поскольку модель является целевым отображением, то и различных моделей одного и того же объекта может быть множество.

Целевая предназначенность моделей позволяет все множество моделей разделить на основные типы – по типам целей.

Один из примеров такого деления целей – это цели теоретические и практические. В соответствии с этим можно говорить о моделях *познавательных и прагматических* соответственно. В известной степени это деление условно, но и различия достаточно очевидны. Основное отличие между этими типами моделей – в отношении к оригиналу.

Познавательные модели являются формой организации и представления знаний, средством для соединения новых знаний с уже имеющимися. Поэтому в случае расхождения между моделью и реальностью эти расхождения устраняются путем изменения модели.

Прагматические модели – это средство управления, средство организации практического действия, образцово-правильные действия или их результаты. Поэтому использование прагматических целей предполагает изменение реальности с тем, чтобы приблизить реальность к модели.

Например, карта или план местности может выступать как познавательная модель для картографа, составляющего или уточняющего эту карту, и может являться прагматической моделью для строителя, осуществляющего возведение каких-либо объектов по данному плану.

Еще один достаточно важный вид классификации моделей – модели статические и динамические. Когда нас в конкретном объекте интересует не изменение его состояния во времени, а некоторое фиксированное, статическое состояние, мы имеем дело со *статическими* моделями. Структурная модель системы – яркий пример статической модели. Если же наши цели связаны с различием между состояниями, с их изменениями, с их динамикой, то возникает необходимость в отображении процесса изменения состояний. Такие модели называют *динамическими.*

Следующее основание классификации моделей – по способам их реализации. Нас в первую очередь интересуют модели, создаваемые человеком, а в его распоряжении есть два типа материала для построения моделей – средства самого сознания и средства окружающего материального мира. А раз так, то и модели можно поделить на *абстрактные* (идеальные) и *материальные* (реальные или вещественные).

Абстрактные модели – это идеальные конструкции, построенные средствами сознания. Особый интерес из них представляют модели, предназначенные для общения между людьми, а среди этих моделей – модели, создаваемые средствами языка, т. е. языковые модели.

Естественный язык (русский, английский, немецкий и др.) является универсальным средством построения любых абстрактных моделей. Эта универсальность обеспечивается не только возможностью введения новых слов в язык, но и возможностью иерархического построения все более развитых языковых моделей (слово – предложение – текст). Неоднозначность, размытость, неопределенность естественного языка (начиная уже на уровне слов) также способствует универсальности языковых моделей. На практике эта неоднозначность ликвидируется с помощью «понимания» и «интерпретации». Но рано или поздно эта размытость начинает мешать, и тогда на помощь приходят профессиональные языки, вырабатываемые людьми одной профессии.

Наиболее ярко это проявляется в конкретных науках. Дифференциация наук потребовала создания специализированных языков, более точных, емких и конкретных, чем естественный язык. Языковые модели специальных наук более точны, более компактны, содержат больше информации.

Для представления новых знаний требуются новые модели, и если существующих языковых средств не хватает для построения этих моделей, то возникают еще более специализированные языки. В результате приходим к иерархии языков и соответствующей иерархии моделей (см. рис 1.1). На нижнем уровне каждой ветви этого иерархического дерева расположены модели, имеющие максимально достижимую точность и определенность для сегодняшнего состояния области знаний. В идеале на нижнем уровне находятся математические модели, созданные на языке математических символов и обладающие абсолютной точностью.

Рис. 1.1. Иерархия языковых моделей

В противоположность абстрактным моделям, материальная конструкция может быть моделью некоторого объекта, только если между моделью и оригиналом установлено отношение похожести или подобия. Принято выделять три основных способа установления такого подобия.

1. Подобие, устанавливаемое в результате физического взаимодействия в процессе создания модели. Это *прямое* подобие. К таким моделям относятся модели кораблей, самолетов, макеты зданий, протезы, шаблоны, выкройки, фотографии. Прямое подобие может обладать лишь отдаленным сходством с оригиналом, но только при прямом подобии возможна взаимозаменяемость оригинала и модели. Но все же, как бы ни была хороша модель, возникают проблемы переноса результатов моде-

лирования на оригинал. Такие проблемы часто становятся нетривиальными, и для их решения существует разветвленная, содержательная и в достаточной степени формализованная *теория подобия*, относящаяся именно к моделям прямого подобия.

2. Второй тип подобия в противоположность первому можно назвать *косвенным*. Оно устанавливается не в результате физического взаимодействия оригинала и модели, а объективно существует в природе и обнаруживается в виде совпадения (или достаточной близости) их абстрактных моделей. Наиболее яркий пример – электромеханическая аналогия. Механические и электрические процессы описываются одними и теми же уравнениями (т.е. имеют одинаковые абстрактные модели), различие состоит лишь в разной физической интерпретации входящих в эти уравнения переменных. В результате эксперименты с громоздкой и неудобной механической системой могут быть заменены более удобным манипулированием с электрической схемой. Роль аналогий, то есть косвенного подобия, в науке, технике и практике трудно переоценить, они часто незаменимы.

3. Третий тип реальных моделей образуют модели, в которых подобие оригиналу устанавливается в результате некоторого соглашения, договоренности. Назовем это подобие *условным*. Пример: деньги (модель стоимости), сигналы (модель сообщений), рабочие чертежи (модели будущей конструкции). Модели условного подобия являются, по сути, способом материальной реализации абстрактных моделей, вещественной формой, в которой абстрактные модели воспринимаются, хранятся и передаются от человека к человеку. Достигается это соглашением о том, какое состояние оригинала ставится в соответствие данному элементу абстрактной модели. Такое соглашение принимает вид набора правил для построения моделей условного подобия и правил пользования ими.

Специфические модели условного подобия – сигналы – применяются в различных областях науки и техники, которые имеют дело с техническими системами, функционирующими без участия человека (теория связи, теория информации, радиотехника, теория управления и другие).

С других позиций рассматриваются модели условного подобия там, где эти модели используются самим человеком. При этом для использования таких моделей применяются специальные средства – *знаки*. Знаками могут быть буквы алфавита, математические значки, звуки, движения брачного танца у животных и т.п. Наука об осмысленных знаковых системах называется *семиотикой*. Последовательности знаков – это тексты. Правила, определяющие множество текстов, называются *синтаксисом*.

Описание множества смыслов и его соответствие множеству текстов образует *семантику*.

1.2.3. Свойства моделей

Чтобы модель отвечала своему назначению, недостаточно иметь модель саму по себе: необходимы и определенные условия, обеспечивающие ее функционирование. Отсутствие или недостаточность таких условий лишает модель ее модельных свойств, не позволяет раскрыть ее потенциальные возможности. Необходимо, чтобы модель была согласована с окружающей средой, в которой ей предстоит функционировать. Это самое общее свойство моделей при необходимости можно и конкретизировать, выявляя отдельные аспекты такого согласования. В частности, очень важным моментом является обеспечение ресурсами (в том числе и материальными). Кроме того, не только в модели должны быть интерфейсы со средой, но и в самой среде должны быть реализованы подсистемы, другие модели и алгоритмы, потребляющие результаты ее функционирования, управляющие и контролирующие ход процесса моделирования.

Рассмотрим свойства модели, которые определяют ценность самого моделирования, т. е. отношение моделей с отображаемым ими объектами: чем отличаются модели от оригинала и что у них общего. Главные отличия модели от оригинала это *конечность*, *упрощенность* и *приближенность*.

Конечность абстрактных моделей сомнений не вызывает, так как они сразу наделяются конечным набором свойств. Но модели материальные – это некоторые вещественные объекты и как всякие объекты они бесконечны, в том числе и в своих связях с другими объектами. Здесь-то и проявляется различие между самим объектом и тем же объектом, используемым в качестве модели другого объекта. Из необозримого множества свойств объекта-модели выбираются, рассматриваются и используются только некоторые свойства, подобные интересующим нас свойствам объекта-оригинала. Наиболее наглядно конечность видна в знаковых моделях. Таким образом, модель подобна оригиналу в конечном числе отношений – это главный аспект конечности реальных моделей.

Следующие факторы позволяют с помощью конечных моделей отображать бесконечную действительность (и не просто отображать, а отображать эффективно, то есть достаточно правильно): упрощенность и приближенность модели.

Можно, прежде всего, отметить, что сама конечность моделей делает их упрощенность неизбежной, но это ограничение не настолько сильно, как кажется на первый взгляд. Гораздо важнее то, что в человеческой практике упрощенность является вполне допустимой, а для некоторых целей не только достаточной, но и необходимой.

Какие из свойств объекта включать в модель, а какие нет, зависит от целей моделирования, и выбор цели определит, что можно и нужно отбросить и в каком направлении упрощать модель. Упрощение – сильное средство в выявлении главных эффектов; идеальный газ, несжимаемая жидкость, абсолютно черное тело и т.д.

Следующая причина упрощенности модели – необходимость оперировать с ней и связанное с этим ресурсное ограничение. Мы вынужденно упрощаем модель, так как не знаем, как работать со сложной моделью или у нас нет требуемых ресурсов (материальных, энергетических, временных) для создания сложной модели.

Под *приближенностью* (приблизительностью) отображения действительности с помощью модели будем иметь в виду различия, описываемые отношением порядка: количественные (больше – меньше) или хотя бы ранговые (лучше – хуже).

Приближенность модели может быть очень высокой (удачные подделки, например, денег), а может быть видна сразу или варьироваться (географическая карта в разных масштабах), но во всех случаях модель – это другой объект и различия неизбежны. Меру различий мы можем ввести, только соотнеся эти различия с целью моделирования (опять цель!).

Общность модели и моделируемого объекта можно пояснить понятием *адекватности*. Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, назовем адекватной этой цели. Такое определение адекватности, вообще говоря, не полностью совпадает с полнотой, точностью и истинностью модели, а лишь в той мере, которая необходима для достижения цели моделирования. В некоторых случаях удается ввести меру адекватности модели, т. е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели. Если такой способ приводит еще и к количественной оценке адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается. В этих случаях можно количественно ставить (и успешно решать!) следующие задачи:

– задачи по *идентификации* модели (т. е. о нахождении в заданном классе моделей наиболее адекватной),

– задачи по исследованию *чувствительности и устойчивости* модели (т. е. зависимости меры адекватности модели от ее точности),

– задачи по *адаптации* модели (т. е. настройки параметров или структуры модели с целью повышения меры адекватности) и т.д.

Теперь еще раз вернемся к истинности модели. Поскольку различия между моделью и реальностью неизбежны и неустранимы, возникает вопрос: существует ли предел истинности, правильности наших знаний, сконцентрированных в моделях? Рассмотрение проблемы истинности знаний с философских позиций оставим философам, а наша задача конкретнее: обратить внимание на сочетание истинного и предполагаемого (могущего быть как истинным, так и ложным) во всех моделях.

Об истинности и ложности модели самой по себе говорить бессмысленно: только практическое соотнесение модели с отображаемым оригиналом выявляет степень истинности. При этом изменение условий, в которых ведется сравнение, весьма существенно влияет на результат. Каждая модель явно или неявно содержит условие своей истинности, и одна из опасностей (и весьма существенная) практики моделирования состоит в применении модели без проверки выполнения этих условий.

Еще один важный момент соотношения истинного и предполагаемого при построении моделей состоит в том, что ошибки в предположениях имеют разные последствия для прагматических и познавательных целей. Если для первых они нежелательны и даже вредны, то для вторых поисковые предположения, гипотезы, истинность которых еще предстоит проверить – единственная возможность оторваться от фактов.

Весьма важным свойством любой модели является динамика. Как и все в мире, модели проходят свой жизненный цикл: они возникают, развиваются, сотрудничают или соперничают с другими моделями, прекращают свое существование. Изучать динамику развития модели невозможно без моделирования самого процесса моделирования, отдельных его этапов, шагов, последовательностей действий. Многие исследователи искали последовательность наиболее эффективных этапов при работе с моделью, пытались алгоритмизировать этот процесс. Но выяснилось, что не существует единого, пригодного для всех случаев алгоритма работы с моделью. Этому можно привести много причин, но с методологической точки зрения – это одна из алгоритмически неразрешимых проблем в рамках теории алгоритмов.

Резюмируя вышесказанное, можно дать одно из многочисленных определений модели [5]. *Модель есть отображение: целевое, абстрактное или реальное, статическое или динамическое, согласованное со средой, конечное, упрощенное, приближенное, имеющее наряду с безусловно-истинным условно-истинное и ложное содержание, проявляющееся и развивающееся в процессе его создания и использования.*

Если кому-то это определение покажется слишком длинным и утомительным, тот вполне может заменить его более коротким: ***модель есть системное отображение действительности.***

1.3 Системы, их общее описание и классификация

Перейдем теперь к системам. Понятие системы очень важно, и многие авторы анализировали это понятие, уточняли и развивали его до разной степени формализации. Существует очень много определений системы. Вспоминая то, что говорилось о моделях, эта множественность понятна – определение есть не что иное, как модель (языковая) и, следовательно, различие целей и требований к модели приводит к разным определениям.

Попытаемся дать определение системы в развитии, поэтапно уточняя, развивая и конкретизируя модель на пути от естественно-языковой до математической.

1.3.1. Первое определение системы. Модель «чёрный ящик»

Будем рассматривать искусственные системы. Выше речь уже шла о том, что человеческая деятельность целенаправленна. Наиболее ярко это проявляется в трудовой деятельности. Однако цель, которую человек перед собой ставит, редко достигается только собственными возможностями. Такое несоответствие желаемого и действительного можно охарактеризовать как *проблемную ситуацию*. Проблемная ситуация развивается постепенно: от неосознанного чувства неудовлетворенности к осознанию потребности, к выявлению проблемы и далее – к формулировке цели. Последующая деятельность направлена на достижение этой цели. Укрупненно, в общих чертах ее можно описать как отбор из окружающей среды объектов, свойства которых можно использовать для достижения цели и на объединение этих объектов надлежащим образом, т. е. как работу по созданию того, что, собственно, и называется *системой*. Это и есть первое определение системы: *система – это средство достижения цели.*

Сформулировать цель порой бывает непросто. Одной из причин этого является то, что между целью (т. е. абстрактной и конечной моделью) и реальной системой нет, и не может быть однозначного соответствия: для достижения данной цели могут использоваться разные средства (системы), а заданную реальную систему можно использовать и для других целей, прямо не предусмотренных при ее создании.

Четкая формулировка, постановка цели в инженерной практике – один из важнейших этапов создания систем. Обычно этот этап идет итерационно, с постепенным уточнением и конкретизацией целей.

Первое определение системы не только отвечает на вопрос: «Зачем нужна система?», но и конструктивно указывает, какие объекты следует, а какие не следует из окружающей среды включать в систему: включаются такие объекты, свойства которых во взаимосвязи с уже включенными объектами позволяют достигать поставленную цель.

В первом определении системы акцент сделан на назначение системы и об ее устройстве почти ничего не говорится. Человеку удобнее работать с наглядными, образными моделями, поэтому представим языковую модель первого определения системы в виде визуального эквивалента.

О внутреннем устройстве системы ничего неизвестно, поэтому изобразим систему в виде ящика с непрозрачными (чёрными) стенками. Уже при таком изображении модель отражает два свойства системы: целостность и обособленность от среды.

Далее, в определении хоть и косвенно, но сказано, что система не полностью изолирована. Достигнутая цель – это запланированные изменения в окружающей среде, некоторые продукты работы системы, предназначенные для потребления вне данной системы. Система связана со средой и с помощью этих связей воздействует на среду. Изобразим эти связи стрелками, выходящими из системы. Это выходы системы.

Наконец, в определении есть намек и на связи другого типа: система является средством, поэтому должны существовать и возможности ее использования, воздействия на нее, то есть такие связи, которые направлены из внешней среды в систему. Это входы системы.

В результате получим модель системы, которая называется *чёрным ящиком* (рис. 1.2). Эта модель, несмотря на внешнюю простоту, часто оказывается весьма полезной.

В некоторых случаях достаточно содержательного описания входов и выходов системы, тогда модель чёрного ящика – это их список. В других случаях требуется количественное описание некоторых или всех входов и выходов. Чтобы максимально формализовать модель «чёрного ящика», необходимо задать два множества X и Y входных и выходных переменных.

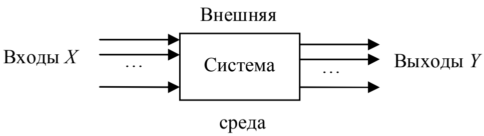


Рис. 1.2. Модель системы «черный ящик»

Задание этих множеств – сама по себе задача не тривиальная даже для конкретной системы, так как на вопрос о том, какие и сколько связей следует включать в модель – ответ не прост и не однозначен. Дело в том, что любая реальная система, как и любой объект, взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов. Выбрать для построения модели из этого бесконечного множества связей конечное их множество – задача часто непростая. Критерий отбора здесь – целевое назначение системы, существенность той или иной связи по отношению к цели. А вот при оценке этой существенности и могут возникать ошибки.

Особенно важно учитывать этот момент при задании цели системы, то есть при определении выходов. При этом основную цель приходится сопровождать заданием *дополнительных* целей, невыполнение которых может сделать ненужной или даже вредной достижение основной цели.

Модель «чёрного ящика» оказывается часто не только полезной, но и единственно возможной при изучении систем. Например, это бывает, когда речь идет об исследовании живых организмов в естественных для них условиях, где следует специально заботиться о том, чтобы измерения как можно меньше влияли на систему.

1.3.2. Модель состава системы

Вопросы внутреннего устройства системы на уровне модели «черного ящика» остаются открытыми. Для этого нужны более детальные, более развитые модели. Такие свойства системы, как целостность и обособленность, отображенные в модели «черного ящика», выступают как внешние свойства. Внимательное рассмотрение системы говорит о том, что внутренность «черного ящика» оказывается неоднородной. Это позволяет различать составные части системы, некоторые из которых при еще более детальном рассмотрении, в свою очередь, могут быть разбиты на составные части и т.д. Части, которые мы считаем неделимыми, называются *элементами*. Части, состоящие более чем из одного элемента, называются *подсистемами.* В результате получается *модель состава* системы, описывающая, из каких подсистем и элементов она состоит.

Построение модели состава системы – дело не простое и не однозначное. Можно перечислить ряд причин этого.

Понятие элементарности можно определять по-разному. То, что с одной точки зрения является элементарным, с другой – можно представить как подсистему, требующую дальнейшего деления.

Как и любая модель, модель состава является целевой, и для разных целей может быть разбита различным образом.

Модели состава одной и той же системы различаются потому, что всякое деление целого на части в достаточной степени условно. Границы между подсистемами условны, относительны. Это же относится и к границам самой системы с окружающей средой.

Таким образом, модель состава ограничена снизу тем, что считается элементом, и сверху – границей системы. Как эта граница, так и границы разбиения на подсистемы определяются целями построения модели и, следовательно, не абсолютны.

1.3.3. Модель структуры системы. Второе определение системы

Для определенных задач вполне достаточно иметь модель системы в виде «черного ящика» или модели состава. Но ясно, что есть вопросы, которые нельзя решить только на уровне этих моделей. Необходимо еще правильно соединить элементы и подсистемы, т. е. установить между составными частями системы определенные связи. Совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами называется *структурой системы.*

Перечень связей между элементами (структура системы) является отвлеченной, абстрактной моделью: установлены только отношения между элементами, но ничего не говорится о самих элементах. На практике обычно сначала описываются сами элементы (модель структуры), но теоретически можно исследовать отдельно модель структуры. Опять-таки, из множества реальных отношений между элементами в модель структуры включаются только те, которые важны, существенны для достижения цели.

Суммируя, объединяя все три рассмотренные модели, можно сформулировать второе определение системы: *это совокупность взаимосвязанных элементов, обособленная от среды и взаимодействующая с ней как* *целое.* Графическое изображение такой модели, объединяющей и модель «черного ящика» и модель состава и модель структуры, называется *структурной схемой системы.*

На структурной схеме указаны все элементы, все связи между элементами и связи определенных элементов с окружающей средой (входы и выходы системы). Все структурные схемы имеют нечто общее и, если абстрагироваться от содержательной стороны структурных схем, в результате получим элементы и связи между ними, а также (если это необходимо) пометки для различения элементов и (или) связей. Это есть не что иное, как ориентированный (возможно, взвешенный) граф, и эффективное изучение структурных схем осуществляется с помощью *теории графов*.

Для ряда исследований одной структурной информации, содержащейся в графе, оказывается недостаточно, и тогда методы теории графов становятся вспомогательными, а главным является рассмотрение конкретных функциональных связей между входными, внутренними и выходными переменными систем.

1.3.4. Динамические модели системы

Все рассмотренные выше модели отображали систему в некоторый фиксированный момент времени, были как бы застывшими снимками системы. В этом смысле их можно назвать *статическими,* подчеркивая их неподвижный, застывший, неизменный характер. Следующий шаг – это понять и описать, как система работает, что происходит с ней самой и с окружающей средой во времени, в ходе реализации поставленной цели. И подход, и описание, и степень подробности этого описания могут быть различными, но общее у всех этих моделей – это то, что они должны отражать поведение систем, описывать происходящее во времени изменения, последовательности этапов, операций, действий.

Системы, в которых происходят изменения со временем, называются *динамическими*, а соответствующие модели, отображающие это изменение – *динамическими моделями.*

Для разных систем и объектов разработано большое число динамических моделей, описывающих процессы с разной степенью подробности: от общего понятия динамики, движения вообще – до математических моделей конкретных процессов. Развитие моделей при этом происходит примерно также: от «чёрного ящика» к структурной схеме.

Уже на уровне «черного ящика» различают два типа динамики систем – это *функционирование и развитие*. Под функционированием понимают процессы, которые происходят в системе (и среде), стабильно реализующей фиксированную цель. Развитием называют то, что происходит с системой при изменении ее целей, когда существующая структура перестает удовлетворять новую цель. Не следует считать, что система только либо функционирует, либо развивается. Могут быть разные соотношения между ее подсистемами.

На следующих уровнях динамических моделей происходит уточнение, конкретизация происходящих процессов, различаются части, этапы процесса, рассматриваются их взаимодействия. Т. е. типы динамических моделей те же, что и статических, только элементы этих моделей имеют временно́й характер.

Динамический вариант «чёрного ящика» – это начальное состояние системы (вход «чёрного ящика») и конечное (выход). Модель состава – перечень этапов. Структурная схема (или «белый ящик») – подробное описание происходящего или планируемого процесса.

Те же типы моделей прослеживаются и при более глубокой формализации динамических моделей. Например, при математическом моделировании некоторого процесса его конкретная реализация описывается в виде соответствия между элементами множества X возможных значений $x \in X$ и элементами упорядоченного множества T моментов времени $t \in T$, то есть в виде отображения $T \to X$. С помощью этих понятий можно строить математические модели систем.

Если рассматривать выход системы $y(t)$ (в общем случае вектор) как ее реакцию на управляемые $U(t)$ и неуправляемые $V(t)$ входы $x(t) \in \{U(t), V(t)\}$, то можно модель «черного ящика» изобразить как совокупность двух процессов: $X^T = \{x(t)\}$ и $Y^T = \{y(t)\}$, $t \in T$ (рис. 1.3).

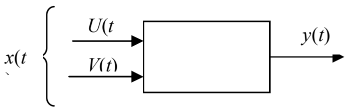


Рис. 1.3. Динамическая модель «черного ящика»

Даже если считать $y(t)$ результатом некоторого преобразования Φ процесса $x(t)$: $y(t)=\Phi(x(t))$, то модель «чёрного ящика» предполагает, что это преобразование неизвестно. В случае перехода к «белому ящику» это соответствие между входом и выходом можно описать тем или иным способом. Какой именно применить способ зависит от того, что нам известно о системе и в какой форме эти знания можно использовать.

1.3.5. Общая математическая модель динамической системы

Сложность построения моделей заключается в том, что в общем случае выход системы определяется не только значением входа в данный момент, но и предыдущими значениями входа. Кроме того, в самой системе с течением времени как под действием входных процессов, так и независимо от них могут происходить изменения. Все это требует отражения в модели. В наиболее общей модели это обеспечивается введением понятия *состояние системы,* как некоторой внутренней характеристики системы.

Входные величины в качестве причины определяют изменения во времени всех переменных системы и, в частности, всех выходных величин. Значения этих величин в определенный, заданный момент времени t в общем случае зависит от изменений во времени входных величин на интервале $(-\infty, t]$, то есть значение выхода определяется, как правило, всей предысторией изменения входа. В случае, если предшествующая данному моменту эволюция входных величин известна не полностью, а только, скажем, на интервале $[t_0, t](t_0 < t)$, предшествующем моменту времени t, то может оказаться, что в общем случае этой информации будет недостаточно для определения внутренних переменных системы и выходных величин в текущий момент времени. Однако в том случае, когда имеется дополнительная информация о значениях определенных переменных системы в момент времени t_0, значения выхода снова могут быть определены полностью, так же как и значения всех внутренних переменных. Таким образом, отсутствие информации о динамике входных величин на интервале $(-\infty, t_0)$ можно скомпенсировать тем, что известны значения некоторых переменных системы в момент времени t_0. Такие переменные называются *переменными состояния системы.*

Если обозначить переменные состояния через $\mathbf{q}(t)$ (в общем случае это вектор размерностью n), входные переменные через $\mathbf{x}(t)$ (размерность вектора $\mathbf{x}(t)$, т.е. число входов – m), а выходные переменные через $\mathbf{y}(t)$ (вектор размерностью k) (рис. 1.4), то соответствующие отображения можно записать как

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\right] \to \mathbf{q}(t); \\ &\left[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\right] \to \mathbf{y}(t) \end{aligned} \qquad (1.3.1)$$

или, в другой форме,

$$\mathbf{q}(t)=\boldsymbol{\delta}\big(\mathbf{q}(t_0),\mathbf{x}(\tau)\big);$$
$$\mathbf{y}(t)=\boldsymbol{\lambda}\big(\mathbf{q}(t_0),\mathbf{x}(\tau)\big). \tag{1.3.2}$$

В данной записи следует под обозначением τ понимать не точку на оси времени, а весь интервал от t_0 до t.

Отображение $\boldsymbol{\delta}$ часто называют переходным, а отображение $\boldsymbol{\lambda}$ – отображением выхода.

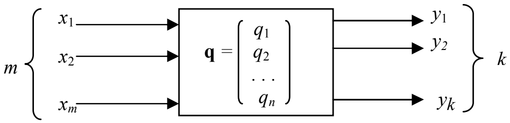


Рис. 1.4. Математическая модель динамической системы

Естественно, что векторная запись уравнений (1.3.2) предполагает, что $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ также векторы.

Для каждого фиксированного τ значение вектора $\mathbf{q}(\tau)$ задает состояние динамической системы в момент времени τ. Множество Q^n всех векторов $\mathbf{q}$ образует алфавит состояний динамической системы или *пространство состояний.* Таким образом, $\mathbf{q}(\tau)$ можно трактовать как точку в пространстве состояний.

Пример 1.1. Рассмотрим электрическую цепь (четырехполюсник) (рис. 1.5).

Пять существующих в этой цепи физических величин (четыре напряжения u_1, u_2, u_R, u_L и ток i) связаны согласно законам Ома и Кирхгофа, соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 &= u_R + u_L, \\ u_R &= R \cdot i, \\ u_2 &= u_L, \\ u_L &= L \cdot \frac{di}{dt}. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

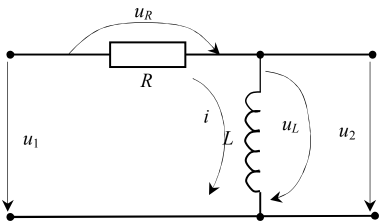


Рис. 1.5. Пример динамической системы (электрический четырехполюсник)

Предполагается, что индуктивность L и сопротивление R не зависят от тока, напряжения и времени, т. е. постоянны.

С учетом электротехнических применений данной цепи эти пять физических величин (переменных системы) можно разделить на:

– заданную величину u_1 (причина, вход, входное воздействие);

– величину, предназначенную для некоторых целей u_2 (следствие, выход, выходное воздействие);

– величины, участвующие в преобразовании входного воздействия u_1 в выходное воздействие u_2: промежуточные величины u_R, u_L, i (внутренние переменные системы).

Решение уравнений (1.3.3) относительно, например, тока i и выхода u_2 для $t \geq t_0 = 0$ будет равно

$$i(t) = \left(i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_1(\tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$
$$u_2(t) = L\frac{di}{dt}. \quad (1.3.4)$$

Если входная величина $u_1(\tau)$ непрерывна на интервале $[0,t] = I$, то переменная системы $i(t)$ для каждого момента времени $t \in I$ однозначно определяется по значению тока в момент времени $t = 0$ и по входной величине $u_1(\tau)$ на интервале $0 \leq \tau < t$. Причем, это происходит независимо от того, принимали различные входные величины или другие переменные системы значения, отличные от нуля при $t < 0$, или нет. Таким образом, воздействие, оказываемое $u_1(t)$ на систему до момента времени $t=0$, например, на изменение $i(t)$ при $t<0$, можно учесть только в одном значении тока в момент времени $t=0$. Это же самое относится и к выходной величине $u_2(t)$. Приведенные рассуждения позволяют уравнения (1.3.4) записать в символической форме аналогично соотношениям (1.3.1):

$$\begin{aligned}
&[i(0), u_1(\tau)] \to i(t), \\
&[i(0), u_1(\tau)] \to u_2(t), \\
&(0 \le \tau < t).
\end{aligned}$$

Из последних соотношений следует, что ток *i* является переменной состояния системы, изображенной на рис. 1.5.

Исходя из основных уравнений динамической системы (1.3.2), можно установить, что для всестороннего описания системы должны быть заданы три основных множества:

а) множество *X* значений входных величин **x** (входной алфавит);

б) множество *Y* значений выходных величин **y** (выходной алфавит);

в) множество *Q* значений переменных состояния **q** (алфавит состояний).

Вектор **q**(*t*) (также как и вектор **q**(τ)) является тогда элементом *n*-кратного декартового произведения Q^n : $\mathbf{q}(t) \in Q^n$. Соответственно для *k* выходных величин вектор **y**(*t*) является элементом *k*-кратного декартового произведения Y^k : $\mathbf{y}(t) \in Y^k$.

Вообще говоря, не обязательно эти множества должны быть множеством вещественных чисел *R*, т.е. не обязательно должно быть *X*=*Y*=*Q*=*R*. Чтобы получить более общее определение системы, под множествами *X*,*Y*,*Q* следует понимать множества более общего вида. При этом каждая компонента $x_\nu(\tau)\,(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ входного вектора $\mathbf{x}(\tau)\,(t_0 \le \tau < t)$ уже определяется как некоторое отображение интервала $T_t = [t_0, t]$ действительной временной оси *T*=*R* или в более общем случае множества $T_{0t} = T_t \cap T_0$ $(T_0 \subset R)$ на множество *X:*

$$x_\nu(\tau): T_{0t} \to X,\ T_{0t} = T_t \cap T_0,\ T_0 \subset R, T_t - (t_0, t), \nu = 1, 2, ..., m.$$

Здесь вектор $\mathbf{x}(\tau) \in X^n$. Если через $\mathcal{X} = \{T_{0t} \to X^m\}$ обозначить множество всех отображений всех множеств T_{0t} в декартово произведение X^m (или в некоторое подмножество этого множества), то соотношения (1.3.2.) можно записать как отображения вида

$$\begin{aligned} &\delta: Q^n \times \mathcal{X} \to Q^n; \\ &\lambda: Q^n \times \mathcal{X} \to Y^k. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Конкретизируя множества $\mathcal{X}, Y$ и Q, приходим к математическим моделям различных систем. Если эти множества *конечны,* то такая система будет называться *конечным автоматом*, и для ее исследования разработана соответствующая теория конечных автоматов. Это довольно простой класс систем в том смысле, что для исследования конечных автоматов необходимы лишь методы логики, алгебры и теории множеств. И в то же время это достаточно важный и широкий класс систем, так как в него входят все дискретные (цифровые) измерительные, управляющие и вычислительные устройства.

Если $\mathcal{X}, Y^k$ и Q^n являются метрическими или в более общем случае топологическими пространствами [6], а отображения λ и δ непрерывны в этих пространствах, то мы переходим к так называемым *гладким* системам. Для такого класса систем характерно, что переходное отображение δ является общим решением векторно-матричного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{x}),\ t \in R. \tag{1.3.6}$$

Если же в уравнении (1.3.6) время t является элементом счетного множества, т.е. течет дискретно, шагами или квантами (это будет в случае, если $T_0 \subseteq N_0$, где N_0 – множество натуральных чисел), то от выражения (1.3.6) приходим к разностному уравнению:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathrm{f}\left(t_k, \mathbf{q}(t_k), \mathbf{x}\right),\ k \in N_0, \tag{1.3.7}$$

являющемуся описанием дискретных во времени систем.

Если отображение λ не зависит явно от времени и отображение δ инвариантно (неизменно) к сдвигу во времени, то получаем описание *стационарных систем*. У таких систем их свойства со временем не меняются.

Особо нужно остановиться на таком свойстве реальных систем, как принцип причинности. Этот принцип означает, что отклик (выход) системы на некоторые воздействия не может появиться раньше самого воздействия. Это условие не всегда выполняется в рамках математических моделей систем, и одна из проблем теории таких систем состоит как раз в выяснении условий физической реализуемости теоретических моделей.

Следует также отметить, что в основных уравнениях (1.3.1) – (1.3.2) всегда предполагается, что $t > t_0$. Физически это означает, что из состояния системы в данный момент времени $\mathbf{q}(t_0)$ можно сделать заключение о поведении системы только в *последующие* моменты времени. Таким образом, не предполагается, что по заданным значениям $\mathbf{q}(t_0)$ и $\mathbf{x}(\tau)$ можно также определить и $\mathbf{q}(t)$ при $t < t_0$ $(t < \tau \le t_0)$. Иными словами, если известно конечное состояние $\mathbf{q}(t_0)$ и входное воздействие $\mathbf{x}(\tau)$ на предшествующем интервале времени $t < \tau \le t_0$, то восстановить первоначальное состояние $\mathbf{q}(t)$ не всегда представляется возможным. Эти же рассуждения справедливы и для $\mathbf{y}(t)$. Это означает, что будущее поведение некоторой динамической системы зависит от всей ее предшествующей эволюции только в той мере, насколько эта предыстория влияет на начальное состояние. То есть динамические системы по определению не обязательно являются обратимыми (во времени) [6].

1.3.6. Классификация систем

Когда мы сравниваем системы, начинаем их различать, мы тем самым вводим некоторую классификацию. *Основания классификации*, т.е. свойства систем, по которым мы их различаем, могут быть самыми различными. Необходимо только помнить, что всякая классификация – это модель реальности и, как любая модель, конечна, упрощённа, приближенна и условна. Разграничение внутри класса приводит к подклассам и, в конце концов, получается многоуровневая, иерархическая классификация. Важным моментом является полнота классификации. Когда нет уверенности в полноте классификации, имеет смысл вводить класс «все остальное».

Системы можно разделить на искусственные (т.е. созданные человеком), естественные и смешанные. К искусственным системам относятся механизмы, орудия, машины, роботы и т.д. В естественных системах можно выделить подклассы систем живых, неживых, социальных, экологических. Примером подклассов смешанных систем могут служить эргономические системы (человек-оператор и машина), биотехнические системы (системы, в которые входят живые организмы и технические устройства), автоматизированные системы.

Поскольку классификация – это модель, то она, как и всякая модель, носит целевой характер: новые цели порождают и новые классификации. Чтобы как-то упорядочить эту классификацию, рассмотрим общую функциональную схему системы управления, приведенную на рис. 1.6.

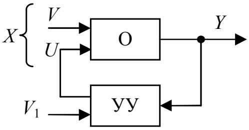


Рис. 1.6. Функциональная схема системы управления

На этой схеме выделен объект управления О и управляющее устройство УУ, вырабатывающее управляющие воздействия U. И методы нахождения управления U, и способы его осуществления, и сам результат управления зависит от того, что известно об объекте и как эти знания используются управляющим устройством. Рассматривая разные аспекты вышеизложенного, можно строить разные классификации систем. Например, по типам входных, выходных переменных и переменных состояния. На рис. 1.7 приведен фрагмент такой классификации:

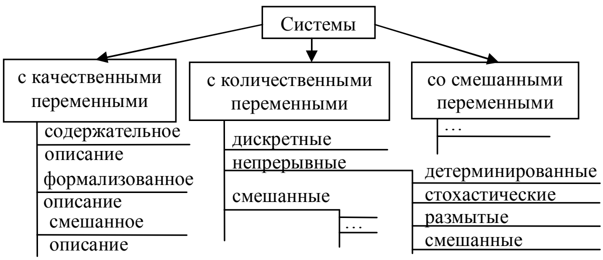


Рис. 1.7. Классификация систем по описанию переменных

Принципиально разных подходов требуют переменные, описываемые количественно и качественно, что и приводит к первому уровню классификации. Могут быть ситуации, когда часть переменных описывается количественными, а часть – качественными характеристиками, поэтому и появляется класс смешанного описания. Для систем с качественными переменными следующий уровень классификации подразумевает описание переменных на уровне естественного языка и на более формализованном уровне (например, на уровне предикатных переменных). Возможно также и смешанное описание. Для систем с количественным описанием переменных разного подхода требуют переменные непрерывные и дискретные. Выделен также подкласс дискретно-непрерывного описания переменных. Для третьего класса систем (со смешанным описанием переменных) второй уровень классификации является объединением подклассов систем двух первых ветвей и на рис. 1.7 не показан. Третий уровень классификации можно принять одинаковым для всех подклассов второго уровня. На рис. 1.7 он показан только для одного подкласса.

В зависимости от того, входит управляющее устройство в систему или является внешним по отношению к ней, можно выделить системы управляемые извне, самоуправляемые и смешанные, а в каждом из этих подклассов, в свою очередь, можно предложить четыре основных способа управления. Для пояснения представим движение динамической системы в виде траектории, например, в пространстве состояний Q^n. Первый (простейший) случай соответствует полной известности заданной (требуемой) траектории при точном программном управлении $U_0(t)$. В этом случае управление осуществляется без контроля за состоянием объекта.

Если движение системы отличается от заданного (что может быть при отклонении неуправляемых переменных $V_0(t)$ от ранее предполагаемых), возникает необходимость контроля за состоянием объекта. В этом случае мы приходим ко второму способу управления.

Для таких систем, в которых точную требуемую траекторию движения задать невозможно, а известна только конечная целевая окрестность, предусмотрен третий способ управления. Для систем этого подкласса осуществляется подстройка параметров заранее непредсказуемым образом.

Наконец, когда никакой подстройкой параметров невозможно достичь целевой области, приходится идти на изменение структуры системы (то есть, по сути, заменять систему другой системой). В этом случае (это четвертый подкласс) имеет место перебор разных систем (имеющих одинаковые выходы *Y*), создаваемых, тем не менее, не произвольно, а с учетом наличных средств.

Ясно, что для обеспечения определенного управления в любой системе требуются ресурсы: материальные, энергетические, информационные. Причем в зависимости от достаточности или недостатка этих видов ресурсов возможны принципиально различные случаи систем. Это и дает основания для классификации, приведенной на рис. 1.8.

Энергетические затраты на выработку управления, как правило, малы по сравнению с энергопотреблением объекта управления, и в этом случае их просто не принимают во внимание в классе обычных систем. Но в некоторых случаях управляемая и управляющая части могут потреблять соизмеримое количество энергии и питаться от одного источника. При этом возникает нетривиальная задача перераспределения ограниченной энергии между этими частями, и мы приходим к классу энергокритичных систем.

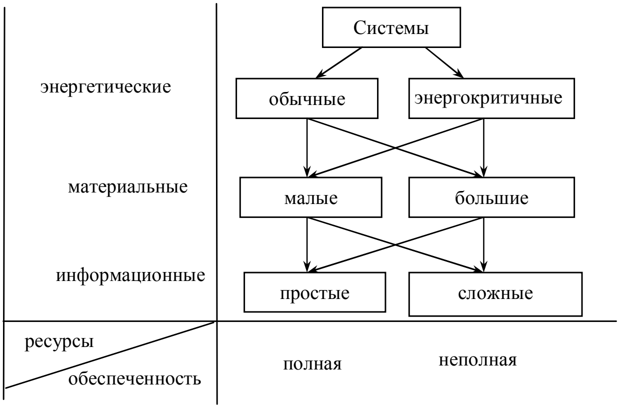


Рис. 1.8. Классификация систем по ресурсообеспеченности

Материальные затраты на функционирование систем также могут создавать определенные ограничения. Например, в случае управления объектом большой размерности с помощью ЦВМ такими ограничениями могут быть объем оперативной памяти и быстродействие. В соответствии с этим большими можно назвать системы, моделирование которых затруднено вследствие их большой размерности. Перевод систем из больших в малые можно осуществить двумя способами. Это либо применение более мощной вычислительной базы, либо декомпозиция многомерной задачи на задачи меньшей размерности (если такое возможно).

Третий тип ресурсов – информационный. Если информации о системе достаточно (а признаком этого служит успешность управления), то систему можно назвать простой. Если же управление, выработанное на основе имеющейся информации об объекте, приводит к неожиданным, непредвиденным или нежелательным результатам, то систему можно интерпретировать как сложную. Поэтому сложной системой можно назвать систему, в модели которой недостаточно информации для эффективного управления[1]. Два способа можно предложить для перевода системы из подкласса сложных в подкласс простых. Первый состоит в выяснении конкретной причины сложности, получении недостающей информации и включении ее в модель системы. Второй способ связан со сменой цели, что в технических системах неэффективно, но в отношениях между людьми часто является единственным выходом.

Поскольку перечисленные виды ресурсов являются более или менее независимыми, возможно самое различное сочетание между подклассами этой классификации.

Безусловно, эту классификацию (как, впрочем, и все предыдущие классификации) можно при необходимости развивать: либо при более подробном рассмотрении видов ресурсов, либо в результате введения большего числа градаций.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства систем.
2. Приведите основания классификации моделей.
3. Классификация абстрактных моделей.
4. Классификация материальных моделей.
5. Различия между моделью и оригиналом.
6. Сходство между моделью и оригиналом.
7. Модель «черного ящика». Приведите пример, когда эта модель единственно возможна.
8. Модель состава системы. Приведите пример:

[1] Существуют и другие подходы к определению понятия сложной системы.

а) моделей, имеющих одинаковый элементный состав, но различающихся делением на подсистемы;

б) моделей, имеющих одинаковые подсистемы, но различающиеся элементным составом.

9. Второе определение системы.
10. Динамическая модель «черного ящика». Приведите пример.
11. Динамический вариант модели состава. Приведите пример.
12. Динамический вариант структурной схемы.
13. Понятие состояния системы и переменных состояния системы.
14. Классификация математических моделей систем.
15. Условия физической реализуемости математических моделей.
16. Основания классификации систем.
17. Классификация систем по происхождению.
18. Классификация систем по типам переменных (входных, выходных и состояния).
19. Классификация систем по способам управления.
20. Виды систем в соответствии с ресурсным обеспечением. Приведите пример системы:

а) малой и сложной;

б) большой и простой;

в) большой и сложной.

2. АВТОМАТНОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

В том случае, если множества входных X, выходных Y и внутренних переменных Q являются конечными, мы приходим к так называемому автоматному описанию системы. Для этого случая разработана достаточно разветвленная, хорошо формализованная *теория конечных автоматов.* Конечными автоматами можно описывать любые цифровые устройства и элементы. Анализ и синтез цифровых устройств также успешно может быть осуществлен с применением теории конечных автоматов. Для изучения этого раздела достаточно знать методы формальной логики, теорию множеств, теорию графов и основы абстрактной алгебры.

Естественно, что и пользоваться при этом мы будем понятиями, определениями и терминологией (то есть профессиональным языком), принятыми в соответствующих разделах дискретной математики [7].

2.1. Основные понятия. Способы задания автоматов

2.1.1. Определение абстрактного автомата

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots\ x_m\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \ldots\ y_k\}$ – два произвольных множества элементов, которые будем называть *алфавитами,* а их элементы – *буквами алфавита*. Конечную упорядоченную последовательность букв назовем *словом* в данном алфавите. Обозначим X^* и Y^* – множества всех слов в алфавитах X и Y соответственно. Тогда произвольное преобразование дискретной информации можно задать как однозначное отображение S множества слов X^* во множество слов Y^*. Отображение S называется алфавитным отображением или алфавитным оператором, а алфавиты X и Y – входным и выходным алфавитами оператора S. Каждому входному слову $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ оператор S сопоставляет выходное слово $\mathbf{y} = y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_k}$. Поэтому для каждого $\mathbf{x} \in X^*$ существует свое $\mathbf{y} \in Y^*$, такое, что $\mathbf{y}=S(\mathbf{x})$. То есть S есть функция, область определения которой X^*, а область значений – Y^*.

В общем случае отображение S может быть частичным, т. е. не всюду определенным. Это позволяет рассматривать отображение S как оператор в одном и том же расширенном алфавите $Z = X \cup Y$. Частичное отображение S множества Z^* в себя, определенное на словах, состоящих только из $\{x_1 \ldots x_m\}$, можно выбрать таким образом, что оно будет совпадать с отображением S множества X^* в Y^*. Любой абстрактный автомат реализует некоторый оператор S или *индуцирует* некоторое отображение S.

Условия, накладываемые на автоматные отображения, рассмотрим несколько позже, а сейчас отметим ряд допущений, связанных с понятием абстрактного автомата:

а) наличие произвольного числа отличных друг от друга состояний автомата и свойство мгновенного перехода из одного состояния в другое;

б) переход из одного состояния в другое оказывается возможным не ранее, чем через некоторый промежуток времени Δ ($\Delta > 0$ – интервал дискретности) после предыдущего перехода;

в) число различных входных и выходных сигналов конечно;

г) входные сигналы – причина перехода автомата из одного состояния в другое, а выходные сигналы – реакция автомата на входные сигналы и относятся они к моментам времени, определенным соответствующим переходом автомата из состояния в состояние.

Учитывая это, можно интерпретировать автомат как устройство, работающее в дискретном времени $t' = n \times \Delta$ $(n \in N_0)$. На каждый входной сигнал $x(t)$ автомат реагирует выходным сигналом $y(t)$, где $t = 0$ – нормированное время. Связь между входом и выходом определяется текущим состоянием автомата q и задается функцией выхода $y=\lambda(q, x)$, а переход автомата из одного состояния в другое – функцией переходов $q=\delta(q, x)$.

Теперь можно дать определение абстрактного автомата. Это пятерка объектов:

$$A = \left(X, Y, Q, \lambda, \delta\right),$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ – входной алфавит или множество входных состояний; $Y=\{y_1, y_2, \ldots y_k\}$ – выходной алфавит или множество выходных состояний; $Q=\{q_1, q_2, \ldots q_n\}$ – множество внутренних состояний; δ: $Q\times X\to Q$ – функция перехода; λ: $Q\times X\to Y$ – функция выхода.

Если $|Q| < \infty$, то мы имеем дело с *конечным* автоматом, если Q – множество счетное – то с бесконечным. Если начальное состояние зафиксировано (например, q_1), то автомат называется инициальным. Таким образом, по неинициальному автомату можно n способами задать инициальный автомат.

В приведенном определении ничего не сказано о времени, ни о непрерывном, ни о дискретном. Таким образом, представление абстрактного автомата или его интерпретация как некоторого устройства, на вход которого в дискретные моменты времени поступают сигналы и в эти же моменты времени выдаются выходные сигналы, позволяет только более наглядно представить его работу.

С другой стороны, описание реального устройства, функционирующего в реальном времени, в виде автомата является абстрактной моделью. Следовательно, как всякая модель, автоматная модель является упрощенной (фактически время перехода не нулевое), конечной (описывает систему только на уровне входов, выходов и состояний) и приближенной (реальное поведение системы может отличаться от модельного за счет помех, непредусмотренных внешних воздействий и т.п.).

Покажем теперь, каким образом определить отображение S, индуцируемое заданным конечным автоматом. Возьмем интерпретацию автомата как устройства, функционирующего в дискретном времени. Предположим, что автомат инициальный и задано начальное состояние q_1. В каждый момент времени, отличный от нулевого, на вход автомата поступает входной сигнал $x(t)$ – произвольная буква входного алфавита $x(t)\in X$, а на выходе возникает некоторый выходной сигнал $y(t)$ – буква выходного алфавита $y(t)\in Y$. Для данного автомата его функции δ и λ могут быть определены не только на множестве X всех входных букв, но и на множестве X^* всех входных слов. Действительно, для любого входного слова $\mathbf{x} = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$ справедливо соотношение

$$\delta(q_1,\mathbf{x}) = \delta(q_1, x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}) = \delta\left(\delta\left(...\delta\left(q_1, x_{i_1}\right), x_{i_2}\right), x_{i_k}\right), \qquad (2.1.1)$$

или, используя индуктивное определение:

– для каждой входной буквы x_j функция $\delta(q_i, x_j)$ первоначально задана,

– для любого слова $\mathbf{x}\in X^*$ и любой буквы $x_j\in X$

$$\delta(q_i, \mathbf{x}x_j) = \delta(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j). \qquad (2.1.2)$$

С помощью такой расширенной функции δ можно также индуктивно определить и λ:

$$\lambda(q_i, \mathbf{x}x_j) = \lambda(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j). \qquad (2.1.3)$$

Появление на входе конечной последовательности $x(1)=x_{i_1}$, $x(2)=x_{i_2},...,x(l)=x_{i_k}$, то есть входного слова $\mathbf{x}=x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$ на основании известных функций λ и δ, вызовет появление на выходе однозначной последовательности $y(1)=y_{j_1}, y(2)=y_{j_2},..., y(l)=y_{j_k}$, которая соответствует выходному слову $\mathbf{y}=y_{j_1}y_{j_2}...y_{j_k}=\lambda(q_1,x_{i_1})\lambda(q_1,x_{i_1}x_{i_2})...\lambda(q_1,x_{i_1}...x_{i_k})$.

Соотнося каждому входному слову соответствующее ему выходное, получим искомое отображение, которое и является *автоматным отображением*, или *автоматным оператором*. Если результатом применения оператора к слову **x** будет выходное слово **y**, то это обозначается так: $S(q_1,\mathbf{x})=\mathbf{y}$ или $S(\mathbf{x})=\mathbf{y}$.

Автоматное отображение можно определить и индуктивно:

– $S(q_i,x_j)=\lambda(q_i,x_j)$; (2.1.4)

– $S(q_i,\mathbf{x}\,x_j)=S(q_i,\mathbf{x})\ \lambda(\delta(q_i,\mathbf{x}),x_j)$. (2.1.5)

Автоматное отображение обладает двумя свойствами, непосредственно следующими из определения:

1) слова **x** и $\mathbf{y}=S(\mathbf{x})$ имеют одинаковую длину;

2) если $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ и $S(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)=\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$, где $|\mathbf{x}_1|=|\mathbf{y}_1|=i$, то $S(\mathbf{x}_1)=\mathbf{y}_1$. Иначе говоря, образ отрезка длины i равен отрезку образа той же длины.

Свойство второе означает, что автоматные операторы – операторы без предвосхищения, то есть операторы, которые перерабатывают слово слева направо, не «заглядывая» вперед.

Эти два свойства были бы достаточными для автоматного отображения, если бы речь шла о бесконечных автоматах, то есть автоматах с бесконечным числом состояний. Для конечных автоматов этих условий, как мы дальше увидим, недостаточно.

Таким образом, одна из интерпретаций абстрактного автомата – это некоторое цифровое вычислительное, управляющее или преобразовательное устройство. Входная буква – это входной сигнал (комбинация сигналов на всех входах устройства), входное слово – последовательность входных сигналов, поступающих в дискретные моменты времени t=1,2,3,… Выходное слово – последовательность выходных сигналов, выдаваемых автоматом, внутреннее состояние автомата – комбинация состояний запоминающих элементов устройства.

Такая интерпретация, безусловно, верна, но она не требуется, ни для определения автомата, ни для построения соответствующей теории конечных автоматов. Все, что действительно важно в абстрактной теории автоматов – это работа со словами при конечной памяти.

2.1.2. Задание автоматов

Поскольку функции δ и λ определены на конечных множествах, то их можно задать таблицами. Обычно две таблицы (для функции δ и для функции λ) сводят в одну таблицу $\delta \times\lambda : Q\times X\to Q\times Y$ и называют такую таблицу *автоматной таблицей*, или таблицей переходов автомата. В этой таблице на пересечении столбца с входной буквой x_i и строки с состоянием q_j стоит пара – состояние q_l, в которое переходит автомат из состояния q_j по входной букве x_i, и выходная буква y_k, которая при этом выдается автоматом.

Часто вместо автоматной таблицы для задания автомата используют так называемую *матрицу соединений автомата.* Это матрица $n\times n$, строки и столбцы которой соответствуют различным состояниям автомата. На пересечении q_i-й строки и q_j-го столбца стоит буква (или дизъюнкция букв) входного алфавита $x_l\in X$, вызывающая переход автомата из состояния q_i в состояние q_j , и в скобках (можно через запятую, тире или слеш) – буква (или дизъюнкция букв) выходного алфавита $y_k\in Y$, которая появляется при этом на выходе автомата. Если ни одна из букв входного алфавита не переводит состояние q_i в q_j , то ставится прочерк или ноль. В любой строке каждая буква входного алфавита встречается не более одного раза (условие однозначности переходов).

Еще один способ задания автоматов – ориентированный мультиграф, называемый *графом переходов*, или диаграммой переходов. Вершины графа переходов соответствуют состояниям автомата. Если $\delta(q_i,x_j)=q_k$ и $\lambda(q_i,x_j)=y_l$, то из вершины q_i в вершину q_j ведет ребро, на котором написаны пара x_j,y_l. Для любого графа переходов выполняются следующие условия корректности:

а) для любой входной буквы x_j имеется ребро, выходящее из q_i, на котором написано x_j (условие полноты);

б) любая буква x_j встречается только на одном ребре, выходящем из вершины q_i (условие непротиворечивости, или детерминированности).

На графе переходов наглядно представимы все функции, определяемые формулами (2.1.1) – (2.1.5). Если зафиксирована вершина q_i, то всякое слово $\mathbf{x}=x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ однозначно определяет путь длины k из этой вершины (обозначим его $q_i,\mathbf{x}$), на k ребрах которого написаны $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$.

Поэтому $\delta(q_i,\mathbf{x})$ – это последняя вершина пути $q_i,\mathbf{x}$; $\lambda(q_i,\mathbf{x})$ – выходная буква, написанная на последнем ребре пути $q_i,\mathbf{x}$, а отображение $S(q_i,\mathbf{x})$– слово, образованное выходными буквами на k ребрах пути $q_i,\mathbf{x}$.

Пример 2.1. Пусть автомат задан своей автоматной таблицей:

Таблица 2.1

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	2, y_1	3, y_3
2	2, y_2	3, y_1
3	1, y_1	2, y_2

Здесь, и в дальнейшем, если это не вызовет разночтений, внутренние состояния обозначены своими индексами, т.е. алфавит состояний – это $Q=\{1,2,3\}$. Входной алфавит автомата $X=\{x_1,x_2\}$, выходной алфавит $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$.

Матрица соединений данного автомата приведена ниже:

Таблица 2.2

$q\backslash q$	1	2	3
1	0	x_1,y_1	x_2,y_3
2	0	x_1,y_2	x_2,y_1
3	x_1,y_1	x_2,y_2	0

На рис. 2.1 представлен граф (состояний) автомата.

Если на вход автомата, находящегося в состоянии 1, поступит, например, слово $\mathbf{x}=x_1x_2x_2x_1x_2x_2$, то на выходе появится слово $\mathbf{y}=y_1y_1y_2y_2y_1y_2$, а автомат перейдет в состояние 2.

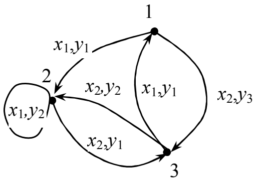


Рис 2.1. Переходной граф состояний

Пример 2.2. Граф, представленный на рис. 2.2, нельзя интерпретировать как некоторый автомат, поскольку в этом графе нарушено условие автоматности: из вершины 2 выходят два ребра с одной буквой *a*.

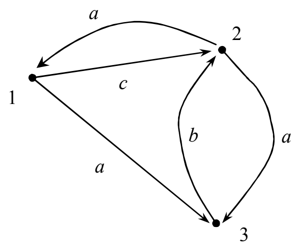


Рис. 2.2. Граф, не являющийся автоматом

2.2 Виды автоматов и их свойства

Дадим несколько определений, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

Состояние q_j называется *достижимым* из состояния q_i, если существует входное слово **x**, такое, что $\delta(q_i, \mathbf{x}) = q_j$. Автомат называется *сильно связанным*, если из любого его состояния достижимо любое другое состояние.

2.2.1. Автономные автоматы

Автомат называется *автономным по входу,* если его входной алфавит состоит из одной буквы: $X=\{x\}$. Все входные слова у такого автомата имеют вид $xx...x$.

Теорема 2.2.1. Любое достаточно длинное выходное слово автономного по входу автомата с n состояниями является периодическим (возможно с предпериодом), причем длины периода и предпериода не превосходят n. Оно имеет вид $\sigma\omega\omega...\omega\omega_1$, где $0 \le |\sigma| \le n, 1 \le |\omega| \le n$, ω_1 – начальный отрезок ω.

Доказательство. Так как в графе автономного по входу автомата из каждой вершины выходит одно ребро, то его сильно связанные подграфы могут быть только простыми циклами, из которых нет выходных ребер. Поэтому в компоненте связности может быть только один цикл. Остальные подграфы компоненты связности – это деревья, подвешенные к циклу и ориентированные в его сторону. Что и требовалось доказать.

Пример 2.3. Автомат задан автоматной таблицей:

Таблица 2.3

q	x
1	3,0
2	4,0
3	4,0
4	7,0
5	4,2
6	5,0
7	6,1

Граф автомата приведен на рис. 2.3. Входная буква на ребрах графа не показана.

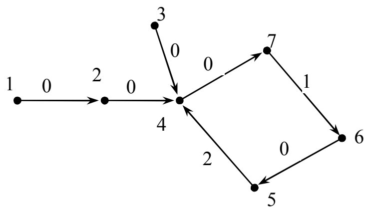


Рис. 2.3. Граф автономного автомата

Пусть автомат первоначально находится в состоянии 2, и на вход поступает слово *xxxxxxxxxxx*. На выходе будет слово 00102010201, где предпериод $\sigma = 0$, период ω=0102, начальный отрезок $\omega_1 = 01$.

Из произвольного автомата с входным алфавитом X={x_1,...x_m} может быть построено m различных автономных по входу автоматов исключением из графа переходов автомата всех ребер, кроме ребер с выбранной буквой x_i (i=1,…, m).

Аналогично, автомат называется автономным по выходу, если его выходной алфавит состоит из одной буквы Y={y}. Автономный по выходу автомат получается из произвольного автомата с выходным алфавитом $Y = \{y_1, y_2, ...y_k\}$ исключением из графа переходов ребер со всеми выходными буквами кроме выбранной буквы y_i.

Пример 2.4. Возьмем автомат из примера 2.1. Его автоматная таблица приведена ниже:

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	2, y_1	3, y_3
2	2, y_2	3, y_1
3	1, y_1	2, y_2

Таблица автономного автомата по входной букве, например x_2, получится удалением всех столбцов, кроме столбца с буквой x_2:

$q \backslash x$	x_2
1	3, y_3
2	3, y_1
3	2, y_2

Таблица автономного автомата по выходной букве, например y_1, получится удалением всех элементов исходной таблицы, кроме элементов с буквой y_1:

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	2, y_1	-
2	-	3, y_1
3	1, y_1	-

2.2.2. Автоматы синхронные и асинхронные

В синхронных автоматах переход из одного состояния в другое осуществляется через равные промежутки времени, задаваемые в реальных устройствах генератором тактовых импульсов. Другими словами, синхронный автомат реагирует на каждую букву входного алфавита.

В асинхронном автомате его внутреннее состояние может меняться только при изменении входного состояния. В результате этого изменения автомат всегда приходит в конечном итоге в некоторое устойчивое полное состояние[1], т. е. в такое полное состояние, в котором автомат остается до тех пор, пока не изменится его входное состояние.

Полагают также, что новое изменение входа не может произойти до того, как автомат перейдет в устойчивое полное состояние.

В итоге моменты перехода асинхронного автомата из состояния в состояние зависят от значения входа. Понятно, что при этом теряет смысл рассмотрение входных слов, содержащих одинаковые соседние буквы.

Сформулированные для асинхронного автомата условия налагают некоторые ограничения на таблицу переходов $\left\|\delta_{ij}\right\|$.

Чтобы было понятнее, рассмотрим вначале усиленный вариант этих условий, когда любое полное состояние автомата связано с некоторым устойчивым состоянием прямым, непосредственным переходом. Это означает, что если некоторый элемент δ_{ij} автоматной таблицы имеет значение q_k, то это же значение должен иметь и элемент δ_{kj}.

Такому требованию удовлетворяет, например, следующая таблица переходов:

[1] Полное состояние – это совокупность входного и внутреннего состояний.

Таблица 2.4

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3	x_4
1	**1**	**1**	**1**	5
2	1	**2**	**2**	**2**
3	**3**	2	4	5
4	3	2	**4**	5
5	3	**5**	4	**5**

Жирным шрифтом выделены элементы, соответствующие устойчивым полным состояниям.

В общем виде эти условия формулируются так: для любого элемента δ_{ij} таблицы переходов должна выполняться цепочка равенств

$$\delta_{ij} = k_1,\ \delta_{k_1 j} = k_2,\ \ldots,\ \delta_{k_p j} = k_p.$$

Это означает, что любое полное состояние (q_i, x_j) асинхронного автомата должно быть связано цепочкой переходов с некоторым устойчивым полным состоянием (q_{k_p}, x_j).

На таблицу выходов $\|\lambda_{ij}\|$ асинхронного автомата каких-либо ограничений не налагают.

2.2.3. Автоматы Мили и автоматы Мура

Общее определение автомата, данное в разделе 2.1, задает так называемый *автомат Мили.* Характерной особенностью автомата Мили является то, что значение его выхода зависит от полного состояния, то есть как от внутреннего, так и от входного состояний. Другими словами, функция выхода λ является двуместной функцией $y(t) = \lambda(q(t-1), x(t))$.

В случае если функция выхода зависит только от внутреннего состояния, но не от входа, получаем автомат, носящий название *автомата Мура*. Для автомата Мура для любых q, x_i и x_j выполняется условие $\lambda(q, x_i) = \lambda(q, x_j)$, т. е. функция выхода одноместная. Часто ее в этом случае обозначают буквой μ и называют *функцией отметок*, так как она каждое состояние помечает вполне однозначно буквами выходного алфавита.

Для автомата Мура таблица выходов вырождается в один столбец, а автоматная таблица записывается с лишним столбцом. Матрица соединений также содержит лишний столбец.

Возможности этих двух видов автоматов совпадают, то есть для любого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура (и наоборот). Это утверждение можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.2.2. Для произвольного автомата Мили

$$S = (X, Q, Y, \delta, \lambda),\ X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\},\ Q = \{q_1, q_2, \ldots q_n\},$$

существует эквивалентный ему автомат Мура

$$S_{\text{М}} = (X_{\text{М}}, Q_{\text{М}}, Y_{\text{М}}, \delta_{\text{М}}, \mu).$$

Он может быть построен следующим образом: входной и выходной алфавиты исходного автомата Мили и эквивалентного автомата Мура совпадают $X_{\text{М}}=X$, $Y_{\text{М}}=Y$. Алфавит состояний $Q_{\text{М}}$ содержит $m \cdot n+n$ состояний: $m \cdot n$ состояний q_{ij} (i=1,…n, j=1,…m), соответствующих парам (q_i, x_j) автомата S и n состояний q_{i0} (i=1,…n). Функция $\delta_{\text{М}}$ определяется так: $\delta_{\text{М}}(q_{i0}, x_k) = q_{ik}$ (i=1,…n), $\delta_{\text{М}}(q_{ij}, x_k) = q_{lk}$, где индекс l определяется функцией перехода автомата S: $\delta(q_i, x_j) = q_l$. Функция отметок $\mu(q_{i0})$ – не определена, а для остальных состояний $\mu(q_{ij}) = \lambda(q_i, x_j)$. Состояние q_{i0} (i=1,…n) автомата $S_{\text{М}}$ отождествляется с начальным состоянием q_i автомата S (если задан инициальный автомат).

Доказательство теоремы заключается в том, чтобы показать равенство автоматных отображений $S(q_i, \mathbf{x}) = S_{\text{М}}(q_{i0}, \mathbf{x})$ для любого состояния q_i и любого слова **x.** Это делается индукцией по длине **x** и предлагается проделать самостоятельно.

Пример 2.5. Автомат Мили задан автоматной таблицей:

Таблица 2.5

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	2,y_1	3,y_1
2	2,y_2	3,y_2
3	1,y_3	2,y_1

Для данного автомата число состояний n=3, число входных букв m=2. Построим эквивалентный автомат Мура. В соответствии с теоремой 2.2.2 число состояний эквивалентного автомата Мура составит $n \cdot m + n = 9$. Полагая в формуле $\delta_{\text{М}}(q_{i0}, x_k) = q_{ik}$ i=1,2,3; k=1,2, получим

$$\delta_{\text{М}}(q_{10}, x_1) = q_{11}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{20}, x_1) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{30}, x_1) = q_{31},$$
$$\delta_{\text{М}}(q_{10}, x_2) = q_{12}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{20}, x_2) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{30}, x_2) = q_{32}.$$

Воспользовавшись формулой $\delta_{\text{М}}(q_{ij}, x_k) = q_{lk}$ и учитывая, что индекс l определяется из соотношения $\delta(q_i, x_j) = q_l$ табл. 2.5, имеем

$$\delta_{\text{М}}(q_{11}, x_1) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{21}, x_1) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{31}, x_1) = q_{11},$$
$$\delta_{\text{М}}(q_{11}, x_2) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{21}, x_2) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{31}, x_2) = q_{12},$$
$$\delta_{\text{М}}(q_{12}, x_1) = q_{31}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{22}, x_1) = q_{31}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{32}, x_1) = q_{21},$$
$$\delta_{\text{М}}(q_{12}, x_2) = q_{32}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{22}, x_2) = q_{32}, \quad \delta_{\text{М}}(q_{32}, x_2) = q_{22}.$$

Далее находим функцию отметок по формуле $\mu(q_{ij}) = \lambda(q_i, x_j)$ и составляем автоматную таблицу автомата Мура. Последняя будет выглядеть так:

Таблица 2.6

	x_1	x_2	μ
q_{10}	q_{11}	q_{12}	-
q_{20}	q_{21}	q_{22}	-
q_{30}	q_{31}	q_{32}	-
q_{11}	q_{21}	q_{22}	y_1
q_{12}	q_{31}	q_{32}	y_1
q_{21}	q_{21}	q_{22}	y_2
q_{22}	q_{31}	q_{32}	y_2
q_{31}	q_{11}	q_{12}	y_3
q_{32}	q_{21}	q_{22}	y_1

Обратное (получение автомата Мили по автомату Мура) очевидно и не вызывает трудностей.

Пример 2.6. Пусть дан автомат Мура $A = (X, Q, Y, q_1 \in Q, \delta, \mu)$, где $X = \{x_1, x_2\}$, $Q = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, причем

$$\delta(1, x_1) = 2, \quad \delta(1, x_2) = 3,$$
$$\delta(2, x_1) = 3, \quad \delta(2, x_2) = 2,$$
$$\delta(3, x_1) = 1, \quad \delta(3, x_2) = 2,$$
$$\mu(1) = y_2, \quad \mu(2) = y_1, \quad \mu(3) = y_2.$$

По исходным данным легко воспроизвести автоматную таблицу (таблицу переходов):

Таблица 2.7

	x_1	x_2	μ
1	2	3	y_2
2	3	2	y_1
3	1	2	y_2

Построим эквивалентный автомат Мили B. Используя табл. 2.7, строим обычную функцию выхода $\lambda(q, x)$, определяющую автомат Мили $B = (X, Q, Y, q_1 \in Q, \delta, \lambda)$:

$$\lambda(1, x_1) = y_1, \quad \lambda(1, x_2) = y_2,$$
$$\lambda(2, x_1) = y_2, \quad \lambda(2, x_2) = y_1,$$
$$\lambda(3, x_1) = y_2, \quad \lambda(3, x_2) = y_1.$$

Автоматная таблица построенного автомата Мили выглядит следующим образом:

Таблица 2.8

	x_1	x_2
1	2, y_1	3, y_2
2	3, y_2	2, y_1
3	1, y_2	2, y_1

Можно проверить, что автомат Мили B, заданный табл. 2.8, индуцирует такое же автоматное отображение, что и автомат Мура A, определяемый табл. 2.7.

Таким образом, при исследовании автоматов достаточно пользоваться только автоматом Мура. Это в некоторых случаях удобнее потому, что автомат Мура можно рассматривать как автомат без выходов, состояния которого различным образом отмечены. Можно считать, что таких отметок вообще две (например, 0 и 1) и они делят состояния на два класса, один из которых можно назвать заключительным. Это позволяет дать еще одно определение абстрактного автомата – *автомата без выходов* $S = (X, Q, Y, \lambda, q_1, F)$, где $F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний, а q_1 – начальное состояние автомата.

Вспоминая понятие автономного автомата, можно сказать, что автомат Мили может быть представлен как совокупность автономных автоматов по входным и выходным буквам. В случае автоматов Мура имеет смысл говорить об автономных автоматах только по входным буквам.

2.2.4. Автоматы первого и второго рода

Вспомним интерпретацию автомата как некоторого устройства, работающего в дискретном времени. Первопричиной появления выходного сигнала и изменения состояния является входной сигнал. Следовательно, выходной сигнал $y(t)$ всегда появляется после входного сигнала $x(t)$. Однако относительно времени t перехода автомата из состояния $q(t–1)$ в состояние $q(t)$ выходной сигнал может появиться либо раньше, либо позже этого момента времени. В первом случае уравнения, описывающие работу автомата, будут следующие:

$$\begin{aligned} q(t) &= \delta(q(t-1), x(t)), \\ y(t) &= \lambda(q(t-1), x(t)), \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

а автомат будет именоваться *автоматом первого рода*.

Во втором случае получаем *автомат второго рода* с уравнениями:

$$\begin{aligned} q(t) &= \delta(q(t-1), x(t)), \\ y(t) &= \lambda(q(t), x(t)). \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

В уравнениях (2.2.1) и (2.2.2) функция λ называется либо обычной (для автоматов первого рода), либо сдвинутой (для автоматов второго рода) функцией выхода.

Установим взаимосвязь между автоматами первого и второго рода. Пусть дан автомат второго рода $S=(X,Q,Y,\delta,\lambda)$. Запишем функцию переходов $\delta(q,x)$ и сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$:

$$y(t)=\lambda(q(t),x(t)),$$
$$q(t)=\delta(q(t-1),x(t)).$$

Подставим в первое уравнение $q(t)$, определяемое вторым уравнением. Тогда получим уравнение

$$y(t)=\lambda(\delta(q(t-1),x(t)),x(t))=\lambda'(q(t-1),x(t)),$$

определяющее обычную функцию выхода $\lambda'(q,x)$, которая характеризует автомат первого рода. Таким образом, подставляя в сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$ автомата второго рода функцию переходов $\delta(q,x)$, получаем автомат первого рода $S'=\{X,Q,Y,\delta,\lambda'\}$, который индуцирует то же самое автоматное отображение, что и автомат S. Такое сведение автомата второго рода к эквивалентному автомату первого рода называется интерпретацией автомата второго рода автоматом первого рода.

Пример 2.7. Пусть задан автомат $A=(X,Q,Y,q_1\in Q,\delta,\lambda)$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Q=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, а автоматная таблица следующая:

Таблица 2.9

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2, y_1	4, y_1	1, y_2
2	1, y_2	3, y_1	4, y_1
3	1, y_1	4, y_2	2, y_2
4	4, y_2	1, y_1	3, y_1

Предположим, что автомат A является автоматом первого рода. Тогда функция выхода $\lambda(q,x)$, полученная из табл. 2.9 и представленная в табл. 2.10, будет являться обычной функцией выхода.

Таблица 2.10

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	y_1	y_1	y_2
2	y_2	y_1	y_1
3	y_1	y_2	y_2
4	y_2	y_1	y_1

Функция переходов $\delta(q,x)$, выделенная из табл. 2.9, приведена в табл. 2.11.

Таблица 2.11

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2	4	1
2	1	3	4
3	1	4	2
4	4	1	3

Если на вход автомата, находящегося первоначально в состоянии 1, поступит слово $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, то на выходе будет слово $\mathbf{y} = y_1y_2y_1y_1y_2y_1$.

Теперь предположим, что автомат A является автоматом второго рода. Тогда табл. 2.10 определяет сдвинутую функцию выхода. При поступлении на вход автомата второго рода слова $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, такого же, как и в случае автомата первого рода, на выходе появится слово $\mathbf{y} = y_2y_1y_1y_2y_1y_2$, которое отличается от соответствующего выходного слова автомата первого рода. Поэтому отображение, индуцируемое автоматом первого рода, отличается от отображения, индуцируемого автоматом второго рода.

Построим автомат A' первого рода, эквивалентный автомату A первого рода. Подставляя в сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$, заданную табл. 2.10, функцию перехода $\delta(q,x)$ из табл. 2.11, получим обычную функцию выхода $\lambda'(q,x)$ (см. табл. 2.12).

Таблица 2.12

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	y_2	y_1	y_2
2	y_1	y_2	y_1
3	y_1	y_1	y_1
4	y_2	y_1	y_2

Функция $\lambda'(q,x)$ задает автомат первого рода $A' = (X, Q, Y, q_1 \in Q, \delta, \lambda')$.

Объединяя табл. 2.12 выходов и табл. 2.10 переходов, получим автоматную таблицу автомата A' первого рода, интерпретирующего автомат A второго рода:

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	$2, y_2$	$4, y_1$	$1, y_2$
2	$1, y_1$	$3, y_2$	$4, y_1$
3	$1, y_1$	$4, y_1$	$2, y_1$
4	$4, y_2$	$1, y_1$	$3, y_2$

Легко заметить, что при поступлении на вход автомата A' первого рода того же слова $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, на выходе получим слово $\mathbf{y} = y_2y_1y_1y_2y_1y_2$, такое же, как и в случае автомата A второго рода. Таким образом, автомат A' интерпретирует автомат A.

Несколько сложнее показать (на этом останавливаться не будем), что для любого автомата первого рода можно построить эквивалентный ему автомат второго рода.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что автоматы первого и второго рода мы различаем, когда интерпретируем работу конечного абстрактного автомата некоторым реальным устройством.

В дальнейшем по умолчанию будем считать, что задан автомат первого рода, если не оговорено обратное.

2.2.5. Гомоморфизм, изоморфизм и эквивалентность автоматов

Ранее уже упоминались эквивалентные автоматы. Приведем строгое определение эквивалентности. Но прежде дадим понятия гомоморфизма и изоморфизма.

Пусть $S=(X_S,Q_S,Y_S,\delta_S,\lambda_S)$, и $T=(X_T,Q_T,Y_T,\delta_T,\lambda_T)$ – два автомата. Три отображения $\mathrm{f}: X_S \to X_T$, $\mathrm{g}: Q_S \to Q_T$, и $\mathrm{h}: Y_S \to Y_T$ называются *гомоморфизмом* автомата S в автомат T, если для любых $x \in X_S$, $q \in Q_S$, и $y \in Y_S$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &\delta_T(\mathrm{g}(q),\mathrm{f}(x)) = \mathrm{g}(\delta_S(q,x)), \\ &\lambda_T(\mathrm{g}(q),\mathrm{f}(x)) = \mathrm{h}(\lambda_S(q,x)). \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

В этом случае автомат T называется гомоморфным автомату S. Если все три отображения сюръективны, то эта тройка называется *гомоморфизмом S на T*. Если, кроме того, эти отображения взаимно однозначны, то они называются *изоморфизмом S на T*. Автоматы, для которых существует изоморфизм, называются *изоморфными*. Это обозначается $S \sim T$.

Понятно, что мощности соответствующих алфавитов у таких автоматов должны быть одинаковыми. Изоморфизм можно пояснить так: автоматы S и T изоморфны, если входы, выходы и состояния S можно переименовать так, что автоматная таблица S превратится в автоматную таблицу T. Изоморфизм соответствующих графов переходов является необходимым, но недостаточным условием изоморфизма автоматов. При гомоморфизме, кроме переименования, происходит еще и "склеивание" некоторых состояний S в одно состояние T.

Теперь пусть оба автомата S и T имеют одинаковые входные и выходные алфавиты. Состояние q автомата S и состояние r автомата T называют *неотличимыми,* если для любого входного слова $S(q,\mathbf{x}) = T(r,\mathbf{x})$.

Автоматы S и T называют неотличимыми, если для любого состояния q автомата S найдется неотличимое от него состояние r автомата T и наоборот. Неотличимость автоматов означает, что автоматное отображение, реализуемое одним из них, может быть реализовано другим. Отношение неотличимости между состояниями (и автоматами) рефлексивно, симметрично и транзитивно, а, следовательно, является отношением эквивалентности. Это и явилось основанием называть неотличимость эквивалентностью и говорить об *эквивалентных состояниях*, или *эквивалентных автоматах*, имея в виду отношение неотличимости.

Переход от автомата S к эквивалентному ему автомату называется эквивалентным преобразованием автомата S. Существует много различных задач по эквивалентному преобразованию автоматов к автомату с заданными свойствами.

2.2.6. Минимизация автоматов

Среди задач по эквивалентному преобразованию автоматов наиболее изученной и интересной является задача о минимизации числа состояний автомата или, более коротко, задача минимизации автомата: среди автоматов, эквивалентных заданному, найти автомат с наименьшим числом состояний – так называемый минимальный автомат. При интерпретации автомата цифровым устройством это означает минимизацию числа элементов памяти такого устройства.

Теорема 2.2.3. Для любого автомата S существует минимальный автомат S_0, единственный с точностью до изоморфизма. Если множество состояний S разбивается на k классов эквивалентности $(k \le n)$: $C_1 = \{q_{11}, ...q_{1p_1}\}$, $C_2 = \{q_{21}, ...q_{2p_2}\}, \ldots,\ C_k = \{q_{l1}, ..., q_{lp_k}\}$, то S_0 имеет l состояний.

Доказательство. Если q_{j1} и q_{j2} – состояния из одного класса эквивалентности C_j, то для любой входной буквы x состояния $\delta_S(q_{j1}, x)$ и $\delta_S(q_{j2}, x)$ находятся в одном классе эквивалентности (допустим в C_p). Действительно, если это не так (т.е. состояния $\delta_S(q_{j1}, x)$ и $\delta_S(q_{j2}, x)$ не эквивалентны), то найдется слово $\mathbf{x}$ такое, что $\delta_S(\delta_S(q_{j1}, x), \mathbf{x}) \ne \delta_S(\delta_S(q_{j2}, x), \mathbf{x})$.

Тогда, учитывая соотношение (2.1.2), будем иметь $S(q_{j1}, x\mathbf{x}) \ne S(q_{j2}, x\mathbf{x})$, то есть, q_{j1} и q_{j2} не эквивалентны, что противоречит условию. Теперь определим автомат $S_0 = (X_S, Q_{S_0}, Y_S, \delta_{S_0}, \lambda_{S_0})$ следующим образом: $Q_{S_0} = \{C_1, C_2, ...C_k\}$; для любого C_i и любой входной буквы x $\delta_{S_0}(C_i, x) = C_j$, где C_j – класс эквивалентности, содержащий состояние $\delta_S(q_{ir}, x)$ ($q_{ir} \in C_i$ – любое состояние из класса C_i); $\lambda_{S_0}(C_i, x) = \lambda_S(q_{ir}, x)$.

Ясно, что автомат S_0 эквивалентен S и по построению не имеет эквивалентных состояний.

Покажем теперь, что автомат S_0 минимален. Предположим, что это не так и имеется эквивалентный автомату S_0 автомат S_0' с меньшим числом состояний. Тогда по определению неотличимости для каждого состояния S_0 найдется эквивалентное ему состояние S_0', а поскольку в автомате S_0' состояний меньше, чем в S_0, то каким-то двум состояниям S_0 окажется эквивалентным одно состояние S_0'. В силу транзитивности эти два состояния S_0 будут эквивалентны, а это противоречит отсутствию в S_0 эквивалентных состояний. Следовательно, S_0 минимален.

Осталось показать, что любой другой минимальный автомат S_0'' изоморфен S_0. Действительно, раз S_0'' минимален, он имеет такое же число состояний, что и S_0, то есть различным состояниям S_0 соответствуют различные же состояния S_0''. Это соответствие и есть искомый изоморфизм. Что и требовалось доказать.

Только что доказанная теорема, к сожалению, не конструктивна, поскольку не дает метода нахождения классов эквивалентности. Само определение неотличимости также не дает такого метода, поскольку предполагает перебор по бесконечному множеству входных слов. Среди многочисленных алгоритмов минимизации наибольшее распространение получил алгоритм Мили, который и приводится ниже (он описан индуктивно).

Дан автомат $S=(X,Q,Y,\delta,\lambda)$ с n состояниями. На каждом шаге алгоритма строится некоторое разбиение Q на классы, причем разбиение на каждом последующем шаге получается расщеплением некоторых классов предыдущего шага.

Шаг 1. Два состояния q и q' относим в один класс C_{1j}, если и только если для любого $x \in X$ $\lambda(q,x)=\lambda(q',x)$.

Шаг i+1. Два состояния q и q' из одного класса $C_{i,j}$ относим в один класс $C_{i+1,j}$, если и только если для любого $x \in X$ состояния $\delta(q,x)$ и $\delta(q',x)$

принадлежат одному и тому же классу $C_{i,l}$. Если i+1-й шаг не меняет разбиения, то алгоритм заканчивает свою работу и полученное разбиение является разбиением на классы эквивалентных состояний, в противном случае применяем шаг i+1 к полученному разбиению.

Так как на каждом шаге число классов увеличивается (а всего их не более n), то приведенный алгоритм заканчивается не больше, чем за $(n-1)$ шагов. Нетрудно показать, что алгоритм действительно дает разбиение на классы эквивалентности.

Пример 2.8. Для автомата A с восемью состояниями и двумя выходными буквами, заданного табл. 2.13, алгоритм строит следующую последовательность разбиений:

1-й шаг: {1,5}, {2,3,8}, {4,6,7},
2-й шаг: {1,5}, {2}, {3,8}, {4,6,7},
3-й шаг: {1,5}, {2}, {3,8}, {4,7}, {6},
4-й шаг: {1,5}, {2}, {3}, {8}, {4,7}, {6}.

Таблица 2.13

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	4,1	2,2	5,1
2	5,2	1,1	4,2
3	3,2	5,1	4,2
4	5,1	8,2	4,2
5	7,1	2,2	1,1
6	1,1	2,2	4,2
7	5,1	8,2	7,2
8	3,2	5,1	6,2

Последнее разбиение является искомым, т.е. минимальный автомат имеет шесть состояний. Если найденные классы переобозначить, например, по порядку: {1,5}→1; {2}→2, {3}→3, {8}→4, {4,7}→5, {6}→6, то автоматная таблица минимального автомата будет следующей:

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	5,1	2,2	1,1
2	1,2	1,1	5,2
3	3,2	1,1	5,2
4	3,2	1,1	6,2
5	1,1	4,2	5,2
6	1,1	2,2	5,2

2.2.7. Частичные автоматы и их свойства

Представим себе, что хотя бы одна из двух функций δ или λ является не полностью определенной, то есть для некоторых пар (состояние-вход) функция перехода или выхода не определена. Это отражается наличием прочерков в соответствующих местах автоматной таблицы или матрицы соединений. В графе переходов, где функция δ не определена, нарушено условие полноты. В таких случаях автомат называется *частичным*, или не полностью определенным. Для частичного автомата задание функций δ и λ нуждаются в уточнении. Удобно при этом пользоваться значком $\cong$: запись $A \cong B$ означает, что либо A и B одновременно не определены, либо определены и равны.

Функция перехода $\delta(q_i, \mathbf{x})$:

1) для каждой входной буквы x_j функция $\delta(q_i, x_j)$ задана автоматной таблицей,

2) если функция $\delta(q_i, \mathbf{x})$ определена, то $\delta(q_i, \mathbf{x}x_j) \cong \delta(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j)$;

3) если функция $\delta(q_i, \mathbf{x})$ не определена, то $\delta(q_i, \mathbf{x}x_j)$ не определена для всех x_j.

Выходная функция $\lambda(q_i, \mathbf{x})$:

$$\lambda(q_i, \mathbf{x}x_j) \cong \lambda(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j).$$

Автоматный оператор $S(q_i, x_j)$:

1) $S\left(q_i, x_j\right) = \lambda\left(q_i, x_j\right)$ (если функция $\lambda(q_i, x_j)$ не определена, то значение $S(q_i, x_j)$ – это прочерк);

2) $S\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right) = S\left(q_i, \mathbf{x}\right)\lambda\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right)$, если $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определена. В случае если не определена $\lambda\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right)$, справа от $S\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ ставится прочерк;

3) если не определена функция $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$, то не определено и отображение $S\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right)$.

Отсюда видна неравноправность функций δ и λ: если δ не определена на слове **x**, то она не определена и на всех его продолжениях, а для функции λ это не обязательно. На графе это наглядно видно: если функция $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ не определена, то это значит, что не определен путь **x** из вершины q_i, поэтому не ясно, как его продолжить. Если же $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определена, следовательно, определен путь **x** из вершины q_i, то, идя по этому пути, можно прочесть и выходное слово (возможно, с прочерками там, где функция выхода не определена). Входное слово **x**, для которого автоматное отображение $S\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определено, называется *допустимым* для q_i. Таким образом, отображение, индуцируемое частичным автоматом, является не чем иным, как частичным отображением, областью определения которого является множество допустимых слов данного автомата.

Понятие неотличимости для частичных автоматов также нуждается в корректировке. Наиболее простое обобщение этого понятия следующее. Состояния q_i автомата S и r_j автомата T называются *псевдонеотличимыми,* если для любого слова **x** $S\left(q_i, \mathbf{x}\right) \cong T\left(r_j, \mathbf{x}\right)$, то есть если области определения операторов S и T совпадают и в этих областях q_i и r_j эквивалентны. Автоматы S и T псевдонеотличимы, если для любого состояния S найдется псевдонеотличимое состояние T и наоборот. Достоинство такого определения в том, что оно совпадает с обычным определением неотличимости для вполне определенных автоматов и, кроме того, является отношением эквивалентности. Недостаток же этого определения в том, что оно искусственно сужает рассматриваемые классы псевдонеотличимых автоматов, требуя совпадения областей определения сравниваемых состояний. То есть понятие псевдонеотличимости слишком слабое и не учитывает всех возможностей, скажем, минимизации автоматов.

Для частичных автоматов часто используются понятия эквивалентного и изоморфного продолжения (покрытия) автоматов. Для иллюстрации этих понятий рассмотрим автомат, заданный табл. 2.14

Таблица 2.14

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2,0	-	3,-
2	-	1,-	3,0
3	2,1	1,-	3,0

Возьмем состояние 2 и 3 (q_2 и q_3). Область определения для q_2 содержится в области определения для q_3 и, кроме того, в области определения для q_2 выполняется условие $S(q_2, \mathbf{x}) = S(q_3, \mathbf{x})$ для любого слова $\mathbf{x}$, так как при любой входной букве x $\lambda(q_2, x) = \lambda(q_3, x)$ и $\delta(q_2, x) = \delta(q_3, x)$. Поскольку область определения для q_3 включает в себя область определения для q_2, то можно сказать, что возможности состояния q_3 больше, чем q_2, на тех словах, на которых $S(q_2, \mathbf{x})$ не определено, а $S(q_3, \mathbf{x})$ определено. Если заменить теперь состояние q_2 на q_3 (просто вычеркнуть строку q_2, а переходы в q_2 поменять на переходы в q_3), то получим автомат S', который «делает больше, чем S». Говорят, что автомат S' покрывает автомат S, или является продолжением автомата S, или автомат S' содержит (включает) автомат S. В этом случае S' есть эквивалентное продолжение, покрытие или надавтомат автомата S, а S – эквивалентное сужение или подавтомат автомата S'. Это обозначается как $S \subseteq S'$ или $S' \supseteq S$.

Дадим более строгое определение покрытия. Состояние q_i автомата S покрывает (включает) состояние r_j автомата T (S и T могут совпадать), если для любого слова $\mathbf{x}$ из того, что $T(r_j, \mathbf{x})$ определено, следует, что $S(q_i, \mathbf{x})$ определено и $T(r_j, \mathbf{x}) = S(q_i, \mathbf{x})$. Автомат S включает (покрывает) автомат T, если для любого состояния T найдется покрывающее его состояние S. Таким образом, автомат $S = (X_S, Q_S, Y_S, \delta_S, \lambda_S)$ покрывает автомат $T = (X_T, Q_T, Y_T, \delta_T, \lambda_T)$, если $X_T \subseteq X_S$, $Y_T \subseteq Y_S$, а автоматное отображение $S(q_S, \mathbf{x}_S)$ $(q_S \in Q_S, \mathbf{x}_S \in X_S^*)$ продолжает отображение $T(q_T, \mathbf{x}_T)$ $(q_T \in Q_T,\ \mathbf{x}_T \in X_T^*)$ на множестве X_S^*.

Пусть теперь S,T и W – автоматы, удовлетворяющие условиям $S\sim T$ и $T\subseteq W$. Тогда автомат S является изоморфно вложенным в W. Можно также сказать, что W является изоморфным продолжением S, а автомат S является изоморфным сужением автомата W. Обозначается это $S \underset{\sim}{\subseteq} W$.

Можно показать, что отношение покрытия (равно как и изоморфного вложения) автоматов обладает следующими свойствами:

– $A \subseteq A$ (рефлексивность);

– $(A \subseteq B) \,\&\, (B \subseteq A) \mapsto A = B$ (антисимметричность),

– $(A \subseteq B) \,\&\, (B \subseteq C) \mapsto A \subseteq C$ (транзитивность),

т. е. являются отношениями нестрогого порядка.

Вернемся к табл. 2.14 и обратим теперь внимание на состояния 1 и 2. Они примечательны тем, что можно придумать состояние, покрывающее и q_1, и q_2. Например, это будет некоторое состояние 4: 2,0; 1, - ; 3,0. Такие состояния q_1 и q_2 называются совместимыми.

Состояния q_i автомата S и r_j автомата T (может быть S=T) *совместимы*, если существует состояние p_k (возможно, какого-то третьего автомата W), покрывающее и q_i и r_j. Автоматы S и Т *совместимы*, если существует автомат W, включающий S и T. Можно дать определение совместимости автоматов, рассматривая автоматные отображения: состояния q_j и r_j совместимы, если для любого слова $\mathbf{x}$ либо одно из отображений $S(q_i, \mathbf{x})$ и $T(r_j, \mathbf{x})$ не определено, либо выходные слова $S(q_i, \mathbf{x})$ и $T(r_j, \mathbf{x})$ (они могут содержать прочерки) непротиворечивы, т.е. не содержат на одинаковых местах разных букв.

Используя понятия совместимости и покрытия, можно предложить план минимизации частичных автоматов, аналогичный методу минимизации вполне определенных автоматов: находим совместимые состояния и заменяем их покрывающим состоянием. Однако здесь имеются некоторые трудности. Отношение совместимости в отличие от неотличимости и отношения включения нетранзитивно и не является отношением эквивалентности. Это означает, что классы совместимости могут пересекаться.

Назовем систему классов совместимости *полной,* если $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = Q$ и *замкнутой,* если из того, что состояния q и q' находятся в одном классе совместимости, например в C_i $(q \in C_i,\ q' \in C_i)$, следует, что состояния $\delta(q,\mathbf{x})$ и $\delta(q',\mathbf{x})$ также находятся в одном классе совместимости, например в C_j, всякий раз, когда соответствующие функции перехода определены.

Имеется теорема (Полла–Ангера), аналогичная теореме 2.2.3:

Теорема 2.2.4. Если для частичного автомата имеется полная и замкнутая система классов совместимости $C_1 \ldots C_k$, то существует автомат S', включающий S. Автомат $S' = (X_S, Q_S, Y_S, \delta_S, \lambda_S)$ строится следующим образом. Множество состояний равно $Q_S = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$. Для любого C_i и любой буквы $x \in X_S$ функция $\delta_{S'}(C_i, x) = C_j$, если для некоторых $q \in C_i$ функция перехода $\delta(q,x) \in C_j$; $\delta_{S'}(C_i, x)$ не определена, если для всех $q \in C_i$ функция перехода $\delta_S(q,x)$ не определена. Функция выхода $\lambda_{S'}(C_i, x) = y$, если для некоторых состояний $q \in C_i$ функция выхода $\lambda_S(q,x) = y$ и $\lambda_{S'}(C_i, x)$ не определена, если для всех $q \in C_i$ функция $\lambda_S(q,x)$ не определена. Нетрудно видеть, что состояние C_i автомата S' покрывает все состояния из класса совместимости C_i автомата S и, следовательно (ввиду полноты системы классов $\{C_i\}$), автомат S' покрывает автомат S. Что и требовалось доказать.

Если автомат S полностью определен, обе теоремы (2.2.3 и 2.2.4) совпадают.

Для минимизации частичных автоматов можно использовать и алгоритм Мили. При этом нужно сначала построить различные доопределения частичного автомата до полных автоматов (конечно, они будут покрывать исходный автомат), а затем минимизировать полученные полные автоматы по алгоритму Мили.

Реализация этого пути на практике сталкивается со значительными, порой непреодолимыми трудностями. По крайней мере, две из них заслуживают особого внимания.

1. Доопределить частичный автомат S можно различным образом. При этом получаются автоматы, скажем $S_1, \ldots S_N$, неэквивалентные между собой. Соответствующие минимальные автоматы $S_{1_0}, \ldots, S_{N_0}$ могут иметь различное число состояний, и также неэквивалентны между собой, т. е. их нельзя получить друг из друга эквивалентными преобразованиями. Поэтому результат минимизации будет сильно зависеть от того, насколько удачно мы доопределим исходный частичный автомат. Кроме того, полученный результат нельзя улучшить эквивалентными преобразовани-

ями и необходимо весь путь проделывать заново: доопределять автомат по-другому, находить классы эквивалентных состояний и т.д. Число различных вариантов доопределения достаточно велико: нетрудно подсчитать, что если $|Q_S|=n$, $|Y_S|=k$, функция перехода δ_S не определена в p клетках автоматной таблицы, а функция выхода λ_S – в r клетках, то это число равно $n^p \cdot k^r$.

2. Даже полный перебор всех вариантов доопределения может не привести к минимальному автомату. Алгоритм Мили дает систему непересекающихся классов совместимости, но ведь эти классы могут пересекаться. Из-за возможности пересечения классов совместимости число различных вариантов минимизации еще больше числа вариантов доопределения.

Пример 2.9. Простой пример иллюстрирует вышеизложенное. Рассмотрим автомат S, заданный табл. 2.15:

Таблица 2.15

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	1,-	2,0
2	3,0	1,0
3	2,1	1,0

Есть два варианта его доопределения: либо $\lambda(1, x_1) = 0$, либо $\lambda(1, x_1) = 1$. Легко видеть, что ни в первом, ни во втором случае автомат не минимизируется, так как не имеет эквивалентных состояний. Это означает, что исходный автомат S не имеет нетривиальной системы замкнутых непересекающихся классов совместимости. Но для автомата S существует замкнутая система пересекающихся классов совместимости $C_1=\{1,2\}$ и $C_2=\{1,3\}$ и по теореме 2.2.4 имеется автомат S' с двумя состояниями (табл. 2.16), включающий автомат S.

Таблица 2.16

	x_1	x_2
C_1	$C_2,0$	$C_1,0$
C_2	$C_1,1$	$C_1,0$

Перечисленные трудности заставляют искать дополнительные методы построения системы классов совместимости, некоторые из них изложены в [8].

2.3 Распознавание множеств автоматами

2.3.1. Понятие события и постановка задачи представления событий автоматами

Пусть $X=\{x_1...x_m\}$ – произвольный входной алфавит, а X^* – множество всех слов в этом алфавите. Тогда любое подмножество $E\subseteq X^*$ назовем *событием* в алфавите X. Конечно, можно было бы просто говорить «множество слов», но термин «событие» прижился в теории автоматов и стал общепринятым.

Для простоты изложения далее будем оперировать с автоматами без выходов.

Событие $E\subseteq X^*$ назовем *представимым* в автомате $S=(X,Q,\delta,q_1,F)$, если $\delta(q_1,\mathbf{x})\in F$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\in E$. Всякому автомату при заданных q_1 и F однозначно соответствует представимое в нем событие: на графе автомата оно соответствует множеству путей, ведущих из q_1 в вершины, принадлежащие множеству заключительных состояний F. Событие называется представимым, если существует конечный автомат, в котором оно представимо. Синонимом этого понятия является: множество определимое или допустимое, или распознаваемое автоматом. Другими словами представимое в автомате событие можно назвать множеством, разрешимым автоматом.

Начальное состояние q_1 также может относиться к множеству заключительных состояний $q_1\in F$. В этом случае автомат, ничего не имея на входе, уже что-то представляет. Принято считать, что это «что-то» – пустое слово (пустой символ e) и оно содержится в событии, представимым этим автоматом. Для произвольного слова $\mathbf{x}$ выполняется равенство $e\mathbf{x}=\mathbf{x}e=\mathbf{x}$, то есть пустое слово e играет роль единицы в свободной полугруппе слов входного алфавита, где ассоциативной бинарной операцией является *конкатенация* (приписывание одного слова к другому).

Не нужно путать пустое слово e с пустым событием (пустым множеством Ø). Автомат представляет пустое событие Ø, если ни одно из его заключительных состояний не достижимо из начального состояния.

До сих пор мы рассматривали конечную последовательность букв входного алфавита, то есть слова конечной длины. Но можно говорить, что автомат распознает и бесконечную последовательность букв $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots$, если он представляет множество $E = \left\{ x_{i_1}, x_{i_1} x_{i_2} \ldots \right\}$, составленное из всех начальных отрезков бесконечного слова **x**. Оказывается, что не все события представимы в автоматах. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Существуют события, непредставимые в автоматах, именно: никакая непериодическая бесконечная последовательность не распознаваема конечным автоматом.

Доказательство. Первая часть теоремы должна быть очевидна: во-первых, из сопоставления мощностей соответствующих множеств (множество всех событий континуально, а множество конечных автоматов счетное), а во-вторых, потому, что существуют неразрешимые множества.

Вторая часть теоремы говорит о том, что могут быть разрешимые множества, но не представимые в автоматах. Пример такой последовательности, скажем, а алфавите $\{0,1\}$: 010110111011110…

Действительно, предположим, что некоторая непериодическая последовательность $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots$ все же распознаваема автоматом S с n состояниями. Тогда для любого ее начального отрезка $\mathbf{x}_k = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ будет верным соотношение $\delta(q_1, \mathbf{x}_k) = q_{i_k}$, где q_{i_k} – заключительное состояние.

В процессе переработки последовательности **x** автомат проходит последовательность заключительных состояний $q_{i_1}, \ldots q_{i_k} \ldots$, а так как множество Q_S конечно, то какое-то состояние q_{i_k} встретится дважды: $q_{i_k} == q_{i_{k+n}}$ Таким образом, выполняется соотношение $\delta(q_{i_k}, x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}} \ldots x_{i_{k+n}}) = \; = q_{i_k}$ (все состояния, проходимые автоматом, заключительные). Поэтому, если на вход автомата в состоянии q_1 подать периодическую бесконечную последовательность $\mathbf{x_1} = x_{i_1} \ldots x_{i_k} (x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}} \ldots x_{i_{k+n}})$, где в скобках – период такой последовательности, то автомат будет проходить последовательность заключительных состояний. Это означает, что все начальные отрезки слова $\mathbf{x_1}$ входят в событие, представимое в автомате и, следовательно, автомат не отличает $\mathbf{x_1}$ от **x**, то есть не распознает **x** вопреки предположению. Что и требовалось доказать.

Из теоремы 2.3.1 следует, что класс множеств, распознаваемых автоматом, есть лишь часть (собственное подмножество) класса разрешимых множеств. Отсюда и из теоремы Райса[1] вытекает, что свойство множества «быть представимым в конечном автомате» алгоритмически неразрешимо. Поэтому не имеет смысла описывать эти множества в терминах произвольных разрешимых множеств, и требуются какие-то другие, более слабые, средства такого описания.

2.3.2. Регулярные события и алгебра Клини

Зададим три операции над событиями R и S в алфавите X.

1. *Объединением* (дизъюнкцией) событий R и S называется событие P, обозначаемое $R \cup S = P$, которое образуется обычным теоретико-множественным объединением множеств R и S.

2. *Конкатенацией* (умножением) событий R и S будет событие $U = R \cdot S$, состоящее из слов вида $\mathbf{u}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$, *где* $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{r} \in R$, $\mathbf{s} \in S$, то есть слова события U образуются приписыванием справа любого слова события S к любому слову события R (но не наоборот!).

3. *Итерацией* события R называется событие

$$R^* = e \cup R \cup RR \cup RRR \cup \ldots \cup R^i \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i .$$

Одноэлементные события, т.е. события $\{x_i\}$, где $x_i \in X$, будем называть элементарными и обозначать буквами x_i. Событие e, образованное пустым словом e, состоит из одного слова нулевой длины и также относится к элементарным событиям. Событие назовем *регулярным*, если оно может быть получено из элементарных событий путем конечного применения перечисленных операций: объединения, умножения и итерации, которые также назовем регулярными.

Таким образом, мы определили алгебру регулярных событий $(R;\bullet,\cup;*)$, несущим множеством которой является множество регулярных событий, а сигнатурой – две бинарные (конкатенация и дизъюнкция) и одна унарная (итерация) операции. Образующие этой алгебры (называемой еще алгеброй Клини) являются элементарные события. Каждый элемент этой алгебры (регулярное событие) может быть описан регуляр-

---

[1] Теорема Райса гласит, что никакое нетривиальное свойство вычислимых функций (или разрешимых множеств) не является алгоритмически разрешимым, т.е. по описанию алгоритма, вычисляющего некоторую функцию (формирующему некоторое множество) невозможно установить ее (функции) свойства.

ным выражением в алфавите $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$, которое определяется рекурсивно следующим образом:

1) символы $x_1, x_2,\ldots, x_m, e$ и Ø являются регулярными выражениями;

2) если R и S – регулярные выражения, то таковыми являются $R\cup S$, $R\cdot S$ и R^*;

3) никакое другое выражение не является регулярным, если оно не получено путем конечного числа применения правил 1 и 2.

Таким образом, регулярное выражение – это формула в алгебре событий. Регулярные выражения эквивалентны, если они описывают одно и то же регулярное событие.

Эквивалентные соотношения в алгебре регулярных событий вытекают из свойств операций $\cup$, $\cdot$, *. Если P, R, и S – регулярные события, то имеют место соотношения:

$P\cup\varnothing=\varnothing\cup P=P$;

$P\cdot\varnothing=\varnothing\cdot P=\varnothing$;

$P\cdot e=e\cdot P=\varnothing$;

$\varnothing^*=e$;

$e^*=e$;

$\left.\begin{array}{l} P\cup R=R\cup P, \\ P\cdot P^*=P^*\cdot P \end{array}\right\}$ – коммутативность объединения и итерации;

$\left.\begin{array}{l} P\cup(R\cup S)=(P\cup R)\cup S, \\ P\cdot(R\cdot S)=(P\cdot R)\cdot S \end{array}\right\}$ – ассоциативность объединения и умножения;

$\left.\begin{array}{l} P\cdot(R\cup S)=P\cdot R\cup P\cdot S, \\ (P\cup R)\cdot S=P\cdot S\cup P\cdot S \end{array}\right\}$ – левая и правая дистрибутивность умножения относительно объединения;

$P^*=e\cup P\cdot P^*$ – развертывание итерации;

$\left.\begin{array}{l} P\cup P=P, \\ (P^*)^*=P^* \end{array}\right\}$ – идемпотентность объединения и итерации;

$P^*\cup P=P^*$ – дизъюнктивное поглощение итерации;

$P^*\cdot P^*=P^*$ – мультипликативное поглощение итерации.

Из рассмотрения операций объединения, умножения и итерации вытекает, что все конечные события регулярны. Это следует из того, что любое слово события выражается произведением букв, а любое конечное событие – объединением образующих его слов.

Бесконечное регулярное событие может появиться только благодаря итерации и наоборот, если в регулярном выражении присутствует операция итерации, то оно описывает бесконечное событие (если только итерация не применяется к пустой букве e, так как $e^*=e$, т.е. конечно).

Пример 2.10. Регулярное выражение $U=(x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_m)^*$ задает множество всех слов (включая пустое) в алфавите $X=\{x_1, x_2, ... x_m\}$. Такое событие называется *универсальным* событием (по аналогии с универсальным множеством).

Пример 2.11. Регулярное выражение $E=(a \cup c)^* b (a \cup c)^*$ задает событие в алфавите $\{a, b, c\}$, состоящее из всех слов, содержащих букву b только один раз.

Регулярные события тесно связаны с автоматами. Эта связь дается фундаментальной *теоремой Клини*.

Теорема 2.3.2. (Клини). Класс событий, представимых в конечных автоматах, совпадает с классом регулярных событий.

По сути, эта теорема состоит из двух теорем.

Теорема 2.3.2 а (теорема синтеза). Для любого регулярного события существует конечный автомат, представляющий это событие.

Теорема 2.3.2 б (теорема анализа). Всякое событие, представимое конечным автоматом, непременно регулярно.

Чтобы подойти к доказательству этих теорем, введем понятие *источника* (синонимы: переходный граф сигналов, сигнальный граф), под которым будем понимать ориентированный граф, в котором выделены начальные и заключительные вершины, и на каждом ребре написана буква из алфавита X либо e (пустое ребро). Каждый источник H однозначно определяет некоторое событие E в алфавите X, порождаемое множеством путей из начальных вершин в заключительные вершины. В этом случае говорят, что источник H представляет событие E. Источники, представляющие одно и то же событие, называются эквивалентными. Частный случай источника – это автомат без выхода.

Для любого источника H можно построить эквивалентный источник H_0 с двумя полюсами (с одной начальной вершиной и одной заключительной). Для такого построения нужно в H_0 ввести новую вершину q_0 (единственная начальная вершина) и соединить ее пустыми ребрами с прежними начальными вершинами в H, а также новую вершину q_z (единственную заключительную) и соединить с ней все заключительные вершины в H пустыми ребрами. В остальном H_0 совпадает с H.

Теорема 2.3.3. Для любого регулярного события E существует двухполюсный источник, представляющий E.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по глубине построения формулы регулярного события. Элементарное событие представляется сигнальным графом с двумя вершинами – начальной и заключительной и ребром, соединяющим эти вершины. Это ребро взвешено буквой x_i или e (рис. 2.4, *а*).

Если построены двухполюсные источники: H_1, представляющий регулярное событие E_1, и H_2, представляющий регулярное событие E_2, с начальными q_{01}, q_{02} и заключительными q_{z1} и q_{z2} вершинами соответственно, то источник H с начальной вершиной q_0 и заключительной – q_z, представляющий регулярное событие E – результат регулярной операции над E_1 и E_2, строится следующим образом:

1) объединение $E{=}E_1{\cup}E_2$ будет изображено параллельным соединением H_1 и H_2 (рис. 2.4, *б*). Из вершины q_0 проводятся пустые ребра в q_{01} и q_{02}, а из q_{z1} и q_{z2} проводятся пустые ребра в вершину q_z;

2) конкатенация $E{=}E_1\ E_2$ строится последовательным соединением H_1 и H_2 (рис. 2.4, *в*). Из q_{z1} проводится пустое ребро в q_{02}; вершина q_{01} объявляется начальной у H, вершина q_{z2} – заключительной;

3) итерация $E=(E_1)^*$ получается зацикливанием H_1 (рис. 2.4, *г*): из вершины q_{z1} проводится пустое ребро в q_{01}, и эта же вершина q_{01} объявляется начальной и заключительной в H.

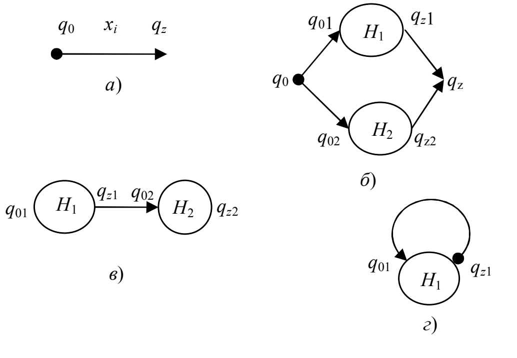


Рис. 2.4. Источники, представляющие регулярные операции

Построенные таким образом источники действительно представляют соответствующие события. Докажем это, например, для объединения $E=E_1\cup E_2$ (доказательства для умножения и итерации аналогичны). Возьмем $\mathbf{x}\in E$. Тогда $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1\cup\mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1\in E_1$, а $\mathbf{x}_2\in E_2$. По условию H_1 представляет E_1, H_2 представляет E_2, поэтому существует путь $\mathbf{x}_1$ из q_{01} в q_{z1} и путь $\mathbf{x}_2$ из q_{02} в q_{z2}. Тогда по построению существует путь $e\mathbf{x}_1e\cup e\mathbf{x}_2e=\mathbf{x}_1\cup\mathbf{x}_2$ из вершины q_0 в вершину q_z. И наоборот, всякий путь $\mathbf{x}$ из q_0 в q_z обязательно проходит через q_{01} и q_{z1} либо через q_{02} и q_{z2} и имеет вид $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1\cup\mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1$ – путь из q_{01} в q_{z1}, а $\mathbf{x}_2$ – путь из q_{02} в q_{z2}, откуда следует, что $\mathbf{x}_1\in E_1$ и $\mathbf{x}_2\in E_2$. Что и требовалось доказать.

При построении источника в некоторых случаях необходимо вводить пустые ребра (ребра, взвешенные пустой буквой e). Это делается для того, чтобы избежать ложных путей. Система правил, когда следует вводить пустые ребра в граф регулярного выражения, следующая.

1. Пустые ребра вводятся в случае произведения двух или более итераций $S=\prod_{i\in N}(R_i)^*$ (рис. 2.5.), где R_i – регулярные выражения.

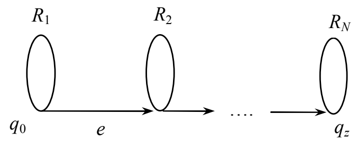


Рис. 2.5. Введение пустых ребер при произведении итераций

2. Пустые ребра в источнике, представляющем событие S, когда регулярное выражение для S начинается или заканчивается итерацией, вводятся в случаях:

а) $S=(P^*\cdot R)^*$;
б) $S=(R\cdot N^*)^*$;
в) $S=(P^*\cdot R\cdot N^*)^*$.

Здесь R, P и N – произвольные регулярные выражения.
Соответствующие графы изображены на рис. 2.6.

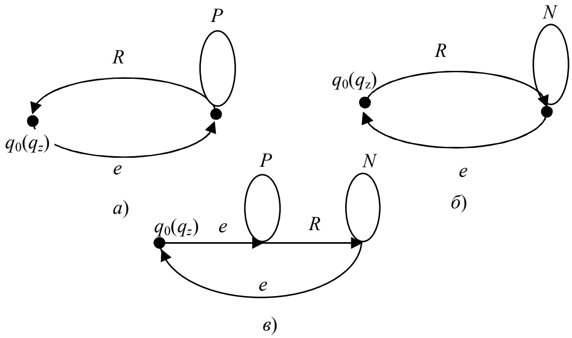


Рис. 2.6. Введение пустых ребер при итерации

3. Пустые ребра вводятся в случае дизъюнкции, если хотя бы один из дизъюнктивных членов начинается с итерации $S = R^* \cdot Q \cup P^* \cup ... \cup Q$, где Q – регулярное выражение, не содержащее итерации (рис. 2.7).

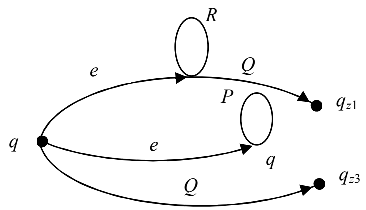


Рис. 2.7. Введение пустых ребер в случае дизъюнкции

4. Пустые ребра вводятся при умножении слева на дизъюнкцию, если хотя бы один из дизъюнктивных членов заканчивается итерацией (рис. 2.8.)

$$S = \left(Q \cdot R^* \cup P^* \cup ... \cup Q\right) \cdot N .$$

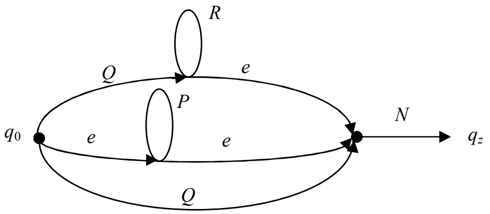


Рис. 2.8. Введение пустых ребер при умножении на дизъюнкцию

Перечисленная система правил является полной, т.е. ни в каких других случаях вводить пустые ребра нет необходимости. Это нетрудно показать, рассматривая всевозможные сочетания операций (∪, •, *) в регулярном выражении.

2.3.3. *Синтез автоматов (абстрактный уровень)*

Перейдем теперь к синтезу автоматов, т.е., по сути, к доказательству теоремы 2.3.2 *а*.

Вначале введем понятие *детерминированного источника*. Речь уже шла о том, что автомат без выходов – это частный случай источника. Источник будет являться графом автомата без выходов, если он: а) содержит одну начальную вершину; б) не содержит пустых ребер и в) удовлетворяет условиям автоматности. Такой источник и назовем детерминированным источником в отличие от произвольного недетерминированного источника. Это название связано с тем, что произвольный источник можно интерпретировать как недетерминированный автомат, т. е. как автомат, в котором функция переходов $\delta(q,x)$ может иметь несколько значений (символу x при вершине q может соответствовать множество ребер, а слову $\mathbf{x}$ – множество путей из вершины q).

Теперь докажем вспомогательную теорему.

Теорема 2.3.4 (детерминизации). Для любого источника H с n вершинами существует эквивалентный ему детерминированный источник H', имеющий не более чем 2^n вершин.

Доказательство. Назовем множество вершин $\tilde{q}$ замкнутым, если из того, что $q_i \in \tilde{q}$, следует, что $\tilde{q}$ принадлежит любая вершина, в которую из q_i ведет пустое ребро. Таким образом, для источника без пустых ребер любое множество вершин замкнуто.

Источник H' строится следующим образом. Образуем все замкнутые подмножества вершин H (а их не более чем 2^n) и каждому такому подмножеству поставим в соответствие вершину $\tilde{q}_i$ источника H'.

Через $\tilde{q}_0$ обозначим наименьшее замкнутое подмножество вершин H, содержащее все начальные вершины H.

Это будет начальная вершина H'. Заключительными вершинами H' объявим все подмножества $\tilde{q}_i$**,** содержащее хотя бы одну заключительную вершину H. Если из множества $\tilde{q}_i$ источника H есть пути x ($x \in X$) в множество $\tilde{q}_j$, то в источнике H' соединяем вершину $\tilde{q}_i$ с вершиной $\tilde{q}_j$ ребром, на котором написан символ x. Если же в H никакая из вершин $\tilde{q}_i$ не имеет выходящего из нее ребра с символом x, то соединяем вершину $\tilde{q}_i$ в H' с вершиной Ø (пустое подмножество вершин H) ребром x. Таким образом, каждой вершине $\tilde{q}_i$ в H' и каждому символу x соответствует ровно одно ребро x, выходящее из $\tilde{q}_i$, и источник H' является детерминированным. Построение ребер H' определяет функцию перехода автомата, граф которого – это источник H'. Начальное состояние этого автомата $\tilde{q}_0$.

Осталось показать, что источник H' эквивалентен H. Действительно, H' обладает свойством: в H' непустой путь $\mathbf{x}$ из $\tilde{q}_0$ в $\tilde{q}_j$ существует тогда и только тогда, когда в H для любой вершины $q \in \tilde{q}_j$ существует путь $\mathbf{x}$ из некоторой начальной вершины $q_0 \in \tilde{q}_0$ в q. Пустым путь $\mathbf{x}$ быть не может, так как, если $\mathbf{x}=e$, то $\tilde{q}_j = \tilde{q}_0$ по условию замкнутости, а в H' пустых ребер по построению нет. Это свойство доказывается индукцией по длине слова $\mathbf{x}$.

Если $\mathbf{x}=x$ (состоит из одного символа), то это свойство выполняется по построению ребер в H'. Предположим теперь, что оно выполняется и для слова длины, меньшей или равной k, и докажем, что оно выполняется и для слова $\mathbf{x}x$, где $x \in X$ произвольная буква входного алфавита.

Пусть в H' имеется непустой путь $\mathbf{x}x$ из $\tilde{q}_0$ в $\tilde{q}_j$: $\delta(\tilde{q}_0, \mathbf{x}x) = \tilde{q}_j$. Если $\delta(\tilde{q}_0, \mathbf{x}) = \tilde{q}_k$, то из $\tilde{q}_k$ в $\tilde{q}_j$ ведет ребро x. По предположению, в H для любой вершины $q^* \in \tilde{q}_0$ существует путь $\mathbf{x}$ из начальной вершины q_0 в q^*.

По построению H' из того, что в H' есть ребро x из $\tilde{q}_k$ в $\tilde{q}_j$, следует, что в H для любой вершины $q \in \tilde{q}_i$ найдется вершина из подмножества $\tilde{q}_k$, из которой ведет путь x в q, поэтому в H имеется путь из q^* в q и, следовательно, путь $\mathbf{x}x$ из q_0 в q.

И наоборот, если в H для любой вершины $q \in \tilde{q}_i$ есть путь $\mathbf{x}x$ из начальной вершины $q_0 \in \tilde{q}_0$ в вершину q, то в H' будет выполняться условие $\delta(\tilde{q}_0, \mathbf{x}x) = \tilde{q}_j$. Доказывается это аналогичным образом. При этом рассматривается множество путей $\mathbf{x}x$ из начальных вершин H в вершины множества $\tilde{q}_i$ и множества $\tilde{q}_k$ всех вершин, в которые ведут отрезки $\mathbf{x}$ этих путей.

Из доказанного свойства H' и определения заключительных вершин H' следует, что в H' путь $\mathbf{x}$ из $\tilde{q}_0$ в заключительную вершину есть тогда и только тогда, когда в H имеется путь $\mathbf{x}$ из некоторой начальной вершины в заключительную. Следовательно, источники H и H' эквивалентны, поскольку представляют одно и то же событие. Что и требовалось доказать.

По сути дела, из доказательства теорем 2.3.3 и 2.3.4 и следует доказательство теоремы синтеза 2.3.2 *а*, а синтез автомата, представляющего произвольное регулярное событие E, состоит в том, что сначала строится источник, представляющий E, а затем этот источник детерминируется согласно процедуре, изложенной при доказательстве теоремы 2.3.4.

Практически детерминизация упрощается в связи с тем, что некоторые подмножества вершин H (состояния H') не достижимы из начального состояния и их удаление не изменит события, представляемого автоматом. Поэтому в матрицу переходов H' включаются только те подмножества, которые порождаются процедурой детерминизации, начатой с подмножества $\tilde{q}_0$. В этом случае построенный автомат может иметь меньше чем 2^n состояний.

Пример 2.12. Рассмотрим синтез автомата на абстрактном уровне. Регулярное событие, которое должен представлять автомат, может быть задано либо словесным описанием, либо регулярным выражением. Пусть регулярное событие в алфавите $\{a,b,c\}$ задано выражением

$$\left(a^*b \cup c \cdot c^*\right) \cdot (a \cup b)^* \cdot \left(ac\right)^*. \tag{2.3.1}$$

Процедура синтеза начинается с построения источника *H*. При этом нужно учитывать правила введения пустых ребер. В формуле (2.3.1) имеется произведение итераций (правило 1); первая скобка представляет собой дизъюнкцию, в которой один из дизъюнктивных членов начинается с итерации (правило 3), а также один из дизъюнктивных членов заканчивается итерацией (правило 4). Поэтому построенный источник *H* будет содержать пустые ребра (см. рис. 2.9).

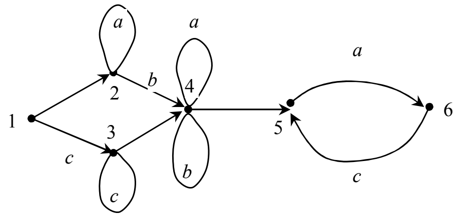


Рис. 2.9. Источник, представляющий событие (2.3.1)

На рис. 2.9 ребра, которым не приписано букв, – пустые. Начальная вершина источника – 1, заключительная – 5.

Следующий этап – детерминизация источника *H* в соответствии с теоремой 2.3.4. При этом строим только замкнутые подмножества, достижимые из начального замкнутого подмножества {1,2}. Функция переходов полученного автомата приведена в табл. 2.17.

Таблица 2.17

	a	*b*	*c*
{1,2}	{2}	{4,5}	{3,4,5}
{2}	{2}	{4,5}	∅
{4,5}	{4,5,6}	{4,5}	∅
{3,4,5}	{4,5,6}	{4,5}	{3,4,5}
∅	∅	∅	∅
{4,5,6}	{4,5,6}	{4,5}	{5}
{5}	{6}	∅	∅
{6}	∅	∅	{5}

В этой таблице знаком ∅ обозначено пустое множество. После переобозначения подмножеств вершин – {1,2}→1; {2}→2; {4,5}→3; {3,4,5}→4; ∅→6; {4,5,6}→7; {5}→8; {6}→9 – таблица переходов автомата приобретает следующий вид (табл. 2.18).

Таблица 2.18

	a	*b*	*c*
1	2	3	4
2	2	3	5
3	5	3	5
4	5	3	4
5	5	5	5
6	5	3	7
7	8	5	5
8	5	5	7

В табл. 2.18 выделены жирным шрифтом заключительные состояния 3,4,6 и 7, соответствующие подмножествам из табл. 2.17, содержащим заключительное состояние 5 источника *H*.

2.3.4. Анализ автоматов (абстрактный уровень)

Для процедуры анализа автоматов потребуется ввести несколько новых понятий. Ребра и вершины источника, не входящие в контур обратных связей, назовем *каскадными.* Вершины называются *стоком,* если они имеют только входящие ребра и *истоком,* если они имеют только выходящие ребра. Две вершины, лежащие в контуре обратной связи, называются спаренными.

Источник, состоящий только из каскадных вершин, называется *каскадным*. Поскольку стоки и истоки всегда каскадные, то любую из вершин обратной связи можно сделать каскадной с помощью операции, называемой *расщеплением* вершины. Произвольная вершина q в этом случае расщепляется на две вершины: q', которая называется истоком, и q'', служащая стоком. Пример такого расщепления приведен на рис. 2.10.

Расщепленные вершины называются индексными вершинами. Минимальное число вершин, которые нужно расщепить, чтобы разбить все контуры обратной связи, называется *индексом соединения* обратной связи.

Граф, изображающий источник, можно упростить, устранив ряд вершин и приведя ветвевой переход к значению пути через устраненные вершины. Полученный граф называется *остатком* первоначального. Вершина, входящая в остаточный граф, называется остаточной. Путь, если он связывает остаточную вершину с собой или с заданной остаточной вершиной и не проходит через другие остаточные вершины, называется остаточным.

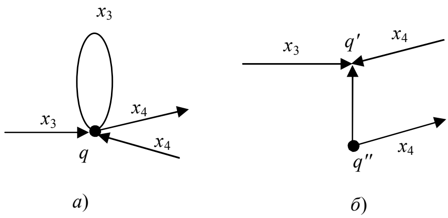


Рис. 2.10. Пример расщепления вершины

Исключая в исходном источнике все вершины, кроме истоков, стоков и индексных вершин, получим *индексный остаток*. Если необходимо сохранить вершину q, не являющуюся ни истоком, ни стоком, ни индексной вершиной, то это можно сделать путем соединения новой вершины q' с вершиной q ребром e и устранением вершины q. В результате получается исток. Аналогичным образом поступают и для образования стока.

Существующие методы анализа можно разделить на графические, использующие понятие источника и его эквивалентные преобразования, и аналитические, в которых применяются уравнения в алгебре регулярных событий. Впервые алгоритм получения регулярных выражений был дан Мак-Нотоном и Ямадой (Mc. Naughton & Yamada) в 1960 г., однако он довольно громоздок и не приводится.

Рассмотрим графический алгоритм анализа. Отыскание регулярного выражения, означающего множество слов, переводящих автомат из состояния q_i в состояние q_j, сводится в конечном итоге к нахождению ветвевого перехода из вершины q_i в q_j на графе автомата. В этом случае граф автомата приводится к источнику, имеющему только два состояния: q_i и q_j. Если в начале приведения вершина q_i является истоком, q_j – стоком, то полученный источник будет иметь только один непустой переход от q_i к q_j и вес этого перехода будет являться искомым регулярным выражением. При таком приведении остальные вершины должны быть удалены. Например, пусть необходимо удалить в графе вершину q_k с петлей t_{kk} (см. рис. 2.11, *а*).

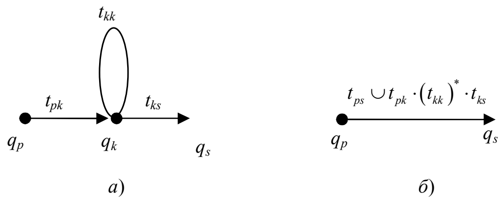


Рис. 2.11.Удаление вершины с петлей

Регулярное выражение, связывающее q_p и q_s, будет $R_1 = t_{pk} \cdot (t_{kk})^* \cdot t_{ks}$, а при устранении вершины q_k получим (рис. 2.11,*б*): $R = t_{ps} \cup t_{pk} \cdot (t_{kk})^* \cdot t_{ks}$.

Таким образом, любой граф автомата можно свести к источнику с двумя вершинами q_i и q_j, ветвевой переход между которыми и есть искомое регулярное выражение, представимое состоянием q_j при условии, что q_i – начальное состояние.

При анализе граф автомата, как правило, приводят к индексному остатку. Это можно сделать с помощью элементарных преобразований, но на практике используют приведение к индексному остатку с проверкой по правилу. Это правило заключается в том, что между остаточными вершинами q_i и q_j в построенном источнике должно быть ребро, если в первоначальном графе есть, по крайней мере, один остаточный путь от q_i к q_j. Вес такого ребра равен объединению всех приращений остаточных путей от q_i к q_j. Прирост пути от q_i к q_j определяется произведением приращений ребер, образующих этот путь.

Если индексный остаток включает сложный контур обратной связи, устраняемые вершины могут быть исключены расщеплением вершин. При удалении некоторой вершины q_k все другие вершины расщепляются на истоки и стоки. Далее вычисляются пути от истока до стока, и расщепленные вершины соединяются вновь.

Пример 2.13. Исходный граф автомата изображен на рис. 2.12,а. Пусть q_1 – начальное состояние, а q_2 – заключительное. Расщепляем вершину q_1 (рис. 2.12, *б*). Вычисляем переход от q_1' к q_1'' (рис. 2.12, *в*). Соединяем q_1' и q_1'' (рис. 2.12, *г*). Записываем окончательный результат (рис. 2.12, *д*).

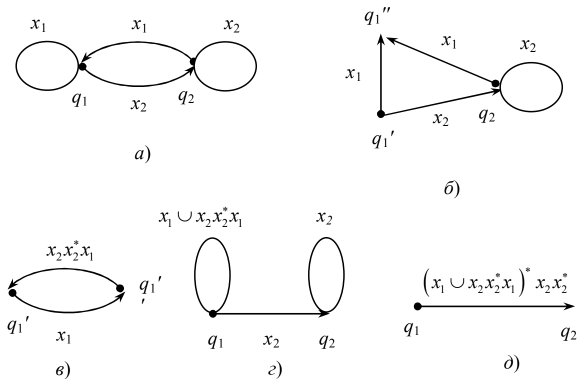


Рис. 2.12. Пример расщепления сложного контура обратной связи

Теперь можно сформулировать графический алгоритм анализа абстрактных автоматов.

1. По графу автомата находим исток и сток. Если их нет, то с начальной вершиной q_i соединяется пустым ребром новая вершина q_i', а заключительная вершина q_j соединяется пустым ребром с новой вершиной q_j'. После этого q_i' берется как исток, а q_j' – как сток.

2. Все параллельные пути приводятся к форме $x_k \cup x_s$, а все последовательные – к форме $x_k \cdot x_s$.

3. Получаем индексный остаток графа, отмечая вершины q_i, q_j и индексные вершины. Находим приращения остаточных дуг.

4. Устраняем последовательно все индексные вершины индексного остатка графа. Приращение пути от вершины q_i к вершине q_j есть регулярное выражение события, представимого в автомате состоянием q_j при условии, что q_i – начальное состояние автомата.

Пример 2.14. Рассмотрим автомат, заданный своим графом переходов (см. рис. 2.13).

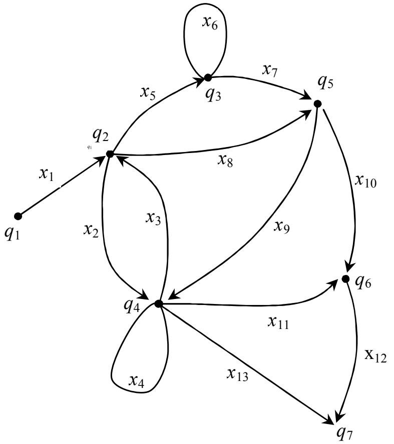


Рис. 2.13. Граф автомата

Пусть начальное состояние автомата q_1, а заключительное – q_7. Требуется провести анализ автомата, т.е. найти регулярное выражение, представимое этим автоматом. Поскольку вершина q_1 является истоком, а вершина q_7 – стоком, вводить дополнительные вершины не требуется. В графе на рис. 2.13 две индексные вершины – q_2 и q_4. Можно оставить любую из них, например, q_4. Тогда индексный остаток графа будет таким, как на рис. 2.14.

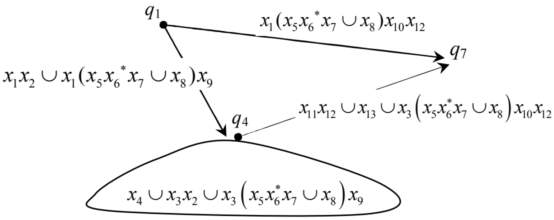


Рис. 2.14. Индексный остаток графа

Путь $x_3\left(x_5x_6^*x_7 \cup x_8\right)x_9\left(x_{13} \cup x_{11}x_{12}\right)$ от вершины q_4 до вершины q_7 не является остаточным, так как проходит через индексную вершину q_4. Устраняя индексную вершину q_4, получаем окончательное выражение для регулярного события, представимого автоматом при условии, что начальное состояние автомата – q_1, а заключительное – q_7:

$$(x_1x_2 \cup x_1(x_5x_6^*x_7 \cup x_8)x_9)(x_4 \cup x_3x_2 \cup x_3(x_5x_6^*x_7 \cup x_8)x_9)^*(x_{11}x_{12} \cup$$
$$\cup x_{13} \cup x_3(x_5x_6^*x_7 \cup x_8)x_{10}x_{12}) \cup x_1(x_5x_6^*x_7 \cup x_8)x_{10}x_{12}.$$

2.4 Алгебра абстрактных автоматов

Рассмотрим свойства теоретико-множественных и алгебраических операций на множестве абстрактных автоматов. Есть две теоретико-множественные операции – объединение и пересечение, а также четыре алгебраические – умножение, суммирование, суперпозиция и композиция. Все эти операции бинарные и играют важную роль при синтезе автоматов, так как на структурном уровне они соответствуют различным способам соединения простых (в частности элементарных) автоматов между собой при построении структурных схем более сложных автоматов [9].

Множество автоматов совместно с операциями над ними образуют алгебру абстрактных автоматов, которую не нужно путать с алгеброй регулярных событий на множестве слов входного алфавита произвольного автомата.

Задать определенную бинарную операцию на множестве автоматов означает указать закон, по которому любым двум автоматам из некоторого множества автоматов сопоставляется третий автомат из этого же множества. Какое именно множество имеется в виду, зависит от конкретного случая (от конкретной операции), а равенство понимается, как правило, с точностью до изоморфизма.

2.4.1. Теоретико-множественные операции

Операции объединения и пересечения автоматов играют вспомогательную роль при задании алгебраических операций, хотя их можно рассматривать и как самостоятельные операции на множестве $B(L)$ подавтоматов произвольного непустого автомата L. Тогда объединение двух автоматов $A \in B(L)$ и $B \in B(L)$ представляет автомат $C=A \cup B$, который является эквивалентным продолжением автоматов A и B, а пересечение представляет автомат $D \in B(L)$, по отношению к которому автоматы A и B являются эквивалентными продолжениями.

Зададим операции объединения и пересечения более конкретно. Пусть L – произвольный непустой автомат Мили, а $B(L)$ – множество его подавтоматов. Пусть далее $A \in B(L)$ и $B \in B(L)$ – подавтоматы автомата L, причем и A, и B имеют одинаковые начальные состояния, совпадающие с начальным состоянием L. Пусть заданы автомат $A=(X_1,Q_1,Y_1,q_1 \in Q_1, F_1(x \in X_1/y \in Y_1))$ и автомат $B=(X_2,Q_2,Y_2,q_1 \in Q_2,F_2(x \in X_2/y \in Y_2))$. Тогда автомат $C=(X,Q,Y,q \in Q,F(x \in X/y \in Y))$ будет являться объединением A и B, если множества X, Y, Q и отображение F определяются по формулам

$$X=(\{1\}\times X_1)\cup(\{2\}\times X_2); \tag{2.4.1}$$
$$Q=Q_1\cup Q_2; \tag{2.4.2}$$
$$Y=(\{1\}\times Y_1)\cup(\{2\}\times Y_2); \tag{2.4.3}$$
$$Fq=F_1q\cup F_2q, \tag{2.4.4}$$

где $q \in Q$. Для тех состояний, когда $q \notin Q_1$, полагаем $F_1q=\varnothing$, а при $q \notin Q_2$ имеем $F_2q=\varnothing$.

Если не происходит нарушения автоматности для автомата C, то есть равенство

$$F_1q(x/y)=F_2q(x/y)$$

не нарушается для любых $q \in Q$, $x \in X$ и $y \in Y$ (когда оба отображения не пусты) или если

$$X_1\cap X_2=\varnothing; \tag{2.4.5}$$
$$Y_1\cap Y_2=\varnothing, \tag{2.4.6}$$

то формулы (2.4.1) и (2.4.3) упрощаются и принимают вид

$$X = X_1 \cup X_2; \qquad (2.4.7)$$

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \,. \qquad (2.4.8)$$

В том случае, когда A и B вполне определенные автоматы, автомат $C = A \cup B$ также вполне определен, в противном случае автомат C будет частичным.

Пример 2.15. Автоматы заданы своими автоматными таблицами.

A

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	-	$3, y_2$
2	$2, y_2$	-
3	$3, y_1$	$2, y_3$

B

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	$2, y_1$	$3, y_2$	-
2	$2, y_2$	-	$1, y_1$
3	-	-	$1, y_3$

Найдем их объединение $C = A \cup B$. Поскольку нарушения условий автоматности не происходит, то нет необходимости различать одинаковые буквы алфавитов, и поэтому пользуемся формулами (2.4.7) и (2.4.8), а также формулами (2.4.2) и (2.4.4). В результате получаем автомат C:

C

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	$2, y_1$	$3, y_2$	-
2	$2, y_2$	-	$1, y_1$
3	$3, y_1$	$2, y_3$	$1, y_3$

Операцию объединения с соответствующими формулами (2.4.1) – (2.4.8) легко объединить и на случай n автоматов.

Из формул (2.4.2), (2.4.4), (2.4.5) – (2.4.8) следует, что каждый автомат Мили может быть представлен объединением автономных автоматов по входным и выходным буквам:

$$A = \Big(\bigcup_{x \in X} A_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{y \in Y} A_y\Big) \,.$$

Такое представление используется при разложении автоматов по различным операциям.

Автоматное отображение $S_C(q_1, \mathbf{x})$, индуцируемое автоматом C, есть продолжение автоматных отображений $S_A(q_1, \mathbf{x})$ на множество X^*.

Пересечением автоматов A и B будет являться автомат $D=A\cap B$, если его алфавиты X, Q, Y и отображение F определяется формулами

$$X=X_1\cap X_2; \tag{2.4.9}$$

$$Q=Q_1\cap Q_2; \tag{2.4.10}$$

$$Y=Y_1\cap Y_2; \tag{2.4.11}$$

$$Fq=F_1q\cap F_2q, \tag{2.4.12}$$

где $q\in Q$.

Пример 2.16. Найдем пересечение автоматов A и B из примера 2.15.

Применяя формулы (2.4.9) – (2.4.12), получаем автоматную таблицу автомата $D = A\cap B$:

D

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	-	3, y_2
2	2, y_2	-
3	-	-

Так же, как и операцию объединения, операцию пересечения, определяемую формулами (2.4.9) – (2.4.12), можно распространить на случай n автоматов.

Задание объединения и пересечения автоматов Мура наталкивается на трудности, связанные с тем, что одинаковые состояния могут иметь разные значения функции отметок, в связи с чем рекомендуется сначала интерпретировать автоматы Мура эквивалентными автоматами Мили, а затем находить их объединение или пересечение по известным формулам.

Нетрудно заметить, что операции объединения и пересечения автоматов ассоциативны, коммутативны и дистрибутивны.

2.4.2. Алгебраические операции

К алгебраическим операциям над автоматами относятся умножение, суммирование, суперпозиция и композиция.

Операция умножения графов приводит к двум операциям умножения автоматов. Первая операция, обозначаемая $\times$, применяется к произвольным автоматам с раздельными входами, то есть с разными входными алфавитами, а вторая обозначается $\otimes$ и применяется к автоматам с общим входом, то есть с одним и тем же входным алфавитом.

Произведением произвольных непустых автоматов $A=(X,Q,Y,q_1\in Q,F(x\in X/y\in Y))$ и $B=(U,W,V,w_1\in W,P(u\in U/v\in V))$ будет называться автомат $K=(Z,H,S,h_1\in H,R(z\in Z/s\in S))$, у которого

$$Z=X\times U; \tag{2.4.13}$$
$$H=Q\times W; \tag{2.4.14}$$
$$S=Y\times V; \tag{2.4.15}$$
$$Rh=Fq\times Pw, \tag{2.4.16}$$

где $q\in Q$, $w\in W$, $h\in H$, $h=(q,w)$, $z=(x,u)$, $s=(y,v)$.

Начальным состоянием автомата $K=A\times B$ будет состояние $h_1=(q_1,w_1)$. Если оба автомата A и B вполне определенные, то и их произведение является вполне определенным автоматом. Если хотя бы один из исходных автоматов частичный, то в результате умножения получаем частичный автомат.

Можно определить операцию умножения и через матрицы соединений. Пусть имеется матрица соединений автомата A:

$$\mathbf{R}_A = \left\| r_{i\,j}\left(x/y\right) \right\|,$$

где $i, j\in\{1, 2, \dots m\}$ и

$$r_{i\,j}\left(x/y\right)=\begin{cases} x/y, \text{ если } q_j \in F_{q_i} \text{ по букве } x\in X \text{ с выходом } y\in Y, \\ 0, \text{ если } q_j \notin F_{q_i}; \end{cases}$$

и матрица соединений автомата B:

$$\mathbf{R}_B = \left\| r_{k\,l}\left(u/w\right) \right\|,$$

где $k, l\in\{1, 2, \dots n\}$ и

$$r_{k\,l}\left(u/v\right)=\begin{cases} u/v, \text{ если } w_l \in P_{w_k} \text{ по букве } u\in U \text{ с выходом } v\in V, \\ 0, \text{ если } w_l \notin P_{w_k}; \end{cases}$$

Матрица соединений $\mathbf{R}_k$ автомата $K=A\times B$ равна прямому произведению матриц $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$, то есть

$$\mathbf{R}_K=\mathbf{R}_A\times\mathbf{R}_B,$$

а ее элементы определяются так:

$$r_{\alpha\beta}(z/s)=\begin{cases}(x,u)/(y,v), \text{ если } r_{ij}=x/y \text{ и } r_{kl}=u/v,\\ 0, \text{ если } r_{ij}=0 \text{ или } r_{kl}=0,\end{cases}$$

где $\alpha,\beta\in\{1, 2, \ldots p\}$, $p=m\cdot n$, $z=(x,u)$, $s=(y,v)$.

Пример 2.17. Автоматы A и B заданы автоматными таблицами:

A

$q\backslash x$	x_1	x_2
q_1	q_2,y_1	q_1,y_2
q_2	q_3,y_2	-
q_3	-	q_3,y_1

B

$w\backslash u$		
w_1	w_1,v_2	-
w_2	w_1,v_1	w_2,v_1

Найдем произведение этих автоматов, т.е. автомат $K=A\times B$.

Входной алфавит автомата K – это упорядоченные пары входных букв автоматов A и B: обозначим их $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$,

где $z_1=(x_1,u_1)$, $z_2=(x_1,u_2)$, $z_3=(x_2,u_1)$, $z_4=(x_2,u_2)$.

Выходной алфавит автомата K обозначим через $\mathrm{S}=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$, где $s_1=(y_1,v_1)$, $s_2=(y_1,v_2)$, $s_3=(y_2,v_1)$, $s_4=(y_2,v_2)$.

Алфавит состояний автомата K – это $H=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$,

где $h_1=(q_1,u_1)$, $h_2=(q_1,u_2)$, $h_3=(q_2,u_1)$, $h_4=(q_2,u_2)$, $h_5=(q_3,u_1)$, $h_6=(q_3,u_2)$.

Найдем отображение Rh_1 по входной букве z_1. Состояние h_1 – это пара (q_1,w_1), а входная буква z_1 – это пара (x_1,u_1). Автомат A из состояния q_1 по входной букве x_1 согласно автоматной таблице перейдет в состояние q_2, а автомат B из состояния w_1 по входной букве u_1 перейдет в состояние w_1. Эта пара (q_2,w_1) согласно обозначениям есть состояние

h_3 автомата *K*. На выходах автоматов *A* и *B* появятся при этом буквы y_1 и v_2 соответственно. Пара (y_1, v_2) – это буква s_2 выходного алфавита автомата *K*. Аналогично находим отображение Rh_1 по входной букве z_3. Отображение состояния w_1 автомата *B* по входной букве u_2 не определено, поэтому также не определено отображение состояния h_1 автомата *K* по входным буквам z_2 и z_4. Таким образом, получаем $Rh_1 = \{h_3(z_1, s_2), h_1(z_3, s_4)\}$.

Далее проделываем то же самое для состояний h_2, h_3, h_4, h_5, h_6. Соответствующие отображения этих состояний имеют вид

$$Rh_2 = \{h_3(z_1, s_1), h_4(z_2, s_1), h_1(z_3, s_3), h_2(z_4, s_3)\};$$

$$Rh_3 = \{h_5(z_1, s_4)\};$$

$$Rh_4 = \{h_5(z_1, s_3), h_6(z_2, s_3)\};$$

$$Rh_5 = \{h_5(z_3, s_2)\};$$

$$Rh_6 = \{h_5(z_3, s_1), h_6(z_4, s_1)\}.$$

По полученным отображениям можно составить автоматную таблицу:

K

$h \backslash z$	z_1	z_2	z_3	z_4
h_1	h_3, s_2	-	h_1, s_4	-
h_2	h_3, s_1	h_4, s_1	h_1, s_3	h_2, s_3
h_3	h_5, s_4	-	-	-
h_4	h_5, s_3	h_6, s_3	-	-
h_5	-	-	h_5, s_2	-
h_6	-	-	h_5, s_1	h_6, s_1

и матрицу соединений $\mathbf{R}_K$:

$\mathbf{R}_K$

$h \backslash h$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_1	z_3, s_4	0	z_1, s_2	0	0	0
h_2	z_3, s_4	z_4, s_3	z_1, s_1	z_2, s_1	0	0
h_3	0	0	0	0	z_1, s_4	0
h_4	0	0	0	0	z_1, s_3	z_2, s_3
h_5	0	0	0	0	z_3, s_2	0
h_6	0	0	0	0	z_3, s_1	z_4, s_1

Эту же матрицу соединений можно получить и из матриц соединений автоматов A и B. Для этого по автоматным таблицам составим матрицы соединений автоматов A и B – $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$:

$\mathbf{R}_A$

	q_1	q_2	q_3
q_1	x_2, y_2	x_1, y_1	0
q_2	0	0	x_1, y_2
q_3	0	0	x_2, y_1

$\mathbf{R}_B$

	w_1	w_2
w_1	u_1, v_2	0
w_2	u_2, v_1	u_1, v_1

Проведем прямое умножение этих матриц, т.е. каждый элемент одной матрицы умножается на каждый элемент другой матрицы (декартово произведение). В результате получим матрицу соединений автомата K (ввиду большого объема приведен только фрагмент матрицы):

$\mathbf{R}_K$

	(q_1, w_1)	(q_1, w_2)	(q_2, w_1)	(q_2, w_2)
(q_1, w_1)	$(x_2, u_1), (y_2, v_2)$	0	$(x_1, u_1), (y_1, v_2)$	0
(q_1, w_2)	$(x_2, u_2), (y_2, v_1)$	$(x_2, u_1), (y_2, v_1)$	$(x_1, u_2), (y_1, v_1)$	$(x_1, u_1), (y_1, v_1)$
(q_2, w_1)	0	0	0	0
(q_2, w_2)	0	0	0	0

После переобозначений матрица принимает уже знакомый вид.

Автомат $K=A\times B$ соответствует параллельной одновременной работе автоматов A и B (рис. 2.15), причем Z и S определяются по формулам. (2.4.13) и (2.4.15).

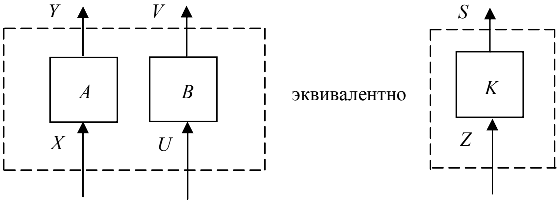


Рис. 2.15. Произведение двух автоматов с раздельными входами

Обозначим отображения, индуцируемые автоматами A и B через S_A и S_B соответственно, а отображение, индуцируемое автоматом $K=A\times B$, через S_K, и пусть $\mathbf{x}\in X^*$ и $\mathbf{u}\in U^*$ – слова в соответствующих алфавитах, имеющие равную длину:

$$\mathbf{x}=x_{i1}x_{i2}\ \dots\ x_{ik},\ \ \mathbf{u}=u_{j1}u_{j2}\ \dots\ u_{jk}$$
$$\text{и } S_A(\mathbf{x})=y_{i1}y_{i2\dots}y_{ik},\ \ S_B(\mathbf{u})=v_{j1}v_{j2}\dots v_{jk}.$$

Слово $\mathbf{z}\in Z^*$ является декартовым (прямым) произведением слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ и обозначается $\mathbf{z}=\mathbf{x}\times\mathbf{u}$, если каждая буква слова $\mathbf{z}$ есть пара, образованная соответствующими буквами слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Поэтому $\mathbf{z}=(x_{i1},\ u_{j1})(x_{i2},\ u_{j2})\dots(x_{ik},u_{jk})$, и $S_K(\mathbf{z})=(y_{i1},v_{j1})(y_{i2},v_{j2})\dots(y_{ik},\ v_{jk})$.

Если областью определения частичного отображения S_A является множество допустимых слов $\mathbf{x}\in X^*$, а областью определения частичного отображения S_B – множество допустимых слов $\mathbf{u}\in U^*$, то областью определения частичного отображения S_K будет множество таких слов $\mathbf{z}\in Z^*$, которые построены из допустимых слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ и имеют одинаковую длину. Таким образом, можно записать

$$S_K(\mathbf{z})=S_K(\mathbf{x}\times\mathbf{u})=S_A(\mathbf{x})\times S_B(\mathbf{u})=\mathbf{y}\times\mathbf{v}=\mathbf{s},$$

где $\mathbf{y}\in Y^*$, $\mathbf{v}\in V^*$, $\mathbf{s}\in S^*$.

Отображение S_K называется *произведением отображений* S_A и S_B:

$$S_K = S_A \times S_B.$$

Рассмотрим вторую операцию умножения, применяемую к автоматам с одним и тем же входным алфавитом. Возьмем два произвольных непустых автомата Мили: $A=(X,Q,Y,q_1 \in Q,F(x \in X/y \in Y))$ и $B=(X,W,U,w_1 \in W,P(x \in X/u \in U))$. Автомат $K=(X,V,S,v_1 \in V,R(x \in X/s \in S))$ называется произведением автоматов A и B: $K=A \otimes B$, если:

$$V=Q \times W; \qquad (2.4.17)$$

$$S=Y \times U; \qquad (2.4.18)$$

$$Rv = \bigcup_{x \in X} (F_x q \times P_x w)\,, \qquad (2.4.19)$$

где $v \in V$, $q \in Q$, $w \in W$, $v=(q,w)$, а $F_x q$ и $P_x w$ – отображения состояний q и w соответственно по букве входного алфавита $x \in X$.

Вопрос о полной или частичной определенности произведения $\otimes$ решается так же, как и в случае произведения $\times$.

Возьмем теперь матрицы соединений автоматов A и B и представим их объединением матриц автономных автоматов по входным буквам:

$$\mathbf{R}_A = \bigcup_{x \in X} \mathbf{R}_{Ax} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}_B = \bigcup_{x \in X} \mathbf{R}_{Bx}\,.$$

Тогда матрица соединений R_K автомата $K=A \otimes B$ будет равна

$$\mathbf{R}_K = \bigcup_{x \in X} (\mathbf{R}_{Ax} \times \mathbf{R}_{Bx})\,,$$

т.е. объединению прямых произведений матриц автономных автоматов.

Пример 2.18. Найдем произведение двух автоматов с общим входом:

A

$q \backslash x$	x_1	x_2
q_1	q_1, y_2	q_2, y_1
q_2	q_1, y_1	-

B

$w \backslash x$	x_1	x_2
w_1	-	w_1, u_2
w_2	w_1, u_1	w_2, u_1

Автомат $K = A \otimes B$ будет иметь алфавит состояний $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и выходной алфавит $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, где $v_1 = (q_1, w_1)$, $v_2 = (q_1, w_2)$, $v_3 = (q_2, w_1)$, $v_4 = (q_2, w_2)$, $s_1 = (y_1, u_1)$, $s_2 = (y_1, u_2)$, $s_3 = (y_2, u_1)$, $s_4 = (y_2, u_2)$.

Декартово произведение отображений состояний автоматов *A* и *B* по входной букве x_1 будет

	x_1
(q_1, w_1)	-
(q_1, w_2)	$(q_1, w_1), (y_2, u_1)$
(q_2, w_1)	-
(q_2, w_2)	$(q_1, w_1), (y_1, u_1)$

То же самое по входной букве x_2:

	x_2
(q_1, w_1)	$(q_2, w_1), (y_1, u_2)$
(q_1, w_2)	$(q_2, w_2), (y_1, u_1)$
(q_2, w_1)	-
(q_2, w_2)	-

Объединение этих таблиц с учетом введенных обозначений даст таблицу автомата *K*:

K

	x_1	x_2
v_1	-	(v_3, s_2)
v_2	(v_1, s_3)	(v_4, s_1)
v_3	-	-
v_4	(v_1, s_1)	-

Автомат $K=A\otimes B$ соответствует параллельной одновременной работе автоматов *A* и *B* (рис. 2.16).

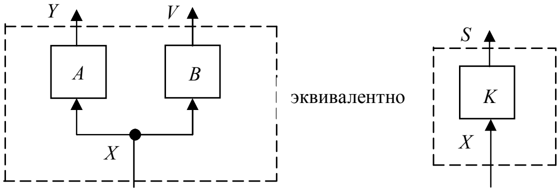


Рис. 2.16. Произведение двух автоматов с общим входом

Операцию умножения автоматов × и ⊗ можно обобщить и на случай n автоматов, а также использовать для нахождения произведений автоматов Мура.

Суммой двух произвольных автоматов $A=(X,Q,Y,q_1\in Q,F(x\in X/y\in Y))$ и $B=(U,W,V,w_1\in W,P(u\in U/v\in V))$ будет называться автомат $M=(Z,H,S,h\in H,$ $R(z\in Z/s\in S))$ ($M=A+B$), если

$$Z=\{1\}\times X\cup\{2\}\times U; \quad (2.4.20)$$

$$H=Q\times W; \quad (2.4.21)$$

$$S=\{1\}\times Y\cup\{2\}\times V; \quad (2.4.22)$$

$$Rh=Fq\times\{w\}\cup\{q\}\times Pw, \quad (2.4.23)$$

где $q\in Q$, $w\in W$, $h\in H$, $h=(q,w)$. Начальным состоянием автомата M будет $h_1=(q_1,w_1)$.

Формулы (2.4.20) и (2.4.22) используются для того, чтобы различать, возможно, одинаковые буквы входных алфавитов X и U и выходных алфавитов Y и V. Если таких совпадающих букв нет, т.е.

$$X\cap U=\varnothing,$$

$$Y\cap V=\varnothing,$$

то вместо формул (4.4.20) и (4.4.22) используют выражения

$$Z=X\cup U; \quad (2.4.24)$$

$$S=Y\cup V. \quad (2.4.25)$$

Пример 2.19. Заданы два автомата A и B:

A

	x_1	x_2
q_1	q_2, y_1	q_3, y_2
q_2	q_3, y_2	-
q_3	-	q_2, y_1

B

	u_1	u_2
w_1	w_2, v_2	-
w_2	w_2, v_1	w_1, v_1

Найдем сумму M=A+B. Поскольку ни входные, ни выходные алфавиты автоматов A и B не пересекаются, для определения входного и выходного алфавитов автомата M пользуемся формулами (2.4.24) и (2.4.25). Поэтому $Z=\{x_1,x_2,u_1,u_2\}$ и $S=\{y_1,y_2,v_1,v_2\}$. Алфавит состояний, как и в случае операции произведения, будет $H=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$, где $h_1=(q_1,w_1)$, $h_2=(q_1,w_2)$, $h_3=(q_2,w_1)$, $h_4=(q_2,w_2)$, $h_5=(q_3,w_1)$, $h_6=(q_3,w_2)$.

Найдем отображение Rh_1 по входной букве x_1, т.е. функцию перехода $\delta_M(h_1,x_1)$. Поскольку состояние h_1 есть пара (q_1,w_1), а входная буква принадлежит алфавиту X автомата A, то в формуле (2.4.23) останется только первый член объединения, и $\delta_M(q_1,x_1)=(q_2,w_1)=h_3$. Функция выхода будет равна $\lambda_M(q_1,x_1)=y_1$.

Отображение Rh_1 по входной букве x_2 (функция перехода $\delta_M(h_1,x_2)$) будет равно $\delta_M(q_1,x_2)=(q_3,w_1)=h_5$, а функция выхода – $\lambda_M(q_1,x_2)=y_2$.

Отображение Rh_1 по входной букве u_1 (функция $\delta_M(h_1,u_1)$) будет представлено только вторым членом объединения в формуле (2.4.23), т.е. $\delta_M(q_1,u_1)=(q_1,w_2)=h_2$, а функция выхода будет равна $\lambda_M(q_1,u_1)=v_2$.

Функции перехода и выхода автомата B по входной букве u_2 не определены, поэтому не определено, конечно, и отображение Rh_1 по букве u_2.

Окончательно будет

$$Rh_1=\{h_3(x_1,y_1),h_5(x_2,y_2),h_2(u_1,v_2)\}.$$

Аналогичным образом определяем и отображения оставшихся состояний:

$$Rh_2=\{h_4(x_1,y_1),h_6(x_2,y_2),h_2(u_1,v_1),h_1(u_2,v_1)\};$$

$$Rh_3=\{h_5(x_1,y_2),h_4(u_1,v_2)\};$$

$$Rh_4 = \{h_6(x_1, y_2), h_4(u_1, v_1), h_3(u_2, v_1)\};$$
$$Rh_5 = \{h_3(x_2, y_1), h_6(u_1, v_1)\};$$
$$Rh_6 = \{h_4(x_2, y_1), h_6(u_1, v_1), h_5(u_2, v_1)\}.$$

По полученным отображениям составляем автоматную таблицу и матрицу соединений $\mathbf{R}_M$:

M

	x_1	x_2	u_1	u_2
h_1	h_3, y_1	h_5, y_2	h_2, v_2	-
h_2	h_4, y_1	h_6, y_2	h_2, v_1	h_1, v_1
h_3	h_5, y_2	-	h_4, v_2	-
h_4	h_6, y_2	-	h_4, v_1	h_3, v_1
h_5	-	h_3, y_1	h_6, v_1	-
h_6	-	h_4, y_1	h_6, v_1	h_5, v_1

$\mathbf{R}_M$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_1	0	u_1, v_2	x_1, y_1	0	x_2, y_2	0
h_2	u_2, v_1	u_1, v_1	0	x_1, y_1	0	x_2, y_2
h_3	0	0	0	u_1, v_2	x_1, y_2	0
h_4	0	0	u_2, v_1	u_1, v_1	0	x_1, y_2
h_5	0	0	x_2, y_1	0	0	u_1, v_1
h_6	0	0	0	x_2, y_1	u_2, v_1	u_1, v_1

Операцию суммирования и соответствующие формулы (2.4.20) – (2.4.25) легко обобщить на случай *n* автоматов и можно использовать для автоматов Мура.

Матрица соединений $\mathbf{R}_M$ автомата $M=A+B$ определяется по формуле

$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_A \times \mathbf{E}_B \cup \mathbf{E}_A \times \mathbf{R}_B$,

где $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ – единичные матрицы порядков $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ соответственно.

Автомат $M=A+B$ соответствует параллельной неодновременной работе двух автоматов *A* и *B* (рис. 2.17).

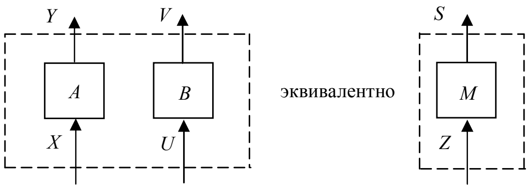


Рис. 2.17. Сумма двух автоматов

Любое входное слово в алфавите Z автомата M образуется чередованием букв x и u, принадлежащих алфавитам X и U. Аналогично и выходное слово автомата M – это последовательность чередующихся букв $y \in Y$ и $v \in V$. Если в очередной момент времени t на вход автомата M поступит буква $x \in X$, то в момент времени t+1 на входе обязательно появится буква $u \in U$. Выходная буква в момент времени t является буквой алфавита Y, а в момент времени t+1 – буквой из алфавита V. На уровне автоматов A и B это означает, что в момент времени t на входе автомата A имеется буква $x \in X$, а на входе автомата B в это же время – пустая букве e. В следующий t+1-й момент времени на вход автомата B поступает буква $u \in U$, а на вход автомата A – пустая буква e.

Пусть $\mathbf{x} \in X^*$ и $\mathbf{u} \in U^*$ – слова, отличающиеся длиной не более чем на одну букву:

$$\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\ , \quad \mathbf{u} = u_{j_1} u_{j_2} \ldots u_{j_{k-1}}\ .$$

Слово $\mathbf{z} \in Z^*$ называется *сплетением* слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, обозначается $\mathbf{z}=\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{u}$ и образуется чередованием букв $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{u} = x_{i_1} u_{j_1} x_{i_2} u_{j_2} \ldots u_{j_{k-1}} x_{j_k}\ .$$

Любые две соседние буквы слова $\mathbf{z}$ принадлежат разным входным алфавитам.

Если областью определения частичного отображения S_A служит множество допустимых слов $\mathbf{x} \in X^*$, а областью определения отображения S_B – множество допустимых слов $\mathbf{u} \in U^*$, то областью частичного отображения S_M будет множество слов $\mathbf{z}\in Z^*$, полученных сплетением пар допустимых слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, отличающихся длиной не более чем на одну букву. Следовательно, можно записать

$$S_M(\mathbf{z})=S_M(\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{u})=S_A(\mathbf{x})\rangle\langle S_B(\mathbf{u})=\mathbf{y}\rangle\langle\mathbf{v}=\mathbf{s},$$

где $\mathbf{y}\in Y^*$, $\mathbf{v}\in V^*$, $\mathbf{s}\in S^*$.

Отображение S_M называется *сплетением отображений* S_A и S_B и обозначается $S_M = S_A\rangle\langle S_B$.

Для произвольных автоматов A, B, и C выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}(A\times B)\times C=A\times(B\times C),\\ A\times B \sim B\times A,\\ A\times E \sim E\times A \sim A,\end{gathered} \qquad (2.4.26)$$

где роль единичного автомата E играет автомат $E=(X,Q,Y,q\in Q,F(x\in X/y\in Y))$, причем $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$, $Q=\{q\}$, а $Fq=\{q(x/y)\}$.

Поэтому множество произвольных автоматов совместно с операцией умножения $\times$ образует коммутативный моноид[1] с единичным элементом E. Обозначим это множество через $B_\times$.

Если брать множество автоматов с одним и тем же входным алфавитом, то очевидно, что для любых автоматов A, B, и C из этого множества выполняются соотношения, аналогичные (4.4.26), и, следовательно, это множество по операции $\otimes$ образует коммутативный моноид с единичным элементом

$$E=(X,Q,Y,q\in Q,F(X\in X/y\in Y)),$$

где $X=\{x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\mathrm{p}\}$ – входной алфавит автоматов этого множества, $Q=\{q\}$, $Y=\{y\}$, $Fq=\{q(x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_p/y)\}$. Это будет множество $B_\otimes$.

Аналогично множество произвольных автоматов по операции суммирования образуют коммутативную полугруппу (несущее множество B_+).

Следующая алгебраическая операция – суперпозиция двух автоматов. Возьмем два произвольных автомата из множества автоматов Мили, входящие и выходящие алфавиты которых могут пересекаться: $A=(X_1,Q,Y_1,$

---

[1] Моноидом в общей алгебре называют полугруппу с единицей E. Полугруппа, в свою очередь, – это множество элементов с заданной на этом множестве бинарной ассоциативной операцией, обычно называемой умножением. Таким образом, для любого элемента A моноида выполняется соотношение $E{\cdot}A=A{\cdot}E=A$.

$q_1 \in Q,\ F(x \in X/y \in Y_1))$ и $B=(X_2,W,Y_2,\ w_1 \in W,\ P(x \in X_2/y \in Y_2))$, где пересечение $Y_1 \cap X_2 = Z$ не пусто в общем случае.

Отображение произвольного состояния $q \in Q$ автомата A можно представить в следующем виде:

$$Fq = F_{y_1} q \cup F_{y_2} q \cup \ldots \cup F_{y_p} q = \bigcup_{y \in Y_1} F_y q ,$$

где p – число букв входного алфавита Y_1, а $F_y\, q$ – отображение состояния q, при котором на выходе появляется буква $y \in Y_1$.

Отображение произвольного состояния w автомата B представим в виде

$$Pw = P_{x_1} w_k \cup P_{x_2} w \cup \ldots \cup P_{x_s} w = \bigcup_{x \in X_2} P_x w ,$$

где s – число букв входного алфавита X_2, а $P_x w$ – отображение состояния w по букве $x \in X_2$.

Автомат $N=(X_1,H,Y_2,\ h_1 \in H,\ S(x \in X_1/y \in Y_2))$ будет являться суперпозицией автоматов A и B ($N=A*B$), если множество состояний

$$H=Q \times W, \tag{2.4.27}$$

а отображение S задано выражением

$$Sh = (F_{z_1} q \times P_{z_1} w) \cup (F_{z_2} q \times P_{z_2} w) \cup \ldots \cup (F_{z_m} q \times P_{z_m} w) = \bigcup_{z \in Z_1} (F_z q \times P_z w) ,$$

где $h \in H,\ q \in Q,\ w \in W,\ h=(q, w),\ z \in Z = Y_1 \cap X_2$ (m – число букв алфавита Z).

Пример 2.20. Даны два автомата A и B:

A

	x_1	x_2
q_1	q_2, y_1	q_3, y_2
q_2	q_3, y_2	-
q_2	-	q_2, y_1

B

	y_1	y_2
w_1	w_2, v_2	-
w_2	w_2, v_1	w_1, v_1

Найдем суперпозицию $N = A * B$. Входной алфавит автомата N совпадает со входным алфавитом автомата A: $X = \{x_1, x_2\}$, а выходной алфавит – с выходным алфавитом автомата B: $V = \{v_1, v_2\}$. Алфавит состояний, как и во всех алгебраических операциях, – это $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, где $h_1 = (q_1, w_1)$, $h_2 = (q_1, w_2)$, $h_3 = (q_2, w_1)$, $h_4 = (q_2, w_2)$, $h_5 = (q_3, w_1)$, $h_6 = (q_3, w_2)$.

Возьмем состояние h_1 автомата N. Оно соответствует состоянию q_1 автомата A и состоянию w_1 автомата B. По входной букве x_1 автомат A перейдет из состояния q_1 в состояние q_2 с выходом y_1, и по этой же букве y_1 автомат B перейдет из состояния w_1 в состояние w_2 с выходом v_2. Поэтому пара (q_2,w_2) есть значение функции перехода автомата N: $\delta_N(h_1, x_1) = (q_2, w_2) = h_4$, а v_2 есть значение функции выхода автомата N: $\lambda_N(h_1, x_1) = v_2$. По входной букве x_2 автомат A переходит из состояния q_1 в состояние q_3 с выходом y_2, но отображение состояния w_1 автомата B по этой букве (y_2) не определено, поэтому не определено и отображение состояния h_1 автомата N по входной букве x_2. Таким образом, получаем

$$Sh_1 = \{h_4(x_1, v_2)\}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим отображения остальных состояний:

$$Sh_2 = \{h_4(x_1, v_1), h_5(x_2, v_1)\},\ Sh_3 = \varnothing,\ Sh_4 = \{h_5(x_1, v_1)\},$$
$$Sh_5 = \{h_4(x_2, v_2)\},\ Sh_6 = \{h_4(x_2, v_1)\}.$$

Автоматная таблица, составленная по этим отображениям, приведена ниже:

	x_1	x_2
h_1	h_4,v_2	-
h_2	h_4,v_1	h_5,v_1
h_3	-	-
h_4	h_5,v_1	-
h_5	-	h_4,v_2
h_6	-	h_4,v_1

Суперпозицию автоматов можно представить и через разложение исходных автоматов на автономные. Представим автомат A объединением автономных автоматов по выходной букве:

$$A = \bigcup_{y \in Y_1} A_y ,$$

а автомат B объединением автономных автоматов по входной букве:

$$B = \bigcup_{x \in X_2} B_x .$$

Тогда автомат N=A∗B будет задан выражением

$$N = (A_{z_1} \times B_{z_1}) \cup (A_{z_2} \times B_{z_2}) \cup ... \cup (A_{z_n} \times B_{z_n}) = \bigcup_{z \in Z_1} (A_z \times B_z) , \qquad (2.4.29)$$

где Z=$Y_1 \cap X_2$.

Из последнего выражения следует, что операция суперпозиции автоматов соответствует *композиции* соответствующих *отображений*, если Y_1=X_2, т. е.

$$\mathrm{S_N}(\mathbf{x})=\mathrm{S_B}(\mathbf{y})=\mathrm{S_B}(\mathrm{S_A}(\mathbf{x})), \text{ или } S_N = S_A \circ S_B ,$$

где $\mathbf{x} \in X_1$, $\mathbf{y} \in Y_1$.

Если же $Y_1 \neq X_2$ и $Y_1 \cap X_2 = Z$, то получим композицию сужений отображений S_A и S_B на множество Z. Операция суперпозиции автоматов ассоциативна, но, конечно же, некоммутативна, так же как и композиция отображений. Поэтому множество автоматов по операции суперпозиции образует некоммутативную полугруппу B_*.

Теперь запишем операцию суперпозиции в матричной форме.

Разложим матрицу соединений $\mathbf{R}_A$ автомата A по автономным матрицам выходного алфавита:

$$\mathbf{R}_A = \bigcup_{y \in Y_1} \mathbf{R}_{Ay} ,$$

и из каждой автономной матрицы исключим ту букву, по которой выделена эта матрица.

Матрицу автомата B представим объединением матриц автономных автоматов входного алфавита:

$$\mathbf{R}_B = \bigcup_{x \in X_2} \mathbf{R}_{Bx} ,$$

также исключая из каждой автономной матрицы ту букву, по которой данная матрица выделена.

Тогда матрица соединений $\mathbf{R}_N$ автомата N=A∗B при условии, что $Y_1 \cap X_2 = Z \neq \varnothing$, определиться формулой

$$\mathbf{R}_N = \bigcup_{z \in Z} (\mathbf{R}_{A_z} \times \mathbf{R}_{B_z}) .$$

Введем понятие единичного и обратного автоматов на множестве произвольных автоматов. Под единичным автоматом E понимается такой автомат, который любое слово входного алфавита преобразует в такое же входное слово. Такой автомат индуцирует тождественное отображение на множестве слов X* алфавита X. Ясно, что это автомат с единственным состоянием, матрица соединений которого имеет вид

$$\mathbf{R}_E = \left\| x_1 / x_1 \cup x_2 / x_2 \cup ... \cup x_n / x_n \right\| .$$

Из определения единичного автомата E следует, что такой автомат является правой и левой единицей в полугруппе B_*

$$A * E \sim E * A \sim A .$$

Обратным автоматом A^{-1} к автомату A, индуцирующему отображение $S_A(\mathbf{x})$ множество слов $\mathbf{x} \in X^*$ на множество выходных слов $\mathbf{y} \in Y^*$, называется такой автомат, который индуцирует обратное отображение $S_A^{-1}(\mathbf{y})$. Очевидно, что обратный автомат существует только тогда, когда отображение S_A является биективным (взаимно-однозначным) отображением. В этом случае в любой строке его матрицы соединений не может быть двух пар “вход-выход”, имеющих одинаковые выходные буквы. Поэтому для построения матрицы соединений обратного автомата достаточно в матрице соединений автомата A в каждой паре “вход-выход” поменять местами элементы этой пары.

Таким образом, подмножество автоматов $D_* \subset B_*$, индуцирующих взаимно-однозначное отображение, по операции суперпозиции образует некоммутативную группу[1] D_*.

Операции суперпозиции двух автоматов соответствует последовательная их работа (рис. 2.18).

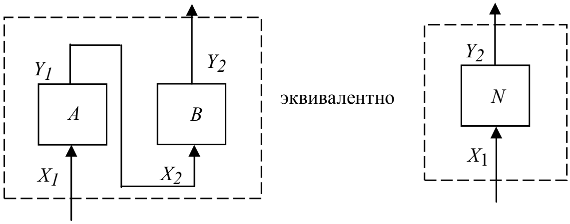


Рис. 2.18. Суперпозиция двух автоматов

Наиболее общий случай совместной работы автоматов задается операцией *композиции,* а различные типы их соединений и виды работы, которые соответствуют введенным ранее операциям, являются частными случаями композиции автоматов.

Зададим произвольные автоматы $A=(X,V,L,\ v_1 \in V,\ F(x \in X,\ t \in T/l \in L))$ и $B=(Y,W,T,\ w_1 \in W,\ P(y \in Y, l \in L/t \in T))$. Входной алфавит автомата A – это X, V – алфавит состояний, L – выходной алфавит, F – отображение множества состояний V в себя по буквам входного алфавита $x \in X$ и выходного алфавита $t \in T$ автомата B, при котором на выходе автомата A появляется выходная буква $l \in L$. Аналогично для автомата B.

Представим отображение F и P в виде объединения соответствующих выражений по буквам алфавитов T и L:

$$Fv = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{l \in L} F_{t/l} v\,,$$

$$Pw = \bigcup_{l \in L} \bigcup_{t \in T} P_{l/t} w\,.$$

[1] Группой в общей алгебре называется полугруппа с единицей (моноид), для каждого элемента A которой существует обратный элемент A^{-1}, так, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Автомат C=(Z,Q,M, $q_1 \in Q$, $K(z \in Z/m \in M)$) будет называться композицией автоматов A и B $(C = A \circ B)$, если

$$Z = X \times Y; \tag{2.4.30}$$

$$Q = V \times W; \tag{2.4.31}$$

$$M = L \times T; \tag{2.4.32}$$

$$Kq = \bigcup_{\substack{l \in L \\ t \in T}} (F_{t/l} v \times P_{l/t} w), \tag{2.4.33}$$

где $q=(v,w)$, $q \in Q$, $v \in V$, $w \in W$, а $F_{t/l}v$ – отображение состояния v по букве $t \in T$, при котором на выходе появляется буква $l \in L$, $P_{l/t}w$ – отображение состояния w по букве $l \in L$, при котором на выходе появляется буква $t \in T$.

Композиции автоматов эквивалентна совместная работа автоматов, приведенная на рис. 2.19.

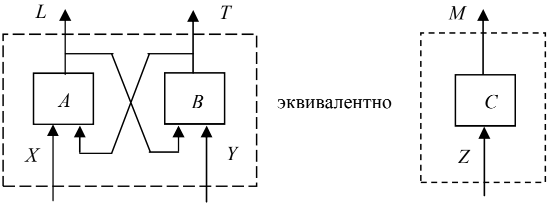


Рис. 2.19. Композиция двух автоматов

Автомат A можно разложить на автономные автоматы по входным буквам $t \in T$:

$$A = \bigcup_{t \in T} A_t ,$$

а каждый автономный автомат A_t, свою очередь, – по буквам $l \in L$:

$$A_t = \bigcup_{l \in L} A_{t/l} .$$

Таким образом:

$$A = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} A_{t/l} . \tag{2.4.34}$$

Аналогично и автомат B:

$$B = \bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} B_{l/t}\ . \qquad (2.4.35)$$

Из формул (2.4.30) – (2.4.35) следует, что автомат $C = A \circ B$ можно найти по формулам

$$C = \bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} A_{t/l} \times B_{l/t}\ . \qquad (2.4.36)$$

Из последнего выражения легко получить операцию композиции в матричной форме. Возьмем матрицу соединений автомата A с элементами:

$$r_{\alpha\beta}\left(xt/l\right) = \begin{cases} x/l, \text{ если } v_\beta \in F_{v_\alpha} \text{ по буквам } x \in X,\ t \in T \text{ с выходом } l \in L, \\ 0, \text{ если } v_\beta \notin F_{v_\alpha},\ \alpha,\beta = \{1,2,...k\}, \end{cases}$$

где k – число состояний автомата A, и матрицу соединений автомата B:

$$r_{\gamma\delta}\left(yl/t\right) = \begin{cases} yl/t, \text{ если } w_\delta \in P_{w_\gamma} \text{ по буквам } y \in Y,\ l \in L \text{ с выходом } t \in T, \\ 0, \text{ если } w_\delta \notin P_{w_\gamma},\ \gamma,\delta = \{1,2,...n\}, \end{cases}$$

где n – число состояний автомата B.

Тогда матрица соединений автомата $C = A \circ B$ будет равна:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_A \circ \mathbf{R}_B = \bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} \mathbf{R}_{A(t/l)} \times \mathbf{R}_{B(l/t)}\ ,$$

где $\mathbf{R}_{A(t/l)}$ – матрица соединений автономного подавтомата $A_{t/l}$ и буква $t\in T$, по которой выделен этот подавтомат, исключена из матрицы; $\mathbf{R}_{B(l/t)}$ – матрица соединений автономного подавтомата $B_{l/t}$, а буква $l\in L$ исключена.

В более общем случае автоматы A и B могут иметь и общий входной алфавит N: A=(N, X, V, L, $v_1\in V$, F($n\in N$, $x\in X$, $t\in T/l\in L$)), B=(N,Y,W,T, $w_1\in W$, P($n\in N$, $y\in N$, $l\in L/t\in T$)). Тогда композиция A и B определяется выражением

$$C = A \circ B = \bigcup_{n\in N} (A_n \circ B_n)\ ,$$

где A_n и B_n – автономные автоматы по буквам входного алфавита $n\in N$.

Учитывая (4.4.36) получим

$$C = \bigcup_{n\in N} (\bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} (A_{n(t/l)} \times B_{n(l/t)}))\ ,$$

то есть автомат C задан выражениями

$$Z=N\times X\times Y; \tag{2.4.37}$$

$$Q=V\times W; \tag{2.4.38}$$

$$M=L\times T; \tag{2.4.39}$$

$$Kq=\bigcup_{n\in N}\left(\bigcup_{\substack{t\in T\\ l\in L}}\left(F_{n(t/l)}v\times P_{n(l/t)}w\right)\right). \tag{2.4.40}$$

Используя соотношения (2.4.37) – (2.4.40), можно показать, что операция композиции ассоциативна и с точностью до изоморфизма коммутативна, и, следовательно, множество произвольных автоматов и заданная на этом множестве операция композиции образует коммутативную полугруппу $B_{\circ}$.

В частных случаях операция композиции соответствует рассмотренным ранее операциям умножения, суммирования, суперпозиции.

Например, пусть $A=(X,V,L,\ v_1\in V,\ F(x\in X/l\in L))$ и $B=(Y,W,T,\ w_1\in W,\ P(y\in Y/t\in T))$ – независимо работающие автоматы. Так как автоматы имеют различные входные алфавиты ($X\cap Y=\varnothing$), пользуемся формулами (2.4.30) – (2.4.33). Отображение F состояния $v\in V$ автомата A не зависит от выхода автомата B, а отображение P состояния $w\in W$ автомата B не зависит от выхода автомата A, поэтому

$$\bigcup_{\substack{l\in L\\ t\in T}}F_{t/l}v=Fv\,,\quad \bigcup_{\substack{l\in L\\ t\in T}}P_{l/t}w=Pw\,.$$

Окончательно автомат $C=(Z,Q,M,\ q_1\in Q,\ K(z\in Z/m\in M))$ определяется по формулам

$$Z=X\times Y,\ Q=V\times W,\ M=L\times T,\ Kq=Fv\times Pw,$$

которые совпадают с формулами (2.4.13) – (2.4.16) и, следовательно, задают операцию умножения $\times$.

Нетрудно для частных случаев перейти от композиции и к другим алгебраическим операциям: умножению автоматов с общим выходом, суперпозиции и суммированию.

2.4.3. Операции над вероятностными автоматами

Автоматы, которые до сих пор рассматривались, можно отнести к неслучайным или детерминированным автоматам в том смысле, что состояния таких автоматов в текущий момент времени однозначно определялось состоянием в предшествующий момент времени и буквами входного и выходного алфавитов в текущий момент времени. Наряду с такими автоматами естественно было бы рассматривать вероятностные автоматы, в которых переход из состояния в состояние носил бы стохастический или вероятностный характер. В реальных ситуациях это возможно из-за сбоев электронных схем при различного рода помехах.

Для простоты изложения рассмотрим вероятностные автоматы без выходов.

Вероятностный автомат считается заданным, если определена совокупность объектов:

$$A=(X,Q,\ q_1\in Q,\ \varphi(q,x)),$$

где $X=\{x_1, x_2, \dots x_m\}$ – как обычно, входной алфавит, $Q=\{q_1, q_2, \dots q_n\}$ – алфавит состояний, $q_1\in Q$ – начальное состояние автомата, $\varphi(q, x)$ – двуместная функция, задающая отображение множества $Q\times X$ в множество матриц $\mathbf{P}=\{\mathbf{P}_j\}$, $i=\{1, 2, \dots m\}$.

Эта функция $\varphi(q, x)$ называется таблицей переходных вероятностей. Для каждой пары (q, x) такой таблицы имеет место

$$\varphi(q,x)=\{p_1(q,x), p_2(q, x), \dots p_n(q,x)\}, \tag{2.4.41}$$

где $p_i(q, x)$ означает вероятность перехода в состояние q_i из состояния q по входной букве x и, следовательно, является неотрицательной величиной $p_i(q, x)\geq 0$ и удовлетворяет условию нормировки $\sum\limits_{i=(1,\dots n)} p_i(q,x)=1$.

Из записи (2.4.41) следует, что любая матрица $P_j\in P$ имеет вид $\mathbf{P}_j=\|p_{ik}(x)\|$ или, что то же самое, $\mathbf{P}_j=\|p_k(q_i, x)\|$, где $i, k\in\{1, 2, \dots n\}$. Все элементы p_{ik} каждой из матриц суть неотрицательные вещественные числа, не превосходящие единицы, и сумма элементов любой из строк равна единице. Предполагается также, что в автомате нет состояний, вероятности перехода в которые из всех других состояний равны нулю (т.е. нет столбцов, состоящих из одних нулей). Матрицы с такими свойствами называются стохастическими матрицами.

Если вероятностные автоматы рассматриваются в плане представления событий, то, как и для детерминированных автоматов, задается множество заключительных состояний $Q_z\subseteq Q$.

В вероятностном автомате можно вместо функции $\varphi(q, x)$ задать множество стохастических матриц $\mathbf{P}$. Тогда он будет записан в форме

$$A=(X,Q,q_1\in Q,\ \mathbf{P}).$$

Обычный недетерминированный автомат можно рассматривать как частный случай вероятностного автомата, в котором для любого фиксированного $i \in \{1, 2, \dots n\}$ только одна из вероятностей $p_{ik}(x)$ равна единице, а остальные равны нулю.

Нетрудно подсчитать вероятность перехода из некоторого состояния q_i в состояние q_k при поступлении на вход вероятностного автомата слова $\mathbf{x} \in X^*$. Действительно, пусть $\mathbf{x} = x_{j1} x_{j2} \dots x_{jl}$. Тогда вероятности перехода $p_{ik}(\mathbf{x})$ вычисляются умножением стохастических матриц $\mathbf{P}_{j1} \mathbf{P}_{j2} \dots \mathbf{P}_{jl}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{j1} \cdot \mathbf{P}_{j2} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_{jl} = \left\| p_{ik}(\mathbf{x}) \right\|,$$

где $i, k \in \{1, 2, \dots n\}$.

В последнем выражении применено обычное умножение (строка на столбец) матриц, которое допустимо, поскольку матрицы $\mathbf{P}_{ik}$ согласованы по форме (все они квадратные размерности $n \times n$).

Пример 2.21. Задан вероятностный автомат $A = (X, Q, q_1 \in Q, \mathbf{P})$, где

$$\mathbf{P}_{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем вероятность перехода автомата из состояния q_1 в состояние q_2 при поступлении на вход автомата слова $\mathbf{x} = x_1 x_1 x_2$. Последовательно перемножая матрицы $\mathbf{P}_{x_1}$, $\mathbf{P}_{x_1}$ и $\mathbf{P}_{x_2}$, получаем

$$\mathbf{P}_{x_1} \cdot \mathbf{P}_{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{x_1} \cdot \mathbf{P}_{x_1} \cdot \mathbf{P}_{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{48} & \frac{41}{48} \end{pmatrix}.$$

Искомая вероятность – это элемент первой строки и второго столбца последней матрицы, т.е. $\frac{7}{8}$.

Если $Q_z=\{q_\alpha\}$, $\alpha\in I'=\{1, 2, \ldots k\}$ – множество заключительных состояний, то вероятность $p(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\alpha\in I'} p_{1\alpha}(\mathbf{x})$ есть вероятность того, что автомат из начального состояния q_1 перейдет в одно из заключительных состояний $q\in Q_z$ при подаче на вход автомата слова $\mathbf{x}$.

Вероятностные автоматы можно задавать графами переходов, как и детерминированные автоматы, только нужно около каждого ребра, связывающего вершины q_i с q_j, ставить кроме буквы входного алфавита x еще и соответствующую вероятность перехода $p_{ij}(x)$. Понятно, что аналитический способ создания автоматов (2.4.41) и геометрическая интерпретация в виде графа неудобны и громоздки даже при небольшом числе букв входного алфавита, поэтому вероятностный автомат задают обычно системой стохастических матриц.

Используя такой способ задания вероятностных автоматов, можно ввести теоретико-множественные операции над ними по аналогии с операциями над детерминированными автоматами, но ограничения на стохастические матрицы, которые при этом нужно накладывать, делают класс автоматов, к которым применимы эти операции, довольно узким. Поэтому переходим сразу к алгебраическим операциям.

Зададим два вероятностных автомата $A=\left(X,Q,q_1\in Q,\mathbf{P}\right)$ и $B=\left(Y,V,v_1\in V,\mathbf{S}\right)$. Вероятностный автомат $C=\left(Z,W,w_1\in W,\mathbf{R}\right)$ будет являться произведением автоматов A и B ($C=A\times B$), если:

$$Z=X\times Y; \qquad (2.4.42)$$
$$W=Q\times V; \qquad (2.4.43)$$
$$\mathbf{R}=\mathbf{P}\times\mathbf{S}, \qquad (2.4.44)$$

где $w_1=(q_1, v_1)$. Формулы (2.4.42), (2.4.43) – это обычные декартовы произведения, а (2.4.44) – это декартово произведение, образуемое по правилу прямого произведения стохастических матриц из **P** и **S**.

Пример 2.22. Два вероятностных автомата $A=\left(X,Q,q_1\in Q,\mathbf{P}\right)$ и $B=\left(Y,V,v_1\in V,\mathbf{S}\right)$ заданы своими стохастическими матрицами:

$$\mathbf{P}_{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}_{y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \ \mathbf{S}_{y_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Найдем автомат $C = A \times B$. Входной алфавит Z и алфавит состояний W автомата C, согласно формулам (2.4.42), (2.4.43), будут равны

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \ W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\},$$

где $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_1, y_2)$, $z_3 = (x_2, y_1)$, $z_4 = (x_2, y_2)$, $w_1 = (q_1, v_1)$, $w_2 = (q_1, v_2)$, $w_3 = (q_2, v_1)$, $w_4 = (q_2, v_2)$.

Стохастические матрицы автомата C найдем по формуле (2.4.44) прямым произведением (элемент на элемент) соответствующих матриц автоматов A и B.

$$\mathbf{R}_{z_1} = \mathbf{P}_{x_1} \times \mathbf{S}_{y_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{z_2} = \mathbf{P}_{x_1} \times \mathbf{S}_{y_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{z_3} = \mathbf{P}_{x_2} \times \mathbf{S}_{y_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{z_4} = \mathbf{P}_{x_2} \times \mathbf{S}_{y_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Вероятностный автомат $D = (Z, W, w_1 \in W, \mathbf{R})$ является суммой автоматов A и B (D=A+B), если:

$$Z=(\{1\}\times X)\cup(\{2\}\times Y); \qquad (2.4.45)$$

$$W=Q\times Y; \qquad (2.4.46)$$

$$\mathbf{R}=(\mathbf{P}\times\mathbf{E}_B)\cup(\mathbf{E}_A\times\mathbf{S}), \qquad (2.4.47)$$

где $w_1=(q_1, v_1)$, а $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ – единичные матрицы, имеющие порядок матриц из P и S соответственно, причем произведения в круглых скобках выражения (2.4.47) являются прямыми произведениями. Попутно вспомним, что порядки стохастических матриц **P** и **S** (они, конечно, квадратные) равны соответствующим мощностям множеств Q и V.

Если входные алфавиты вероятностных автоматов A и B не пересекаются $X\cap Y=\varnothing$, то формулу (2.4.45) можно заменить на:

$$Z=X\cup Y. \qquad (2.4.48)$$

Пример 2.23. Найдем сумму автоматов A и B из примера 2.22.

Поскольку входные алфавиты автоматов A и B не пересекаются, то для определения входного алфавита автомата D=A+B пользуемся формулой (2.4.48): $Z=\{x_1,x_2,y_1,y_2\}$.

Далее по формуле (2.4.47) находим стохастические матрицы автомата D.

$$\mathbf{R}_{x_1}=\mathbf{P}_{x_1}\times\mathbf{E}_B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{x_2}=\mathbf{P}_{x_2}\times\mathbf{E}_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{y_1}=\mathbf{E}_A\times\mathbf{S}_{y_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{4}{5}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{y_2}=\mathbf{E}_A\times\mathbf{S}_{y_2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Операции умножения и суммирования легко обобщить на случай n автоматов.

Для задания операции суперпозиции будем полагать, что алфавит состояний первого автомата совпадает с входным алфавитом второго автомата, т.е. $A=\left(X,Q,q_1\in Q,\mathbf{P}\right)$ и $B=\left(Q,V,v_1\in V,\mathbf{S}\right)$, поскольку рассматриваются автоматы без выходов. Вероятностный автомат $C=(X,W,\ w_1\in W,$ $\mathbf{R})$ будет являться суперпозицией автоматов A и B ($C=A*B$), если

$$W=Q\times V; \tag{2.4.49}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=\bigcup_k(\mathbf{P}_{x_k}^{(q_1)}\times\mathbf{S}_{q_1})\cup(\mathbf{P}_{x_k}^{(q_2)}\times\mathbf{S}_{q_2})\cup\ldots\cup(\mathbf{P}_{x_k}^{(q_n)}\times\mathbf{S}_{q_n})=\\&=\bigcup_k\bigcup_i\mathbf{P}_{x_k}^{(q_i)}\times\mathbf{S}_{q_i},\end{aligned} \tag{2.4.50}$$

где $i\in\{1,\ 2,\ \ldots\ n\}$, $w_1=(q_1,\ v_1)$, а $\mathbf{P}_{x_k}^{(q_i)}$ – матрица, полученная из стохастической матрицы $\mathbf{P}_{x_k}$ заменой всех столбцов, отличных от q_i, нулевыми столбцами. По-прежнему в выражении (2.4.50) подразумевает прямое произведение соответствующих матриц.

Пример 2.24. Пусть даны автоматы $A=\left(X,Q,q_1\in Q,\mathbf{P}\right)$ и $B=\left(Q,V,v_1\in V,\mathbf{S}\right)$.

$$\mathbf{P}_{x_1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_{x_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix};\qquad \mathbf{S}_{q_1}=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix},\ \mathbf{S}_{q_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Найдем автомат $C = \left(X, W, w_1 \in W, \mathbf{R} \right)$, равный суперпозиции автоматов A и B ($C = A * B$). Согласно формуле (2.4.50), находим

$$\mathbf{R}_{x_1} = \mathbf{P}_{x_1}^{(q_1)} \times \mathbf{S}_{q_1} \cup \mathbf{P}_{x_1}^{(q_2)} \times \mathbf{S}_{q_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R}_{x_2} = \mathbf{P}_{x_2}^{(q_1)} \times \mathbf{S}_{q_1} \cup \mathbf{P}_{x_2}^{(q_2)} \times \mathbf{S}_{q_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

С содержательной точки зрения операции над вероятностными автоматами означают то же самое, что и над детерминированными автоматами.

2.5 Структурное исследование автоматов

Переходим теперь к внутреннему устройству автоматов и к задачам, связанным с их внутренним устройством, то есть к структурному уровнию. Здесь, как и на абстрактном уровне, главными задачами исследования являются анализ и синтез автоматов.

2.5.1. Комбинационные логические автоматы

Для дальнейшего изложения нужно дать несколько определений.

Автомат называется *комбинационным,* если для любого входного символа $x \in X$ и любых состояний $q_i, q_j \in Q$ выполняется равенство

$$\lambda(q_i, x) = \lambda(q_j, x),$$

то есть выход автомата не зависит от его состояния и определяется только его входом. В таком автомате все состояния эквиваленты и минимальный комбинационный автомат имеет *только одно состояние*. Функция переходов в нем вырождена, а поведение такого автомата задается функцией выходов с одним аргументом $\lambda(x_i)=y_i$.

Если входной алфавит автомата состоит из 2^m двоичных векторов длины m, а выходной – из 2^n двоичных векторов длины n, то такой автомат называется *логическим.* Понятно, что автомат с произвольными алфавитами можно свести к логическому автомату соответствующим *кодированием* его алфавитов. Таким образом, *комбинационный логический* автомат – это автомат, функция выхода которого – это система n логических функций от m переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1(x_1, x_2, \ldots x_m); \\ y_2 &= \lambda_2(x_1, x_2, \ldots x_m); \\ &\ldots \\ y_n &= \lambda_n(x_1, x_2, \ldots x_m), \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

где x_i – логическая переменная (i-я компонента вектора **x** длины m), а y_j – также логическая переменная (j-я компонента вектора **y** длины n).

Эту же систему уравнений (2.5.1) можно записать и в компактной форме **y**=Φ(**x**), где Φ – упорядоченная совокупность функций λ_i.

Логический комбинационный автомат можно представить рис. 2.20.

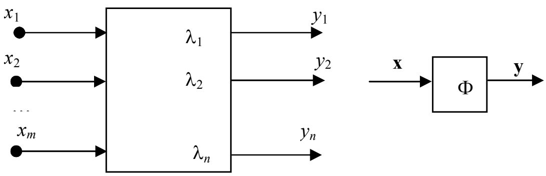


Рис. 2.20. Функциональная схема комбинационного автомата

Удобно рассматривать x_1, x_2, ... x_m как входные, а y_1, y_2, ... y_n – как выходные полюсы автомата. Считая, что каждый полюс может находиться в состоянии 0 или 1, приходим к выводу, что в комбинационном логическом автомате каждой комбинации состояний входных полюсов вполне однозначно соответствует комбинация состояний выходных полюсов. Отсюда и название – *комбинационный*. Система уравнений (2.5.1) и схема на рис. 2.20 – это *функциональная* модель автомата.

2.5.2. Постановка задач синтеза и анализа на структурном уровне

Структурная схема автомата, т. е. его структурная модель, показывает, как он устроен, из каких элементов состоит и как эти элементы соединены (связаны) между собой.

Структурная модель дискретного автомата отражает схему реальной дискретной системы, и элементы автомата ставятся в соответствие некоторым реальным конструктивным элементам.

Основное содержание теории автоматов на структурном уровне – это исследование соотношения между функциональной моделью и структурной моделью. И по-прежнему здесь возникают две задачи: задача анализа и задача синтеза. Задача анализа – это получение функциональной модели по заданной структурной. Синтез – обратная задача: нахождение структурной модели по заданной функциональной. Вторая задача значительно сложнее, так как ее решение не единственно и среди многих возможных решений требуется выбрать оптимальное (наилучшее) в каком - то смысле. Поскольку задача синтеза более трудная, то и большая часть сил и времени на структурном уровне тратится на решение именно этой задачи.

Исходная для синтеза информация задается следующим образом. Во-первых, описывается функциональная модель. Во-вторых, указывается из каких элементов нужно автомат синтезировать, то есть задается *элементный базис.* В-третьих, определяется *синтаксис структур*, то есть формулируются правила взаимных соединений элементов, выделяющие из всевозможных структур класс допустимых (или правильных). Синтаксис играет компенсирующую роль: заменяя реальные элементы абстрактными, мы допускаем некоторую идеализацию, которая, тем не менее, оказывается допустимой, пока синтезированные из данных элементов структуры являются правильными, т. е. удовлетворяющими синтаксису. Однако как только мы переходим к рассмотрению неправильных структур, может появиться нежелательный эффект идеализации, то есть поведение реального устройства может существенно отклониться от поведения его абстрактного двойника (модели).

Будем считать, что элементный базис в совокупности с правилами соединения элементов образуют базис синтеза или просто базис.

2.5.3. Элементный базис

В элементный базис могут входить самые разнообразные элементы, которые сами являются простейшими автоматами. Выбор их диктуется как уровнем развития технологии производства реальных элементов, так и требованиями, предъявляемыми к базису со стороны методов синтеза. Основные требования, которым должен удовлетворять элементный базис – это *полнота и эффективность.*

Базис называется полным относительно некоторого класса автоматов, если в нем может быть синтезирован любой автомат этого класса.

Требование эффективности достаточно расплывчатое, и его можно сформулировать примерно так: более эффективным будет базис, синтезируемые в котором структуры будут в каком-то смысле лучшими (проще, дешевле, надежнее и т.д.). При определении эффективности базиса нужно учитывать как свойства реальных элементов, так и применяемые методы синтеза: для одних базисов эти методы могут быть развиты сильнее, для других – слабее.

Какие же элементы могут входить в базис? Это, во-первых, логические элементы и, во-вторых, – элементы памяти.

Логическими элементами называются элементарные комбинационные логические автоматы, функциональные свойства которых представляются достаточно простыми логическими функциями: дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, функцией Шеффера, импликацией, стрелкой Пирса и т.д.

Как правило, ограничиваются элементами И (конъюнкция), ИЛИ (дизъюнкция), НЕ (отрицание), И-НЕ (штрих Шеффера), ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса) и многовходовыми аналогами соответствующих элементов.

Элементами памяти служат некоторые элементарные логические автоматы. Наиболее простые и распространенные из них – это *элемент задержки* и *триггер*.

Элемент задержки можно рассматривать как элементарный синхронный автомат, функции которого сводятся к задержке на один такт значения одной логической переменной. То есть значение выхода в момент времени t равно значению входа в момент времени t–1. Схематичное изображение и автоматная таблица элемента задержки приведены на рис. 2.21.

	0	1
0	0,0	1,0
1	0,0	1,1

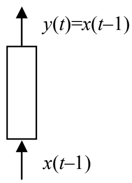


Рис. 2.21. Элемент задержки

Триггер можно представить себе как асинхронный автомат с двумя внутренними состояниями, которые могут фиксироваться и в каждое из которых при определенных условиях автомат можно перевести. Из различных вариантов автоматов, удовлетворяющих этим условиям, остановимся на автомате, графическое изображение и автоматная таблица которого приведены на рис. 2.22.

	00	01	10	11
0	0,10	1,01	0,10	–
1	1,01	1,01	0,10	–

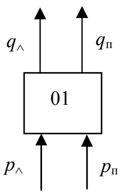


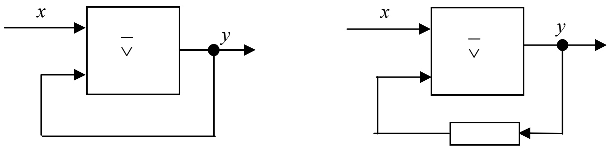
Рис. 2.22. Триггер

Входом и выходом такого автомата являются двоичные векторы длины 2. Первые компоненты этих векторов проиндексированы на рис. 2.22 буквой ∧ (левые полюса), а вторые – буквой п (правые полюса). В связи с тем, что поведение триггера при комбинации 11 на входе не определено, использовать эту комбинацию на входе не рекомендуется.

2.5.4. Автоматные сети

Возьмем некоторую совокупность автоматных элементов (безразлично, разных или одинаковых). Выделим из множества входных полюсов P всех элементов некоторое подмножество $X \subset P$, а из множества Q всех выходных полюсов некоторое подмножество Y. Отобразим разность $P \backslash X$ в Q и будем считать, что это отображение задает множество связей между элементами множества P с одной стороны и множества Q – с другой. Полученную таким образом структуру будем называть *сетью,* элементы множества X – ее входными полюсами, а элементы множества Y – ее выходными полюсами. При небольшом числе элементов в сети можно пользоваться графическим представлением, в иных случаях удобнее задавать сеть в форме некоторого списка, содержащего перечень элементов и связей между ними.

Очевидно, что структуру любого автомата можно представить некоторой сетью. Обратное, вообще говоря, неверно. Для подтверждения этого факта достаточно рассмотреть классический пример сети, изображенной на рис. 2.23, *а*.



а) *б*)

Рис. 2.23. Пример сети

Для x=0 при определении значения y возникает противоречие типа “если y=0, то y=1, если y=1, то y=0”. Это противоречие можно разрешить, если добавить в обратную связь, например, блок задержки (рис. 2.23, *б*). В этом случае сеть можно рассматривать как синхронный автомат, в котором при x=0 переменная y принимает последовательно значения 1, 0, 1, 0, ….

Это пример показывает, что сети из логических элементов, содержащие контур обратной связи без задержек, могут не иметь конкретной автоматной интерпретации. В то же время обратные связи с элементами памяти являются мощным средством построения автоматов. В связи с этим будем рассматривать только *правильные* сети, то есть такие, которые можно рассматривать как структуры автоматов.

Правильная синхронная сеть – это сеть из логических элементов и элементов задержки (назовем и те и другие для краткости блоками), если: 1) к каждому входному полюсу блока присоединен не более, чем один выходной полюс (однако допускается присоединение выходного полюса блока к нескольким входным полюсам, то есть разветвление выходов); 2) в каждом контуре обратной связи, то есть в каждом цикле, есть хотя бы один элемент задержки. Входными полюсами правильной синхронной сети будут полюса, не присоединенные ни к каким выходным полюсам блоков, а выходными полюсами – только те, которые не подсоединены ни к каким входным полюсам.

Оказывается, что любой автомат можно представить правильной синхронной сетью. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 2.5.1. Любой конечный автомат при любом двоичном кодировании его алфавитов X, Q, Y может быть реализован правильной синхронной сетью из логических комбинационных автоматов и двоичных задержек, причем число задержек не может быть меньше $\log_2|Q|$.

Доказательство. Действительно, автомат с произвольными функциями $q(t+1)=\delta(q(t), x(t))$, $y(t)=\lambda(q(t), x(t))$ может быть представлен сетью на рис. 2.24.

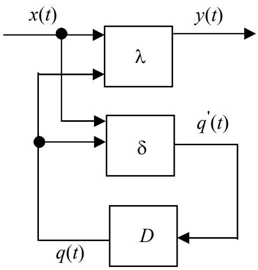


Рис. 2.24. Автомат, представленный правильной синхронной сетью

Здесь блок λ – комбинационный автомат с входным алфавитом $X \times Q$ и выходным алфавитом Y, вычисляющий функцию $y(t)=\lambda(q(t), x(t))$, блок δ – комбинационный автомат с тем же входным алфавитом и выходным алфавитом Q. Блок D – это блок, задерживающий поступающие на его вход сигналы на один такт. Его можно представить как автомат Мура, входной и выходной алфавиты которого совпадают и равны Q, алфавит состояний $R=\{r_1, r_2, \ldots r_n\}$ имеет ту же мощность, что и Q, $\lambda_D(r_i)=q_i$, $\delta_D(r_i, q_j)=r_j$, $i, j \in \{1,2,\ldots n\}$. Сигнал $q'(t)$ на выходе блока δ – это вычисленное значение $\delta\big(q(t), x(t)\big)$, которое, будучи задержанным блоком D на один такт, появляется на входах блоков δ и λ в момент времени $t+1$, то есть $q'(t)=\delta\big(q(t), x(t)\big)=q(t+1)$.

Осталось превратить сеть, изображенную на рис. 2.24, в правильную. Для этого требуется алфавиты X, Q, Y закодировать двоичными наборами, число входов и выходов блоков λ, δ и D согласовать с длинами соответствующих наборов, а блок D реализовать параллельным соединением двоичных задержек. Число этих задержек k равно длине двоичного вектора q, а наименьшая длина этого вектора при двоичном кодировании n состояний составляет $\log_2 |Q|$, то есть $k=\log_2 |Q|$. Что и требовалось доказать.

Существует и обратная теорема.

Теорема 2.5.2. Всякая правильная синхронная логическая сеть (ПЛС) со входами $x_1, \ldots x_m$, выходами $z_1, \ldots z_n$ и k элементами задержки является конечным автоматом, входной алфавит которого состоит из 2^m двоичных наборов длины m, выходной алфавит – из 2^n наборов длины n, а множество состояний – из 2^k наборов длины k.

Доказательство. Вначале возьмем ПЛС без задержек, а, следовательно, и без циклов. Такие сети носят название *линейно-упорядоченных сетей* (ЛУС), так как элементы такой сети можно пронумеровать таким образом, что любая межэлементная связь будет соединять выходной полюс элемента с меньшим номером с входным полюсом элемента с большим номером. Рассмотрим любой выход сети z. Блок, которому он принадлежит, реализует на этом выходе логическую функцию $z=f^1\left(p_1^1, p_2^1, \ldots p_r^1\right)$, где $p_1^1, \ldots p_r^1$ – входы блока. Каждый из этих входов является либо входом сети (переменной x), либо присоединен к выходу другого блока – $p_i^1=f_i^2\left(p_{i_1}^2, p_{i_2}^2, \ldots p_{i_{m_k}}^2\right)$ и, таким образом,

$$z = f^1\left(f_1^2\left(p_{i_1}^2, p_{i_2}^2, \ldots p_{i_{k_1}}^2\right), f_2^2\left(p_{j_1}^2, p_{j_2}^2, \ldots p_{j_{k_2}}^2\right), \ldots f_r^2\left(p_{n_1}^2, p_{n_2}^2, \ldots p_{n_{k_r}}^2\right)\right),$$

где вместо некоторых f_i^2 стоят, возможно, переменные x. Следующее повторение этой процедуры дает формулу глубины 3 с функциями f_i^3 и переменными p_i^3 и т.д., причем верхний индекс у p_i^k равен числу блоков между полюсом p_i^k и выходом z. Так как сеть ациклическая, то этот процесс рано или поздно закончится, и все переменные будут заменены переменными x. Поскольку задержек в сети нет, то в результате получим $z(t)$ как логическую функцию от некоторых из $x_1(t),\ldots x_m(t)$ и, следовательно, ПЛС без задержек – это логический комбинированный автомат.

Теперь возьмем произвольную ПЛС (обозначим ее G). Удалив из нее элементы задержки, получим ЛУС G_0 без задержек, которая является логическим комбинационным автоматом. Входами G_0 являются: во-первых, входы G, а во-вторых, выходы $z_1,\ldots z_k$ элементов задержки G, выходы G_0 – это выходы G и входы $z_1',\ldots z_k'$ элементов задержки G (см. рис. 2.25). Таким образом, входной набор G_0 имеет вид $(x_1,\ldots x_m,\ z_1,\ldots z_k)$, а выходной набор – $(y_1,\ldots y_n,\ z_1',\ldots z_k')$. Теперь считаем набор $(x_1(t),\ldots x_m(t))$ входным сигналом $x(t)$ сети G, набор $(y_1(t),\ldots y_n(t))$ – выходным сигналом $y(t)$ сети G, а набор $(z_1(t),\ldots z_k(t))$ – состоянием $q(t)$ сети G. Учитывая, что $(z_1'(t),\ldots z_k'(t))=(z_1(t+1)\ldots z_k(t+1))=q(t+1)$, получим, что сеть G_0 вычисляет две системы логических функций от набора $x(t)\times q(t)$ – систему $(z_1'(t),\ldots z_k'(t))=q(t+1)$, т.е. функцию переходов δ, и систему $(y_1(t),\ldots y_n(t))$, т.е. функцию выхода λ. Эти две системы функций называются *каноническими уравнениями* сети G.

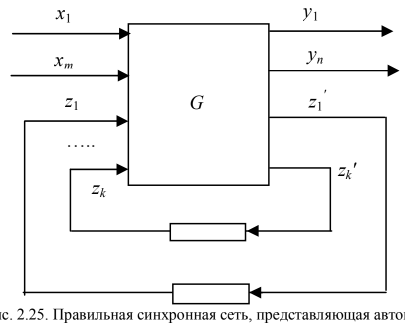


Рис. 2.25. Правильная синхронная сеть, представляющая автомат

Окончательно сеть G принимает вид рис. 2.25, где δ и λ образуют логический комбинационный автомат G_0, а блок задержки D состоит из k двоичных задержек. Это и есть автоматное описание ПЛС. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь сети, составленные только из логических элементов и содержащие в отличие от ПЛС контуры (обратные связи). Анализируя поведение таких сетей, можно прийти к одному из выводов:

а) при любой комбинации значений входных полюсов сеть будет переходить в некоторое устойчивое состояние и оставаться в нем, пока входной сигнал не изменится;

б) при некоторых обстоятельствах условие предыдущего пункта может нарушаться, и в сети возникают противоречия (как, например, это было в сети, изображенной на рис. 2.23, *а*).

Сеть, удовлетворяющая первому выводу, называется *асинхронной сетью* и ее можно рассматривать как структуру асинхронного автомата.

Простейший пример приведен на рис. 2.26.

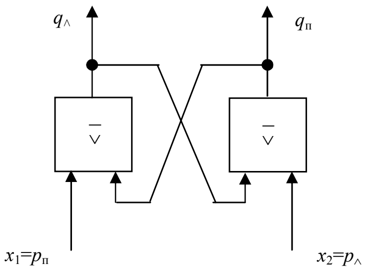


Рис. 2.26. Схема триггера

Легко видеть, что эта сеть оказывается триггером, который с учетом переобозначений входов совпадает с изображенным на рис. 2.22.

Рассматривая триггеры как элементы, произвольный асинхронный автомат по аналогии с рис. 2.25 можно представить некоторым логическим комбинационным автоматом G_0 и совокупностью триггеров, концентрирующих в себе "память" автомата (рис 2.27). Вход и выход автомата представляются, как обычно, двоичными наборами x и y, а внутренние состояния – значениями вектора $q_п=(q_{1п}, q_{2п},...q_{kп})$, где $q_{iп}$ – правый выходной полюс i–го триггера. Переменная $q_\wedge$ всегда (см. автоматную таблицу на рис.2.22) принимает инверсное значение по отношению к $q_{\text{п}}$, в связи с чем можно считать, что логические функции, реализуемые комбинационным автоматом G_0, зависят только от переменных $x_1,...x_m$, $q_{1\text{п}},...q_{k\text{п}}$.

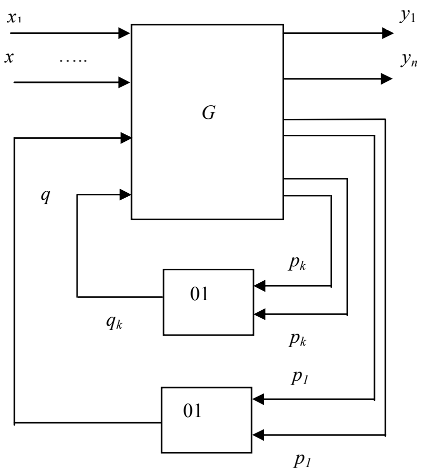


Рис. 2.27. Асинхронный автомат, представленный сетью

Эти функции представляют собой, во-первых, функции выхода:

$$y_i = \lambda_i\left(x_1,...,x_m,q_{1\text{п}},...,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,...n\},$$

а во-вторых, *функции возбуждения* триггеров:

$$p_{i\text{л}} = \delta'\left(x_1,...,x_m,q_{1\text{п}},...,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,...k\}$$

(для левого входа), и

$$p_{i\text{п}} = \delta''\left(x_1,...,x_m,q_{1\text{п}},...,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,...k\}$$

(для правого входа).

При решении задачи синтеза асинхронного автомата большое значение имеет нахождение функций возбуждения триггеров. Определение этих функций допускает некоторую вольность, которая становится ясной при анализе автоматной таблицы триггера (рис. 2.22). Действительно, если при реализации некоторого перехода между внутренними состояниями автомата i-й триггер должен сменить состояние 0 на состояние 1 (условно обозначим этот факт как $0 \rightarrow 1$), то на его вход должна быть подана вполне определенная комбинация 01. Но если переход при смене состояний должен быть $0 \rightarrow 0$, то такое возможно как при комбинации на входе 00 (как не меняющей состояние триггера), так и при комбинации 10 (эта комбинация всегда переводит триггер в состояние 0 независимо от того, в каком состоянии он перед этим находится). Таким образом, на входе должна быть комбинация – 0, где прочерк означает произвольное значение (либо 0, либо 1). Анализируя автоматную таблицу триггера, придем к следующей таблице смены состояний триггера.

Таблица 2.19

Тип изменения состояний триггера	Требуемая комбинация на входе
$0 \rightarrow 0$	- 0
$0 \rightarrow 1$	01
$1 \rightarrow 0$	10
$1 \rightarrow 1$	0 -

Изображенный на рис. 2.26 триггер реализован на элементах Пирса, но возможна реализация триггера и на других логических элементах, например на элементах Шеффера. Из других видов триггеров полезно упомянуть счетный триггер (или триггер со счетным входом), таблица переходов которого приведена ниже.

Таблица 2.20

Тип изменения состояний	Значение входа
$0 \rightarrow 0$	0
$0 \rightarrow 1$	1
$1 \rightarrow 0$	1
$1 \rightarrow 1$	0

В состав счетного триггера входят два уже рассмотренных ранее триггера и логическая комбинационная схема. При небольших умственных затратах можно нарисовать структурную схему счетного триггера. Рекомендуется проделать это самостоятельно в качестве упражнения.

2.5.5. Анализ комбинационных автоматов

Из теорем 2.5.1 и 2.5.2. следует, что структуру комбинационного автомата всегда можно представить линейно-упорядоченной сетью, содержащей только логические элементы. Для краткости назовем такую сеть комбинационной.

Если соответствующее какой-либо комбинационной сети отображение $P\backslash X$ в Q является взаимно-однозначным отображением $P\backslash X$ на некоторое подмножество Q, то такая сеть называется *сходящейся*, если нет, то *расходящейся*. Необходимо напомнить, что P – множество входных полюсов элементов сети, X – множество входных полюсов сети, а Q – множество выходных полюсов элементов сети. То есть связи расходящейся сети могут ветвиться (один выходной полюс может быть соединен с несколькими входными), а для сходящейся сети это невозможно.

Если комбинационная сеть имеет только один выходной полюс (реализует одну логическую функцию) и является сходящейся, то ее можно представить в виде одной формулы, задающей суперпозицию логических функций, реализуемых элементами сети. Для подобного представления расходящейся сети требуется уже система формул. Эта система может быть получена путем введения дополнительных переменных для обозначения тех связей, удаление которых превращает расходящуюся сеть в сходящуюся.

Ясно, что система формул требуется и для описания комбинационной сети с более чем одним выходным полюсом.

Исследование комбинационных автоматов сводится к исследованию отношений между логическими функциями и их представлением в виде суперпозиции элементарных функций, реализуемых отдельными элементами сети. При анализе по заданной суперпозиции, определяемой комбинационной сетью, находится формула (или система формул), представляющая логическую функцию (систему функций). Затем путем эквивалентных преобразований эта формула представляется в некоторой более удобной форме.

Пример 2.25. Проведем анализ сети, изображенной на рис. 2.28.

Вводя промежуточные переменные, соответствующие расходящимся выходам элементов, получаем систему формул:

$$e=b\vee c,$$
$$f=c\cdot d,$$
$$g=e\cdot f,$$
$$y=(ab\vee e)g\vee gf.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для промежуточных переменных и применяя правила эквивалентных преобразований булевых формул, получаем окончательно весьма простую булеву формулу $y=cd$, которую, очевидно, можно реализовать и одним элементом.

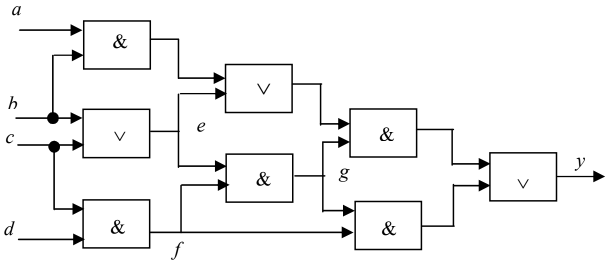


Рис. 2.28. К анализу сети (пример 2.25)

2.5.6. Синтез комбинационных автоматов

При синтезе заданную логическую функцию f необходимо представить в виде суперпозиции элементарных функций, определяющей структуру комбинационного автомата. Если функция f задана формулой F над множеством Σ элементарных функций, то формуле F можно поставить в соответствие схему G из логических элементов, реализующих функции Σ. Построение G осуществляется индукцией по глубине формулы:

1) если $F=\varphi(x_{i1},\ldots x_{ik})$, где $\varphi\in\Sigma$, $x_{i1},\ldots x_{ik}$ – исходные переменные, то схема G состоит из одного элемента φ, входы которого отождествляются с переменными $x_{i1},\ldots x_{ik}$, а выход – с переменной y;

2) если $F=\varphi(F_1,\ldots F_k)$, где F_i – переменная x_{ji} или функция, уже реализованная схемой G_i, то схема G для F строится так: к i-му входу элемента φ присоединяется выход схемы G_i (если F_i – функция) или входная переменная (если $F_i=x_{ij}$), выходом y будет выход элемента φ.

Такой способ построения всегда приводит к линейно-упорядоченной сходящейся сети, т. е. имеет форму дерева, причем входные полюса соответствуют концевым вершинам, а выход – корню дерева.

Понятно, что между множеством формул над Σ и множеством древовидных схем из элементов, реализующих функции Σ, существует взаимно-однозначное соответствие: по любой формуле F над Σ изложенный метод однозначно строит схему G и, наоборот, анализ схемы G (например, с помощью теоремы 2.5.2) дает исходную формулу F. Число знаков операций в F равно числу элементов схемы G. Все это сводит задачу преобразования схем (в том числе их минимизацию) к задаче преобразования логических формул.

Итак, по формуле над Σ всегда можно построить линейно - упорядоченную сходящуюся сеть из элементов Σ; обратное утверждение в силу теоремы 2.5.2 верно для любой (не обязательно сходящейся) сети. Отсюда следует важный, хотя и очевидный факт: для того чтобы произвольная логическая функция могла быть реализована схемой над Σ, необходимо и достаточно, чтобы множество функций Σ было *функционально полным*.

Для системы функций справедливо то же самое.

Проблема минимизации схемных решений оказывается куда более сложной. Задача минимизации формул сама по себе сложна, но и она не исчерпывает возможности минимизации схем.

До настоящего времени известно очень небольшое количество классов функций, для которых найдены минимальные схемные решения. И в общем случае, видимо, поиск минимальных решений невозможен без большого перебора вариантов. Даже достаточно точно оценить по заданной функции хотя бы число элементов в минимальной схеме (не проводя синтеза) также не удается.

Из общих теоретических результатов здесь следует упомянуть теорему Шеннона – Лупанова.

Пусть $L_\Sigma\left(f\right)$ – число элементов минимальной схемы в базисе Σ, реализующей функцию f. Введем функцию $L_\Sigma(n) = \max\limits_{f\in P_2(n)} L_\Sigma(f)$, где максимум берется по всем двоичным функциям от n переменных. Эта функция носит название функции Шеннона для базиса Σ и равна она минимальному числу элементов из Σ, достаточному для реализации любой функции n переменных.

Теорема Шеннона – Лупанова утверждает, что для любого базиса Σ

$$L_\Sigma(n) \approx C_\Sigma \frac{2^n}{n},$$

где C_Σ – константа, зависящая от базиса Σ, а знак $\approx$ означает асимптотическое равенство.

При этом для любого $\varepsilon > 0$ доля функций f, для которых $L_\Sigma(f) \le (1-\varepsilon) C_\Sigma \dfrac{2^n}{n}$, стремится к нулю с ростом n.

Смысл второго утверждения теоремы в том, что с ростом n почти все функции реализуются со сложностью, близкой к верхней границе, т.е. к $L_\Sigma(n)$.

Ознакомимся теперь с методами синтеза, развитыми для конкретных базисов Σ.

Базис произвольных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Это базис, в котором синтезируются структуры, непосредственно соответствующие ДНФ. Элементами базиса являются конъюнкторы и дизъюнкторы с произвольным числом входов, реализующие конъюнкцию и дизъюнкцию любого числа переменных. Эти элементы могут соединяться так, чтобы образовывались двухъярусные сети, в которых элементами первого яруса служат конъюнкторы, а элементами второго – дизъюнкторы. При этом выходные полюсы элементов первого яруса могут соединяться с входными полюсами элементов второго яруса, а выходные полюса элементов второго яруса являются выходными полюсами сети в целом. Входные же полюсы сети соединены непосредственно с входными полюсами элементов первого яруса. Эти правила соединения – синтаксис базиса.

Отмечая некоторые из входных полюсов сети символами инверсий аргументов, предполагаем, что эти инверсии получаются где-то вне синтезируемой сети и доступны измерению (наблюдению). Это обеспечивает функциональную полноту базиса.

Для реализации одной функции в базисе произвольных ДНФ нужно построить в данном базисе сеть с одним выходным полюсом. При этом сеть должна быть оптимальной в каком-то смысле. Например, если мы по ДНФ найдем известными методами *тупиковую* ДНФ, получим схему с минимальным числом элементов. Можно минимизировать число входных полюсов сети, отказываясь от дублирования прямых значений аргументов их инверсиями. Можно стремиться к минимуму инверсных значений. Можно заняться выравниванием нагрузки среди аргументов, когда минимизируется максимальное число конъюнкторов, непосредственно связанных с одним и тем же входным полюсом сети. Существуют и другие задачи, которые приводят к разным методам синтеза.

При синтезе комбинационного автомата, реализующего систему функций, возникают другие проблемы. Можно, конечно, реализовать каждую функцию отдельно, но такое решение вряд ли будет лучшим в каком-то смысле.

Пусть, например, требуется минимизировать число элементов в сети. Число элементов второго яруса, как правило, равно числу функций. Исключения бывают, когда функция представлена одной конъюнкцией или когда некоторые функции равны либо становятся равными при соответствующем их дополнении. Это случаи тривиальные и поэтому неинтересные. Следовательно, основные усилия должны быть направлены на минимизацию числа элементов первого яруса.

Исходная же система функций может задаваться по-разному, в зависимости от таких параметров, как число функций, число аргументов, степень определенности функций, степень их взаимосвязи и т.д. Разными в таких случаях получаются и методы минимизации.

Функция Шеффера (элемент “И-НЕ” или инверсный конъюнктор) и *стрелка Пирса* (элемент “ИЛИ-НЕ” или инверсный дизъюнктор). Каждый из этих элементов может реализовать функционально полный базис.

Рассмотрим двухъярусные сети, элементами которых могут служить элементы Шеффера с произвольным числом входных полюсов.

Применим правило де Моргана к ДНФ простейшей функции, например, к $xy \vee zu$:

$$xy \vee zu = \overline{\overline{xy} \,\&\, \overline{zu}} \,.$$

Легко видеть, что синтез сети данного класса, реализующий заданную функцию, может быть сведен к синтезу соответствующей двухъярусной сети в базисе произвольных ДНФ с последующей заменой всех элементов полученной сети на элементы Шеффера.

К этому же можно свести и синтез двухъярусной сети на элементах Пирса. Для этого достаточно перейти от дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), построить соответствующую двухъярусную сеть (на этот раз первый ярус будет содержать дизъюнкторы, а второй – конъюнкторы) и согласно формуле

$$(x \vee y) \,\&\, (z \vee u) = \overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{z \vee u}}$$

заменить все элементы построенной сети элементами Пирса.

Пример 2.26. Пусть логическая функция задана булевой формулой

$$f=(x_1 \vee x_2)x_3\overline{x_4}(\overline{x_1} \vee x_3).$$

Синтезируем комбинационный автомат, реализующий данную функцию в *базисе ДНФ*. Для этого приведем заданную формулу к дизъюнктивной нормальной форме, т.е. к дизъюнкции элементарных конъюнкций, используя правила эквивалентных преобразований булевых формул:

$$f=(x_1 \vee x_2)x_3\overline{x_4}(\overline{x_1} \vee x_3)=(x_1 \vee x_2)x_3\overline{x_4}=x_1x_3\overline{x_4} \vee x_2x_3\overline{x_4}.$$

Затем строим двухъярусную сеть, в первом ярусе которой будет два конъюнктора, а во втором – один дизъюнктор (см. рис.2.29).

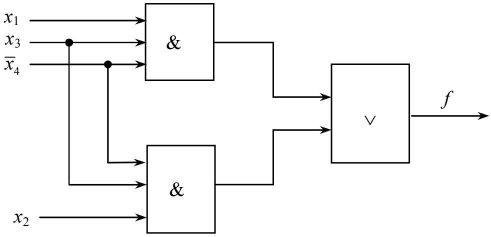


Рис.2.29. Сеть в базисе ДНФ

Если необходимо реализовать ту же логическую функцию в *базисе элементов Шеффера* (“И–НЕ”), то каждый элемент сети, представленной на рис. 2.29, заменяем элементом “И–НЕ” (см. рис.2.30).

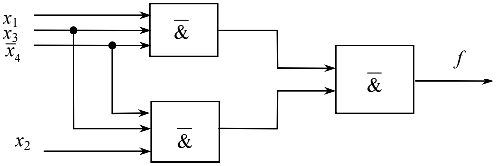


Рис.2.30. Сеть в базисе элементов Шеффера

Пример 2.27. Пусть логическая функция задана булевой формулой

$$f = \overline{x_1 x_2} \cdot \left(\overline{x_2} \vee x_1 x_3 \right)$$

Для реализации данной функции в *базисе КНФ* необходимо вначале по формулам эквивалентных преобразований перейти к конъюнктивной нормальной форме, т.е. к конъюнкции элементарных дизъюнкций:

$$f = \overline{x_1 x_2} \cdot \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3 \right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \overline{\overline{\left(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3 \right)}} = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \overline{\left(x_2 \cdot \overline{\overline{x_1} x_3} \right)} =$$

$$= \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \overline{\left(x_2 \cdot \left(x_1 \vee \overline{x_3} \right) \right)} = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \overline{\left(x_2 x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \right)} =$$

$$= \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \overline{x_2 x_1} \cdot \overline{x_2 \overline{x_3}} = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \left(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \right) \left(\overline{x_2} \vee x_3 \right) = \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \right) \left(\overline{x_2} \vee x_3 \right).$$

Сеть, реализующая данную формулу, представлена на рис. 2. 31.

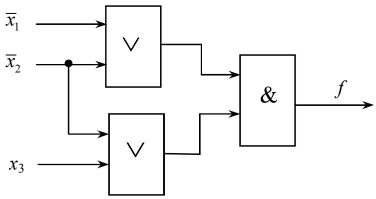


Рис. 2.31. Сеть в базисе КНФ

Для реализации той же функции в *базисе элементов Пирса* (“ИЛИ-НЕ”) заменяем каждый элемент сети на рис. 2.31 элементом “ИЛИ-НЕ” (см. рис. 2.32).

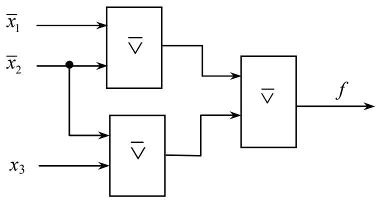


Рис. 2.32. Сеть в базисе элементов Пирса

2.5.7. Кодирование состояний

Речь пойдет о кодировании в основном внутренних состояний, так как двоичное кодирование входного и выходного алфавитов не вызывает принципиальных трудностей и практически не влияет на сложность полученных при этом структурных схем.

Пусть имеется автомат $A = \left(X, Q, Y, q_1 \in Q, F\left(x \in X / y \in Y\right)\right)$ и набор элементов памяти U_1, U_2, ... U_p. Каждому состоянию q автомата A поставим в соответствие конечный упорядоченный набор (z_1, z_2, ... z_p) состояний автоматов U_1, ... U_p так, что различным состоянием автомата A ставятся в соответствие различные последовательности состояний элементарных автоматов U_1, ... U_p. Таким образом, состояния автомата A кодируются наборами состояний элементов памяти U_1, ... U_p, в результате чего возникают структурные состояния автомата A. Поскольку при практическом синтезе схем используются в основном в качестве элементов памяти элементарные автоматы с двумя состояниями 0 и 1, то и состояния автомата A кодируется наборами двоичных переменных (z_1,...z_p) (двоичное кодирование).

В зависимости от того, каким образом выполнять кодирование, структурные схемы одного и того же автомата могут получаться различными, так как каждому варианту кодирования соответствует структурная схема определенной сложности. Различные способы кодирования оказываются неравноценными как с точки зрения простоты структуры автомата, так и с точки зрения других критериев: быстродействия, надежности и прочее.

Самое главное, конечно, – это простота структуры автомата. В качестве промежуточной цели можно наметить простоту системы логических функций, реализуемых комбинационной частью автомата. Выбирая различные варианты кодирования, мы получаем различные системы логических функций. Можно минимизировать эти системы, например, в классе ДНФ, а затем подсчитывать число символов в полученных выражениях. Можно надеяться, что, выбирая способ кодирования, который приводит к выражениям с минимальным числом букв, мы получим в итоге и более простую структуру автомата.

В асинхронных автоматах могут возникать при кодировании другие проблемы, связанные с практической реализацией и конструктивными особенностями элементов памяти (триггеров). Каждый из реальных элементов памяти обладает инерционностью (ненулевое время срабатывания), причем эта инерционность не является постоянной и одинаковой для всех элементов. Это не учитывается в абстрактной модели автомата.

Вследствие этого при переходе автомата из одного состояния в другое может реализоваться некоторая последовательность элементарных переходов (соответствующих изменениям состояния отдельных элементов памяти), при которой автомат проходит через некоторое множество промежуточных состояний и которая в общем случае непредсказуема. Последующие действия автомата будут определяться уже значениями функции переходов на достигнутых промежуточных состояниях.

Таким образом, дальнейшее поведение автомата может оказаться в зависимости от того, какой из элементов памяти быстрее среагирует на прикладываемое к нему воздействие. Элементы как бы состязаются в быстроте реакции, чем и обусловлено название соответствующего явления – состязания между элементами памяти. Если, в конце концов, автомат приходит в намеченное матрицей переходов состояние, то состязания можно считать неопасными, в противном случае их следует рассматривать как опасные.

Чтобы поведение автомата не отличалось от заданного матрицей переходов, необходимо устранить все опасные состязания между элементами памяти. Один из возможных способов следующий.

Заданный в автомате переход $i \to j$ можно обеспечить, если придать функции переходов значение j на всех возможных промежуточных состояниях, в которые автомат может попасть из состояния i (при фиксированном входном состоянии). В этом случае элементы памяти, которые должны менять свои состояния, будут подвергаться постоянному надлежащему воздействию на всем протяжении рассмотренного перехода независимо от того, в каком порядке они срабатывают. Тогда состязания становятся неопасными, и неизбежно наступит переход $i \to j$, который назовем *прямым*, причем происходить он будет с максимальным быстродействием.

Одним из эффективных способов предотвратить опасные состязания является рациональное кодирование внутренних состояний автомата. Все такие методы можно условно разбить на два класса. В одном из них ищутся такие коды, при которых все заданные переходы становятся элементарными (меняет состояние только один элемент памяти) и, следовательно, состязаний вообще нет. Если для исходной матрицы переходов такое сделать не удается, то матрица преобразуется, причем множество состояний, как правило, расширяется. Во втором классе находятся методы, устраняющие лишь опасные состязания и не связанные с увеличением числа внутренних состояний. Эти методы основаны на реализации прямых переходов.

В качестве примера рассмотрим один из методов подобного типа.

Вначале необходимо сформулировать необходимые и достаточные условия отсутствия опасных состязаний.

Пусть $U(i,j)$ – множество всех возможных промежуточных состояний, включая состояния *i* и *j*, в которые автомат может попасть при переходе $i \to j$. По определению функция переходов – однозначная функция полного состояния, а при фиксированном входном состоянии – однозначная функция внутреннего состояния. Отсюда следует, что прямые переходы могут быть реализованы тогда и только тогда, когда выполняется условие: для каждой пары переходов $i \to j$ и $k \to l$, соответствующих одному и тому же входному состоянию, множества $U(i,j)$ и $U(k,l)$ не пересекаются, т.е. $U(i,j) \cap U(k,l) = \varnothing$, если $j \neq l$.

Найти множество $U(i,j)$ можно, зная коды состояний *i* и *j*. Пусть эти коды будут $z(i)$ и $z(j)$. Множество $U(i,j)$ будет образовано всеми теми состояниями, коды которых совпадают с кодами $z(i)$ и $z(j)$ в тех компонентах, которые совпадают между собой в векторах $z(i)$ и $z(j)$. Таким образом, множество $U(i,j)$ (точнее множество соответствующих кодов) может быть представлено вектором $t(i,j)$, компоненты которого принимают значения одноименных компонентов векторов $z(i)$ и $z(j)$ в случае совпадения последних и значение “–“ в противном случае. Коды всех элементов множества $U(i,j)$ могут быть получены из $t(i,j)$ подстановкой вместо прочерков нулей и единиц.

Необходимым и достаточным условием непересечения множеств $U(i,j)$ и $U(k,l)$ является наличие такой одноименной компоненты в кодах $t(i,j)$ и $t(k,l)$, которая принимает значение 1 в одном и 0 в другом коде. Доказательство этого утверждения очевидно; если это условие выполнено, то любой элемент множества $U(i,j)$ отличается от любого элемента множества $U(k,l)$ (именно этой компонентой), в противном случае можно в этих множествах найти общий элемент.

Кодирующей матрицей назовем такую матрицу *Q* с двоичными элементами, столбцами которой будут коды внутренних состояний, а строкам поставлены во взаимно-однозначное соответствие внутренние состояния автомата. Получение такой матрицы и есть цель кодирования.

Для матрицы *Q* необходимое и достаточное условие отсутствия опасных состязаний можно сформулировать так: для каждой пары $i \to j$ и $k \to l$, соответствующих одному и тому же входному состоянию ($j \neq l$), в матрице Q должна найтись строка, в которой i-я и j-я компонента принимают значение 1 (или 0), а k-я и l-я компоненты – значение 0 (или 1).

Условие, предъявляемое при этом к матрице Q при рассмотрении конкретной пары переходов $i \to j$ и $k \to l$, назовем *элементарным*. Оно может быть представлено вектором, у которого i-я и j-я компоненты инверсны по отношению к k-й и l-й компонентам, а остальные компоненты – прочерки (длина такого вектора равна числу внутренних состояний автомата). Совокупность таких векторов для всех пар и всех входных состояний образует матрицу условий S.

Задача нахождения матрицы Q, удовлетворяющей совокупности условий, задаваемых матрицей S, сводится к задаче нахождения минимальной покрывающей формы для матрицы S.

Рассмотрим последнее утверждение. Можно считать, что каждая из строк матрицы S задает некоторое частичное двухблочное разбиение на множестве столбцов матрицы Q. Один блок – это столбцы, отмеченные единицей (которая стоит в соответствующих компонентах строки матрицы условий), другой блок – это столбцы, отмеченные нулями. Прочерк, как и ранее, является признаком неопределенности – эти столбцы могут принадлежать любому блоку. Таким образом, решаемая задача сводится к нахождению такой кодирующей матрицы Q, которая бы покрывала матрицу условий S. При этом опасные состязания будут отсутствовать. Дополнительно хотелось бы, чтобы число строк такой матрицы было бы минимальным, что соответствует минимальному количеству элементов памяти.

Таким образом, всю процедуру нахождения кодирующей матрицы Q можно сформулировать следующим образом.

1. Считаем, что все состояния автомата различны, т. е. их надо кодировать разными кодами. Отсутствие эквивалентных состояний может гарантировать предварительная минимизация автомата на абстрактном уровне или добавление в матрицу переходов лишнего столбца, значения элементов которого совпадают с номерами строк, где они находятся.

2. Составляем матрицу условий S для всех входных состояний, выбрасывая строки, которые покрываются другими строками. В результате получаем минимальную матрицу условий S_0.

3. Известными методами находим минимальное покрытие полученной матрицы S_0. Найденная матрица и будет минимальной кодирующей матрицей. Число строк этой матрицы равно необходимому минимальному числу элементов памяти автомата.

Необходимо понимать, что при описанном кодировании устраняются только опасные состязания, но не гарантируется оптимальность полученного решения в смысле минимума памяти.

2.5.8. Программная реализация комбинационных автоматов

Комбинационный автомат вычисляет некоторую логическую функцию или систему функций, а, как известно, любой процесс вычисления может быть реализован как в аппаратном виде (схема из элементов), так и программным образом.

Под программой будем понимать некоторую пронумерованную последовательность команд $k_1,...k_s$, взятых из некоторого фиксированного набора (системы команд). Программа работает над конечным множеством пронумерованных (поименованных) двоичных ячеек. Номер ячейки – это ее адрес. Адресом ячейки может служить и имя логической переменной, значения которой хранятся в данной ячейке. Система команд содержит команды – операторы типа $b:=f(a_1,...a_p)$ – выполнить операцию f над содержимым ячеек $a_1,...a_p$ и записать результат в ячейку b; и условные двухадресные переходы двух видов:

1) «если a, то i, иначе j» (если a=1, то перейти к выполнению команды k_i, иначе перейти к команде k_j) и

2) «если $\overline{a}$ (a=0), то i, иначе j». Операция $f(a_1,...a_p)$ – это логическая функция p переменных (в частном случае она может быть константой 0 или единицей). Если j – это номер следующей по порядку команды, то переход можно считать одноадресным, если i=j – то это безусловный переход. Любая из перечисленных команд может быть заключительной, что указывается словом «конец».

Процессом вычисления программы $k_1,...k_s$ называется последовательность шагов $k(1),...k(t)$, на каждом из которых выполняется одна команда программы. Указанная последовательность определяется так:

1) $k(1) = k_1$,

2) если $k(i) = k_r$ – оператор, то $k(i+1) = k_{r+1}$;

3) если $k(i)$ – условный переход, то номер команды $k(i+1)$ указывается этим переходом;

4) если $k(i)$ – заключительная команда, то процесс вычисления останавливается после ее выполнения.

Программа П вычисляет некоторую логическую функцию $y=f(x_1,...x_n)$, если для любого двоичного набора $\sigma=(\sigma_1,...\sigma_n)$ при начальном состоянии

$x_1=\sigma_1$, $x_2=\sigma_2,\ldots x_n=\sigma_n$ программа через конечное число шагов останавливается и при этом в ячейке y будет величина $f(\sigma_1,\ldots\sigma_n)$.

Критерии, по которым можно оптимизировать программу, следующие:

1) число команд в тексте программы;

2) объем промежуточной памяти, то есть число ячеек, необходимых для хранения промежуточных результатов;

3) время вычисления – среднее $t_{\text{ср}}(\Pi)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{\sigma}\tau_n(\sigma)$ и максимальное – $t_{\max}(\Pi)=\max\limits_{\sigma}\tau_n(\sigma)$, где $\tau_n(\sigma)$ – время работы программы на конкретном наборе σ, а сумма и максимум берется по всем 2^n наборам.

Любой линейно-упорядоченной сети (а следовательно, и любому комбинационному логическому автомату), содержащей N элементов и реализующей функцию f, нетрудно поставить в соответствие программу, вычисляющую f и состоящую из N команд, следующим образом. Занумеруем элементы сети числами 1, …, N в соответствии с линейной упорядоченностью. Номер 1 получит один из входных элементов, номер N – выходной элемент.

Пусть элемент e_i реализует функцию φ_i и к его входным полюсам присоединены выходные полюсы элементов $e_{j1},\ldots e_{jp}$. Некоторые из них возможно являются входными полюсами сети. Поставим в соответствие элементу e_i ячейку a_i и команду $a_i:=\varphi_i(a_{j1},\ldots a_{jp})$, если $i\neq N$ или ячейку y и команду $y:=\varphi_N(a_{j1},\ldots a_{jp})$ конец, если $i=N$. Получим в результате программу, не содержащую условных переходов (так называемая *операторная* программа), в которой порядок команд в точности соответствует порядку элементов в сети, а система команд – базису сети.

Проблема синтеза операторных программ сводится в основном к проблемам синтеза комбинационных сетей: в частности, задачи функциональной полноты системы команд и минимизации собственно текста программы соответствуют задачам о функциональной полноте системы функций и минимизации комбинационных схем. Так как операторные программы не содержат условных переходов, время ее вычисления на любом наборе одинаково и совпадает с максимальным временем $t_{cp}=t_{max}=N$ и в силу теоремы Шеннона – Лупанова при больших n приближается к $\dfrac{2^n}{n}$. А проблема минимизации памяти (за счет многократного использования одной и той же ячейки для нескольких последовательно получающихся промежуточных результатов) для таких программ – нетривиальная комбинационная задача.

Другой вид программ – это программы, состоящие из команд типа y:=σ (σ=0 или σ=1) и условных переходов. Такие программы называются *бинарными.* Всякую булеву формулу F, содержащую N символов, можно реализовать бинарной программой, вычисляющей F за время $t_{\max}=N$ и содержащую N команд условного перехода, а также две команды y=0 и y=1 (эти команды не вошли в общее время $t_{\max}$). Чтобы было понятнее, представим программу в виде графа, где вершины – это команды, а ребра – переходы. Пусть G_1 – граф программы для функции f_1 с начальной вершиной V_{10} и двумя заключительными вершинами $V_{1z}{}^0$ (с командой y=0) и $V_{1z}{}^1$ (с командой y=1), а G_2 – граф программы, реализующей функцию f_2 с начальной V_{20} и заключительными $V_{2z}{}^0$ и $V_{2z}{}^1$ вершинами. Тогда:

а) вычислять функцию $f=f_1\vee f_2$ будет программа, граф G которой получен присоединением G_2 к "нулю" G_1 (то есть отождествлением вершин $V_{1z}{}^0$ и V_{20}; команда y:=0 при этом отбрасывается);

б) вычислять функцию $f=f_1\&f_2$ будет программа, граф G' которой получен присоединением G_2 к "единице" G_1 (отождествлением $V_{1z}{}^1$ и V_{20});

в) вычислять отрицание $f=\overline{f_1}$ будет программа, граф которой получен из G_1 заменой команд в $V_{1z}{}^0$ и $V_{1z}{}^1$ на инверсные.

В графе G (пункт а) получаются при этом две единичные, а в графе G' (пункт б) две нулевые вершины. В обоих случаях их надо отождествлять.

Пример 2.27. Граф бинарной программы, реализующей булеву формулу $f=\left(x_1\vee x_2\right)x_3\overline{x_4}$, приведен на рис. 2.33.

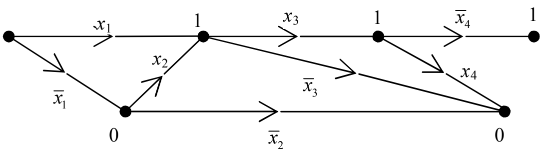


Рис. 2.33. Граф бинарной программы

Рассмотренный метод не гарантирует оптимальность получаемых программ в смысле минимума времени или минимума числа команд. Существуют и другие методы.

Показатели качества бинарных программ характеризуются следующими параметрами: $L_б(n)$ – функция Шеннона для числа команд бинарных программ, асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$, причем существуют методы синтеза, для которых $t_{max} \sim n$.

Доля функций (для любого $\varepsilon>0$), для которых $L_б(f) \le (1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}$ и $t_{ср}(f) \le (1-\varepsilon)\cdot n$, стремится к нулю с ростом n.

То есть сложность бинарных программ по числу команд асимптотически равна сложности операторных программ, но в отличие от операторных программ бинарные имеют два преимущества – это отсутствие промежуточной памяти и более высокое быстродействие, которое можно охарактеризовать соотношением

$$(\log_2 n+1) \le t_{max}(f) \le n.$$

Если в программе использовать и операторы и условные переходы, то число команд, асимптотически равное для операторных и бинарных программ $\frac{2^n}{n}$, можно понизить вдвое.

2.6 Общие методы синтеза автоматов

Для проведения синтеза автоматов нужно уметь представлять любой автомат в виде некоторой совокупности более простых автоматов. В разделе 4.5 было рассмотрено представление автоматов в виде сетей, то есть в виде соединения элементарных автоматов. Как это сделать практически и не обязательно в виде элементарных автоматов, а в общем случае в виде произвольных либо стандартных автоматов? Эти задачи решаются различными методами декомпозиции автоматов.

2.6.1. Декомпозиция абстрактных автоматов

Под декомпозицией в общем случае понимается представление сложного автомата работой нескольких более простых (в частном случае элементарных) автоматов, которые на структурном уровне с помощью отождествления входных и выходных полюсов образуют функциональную или структурную схему сложного автомата. Обычно ставится задача оптимальной декомпозиции с точки зрения минимального числа элементарных автоматов. В результате оптимальной декомпозиции осуществляется минимизация числа логических элементов, входящих в комбинационную часть.

На абстрактном уровне декомпозиция сложного автомата соответствует параллельной, последовательной или смешанной работе более простых автоматов, т.е. сводится к задаче разложения автомата по операции умножения, суммирования, суперпозиции или по нескольким операциям сразу. Поэтому можно рассматривать декомпозицию параллельную, последовательную или смешанную.

Параллельная декомпозиция соответствует разложению автомата в произведение или сумму двух или большего числа абстрактных автоматов, каждый из которых проще, чем исходный автомат. Здесь можно говорить о параллельной одновременной (умножении) или параллельной поочередной (сумме) декомпозиции автоматов. Последовательная декомпозиция соответствует разложению автомата по операции суперпозиции, а смешанная – одновременно по двум операциям (например умножения и суперпозиции).

Все описанные случаи декомпозиции – это “чистые” случаи декомпозиции автоматов. Таких автоматов, которые бы раскладывались только в параллельную или в последовательную или даже в смешанную работу автоматов, довольно мало по сравнению с теми, которые не раскладываются таким образом. Поэтому вводится понятие *общей декомпозиции* автомата, которая понимается как совместная работа элементарных автоматов со связями между ними. Общая декомпозиция соответствует разложению абстрактного автомата в композицию двух или более элементарных автоматов, то есть соответствует представлению сложного автомата в виде сети из более простых автоматов. Таким образом, последовательная, параллельная или смешанная декомпозиция могут рассматриваться как частные случаи общей декомпозиции автоматов.

Необходимо заметить, что при разложении автомата по операции композиции ставится, как правило, задача *оптимальной* декомпозиции, то есть представление произвольного автомата совместной работой элементарных автоматов с *минимальным* числом связей между ними. Решение задачи оптимальной декомпозиции приводит к минимальной комбинационной части автомата.

Следующий уровень этой же задачи связан с реализацией автомата в однородных вычислительных средах и заключается в декомпозиции автомата на *заданные* автоматы, например, на элементарные автоматы из некоторого элементного базиса.

Свойство автомата быть представленным параллельной или последовательной работой более простых автоматов вытекает из анализа вида матриц, получаемых в результате произведения, суммирования или суперпозиции автоматов.

Нет необходимости здесь рассматривать все теоремы, касающиеся данного раздела. Из основных результатов можно назвать следующий: любое параллельное соединение автоматов (параллельное одновременное, с общим входом, не одновременное) можно представить в виде последовательного соединения (возможно, других автоматов), то есть в виде суперпозиции автоматов.

Если же мы хотим выделить стандартные автоматы из исходного автомата, то использование алгебраических операций позволяет на абстрактном уровне решить задачу декомпозиции сложного автомата на заданные стандартные автоматы путем сведения ее к решению суперпозиционных уравнений над автоматами.

Что касается общей декомпозиции автоматов, то здесь можно упомянуть следующее утверждение: любой автомат Мили с числом состояний $n>2$ можно представить совместной работой (композицией) двух или большего числа простых автоматов, один из которых – автомат Мили, а остальные – автоматы Мура.

2.6.2. Канонический метод синтеза

Вначале подведем некоторый итог по поводу функциональной полноты элементного базиса синтеза автоматов. Автоматно полный базис согласно теоремам о представлении автомата соответствующей сетью (теорема 2.5.1) и схемной реализации логических функций (теорема 2.5.2) может представлять собой элемент единичной задержки и какую-либо функциональную полную систему логических элементов. Вместо элемента задержки в автоматный базис можно включить любой другой элемент памяти (например, триггер). В качестве элемента памяти можно взять и любой автомат Мура с произвольным числом внутренних состояний (два, три, пять и т.д.), лишь бы этот автомат удовлетворял требованиям полноты системы переходов и полноты системы выходов.

Требование полноты системы переходов предусматривает для любой упорядоченной пары состояний элементарного автомата наличие некоторого входного сигнала, который переводит первый элемент этой пары во второй.

Требование полноты системы выходов означает, что для каждого состояния элементарного автомата имеется соответствующий ему выходной сигнал, который отличается от выходного сигнала, соответствующего другим состояниям элементарного автомата.

Для тех элементов памяти, которые были рассмотрены, эти требования выполняются.

Доказано утверждение о том, что всякая система элементарных автоматов, которая содержит автомат Мура с нетривиальной памятью и полной системой переходов и выходов и функционально полную систему логических элементов, является автоматно полным базисом.

Но, к сожалению, в общем случае для произвольного набора элементарных автоматов проблема автоматной полноты оказывается *алгоритмически неразрешимой* (в отличие от подобной проблемы для комбинационного автомата).

Весь процесс синтеза можно разбить условно на ряд этапов. Классической считается схема синтеза, называемая *канонической схемой*, или *каноническим методом* синтеза, на разных этапах которой производятся следующие действия:

1) по описанию автоматного отображения (например, по регулярному событию) строится абстрактный автомат;

2) минимизируется число состояний автомата;

3) производится двоичное кодирование входного, внутреннего и выходного алфавитов (с учетом соображений раздела 2.5.6);

4) осуществляется выбор типов элементарных автоматов и определение их функций возбуждения в соответствии с кодированными автоматными таблицами переходов элементарных автоматов;

5) находятся минимальные формы для функций возбуждения;

6) получают с дальнейшей минимизацией функции выхода элементарных автоматов;

7) составляются канонические уравнения, описывающие комбинационные блоки автомата;

8) производится реализация системы канонических уравнений системой логических элементов в функционально полном базисе с последующей минимизацией.

Эта схема сыграла большую роль в развитии методов синтеза, но в практическом применении не очень удобна. Дело в том, что, во-первых, схемы с k элементами памяти имеют 2^k состояний, поэтому описание сколько-нибудь больших схем в терминах состояний и таблиц переходов получаются очень громоздкими. Во-вторых, на разных этапах решаются разные задачи минимизации, порой не только не связанные между собой, но и противоречащие друг другу. Например, известны примеры, когда уменьшение числа состояний приводит к усложнению комбинационной части. И в-третьих, различное кодирование (а для k элементов памяти вариантов таких кодов будет $(2^k)!$) приводит, вообще говоря, к разным системам канонических уравнений, сложность которых до начала синтеза предвидеть невозможно. Поэтому получают распространения другие методы синтеза, например, декомпозиционный.

2.6.3. Декомпозиционный метод синтеза

Этот метод основан на общей декомпозиции автоматов (обычно проводят оптимальную декомпозицию) на элементарные автоматы, в качестве которых могут быть выбраны любые абстрактные автоматы с простым числом состояний, например с двумя состояниями.

В результате декомпозиции получают матрицы соединений абстрактных элементарных автоматов, совместная работа которых эквивалентна работе исходного автомата. Выбирая конкретные типы элементарных автоматов (триггеры, элементы задержки и т.п.), по найденным матрицам соединения абстрактных элементарных автоматов строят функции возбуждения и функции выходов конкретных выбранных элементарных автоматов. А это, в свою очередь, определяет структурную схему комбинационной части и, следовательно, всего автомата в целом. Поэтому в этом методе, по сути, синтез на структурном уровне выносится на абстрактный уровень и сводится он к оптимальной в смысле минимума связей декомпозиции автомата на абстрактные элементарные автоматы (как правило, с двумя состояниями) и записи функций возбуждения и выходов конкретных элементарных автоматов по матрицам соединений абстрактных элементарных автоматов.

Преимущества декомпозиционного метода синтеза автоматов по сравнению с каноническим следующие:

1) не требуется строить сложные кодированные таблицы переходов;

2) решается проблема оптимального кодирования внутренних состояний автомата, приводящего к минимальной комбинационной части;

3) декомпозиционный метод позволяет строить оптимальную или близкую к ней функциональную схему автомата при использовании элементарных автоматов со многими устойчивыми состояниями и логическими элементами в недвоичной логике. Таким образом, этот метод позволяет осуществлять синтез автоматов при использовании элементного базиса, использующего логику более высокого порядка по сравнению с двоичной.

Контрольные вопросы

1. Назовите отличия алфавитного отображения от автоматного.
2. Дайте понятие конечного автомата.
3. Перечислите способы задания автоматов.
4. Назовите виды автоматов.
5. Как интерпретировать автомат второго рода автоматом первого рода?
6. Дайте определение асинхронного автомата.
7. Дайте определение изоморфизма и эквивалентности автоматов.
8. Задание функций перехода и выхода для частичных автоматов.
9. Понятие покрытия и совместимости состояний автоматов.
10. Назовите проблемы минимизации частичных автоматов.
11. Представление событий автоматами.
12. Перечислите регулярные операции над событиями.
13. Дайте понятие регулярного события.
14. Связь регулярных событий и автоматов.
15. Что такое источник?
16. Правила построения источника по регулярному событию.
17. Перечислите основные этапы алгоритма синтеза автомата на абстрактном уровне.
18. Понятие индексного остатка источника.
19. Основные этапы графического алгоритма анализа автомата на абстрактном уровне.
20. Перечислите операции над автоматными отображениями.
21. Понятие вероятностного автомата. Как задать вероятностный автомат?
22. Что такое комбинационный автомат?
23. Что необходимо для структурного синтеза автомата?
24. Что входит в состав элементного базиса?
25. Понятие правильной синхронной сети.
26. Канонические уравнения сети.
27. Проблемы кодирования состояний в асинхронных автоматах.
28. Какая из программ, предназначенных для реализации комбинационного автомата, лучше – бинарная или операторная?
29. Какие недостатки и преимущества у канонического метода синтеза автоматов по сравнению с декомпозиционным методом синтеза?

3. СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

В этом разделе полагаем, что функции $r(t)$ и $y(t)$, интерпретируемые соответственно как входной и выходной сигнал некоторой системы, определены на континуальном множестве моментов времени t.

3.1 Дифференциальные уравнения динамики систем

3.1.1. Описание систем дифференциальными уравнениями

Вообще говоря, связь между входным сигналом некоторой системы, описываемым функцией $r(t)$, и ее выходным сигналом $y(t)$ может задаваться нелинейным дифференциальным уравнением произвольного порядка n:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y, r^{(m)}, r^{(m-1)}, \ldots, r\right) = 0, \qquad (3.1.1)$$

где $F\left(z_1, z_2, \ldots, z_{n+m+2}\right)$ – функция $n+m+2$ аргументов. Задав вид функции $r(t)$ и n начальных условий $y\left(t_0\right) = y_0, \dot{y}\left(t_0\right) = \dot{y}_0, \ldots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)}$, можно в принципе решить это уравнение и найти выход (реакцию) $y(t)$ данной системы на входной сигнал $r(t)$.

Уравнение (3.1.1) является уравнением самого общего вида и описывает поведение системы во всех режимах. Один из частных, но весьма распространенных случаев таких режимов – это статический режим, то есть такой режим, при котором ни входные, ни выходные сигналы системы не меняются во времени. Конечно, это определенная идеализация, которая получается из уравнения (3.1.1) формальной подстановкой вместо всех производных по времени нулей

$$y^{(n)} = y^{(n-1)} = \ldots = \dot{y} = r^{(m)} = r^{(m-1)} = \ldots = \dot{r} = 0.$$

Тогда уравнение статики примет вид

$$F\left(0, 0, \ldots, y_{\text{ст}}, 0, 0, \ldots, r_{\text{ст}}\right) = 0, \qquad (3.1.2)$$

из которого можно установить связь между статическим значением входного сигнала $r_{ст}$ и статическим значением выходного сигнала $y_{ст}$

$$y_{ст} = f(r_{ст}) . \tag{3.1.3}$$

Уравнение (3.1.3) описывает так называемую *статическую характеристику* системы.

Решение уравнения (3.1.1) для произвольной функции F наталкивается на непреодолимые трудности и возможно только в некоторых частных случаях. Одним из таких частных, но весьма важных и распространенных случаев является случай, когда функция F является *линейной* функцией по своим аргументам, то есть когда уравнение, связывающее входной сигнал $r(t)$ с выходным $y(t)$, является *линейным дифференциальным* уравнением. Упомянутое уравнение принято записывать так, чтобы выходная величина и её производные располагались бы в левой части, а входная величина и её производные – в правой части уравнения:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = b_0(t)r^{(m)} + \ldots + b_m(t)r . \tag{3.1.4}$$

Коэффициенты этого уравнения a_i, b_k в общем случае могут зависеть от времени и тогда уравнение (3.1.4) описывает *нестационарную* систему. Если такой зависимости от времени нет (или она очень слабая) то приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 r^{(m)} + \ldots + b_m r . \tag{3.1.5}$$

3.1.2. Линеаризация

В некоторых случаях удается даже нелинейное уравнение типа (3.1.1) свести к линейному уравнению типа (3.1.4) или (3.1.5). Пусть для некоторого установившегося значения входа $r_{ст}$ получено уравнение статики (3.1.2). Тогда разложим левую часть уравнения (3.1.1) в ряд Тейлора (предполагая, что такое разложение имеет место) около точки установившегося режима и ограничим этот ряд линейными приращениями переменных

$$F(z_1,\ldots z_{n+m+2}) \approx F(0,\ldots y_{\text{ст}}, 0,\ldots r_{\text{ст}}) + \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)_0 \Delta y^{(n)} + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)_0 \Delta y^{(n-1)} + \ldots$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+2}}\right)_0 \Delta r^{(m)} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+m+2}}\right)_0 \Delta r = 0, \tag{3.1.6}$$

где частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0$ вычисляются при подстановке в них значений $y_{\text{ст}}$ и $r_{\text{ст}}$ и нулевых значениях производных, соответствующих установившемуся режиму.

Первое слагаемое в (3.1.6) равно нулю согласно (3.1.2). Вводя обозначения $\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0 = a_{i+1}$ $(1 \le i \le n+1)$ и $-\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0 = b_{i-n-2}$ $(\mathrm{n}+2 \le i \le n+m+2)$, и перенося слагаемые с входным воздействием и его производными в правую часть, получим:

$$a_0 \Delta y^{(n)} + a_1 \Delta y^{(n-1)} + \ldots + a_n \Delta y = b_0 \Delta r^{(m)} + \ldots + b_m \Delta r\,. \tag{3.1.7}$$

Уравнение (3.1.7) по форме точно такое же, как и (3.1.5), но записано относительно соответствующих отклонений $\Delta y = y(t) - y_{\text{ст}}, \Delta r = r(t) - r_{\text{ст}}$.

Полученное уравнение (3.1.7) описывает ту же самую систему, что и уравнение (3.1.1), но имеет следующие отличия.

Во-первых, уравнение (3.1.7) приближенное, причем это приближение тем точнее, чем меньше отклонения переменных от установившихся значений.

Во-вторых, поскольку при выводе уравнения (3.1.7) использовалось разложение в ряд Тейлора, такая операция применима только к непрерывно-дифференцируемым нелинейностям. Такие нелинейности называются *линеаризуемыми*, а нелинейные функции, не удовлетворяющие этому условию, называются существенно нелинейными.

В-третьих, уравнение (3.1.7) составлено относительно отклонений, а не самих сигналов. Такого рода уравнения называются уравнениями в отклонениях или в вариациях.

И, наконец, в-четвертых (и это основное), уравнение (3.1.7) линейное.

Поскольку форма уравнений (3.1.7) и (3.1.5) совпадает, в дальнейшем можно использовать любое из них, например, (3.1.5) подразумевая, что в качестве переменных могут быть и соответствующие отклонения.

Пример 3.1. Система описывается уравнением

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+5y\frac{dy}{dt}+3y^2=12\left(1-e^{-t}\right). \qquad (3.1.8)$$

Требуется линеаризовать уравнение (3.1.8) в точке статического режима.

Установившееся статическое значение входного сигнала найдем, устремив t к бесконечности $r_{\text{ст}}=\lim\limits_{t\to\infty}(12-12e^{-t})=12$. Запишем уравнение статики, приравняв нулю производные в выражении (3.1.8) $3y_{\text{ст}}^2=12$, откуда $y_{\text{ст}}=\pm 2$. В выражении (3.1.8) нелинейными являются второе и третье слагаемые в левой части уравнения. Вычислим частные производные по $\dot{y}$ и по y левой части уравнения (3.1.8)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{y=y_{\text{ст}}}=\left.5y\right|_{y=\pm 2}=\pm 10;\ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_{\text{ст}}\\ \dot{y}=0}}=\left.5\dot{y}\right|_{\dot{y}=0}+\left.6y\right|_{y=\pm 2}=\pm 12.$$

Запишем окончательно линеаризованное уравнение, сократив на 2 левую и правую его часть

$$\Delta\ddot{y}\pm 5\Delta\dot{y}\pm 6\Delta y=-6e^{-t}. \qquad (3.1.9)$$

Альтернативной формой записи уравнения (3.1.5) является форма, в которой связь между входом и выходом системы производится посредством некоторого оператора, осуществляющего операцию над входным сигналом, чтобы получить выходной. Для этого обозначим оператор дифференцирования по времени через $p=\frac{d}{dt}$. Тогда $p^k y=\frac{d^k y}{dt^k}$, при этом $p^0=1$ означает отсутствие дифференцирования. Тогда выражение (3.1.5) можно переписать в таком виде

$$a_0p^n y(t)+a_1p^{n-1}y(t)+\ldots+a_n y(t)=b_0p^m r(t)+\ldots+b_m r(t). \qquad (3.1.10)$$

Решив формально последнее уравнение относительно выхода y, получим

$$y(t)=\frac{b_0p^m+...+b_m}{a_0p^n+...+a_n}\cdot r(t)=W(p)\cdot r(t), \tag{3.1.11}$$

где введено обозначение

$$W(p)=\frac{b_0p^m+...+b_m}{a_0p^n+...+a_n}=\frac{N(p)}{D(p)}, \tag{3.1.12}$$

а $N(p)$ и $D(p)$ – это полиномы степени m и n соответственно.

Дробь (3.1.12) носит название *передаточной функции* или оператора системы. Пока будем рассматривать ее как удобную форму записи линейного дифференциального уравнения (3.1.11).

3.1.3. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим уравнение (3.1.10). Если правая часть этого уравнения тождественно равна нулю, то такое уравнение называется *однородным*

$$a_0p^ny(t)+a_1p^{n-1}y(t)+...+a_ny(t)=0. \tag{3.1.13}$$

Уравнение же (3.1.10) называют соответственно *неоднородным* дифференциальным уравнением.

Уравнение (3.1.13) имеет ровно n линейно независимых решений. Необходимое и достаточное условие линейной независимости произвольных n решений этого уравнения состоит в отличие от нуля определителя Вронского или вронскиана:

$$V(t)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ py_1 & py_2 & \dots & py_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{n-1}y_1 & p^{n-1}y_2 & \dots & p^{n-1}y_n \end{vmatrix}, \tag{3.1.14}$$

где $y_1,...,y_n$ – решения уравнения (3.1.13).

Поскольку $y_1,...,y_n$ – решения линейного уравнения (3.1.13), то решением того же уравнения будет являться также и любая линейная комбинация отдельных решений y_k.Таким образом, общее решение уравнения (3.1.13) записывается в виде:

$$y_{\text{о}}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t), \qquad (3.1.15)$$

где c_k – произвольные постоянные, определяемые обычно из начальных условий.

Общее решение неоднородного уравнения (3.1.10) состоит из суммы $y_{\text{о}}(t)$ общего решения однородного уравнения (3.1.13) и любого произвольного (частного) решения $y_{\text{н}}(t)$, удовлетворяющего уравнению (3.1.10):

$$y(t) = y_{\text{о}}(t) + y_{\text{н}}(t).$$

Так как $y_{\text{н}}(t)$ не содержит произвольных постоянных, то в решении $y(t)$, также как и в $y_{\text{о}}(t)$, содержится n постоянных. Для их нахождения следует знать начальные или граничные условия.

3.2 Классические методы решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение уравнения (3.1.10) начнем с решения соответствующего ему однородного уравнения (3.1.13).

3.2.1. Однородные уравнения

Предполагаемое решение уравнения (3.1.13) ищем в виде $y(t) = e^{st}$, где s – подлежащая определению постоянная величина. Подставив предполагаемое решение в уравнение (3.1.13), имеем:

$$\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n\right) e^{st} = 0 .$$

Так как последнее уравнение должно удовлетворяться при всех значениях t, нулю должно равняться выражение в скобках:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (3.2.1)$$

где s, как уже было упомянуто, некоторая постоянная алгебраическая величина.

Выражение(3.2.1) называется *характеристическим уравнением*, и непосредственно может быть получено из уравнения (3.1.13). Поскольку в левой части этого уравнения стоит полином n-го порядка с постоянными действительными коэффициентами (этот полином называется *характеристическим*), то оно содержит ровно n корней. Обозначим их через $s_1, s_2, \ldots s_n$. Тогда соответствующие решения уравнения (3.1.13) будут $y_1 = e^{s_1 t}$, $y_2 = e^{s_2 t}, \ldots, y_n = e^{s_n t}$. Если эти n решений линейно независимы (а это согласно (3.1.14) будет, если все s_i различны), то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{o}}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_n e^{s_n t} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{s_k t}. \qquad (3.2.2)$$

Пример 3.2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0. \qquad (3.2.3)$$

Запишем уравнение (3.2.3) в символической форме с применением оператора дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$

$$p^2 y + 5py + 6y = \left(p^2 + 5p + 6\right) y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $s^2 + 5s + 6 = 0$. Его корни $s_1 = -2,\ s_2 = -3$. Общее решение, согласно (3.2.2), равно

$$y_{\text{o}}\left(t\right) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Если какой-то корень (например, j-й) имеет кратность p, то линейно независимыми решениями, соответствующими этому корню, будут

$$y_j = e^{s_j t}, y_{j+1} = te^{s_j t}, \ldots y_{j+p-1} = t^{p-1} e^{s_j t}, \qquad (3.2.4)$$

и общее решение запишется в виде

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + \ldots + c_j e^{s_j t} c_{j+1} t e^{s_j t} + \ldots + c_{j+p-1} t^{p-1} e^{s_j t} + c_{j+p} e^{s_{j+p} t} + \ldots + c_n e^{s_n t}. \quad (3.2.5)$$

Пример 3.3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0. \quad (3.2.6)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (3.2.6), имеет кратный корень $s_{1,2} = -1$, поэтому общее решение составляем по формуле (3.2.4)

$$y_\text{o}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Некоторые из корней s_i могут быть комплексными. В этом случае удобнее решения (3.2.2) представить в иной форме. Поскольку коэффициенты уравнения (3.2.1) это действительные числа, для каждого комплексного корня должен быть комплексно сопряженный, то есть для корня $s_i = \alpha + j\beta$ (α и β – действительные числа) всегда найдется корень $s_{i+1} = \alpha - j\beta$. Тогда соответствующий вклад этих корней в решение (3.2.2) можно представить в виде

$$y_\text{o}(t) = c_i e^{s_i t} + c_{i+1} e^{s_{i+1} t} = e^{\alpha t}(c_i e^{j\beta t} + c_{i+1} e^{-j\beta t}). \quad (3.2.7)$$

В реальной системе $y_\text{o}(t)$ – действительная функция времени, а, следовательно, произвольные постоянные c_i и c_{i+1} должны быть комплексно сопряженными. Тогда выражение (3.2.7) можно представить как

$$y_\text{o}(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right) = Ce^{\alpha t}\cos\left(\beta t + \varphi\right).$$

где A и B (C и φ) – действительные числа.

В последнем выражении связи произвольных постоянных определяются обычными формулами приведения тригонометрических функций $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = -\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

Пример 3.4. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0. \tag{3.2.8}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (3.2.8), имеет корни $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно формуле (3.2.7) решение будет иметь вид

$$y_{\mathrm{o}}(t) = e^{-0,5t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3.2.2. Неоднородные уравнения

Предполагая, что входной сигнал $r(t)$ известен, правую часть уравнения (3.1.10) можно представить как функцию $f(t)$, называемую иногда *вынуждающей функцией*, и переписать уравнение (3.1.10) в виде

$$a_0 p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t). \tag{3.2.9}$$

Для определения частного решения $y_{\text{н}}(t)$ существует два стандартных метода – *метод неопределенных коэффициентов* и *метод вариации (Лагранжа) параметров* [10].

Метод неопределенных коэффициентов может быть применен в том случае, если вынуждающая функция $f(t)$ имеет конечное число линейно независимых производных. Функция $f(t)$ в этом случае может быть многочленом целой положительной степени t или состоять из комбинации экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической функций. Идея метода состоит в том, что предполагаемое решение $y_{\text{н}}(t)$ представляет собой линейную комбинацию составляющих $f(t)$ и их производных, при этом каждый элемент этой линейной комбинации входит с неопределенными коэффициентами. Далее предполагаемое решение подставляется в уравнение (3.2.9), а неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы это уравнение удовлетворялось при всех значениях t.

Пример 3.5. Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=1-e^{-t}. \qquad (3.2.10)$$

Правая часть уравнения – это сумма константы 1 и экспоненты e^{-t}. Производная константы – нуль, производная экспоненты – та же экспонента, поэтому предполагаемое решение представляем в виде суммы двух слагаемых, первое из которых умножаем на неопределённый коэффициент A, а второй – на B:

$$y_{\text{н}}(t)=A+Be^{-t}.$$

Вычисляем производные

$$\frac{dy_{\text{н}}(t)}{dt}=-Be^{-t},$$
$$\frac{d^2y_{\text{н}}(t)}{dt^2}=Be^{-t},$$

и подставляем предполагаемое решение и найденные производные в уравнение (3.2.10)

$$Be^{-t}-5Be^{-t}+6A+6Be^{-t}=1-e^{-t}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых составляющих в правой и левой части последнего уравнения, находим $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$y_{н}(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

В том случае, когда отдельные члены $f(t)$ в точности совпадают по виду с какой-либо составляющей решения $y_{о}(t)$ однородного уравнения, процедура решения предполагает в общем случае умножение на t соответствующих составляющих в выражении для $y_{н}(t)$. Подобная схема сохраняется, когда член $f(t)$ содержит дополнительный множитель t^{n}. Если же какой-либо член $f(t)$ соответствует кратному корню характеристического уравнения (например, кратности m), то соответствующий член в $y_{н}(t)$ следует умножить на t^{m}.

Пример 3.6. Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=e^{-t}.$$

Правая часть уравнения – e^{-t}, и частное решение следовало бы представить в форме $y_{н}(t)=Ae^{-t}$, но обратив внимание на левую часть уравнения, замечаем, что общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{о}(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t},$$

поскольку имеется кратный (кратности два) корень, равный минус единице. Поэтому предполагаемое частное решение нужно умножить на t^2

$$y_{н}(t)=At^2e^{-t}.$$

Определив производные

$$\frac{dy_{н}(t)}{dt}=\left(2At-At^2\right)e^{-t},$$

$$\frac{d^2y_{н}(t)}{dt^2}=\left(2A-4At+At^2\right)e^{-t},$$

и подставив все необходимое в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\left(2A-4At+At^2\right)e^{-t}+2\left(2At-At^2\right)e^{-t}+At^2e^{-t}=e^{-t}.$$

Приведя подобные члены в последнем уравнении, получим $2Ae^{-t}=e^{-t}$, откуда с очевидностью имеем $A=\dfrac{1}{2}$ и, таким образом,

$$y_{\text{н}}(t)=\frac{t^2}{2}e^{-t}.$$

Метод вариации параметров может быть применен для любых функций $f(t)$ независимо от того, имеет или не имеет эта функция конечное число независимых производных. Также этот метод может быть применен и для нестационарных систем, когда коэффициенты a_i уравнения (3.1.10) зависят от времени.

Метод вариации параметров предполагает нахождение частного решения на основе составляющих решения однородного уравнения, предполагая, что это решение уже известно.

Чтобы было понятнее, начнем пояснение метода вариации параметров с уравнения первого порядка:

$$\left(a_0p+a_1\right)y(t)=f(t). \tag{3.2.11}$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\left(a_0p+a_1\right)y(t)=0 \tag{3.2.12}$$

содержит одну составляющую $y_{\text{о}}(t)=cy_1$. Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{н}}(t)=uy_1. \tag{3.2.13}$$

где u – неизвестная пока функция времени.

Подставляя решение (3.2.13) в уравнение (3.2.11), имеем

$$a_0(u\dot{y}_1 + \dot{u}y_1) + a_1uy_1 = f(t),$$

или, делая очевидные преобразования, получим

$$a_0\dot{u}y_1 + u(a_0\dot{y}_1 + a_1y_1) = f(t).$$

В последнем уравнении выражение в скобках равно нулю, так как y_1 является решением уравнения (3.2.12). Следовательно

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0 y_1} f(t), \tag{3.2.14}$$

откуда, интегрируя, можно найти *u*.

Пример 3.7. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}.$$

Однородное уравнение имеет решение $y_{\text{о}}(t) = Ce^{-t}$, так что $y_1(t) = e^{-t}$ и, согласно (3.2.14)

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0 y_1} f(t) = \frac{1}{e^{-t}} e^{-t} = 1.$$

Интегрируя, получим $u(t) = t$ и $y_{\text{н}}(t) = te^{-t}$. Общее решение равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$y(t) = y_{\text{н}}(t) + y_{\text{о}}(t) = te^{-t} + Ce^{-t}.$$

Возьмем далее уравнение второго порядка

$$\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) y(t) = f(t). \tag{3.2.15}$$

Решение однородного уравнения

$$\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) y(t) = 0 \tag{3.2.16}$$

состоит из двух слагаемых $y_\text{о}(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Частное решение предполагаем в виде

$$y_\text{н}(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2, \tag{3.2.17}$$

где уже две неизвестные функции u_1 и u_2, следовательно, необходимы два условия для их определения.

Одно из условий – это удовлетворение уравнения (3.2.15) при подстановке (3.2.17), а второе можно выбрать любым наиболее удобным образом. Запишем, например, $\dot{y}_\text{н}$:

$$\dot{y}_\text{н} = u_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_1 y_1 + u_2 \dot{y}_2 + \dot{u}_2 y_2$$

и положим для упрощения последнего уравнения

$$\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 = 0. \tag{3.2.18}$$

Уравнение (3.2.18) возьмем в качестве второго условия. Определяя производные $\dot{y}_\text{н}$ и $\ddot{y}_\text{н}$ и подставляя их в уравнение (3.2.15), получим

$$a_0(u_1\ddot{y}_1 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + a_1(u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2) + a_2(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(t).$$

После преобразования

$$a_0(\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + u_1(a_0\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_1) + u_2(a_0\ddot{y}_2 + a_1\dot{y}_2 + a_2 y_2) = f(t).$$

Учитывая, что y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению (3.2.16), имеем

$$\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 = \frac{f(t)}{a_0}. \tag{3.2.19}$$

Совместное решение (3.2.18) и (3.2.19) по правилу Крамера дает

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 f(t)}{a_0(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2)}, \qquad \dot{u}_2 = \frac{y_1 f(t)}{a_0(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2)}. \qquad (3.2.20)$$

Знаменатель выражений (3.2.20), являющийся вронскианом уравнения (3.2.16), отличен от нуля, так как решения y_1 и y_2 линейно независимы, и, следовательно, решения $\dot{u}_1$ и $\dot{u}_2$ всегда существуют. Интегрируя (3.2.20) получаем u_1, u_2 и частное решение в форме (3.2.17).

Пример 3.8. Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}$$

из примера 3.6 методом вариации параметров.

Общее решение соответствующего однородного уравнения равно

$$y_{\text{o}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t},$$

так что $y_1(t) = e^{-t}$, а $y_2(t) = te^{-t}$. Подсчитаем вронскиан

$$V(t) = y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 = e^{-t}\left(e^{-t} - te^{-t}\right) + e^{-t}\left(te^{-t}\right) = e^{-2t}.$$

Затем по формулам (3.2.20) вычислим $\dot{u}_1$ и $\dot{u}_2$

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 f}{a_0 V} = \frac{-te^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}} = -t,$$
$$\dot{u}_2 = \frac{y_1 f}{a_0 V} = \frac{e^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}} = 1.$$

Проинтегрировав последние соотношения, получим

$$u_1 = -\frac{t^2}{2},$$
$$u_2 = t.$$

По формуле (3.2.17) получаем окончательно частное решение, совпадающее с результатом примера 3.6

$$y_{\text{н}}\left(t\right) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\frac{t^2}{2}e^{-t} + t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{2}e^{-t}\ .$$

Теперь возьмем уравнение произвольного n-го порядка типа (3.2.8). Решение соответствующего однородного уравнения (3.1.13) имеет вид $y_{\text{о}} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, а частное решение ищем в виде

$$y_{\text{н}}(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n. \qquad (3.2.21)$$

Аналогично условиям (3.2.18) и (3.2.19) производные от u_i находим из уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 + \ldots + \dot{u}_n y_n &= 0,\\
\dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + \ldots + \dot{u}_n \dot{y}_n &= 0,\\
\ldots.\qquad\qquad \ldots \qquad\qquad &\ldots\\
\dot{u}_1 y_1^{(n-1)} + \dot{u}_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \dot{u}_n y_n^{(n-1)} &= \frac{f(t)}{a_0}.
\end{aligned}$$

Эта система уравнений решается на основе правила Крамера

$$\dot{u}_i = \frac{V_{ni}(t) f(t)}{a_0 V(t)},\ i = \{1, 2, \ldots, n\}\ , \qquad (3.2.22)$$

где $V(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & \ldots & y_n \\ \dot{y}_1 & \ldots & \ldots & \dot{y}_n \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ – определитель Вронского, а $V_{ni}(t)$ – ni-е алгебраическое дополнение этого определителя.

Знаменатель выражения (3.2.22) отличен от нуля, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – независимые решения однородного дифференциального уравнения.

Интегрируя выражения (3.2.22), подставляем результат в формулу (3.2.21) и определяем частное решение $y_{\text{н}}$.

Из примеров (3.2.4) – (3.2.7) видно, что метод неопределенных коэффициентов зачастую проще метода вариации параметров, однако последний метод более общий, поскольку не имеет ограничений на правую часть уравнения.

3.2.3. Вычисление постоянных интегрирования

Произвольные постоянные в решении однородного уравнения вычисляются на основе начальных или граничных условий. В большинстве случаев для решения дифференциального уравнения n-го порядка при определении постоянных интегрирования используют значения $y(t)$ и ее $n-1$ производных при $t = t_{0+}$. Обозначение t_{0+} означает, что значения выхода $y(t)$ и его производных заданы непосредственно после момента t_0. Очень часто полагают t_0=0. Начальные условия обычно определяются, исходя из запасенной системой энергии к моменту $t = t_{0+}$. Очень важно, что постоянные интегрирования зависят также от вынуждающей функции и не могут быть определены, пока не найдена составляющая решения $y_{\text{н}}(t)$.

В ряде важных случаев начальные условия нулевые. Для уравнения n-го порядка (3.2.8) это означает, что

$$y(t_0) = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0} = \ldots = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\Big|_{t=t_0} = 0. \tag{3.2.23}$$

Рассмотренный метод вариации параметров может быть использован и для получения общего решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям (3.2.23).

Действительно, возьмем, например, уравнение первого порядка. Объединяя уравнения (3.2.13) и (3.2.14) можно записать

$$y(t) = y_1(t)\big(u(t) - u(t_0)\big) = y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(\xi)}{a_0 y_1(\xi)} d\xi . \tag{3.2.24}$$

Верхний предел в (3.2.24) соответствует частному решению, а нижний предел дает постоянную интегрирования в решении однородного уравнения. Причем из (3.2.24) следует, что $y(t_0)$=0.

При $n = 2$ объединяются уравнения (3.2.17) и (3.2.20):

$$y(t) = y_1(t)\left(u_1(t) - u_1(t_0)\right) + y_2(t)\left(u_2(t) - u_2(t_0)\right) =$$
$$= y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{a_0 V(\xi)} d\xi + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{a_0 V(\xi)} d\xi. \quad (3.2.25)$$

Из последней формулы видно, что $y(t_0)$=0. Возьмем производную по времени от правой и левой частей выражения (3.2.25):

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_1(t)\left(u_1(t) - u_1(t_0)\right) + \dot{y}_2(t)\left(u_2(t) - u_2(t_0)\right) + \left[y_1(t)\dot{u}_1(t) + y_2(t)\dot{u}_2(t)\right].$$

Слагаемое в квадратных скобках согласно (3.2.18) равно нулю, следовательно, выполняется нулевое начальное условие и для производной $\dot{y}(t_0) = 0$.

В общем случае уравнения n-го порядка при нулевых начальных условиях из выражений (3.2.21) и (3.2.22) следует

$$y(t) = y_1(t)\left(u_1(t) - u_1(t_0)\right) + \ldots + y_n(t)\left(u_n(t) - u_n(t_0)\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\int_{t_0}^{t} \frac{V_{ni}(\xi)}{a_0 V(\xi)} f(\xi) d(\xi). \quad (3.2.26)$$

3.3 Методы преобразований

3.3.1. Ряды Фурье и интегральное преобразование Фурье

Пусть $f(t)$ – произвольная кусочно-непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную первую производную. Функция $f(t)$ определена на отрезке $[-T/2, T/2]$, а на всю остальную ось продолжается периодически, то есть $f(t)$ – периодическая с периодом T функция.

Как известно, эта функция может быть всюду, кроме разве лишь точек разрыва, разложена в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{2}{T}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin\frac{2\pi}{T} nt\right), \quad (3.3.1)$$

где $a_0 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad a_n = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}ntdt, \quad b_n = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}nt$.

Удобнее для дальнейших выкладок представить ряд (3.3.1) в комплексном виде. Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

имеем

$$a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t = \frac{a_n}{2}(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}) - j\frac{b_n}{2}(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}) =$$
$$= e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) + e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right). \quad (3.3.2)$$

Введем функцию от n следующим образом

$$F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right) = a_n - jb_n = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}ntdt - j\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}ntdt =$$
$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt. \quad (3.3.3)$$

Тогда, обозначив для краткости $\omega = (2\pi/T)n$, из (3.3.2) с учетом (3.3.3) получим

$$a_n \cos\frac{2\pi}{T}nt + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nt = \frac{F(j\omega)}{2}e^{j\omega t} + \frac{F(-j\omega)}{2}e^{-j\omega t},$$

откуда ясно, что ряд (3.3.1) можно представить так:

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}, \qquad (3.3.4)$$

где $\omega=0,\pm 2\pi/T,\pm(2\pi/T)2,...,\pm(2\pi/T)n$ ...

В выражении (3.3.3) и (3.3.4) функция комплексной переменной $F(j\omega)$ определена только в дискретных точках. Такие функции называются *решетчатыми*. Функция $F(j\omega)$ называется *комплексным частотным спектром* периодической функции $f(t)$. Этот спектр дискретный (физики называют такие спектры линейчатыми). Модуль комплексной функции $F(j\omega)$ определяет амплитуду соответствующей составляющей спектра, а фаза – смещение по фазе этой составляющей.

Одной из основных теорем теории рядов Фурье является ***теорема Римана – Лебега.***

Теорема 3.3.1 (Римана – Лебега). Если функция $f(t)$ интегрируема на интервале (a,b), то при $\lambda\to\infty$

$$\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt\to 0,\quad \int_a^b f(t)\sin\lambda t dt\to 0.$$

Теорема Римана – Лебега имеет следующие важные следствия.

Следствие 1. Коэффициенты Фурье любой интегрируемой функции стремятся к нулю с ростом n.

Следствие 2. Поведение ряда Фурье в некоторой точке t зависит только от поведения функции в непосредственной окрестности этой точки (принцип локализации).

Формула (3.3.4) может быть обобщена и для непериодических функций, которые можно представить как периодические с периодом $T\to\infty$. В этом случае интервал между соседними частотами спектра $\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=2\pi/T$ будет стремиться к нулю при $T\to\infty$. Следовательно, с увеличением периода T частóты составляющих спектра приближаются друг к другу, образуя в пределе сплошной спектр.

При $T\to\infty$ из (3.3.4) получаем, умножив и разделив правую часть на $\Delta\omega=2\pi/T$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}F\left(j\omega\right)e^{j\omega t}\Delta\omega. \qquad (3.3.5)$$

Переходя к пределу, из суммы в (3.3.5) получим интеграл

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(j\omega\right)e^{j\omega t}d\omega, \qquad (3.3.6)$$

а из (3.3.3) будем иметь

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt\ . \qquad (3.3.7)$$

Преобразования (3.3.7) и (3.3.6) называются соответственно прямым и обратным *преобразованием Фурье*.

Учитывая предельный переход, интеграл в правой части формулы (3.3.7) понимается в смысле главного значения.

Условия, необходимые для существования ряда Фурье, переносятся и на интеграл Фурье. Функция времени должна быть однозначной, содержать конечное число максимумов, минимумов и разрывов.

Кроме того, для существования интеграла (3.3.7) требуется абсолютная интегрируемость функции $f\left(t\right)$, то есть выполнение условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t\right)dt\right|<\infty. \qquad (3.3.8)$$

Аналогично для существования интеграла (3.3.6) достаточно абсолютной интегрируемости функции-изображения $F\left(j\omega\right)$.

Представим экспоненту в интегралах (3.3.6) и (3.3.7) по формуле Эйлера и выделим только вещественную часть. Получим

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

$$F_c(\omega)=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt.$$

Эти выражения определяют *косинус-преобразование Фурье*.

Выделяя аналогично чисто мнимую часть в интегралах (3.3.6) и (3.3.7), получаем *синус-преобразование Фурье.*

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

$$F_s(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt.$$

Если $f(t)$ – четная функция, то $F(j\omega) = F_c(\omega)$; если $f(t)$ – нечетная функция, то $F(j\omega) = jF_s(\omega)$.

Пример 3.9. Определить частотный спектр прямоугольного импульса (см. рис. 3.1, *а*)

$$f(t) = \begin{cases} P & \text{при } |t| \le \dfrac{2}{P}, \\ 0 & \text{при } |t| > \dfrac{2}{P}. \end{cases}$$

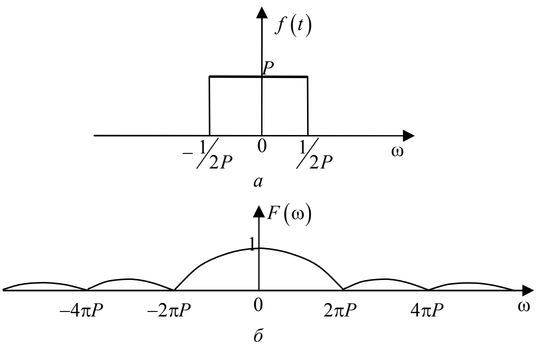


Рис. 3.1. Импульсный сигнал и его частотный спектр

Поскольку исходная функция четная, для определения спектра можно воспользоваться косинус-преобразованием Фурье

$$F(\omega) = F_c(\omega) = 2\int_0^{1/2P} P\cos\omega t dt = \frac{\sin\frac{\omega}{2P}}{\frac{\omega}{2P}}.$$

График полученного спектра изображен на рис. 3.1, *б*. При стремлении P к бесконечности $f(t)$ превращается в единичный мгновенный импульс, а частотный спектр в пределе – в константу, равную единице.

Приведенный пример иллюстрирует обратно пропорциональную взаимосвязь между длительностью импульса и шириной его частотного спектра.

Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют соответственно преобразование Фурье $F(j\omega)$ и $G(j\omega)$. Тогда обратное преобразование Фурье от произведения изображений равно свертке функций $f(t)$ и $g(t)$. Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-j\omega t}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Полагая в последнем выражении $t = 0$, получим формулу, известную как *равенство Парсеваля:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(-\tau)d\tau,$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(-j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Если положить $f = g$, то равенство Парсеваля будет иметь вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^2 dt.$$

Преобразование Фурье играет важную роль при частотном исследовании систем и сигналов, но находит значительно меньшее распространение непосредственно для решения дифференциальных уравнений при произвольных входных сигналах, поэтому остальные свойства преобразования Фурье целесообразно изучить по аналогичным свойствам преобразования Лапласа, которые изложены в соответствующем разделе.

3.3.2. Интегральные преобразования Лапласа, Карсона, Хевисайда

Определение преобразований. Условие (3.3.8) часто не выполняется даже для очень простых функций. Один из путей, позволяющих расширить преобразование (3.3.6), (3.3.7) для значительно большего класса функций, заключается в следующем. Если условие (3.3.8) не выполняется для функции $f(t)$, то оно может выполняться для функции $f_1(t)=f(t)e^{-ct}$, где c больше радиуса сходимости функции $f(t)$ [1]. Практический интерес в теории систем представляют обычно функции, определенные при $t\ge 0$. Поэтому ограничимся классом функций, тождественно равных нулю при $t<0$. Найдем преобразование Фурье функции $f_1(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(c+j\omega)t}dt.$$

Обозначив $s=c+j\omega$, получим функцию комплексной переменной s

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt\ . \qquad (3.3.9)$$

[1] Подобные функции называются функциями экспоненциального типа.

Преобразование, определяемое формулой (3.3.9) называется *преобразованием Лапласа*[1].

Вообще говоря, интеграл (3.3.9) можно представить как предел

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\lim_{\substack{a\to 0\\ M\to\infty}}\int_a^M f(t)e^{-st}dt.$$

При этом a может стремиться к нулю, оставаясь все время положительной величиной $(a\to +0)$, либо, оставаясь все время отрицательной величиной $(a\to -0)$. В связи с этим можно определять преобразование Лапласа как левостороннее $(a\to -0)$, или как правостороннее $(a\to +0)$. Обычно удобнее рассматривать правостороннее преобразование Лапласа, когда $a\to +0$. Именно в таком смысле и будем в дальнейшем говорить о преобразовании Лапласа без дополнительного об этом упоминания. При этом начальные условия для самих функций и ее производных будут, естественно, рассматриваться в точке +0.

Нетрудно получить формулу обращения для преобразования Лапласа, которая по изображению восстанавливала бы оригинал. Так как при фиксированном c функцию $F(s)=F(c+j\omega)$ можно рассматривать как результат преобразования Фурье функции $f_1(t)=f(t)e^{-ct}$, то, применяя к функции $F(c+j\omega)$ обратное преобразование Фурье, получим

$$f_1(t)=f(t)e^{-ct}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(c+j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Умножив правую и левую часть последнего выражения на e^{ct}/j, и сделав обратную замену $c+j\omega=s$, имеем

[1] Строго говоря, формула (3.3.9) задает так называемое *одностороннее* преобразование Лапласа в отличие от *двухстороннего* преобразования, у которого нижний предел в интеграле (3.3.9) равен минус бесконечности. Для функций, тождественно равных нулю при отрицательном времени, одностороннее и двухстороннее преобразования совпадают.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds. \qquad (3.3.10)$$

Интегрирование в (3.3.10) ведется снизу вверх вдоль прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на величину c. Величина c выбирается правее всех полюсов функции $F(s)$. Минимальная величина c, удовлетворяющая этому условию, называется *абсциссой абсолютной сходимости*. Формула (3.3.10) задает обратное преобразование Лапласа.

Символическая запись преобразования Лапласа часто имеет вид

$$F(s)=L\{f(t)\},$$

а обратного преобразования

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}.$$

Интеграл (3.3.10) можно вычислить, воспользовавшись, например, теоремой о вычетах [11], которая гласит: интеграл по замкнутому контуру, не имеющему особенностей подынтегральной функции, равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, охватываемых этим контуром, помноженной на коэффициент $2\pi j$, то есть

$$\oint_{\Gamma}F(s)ds=2\pi j\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}F(\xi_i),$$

где ξ_i – полюсы $F(\xi)$, попадающие в контур Γ, n – число этих полюсов, а интегрирование ведется против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться сформулированной теоремой для вычисления интеграла (3.3.10), нужно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого размера через левую полуплоскость.

Если абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, то $s=j\omega$ и формулы (3.3.9) и (3.3.10) определяют так называемое *одностороннее* преобразование Фурье (в отличие от *двухстороннего* преобразования, определяемого формулами (3.3.6) и (3.3.7)).

Пример 3.10. Найти преобразование Лапласа от единичной ступенчатой функции $1(t)$[1]. Пользуясь формулой (3.3.9) получаем

$$L\big(1(t)\big)=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}=-\lim_{t\to\infty}e^{-st}+\frac{1}{s}.$$

Первое слагаемое стремиться к нулю, если вещественная часть s больше нуля $\mathrm{Re}\,s>0$, и, таким образом, $L\big(1(t)\big)=\frac{1}{s}$.

Пример 3.11. Найти преобразование Лапласа от экспоненты e^{-at}.
Подставляя заданную функцию в формулу (3.3.9) получаем

$$L\left(e^{-at}\right)=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}=-\lim_{t\to\infty}e^{-(s+a)t}+\frac{1}{s+a}.$$

Первое слагаемое стремиться к нулю, если выполняется условие $\mathrm{Re}\,s>-a$, и, таким образом, $L\left(e^{-at}\right)=\frac{1}{s+a}$.

Другими вариантами преобразования Лапласа являются преобразование Карсона и преобразование Хэвисайда. Преобразование Карсона отличается от преобразования Лапласа множителем s в формуле прямого преобразования и соответственно множителем $1/s$ в формуле обратного преобразования. А преобразование Хэвисайда является частным случаем преобразования Карсона, если функция-оригинал и ее производные имеют нулевые начальные условия.

Преобразование Карсона удобно тем, что, как нетрудно вычислить, изображение единичной функции есть единица:

$$F_k(s)=s\int_0^\infty 1(t)\cdot e^{-st}dt=-s\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty=1.$$

[1] Единичная функция $1(t)$ равна единице при $t\geq 0$ и нулю при $t<0$ и часто применяется в теории управления.

Свойства преобразования Лапласа. Одно из основных свойств преобразования Лапласа заключается в том, что изображение производной от функции $f(t)$ очень просто связано с изображением самой функции. Действительно, найдем изображение по Лапласу от производной df/dt, интегрируя по частям:

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt = e^{-st}\cdot f(t)\ \Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)dt = sF(s) - f(0), \quad (3.3.11)$$

где $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$.

Пользуясь формулой (3.3.11) можно найти изображение и для *n*-й производной:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}f^1(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \quad (3.3.12)$$

Если начальные условия для функции и всех ее производных до $(n-1)$ -й включительно нулевые, то выражение (3.3.12) упрощается

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(t)\}.$$

Двойственным к свойству, описываемому уравнением (3.3.12), является свойство *дифференцирования преобразования Лапласа* (теорема об умножении на *t*). Для целого положительного *n* имеем

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt = (-1)^n L\left\{t^n f(t)\right\}. \quad (3.3.13)$$

Пример 3.12. Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = t$.

Поскольку речь идет об одностороннем преобразовании Лапласа, исходную функцию можно представить как $f(t) = t\cdot 1(t)$, и тогда по формуле (3.3.13) для *n*=1 и согласно результату примера 3.10 получим

$$L\{t\} = (-1)\frac{d(1/s)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

Пример 3.13. Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = te^{-at}$. Применяя формулу (3.3.13) для n=1, и пользуясь результатом примера 3.11, получим

$$L\left\{te^{-at}\right\} = (-1)\frac{d\left(s+a\right)^{-1}}{ds} = \frac{1}{\left(s+a\right)^2}.$$

Следующие два очевидных свойства позволяют считать оператор Лапласа линейным оператором: изображение суммы равно сумме изображений

$$L\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = L\left\{f_1(t)\right\} + L\left\{f_2(t)\right\},$$

и возможность выносить постоянный множитель за оператор Лапласа

$$L\left\{af(t)\right\} = aL\left\{f(t)\right\}.$$

Для нахождения прямого и обратного преобразований Лапласа полезны еще ряд свойств, которые можно сформулировать в виде теорем.

Теорема запаздывания. Найдем $L\left\{f(t-a)\right\}$:

$$L\left\{f(t-a)\right\} = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_{-a}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau =$$
$$= e^{-sa}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sa}\cdot L\left\{f(t)\right\}. \qquad (3.3.14)$$

Теорема о конечном значении. Если существует $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, то

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sL\left\{f(t)\right\}. \qquad (3.3.15)$$

Для доказательства устремим s к нулю в обеих частях выражения (3.3.11)

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{df}{dt}dt = \int_0^\infty df = \lim_{s\to 0} s\cdot L\{f(t)\} - f(0),$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} s\cdot L\{f(t)\} - f(0),$$

и окончательно приходим к (3.3.15).

Теорема о начальном значении. Начальное значение функции равно пределу при $s\to\infty$ от ее изображения, умноженного на s

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot L\{f(t)\}. \tag{3.3.16}$$

Действительно, рассмотрим опять формулу (3.3.11) и представим интеграл в левой части в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \int_0^M \frac{df}{dt}e^{-st}dt + \int_M^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt, \tag{3.3.17}$$

где $M > 0$. Заменим в первом интеграле *df/dt* на максимальное на интервале $0 < t < M$ значение (пусть оно равно *A*). Тогда

$$\int_0^M \frac{df}{dt}e^{-st}dt \le A\int_0^M e^{-st}dt = A\frac{1-e^{-sM}}{s}.$$

Устремляя s к бесконечности, имеем

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^M \frac{df}{dt}e^{-st}dt = 0.$$

Второй интеграл также в пределе равен нулю, так как

$$\left|\int_M^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt\right| < e^{-sM}\left|\int_0^\infty \frac{df}{dt}dt\right| = e^{-sM}(f(\infty) - f(0)).$$

Таким образом, левая часть выражения (3.3.17) при $s \to \infty$ стремиться к нулю и из (3.3.11) сразу следует равенство (3.3.16).

Теорема дифференцирования. Изображение производной от функции по параметру равно производной от изображения по этому же параметру

$$L\left\{\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial L\{f(t,a)\}}{\partial a}. \qquad (3.3.18)$$

Формула (3.3.18) легко получается переменной местами операции интегрирования и дифференцирования в преобразовании Лапласа от производной по параметру. А это возможно вследствие линейности операции интегрирования и дифференцирования.

Пример 3.14. Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = te^{-at}$.

Замечаем, что исходная функция – это производная от экспоненты $-e^{-at}$ по параметру a

$$f(t) = te^{-at} = \frac{\partial\left(-e^{-at}\right)}{\partial a}.$$

Применив формулу (3.3.18) и воспользовавшись результатом примера 3.11, получим

$$L\left\{te^{-at}\right\} = L\left\{\frac{\partial\left(-e^{-at}\right)}{\partial a}\right\} = -\frac{\partial(s+a)^{-1}}{\partial a} = \frac{1}{(s+a)^2},$$

что совпадает с результатом примера 3.13.

Теорема свертки во временной области. Произведение изображений равно изображению свертки оригиналов

$$F_1(s)\cdot F_2(s) = L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau\right\}. \qquad (3.3.19)$$

Действительно, применив оператор Лапласа к правой части выражения (3.3.19), получим цепочку формул

$$L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau\right] dt = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-st} f_1(t-\tau)\, dt\right] f_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_2(\tau)\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt\right] d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_2(\tau)\, d\tau \cdot \int_{-\tau}^\infty e^{-s\xi} f_1(\xi)\, d\xi =$$

$$= F_1(s) \cdot F_2(s).$$

При доказательстве формулы (3.3.19) учтено, что $f_1(t) = f_2(t) = 0$ при $t<0$.

Теорема об умножении на экспоненту

$$L\left\{e^{-\lambda t} \cdot f(t)\right\} = F(s+\lambda). \tag{3.3.20}$$

Имеем по определению

$$L\left\{e^{-\lambda t} f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\lambda)t} dt.$$

Правая часть последнего выражения есть не что иное, как изображение по Лапласу от функции $f(t)$ с аргументом $s+\lambda$.

Пример 3.15. Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = te^{-at}$.

Применим формулу (3.3.20), учитывая, что $f(t) = t$. Тогда

$$L\left\{te^{-at}\right\} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=s+a} = \frac{1}{(s+a)^2},$$

что совпадает с результатами примеров 3.13 и 3.14.

Теорема подобия:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \tag{3.3.21}$$

Действительно, в интеграле

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt,$$

введем новую переменную $\tau = at$. Тогда $dt = d\tau/a$ и имеем следующую цепочку формул:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(at)e^{-s\frac{at}{a}}d\left(at\right) = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s\tau}{a}}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Теорема свертки в области изображений. Изображение произведения функций равно свертке их изображений

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1\ (s-\xi)\cdot F_2(\xi)d\xi, \qquad (3.3.22)$$

где вдоль пути интегрирования величина c удовлетворяет соотношению

$$\tau_2 < c < \operatorname{Re} s - \tau_1, \qquad (3.3.23)$$

и

$$\operatorname{Re}\ s > \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_1\cdot\tau_2\}, \qquad (3.3.24)$$

τ_1, τ_2 – абсциссы сходимости для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно.

Имеем:

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1\ (t)\cdot f_2(t)e^{-st}dt,$$

где $f_2(t)$ в правой части заменим по формуле (3.3.10).

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2(\xi)\cdot e^{\xi t}d\xi\right]f_1(t)e^{-st}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2\left(\xi\right)\left[\int_0^\infty f_1(t)e^{-(s-\xi)t}dt\right]d\xi = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2\left(\xi\right)\cdot F_1(s-\xi)d\xi.$$

Для сходимости интегралов Лапласа от функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и их произведения вещественная часть комплексной переменной s должна быть достаточно большой, по крайней мере, больше абсцисс абсолютной сходимости функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, а также их произведения; отсюда следует условие (3.3.24). Для сходимости интеграла в первых квадратных скобках величина c должна превышать τ_2, т.е. должно быть $c > \tau_2$. Сходимость интеграла во вторых квадратных скобках будет обеспечена, если $\operatorname{Re}(s-\xi) > \tau_1$ или $\operatorname{Re}\xi < \operatorname{Re}s - \tau_1$. Объединение этих условий приводит к соотношению (3.3.23).

Пример 3.16. Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = te^{-at}$.

В качестве функции f_1 возьмем экспоненту $f_1(t) = e^{-at}$, а в качестве функции f_2 – t. Тогда согласно выражению (3.3.22) получим

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = L\left\{e^{-at}t\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\frac{1}{s+a-\xi}\right]\frac{1}{\xi^2}d\xi,$$

где линия интегрирования согласно условиям (3.3.23) и (3.3.24) лежит *правее* полюса функции в квадратных скобках подынтегрального выражения.

Стандартная процедура вычисления такого интеграла состоит в применении теоремы Коши о вычетах. Для этого замыкаем контур интегрирования дугой бесконечного радиуса через левую полуплоскость против часовой стрелки. Тогда в контур интегрирования попадает единственный полюс функции $1/s+a-\xi$, равный $\xi = s+a$, а искомое преобразование равно вычету подынтегральной функции в этом полюсе

$$L\left\{e^{-at}t\right\} = \text{вычету}\left\{\frac{1}{(s+a-\xi)\xi^2}\right\}\Bigg|_{\text{в полюсе } \xi=s+a} = \frac{1}{\xi^2}\Bigg|_{\xi=s+a} = \frac{1}{(s+a)^2},$$

что совпадает с результатами предыдущих примеров.

Обратное преобразование Лапласа может быть найдено по таблицам преобразований, которые содержатся в многочисленной справочной литературе.

Определение оригинала часто облегчается в тех случаях, когда изображение по Лапласу представляется в виде отношения двух многочленов с вещественными коэффициентами, при этом степень числителя меньше степени знаменателя. В этом случае можно воспользоваться приёмом, иногда называемым *теоремой разложения*. Разберем этот метод.

Пусть полином знаменателя в изображении Лапласа имеет в общем случае корень s_1 кратности r и различные корни $s_{r+1},...,s_n$, т.е.

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})...(s-s_n)}.$$

Тогда выражение в правой части можно разложить на простые дроби

$$\frac{P(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})...(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}+...+\frac{A_r}{(s-s_1)^r}+\frac{A_{r+1}}{s-s_{r+1}}+...+\frac{A_n}{s-s_n},$$

где $A_k=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-k)!}\left(\dfrac{d^{r-k}}{ds^{r-k}}(s-s_1)^rF(s)\right)_{s=s_1} & (k=1,2,...,r),\\ \left((s-s_k)F(s)\right)_{s=s_k} & (k=r+1,...,n).\end{cases}$

Обратное преобразование Лапласа от каждого слагаемого при таком разложении определяется как экспонента в соответствующей степени либо как подобная же экспонента, помноженная на t в целой положительной степени по теореме об умножении на t.

Пример 3.17. Найти обратное преобразование Лапласа от функции

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2(s^2+3s+2)}.$$

Представим знаменатель в виде сомножителей и разложим выражение на простые дроби

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2(s^2+3s+2)}=\frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s+1}+\frac{A_4}{s+2}. \quad (3.3.25)$$

Вычислим коэффициенты разложения A_1, A_2, A_3, A_4

$$A_1 = \frac{d}{ds}\left(s^2 F(s)\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right)\Big|_{s=0} = \frac{s^2+3s+2-(2s+3)(s+3)}{\left(s^2+3s+2\right)^2}\Bigg|_{s=0} = -\frac{7}{4},$$

$$A_2 = s^2 F(s)\big|_{s=0} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\Bigg|_{s=0} = \frac{3}{2},$$

$$A_3 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s^2(s+2)}\Bigg|_{s=-1} = 2,$$

$$A_4 = (s+2)F(s)\big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s^2(s+1)}\Bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{4}.$$

Подставив найденные коэффициенты в выражение (3.3.25), получим

$$F(s) = -\frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)}. \qquad (3.3.26)$$

Проверить правильность разложения можно, приведя правую часть формулы (3.3.26) к общему знаменателю и сравнивая полученное выражение с исходной функцией.

Осталось перейти к оригиналам каждого слагаемого в правой части выражения (3.33.26)

$$f(t) = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)1(t).$$

Умножение на единичную ступенчатую функцию в последнем выражении означает, что искомая функция равна нулю при отрицательных моментах времени.

3.3.3. Преобразование Лапласа и дифференциальные уравнения

Свойства преобразования Лапласа, описанные в предыдущем подразделе, позволяют успешно применять преобразование Лапласа для решения линейных стационарных (а в некоторых случаях и нестационарных) дифференциальных уравнений. Возьмём дифференциальное уравнение общего вида (3.1.10)

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n\text{-}1} + \ldots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m\text{-}1} + \ldots + b_m) r(t)$$

и применим к правой и левой частям этого уравнения преобразование Лапласа. В результате получим

$$A(s) \cdot Y(s) - M(s) = B(s) \cdot R(s), \tag{3.3.27}$$

где
$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n , \tag{3.3.28}$$

$$M(s) = m_0 s^{n\text{-}1} + \ldots + m_{n-2} s + m_{n-1}, \tag{3.3.29}$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m\text{-}1} + \ldots + b_{m\text{-}1} s + b_m, \tag{3.3.30}$$

причём

$$\begin{gathered} m_0 = a_0 y(0), \\ m_1 = a_0 \dot{y}(0) + a_1 y(0), \\ \ldots \\ m_{n-2} = a_0 y^{(n-2)}(0) + a_1 y^{(n-3)}(0) + \ldots + a_{n-2} y(0), \\ m_{n-1} = a_0 y^{(n-1)}(0) + a_1 y^{(n-2)}(0) + \ldots + a_{n-1} y(0) \ . \end{gathered} \tag{3.3.31}$$

Разрешая уравнение (3.3.27) относительно $Y(s)$ получим

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot R(s) + \frac{M(s)}{A(s)} = W(s) R(s) + W_{\text{н}}(s). \tag{3.3.32}$$

При нулевых начальных условиях второе слагаемое в правой части формулы (3.3.32), как легко видно из (3.3.29) и (3.3.31), равно нулю. Поэтому строгое определение передаточной функции линейной системы, учитывая формулу (3.3.32), можно сформулировать так: *передаточная функция системы $W(s)$ есть отношение изображений по Лапласу выхода системы $Y(s)$ к её входу $R(s)$ при нулевых начальных условиях:*

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{3.3.33}$$

Переходя в формуле (3.3.32) во временну́ю область и применяя теорему свёртки, получим

$$y(t)=\int_{0}^{t} w(t-\tau)\cdot r(\tau)d\tau + w_{\text{н}}(t), \tag{3.3.34}$$

где $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$ – весовая функция системы, равная обратному преобразованию Лапласа от передаточной функции, а $w_{\text{н}}(t)=L^{-1}\{W_{\text{н}}(s)\}$.

Таким образом, мы получим общее решение уравнения (3.1.10), содержащее n произвольных постоянных, роль которых выполняют значения искомой функции $y(0)$ и её $n-1$ производных в начальный момент времени. Конкретная форма решения будет зависеть от того, каковы будут корни характеристического уравнения (3.2.1)

$$A(s)=0.$$

Получение решения $y(t)$ упрощается во многих частных, но широко распространённых в теории систем случаях, именно тогда, когда изображение по Лапласу входного сигнала $R(s)$ представляет дробно-рациональную функцию:

$$R(s)=\frac{N(s)}{P(s)}, \tag{3.3.35}$$

где $N(s)$ и $P(s)$ – некоторые многочлены s.

В этих случаях нет необходимости использовать интеграл свёртки и записывать решение в форме уравнения (3.3.34). Подставив соотношение (3.3.35) в уравнение (3.3.32), получим

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}\cdot\frac{N(s)}{P(s)}+\frac{M(s)}{A(s)}=\frac{B(s)\cdot N(s)}{D(s)}+\frac{M(s)}{A(s)}.$$

Для перехода в область переменной t можно воспользоваться любым методом определения обратного преобразования Лапласа, например, теоремой разложения.

Пример 3.18. Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{dr}{dt}+3r\,,$$

при $r(t)=\begin{cases} t & \text{если } t\ge 0, \\ 0 & \text{если } t<0, \end{cases}$ и нулевых начальных условиях.

Применим преобразование Лапласа к *дифференциальному* уравнению, учитывая, что $L\{t\}=1/s^2$

$$\left(s^2+3s+2\right)Y(s)=(s+3)\frac{1}{s^2}\,.$$

Решим полученное *алгебраическое* уравнение относительно $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{s+3}{s^2\left(s^2+3s+2\right)}\,.$$

Перейдём к оригиналу, используя результат примера 3.3.9

$$y(t)=\left(-\frac{7}{4}+\frac{3}{2}t+2e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)1(t)\,.$$

3.3.4. Разложение произвольных функций по элементарным функциям

Формулы (3.3.6) и (3.3.10) являются частными случаями более общей формулы

$$y(t)=\int_c Y(\lambda)\cdot k(t,\lambda)d\lambda\,, \tag{3.3.36}$$

где интегрирование в случае действительной λ ведётся от -∞ до +∞, а в случае комплексной λ – по контуру в комплексной плоскости так, чтобы интеграл (3.3.36) сходился; $k(t,\lambda)$ представляет собой семейство элементарных функций, по которым раскладывается $y(t)$, а спектральная функция $Y(\lambda)$ служит мерой относительного влияния элементарных функций, составляющих $y(t)$ [10].

Для преобразования Фурье

$$k(t,\lambda)=e^{j\lambda t}/2\pi$$

при $-\infty<t<+\infty$, где λ – действительная переменная, то есть формула (3.3.6) представляет собой разложение функции $y(t)$ по гармоническим составляющим.

Для одностороннего преобразования Лапласа

$$k(t,\lambda)=e^{j\lambda t}/2\pi j$$

при $0<t<\infty$ (переменная λ здесь является комплексной).

Чтобы уравнение (3.3.36) было полезным, нужно уметь находить $Y(\lambda)$ для произвольной функции $y(t)$. Поскольку уравнение (3.3.36) линейно, можно полагать, что $Y(\lambda)$ найдётся в следующем виде:

$$Y(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)k^{-1}(\lambda,t)dt\,, \qquad (3.3.37)$$

где функция $k^{-1}(\lambda,t)$ известна как обратное преобразование от $k(t,\lambda)$.

Соотношение между функциями $k^{-1}(\lambda,t)$ и $k(t,\lambda)$ можно получить, воспользовавшись свойствами дельта-функции. Действительно, положив в формуле (3.3.37) $y(t)=\delta\left(t-\tau\right)$, получим

$$Y(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\tau\right)k^{-1}(\lambda,t)dt=k^{-1}(\lambda,\tau).$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3.3.36), имеем

$$\delta\left(t-\tau\right)=\int_{c} k^{-1}(\lambda,\tau)k(t,\lambda)d\lambda. \qquad (3.3.38)$$

Соотношение (3.3.38) устанавливает связь функций $k^{-1}(\lambda,t)$ и $k(t,\lambda)$.

Например, для одностороннего преобразование Лапласа функция $k^{-1}(\lambda,t)$ равна $e^{-\lambda t}$ при t>0 и нулю при $t \le 0$ (сравни формулу преобразования Лапласа (3.3.9) и формулу (3.3.37)).

Выражение (3.3.37) носит название интегрального преобразования функции $y(t)$ в общем виде. Задавая конкретные функции $k^{-1}(\lambda,t)$, получаем различные интегральные преобразования.

3.3.5. Преобразование Меллина

Наиболее близким по форме к преобразованию Лапласа является преобразование Меллина [12]

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot t^{s-1}dt, \tag{3.3.39}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)t^{-s}ds, \tag{3.3.40}$$

где $s=c+jw$.

Это преобразование тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем, например, для преобразования Лапласа, путём замены переменной.

Например, аналогом теоремы свёртки в теории преобразования Меллина является следующая формула

$$F(s)\cdot G(s)=\int_0^{\infty} t^{s-1}dt\int_0^{\infty} f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Из последней формулы легко получить аналоги равенства Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\tau-j\infty}^{\tau+j\infty} F(s)\cdot G(1-s)ds=\int_0^{\infty} f(t)g(t)dt,$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\tau-j\infty}^{\tau+j\infty} F(s)\cdot G(s)ds=\int_0^{\infty} f(t)g\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

Преобразование Меллина можно успешно применять к решению определённого класса плоских гармонических задач в секториальной области, задач теории упругости, при изучении специальных функций, суммировании рядов и вычислений интегралов.

3.3.6. Преобразования Бесселя

Преобразования Бесселя [12] объединяют целый класс преобразований общего вида

$$f^*(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \cdot K(\lambda t)\,dt,$$

где $K(z)$ – функция Бесселя.

Функции Бесселя относятся к цилиндрическим функциям и задаются формулами:

– функция Бесселя первого рода v-го порядка

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

где $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-t} dt$ – гамма функция Эйлера;

– функция Бесселя второго рода v-го порядка

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}.$$

К преобразованиям Бесселя относятся преобразование Ханкеля, Вебера, Мейера, Конторовича – Лебедева и ряд других преобразований.

3.3.7. Преобразование Гильберта

Возьмём разложение функции $f(t)$ по гармоническим функциям

$$f(t)=\int\limits_0^{\infty}\big(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t\big)d\omega\,, \qquad (3.3.41)$$

где $a(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$, $b(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$.

Положим

$$g(t)=\int\limits_0^{\infty}\big(b(\omega)\cos\omega t-a(\omega)\sin\omega t\big)d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\big(\tau-t\big)\omega\cdot f(\tau)d\tau\,. \qquad (3.3.42)$$

Интеграл в правой части выражения (3.3.42) называется *сопряженным* к интегралу Фурье и получается формальной заменой в (3.3.41) a на b и b на $-a$. Из (3.3.42) имеем

$$g(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{l}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\big(\tau-t\big)\omega\cdot f(\tau)d\tau=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos l\big(\tau-t\big)}{\tau-t}f(\tau)d\tau=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos l\theta}{\theta}\Big[f\big(t+\theta\big)-f\big(t-\theta\big)\Big]d\theta.$$

Применяя теорему Римана – Лебега, окончательно получаем

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{f\big(t+\tau\big)-f\big(t-\tau\big)}{\tau}d\tau\,. \qquad (3.3.43)$$

Аналогично можно получить выражение для $f\big(t\big)$

$$f(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{g\big(t+\tau\big)-g\big(t-\tau\big)}{\tau}d\tau\,. \qquad (3.3.44)$$

Формулы (3.3.43) и (3.3.44) эквивалентны выражениям:

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f\big(x+t\big)-f\big(x-t\big)}{t}dt,$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}dt=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}dt,$$

где символ V.P. означает главное значение интеграла в смысле Коши.

Две последние формулы и представляют собой пару преобразований Гильберта.

3.3.8. Преобразование Лагерра

Примером преобразования, переводящего функцию непрерывного времени в функцию дискретного переменного, является преобразование Лагерра

$$T\{f(t)\}=f^*(n)=\int_0^{\infty}f(t)\cdot L_n(t)e^{-t}dt,\ (n=0,1,2,...)\,, \qquad (3.3.45)$$

где $L_n(t)$ – многочлены Лаггера n-го порядка, определяемые формулой

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right).$$

Обратное преобразование задается в форме бесконечного ряда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^*(n)\cdot L_n(t)\,. \qquad (3.3.46)$$

Преобразование Лагерра применяется для решения *дифференциального уравнения Лагерра*

$$\mathscr{L}\,x+nx=0\,,$$

где $\mathscr{L}\,x(t)=t\,x''(t)+(1-t)\,x'(t)$.

Преобразование Лагерра сводит дифференциальную операцию $\mathscr{L}\,x$ к алгебраической по формуле

$$T\{\mathscr{L}\,x(t)\}=-nx^*(n),\ (n=0,1,2,...)\,.$$

Для преобразования Лагерра может быть определена свертка и построен аппарат операционного исчисления для операторов Лагерра $\mathscr{L}x$.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях возможна линеаризация нелинейных уравнений?
2. В чем различия и что общего между исходным нелинейным уравнением и линеаризованным?
3. Как записывается общее решение однородного линейного дифференциального уравнения в случае некратных и кратных корней характеристического уравнения?
4. Что такое вронскиан системы?
5. Какая форма записи решения для комплексных корней характеристического уравнения?
6. Какие методы существуют для нахождения частного решения уравнения?
7. К каким вынуждающим функциям применим метод неопределенных коэффициентов при решении неоднородных дифференциальных уравнений?
8. В чем состоит необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка?
9. К каким функциям не применимо преобразование Фурье?
10. Как получить из преобразования Лапласа преобразование Фурье?
11. Что такое передаточная функция системы?
12. Назовите основные свойства преобразования Лапласа.
13. Что такое абсцисса абсолютной сходимости?
14. Как получить оригинал по изображению?
15. Чем отличается преобразование Карсона – Хевисайда от преобразования Лапласа?
16. Назовите другие виды интегральных преобразований.

4. ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМ

Будем полагать в этом разделе, что функции $r(t)$ и $y(t)$, то есть входной и выходной сигнал системы, определены на счетном множестве моментов времени. Другими словами время течет дискретно, квантами через равные промежутки, обозначаемые в этом разделе буквой T, то есть $t = kT$, где $k \in N_0$. Для упрощения записи можно выбрать соответствующий масштаб по оси времени и положить T=1, то есть считать $r(k)$ и $y(k)$ как функции, определенные только при целых значениях k.

4.1 Прямой и обратный разностные операторы

4.1.1. Оператор сдвига и разностный оператор

Определим оператор сдвига E так:

$$E\{y(k)\} = y(k+1). \tag{4.1.1}$$

Последовательное применение этого оператора дает в общем случае

$$E^n\{y(k)\} = y(k+n), \tag{4.1.2}$$

где $n \in N_0$.

Разностный оператор Δ можно определить как

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k). \tag{4.1.3}$$

Оператор, определяемый формулой (4.1.3), называют еще *правым* разностным оператором, и он задает так называемую первую прямую разность функции $y(k)$, в отличие от используемого иногда *левого* разностного оператора ∇, определяемого выражением

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$$

и задающего первую обратную разность функции $y(k)$.

Выражение (4.1.3) с учетом (4.1.1) можно записать в виде

$$\Delta y(k) = (E-1)\,y(k),$$

где операторы Δ и E связаны соотношением

$$\Delta = E - 1. \tag{4.1.4}$$

Разности второго, третьего и более высокого порядков определяются по очевидным формулам:

$$\Delta^2 y(k) = \Delta\big(\Delta y(k)\big) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k),$$
$$\Delta^3 y(k) = \Delta\big(\Delta^2 y(k)\big) = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k),$$

или, в общем случае,

$$\Delta^n y(k) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} y(k+n-r), \tag{4.1.5}$$

где через $\binom{n}{r}$ обозначены биномиальные коэффициенты.

С учетом уравнений (4.1.2) и (4.1.4) из выражения (4.1.5) получим

$$\Delta^n y(k) = (E-1)^n y(k) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} E^{n-r} y(k).$$

Операторы Δ и E являются линейными операторами, то есть справедливы следующие соотношения, например, для оператора Δ:

$$\Delta\big(c \cdot y(k)\big) = c\Delta y(k),$$
$$\Delta^n\big(y(k) + x(k)\big) = \Delta^n y(k) + \Delta^n x(k),$$
$$\Delta^n \Delta^m y(k) = \Delta^m \Delta^n y(k) = \Delta^{n+m} y(k).$$

где c – константа, m и n – целые положительные числа.

Таким образом, оператор Δ для функций дискретного переменного является аналогом дифференциального оператора $p = d/dt$ для непрерывных функций. Чтобы еще раз подчеркнуть эту аналогию, рассмотрим производную от непрерывной функции $f(t)$

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{f(t+T) - f(t)}{T}.$$

Если функцию $f(t)$ рассматривать только в дискретные моменты времени $t=kT$ ($k \in N_0$), то оператор сдвига и разностный оператор дадут выражения

$$Ef(t) = f(t+T) \text{ и } \Delta f(t) = f(t+T) - f(t).$$

Тогда получим

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta f(t)}{T},$$

или для случая m-ой производной

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta^m f(t)}{T^m}.$$

Существуют и разностные формулы, аналогичные (но не идентичные) формулам дифференцирования.

Например:

$$\Delta\big(y(k)\cdot x(k)\big) = \Delta y(k)\cdot\Delta x(k) + y(k)\Delta x(k) + \Delta y(k)x(k),$$

$$\Delta\left(\frac{y(k)}{z(k)}\right) = \frac{z(k)\cdot\Delta y(k) - y(k)\cdot\Delta z(k)}{z(k)\cdot z(k+1)}.$$

Дифференцирование многочленов аналогично вычислению разностей *факториальных многочленов* [10]. Произвольный обыкновенный многочлен можно представить суммой факториальных многочленов. Факториальный многочлен m-го порядка определяется как

$$(k)^{(m)} = k(k-1)(k-2)...(k-m+1), \tag{4.1.6}$$

где m – положительное целое число.

Согласно определению разностного оператора, имеем

$$\Delta(k)^{(m)} = m(k)^{(m-1)} = mk(k-1)(k-2)...(k-m+2). \tag{4.1.7}$$

4.1.2. Обратный разностный оператор

Найдем теперь обратный оператор, аналогичный интегральному оператору p^{-1}, при этом

$$p^{-1}(f(t)) = \int f(t)dt + c = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + K, \tag{4.1.8}$$

где c и K – постоянные интегрирования.

Нижний предел t_0, вообще говоря, произвольный и определяется началом отсчета времени при анализе системы (обычно моментом поступления входного воздействия). Величина t_0 формирует часть постоянной интегрирования, именно:

$$c = K - \int f(t)dt\Big|_{t=t_0}.$$

Выражение $y(t) = p^{-1}(f(t))$ является решением уравнения $py(t) = f(t)$.

Соответственно, выполняется соотношение $pp^{-1}f(t) = f(t)$.

По аналогии обратный оператор Δ^{-1} должен иметь такой вид, чтобы выражение $y(k) = \Delta^{-1}(f(k))$ являлось решением уравнения

$$\Delta y(k) = f(k), \tag{4.1.9}$$

или, чтобы удовлетворялось равенство

$$\Delta\Delta^{-1}f\left(k\right)=f\left(k\right). \qquad (4.1.10)$$

Так как

$$\Delta\left(\sum_{n=0}^{k-1}f(n)+K\right)=\left(f(k)+f(k-1)+...+f(0)+K\right)-$$
$$-\left(f(k-1)+...+f(0)+K\right)=f(k),$$

то обратный оператор, удовлетворяющий уравнениям (4.1.9) и (4.1.10), имеет вид

$$\Delta^{-1}f\left(k\right)=\sum_{n=0}^{k-1}f\left(n\right)+K. \qquad (4.1.11)$$

Уравнение (4.1.11), определяющее обратный оператор, можно переписать так

$$\Delta^{-1}f(k)=\sum^{n=k-1}f(n)+c=\sum^{n=k}f\left(n-1\right)+c, \qquad (4.1.12)$$

где суммирование производится по фиктивный переменной n.

Нижний предел в уравнении (4.1.12) не указан, так как можно объединить произвольное число членов $f(0), f(1), f(2),...$ в уравнении (4.1.11) с постоянной суммирования K и образовать новую постоянную c. Таким образом, произвольный предел в уравнении (4.1.12) является аналогом постоянной t_0 в уравнении (4.1.8) и его выбор определяется наиболее выгодным образом для каждого конкретного случая.

В отличие от интегралов, точное вычисление которых требует определенного искусства, а иногда и невозможно, для операторов Δ^{-1} таких сложностей не существует, однако вычисление $\Delta^{-1}f\left(k\right)$ непосредственно по формуле (4.1.12) довольно утомительно, особенно при больших k. Поэтому желательно выражать $\Delta^{-1}f\left(k\right)$ в замкнутом свернутом виде. Суммирование конечных рядов (как и вычисление интегралов) подчиняется определенным правилам. Существуют таблицы формул суммирования, правило суммирования по частям (аналог интегрированию по частям), используются многочлены Бернулли, разложение функций на простые дроби и т.д.

Пример 4.1. Найти сумму т.н. телескопического ряда $\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)}$.

Сумму такого ряда нетрудно найти, если представить выражение под знаком суммы в виде простых дробей

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Тогда результат суммирования будет

$$\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k}.$$

Но не всегда конечные суммы можно свернуть и выразить в замкнутой форме. В некоторых случаях можно пользоваться верхней и нижней оценкой таких сумм.

При использовании факториальных многочленов из уравнения (4.1.7) можно получить с учетом формулы (4.1.12)

$$\Delta^{-1}(k)^{(m)}=\Delta^{-1}\left(k(k-1)...(k-m+1)\right)=\sum^{n=k-1}n(n-1)...(n-m+1)=$$

$$=\frac{1}{m+1}k(k-1)...(k-m)+K=\frac{1}{m+1}(k)^{(m+1)}+K.$$

Аналогами дифференциальных уравнений для дискретной переменной являются разностные уравнения или, как их еще называют, уравнения в конечных разностях.

4.2 Разностные линейные уравнения динамики

4.2.1. Общие свойства уравнений

Общий вид разностного уравнения, связывающего выход $y(k)$ со входом $r(k)$ системы с дискретным временем, следующий

$$a_0y(k+n)+a_1y(k+n-1)+...+a_ny(k)=b_0r(k+m)+...+b_mr(k). \quad (4.2.1)$$

Это же уравнение (4.2.1) можно представить в другом виде:

$$\left(c_0\Delta^n + c_1\Delta^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\Delta + c_n\right)y(k) = \left(d_0\Delta^m + \ldots + d_m\right)r(k). \qquad (4.2.2)$$

Переход от одной формы уравнения к другой очевиден, если иметь в виду соотношения (4.1.1) – (4.1.5). Уравнение (4.2.2) – более близкий аналог уравнению (3.1.5), а уравнение (4.2.1) легче решать, и поэтому оно более распространено.

Для линейных систем коэффициенты уравнений (4.2.1) и (4.2.2) не зависят от y или r, а для стационарных систем они независимы и от k, то есть являются постоянными величинами.

Применяя оператор сдвига E, уравнение (4.2.1) перепишем в виде

$$\left(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_n\right)y(k) = \left(b_0E^m + b_1E^{m-1} + \ldots + b_m\right)r(k). \qquad (4.2.3)$$

Поскольку вход $r(k)$ считается известным, правую часть уравнения (4.2.1) (или (4.2.3)) можно обозначить как известную вынуждающую функцию $F(k)$. Для линейных стационарных систем последнему уравнению можно придать вид

$$A(E)\,y(k) = F(k), \qquad (4.2.4)$$

или

$$\left(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_n\right)y(k) = F(k). \qquad (4.2.5)$$

Разностными уравнениями описываются системы, в которых процессы являются функциями дискретного переменного. Чаще всего эта дискретная переменная – время, но это может быть и положение, пространственные координаты, например, в периодических структурах.

Уравнение (4.2.3), если $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$, является разностным уравнением n-го порядка. Если $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ и $a_0 \neq 0$, то получим уравнение $(n-1)$-го порядка. То есть в отличие от дифференциального уравнения, порядок разностного уравнения определяется разностью между высшей и низшей степенями E. При использовании оператора Δ, например, в уравнении (4.2.2), установить порядок уравнения непосредственно по его виду невозможно. Уравнение (4.2.3) называется неоднородным разностным уравнением, в отличие от однородного уравнения

$$\left(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_n\right)y\left(k\right) = 0\,. \qquad (4.2.6)$$

Разностные уравнения, по сути, являются рекуррентными формулами. Уравнение (4.2.1) можно решить относительно $y(k+n)$

$$y\left(k+n\right) = \frac{1}{a_0}\left(F\left(k\right) - a_1y\left(k+n-1\right) - a_2y\left(k+n-2\right) - \ldots - a_ny\left(k\right)\right). \quad (4.2.7)$$

При известных значениях $y(0) \div y(n-1)$ (аналог начальных условий) $y(k)$ можно непосредственно найти для всех $k \geq n$ путем последовательного применения уравнения (4.2.7).

Таким образом, в отличие от дифференциального уравнения, $y(k)$ можно найти непосредственно по разностному уравнению для любых значений k. Но обычно не прибегают к итерационной процедуре, описываемой уравнением (4.2.7), а находят решение в замкнутой форме.

4.2.2. Решение однородных уравнений

Однородное разностное уравнение n-го порядка содержит n линейно независимых решений. Обозначим n решений уравнения (4.2.6) при $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$ через $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$. Тогда условием (необходимым и достаточным) линейной независимости этих решений будет

$$C(k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ Ey_1 & Ey_2 & \ldots & Ey_n \\ . & . & . & . \\ E^{n-1}y_1 & . & .. & E^{n-1}y_n \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.2.8)$$

Определитель $C(k)$ называется определителем Касорати.

Поскольку уравнение (4.2.6) линейное, то его решением будет и линейная комбинация независимых решений $y_i(k)$, то есть общее решение уравнения (4.2.6) можно записать как

$$y_\text{о}(k) = c_1y_1\left(k\right) + c_2y_2\left(k\right) + \ldots + c_ny_n\left(k\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i\left(k\right), \qquad (4.2.9)$$

где c_i – постоянные, не зависящие от k.

Решение уравнения (4.2.6) можно по аналогии с дифференциальными уравнениями искать в форме

$$y(k) = e^{uk},$$

где u – неизвестная постоянная величина, подлежащая определению.

Но удобнее ввести обозначение $z = e^{u}$ и предполагаемое решение записать в виде

$$y(k) = z^{k}. \qquad (4.2.10)$$

Подставляя решение (4.2.10) в (4.2.6) и учитывая соотношение

$$E^{n} z^{k} = z^{n} z^{k},$$

получим характеристическое уравнение

$$a_0 z^{n} + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (4.2.11)$$

Если все корни характеристического уравнения различны и обозначены через $z_1, z_2, \ldots z_n$, общее решение уравнения (4.2.6) получит вид

$$y_{\text{o}}(k) = c_1 z_1^{k} + c_2 z_2^{k} + \ldots + c_n z_n^{k} = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^{k}. \qquad (4.2.12)$$

Можно показать, что при различных z_i отдельные решения $y_i = z_i^{k}$ удовлетворяют условию (4.2.8) и, следовательно, независимы. Если же, например, корень z_1 имеет кратность m, то составляющая общего решения, соответствующая этому корню, равна

$$y_{\text{o}1}(k) = c_1 z_1^{k} + c_2 k z_1^{k} + \ldots + c_m k^{m-1} z_1^{k}.$$

Пример 4.2. Найти общее решение разностного уравнения

$$y(k+2) + 0{,}3y(k+1) + 0{,}02y(k) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$z^2 + 0,3z + 0,02 = 0$$

и найдем его корни $z_1 = -0,2;\ z_2 = -0,1$. Осталось записать решение в форме (4.2.12)

$$y_{\text{o}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k.$$

Для любого комплексного корня уравнения (4.2.11) с действительными коэффициентами должен существовать и комплексно сопряженный корень. Решение разностного уравнения, соответствующее паре комплексно сопряжённых корней

$$z_{1,2} = \rho e^{\pm j\theta}, \tag{4.2.13}$$

записывается в форме

$$y_{\text{o}1}(k) = \rho^k\left(A\cos\theta k + B\sin\theta k\right) = C\rho^k\cos\left(\theta k + \varphi\right), \tag{4.2.14}$$

где A, B, C и φ – действительные постоянные, связанные друг с другом известными формулами приведения тригонометрических функций $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = -\arctan B/A$.

Пример 4.3. Решить уравнение $y(k+2) + y(k+1) + y(k) = 0$.

Корни характеристического уравнения $z^2 + z + 1 = 0$ равны

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}e^{\pm j\arctan\sqrt{3}} = e^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Таким образом, в выражении (4.2.13) $\rho = 1, \varphi = \pi/3$ и решение согласно (4.2.14) равно $y(k) = A\cos\dfrac{\pi}{3}k + B\sin\dfrac{\pi}{3}k$.

Особое внимание нужно уделять нулевым корням характеристического уравнения (4.2.11). Если $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ и $a_0 \neq 0$ в уравнении (4.2.11), то характеристическое уравнение содержит один нулевой корень. Так как в этом случае порядок разностного уравнения равен $n-1$, а характеристический полином имеет порядок n, то нулевой корень оказывается лишним и не должен учитываться. Также не должны учитываться и нулевые кратные корни.

4.2.3. Решение неоднородных уравнений

Общее решение неоднородного уравнения (4.2.5), как и в случае дифференциальных уравнений, состоит из суммы общего решения $y_{\text{о}}(k)$ однородного уравнения (4.2.6) и частного решения $y_{\text{н}}(k)$, удовлетворяющего уравнению (4.2.6)

$$y(k)=y_{\text{о}}(k)+y_{\text{н}}(k). \tag{4.2.15}$$

Так как в составляющей $y_{\text{н}}(k)$ нет произвольных постоянных, то в решении (4.2.15) содержится n произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям $y(0), y(1), ..., y(n-1)$.

Вынужденное движение системы, то есть составляющую решения, соответствующую частному решению $y_{\text{н}}(k)$ неоднородного уравнения (4.2.5), можно найти на основе тех же самых двух методов, как и в случае дифференциальных уравнений: метода *неопределенных коэффициентов* и метода *вариации параметров*.

Метод неопределенных коэффициентов применим только в случае, если в результате последовательного действия оператора сдвига $\boldsymbol{E}$ на вынуждающую функцию $F(k)$ получится конечное число линейно независимых членов. Это будет в том случае, если $F(k)$ является функцией полиномиальной, экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической, либо содержит линейную комбинацию этих функций. Решение ищется в виде линейной комбинации независимых составляющих $F(k)$, $F(k+1)$, $F(k+2)$,…, где каждая составляющая входит с неопределенными постоянными коэффициентами. Эти коэффициенты подбираются таким образом, чтобы предполагаемое решение удовлетворяло уравнению (4.2.5) для всех значений k.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$y(k+2)+0,3y(k+1)+0,02y(k)=k(-1)^k. \tag{4.2.16}$$

Соответствующее однородное уравнение совпадает с уравнением из примера 4.2, поэтому общее решение однородного уравнения можно записать сразу, воспользовавшись результатом из примера 4.2

$$y_{\text{о}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k. \qquad (4.2.17)$$

Вынуждающая функция (правая часть уравнения) при воздействии на неё оператора сдвига E имеет две линейно независимые составляющие – это $k(-1)^k$ и $(-1)^k$ ($E\left(k(-1)^k\right) = (k+1)(-1)^{k+1} = -k(-1)^k - (-1)^k$), поэтому предполагаемое частное решение имеет вид

$$y_{\text{н}}(k) = Ak(-1)^k + B(-1)^k, \qquad (4.2.18)$$

где A и B – неизвестные пока постоянные коэффициенты.

Подставив выражение (4.2.18) в левую часть уравнения (4.2.16), получим

$$A(k+2)(-1)^{k+2} + B(-1)^{k+2} + 0,3A(k+1)(-1)^{k+1} + 0,3B(-1)^{k+1} +$$
$$+0,02Ak(-1)^k + 0,02B(-1)^k = (A - 0,3A + 0,02A)k(-1)^k + (2A + B - 0,3A -$$
$$-0,3B + 0,02B)(-1)^k = 0,72Ak(-1)^k + (1,7A + 0,72B)(-1)^k.$$

Приравняв в полученном выражении коэффициенты при независимых составляющих решения с соответствующими коэффициентами при таких же составляющих в правой части уравнения (4.2.18), получим систему из двух уравнений относительно коэффициентов A и B

$$\begin{cases} 0,72A = 1, \\ 1,7A + 0,72B = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдём коэффициенты A и B: $A = 1,39$; $B = -1,39$. Окончательно получаем общее решение уравнения (4.2.16) как сумму решения (4.2.17) и решения (4.2.18) с определёнными коэффициентами

$$y(k) = y_{\text{о}}(k) + y_{\text{н}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k + 1,39k(-1)^k - 1,39(-1)^k.$$

Если составляющие $F(k)$, $F(k+1)$,… имеют такой же вид, как и составляющие решения $y_о(k)$, то предполагаемое частное решение видоизменяется. Все составляющие частного решения $y_н(k)$, совпадающие по виду с составляющими общего решения однородного уравнения $y_о(k)$, умножаются на k в той наименьшей степени, чтобы их тождественность нарушилась.

Пример 4.5. Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$y(k+2)+0,3y(k+1)+0,02y(k)=(-0,1)^k .$$

Вынуждающая функция равна $(-0,1)^k$ и это единственная независимая составляющая при воздействии оператора сдвига, поэтому в обычном случае следовало бы частное решение взять в форме $A(-0,1)^k$. Но, вспомнив общее решение (4.2.17) однородного уравнения, замечаем совпадение вынуждающей функции с одним из слагаемых общего решения. Поэтому частное решение нужно брать в виде

$$y_н(k)=Ak(-0,1)^k .$$

Подставив предполагаемое решение в исходное уравнение, получим

$$A(k+2)(-0,1)^{k+2}+0,3A(k+1)(-0,1)^{k+1}+0,02Ak(-0,1)^k=$$
$$=(0,01-0,03+0,02)Ak(-0,1)^k+(0,02-0,03)A(-0,1)^k=(-0,1)^k ,$$

откуда с очевидностью следует $A=-100$, и частное решение равно

$$y_н(k)=-100k(-0,1)^k .$$

Второй метод (метод *вариации параметров*) позволяет получить выражение для $y_н(k)$ для любой функции $F(k)$, если известно решение $y_о(k)$.

Рассмотрение метода вариации параметров начнем с уравнения первого порядка

$$(a_0E+a_1)y(k)=F(k). \qquad (4.2.19)$$

Общее решение состоит из одного члена

$$y_{о}(k)=c_1 y_1(k).$$

Частное решение ищем в виде

$$y_{н}(k)=\mu_1(k)\,y_1(k). \qquad (4.2.20)$$

Подставляя выражение (4.2.20) в (4.2.19) имеем

$$a_0\mu_1(k+1)\,y_1(k+1)+a_1\mu_1(k)\,y_1(k)=F(k).$$

В левую часть последнего уравнения добавим и вычтем член $a_0\mu_1(k)\,y_1(k+1)$:

$$a_0\left[\mu_1(k+1)\,y_1(k+1)-\mu_1(k)\,y_1(k+1)\right]+\mu_1(k)\left[a_0 y_1(k+1)+a_1 y_1(k)\right]=F(k).$$

Выражение в первых квадратных скобках есть $y_1(k+1)\Delta\mu_1(k)$, а вторые квадратные скобки равны нулю, так как $y_1(k)$ есть решение однородного уравнения. Получим:

$$a_0\Delta\mu_1(k)\,y_1(k+1)=F(k),$$

откуда с учетом уравнения (4.1.12) находим

$$\mu_1(k)=\Delta^{-1}\frac{F(k)}{a_0 y_1(k+1)}=\sum^{n=k}\frac{F(n-1)}{a_0 y_1(n)}. \qquad (4.2.21)$$

Пример 4.6. Пусть требуется решить уравнение первого порядка

$$y(k+1)+2y(k)=\frac{(-2)^k}{k(k+1)}.$$

Решение однородного уравнения имеет вид $y_{о}(k)=c_1(-2)^k$, и $y_1(k)=(-2)^k$. Частное решение записываем в форме (4.2.20)

$$y_{н}(k)=\mu_1(k)(-2)^k,$$

где $\mu_1(k)$ определяется по формуле (4.2.21)

$$\mu_1(k)=\sum_{n=2}^{k}\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)n(-2)^n}=-\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{2(n-1)n}.$$

Воспользовавшись результатом примера 4.1, получим

$$\mu_1(k)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

а общее решение представится в виде

$$y(k)=\left(c_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)(-2)^k=\left(c+\frac{1}{2k}\right)(-2)^k.$$

Перейдем теперь к уравнению второго порядка

$$\left(a_0E^2+a_1E+a_2\right)y(k)=F(k). \qquad (4.2.22)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{о}(k)=c_1y_1(k)+c_2y_2(k).$$

Частное решение уравнения (4.2.22) предполагаем в виде

$$y_{н}(k)=\mu_1(k)y_1(k)+\mu_2(k)y_2(k). \qquad (4.2.23)$$

Для нахождения двух неизвестных функций μ_1, μ_2 необходимы два уравнения. Первое уравнение получается из условия того, что соотношение (4.2.23) должно удовлетворять уравнению (4.2.22), а второе уравнение выбирается произвольно, но так, чтобы упростить вычисление $y_{н}(k+1)$ и $y_{н}(k+2)$, а именно

$$y_1(k+1)\Delta\mu_1(k)+y_2(k+1)\Delta\mu_2(k)=0. \qquad (4.2.24)$$

Учитывая, что $\mu_i(k+1)=\mu_i(k)+\Delta\mu_i(k)$, из уравнения (4.2.23) имеем (с учетом уравнения (4.2.24)):

$$Ey_{\text{н}}(k)=y_1(k+1)\big(\mu_1(k)+\Delta\mu_1(k)\big)+y_2(k+1)\big(\mu_2(k)+\Delta\mu_2(k)\big)=$$
$$=y_1(k+1)\mu_1(k)+y_2(k+1)\mu_2(k)$$

и

$$E^2y_{\text{н}}(k)=y_1(k+2)\big(\mu_1(k)+\Delta\mu_1(k)\big)+y_2(k+2)\big(\mu_2(k)+\Delta\mu_2(k)\big).$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение (4.2.22) и проделывая очевидные преобразования получим

$$a_0\big(y_1(k+2)\Delta\mu_1(k)+y_2(k+2)\Delta\mu_2(k)\big)+\mu_1(k)\big[a_0y_1(k+2)+a_1y_1(k+1)+$$
$$+a_2y_1(k)\big]+\mu_2(k)\big[a_0y_2(k+2)+a_1y_2(k+1)+a_2y_2(k)\big]=F(k).$$

Поскольку $y_1(k)$ и $y_2(k)$ являются решениями соответствующего однородного уравнения, в последней формуле выражения в квадратных скобках равны нулю и окончательно имеем

$$y_1(k+2)\Delta\mu_1(k)+y_2(k+2)\Delta\mu_2(k)=\frac{F(k)}{a_0}. \qquad (4.2.25)$$

Теперь осталось решить систему уравнений (4.2.25) и (4.2.24) относительно неизвестных $\Delta\mu_1(k)$ и $\Delta\mu_2(k)$

$$\Delta\mu_1(k)=\frac{-y_2(k+1)\cdot F(k)}{a_0(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1))},$$
$$\Delta\mu_2(k)=\frac{y_1(k+1)\cdot F(k)}{a_0(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1))},$$

и определить сами функции $\mu_1(k)$ и $\mu_2(k)$:

$$\mu_1(k) = -\sum^{n=k} \frac{y_2(n)\cdot F(n-1)}{a_0(y_1(n)\cdot y_2(n+1) - y_1(n+1)\cdot y_2(n))},$$
$$\mu_2(k) = \sum^{n=k} \frac{y_1(n)\cdot F(n-1)}{a_0(y_1(n)\cdot y_2(n+1) - y_1(n+1)\cdot y_2(n))}. \qquad (4.2.26)$$

Знаменатели в (4.2.26) отличны от нуля, так как $y_1(k)$ и $y_2(k)$ – независимые решения однородного уравнения, а, следовательно, выполняется условие (4.2.8).

Пример 4.7. Решим уравнение из примера 4.5 методом вариации параметров

$$y(k+2) + 0,3y(k+1) + 0,02y(k) = (-0,1)^k .$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено в примере 4.2

$$y_{\text{о}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k ,$$

и $y_1(k) = (-0,2)^k, y_2(k) = (-0,1)^k$.

Частное решение ищем в форме

$$y_{\text{н}}(k) = \mu_1(k)y_1(k) + \mu_2(k)y_2(k) = \mu_1(k)(-0,2)^k + \mu_2(k)(-0,1)^k ,$$

Учитывая, что определитель Касорати равен

$$y_1(k)y_2(k+1) - y_1(k+1)y_2(k) = 0,1(-0,2)^k(-0,1)^k ,$$

на основе уравнений (4.2.26) получим

$$\mu_1(k) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{(-0,1)^n (-0,1)^{n-1}}{0,1(-0,2)^n (-0,1)^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-0,1)^n}{(-0,1)^2 (-0,2)^n} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^k},$$

$$\mu_2(k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-0,2)^n (-0,1)^{n-1}}{0,1(-0,2)^n (-0,1)^n} = -100k.$$

Окончательно общее решение будет равно

$$y(k) = y_{\text{о}}(k) + y_{\text{н}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k + (-0,2)^k - 100\frac{(-0,2)^k}{2^k} -$$
$$-100k(-0,1)^k = C_1(-0,2)^k + C_2(-0,1)^k - 100k(-0,1)^k,$$

где через C_1, C_2 обозначены новые постоянные, связанные со старыми соотношениями $C_1 = c_1 + 1; C_2 = c_2 - 100$.

Обобщим результаты решений уравнений первого и второго порядка на уравнение произвольного порядка (4.2.2).

Общее решение однородного уравнения берем в виде (4.2.9). Тогда частное решение ищется в форме

$$y_{\text{н}}(k) = \mu_1(k) y_1(k) + ... + \mu_n(k) y_n(k). \qquad (4.2.27)$$

Одно из условий, накладываемых на функции $\Delta\mu_i(k)$, – это удовлетворение исходного уравнения (4.2.2), а остальные $n-1$ условий определяются уравнениями, аналогичными уравнению (4.2.24):

$$\begin{aligned} y_1(k+1)\Delta\mu_1(k) + y_2(k+1)\Delta\mu_2(k) + ... + y_n(k+1)\Delta\mu_n(k) = 0,\\ y_1(k+2)\Delta\mu_1(k) + y_2(k+2)\Delta\mu_2(k) + ... + y_n(k+2)\Delta\mu_n(k) = 0,\\ ...\\ y_1(k+n-1)\Delta\mu_1(k) + ... + y_n(k+n-1)\Delta\mu_n(k) = 0. \end{aligned} \qquad (4.2.28)$$

Подставляя решение (4.2.27) в уравнение (4.2.2) и учитывая уравнения (4.2.28), после соответствующих преобразований будем иметь

$$y_1(k+n)\Delta\mu_1(k)+...+y_n(k+n)\Delta\mu_n(k)=\frac{F(k)}{a_0}. \qquad (4.2.29)$$

Решая систему из n уравнений (4.2.28) и (4.2.29), находим

$$\Delta\mu_i(k)=\frac{C_{ni}(k+1)\cdot F(k)}{a_0 C(k+1)},$$

или

$$\mu_i(k)=\sum^{n=k}\frac{C_{ni}(n)\cdot F(n-1)}{a_0 C(n)}, \qquad (4.2.30)$$

где $C(k)$ – определитель Касорати, а $C_{ni}(k)$ – алгебраические дополнения ni-х элементов.

Из условия (4.2.8) следует, что $C(k)$ отличен от нуля, если $y_1(k) \div y_n(k)$ – линейно независимые решения однородного уравнения.

Выражения (4.2.30) позволяют получить в явном виде решение $y_{\text{н}}(k)$ по известному $y_{\text{о}}(k)$ для произвольной вынуждающей функции $F(k)$, хотя в некоторых случаях трудно представить в замкнутом виде входящую в формулу (4.2.30) сумму. Метод вариации параметров позволяет находить решение и разностных уравнений с переменными коэффициентами, то есть уравнений, описывающих нестационарные во времени системы.

Завершая этот подраздел, введем понятие передаточной функции дискретной во времени системы.

Решим формально уравнение (4.2.3) относительно выхода $y(k)$:

$$y(k)=\frac{B(E)}{A(E)}r(k)=\frac{b_0E^m+b_1E^{m-1}+...+b_m}{a_0E^n+a_1E^{n-1}+...+a_n}r(k). \qquad (4.2.31)$$

Идентифицируем оператор E с некоторой независимой переменной z. Тогда характеристикой системы, описываемой уравнением (4.2.3), будет отношение полиномов $B(z)$ к $A(z)$:

$$W(z)=\frac{B(z)}{A(z)}. \qquad (4.2.32)$$

Последнее соотношение и определяет формально передаточную функцию дискретной системы (другие названия – «импульсная передаточная функция», «дискретная передаточная функция»). Более строго импульсная передаточная функция будет определена чуть дальше с использованием *z*-преобразования.

4.3 Методы преобразований

4.3.1. Дискретное преобразование Лапласа

Для исследования непрерывных систем широко применяется преобразование Лапласа. Но непосредственное применение преобразования Лапласа к разностному уравнению и, в частности, к любой решетчатой функции $f(kT)$ тождественно дает нуль, так как площадь этой функции (или в физической интерпретации – энергия такого сигнала) равна нулю. Чтобы выйти из этого затруднительного положения, придадим функции $f(kT)$ площадь, равную значению этой функции. Проще всего это сделать, умножив значение функции в точке $t = kT$ на дельта-функцию, принимающую бесконечное значение в этой же точке. Проделав такую операцию для всех k, при которых определена функция f, получим импульсную функцию

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(kT\right)\delta\left(t - kT\right), \qquad (4.3.1)$$

представляющую собой последовательность «идеальных» импульсов с бесконечной амплитудой и бесконечно малой длительностью, причем каждый импульс имеет площадь, равную значению функции $f(kT)$. Точно такую же импульсную функцию можно получить и из непрерывной функции $f(t)$, применив к ней формулу (4.3.1)

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = f(t)\delta_T(t), \qquad (4.3.2)$$

где через $\delta_T(t)$ обозначена соответствующая сумма δ-функций.

Воспользовавшись выражением (4.3.2) можно дать одно из понятий дискретного преобразования Лапласа, наиболее удобное с инженерных позиций. Определим дискретное преобразование Лапласа функции $f(t)$

как преобразование Лапласа от импульсной функции $f^*(t)$, соответствующей непрерывной функции $f(t)$:

$$F^*(s) = L^*\{f(t)\} = L\{f^*(t)\}. \tag{4.3.3}$$

Преимущество такого определения состоит в том, что эта новая операция полностью выражается через уже знакомую и хорошо изученную операцию обычного преобразования Лапласа.

Согласно (4.3.3) и с учетом (4.3.2) имеем

$$F^*(s) = L^*\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f^*(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)\,dt\ .$$

Поменяв в правой части последнего выражения порядок интегрирования и суммирования, получим

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-kT)dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}\ . \tag{4.3.4}$$

В формуле (4.3.4) отсутствует δ-функция, и она может быть использована непосредственно для решетчатой функции.

Нетрудно получить альтернативную формулу для вычисления дискретного преобразования Лапласа функции $f(t)$ по ее обычному преобразованию Лапласа.

Опять воспользуемся выражениями (4.3.2) и (4.3.3).

Имеем

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = L\{f(t)\delta_T(t)\}.$$

Для вычисления правой части последнего выражения используем теорему свертки в области изображений (см. формулу (3.3.22)), учитывая, что

$$L\{\delta_T(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT}.$$

Ряд в правой части последнего выражения сходится при $e^{-sT} < 1$, т.е. при $\operatorname{Re} s > 0$ и его сумма равна $1/1 - e^{-sT}$ (сумма геометрической прогрессии).

Таким образом, получим

$$F^*(s) = L\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi)\frac{1}{1-e^{-T(s-\xi)}}d\xi. \qquad (4.3.5)$$

При записи выражения (4.3.5) использована формула (3.3.22), причем в качестве функций $F_1(s)$, $F_2(s)$ взяты соответственно $1/1 - e^{-sT}$ и $F(s)$, а величина c удовлетворяет соотношениям (3.3.23) и (3.3.24), следовательно, все полюсы функции $F(s)$ лежат левее линии интегрирования. Абсцисса абсолютной сходимости функции $\delta_T(t)$, представляющей сумму δ-функций, как известно, равна нулю, следовательно, для сходимости интеграла (4.3.5) требуется, чтобы $\operatorname{Re} s > c$. Из выражения (4.3.5) следует, что дискретное преобразование Лапласа существует для всех функций, для которых существует и обычное преобразование Лапласа.

Вычислить интеграл (4.3.5) можно, воспользовавшись теоремой о вычетах (теорема Коши), как сумму вычетов подынтегрального выражения в его полюсах, расположенных внутри контура интегрирования, который не должен иметь на себе особенностей подынтегрального выражения. Для этого необходимо замкнуть путь интегрирования. Это можно сделать, добавив к пути интегрирования бесконечно большую полуокружность либо в левой полуплоскости $(R \to -\infty)$, либо в правой $(R \to +\infty)$, как показано на рис. 4.1. При этом получим замкнутый контур Γ_1, либо Γ_2.

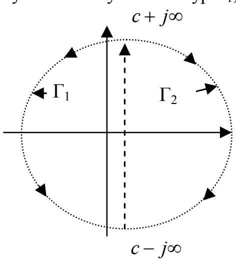


Рис. 4.1. Контур интегрирования при вычислении интеграла (4.3.5)

В первом случае (контур Γ_1) имеем

$$F^*(s)=\sum_{i=1}^{n}\text{вычеты}\left\{\frac{F(\xi)}{1-e^{-T(s-\xi)}}\right\}\Bigg|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{вычеты } F(\xi)\big|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i}}{1-e^{-T(s-\xi_i)}}, \quad (4.3.6)$$

где ξ_i – полюсы функции $F(s)$, так как внутри контура Γ_1 расположены только они.

Во втором случае получим выражение

$$F^*(s)=-\sum_{k=-\infty}^{n}F(\xi_k)\,\text{вычеты}\left\{\frac{1}{1-e^{-T(s-\xi)}}\right\}\Bigg|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_k}, \quad (4.3.7)$$

где $\xi_к$ – полюсы функции $\dfrac{1}{1-e^{-T(s-\xi)}}$, а знак «минус» возникает потому, что интегрирование по контуру Γ_2 осуществляется по часовой стрелке.

Полюсы $\xi_к$ в формуле (4.3.7) определяются уравнением

$$1-e^{-T(s-\xi)}=0,$$

откуда находим $\xi_k=s+j\dfrac{2\pi}{T}k$, ($k$=0, ±1, ±2, …).

Эти полюсы простые и, с учетом того, что $\operatorname{Re}s>c$, находятся действительно внутри контура Γ_2.

Вычет в простом полюсе $\xi_к$ находится по известной формуле

$$\text{вычет}\left\{\frac{1}{1-e^{-T(s-\xi)}}\right\}\Bigg|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_k}=\frac{1}{\dfrac{d}{d\xi}\left(1-e^{-T(s-\xi)}\right)}\Bigg|_{\xi=\xi_k}=-\frac{1}{T}. \quad (4.3.8)$$

Подставляя выражение (4.3.8) в (4.3.7) получим

$$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(s+j\omega_s k), \quad (4.3.9)$$

где $\omega_s = 2\pi/T$ – круговая частота отсчетов времени $t = kT$.

Чтобы пользоваться формулами (4.3.6) и (4.3.9) необходимо убедиться в равенстве нулю интеграла по бесконечно большому радиусу в левой или правой полуплоскости от подынтегрального выражения (4.3.5).

Формулы (4.3.4) и (4.3.9) дают дискретное преобразование Лапласа в незамкнутой форме, а формула (4.3.6) – в замкнутой, что и определяет удобство пользования последней. Из свойств дискретного преобразования Лапласа полезно упомянуть свойство периодичности функции $F^*(s)$. Действительно, периодом такой функции будет $j\omega_s$. Это нетрудно показать, например, используя формулу (4.3.9). Подставим вместо s величину $s+jn\omega_s$ в выражение (4.3.9), где n – целое число:

$$F^*(s+jn\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s+j\omega_s k + j\omega_s n) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s+j\omega_s(k+n)) =$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(s+j\omega_s m) = F^*(s),$$

где $m=k+n$.

Этот же результат можно получить и из формулы (4.3.4):

$$F^*(s+jn\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-(s+j\omega_s n)kT} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}e^{-j2\pi nk} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} = F^*(s),$$

так как $\omega_s = 2\pi/T$, а экспонента в степени $-2\pi jm$, где $m = kn$ – целое число, равна единице.

4.3.2. z-преобразование

Определение z-преобразования. Дискретное преобразование Лапласа обладает одним недостатком, который существенно ограничивает его применение для исследования дискретных во времени систем, именно: наличие экспоненты в степени переменной s (это явно заложено в формулах (4.3.4) и (4.3.6) и неявно – в формуле (4.3.9)). То есть дискретное преобразование Лапласа не является дробно-рациональной функцией s, а появление множителя e^{-Ts} может привести к большим трудностям в вычислении обратного преобразования Лапласа. Желательно было бы преобразовать $F^*(s)$ к такой форме, чтобы это стало дробно-рациональным выражением относительно некоторой новой переменной. Выбор такой переменной очевиден: это

$$z = e^{Ts} \text{ или } s = \frac{1}{T}\ln z. \qquad (4.3.10)$$

Из формул (4.3.10) видно, что z – это комплексная переменная, действительная и мнимая часть которой определяется как

$$\operatorname{Re} z = e^{T\sigma}\cos\omega T,$$
$$\operatorname{Im} z = e^{T\sigma}\sin\omega T,$$

где $s = \sigma + j\omega$.

Таким образом, z-преобразование некоторой непрерывной функции $f(t)$ можно определить как ее дискретное преобразование Лапласа после замены (4.3.10):

$$F(z) = Z\{f(t)\} = F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = L\{f^*(t)\}\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}. \qquad (4.3.11)$$

Из определения (4.3.11) следует, что z-преобразование существует для любой функции, имеющей преобразование Лапласа.

Для вычисления z-преобразования можно применить формулы (4.3.4), (4.3.6) и (4.3.9), из которых после замены переменной (4.3.10) получаются соответственно

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}, \qquad (4.3.12)$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{вычеты } F(\xi)\big|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i}}{1 - z^{-1}\cdot e^{T\xi_i}}, \qquad (4.3.13)$$

$$F(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s k)\Bigg|_{s=\frac{1}{T}\ln z}. \qquad (4.3.14)$$

Все три формулы равноценны, но имеют разные области применения. Если задана функция $f(t)$ или $f(kT)$, используется выражение (4.3.12). Строго говоря, на временные ряды или функции никаких ограничений не накладывается, поэтому эта формула является наиболее общей (хотя для того, чтобы записать *z*-преобразование в замкнутой форме, ряд (4.3.12) должен сходиться)[1].

В случае, если задано преобразование Лапласа некоторой функции $F(s) = L\{f(t)\}$, ее *z*-преобразование удобно определять по формуле (4.3.13).

И, наконец, формула (4.3.14) обычно используется при частотном исследовании дискретных сигналов и при доказательстве некоторых теорем.

Пример 4.8. Найдем преобразование от единичной ступенчатой функции 1(*t*).

Воспользуемся формулой (4.3.12)

$$Z\{1(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} 1(t) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} .$$

Данный ряд является геометрической прогрессией и при $\left|z^{-1}\right| < 1$ (или, что то же самое, при $|z| > 1$) сходится к $\dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$. Таким образом, получаем

$$Z\{1(t)\} = \frac{z}{z-1} .$$

Пример 4.9. Найти преобразование от экспоненты e^{-at}.

Известно (см. результат примера 3.11), что преобразование Лапласа от экспоненты равно $1/s+a$, поэтому можно воспользоваться формулой (4.3.13). Вычет этой функции в единственном полюсе $s=-a$ равен единице, следовательно, имеем

[1] Поскольку вывод формулы (4.3.12) основан на *одностороннем* преобразовании Лапласа, данная формула определяет т.н. *одностороннее* z-преобразование. В *двухстороннем* преобразовании нижний предел суммы равен минус бесконечности.

$$Z\left\{e^{-at}\right\}=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}=\frac{z}{z-e^{-aT}} .$$

Свойства z-преобразования. Свойства z-преобразования аналогичны соответствующим свойствам преобразования Лапласа и сформулированы в виде теорем. Доказательство наиболее простых теорем предоставлено читателям. Применение этих теорем часто облегчает вычисление прямого и обратного z-преобразования.

Теорема существования. Для существования $F(z)$ необходимо, чтобы $f(t)$ была определена при всех $t = kT \quad (k = 0,1,2,...)$.

Теорема единственности. Две функции времени имеют одно и то же z-преобразование, если и только если они совпадают при всех $t = kT$ $(k = 0,1,2,...)$.

Теорема линейности

$$Z\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\}=F_1(z)+F_2(z), \tag{4.3.15}$$

$$Z\left\{c\cdot f(t)\right\}=c\cdot F(z)\,, \tag{4.3.16}$$

где c – константа.

Теорема об интервале квантования. Преобразование функции $f(t/T)$ не зависит от периода квантования.

Теорема о сдвиге во временной области

$$Z\left\{f(t-nT)\right\}=z^{-n}F(z). \tag{4.3.17}$$

$$Z\left\{f(t+nT)\right\}=z^{n}\left(F(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f(kT)z^{-k}\right). \tag{4.3.18}$$

Докажем формулу (4.3.17). Имеем по определению

$$Z\left\{f(t-nT)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT-nT)z^{-k}=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}f\left((k-n)T\right)z^{-(k-n)} .$$

Введем новый индекс суммирования $m = k - n$. Тогда

$$Z\left\{f(t-nT)\right\}=z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty}f(mT)z^{-m}=z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}f(mT)z^{-m}=z^{-n}F(z) .$$

При доказательстве учтено, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, и везде z-преобразование и преобразование Лапласа одностороннее без особого о том напоминания.

Докажем формулу (4.3.18):

$$Z\{f(t+nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f\left((k+n)T\right) z^{-(k+n)} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m}.$$

В сумме правой части последнего выражения не хватает n слагаемых для того, чтобы эта сумма равнялась z-изображению, поэтому добавим и вычтем их. В результате получим формулу (4.3.18)

$$Z\{f(t+nT)\} = z^n \left(\sum_{m=n}^{\infty} f\left(mT\right) z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} f\left(mT\right) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f\left(mT\right) z^{-m} \right) =$$
$$= z^n \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f\left(mT\right) z^{-m} \right).$$

Теорема об умножении оригинала на t:

$$Z\{t \cdot f(t)\} = -Tz \frac{dF(z)}{dz}. \quad (4.3.19)$$

Пример 4.10. Найти преобразование от t.

Функцию t можно представить как $t \cdot 1(t)$, и тогда согласно (4.3.19) и учитывая результат примера 4.8 имеем

$$Z\{t\} = -Tz \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

Теорема об умножении оригинала на экспоненту

$$Z\left\{e^{\pm at} f(t)\right\} = F(ze^{\mp aT}). \quad (4.3.20)$$

Теорема о начальном значении

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{z \to \infty} F(z), \quad (4.3.21)$$

при условии, что предел существует.

Действительно, по определению

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = f(0) + f(T) z^{-1} + f(2T) z^{-2} + \dots .$$

Возьмем предел от левой части и почленно от правой при $z \to \infty$:

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

Теорема о конечном значении:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to 1}\left(1 - z^{-1}\right) F(z) , \tag{4.3.22}$$

при условии, что $(1 - z^{-1})F(z)$ является аналитической на окружности единичного радиуса $|z| = 1$ и вне круга, описываемого этой окружностью.

Для доказательства рассмотрим два ряда с конечным числом членов

$$\sum_{k=0}^{n} f(kT) z^{-k} = f(0) + f(T) z^{-1} + \dots + f(nT) z^{-n} \tag{4.3.23}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f((k-1)T) z^{-k} &= f(0) z^{-1} + f(T) z^{-2} + \dots + f((n-1)T) z^{-n} = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k}.\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Вычтем из ряда (4.3.23) ряд (4.3.24) и перейдем к пределу при $z \to 1$:

$$\lim_{z\to 1}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(kT\right) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{n} f(kT) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = f(nT) .$$

В последнем выражении перейдем к пределу при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to 1}\left(\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} - z^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right).$$

Меняя порядок перехода к пределам, и учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} = F(z)\ ,$$

получим искомую формулу (4.3.22)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z).$$

Требование отсутствия полюсов функции $(1-z^{-1})F(z)$ на единичной окружности и вне ее гарантирует сходимость пределов в формуле (4.3.22).

Теорема о дифференцировании по параметру:

$$Z\left\{\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial F(z,a)}{\partial a}. \qquad (4.3.25)$$

Теорема о свертке во временной области

$$F_1(z)\cdot F_2(z) = Z\left\{\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)\cdot f_2(kT-nT)\right\}. \qquad (4.3.26)$$

Теорема о свертке в области изображений.

$$Z\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{F_1(\xi)\cdot F_2(z\xi^{-1})}{\xi}d\xi\ , \qquad (4.3.27)$$

где контур интегрирования Г разделяет полюсы $F_1(z)$ от полюсов $F_2(z/\xi)$.

Обратное z-преобразование. Как известно, по изображению Лапласа $F(s)$ вполне однозначно может быть восстановлена функция-оригинал $f(t)$ (см. формулу (3.3.10)). Для z-преобразования обратное z-

преобразование не является однозначным, то есть, если z-преобразование некоторой функции $f(t)$ равно $F(z)$, то обратное z-преобразование, примененное к $F(z)$, не обязательно дает $f(t)$. Корректный результат обратного z-преобразования есть $f(kT)$. Об этом необходимо помнить и это является одним из ограничений метода z-преобразования.

В общем случае обратное z-преобразование может быть определено одним из трех методов.

Метод разложения на простые дроби. Этот метод при небольшой модификации соответствует методу разложения на простые дроби в преобразовании Лапласа.

Как известно, преобразование Лапласа может быть получено в виде

$$F(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots \frac{A_n}{s - s_n}, \tag{4.3.28}$$

где s_i – простые полюсы, а A_i – вычеты в этих полюсах.

Тогда функция-оригинал определится как сумма экспонент.

Для z-преобразования не нужно представлять функцию-изображение в форме (4.3.28). В таблицах обратное z-преобразование для функции $A/z-a$ отсутствует (хотя при положительном значении a член такого вида соответствует последовательности импульсов с экспоненциально затухающей амплитудой, когда присутствует временная задержка).

Но известно (см. пример 4.3.2), что обратное z-преобразование функции $Az/z-e^{-aT}$ равно Ae^{-akT}, следовательно, удобнее разложить на простые дроби функцию $F(z)/z$, а после этого обе части равенства умножить на z. Далее находим оригиналы для каждого из слагаемых и записываем результат в виде суммы полученных оригиналов.

Пример 4.11. По заданному преобразованию $F(z) = \dfrac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$ найти $f(kT)$. На основе изложенного метода имеем

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = \frac{2}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2}{(z-2)} - \frac{2}{(z-1)} - \frac{2}{(z-1)^2} \text{ и}$$

$$F(z) = 2\left(\frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-1)^2}\right).$$

Согласно примерам 4.8÷4.10 при $T = 1$ получим

$$f(k) = 2\left(2^k - 1 - k\right), \text{ при } k \ge 0 .$$

Если T не равно единице, то по теореме об интервале квантования будет

$$f(kT) = 2\left(2^k - 1 - k\right), \text{ при } k \ge 0 .$$

Для функций-изображений, не содержащих нулей $z = 0$, то есть не имеющих в качестве множителя в числителе z, временная последовательность оригинала будет иметь сдвиг по оси времени. В этом случае нахождение обратного z-преобразования будет таким.

Разложение $F(z)$ представляется в обычном виде

$$F(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \ldots \frac{A_n}{z - z_n},$$

после чего вводится вспомогательная функция

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{A_1 z}{z - z_1} + \frac{A_2 z}{z - z_2} + \ldots + \frac{A_n z}{z - z_n}.$$

По последнему выражению определяется функция оригинал $f_1(kT)$ и, далее, функция $f(kT)$:

$$f(kT) = Z^{-1}\left\{F(z)\right\} = Z^{-1}\left\{z^{-1}F_1(z)\right\} = f_1\left[(k-1)T\right]. \qquad (4.3.29)$$

Последний переход в формуле (4.3.29) непосредственно следует из определения z-преобразования, если $f(kT) \equiv 0$ при $k < 0$.

Метод разложения в степенной ряд. Из определения z-преобразования (формула (4.3.12)) следует, что обратное z-преобразование может быть получено разложением изображения $F(z)$ в бесконечный ряд по степени z^{-1}:

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ldots + f(kT)z^{-k} + \ldots . \qquad (4.3.30)$$

Величины $f(kT)$ определяются непосредственно по виду этого выражения. Формулу (4.3.30) можно рассматривать как разложение в ряд Тейлора около бесконечно удаленной точки $z \to \infty$. Если обозначить через φ(z) функцию, получающуюся из F(z) заменой z на $1/z$, то из выражения (4.3.30) следует, что

$$\varphi(z) = f(0) + f(T)z + f(2T)z^2 + \ldots + f(kT)z^k + \ldots$$

является разложением в ряд Тейлора функции φ(z) относительно начала координат и, следовательно,

$$f(kT) = \frac{1}{k!}\frac{d^k\varphi(0)}{dz^k}.$$

Но обычно проще найти эти коэффициенты непосредственно делением числителя на знаменатель, так как z-преобразование, как правило, дробно-рациональная функция z. Если использовать φ(z), то многочлены при делении следует записывать в порядке возрастания степеней. Если же оперировать непосредственно с F(z), числитель и знаменатель нужно записывать по возрастающим степеням z^{-1}.

Этот метод проще любого другого, если требуется определить f(kT) только в нескольких точках $t = kT$. Недостатком же его является невозможность получения общего выражения для k-го члена в замкнутой форме.

Пример 4.12. Найдем первые пять значений функции $f(kT)$ по её преобразованию $F(z) = \dfrac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$.

Осуществляя непосредственное деление числителя на знаменатель, получаем ряд Лорана

$$F(z) = 2z^{-2} + 8z^{-3} + 22z^{-4} + \ldots.$$

Коэффициенты этого ряда являются значениями искомой функции в дискретные моменты времени

$$f(0) = 0,$$
$$f(T) = 0,$$
$$f(2T) = 2,$$
$$f(3T) = 8,$$
$$f(4T) = 22,$$
$$\ldots$$

Метод, основанный на использовании формулы обращения. Для обратного z-преобразования можно получить интеграл обращения, аналогичный интегралу обратного преобразования Лапласа (3.3.10).

Возьмем интеграл обратного преобразования Лапласа (3.3.10):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \ ,$$

где c – абсцисса абсолютной сходимости, следовательно, все особые точки функции $F(s)$ лежат слева от линии интегрирования.

Имея в виду, что требуется получить в результате вывода формулы функцию $f(kT)$, заменим $t = kT$ и разобьем линию интегрирования на бесконечное число отрезков:

$$\ldots -\frac{3}{2}\omega_s < \omega < -\frac{1}{2}\omega_s; -\frac{1}{2}\omega_s < \omega < \frac{1}{2}\omega_s; \frac{1}{2}\omega_s < \omega < \frac{3}{2}\omega_s \ldots,$$

общая формула для которых $(n - 1/2)\omega_s < \omega < (n + 1/2)\omega_s$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В результате получим

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{c+j\omega_s(n-\frac{1}{2})}^{c+j\omega_s(n+\frac{1}{2})} F(s) e^{kTs} ds.$$

В правой части последнего выражения поменяем местами операцию суммирования и интегрирования и вместо переменной интегрирования s введем переменную $s + jn\omega_s$

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\frac{\omega_s}{2}}^{c+j\frac{\omega_s}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(s+jn\omega_s\right)e^{kTs}e^{jnk\omega_s T}ds\,.$$

Вспоминая формулу (4.3.9) и учитывая, что $e^{2\pi jnk}=1$, имеем

$$f(kT)=\frac{T}{2\pi j}\int\limits_{c-j\frac{\omega_s}{2}}^{c+j\frac{\omega_s}{2}}F^{*}(s)e^{kTs}ds\,.$$

Теперь от дискретного преобразования Лапласа $F^*(s)$ перейдем к z-преобразованию заменой переменной (4.3.10).

Тогда $ds=\dfrac{1}{T}\dfrac{dz}{z}$, линия интегрирования в соответствии с преобразованием $z=e^{sT}=e^{cT}\cdot e^{j\omega T}$, где $-\omega_s/2<\omega<\omega_s/2$ отобразится в окружность радиуса e^{cT}, причем область, лежащая слева от линии интегрирования для переменной s, отобразится внутрь окружности для переменной z, и окончательно получим

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma}F(z)z^{k-1}dz, \tag{4.3.31}$$

где Γ – окружность радиуса e^{cT}.

Так как $F(s)$ не имеет особых точек на линии интегрирования и справа от нее, то все особые точки подынтегрального выражения (4.3.31) должны лежать внутри окружности Γ. Тогда по теореме Коши о вычетах интеграл (4.3.31) может быть представлен как

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{n}\text{вычеты}\left\{F(z)z^{k-1}\right\}\Big|_{\text{в полюсах }F(z)}\,. \tag{4.3.32}$$

Пример 4.13. Найдем оригинал от то же преобразования, что и в примерах 4.11 и 4.12.

Преобразование $F(z)=\dfrac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$ имеет простой полюс $z=2$ и кратный (кратности два) полюс $z=1$.

Вычет $F(z)z^{k-1}$ в полюсе $z=2$ равен

$$\left.\frac{2z^k}{(z-1)^2}\right|_{z=2}=2(2)^k,$$

а в кратном полюсе $z=1$

$$\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^k}{z-2}\right)\right|_{z=1}=-2(k+1),$$

откуда

$$f(kT)=2\left(2^k-1-k\right), \text{ при } k\geq 0,$$

что соответствует результату примера 4.11.

4.3.3. Разностные уравнения и z-преобразование

Решение разностных уравнений легко получить, используя *z*-преобразование.

Возьмем разностное уравнение в общем виде (4.2.1):

$$a_0y(k+n)+a_1y(k+n-1)+...+a_ny(k)=b_0r(k+m)+...+b_mr(k).$$

Применим *z*-преобразование почленно к правой и левой частям этого уравнения. Учитывая теорему о сдвиге во временной области, получим

$$\begin{gathered}\left(a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n\right)Y(z)-z^na_0y(0)-z^{n-1}\left[a_0y(1)+a_1y(0)\right]-\\-...-z\left[a_0y(n-1)+a_1y(n-2)+...+a_{n-1}y(0)\right]=\\=\left(b_0z^m+b_1z^{m-1}+...+b_m\right)R(z)-z^mb_0r(0)-z^{m-1}\left[b_0r(1)+b_1r(0)\right]-\\...-z\left[b_0r(m-1)+b_1r(m-2)+...+b_{m-1}r(0)\right].\end{gathered}\tag{4.3.33}$$

Разрешив это уравнение относительно $Y(z)$, можно далее на основе методов обратного преобразования получить $y(k)$. Как видно, в уравнении (4.3.33) присутствуют члены от $y(0)$ до $y(n-1)$. Эти члены представляют n граничных (начальных) условий, необходимых для определения произвольных постоянных в классическом решении.

Соотношение (4.3.33) значительно упрощается, если разностное уравнение (4.2.1) описывает предварительно невозбужденную физически реализуемую систему. Термин «предварительно невозбужденная система» означает, что запасенная системой к моменту времени $t=0$ энергия равна нулю, или, что $y(k)=r(k)\equiv 0$ при $k<0$.

Для физически реализуемой системы реакция на выходе не может появиться ранее воздействия на ее входе, то есть в разложении по степеням z^{-1} отсутствуют члены с положительными степенями z, откуда следует, что в уравнении (4.2.1) должно выполняться условие $m \le n$. Подставим в уравнение (4.2.1) последовательно $k=-n;-(n-1);...;-2;-1$. С учетом равенства нулю $y(k)$ и $r(k)$ при $k<0$, получим

$$\begin{gathered}
a_0 y(0) = b_0 r(m-n), \\
a_0 y(1) + a_1 y(0) = b_0 r(m-n+1) + b_1 r(m-n), \\
\dots \\
a_0 y(n-1) + a_1 y(n-2) + \dots + a_{n-1} y(0) = \\
= b_0 r(m-1) + b_1 r(m-2) + \dots + b_{m-1} r(0).
\end{gathered} \tag{4.3.34}$$

В правой части равенств (4.3.34) все слагаемые с отрицательным аргументом равны нулю.

Сравнивая выражения (4.3.34) и (4.3.33) нетрудно видеть что

$$\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n\right) Y(z) = \left(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m\right) R(z),$$

откуда

$$Y(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \cdot R(z) = W(z) \cdot R(z). \tag{4.3.35}$$

Из формулы (4.3.35) видно, что существует непосредственная связь между преобразованиями от входного и выходного сигналов предварительно невозбужденной системы. Эта связь устанавливается *импульсной передаточной функцией*

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_0 z^m+\ldots+b_m}{a_0 z^n+\ldots+a_n}, \qquad (4.3.36)$$

которую можно определить как отношение z-преобразований выхода и входа предварительно невозбужденной системы. Сравнение выражений (4.3.36) и (4.2.31), (4.2.32) показывает, что импульсную передаточную функцию можно записать непосредственно по разностному уравнению.

Пример 4.14. Пусть предварительно невозбуждённая система описывается уравнением

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=2r(k+1)+2r(k).$$

Найти выход системы, полагая, что воздействие на входе

$$r(k)=\begin{cases} k & \text{при } k\ge 0, \\ 0 & \text{при } k<0. \end{cases}$$

Применим z-преобразование, воспользовавшись результатом примера 4.10

$$Y(z)=\frac{2(z-1)}{z^2-3z+2z}R(z)=\frac{2(z-1)}{z^2-3z+2z}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}.$$

На основе примера 4.13 получим

$$y(k)=2\left(2^k-k-1\right) \text{ при } k\ge 0.$$

Контрольные вопросы

1. Как связан оператор сдвига E и разностный оператор Δ?
2. Как определяется порядок разностного уравнения?
3. Что такое факториальный многочлен?
4. Какие методы существуют для вычисления конечных рядов?

5. Как записывается обратный разностный оператор Δ^{-1}?

6. В какой форме записывается общее решение однородного разностного уравнения в случае некратных и кратных корней характеристического уравнения?

7. Какая форма записи решения для комплексных корней характеристического уравнения?

8. Какие методы существуют для нахождения частного решения разностного уравнения?

9. К каким вынуждающим функциям применим метод неопределенных коэффициентов при решении неоднородных разностных уравнений?

10. Как составляется определитель Касорати?

11. В чем состоит необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородного линейного разностного уравнения n-го порядка?

12. Как учитывается запасенная энергия системы к начальному моменту времени в решении разностного уравнения?

13. Как связано дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование?

14. По каким формулам можно вычислить z-преобразование?

15. Что такое импульсная передаточная функция системы?

16. Какие методы существуют для нахождения обратного z-преобразования?

17. Перечислите основные свойства z-преобразования.

18. Назовите основные этапы решения разностного уравнения с помощью z-преобразования.

5. МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Полное описание достаточно сложной системы требует большого количества информации. Эта информация может быть представлена системами дифференциальных либо разностных уравнений. Удобно в этом случае пользоваться матричными формами представления такой информации. Анализ систем тогда сводится, как правило, к анализу свойств матриц. Мощным средством аппарат теории матриц является и при синтезе систем. Поэтому полезно еще раз вспомнить те разделы линейной алгебры, которые непосредственно относятся к изучению теории систем.

5.1 Основные типы матриц и операции над ними

5.1.1. Общие понятия

Как известно, матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из упорядоченных элементов [13]. Элементами таблицы могут быть действительные или комплексные числа или функции от заданных переменных. В отличие от обычной прямоугольной таблицы матрица подчиняется определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства. Элементы матрицы a_{ij} имеют двойной индекс, первый – это номер строки, второй – номер столбца, где располагается этот элемент. Матрица, содержащая m строк и n столбцов, называется $(m \times n)$-матрицей, или матрицей порядка m на n.

Матрица $(m \times 1)$ называется *матрицей-столбцом* или вектор-столбцом.

Матрица $(1 \times n)$ называется *матрицей-строкой* или вектор-строкой.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица – это диагональная матрица с элементами, равными единице.

Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой тождественно равны нулю.

Транспонированная матрица – это матрица, у которой строки и столбца поменялись местами.

Симметрическая матрица – это квадратная матрица с действительными элементами, если она равна своей транспонированной $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Кососимметрическая матрица – это квадратная действительная матрица, если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Если элементы матрицы $\mathbf{A}$ комплексные $a_{ij} = \alpha_{ij} + j\beta_{ij}$, то *комплексно сопряженная* матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$, содержит элементы $b_{ij} = \alpha_{ij} - j\beta_{ij}$.

Матрица, *сопряженная* по отношению к матрице **A**, является транспонированной и комплексно сопряженной по отношению к **A**, то есть равна $\left(\mathbf{A}^*\right)^T$.

Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, то матрица является *действительной.*

Если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, то матрица **A** *мнимая.*

Если матрица равна своей сопряженной, то она называется *эрмитовой.* Для эрмитовой матрица выполняется соотношение $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^*\right)^T$.

Если выполняется соотношение $\mathbf{A} = -\left(\mathbf{A}^*\right)^T$, то матрица **A** носит название *косоэрмитовой.*

5.1.2. Простейшие операции

Суммой (разностью) матриц одного порядка ($m\times n$) является матрица $(m\times n)$ $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$, каждый элемент которой определяется как $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Две матрицы одного порядка равны $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ если и только если равны их элементы $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение произведения двух матриц **A** и **B** непосредственно следует из аппарата линейных преобразований. Для существования произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ матрица **A** и **B** должны быть согласованы по форме, то есть число столбцов матрицы **A** должно быть равно числу строк матрицы **B**. Тогда произведение **C** двух матриц **A** $(m\times n)$ и **B** $(n\times p)$ определяется в виде

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right].$$

Для матриц **A** $(m\times n)$ и **B** $(n\times m)$ существует как произведение $\mathbf{AB}$, так и произведение $\mathbf{BA}$, но в общем случае произведение не коммутативно, даже если $m = n$. Однако, если равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ имеет место, то говорят, что матрица **A** и **B** *коммутативны.*

Из определения операции умножения видно, что умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, как справа, так и слева.

Умножение на скаляр k матрицы **A** (справа или слева) означает, что на величину k умножается каждый элемент матрицы **A**.

Произведение двух транспонированных матриц $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ равно транспонированному произведению исходных матриц, взятому в обратном порядке:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T \qquad (5.1.1)$$

в чем нетрудно убедиться, транспонируя матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Умножение справа матрицы **A** на диагональную матрицу **D** равносильно операции со столбцами **A**. Умножение слева матрицы **A** на матрицу **D** – это операция со строками **A**. Очевидно, что умножение слева или справа на единичную матрицу **E** не меняет исходной квадратной матрицы: $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$, то есть матрица **E** является единичным элементом в некоммутативной полугруппе квадратных матриц по операции умножения.

Правило умножения блочных матриц, когда элементами матриц-сомножителей являются некоторые подматрицы, такое же, как и обычных матриц, важно только, чтобы подматрицы, фигурирующие в соответствующих произведениях, были согласованы по форме.

Дифференцирование и интегрирование матрицы – это соответствующие операции над ее элементами. Дифференцирование произведения матриц осуществляется так же, как и дифференцирование скалярных функций при условии сохранения первоначального порядка следования сомножителей.

5.1.3. Определители, миноры и алгебраические дополнения

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Определитель квадратной матрицы **A** размерностью $(n \times n)$ и обозначаемый $|\mathbf{A}|$ равен алгебраической сумме всех возможных произведений n элементов. Каждое произведение содержит только один элемент из каждой строки и столбца и имеет знак + или – в зависимости от того, четное или нечетное число инверсий (то есть расположений большего числа перед меньшим) вторых индексов содержится в произведении, если расположить элементы в порядке возрастания первых индексов.

Нетрудно установить следующие свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если равны нулю все элементы какой-либо строки (столбца) или если равны или пропорциональны соответствующие элементы произвольных двух строк (столбцов).

2. Величина определителя остается постоянной по модулю при перестановке строк (столбцов).

3. Знак определителя меняется на противоположный при перемене местами двух любых строк (столбцов).

4. Значение определителя умножается на постоянную k, если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на k.

5. Значение определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить умноженные на k соответствующие элементы другой строки (столбца).

Если в определителе $|\mathbf{A}|$ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то оставшиеся $n-1$ строк и столбцов образуют определитель M_{ij}, называемый *минором* элемента a_{ij}. Миноры, у которых диагональные элементы являются диагональными элементами $|\mathbf{A}|$, называются *главными.*

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} – это минор элемента a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$.

Используя алгебраические дополнения, можно по формуле Лапласа вычислить определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij},\ (j=1,2,...,n) \ - \ \text{разложение по элементам столбца,}\\
&\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij},\ (i=1,2,...,n) \ - \ \text{разложение по элементам строки.}
\end{aligned}
\tag{5.1.2.}
$$

Если заменить элементы i-й строки (столбца) на соответствующие элементы k-й строки (столбца), то согласно свойству первому определитель обратится в нуль. Следовательно, используя разложения (5.1.2), получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{ij} = 0,\ (k \neq i),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{jk}C_{ji} = 0,\ (k \neq i).
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

Объединяя (5.1.2) и (5.1.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{ij} = \delta_{ik} \cdot |\mathbf{A}|,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} C_{ji} = \delta_{ik} \cdot |\mathbf{A}|. \tag{5.1.4}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, равный единице при одинаковых индексах и нулю при различных индексах.

Определитель можно вычислить и воспользовавшись *методом опорного элемента*, который сводит процесс нахождения определителя к вычислению определителей второго порядка. Метод заключается в следующем.

В качестве опорного выбирается произвольный элемент a_{ij}. Берется произвольный элемент a_{ik}, расположенный в той же строке, что и a_{ij}, и элемент a_{qj}, расположенный в том же столбце, что и a_{ij}.

Из элементов a_{qk}, a_{ik}, a_{qj} и a_{ij} образуют определитель второго порядка, причем порядок элементов сохраняется. Составляют все возможные определители второго порядка, содержащие в качестве одного из элементов опорный элемент. Используя в качестве элементов определители второго порядка, а в качестве множителя $1/a_{ij}^{n-2}$, представляют исходный определитель как определитель $(n-1)$-го порядка. Повторяя эту процедуру, можно вычислить определитель высокого порядка, последовательно уменьшая его порядок до единицы.

Необходимо отметить, что метод опорного элемента эффективнее в смысле числа перемножений, чем разложение определителя по формуле Лапласа, уже при $n \geq 4$.

Как следствие соотношений (5.1.2) (разложение Лапласа), производная от определителя по какому-либо из его элементов равна алгебраическому дополнению этого элемента

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} |\mathbf{A}| = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = C_{ij}. \tag{5.1.5}$$

5.1.4. Присоединенная и обратная матрицы

Если $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, а C_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, то *присоединенной* для $\mathbf{A}$ называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ji}, то есть

$$\mathrm{Adj}\,\mathbf{A} = \left[C_{ji}\right]. \qquad (5.1.6)$$

Таким образом, присоединенная матрица (Adj – по первым буквам английского слова adjust – приспосабливать, прилаживать, присоединять) является транспонированной для матрицы, образованной заменой элементов a_{ij} их алгебраическими дополнениями.

Пример 5.1. Получить присоединенную матрицу для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения C_{ij} элементов матрицы

$$\begin{aligned} &C_{11} = 2, \quad C_{12} = -2, \quad C_{13} = 2, \\ &C_{21} = -1, C_{22} = -2, \quad C_{23} = -1, \\ &C_{31} = 3, \quad C_{32} = -6, \quad C_{32} = -3. \end{aligned}$$

Составим присоединенную матрицу согласно (5.1.6)

$$\mathrm{Adj}\,\mathbf{A} = \left[C_{ji}\right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (5.1.4) следует, что

$$\left[a_{ij}\right] \cdot \left[C_{ij}\right]^T = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}.$$

Учитывая определение (5.1.6) и умножив правую и левую часть последнего выражения на $1/|\mathbf{A}|$ (при условии $|\mathbf{A}| \neq 0$), получим

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{E}. \qquad (5.1.7)$$

Из выражения (5.1.7) естественным образом определяется обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}; \qquad |\mathbf{A}| \neq 0. \qquad (5.1.8)$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \qquad (5.1.9)$$

Нетрудно показать, что матрица и обратная ей коммутативны

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}. \qquad (5.1.10)$$

Если $|\mathbf{A}| = 0$, то матрица **A** называется *особенной* или *вырожденной*. Если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то матрица называется *неособенной (невырожденной)*. Таким образом, обратные матрицы существуют только для неособенных матриц.

Из выражения (5.1.8) следует, что обратная матрица для каждой неособенной матрицы является единственной и, следовательно, множество неособенных квадратных матриц по операции умножения образует некоммутативную группу.

Произведение обратных матриц подчиняется тем же правилам перестановки, что и произведение транспонированных матриц, то есть

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}.$$

Производная от обратной матрицы вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}^{-1}(t)\right) = -\mathbf{A}^{-1}(t)\cdot\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\cdot\mathbf{A}^{-1}(t), \qquad (5.1.11)$$

которую нетрудно получить, если рассмотреть соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}^{-1}(t)\cdot\mathbf{A}(t)\right) = \frac{d\mathbf{E}}{dt} = [0].$$

Некоторые специальные обратные матрицы носят отдельные названия.

Инволютивная матрица – это такая матрица, которая совпадает со своей обратной, то есть **AA**=**E**.

Ортогональная матрица – это матрица, для которой выполняется соотношение $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$.

Унитарная матрица удовлетворяет соотношению $\mathbf{A} = \left(\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{T}\right)^{-1}$.

Псевдообратная матрица $\overset{+}{\mathbf{A}}$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{A}\overset{+}{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \tag{5.1.12}$$

$$\overset{+}{\mathbf{A}}\mathbf{A}\overset{+}{\mathbf{A}} = \overset{+}{\mathbf{A}}, \tag{5.1.13}$$

$$\left(\overset{+}{\mathbf{A}}\mathbf{A}\right)^{T} = \overset{+}{\mathbf{A}}\mathbf{A}, \tag{5.1.14}$$

$$\left(\mathbf{A}\overset{+}{\mathbf{A}}\right)^{T} = \mathbf{A}\overset{+}{\mathbf{A}}. \tag{5.1.15}$$

Если не выполняются соотношения (5.1.14), (5.1.15) (одно из них или оба), то получаем *обобщенную обратную* матрицу.

Разумеется, что в случае невырожденной матрицы **A** псевдообратная и обобщенная матрицы совпадают с обычной обратной матрицей.

5.2 Векторы и векторные пространства

5.2.1. Векторы и их свойства

Под вектором будем понимать матрицу размерностью (n×1) или вектор-столбец.

Скалярное произведение (или внутреннее произведение) двух векторов **x** и **y** определяется формулой

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left(\mathbf{x}^{*}\right)^{T} \mathbf{y} = x_1^{*} y_1 + x_2^{*} y_2 + \ldots + x_n^{*} y_n = \mathbf{y}^{T} \mathbf{x}^{*}. \tag{5.2.1}$$

В случае действительных **x** и **y** выражение (5.2.1) приобретает более знакомую форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle .$$

Ясно, что понятие скалярного произведения существует только для векторов одинаковой размерности.

Если вектор-строку $(\mathbf{y}^*)^T$ $(1\times m)$ помножим слева на вектор-столбец $\mathbf{x}$ $(n\times 1)$, то получим *внешнее* произведение, представляющее матрицу $(n\times m)$

$$\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* & \dots & x_1 y_m^* \\ x_2 y_1^* & \dots & \dots & x_2 y_m^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1^* & \dots & \dots & x_n y_m^* \end{bmatrix}.$$

Сумма и разность векторов, а также умножение вектора на скаляр следуют из соответствующих операций над матрицами.

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Нормой вектора называют квадратный корень из скалярного произведения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то есть

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}>}. \qquad (5.2.2)$$

Можно показать, что из соотношения (5.2.2) вытекает два важных неравенства:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (неравенство треугольника),}$$
$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \text{ (неравенство Шварца).}$$

Угол θ между двумя векторами определяется формулой

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Вектор $\hat{\mathbf{x}}$ называют *нормированным*, если $\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Два вектора будут *ортонормированы*, если они ортогональны и нормированы.

Векторы $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1,2,\ldots m\}$ с компонентами $x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{ni}$ будут *линейно независимы*, если не существует таких постоянных $k_i,\ldots, k_m$ (хоть одна из k_i не должна равняться нулю), что

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m = 0\,. \tag{5.2.3}$$

Основываясь на понятии линейной независимости векторов, дадим еще пару определений.

Вырожденность или *дефект* матрицы определяется так. Если строки (столбцы) особенной матрицы линейно связаны *одним* соотношением, то вырожденность матрицы *простая* (дефект равен единице). Если таких соотношений q, то матрица имеет вырождение кратности q (или дефект равен q).

Рангом r матрицы **A** является наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы **A**. Если размерность матрицы $(n \times n)$, то $r = n - q$.

Существует правило вырожденности Сильвестра, которое гласит, что дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждой из них и не выше суммы дефектов матриц.

Условие линейной независимости векторов можно сформулировать на основе ранга матрицы, образованной из элементов m векторов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{5.2.4}$$

Если ранг матрицы **A**, образованной этими m векторами $(m \le n)$, меньше, чем m, то есть $r < m$, то существует r линейно независимых векторов. Остальные $m - r$ векторов выражаются в виде линейной комбинации этих r векторов. Таким образом, необходимым и достаточным условием линейной независимости этих m векторов является равенство ранга матрицы **A** величине m.

Определение ранга матрицы не всегда удобно, поэтому чаще линейную независимость определяют, пользуясь *определителем Грама*. Определитель Грама строится в предположении, что выполняется соотношение (5.2.3). Умножим уравнение (5.2.3) скалярно на $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ и получим, таким образом, систему уравнений:

$$\begin{gathered}
k_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle = 0, \\
k_1\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle, \\
\ldots \\
k_1\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_m\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle.
\end{gathered}$$

Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение для k_i (то есть выполняется условие (5.2.3) и векторы $\mathbf{x}_i$ являются линейно зависимыми) только в том случае, если определитель матрицы с элементами $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ равен нулю. Этот определитель называется определителем Грама и равен

$$G = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \ldots & \ldots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle & \ldots & \ldots & \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle \end{vmatrix}$$

или, с учетом обозначения (5.2.4),

$$G = \left| \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right|, \tag{5.2.5}$$

Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда определитель Грама (5.2.5) для такой системы отличен от нуля.

5.2.2. Векторное пространство и подпространство

Под векторным пространством понимают множество векторов, замкнутое относительно определенных в нем операций сложения и умножения на скаляр.

Сложение векторов ассоциативно и коммутативно.

Умножение на скаляр векторов ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения.

Векторное пространство, включающее все n-мерные векторы, называют n-мерным векторным пространством V_n. Векторное пространство с умножением на вещественный скаляр называется *эвклидовым*. Комплексный аналог носит название *унитарного* пространства. В случае бесконечномерных векторов (но с конечными значениями их норм) получаем *гильбертово* пространство.

Размерность векторного пространства определяется максимальным числом содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Подпространство S_n n-мерного векторного пространства V_n – это некоторое подмножество V_n, которое само является векторным пространством. Размерность подпространства S_n определяется, как обычно, максимальным числом линейно независимых векторов из S_n.

Вектор **y** из векторного пространства V_n

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5.2.6}$$

где **A** – квадратная $(n \times n)$ невырожденная матрица, принадлежит тому же пространству V_n.

Уравнение (5.2.6) описывает линейное преобразование и в этом случае говорят, что векторное пространство V_n инвариантно относительно линейного преобразования, заданного квадратной невырожденной матрицей **A**.

Если матрица **A** имеет размерность $(m \times n)$, то каждая точка пространства V_n (каждый вектор **x**) отображается преобразованием (5.2.6) в некоторую точку пространства V_m.

Любую матрицу **A** размерностью $(m \times n)$ можно представить как строку m-мерных вектор-столбцов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

поэтому уравнение (5.2.6) перепишем в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

где x_i – компоненты вектора **x** могут принимать любые значения.

Совокупность линейных комбинаций, определяемая как подпространство, порождаемое векторами **y**, можно рассматривать как подпространство V_m, порождаемое столбцами матрицы **A**. Размерность этого подпространства равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы **A**.

5.2.3. Базис векторного пространства

Пространство V_n содержит согласно определению и все линейные комбинации векторов, принадлежащих этому пространству. Возьмем произвольное число m таких векторов. Множество векторов $\mathbf{y}$, являющихся линейной комбинацией этих векторов

$$\mathbf{y} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_m\mathbf{x}_m \tag{5.2.7}$$

образуют векторное подпространство. Если только r векторов в выражении (5.2.7) являются линейно независимыми, то и размерность подпространства будет равна r – рангу системы векторов $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Это означает, что только r компонент вектора $\mathbf{y}$ можно выбирать произвольно, остальные линейно зависят от этих r компонент.

Если же ранг матрицы системы векторов $\mathbf{x}_i$ равен n, то мы с помощью (5.2.7) получим вектор $\mathbf{y}$ из того же пространства V_n. Тогда систему из n линейно независимых векторов называют *линейной оболочкой* пространства V_n. Эти n линейно независимых векторов можно использовать и как *базис* пространства. Базисом пространства называют такую систему векторов, что произвольный вектор пространства выражается единственным образом в виде линейной комбинации этих базисных векторов. Векторное пространство V_n может иметь несколько базисов, более того множество базисов любого векторного пространства континуально ввиду континуальности множеств значений компонент векторов и скаляров, образующих линейную комбинацию. Если базисные векторы попарно ортогональны, то получаем *ортогональный* базис, а если они к тому же и нормированы, то базис будет называться *ортонормированным*.

Существует стандартная процедура построения ортонормированного базиса из n линейно независимых векторов, называемая *ортогонализацией Грама – Шмидта.*

Пусть задано множество $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ линейно независимых векторов и требуется построить ортонормированный базис $\{\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_n\}$.

В качестве первого вектора выбираем произвольный вектор $\mathbf{x}_i$, например, полагаем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$.

Из исходной системы выбираем второй вектор $\mathbf{x}_2$. Второй вектор искомого базиса выберем по формуле

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - k\mathbf{y}_1,$$

где k вычисляется из условия ортогональности $\mathbf{y}_2$ и $\mathbf{y}_1$, то есть таким образом, чтобы $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle - k\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle = 0$.

Из последнего условия

$$k = \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle},$$

и окончательно получим

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle}\mathbf{y}_1.$$

Аналогично записываем выражение для третьего вектора

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - k_2\mathbf{y}_2 - k_1\mathbf{y}_1,$$

где k_1 и k_2 определяются из условий ортогональности $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ и $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$.

Из этих условий получаем уравнения для k_1 и k_2

$$\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = k_2\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle + k_1\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle = k_1\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle,$$
$$\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = k_2\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle + k_1\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle = k_2\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle,$$

или окончательно

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle}\mathbf{y}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle}\mathbf{y}_1.$$

Обобщая последнюю формулу, для j-го вектора имеем

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle}\mathbf{y}_i, \ j \in \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Нормируя векторы $\mathbf{y}_i$, получаем ортонормированный базис

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|}.$$

Пример 5.2. Построить ортонормированный базис из системы векторов

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T,\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T,\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T.$$

В качестве первого вектора выберем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Тогда

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \text{ и } \hat{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Так как $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle / \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle = 2$, то

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \text{ и } \hat{\mathbf{y}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Подобным образом $\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle / \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle = 0{,}5$ и $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 \rangle / \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle = 2$, поэтому

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-0{,}5 & 1 & -0{,}5\end{bmatrix}^T$$

и $\hat{\mathbf{y}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-0{,}5 & 1 & -0{,}5\end{bmatrix}^T$.

Введем еще понятие *двойственного базиса*, которое в дальнейшем будет полезно. Возьмем систему базисных векторов $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Зададим систему векторов $\mathbf{r}_j$, удовлетворяющих соотношению

$$\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i \rangle = \delta_{ij},\ i, j \in \{1,2,...,n\}. \tag{5.2.8}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Можно показать, что для любого базиса $\mathbf{x}_i$ всегда найдется система таких векторов, что удовлетворяются соотношения (5.2.8). Векторы $\mathbf{r}_j$ являются линейно независимыми и образуют линейную оболочку, натянутую на базис $\mathbf{x}_i$. Следовательно, их можно в свою очередь выбрать как базисные векторы. Базис, состоящий из векторов $\mathbf{r}_j$, удовлетворяющих соотношению (5.2.8), называется двойственным по отношению к базису $\mathbf{x}_i$.

Двойственный базис можно применять для определения постоянных k_j в уравнении (5.2.7) по заданному вектору $\mathbf{y}$, то есть для разложения заданного вектора $\mathbf{y}$ по составляющим базиса $\mathbf{x}_j$.

Составляя скалярные произведения правой и левой частей уравнения (5.2.7) с вектором $\mathbf{r}_j$, придем к уравнениям для k_j:

$$k_j = \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{y} \rangle .$$

Тогда разложение вектора $\mathbf{y}$ по базисным векторам $\mathbf{x}_i$ будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x}_i \,, \tag{5.2.9}$$

то есть скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle$ равно составляющей вектора $\mathbf{y}$ в направлении вектора $\mathbf{x}_i$.

5.3 Собственные значения и собственные векторы

5.3.1. Характеристическое уравнение

Вернемся к уравнению (5.2.6)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \,,$$

где матрица $\mathbf{A}$ – квадратная размерностью $(n \times n)$.

Интерес представляет вопрос о том, существует ли в пространстве V_n такой вектор $\mathbf{x}$, который в результате преобразования (5.2.6) переходит в вектор **y**, имеющий такое же направление, как и вектор **x**. При положительном ответе на этот вопрос должно выполняться уравнение

$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{5.3.1}$$

где λ – некоторый скаляр, являющийся коэффициентом пропорциональности.

Задача определения значений λ_i и соответствующих им векторов $\mathbf{x}_i$, удовлетворяющих уравнению (5.3.1), известна как задача о *собственных значениях* (характеристических числах). Векторы $\mathbf{x}_i$, являющиеся решением уравнения (5.3.1), называются собственными или характеристическими векторами, соответствующими собственным значениям λ_i.

Векторно-матричное уравнение (5.3.1) можно переписать в таком виде:

$$\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]\mathbf{x} = 0\,, \tag{5.3.2}$$

где **E** – соответствующая единичная матрица. Система однородных уравнений (5.3.2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю:

$$\left|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right| = 0\,, \tag{5.3.3}$$

Развернув определитель в левой части уравнения (5.3.3), получим многочлен n-й степени относительно λ

$$D(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \tag{5.3.4}$$

Уравнение (5.3.3) является характеристическим уравнением матрицы **A**, а его корни суть собственные значения (характеристические числа) матрицы **A**.

Пример 5.3. Составить характеристическое уравнение и найти собственные значения матрицы **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристическую матрицу

$$[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}.$$

Приравняв нулю определитель характеристической матрицы, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=0\,.$$

Собственные числа равны $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$.

По теореме Виета коэффициент a_n в уравнении (5.3.4) равен произведению собственных чисел, то есть

$$a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2...\lambda_n\,. \tag{5.3.5}$$

С другой стороны, положив $\lambda=0$ в $D(\lambda)$, мы имеем

$$D(0)=|-\mathbf{A}|=a_n\ D(0)=\ |\text{-}\mathbf{A}|=a_n,$$

откуда следует, что $a_n=(-1)^n|\mathbf{A}|$. Из этого выражения и из формулы (5.3.5) следует, что произведение собственных чисел равно определителю матрицы **A**:

$$\lambda_1\lambda_2...\lambda_n=|\mathbf{A}|\,. \tag{5.3.6}$$

Коэффициент a_1 полинома $D(\lambda)$ по формуле Виета равен

$$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)\,,$$

а раскрывая определитель $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$, увидим, что коэффициент при λ^{n-1} имеет вид $-(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$, следовательно, *сумма диагональных элементов квадратной матрицы равна сумме ее собственных значений*:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}. \qquad (5.3.7)$$

Сумма диагональных элементов матрицы носит название *следа* матрицы и обозначается Tr**A** (первые буквы англ. trace – след).

Введя обозначение $T_k = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}^k)$, можно записать полезную формулу, связывающую коэффициенты a_i характеристического уравнения с T_k рекуррентным соотношением, известным как *формула Бохера*:

$$\begin{gathered} a_1 = -T_1, \\ a_2 = -\frac{1}{2}\left(a_1 T_1 + T_2\right), \\ a_3 = -\frac{1}{3}\left(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3\right), \\ \ldots \\ a_n = -\frac{1}{n}\left(a_{n-1} T_1 + \ldots + T_n\right). \end{gathered} \qquad (5.3.8)$$

Пример 5.4. Составить характеристическое уравнение и найти собственные числа матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Согласно формуле (5.3.8) $a_1 = -T_1 = -2$. Произведение $\mathbf{AA}$ дает

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix},$$

откуда находим $T_2 = 5 + 2 + 7 = 14$ и $a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2) = -5$. Далее находим $\mathbf{AAA}$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 14 & 13 & 13 \\ -4 & 3 & 11 \\ 17 & 11 & 3 \end{bmatrix},$$

откуда $T_3 = 14 + 3 + 3 = 20$ и $a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3) = 6$.

Характеристическое уравнение, таким образом, имеет вид

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

а собственные числа $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$.

5.3.2. Модальная матрица

Вначале предположим, что все корни характеристического уравнения (5.3.3) различны. Для каждого из n собственных чисел λ_i матрицы $\mathbf{A}$ можно получить вектор решения $\mathbf{x}_i$, удовлетворяющий системе уравнений

$$[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]\mathbf{x}_i = 0,\ (i = 1, 2, ..., n). \tag{5.3.9}$$

Так как уравнение (5.1.33) однородное, его решениями будут также векторы $k\mathbf{x}_i$, где k – произвольный скаляр. То есть уравнение (5.3.9) однозначно задает лишь направление каждого из $\mathbf{x}_i$. Из вектор-столбцов $\mathbf{x}_i$ или пропорциональных им образуем матрицу, которую часто называют *модальной матрицей* [10]. При *различных* собственных числах столбцы модальной матрицы можно полагать равными или пропорциональными любому ненулевому столбцу матрицы $\mathrm{Adj}[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$. Поскольку столбцы присоединенной матрицы линейно зависимы для каждого значения λ_i, то выбор конкретного λ_i определяет только один столбец модальной матрицы.

Таким образом, при различных собственных числах n столбцов модальной матрицы линейно независимы и, следовательно, образуют базис в соответствующем пространстве V_n.

Пример 5.5. Найти собственные векторы и составить модальную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица имеет вид

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix},$$

а присоединенная матрица равна

$$\mathrm{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4 & \lambda + 2 & \lambda + 2 \\ -2\lambda + 7 & \lambda^2 - \lambda - 5 & 3\lambda - 8 \\ 3\lambda - 5 & \lambda + 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{bmatrix}.$$

Подстановка в полученную матрицу $\lambda_1 = 1$ дает

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 5 & -5 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

При $\lambda_2 = -2$ присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & -14 \\ -14 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 3$ присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Взяв любой ненулевой столбец (или пропорциональный ему) из каждой полученной матрицы, составим модальную матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Столбцы полученной модальной матрицы являются линейно независимыми и образуют базис в трехмерном пространстве.

В случае кратных корней уравнения (5.3.3) и произвольной матрицы **A** определение независимых собственных векторов (столбцов модальной матрицы) не очевидно. Дело здесь в том, что не существует однозначного соответствия между порядком кратности корня характеристического уравнения и дефектом соответствующей этому корню характеристической матрицы $\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$.

Если кратность некоторого корня, например, λ_i равна p, то дефект q характеристической матрицы $\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$ может быть в пределах $1 \le q \le p$, и в этом случае можно найти только q линейно независимых собственных векторов, удовлетворяющих уравнению (5.3.9) для данного собственного числа λ_i.

Если вырожденность полная $(q = p)$ (для симметрической матрицы **A** это выполняется всегда), то можно найти ровно p линейно независимых собственных векторов, соответствующих корню λ_i кратности p. Эти p различных модальных столбцов можно получить из ненулевых столбцов матрицы

$$\left.\frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \mathrm{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]\right|_{\lambda=\lambda_i}. \qquad (5.3.10)$$

Пример 5.6. Составить модальную матрицу для матрицы **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица равна

$$[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение $(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$ имеет два корня $\lambda=1$ и один корень $\lambda=3$. Подстановка в характеристическое уравнение $\lambda=1$ дает только один линейно независимый столбец, то есть ранг характеристической матрицы равен единице, а её дефект – двум (дефект равен размерности матрицы минус её ранг). Поскольку характеристическая матрица полностью вырождена (дефект совпадает с кратностью корня), то для каждого из кратных корней существует линейно независимый вектор.

Присоединенная матрица равна

$$\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{bmatrix},$$

а её производная имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 2\lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & 2\lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda-4 \end{bmatrix}.$$

После подстановки в последнюю матрицу $\lambda=1$ любые два линейно независимых столбца дадут два столбца модальной матрицы. Таким образом, получаем два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному числу $\lambda=1$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda = 3$, получим из любого ненулевого столбца присоединенной матрицы $\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}]$ при $\lambda = 3$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно модальная матрица равна

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если вырожденность простая $(q = 1)$, то для корня λ_i кратности p можно найти только один собственный вектор, соответствующий данному λ_i. Этот вектор, как и в случае некратных корней, может быть выбран пропорциональным любому ненулевому столбцу матрицы $\mathrm{Adj}[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}]$.

Если вырожденность характеристической матрицы $1 < q < p$, то q модальных столбцов могут быть получены из различных ненулевых столбцов матрицы (5.3.10) при замене p на q.

Как определять остальные $p - q$ модальных столбцов при $q < p$ (они будут линейно зависимы от q найденных векторов $\mathbf{x}_i$) будет разобрано в разделе, посвященному матричным преобразованиям.

5.3.3. Симметрическая матрица

Случаи, когда матрица **A** является симметрической, встречаются в теории систем довольно часто. Достаточно упомянуть, что симметрическими матрицами описывают системы, состоящие из *RC*-элементов, то есть из емкостей и сопротивлений. Поэтому собственные числа и собственные векторы симметрических матриц требуют особого рассмотрения.

Важным свойством действительной симметрической матрицы является то, что ее собственные значения являются вещественными числами.

Следующее свойство симметрических матриц заключается в том, что их собственные векторы попарно ортогональны.

Третье, уже упомянутое, свойство симметрической матрицы касается кратных собственных значений. Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i кратности p, линейно независимы.

Из этих трех основных свойств симметрической матрицы вытекают еще ряд свойств, которые можно сформулировать следующим образом.

1. Собственные векторы симметрической матрицы **A** n-го порядка порождают n-мерное векторное пространство V_n.

2. Существует, по крайней мере, одно ортонормированное множество собственных векторов матрицы **A**, которое порождает векторное пространство V_n.

3. Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i кратности p, порождают пространство V_p.

4. В любом множестве из n ортонормированных собственных векторов существует ровно p линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i с кратностью p.

5. Если одно или несколько собственных значений матрицы **A** имеют кратность $p \geq 2$, то существует бесконечное число различных множеств ортонормированных векторов, которые порождают n-мерное векторное пространство V_n. Эти множества соответствуют различным способам выбора ортонормированных базисов, порождающих подпространства V_p с размерностью $p \geq 2$.

5.4 Линейные преобразования

5.4.1. Элементарные действия над матрицами

Рассмотрим определённые действия с элементами матриц.

1. Перестановка произвольных двух строк (столбцов).

2. Многократное прибавление к какой – либо строке (столбцу) другой строки (столбца).

3. Умножение строки (столбца) на отличную от нуля постоянную величину.

Эти три элементарные операции равносильны умножению данной квадратной матрицы слева или справа на некоторую неособенную матрицу, причем такую, чтобы ранг полученной матрицы равнялся бы рангу исходной матрицы.

Операция 1. Эта операция не что иное, как перенумерация строк (столбцов) и, конечно, не меняет ранга матрицы. Пусть $\mathbf{Q}_1$ – единичная матрица размерности $(n \times n)$ с переставленными i-й и j-й строками. Тогда умножение произвольной $(n \times n)$ матрицы $\mathbf{A}$ на $\mathbf{Q}_1$ слева приводит к матрице с переставленными i-й и j-й строками. Умножение $\mathbf{A}$ справа на $\mathbf{Q}_1$ приводит к матрице с переставленными i-й и j-й столбцами.

Операция 2. Сложение с i-й строкой k раз j-й строки обеспечивается умножением на матрицу $\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{Q}_2$ слева $\mathbf{Q}_2\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_2$ – единичная матрица с элементом k в i-й строке и j-м столбце $(i \neq j)$. Такая же операция со столбцами будет обеспечена умножением $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{Q}_2$ справа $\mathbf{AQ}_2$.

Операция 3. Умножение i-й строки на постоянную $k \neq 0$ произойдет, если взять произведение $\mathbf{Q}_3\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_3$ – единичная матрица с замененным на k i-м элементом на главной диагонали. Произведение $\mathbf{AQ}_3$ даст аналогичную операцию с i-м столбцом.

Таким образом, любая последовательность элементарных действий над строками матрицы $\mathbf{A}$ может быть выполнена в результате умножения слева на $\mathbf{A}$ соответствующей последовательности неособенных матриц $\mathbf{P}_i$ или, что то же самое, умножения слева на $\mathbf{A}$ неособенной матрицы $\mathbf{P} = \prod_i \mathbf{P}_i$. Аналогичные операции со столбцами $\mathbf{A}$ будут получены в результате умножения справа на $\mathbf{A}$ неособенной матрицы $\mathbf{Q}$. В результате мы получаем матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}, \tag{5.4.1}$$

имеющую ранг такой же, как и матрица $\mathbf{A}$.

5.4.2. Эквивалентные преобразования

Свойство матриц иметь одинаковый ранг является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, можно говорить об *эквивалентности* двух матриц, если у них одинаковый ранг (естественно, размерности таких матриц должны совпадать). Преобразование (5.4.1) не меняет ранга матрицы, то есть можно считать, что две матрицы эквивалентные, если одна из матриц получается в результате выполнения ряда элементарных операций над другой матрицей. Преобразование (5.4.1) является, таким образом, наиболее общим видом эквивалентных матричных преобразований. Отдельные преобразования получаются из взаимосвязи $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

С помощью эквивалентных преобразований можно произвольную матрицу $\mathbf{A}$ ранга $r > 0$ привести к *нормальной* (или *канонической*) форме, т.е. к матрице одного из следующих видов

$$\mathbf{E}_r, \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_r \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \end{array}\right].$$

Если неособенную матрицу $\mathbf{A}$ можно привести к единичной путем операций над строками $\mathbf{A}$, то в преобразовании (5.4.1) $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$, и по сути, это представляет собой другой метод нахождения обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Если в общем случае возможно приведение матрицы $\mathbf{A}$ к единичной путем ряда элементарных операций, то

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{PAQQ}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{EQ}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}.$$

Последнее соотношение показывает, что любая неособенная матрица может быть представлена в виде произведения элементарных матриц.

Рассмотрим некоторые виды преобразований.

Преобразование подобия. Возьмем линейное преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \tag{5.4.2}$$

где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ – векторы в пространстве V_n с базисом $\mathbf{z}_i$.

Перейдем от базиса $\mathbf{z}_i$ к некоторому новому базису $\mathbf{w}_i$. При этом векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ переходят в новом базисе к векторам $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'$ соответственно. Поскольку $\mathbf{z}_i$ и $\mathbf{w}_i$ являются базисами в V_n, то существует неособенная матрица $\mathbf{P}$, переводящая векторы без штрихов в векторы со штрихами, то есть

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x},\ \mathbf{y}' = \mathbf{P}\mathbf{y}, \\
&\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}',\ \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}'.
\end{aligned} \qquad (5.4.3)
$$

Найдем связь между $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'$ в новой системе координат. Для этого умножим на $\mathbf{P}$ слева уравнение (5.4.2)

$$\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}\ .$$

Учитывая соотношения (5.4.3) из последнего уравнения получим

$$\mathbf{y}' = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}'$$

или

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{x}'\ ,$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{=1}\mathbf{A}\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}\ . \qquad (5.4.4)$$

Матрица $\mathbf{B}$, связывающая вектор $\mathbf{y}'$ с вектором $\mathbf{x}'$ в новой системе координат, получается из матрицы $\mathbf{A}$ с помощью преобразования (5.4.4), которое носит название *преобразования подобия.*

Важным свойством преобразования подобия является инвариантность собственных чисел к такому преобразованию.

Ортогональное преобразование. Пусть базисная система векторов $\mathbf{z}_i$ ортогональна. Если новая система векторов $\mathbf{w}_i$ также ортогональна, то преобразование подобия (5.4.4) с дополнительным условием

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \qquad (5.4.5)$$

называется *ортогональным преобразованием.*

Ортогональное преобразование сохраняет неизменными нормы векторов и углы между ними.

Конгруэнтное преобразование задается формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\ , \qquad (5.4.6)$$

где $\mathbf{Q}$ – неособенная матрица.

Конгруэнтное преобразование, согласно соотношению (5.4.6), состоит из пар элементарных операций, причем каждая из пар является одним и тем же элементарным преобразованием последовательно строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

5.4.3. Диагонализация матриц

Часто возможен в различных задачах переход к такой системе координат, в которой линейное преобразование (5.4.2) описывается диагональной матрицей. Это очень удобно, так как в этом случае уравнения для компонент векторов оказываются несвязанными друг с другом. Подобная система координат называется *нормальной* системой, а координаты в таком базисе – *нормальными координатами* системы. С помощью различных преобразований можно привести матрицу к диагональному виду.

Конгруэнтное преобразование. С помощью конгруэнтного преобразования действительная симметрическая матрица $\mathbf{A}$ ранга r может быть приведена к каноническому виду

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{E}_p & 0 & 0\\ \hline 0 & -\mathbf{E}_{r-p} & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right]. \qquad (5.4.7)$$

Целое число p называется *индексом* матрицы, а целое число $s=p-(r-p)=2p-r$ – *сигнатурой* матрицы.

Таким же конгруэнтным преобразованием комплексная симметрическая матрица ранга r может быть приведена к канонической форме

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{E}_r & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]. \qquad (5.4.8)$$

Преобразования подобия. В преобразовании подобия используется модальная матрица $\mathbf{M}$. В тех случаях, когда матрица $\mathbf{A}$ имеет n различных собственных значений, либо когда при кратных корнях матрица $\left[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]$ полностью вырождена (в этих случаях матрица $\mathbf{M}$ имеет n линейно независимых модальных столбцов) преобразование $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ приводит к диагональной матрице $\mathbf{\Lambda}$. Это нетрудно показать, вернувшись к уравнениям (5.3.9) для собственных векторов $\mathbf{x}_i$

$$\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]\mathbf{x}_i = 0 .$$

Эти уравнения можно объединить для всех $i = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \dots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \dots & \lambda_n x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \dots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

или в сокращенной матричной форме

$$\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM} , \tag{5.4.9}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n\right]$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. Поскольку модальная матрица $\mathbf{M}$ имеет n линейно независимых столбцов, она является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$. Умножив на $\mathbf{M}^{-1}$ слева уравнение (5.4.9), получим

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} .$$

Таким образом, преобразование подобия позволяет перейти при линейно независимых собственных векторах к диагональной матрице.

Применение такого преобразования подобия всегда возможно для действительной симметрической матрицы. Так как собственные векторы действительной симметрической матрицы (точно так же, как и эрмитовой) ортогональны, то всегда существует такая ортогональная матрица, что

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n\right] .$$

Пример 5.7. Привести матрицу $\mathbf{A}$ к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица была найдена в примере 5.3.3

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$ равна

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 22 & 2 & -28 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

а произведение $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ приводит к диагональной матрице

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Перейдем в линейном преобразовании (5.4.2) $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ к нормальным координатам. Для этого достаточно в соотношениях (5.4.3), (5.4.4) заменить матрицу $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ модальной матрицей $\mathbf{M}$. При преобразовании $\mathbf{x} = \mathbf{Mx}'$ уравнение (5.4.2) записывается

$$\mathbf{y} = \mathbf{AMx}'. \tag{5.4.10}$$

Умножая слева на $\mathbf{M}^{-1}$ уравнение (5.4.10) получим

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AMx}' = \mathbf{\Lambda x}'.$$

Учитывая, что $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, из последнего соотношения имеем

$$\mathbf{y}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}', \tag{5.4.11}$$

или расписав уравнение (5.4.11) по компонентам векторов $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'$:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 x_1', \\ y_2' &= \lambda_2 x_2', \\ &\dots \\ y_n' &= \lambda_n x_n'. \end{aligned}$$

Таким образом, одноименные координаты векторов в нормальной системе координат оказываются связанными *независимыми* уравнениями. Попутно отметим, что координаты x_i' (как и y_i') лежат на собственных векторах или их продолжениях.

Столбцы матрицы $\mathbf{M}$ образуют базис, а строки $\mathbf{M}^{-1}$ – двойственный базис в исходном пространстве V_n. Если столбцы модальной матрицы обозначить через $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$, а двойственный базис – через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …$\mathbf{r}_n$, то произвольный вектор $\mathbf{y}$ можно представить на основе (5.2.9) в виде

$$\mathbf{y} = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_2 + ... + \langle \mathbf{r}_n, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_n. \tag{5.4.12}$$

С другой стороны, эквивалентное представление этого вектора $\mathbf{y}$ с использованием нормальных координат выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad ... \quad \mathbf{u}_n]\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad ... \quad \mathbf{u}_n]\mathbf{y}' = \\ &= [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad ... \quad \mathbf{u}_n]\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{bmatrix} = y_1'\mathbf{u}_1 + y_2'\mathbf{u}_2 + ... + y_n'\mathbf{u}_n. \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Из сравнения выражений (5.4.12) и (5.4.13) следует, что $y_i' = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle$, и, следовательно, строки матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ образуют двойственный базис.

Конечно, к этому же выводу можно было бы прийти из определения двойственного базиса: двойственным по отношению к исходному базису

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ будет базис $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n$, для которого $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, а так как $\mathbf{u}_j$ – столбцы матрицы **M**, а $\mathbf{r}_i$ – строки $\mathbf{M}^{-1}$, то $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{E}$.

У разных авторов можно встретить и разные формы представления вектора: либо в форме скалярных произведений (5.4.12), либо в форме нормальных координат (5.4.13), хотя, безусловно, обе формы приводят к тождественным результатам.

Несимметрические матрицы $(n \times n)$ с кратными собственными числами могут в общем случае содержать меньше, чем *n* линейно независимых собственных векторов, определяемых уравнениями (5.3.9). Однако можно показать, что в этом случае произвольная квадратная матрица $\mathbf{A}$ с помощью преобразования подобия может быть приведена к *канонической матрице Жордана,* имеющей следующие свойства:

– диагональные элементы этой матрицы являются собственными числами;

– все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю;

– если соседние элементы на главной диагонали одинаковы, то некоторые элементы, расположенные непосредственно справа от главной диагонали, равны единице;

– остальные элементы равны нулю.

Типичная жорданова форма имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \qquad (5.4.14)$$

«Единицы» в жордановых матрицах встречаются в блоках вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Они называются клетками Жордана. Количество клеток Жордана, связанных с собственным числом λ_i, равно количеству линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_i, то есть дефекту характеристической матрицы $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$. Но определить порядки клеток Жордана – задача чрезвычайно трудная, несмотря на то, что число единиц, связанных с конкретным собственным числом λ_i, вполне определено и равно кратности λ_i минус дефект $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$. Поэтому совершенно непонятно, получится ли в результате преобразования $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ матрица вида (5.4.14) или, например, матрица

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \qquad (5.4.15)$$

И в той и в другой матрице по две клетки Жордана, связанные с собственным числом λ_1 и в обеих матрицах по две единицы в этих клетках, но в матрице (5.4.14) порядки клеток 3 и 1, а в матрице (5.4.15) обе клетки порядка 2.

В случае полной вырожденности (дефект $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равен кратности корня λ_i) в клетке Жордана не будет ни одной единицы. В случае простой вырожденности (дефект $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равен единице) все элементы, непосредственно лежащие справа от главной диагонали с λ_i, будут равны единице. В промежуточных случаях для определения $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ можно довольствоваться методом проб и ошибок исходя из равенства

$$\mathbf{MJ} = \mathbf{AM}.$$

Обозначим модальные столбцы через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$. Тогда клетка Жордана порядка m, связанная с λ_i, существует лишь в том случае, если m векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_i \mathbf{x}_1, \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_i \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1, \\
&\dots \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_m &= \lambda_i \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{5.4.16}
$$

Уравнения (5.4.16) применимы для любой клетки Жордана. Модальные столбцы можно определить из этих уравнений, последовательно их решая, начиная с первого уравнения.

Пример 5.8. Привести к канонической форме матрицу $\mathbf{A}$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Характеристическая матрица и присоединенная к ней равны

$$
[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}, \ \mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.
$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет два корня $\lambda = 1$. Подстановка этого числа в характеристическую матрицу дает единственный собственный вектор, соответствующий $\lambda = 1$

$$
\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Поскольку ранг характеристической матрицы при $\lambda = 1$ равен единице, то её дефект также равен единице и каноническое преобразование приведет к клетке Жордана

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Второй собственный вектор найдем, согласно выражению (5.4.16), из уравнения

$$
\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 .
$$

Расписав уравнение по компонентам, получим

$$-x_{12} + 4x_{22} = x_{12} + 2,$$
$$-x_{12} + 3x_{22} = x_{22} + 1.$$

Поскольку полученные уравнения линейно зависимые, одну из компонент вектора $\mathbf{x}_2$ можно выбрать произвольно, например, положить $x_{12} = 1$. Тогда получим $x_{22} = 1$, и модальная матрица равна

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ приведет к канонической матрице Жордана

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5 Квадратичные формы

Билинейной формой от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и n переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ называется сумма вида

$$\begin{aligned} B = {} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \\ & \qquad \ldots \\ & + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

где все составляющие – действительные числа.

Билинейную форму удобно изображать в матричной записи

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [x_1, x_2 ... x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle. \qquad (5.5.2)$$

Матрица **A** называется матрицей коэффициентов формы или просто матрицей формы, а ранг **A** – рангом формы.

Если в выражении (5.5.2) положить **x**=**y**, то получим

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \ . \qquad (5.5.3)$$

Выражение (5.5.3) называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Нетрудно видеть, что коэффициент при произведении $x_i x_j \ (i \neq j)$ равен $(a_{ij} + a_{ji})$. Этот коэффициент не изменится, если оба a_{ij} и a_{ji} положить равными $(a_{ij} + a_{ji})/2$. Поэтому, ничуть не снижая общности, можно считать матрицу **A** симметрической.

Если матрица **A** является эрмитовой, то соответствующую эрмитову форму можно определить как

$$H(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = \left(\mathbf{x}^T\right)^* \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* x_j \ . \qquad (5.5.4)$$

5.5.1. Преобразование переменных

Перейдем в выражении (5.5.38) от переменных x_i к переменным y_i с помощью преобразования **x**=**By**, где **B** – произвольная неособенная квадратная матрица размерностью *n*. Получим в результате квадратичную форму от переменных $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$Q = \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{C}\mathbf{y}, \qquad (5.5.5)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ является конгруэнтным преобразованием, так что ранг формы не меняется.

Во многих случаях желательно выразить *Q* в виде линейной комбинации только квадратов координат. Это будет, очевидно, в том случае, если матрицу **A** привести к диагональному виду. Особенно полезным оказывается ортогональное преобразование, т.е. когда **B** является ортогональной матрицей $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$. Как уже было выяснено в предыдущем подразделе, такое возможно для симметрических матриц **A**, если в качестве матрицы **B** взять модальную матрицу **M**. Таким образом, линейное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ приводит к квадратичной форме

$$Q(y) = \mathbf{y}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 . \tag{5.5.6}$$

Если у симметрической матрицы **A** ранг $r < n$, и имеются кратные собственные значения, то по-прежнему модальная матрица может быть составлена из линейно независимых столбцов и в результате преобразование приведет к диагональной матрице. В этом случае модальная матрица **M** не единственная и, согласно свойствам симметрических матриц, существует бесконечное множество систем m ортогональных собственных векторов, соответствующих собственному числу кратности m. В результате преобразования в квадратичной форме (5.5.6) останется только r слагаемых.

В случае, если конгруэнтное преобразование не ортогональное, квадратичную форму можно привести к виду

$$Q(\mathbf{z}) = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_p z_p^2 - \alpha_{p+1} z_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_n z_n^2 , \tag{5.5.7}$$

где $\alpha_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ – положительные числа.

Число положительных членов p называется индексом квадратичной формы.

Если квадратичная форма имеет ранг $r \le n$, то в выражении (5.5.7) остается только r членов. Форму (5.5.7) можно еще упростить, если ввести невырожденное преобразование переменных

$$w_i = \begin{cases} \sqrt{\alpha_i} z_i & \text{при } i = 1, 2, \ldots, r, \\ z_i & \text{при } i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда получим

$$Q(\mathbf{w}) = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \ldots - w_n^2 . \tag{5.5.8}$$

Формулу (5.5.8) можно рассматривать как прямое следствие приведения к канонической форме (5.4.7).

5.5.2. Определенные, полуопределенные и неопределенные формы

Квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ называется *положительно определенной*, если она положительна при всех $\mathbf{x}$, исключая $\mathbf{x} = 0$. Конгруэнтные преобразования (впрочем, как и любые эквивалентные преобразования) не меняют положительной определенности формы, поэтому из соотношения (5.5.8) следует, что квадратичная форма будет положительно определенной, если и только если $\mathbf{A}$ является неособенной матрицей, и индекс формы (то есть число положительных членов) равен ее рангу, т.е. $p = r = n$. Из уравнения (5.5.6) ясно, что квадратичная форма положительно определена в том и только в том случае, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ положительные $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Любое из этих условий может быть использовано при определении положительной определенности квадратичной формы.

Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной*, если она не отрицательна для всех $\mathbf{x}$ и существуют $\mathbf{x} \neq 0$, для которых $Q(\mathbf{x}) = 0$. Такое будет тогда и только тогда, когда все собственные значения $\mathbf{A}$ неотрицательны и, по крайней мере, одно из собственных значений равно нулю. При этом матрица $\mathbf{A}$, согласно (5.3.6), будет особенной и ее ранг $r < n$.

Примечание [ЛВС1]:

Подобные утверждения могут быть сделаны и относительно отрицательно определенных и отрицательно полуопределенных квадратичных форм. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x})$ называется отрицательно определенной, если она отрицательна для всех $\mathbf{x}$, исключая $\mathbf{x} = 0$. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x})$ будет являться отрицательно полуопределенной, если она не положительна для всех $\mathbf{x}$ и существуют точки $\mathbf{x} \neq 0$, для которых $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Квадратичная форма является неопределенной тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. При этом в векторном пространстве V_n можно найти такие точки, в которых квадратичная форма будет иметь противоположные знаки.

Устанавливать определенность квадратичной формы по собственным значениям матрицы $\mathbf{A}$ или путем приведения $\mathbf{A}$ к канонической форме достаточно сложно при больших размерностях $\mathbf{A}$, поэтому разработан более простой критерий по установлению положительной определенности квадратичной формы. Можно показать, что для того, чтобы квадратичная форма $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ или симметрическая матрица $\mathbf{A}$ были положительно определенными, необходимо и достаточно, чтобы расположенные в естественном порядке все ее главные миноры были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$
$$\ldots$$
$$\Delta_n = |\mathbf{A}| > 0.$$

Эти главные миноры $\mathbf{A}$ называются также дискриминантами квадратичной формы.

Для эрмитовых форм существуют аналогичные формулировки.

Условия отрицательной определенности могут быть получены, если потребовать положительную определенность ($-\mathbf{A}$).

5.5.3. Дифференцирование квадратичных форм

Необходимость дифференцирования квадратичных форм может возникнуть при исследовании устойчивости динамических систем, либо при проектировании оптимальных систем с использованием квадратичных критериев качества.

Дифференцирование по скалярной величине. Возьмем квадратичную форму

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j .$$

Продифференцируем Q по переменной x_k:

$$\frac{dQ}{dx_k} = \frac{d}{dx_k}\left[a_{kk}x_k^2 + x_k\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_{ki}x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{jk}x_j\right)\right] =$$
$$= 2a_{kk}x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_{ki}x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{jk}x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_j .$$

В матричной записи это соотношение будет иметь вид:

$$\frac{dQ}{dx_k} = \left(\mathbf{Ax}\right)_k + \left(\mathbf{A}^T\mathbf{x}\right)_k, \tag{5.5.9}$$

где индекс k означает k-ю компоненту вектор-столбцов $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{A}^T\mathbf{x}$. В случае симметрической матрицы $\mathbf{A}$ формула (5.5.9) принимает вид:

$$\frac{dQ}{dx_k} = 2\left(\mathbf{Ax}\right)_k.$$

Дифференцирование по векторной переменной. Производная квадратичной формы по вектору $\mathbf{x}$, называемая часто *градиентом,* получается в результате применения к квадратичной форме $Q(\mathbf{x})$ оператора-вектора дифференцирования

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T. \tag{5.5.10}$$

В левой части выражения (5.5.10) приведены различные обозначения градиента, встречающиеся у разных авторов.

Так как $Q\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$, то

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\, Q\left(\mathbf{x}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right).$$

Учитывая формулу (5.5.9), последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\, Q\left(\mathbf{x}\right) &= \left[\left(\mathbf{Ax}\right)_1 \quad \ldots \quad \left(\mathbf{Ax}\right)_n\right]^T + \left[\left(\mathbf{A}^T\mathbf{x}\right)_1 \quad \ldots \quad \left(\mathbf{A}^T\mathbf{x}\right)_n\right]^T = \\ &= \mathbf{Ax} + \mathbf{A}^T\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

Для симметрической матрицы $\mathbf{A}$ из (5.5.11) будем иметь

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{5.5.12}$$

Дифференцирование по времени. Если матрица $\mathbf{A}$ и переменные x_1, x_2, ...x_n являются функциями времени, то производная по t от квадратичной формы $Q(t)$ определяется выражением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle = \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle +$$
$$+\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)\rangle.$$

Для симметрической матрицы $\mathbf{A}$, с учетом соотношения (5.5.12), последнее выражение будет выглядеть

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= \dot{Q}(t) = 2\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle = \\ &= \langle \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle.\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ не зависит от времени, последнее слагаемое в (5.5.13) обращается в нуль и получаем

$$\dot{Q}(t) = \langle \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle = 2\langle \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle \ . \tag{5.5.14}$$

5.6 Матричные функции

5.6.1. Матричные ряды

Краткая запись произведения матриц $\mathbf{A}\mathbf{A}...\mathbf{A}$ может быть сделана в форме $\mathbf{A}^k$, где k – число множителей, входящих в произведение. Как и возведение в степень скаляров, умножение степеней матриц подчиняется обычным правилам:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m},$$
$$\left(\mathbf{A}^k\right)^m = \mathbf{A}^{km},$$
$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n.$$

где $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица порядка *n*.

Эти же правила справедливы и при возведении матрицы в отрицательную степень при условии, что матрица неособенная, т.е. существует обратная матрица.

Можно возводить матрицы и в дробную степень. Так, если $\mathbf{A}^m = \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, то $\mathbf{A}$ является корнем *m*-й степени из $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \sqrt[m]{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{1/m}.$$

В отличие от скаляров, у которых имеется ровно *m* корней *m*-й степени, не существует общего правила определения, каким количеством корней *m*-й степени обладает матрица $\mathbf{B}$. Это число корней зависит от конкретного вида матрицы.

Возьмем произвольный многочлен *m*-го порядка от скалярной переменной *x*

$$N(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_0. \tag{5.6.1}$$

Заменив в этом выражении *x* на квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка *n*, получим соответствующий матричный многочлен

$$N(\mathbf{A}) = p_m \mathbf{A}^m + p_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \ldots + p_0 \mathbf{E}_n. \tag{5.6.2}$$

Многочлен (5.6.1) можно, как известно, представить в виде произведения

$$N(x) = p_m (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_m),$$

где $\lambda_i \; (i = 1, 2, \ldots, m)$ – корни многочлена, которые предполагаются различными.

Подобным же образом можно представить и матричный многочлен

$$N(\mathbf{A}) = p_m (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\ldots(\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{E}). \tag{5.6.3}$$

Обобщением ряда (5.6.1) будет бесконечный степенной ряд

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Заменив переменную x в последнем выражении на квадратную матрицу $\mathbf{A}$, получим бесконечный ряд по $\mathbf{A}$

$$S(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \mathbf{A} + \ldots + a_k \mathbf{A}^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k . \tag{5.6.4}$$

Вопросы сходимости матричных рядов затрагивать не будем, достаточно знать только, что ряд (5.6.4) сходится, если сходятся соответствующие скалярные ряды $S(\lambda_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$, где λ_i – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

5.6.2. Функции от матриц

Разложение известных скалярных функций в степенные ряды дает основание для определения этих функций от матриц.

Матричная экспонента:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \exp \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}, \\ e^{-\mathbf{A}} &= \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{E} - \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbf{A}^k}{k!}. \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

Ряды (5.6.5) сходятся равномерно и абсолютно. Поскольку произведение матриц в общем случае некоммутативно, равенство $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ выполняется, только если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутативны $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Последнее условие выполняется, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ или $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. В частности, при $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ имеем

$$e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{[0]} = \mathbf{E},$$

откуда ясно, что матрица $e^{-\mathbf{A}}$ является обратной к матрице $e^{\mathbf{A}}$.

Если $\mathbf{A}$ не зависит от времени, то матричная экспонента $e^{\mathbf{A}t}$ определяется подобно уравнению (5.6.5) в форме бесконечного ряда

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \qquad (5.6.6)$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно для всех значений времени t. Производная по t от матричной экспоненты $e^{\mathbf{A}t}$ находится почленным дифференцированием ряда (5.6.6)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \ldots = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}. \qquad (5.6.7)$$

Обобщая соотношение (5.6.7) для k-й производной с учетом обозначения $\frac{d}{dt} = p$ получим

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = p^k e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^k. \qquad (5.6.8)$$

Если $N(p)$ – многочлен от оператора дифференцирования p, то

$$N(p)e^{\mathbf{A}t} = N(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}N(\mathbf{A}). \qquad (5.6.9)$$

Часто встречается случай воздействия операторного многочлена $N(p)$ на произведение матриц $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)$. В предположении, что существует произведение $\mathbf{AB}(t)$ и не существует $\mathbf{B}(t)\mathbf{A}$, можно записать

$$p\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)\right) = e^{\mathbf{A}t}p\mathbf{B}(t) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{AB}(t) = e^{\mathbf{A}t}(p\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{B}(t),$$
$$p^2\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)\right) = e^{\mathbf{A}t}p^2\mathbf{B}(t) + 2e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}p\mathbf{B}(t) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^2\mathbf{B}(t) = e^{\mathbf{A}t}(p\mathbf{E} + \mathbf{A})^2\mathbf{B}(t),$$
$$\ldots$$
$$p^k\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)\right) = e^{\mathbf{A}t}(p\mathbf{E} + \mathbf{A})^k\mathbf{B}(t).$$

В общем случае

$$N(p)\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)\right) = e^{\mathbf{A}t}N(p\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{B}(t). \qquad (5.6.10)$$

Интеграл от матричной экспоненты $e^{\mathbf{A}t}$ можно найти путем интегрирования бесконечного ряда (5.6.6)

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = \int_0^t \mathbf{E}dt + \int_0^t \mathbf{A}tdt + \int_0^t \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!}dt + ... = \mathbf{E}t + \frac{\mathbf{A}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} + ...,$$

откуда

$$\mathbf{A}\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}.$$

Из последнего соотношения, предполагая, что матрица $\mathbf{A}$ – неособенная, получим

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = \mathbf{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}\right) = \left(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}\right)\mathbf{A}^{-1}. \quad (5.6.11)$$

Матричный синус:

$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - ... = \frac{\exp(j\mathbf{A}) - \exp(-j\mathbf{A})}{2j}. \quad (5.6.12)$$

Матричный косинус:

$$\cos \mathbf{A} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - ... = \frac{\exp(j\mathbf{A}) + \exp(-j\mathbf{A})}{2}. \quad (5.6.13)$$

Матричная комплексная экспонента в формулах (5.6.12) и (5.6.13) определяется уравнением (5.6.5) при замене $\mathbf{A}$ на $j\mathbf{A}$:

$$\exp(j\mathbf{A}) = \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - ...\right) + j\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - ...\right) = \cos\mathbf{A} + j\sin\mathbf{A}. \quad (5.6.14)$$

Как легко видеть, формулы (5.6.12) – (5.6.14) являются матричными аналогиями формул Эйлера.

Матричный гиперболический синус:

$$\operatorname{sh}\mathbf{A}=\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\frac{\mathbf{A}^5}{5!}-...=\frac{\exp\mathbf{A}-\exp(-\mathbf{A})}{2}.$$

Матричный гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch}\mathbf{A}=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^4}{4!}-...=\frac{\exp\mathbf{A}+\exp(-\mathbf{A})}{2}.$$

Матричные тригонометрические тождества имеют соответствующие аналоги скалярных тригонометрических тождеств и выводятся с помощью вышеприведенных матричных соотношений.

Полезной при выводе ряда тригонометрических тождеств является действительная матрица (2×2), аналог скалярной мнимой единицы $j=\sqrt{-1}$. Она определяется как

$$\mathbf{J}_0=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Можно посчитать, что $\mathbf{J}_0^2=-\mathbf{E}, \mathbf{J}_0^3=-\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_0^4=\mathbf{E}$ и т.д.

5.6.3. Теорема Кэли – Гамильтона

Эта теорема касается весьма важного и полезного свойства характеристического полинома $D(\lambda)$ и используется при нахождении различных функций от матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 5.6.1 (Кэли – Гамильтона). Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (5.4.9) и представим его в виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}.$$

Для произвольной положительной степени m последнее соотношение представим в форме

$$\mathbf{A}^m=\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^m\mathbf{M}^{-1}. \qquad (5.6.15)$$

Если $N(\lambda)$ – многочлен от λ вида

$$N\left(\lambda\right) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n,$$

то согласно (5.6.15) многочлен от матрицы $\mathbf{A}$ равен

$$N\left(\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + c_2\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_n\mathbf{E} = \mathbf{M}N\left(\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{M}^{-1} = \\ = \mathbf{M}\begin{bmatrix} N\left(\lambda_1\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N\left(\lambda_2\right) & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & N\left(\lambda_n\right) \end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1}, \tag{5.6.16}$$

где λ_i – собственные значения $\mathbf{A}$**,** то есть не нули многочлена $N(\lambda)$.

Если выбранный многочлен является характеристическим многочленом, то есть $N(\lambda) = D(\lambda)$, то $N(\lambda_1) = N(\lambda_2) = \ldots = N(\lambda_n) = 0$. Отсюда следует, что

$$D(\mathbf{A}) = [0],$$

где $D(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right|$ – характеристический многочлен.

Таким образом, теорема доказана для случая, когда все собственные значения λ_i различны. Однако можно показать, что теорема справедлива и для произвольной квадратной матрицы.

С помощью теоремы Кэли – Гамильтона можно понижать порядок многочленов, находить обратную матрицу, возводить матрицу в произвольную положительную целую степень, вычислять функции от матриц.

Действительно, решив матричное характеристическое уравнение $D(\mathbf{A}) = [0]$ относительно старшей степени матрицы $\mathbf{A}$, получим формулу для вычисления $\mathbf{A}^n$ через полином $(n-1)$-го порядка. Последовательно умножая правую и левую часть этой формулы на **A**, имеем итерационную процедуру для возведения $\mathbf{A}$ в произвольную степень.

Решив то же уравнение $D(\mathbf{A}) = [0]$ относительно низшей степени матрицы $\mathbf{A}$ (то есть относительно единичной матрицы) и умножив правую и левую часть на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, получим выражение для обратной матрицы через полином $(n-1)$-й степени от матрицы $\mathbf{A}$. В некоторых случаях этот метод удобнее, чем другие методы.

Пусть имеется матричный многочлен $N(\mathbf{A})$ степени большей, чем порядок $\mathbf{A}$. Разделив $N(\lambda)$ на характеристический полином $\mathbf{A}$, получим

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{5.6.17}$$

где $R(\lambda)$ – остаточный член порядка меньшего, чем $D(\lambda)$.

Тогда, умножив уравнение (5.6.17) на $D(\lambda)$, получим

$$N(\lambda) = Q(\lambda)D(\lambda) + R(\lambda), \tag{5.6.18}$$

Так как (согласно теореме Кэли – Гамильтона) $D(\mathbf{A}) = [0]$, то $N(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$ и, таким образом, полином любой степени может быть представлен полиномом $(n-1)$-й степени.

Вышеизложенное можно распространить не только на любую полиномиальную функцию от $\mathbf{A}$, но и на произвольную функцию $F(\mathbf{A})$, где $F(\lambda)$ предполагается аналитической функцией λ в некоторой области. При таком условии $F(\lambda)$ может быть в области аналитичности представлена рядом Тейлора. Поэтому функция $F(\mathbf{A})$ может быть записана в виде многочлена от $\mathbf{A}$ степени $(n-1)$. Действительно, если $Q(\lambda)$ – аналитическая функция в некоторой области, то

$$F(\lambda) = Q(\lambda)D(\lambda) + R(\lambda), \tag{5.6.19}$$

где $D(\lambda)$ – характеристический полином $\mathbf{A}$, а $R(\lambda)$ – полином вида

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{5.6.20}$$

Коэффициенты α_i в уравнении (5.6.20) можно найти путем последовательной подстановки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в уравнение (5.6.19). Учитывая, что $D(\lambda_i) = 0$, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&F(\lambda_1) = R(\lambda_1),\\
&F(\lambda_2) = R(\lambda_2),\\
&\quad\ldots\\
&F(\lambda_n) = R(\lambda_n).
\end{aligned} \qquad (5.6.21)
$$

В этой системе n уравнений и n неизвестных. Следовательно, все α_i определяются однозначно. Нетрудно показать, что $Q(\lambda)$ является аналитической функцией в той же области, что и $F(\lambda)$, поэтому уравнение (5.6.19) справедливо для всех λ в области аналитичности $F(\lambda)$. Из этого следует, что если область аналитичности $F(\lambda)$ включает все собственные значения $\mathbf{A}$, то вместо переменной λ можно подставить $\mathbf{A}$. В результате из уравнения (5.6.19) получим

$$F(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})D(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}),$$

а так как согласно теореме Кэли – Гамильтона $D(\mathbf{A}) = [0]$, то из последнего соотношения имеем

$$F(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}). \qquad (5.6.22)$$

Пример 5.9. Воспользовавшись теоремой Кэли – Гамильтона, вычислить матричную экспоненту $e^{\mathbf{A}t}$ для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2 .$$

Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является матрицей второго порядка, то по теореме Кэли – Гамильтона матричная экспонента может быть представлена полиномом первого порядка

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A},$$

где коэффициенты α_0, α_1 определяются из системы уравнений (5.6.21), куда подставлена искомая функция и собственные числа матрицы $\mathbf{A}$

$$F(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1,$$
$$F(\lambda_2) = e^{\lambda_2 t} = e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1.$$

Решая систему уравнений, находим

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t},$$
$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Окончательно получаем искомую функцию

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Теперь что касается кратных собственных значений. Ясно, что если $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ_i кратности r, то подстановка λ_i в уравнение (5.6.19) даст лишь одно линейно независимое уравнение. Остальные $r-1$ линейных уравнений для определения α_i находятся дифференцированием обеих частей уравнения (5.6.19). В этом случае для нахождения единственного решения для коэффициентов α_i полинома (5.6.20) нужно составить систему линейных уравнений вида

$$\left.\frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} \quad (k = 0,1,2,...r-1)\,. \qquad (5.6.23)$$

5.6.4. Теорема Сильвестра

Теорема разложения Сильвестра находит применение при отыскании матричных функций, представляющих в замкнутой форме степенные ряды матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 5.6.2 (Сильвестра). Пусть $N(\mathbf{A})$ – матричный многочлен от $\mathbf{A}$ (неважно, конечный или бесконечный) и квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет n различных собственных значений. Тогда имеет место формула

$$N(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n} N(\lambda_k)\mathbf{Z}_0(\lambda_k), \tag{5.6.24}$$

где $\mathbf{Z}_0(\lambda_k)=\dfrac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\left(A-\lambda_j\mathbf{E}\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\left(\lambda_k-\lambda_j\right)}$.

Пример 5.10. Вычислить функцию $e^{\mathbf{A}t}$ с помощью теоремы Сильвестра для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.9

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2 .$$

В соответствии с выражением (5.6.24) запишем

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_1)=\mathbf{Z}_0(-1)=\frac{\mathbf{A}-(-2)\mathbf{E}}{-1-(-2)}=\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}{1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_2)=\mathbf{Z}_0(-2)=\frac{\mathbf{A}-(-1)\mathbf{E}}{-2-(-1)}=\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные матрицы в формулу (5.6.24), получаем

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{-t}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}+e^{-2t}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix},$$

что совпадает с примером 5.9.

Следует заметить, что $\mathbf{Z}_0(\lambda_k)$ в формуле (5.6.24) не зависят от вида полинома $N(\mathbf{A})$. Можно показать, что

$$\mathbf{Z}_0\left(\lambda_k\right)=\left.\frac{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k}, \qquad (5.6.25)$$

где $D(\lambda)$ – характеристический полином $\mathbf{A}$.

С учетом соотношения (5.6.25) формула (5.6.24) примет вид

$$N(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}N\left(\lambda_k\right)\left.\frac{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k}. \qquad (5.6.26)$$

При наличии у $\mathbf{A}$ кратных собственных значений формула (5.6.26) нуждается в модификации. Можно показать, что составляющая $N(\mathbf{A})$, обусловленная собственным числом λ_i кратности r, равна

$$\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}}\left.\left[\frac{N(\lambda)\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\lambda-\lambda_j\right)^r}\right]\right|_{\lambda=\lambda_i}. \qquad (5.6.27)$$

Очевидно, что формула (5.6.27) годится и для простых корней $(r=1)$, поэтому окончательно

$$N(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}}\left[\frac{N(\lambda)\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda}\right], \qquad (5.6.28)$$

где суммирование производится по всем различным корням, причем кратные корни входят в сумму (5.6.28) только один раз.

Уравнение (5.6.28) носит название *вырожденной формы* теоремы Сильвестра.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.
2. Перечислите операции над матрицами.

3. Что такое определитель матрицы?
4. Чем отличается минор от алгебраического дополнения?
5. Назовите виды матриц.
6. Что такое дефект матрицы и как он связан с рангом?
7. Для каких матриц не существует обратных?
8. Что такое след матрицы?
9. Что такое ортогональные векторы?
10. Дайте определение базиса.
11. Что такое сопряженный базис?
12. В чем заключается процедура ортогонализации Грама – Шмидта?
13. Что такое собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы **A**?
14. Как строится модальная матрица, соответствующая матрице **A**?
15. Что такое эквивалентные матрицы?
16. Как выглядит преобразование подобия?
17. Любую ли матрицу можно привести к диагональному виду?
18. В чем заключается необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичных форм?
19. Существуют ли дробные степени от матриц?
20. Сформулируйте теорему Кэли – Гамильтона.
21. Для чего можно использовать теорему Кэли – Гамильтона?
22. Какие методы используют для вычисления матричных функций?

6. ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1 Уравнения состояния

Альтернативной дифференциальному уравнению n-го порядка формой описания динамических систем является векторно-матричная форма. Векторно-матричная форма по сути является записью дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме Коши с привлечением дополнительных переменных, называемых *переменными состояния.*

Определение переменных состояния уже давалось в подразделе 1.3.5, но нелишне вспомнить его ещё раз. Переменные состояния системы – это такие переменные, знание значений которых в некоторый начальный момент времени t_0 позволяет определить поведение системы в текущий момент времени $t > t_0$ (естественно, если известны входные воздействия системы на интервале (t_0, t)). Если ввести обозначения $\mathbf{r}(t)$ – входные переменные, $\mathbf{y}(t)$ – выходные переменные, $\mathbf{x}(t)$ – переменные состояния, то общее математическое описание динамической системы задается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \delta\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)\big), \\ \mathbf{y}(t) &= \lambda\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)\big), \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ являются однозначными функциями, а τ – отрезок оси времени от t_0 до t.

Уравнения (6.1.1) называются *уравнениями состояния*. Часто уравнением состояния называется первое из уравнений (6.1.1), а второе носит название уравнения выхода.

6.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Если динамическая система описывается или может быть описана обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка, то переход к нормальной форме Коши дает уравнения состояния такой системы. Переход от дифференциального уравнения к уравнениям состояния может быть произведен различными способами в соответствии с различным определением переменных состояния, важно только, чтобы переменные состояния системы подлежали измерению (контролю).

Например, перейти от дифференциального уравнения к уравнениям состояния можно следующим образом. Пусть (для простоты) в дифференциальном уравнении отсутствуют производные входного воздействия. Так же, не снижая общности можно положить коэффициент при старшей производной единице. Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = r \,. \tag{6.2.1}$$

Переменные состояния введем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{y}, \\ &\ldots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставив значения y и его производных в уравнение (6.2.1), найдем

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + r \,.$$

Полученные уравнения запишем в нормальной форме Коши, то есть первые производные перенесем в левую часть, а все остальное – в правую. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\ldots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_1 x_n + r, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Уравнения состояния (6.2.2) удобнее записать в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

где матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.2.4}$$

Уравнения состояния (6.2.3) с матрицами вида (6.2.4) носят название *стандартной формы* (у некоторых авторов можно встретить название *каноническая форма фазовой переменной*). Матрица **A** вида (6.2.4) называется *матрицей Фробениуса.*

Уравнения (6.2.3) естественным образом обобщаются на случай многомерной системы, имеющей *m* входов и *p* выходов. Тогда в общем виде **r** и **y** являются векторами и, кроме того, выход может напрямую зависеть от входа. С учетом этого общий вид уравнений состояния будет такой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)r, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

где $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ – матрицы соответствующих размерностей с изменяющимися в общем случае во времени элементами.

Блок-схема системы, соответствующая уравнениям (6.2.5), приведена на рис. 6.1.

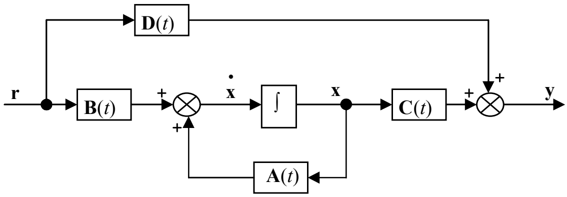


Рис. 6.1. Блок-схема уравнений состояния.

Для системы с постоянными параметрами матрицы $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ от времени не зависят и могут записываться просто как $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. В случае стационарных систем уравнения состояния записываются, таким образом, как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}. \end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

6.3 Каноническая форма

При исследовании систем, описываемых уравнениями состояния, часто является удобным такой выбор переменных состояния, чтобы разноименные компоненты вектора состояния не зависели друг от друга.

Возьмем уравнения состояния (6.2.6), где, в общем случае, матрица $\mathbf{A}$ – произвольная квадратная матрица с различными собственными значениями. Произведем линейное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$, где $\mathbf{M}$ – модальная матрица. Тогда уравнения (6.2.6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{B}r, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{r}. \end{aligned} \qquad (6.3.1)$$

Умножив первое из уравнений (6.3.1) на $\mathbf{M}^{-1}$, получим

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}r.$$

Так как матрица $\mathbf{M}$ является модальной матрицей, преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ дает диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ по диагонали. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{B}_n r, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_n\mathbf{q} + \mathbf{D}_n\mathbf{r}, \end{aligned} \qquad (6.3.2)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M}, \mathbf{D}_n = \mathbf{D}$.

Уравнения (6.3.2) носят название *нормальной* или *канонической* формы уравнений состояния. При этом дифференциальные уравнения развязаны относительно переменных состояния $q_1, q_2, ..., q_n$ и имеют вид $\dot{q}_i = \lambda_i q_i + f_i$, где f_i – вынуждающая функция, воздействующая на i-ю переменную состояния.

Можно показать, что, если уравнения (6.2.6) представлены в стандартной форме (т.е. матрица $\mathbf{A}$ является матрицей Фробениуса), то модальная матрица $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (6.3.3)$$

Матрица вида (6.3.3) называется *матрицей Вандермонда*.

При наличии у $\mathbf{A}$ кратных собственных значений и в случае, когда дефект характеристической матрицы $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ меньше кратности корня λ_i, диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ в уравнении (6.3.2) заменяется недиагональной матрицей Жордана.

6.4 Обыкновенные уравнения стационарных систем

6.4.1. Переходная матрица и методы ее вычисления

Однородное уравнение для линейной стационарной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad (6.4.1)$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная размерностью n матрица с постоянными коэффициентами, $\mathbf{x}$ – вектор-столбец переменных состояния. Аналогично скалярному случаю, общее решение уравнения (6.4.1) ищется в виде

$$\mathbf{x}_о(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0), \qquad (6.4.2)$$

где матрица $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ определяется уравнением (5.6.6), а вектор $\mathbf{x}(t_0)$ задает начальные условия.

Подставив выражение (6.4.2) в уравнение (6.4.1) и выполнив дифференцирование по всем правилам, удостоверимся, что оно (выражение (6.4.2)) действительно является решением однородного дифференциального уравнения. Подставив в формулу (6.4.2) $t = t_0$, можно убедиться, что начальные условия удовлетворяются, поскольку $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = \mathbf{E}$.

Матрица $\mathbf{\Phi}(t-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, удовлетворяющая однородному дифференциальному векторно-матричному уравнению (6.4.1), называется *переходной матрицей* или *фундаментальной матрицей.* Термином «фундаментальная матрица» чаще пользуются математики, связанные с матричными дифференциальными уравнениями, а словосочетание «переходная матрица состояния» встречается в теории управления и теории систем. Прилагательное «переходная» обусловлено тем, что с помощью матрицы $\mathbf{\Phi}(t-t_0)$ осуществляется «переход» системы от некоторого начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ к текущему состоянию $\mathbf{x}(t)$. Часто для простоты начальный отсчет времени полагают равным нулю $t_0 = 0$.

Для вычисления переходной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ могут применяться несколько методов. Из уже рассмотренных методов сюда относятся методы, основанные на *теореме Кэли – Гамильтона* и *теореме разложения Сильвестра* (см. примеры 5.9 и 5.10).

К другим методам относятся метод разложения в степенной ряд и метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Метод разложения в степенной ряд. Согласно уравнению (5.6.6) переходную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$ можно представить бесконечным рядом

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots . \qquad (6.4.3)$$

Вычисление ряда (6.4.3) – задача трудоемкая, особенно если ряд сходится медленно, а порядок матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ недостаточно низкий. Степени матрицы $\mathbf{A}^k$ могут быть найдены с использованием теоремы Кэли – Гамильтона. После выполнения суммирования необходимо найти в замкнутом виде все элементы матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$. Количество членов при вычислении ряда (6.4.3) определяется скоростью сходимости: ограничиваются числом N членов ряда, если относительный вклад (N+1)-го слагаемого в уже вычисленную сумму для каждого элемента матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ становится меньше наперед заданного числа.

Метод преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа к уравнению (6.4.1), полагая $t_0 = 0$:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s).$$

Полученное уравнение разрешим относительно $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{x}(0). \qquad (6.4.4)$$

Применяя к обеим частям уравнения (6.4.4) обратное преобразование Лапласа, получим

$$x(t) = L^{-1}\left\{[s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}\mathbf{x}(0). \qquad (6.4.5)$$

Из уравнений (6.4.5) и (6.4.2) делаем вывод, что переходная матрица может быть представлена формулой

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left\{[s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}. \qquad (6.4.6)$$

Таким образом, в этом методе для вычисления переходной матрицы необходимо найти обратную матрицу $[s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1}$ и применить к ней обратное преобразование Лапласа.

Пример 6.1. Найти переходную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.9

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2.$$

Матрица, обратная к

$$[s\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix},$$

имеет вид

$$[s\mathbf{E}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование от каждого элемента матрицы найдем по теореме разложения

$$\phi_{11}=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=2e^{-t}-e^{-2t},$$

$$\phi_{12}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-t}-e^{-2t},$$

$$\phi_{21}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2+3s+2}\right\}=-2e^{-t}+2e^{-2t},$$

$$\phi_{22}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\right\}=-e^{-t}+2e^{-2t}.$$

Полученная переходная матрица

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

совпадает с найденной в примерах 5.9 и 5.10.

Очень просто находить переходную матрицу для уравнений состояния, представленных в канонической форме (6.3.2). В этом случае переходная матрица равна

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{\Lambda}t}=\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{6.4.7}$$

Для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ на основании преобразования подобия $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ можно записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}. \tag{6.4.8}$$

Переходную матрицу на основе (6.4.8) можно представить, воспользовавшись формулой (5.6.16):

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\ \mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]\mathbf{M}^{-1}. \tag{6.4.9}$$

Выражение (6.4.9) представляет собой еще один метод вычисления переходной матрицы (с использованием модальной матрицы).

Пример 6.2. Найти переходную матрицу с помощью модальной матрицы для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 6.1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2\ .$$

Присоединенная матрица $\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равна

$$\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Подставив в неё последовательно $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$, получим две матрицы, каждая из которых даст свой собственный вектор как ненулевой столбец. Составим из этих векторов модальную матрицу $\mathbf{M}$ и найдем обратную к ней $\mathbf{M}^{-1}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основе (6.4.9) получаем

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

6.4.2. Общее решение неоднородных уравнений

Уравнения состояния линейной стационарной системы задаются согласно (6.2.6) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r,$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ в этих уравнениях – основная матрица системы, так как ее структура определяет переходную матрицу состояния. От этой матрицы зависит как вынужденная (установившаяся), так и переходная составляющие решения. Матрица $\mathbf{B}$ – матрица связи: структура этой матрицы определяет характер связи входных воздействий с переменными состояния. Матрица $\mathbf{C}$ – также матрица связи, а именно, связи переменных состояния с выходными переменными системы. Наконец, матрица $\mathbf{D}$ – опять матрица связи; на этот раз связи входных переменных непосредственно с выходными переменными. Часто для реальных систем $\mathbf{D}$ является нулевой матрицей, так что связь входа непосредственно с выходом отсутствует.

Как и в скалярном случае, общее решение уравнений (6.2.6) для $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ можно получить разными методами. Например, как это сделать с помощью метода вариации параметров, рассмотрено ниже.

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение (6.4.1) имеет решение $\mathbf{x}_о(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0)$ при $t \geq t_0$. Частное решение ищем в виде $\mathbf{x}_н(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(t_0)$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (6.2.6) равно

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_о(t) + \mathbf{x}_н(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(t_0).$$

Удобнее это уравнение записать в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\left(\mathbf{E} + \mathbf{U}(t)\right)\mathbf{x}(t_0)\mathbf{z}(t), \tag{6.4.10}$$

где подлежит определению неизвестный вектор $\mathbf{z}(t) = \left(\mathbf{E} + \mathbf{U}(t)\right)\mathbf{x}(t_0)$.

Подставляя выражение (6.4.10) в уравнение (6.2.6), получим

$$\left[\dot{\mathbf{\Phi}}(t - t_0) - \mathbf{A\Phi}(t - t_0)\right]\mathbf{z}(t) + \mathbf{\Phi}(t - t_0)\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Br}(t).$$

Так как переходная матрица удовлетворяет однородному уравнению (6.4.1), первое слагаемое в последнем выражении равно нулю и получаем

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t - t_0)\mathbf{Br}(t). \tag{6.4.11}$$

Интегрируя уравнение (6.4.11) в пределах от t_0 до t, имеем

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(t - t_0)\mathbf{Br}(t)dt. \tag{6.4.12}$$

Учитывая, что $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$, из уравнений (6.4.10) и (6.4.12) находим $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)x(t_0) + \mathbf{\Phi}(t - t_0)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau - t_0)\mathbf{Br}(\tau)d\tau.$$

Поскольку

$$\mathbf{\Phi}(t - t_0) \cdot \mathbf{\Phi}^{\mathbf{-1}}(\tau - t_0) = e^{\mathbf{A}(t - t_0)} \cdot e^{-\mathbf{A}(\tau - t_0)} = e^{\mathbf{A}(t - \tau)} = \mathbf{\Phi}(t - \tau),$$

окончательно получаем

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathbf{Br}(\tau)d\tau. \tag{6.4.13}$$

Решение для $\mathbf{y}(t)$ следует из подстановки уравнения (6.4.13) в уравнение выхода (6.2.6)

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{Br}(\tau)d\tau+\mathbf{Dr}(t). \qquad (6.4.14)$$

Выражения (6.4.13) и (6.4.14) являются решениями уравнений состояния (6.2.6). Первое слагаемое в уравнении (6.4.14) представляет собой переходную составляющую решения, обусловленную начальными условиями, тогда как второе слагаемое (по сути, это интеграл свертки) является вынужденной составляющей, зависящей от входного воздействия.

6.5 Обыкновенные уравнения нестационарных систем

6.5.1. Переходная нестационарная матрица

Если параметры системы изменяются во времени, то элементы матрицы $\mathbf{A}$ не являются постоянными, а являются функциями времени. В этом случае однородное векторно-матричное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \qquad (6.5.1)$$

При решении этого уравнения естественно обратиться к скалярной аналогии, то есть к скалярному уравнению

$$\dot{x}(t)=a(t)\cdot x(t). \qquad (6.5.2)$$

Решение уравнения (6.5.2) равно

$$x(t)=\left(\exp\left\{\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right\}\right)x(t_0), \qquad (6.5.3)$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени.

По аналогии с формулой (6.5.3) решение матричного уравнения (6.5.1) предполагается в виде

$$\mathbf{x}(t)=\left[\exp\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(t)\,dt\right]\cdot\mathbf{x}(t_0). \tag{6.5.4}$$

Но при подстановке выражения (6.5.4) в уравнение (6.5.1) видно, что формула (6.5.4) действительно представляет собой решение в том и только в том случае, если

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{I}(t)}=\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\cdot e^{\mathbf{I}(t)}, \tag{6.5.5}$$

где $\mathbf{I}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(t)\,dt.$

К сожалению, условие (6.5.5) выполняется не всегда; более того, оно чаще не выполняется, чем выполняется. В двух частных, но тривиальных случаях уравнение (6.5.5) выполняется всегда, а именно, когда матрица $\mathbf{A}$ – постоянная или когда $\mathbf{A}$ – диагональная матрица. Решение для первого случая уже разбиралось, а во втором случае уравнения состояния оказываются не связанными друг с другом, так что для каждого x_i годится решение (6.5.3).

Можно показать, что условие (6.5.5) трансформируется в условие коммутативности для матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2)=\mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1)\ \text{для всех } t_1 \text{ и } t_2. \tag{6.5.6}$$

Таким образом, если выполняется условие (6.5.6), то выражение (6.5.4) является решением уравнения (6.5.1) и переходная матрица состояния (зависящая уже от двух аргументов t и t_0) равна

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\exp\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(t)\,dt. \tag{6.5.7}$$

Если условие коммутативности (6.5.6) не выполняется, переходная матрица уже не может выражаться уравнением (6.5.7). Тогда решение уравнения (6.5.1) можно получить методом, известным как *метод интегрирования Пеано – Бэкера.* Этот метод заключается в следующем.

При заданных начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)$ проинтегрируем уравнение (6.5.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)\,d\tau. \tag{6.5.8}$$

Это уравнение можно встретить под названием *векторного интегрального уравнения Вольтерра.* Решается это уравнение путем последовательных подстановок правой части уравнения (6.5.8) в подынтегральное выражение вместо $\mathbf{x}(t)$. Например, первая итерация даст

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\left[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x}(\lambda)\,d\lambda\right]d\tau. \tag{6.5.9}$$

Упростить запись подобных выражений можно введением оператора интегрирования $Q(...) = \int_{t_0}^{t}(...)\,d\tau$. Тогда уравнение (6.5.8) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{Ax}),$$

а уравнение (6.5.9) приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{A})\mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{Ax})). \tag{6.5.10}$$

Продолжая процедуру, описываемую уравнением (6.5.10), получим $\mathbf{x}(t)$ в виде *ряда Неймана*

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{E} + Q(\mathbf{A}) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A})) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}))) + ...\right]\mathbf{x}(t_0). \tag{6.5.11}$$

Первое слагаемое в скобках – это единичная матрица. Второе слагаемое равно интегралу от $\mathbf{A}(t)$ в пределах от t_0 до t. Третье слагаемое получается умножением $Q(\mathbf{A})$ на $\mathbf{A}$ слева и последующим интегрированием произведения в пределах от t_0 до t и т.д. Если элементы матрицы $\mathbf{A}$ ограничены на отрезке интегрирования, то бесконечный ряд сходится равномерно и абсолютно к некоторой квадратной матрице $G(\mathbf{A})$, называемой *матрицантом*:

$$G(\mathbf{A}) = \mathbf{E} + Q(\mathbf{A}) + Q\big(\mathbf{A}Q(\mathbf{A})\big) + Q\Big(\mathbf{A}Q\big(\mathbf{A}Q(\mathbf{A})\big)\Big) + \ldots . \qquad (6.5.12)$$

Основное свойство матрицанта заключается в том, что

$$\frac{d}{dt}G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}G(\mathbf{A}). \qquad (6.5.13)$$

Это свойство нетрудно доказать, если взять производную по t от обеих частей выражения (6.5.12).

Выражение (6.5.11) совместно со свойством (6.5.13) дают основание утверждать, что $G(\mathbf{A})$ представляет собой искомую переходную матрицу состояния нестационарной системы:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = G(\mathbf{A}). \qquad (6.5.14)$$

Понятно, что при постоянной матрице $\mathbf{A}$ из выражения (6.5.12) следует, что

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t - t_0) = \mathbf{E} + (t - t_0)\mathbf{A} + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots = e^{\mathbf{A}(t - t_0)}.$$

Недостаток этого метода очевиден: при медленной сходимости ряда (6.5.12) процесс вычисления достаточно трудоемок.

Во многих случаях переходная матрица легко получается при надлежащем выборе переменных состояния. Может оказаться полезным определить, существуют ли такие переменные состояния, чтобы было правомерным применение соотношения (6.5.7).

Сведем воедино свойства переходных матриц, часть из которых уже отмечалась.

Свойство 1:

$$\mathbf{\Phi}(t,t)=\mathbf{E}. \tag{6.5.15}$$

Это свойство следует из определения переходной матрицы.

Свойство 2:

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_3)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_3). \tag{6.5.16}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\mathbf{x}(t_2)=\mathbf{\Phi}(t_2,t_3)\mathbf{x}(t_3),$$
$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{x}(t_2)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_3)\mathbf{x}(t_3).$$

Подставив первое из них во второе, получим

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_3)\mathbf{x}(t_3)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_3)\mathbf{x}(t_3),$$

откуда с неизбежностью следует соотношение (6.5.16).

Свойство 3:

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t_2,t_1). \tag{6.5.17}$$

Это свойство вытекает из свойства 2, если вместо t_3 в формулу (6.5.16) подставить t_1. Получим

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_1)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_1)=\mathbf{E}.$$

Умножая последнее соотношение справа на $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_2,t_1)$, получаем формулу (6.5.17).

Свойство 4 (для стационарных систем):

$$\mathbf{\Phi}(t+\tau)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(\tau). \tag{6.5.18}$$

Это свойство следует непосредственно из свойств матричной экспоненты, поскольку $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Свойство 5 (для стационарных систем):

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t). \tag{6.5.19}$$

Это свойство является непосредственным следствием свойства 3 в применении к стационарным системам или вытекает из формулы (6.5.18), если в последнюю подставить $\tau = -t$.

6.5.2. Сопряженная система

Важную роль при решении нестационарных уравнений, а также в задачах оптимального управления играет обратная переходная матрица $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)$. Ее значимость связана с соотношением (6.5.17) , из которого следует

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau) = \mathbf{\Phi}(\tau,t).$$

Поведение системы относительно переменной *t* определяется динамическими свойствами исходной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. Поведение системы относительно переменной τ зависит от динамических свойств такой системы, для которой $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)$ является переходной матрицей. Такая система называется *сопряженной системой.* Если исходная система задана уравнением $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, то *сопряженная* система определяется как

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}(t), \tag{6.5.20}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор-строка.

В привычной записи это же уравнение выглядит так

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{A}^{T}(t)\boldsymbol{\alpha}, \tag{6.5.21}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор-столбец.

Легко показать, что $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)$ действительно является переходной матрицей для уравнения (6.5.20). Для этого вспомним уравнение (5.1.11), согласно которому

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)}{dt} = -\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\tau)\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau).$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\tau) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)$, из последнего выражения получим

$$\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)}{dt} = -\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\mathbf{A}(t), \tag{6.5.22}$$

т.е. $\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)$ удовлетворяет однородному уравнению (6.5.20) и, следовательно, является переходной матрицей состояния для системы (6.5.20). Транспонирование уравнения (6.5.22) дает

$$\left[\frac{d\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)}{dt}\right]^T = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}^T(t,\tau)\right]^{-1} = -\mathbf{A}^T(t)\cdot\left[\mathbf{\Phi}^T(t,\tau)\right]^{-1}.$$

Таким образом, $\left[\mathbf{\Phi}^T(t,\tau)\right]^{-1}$ является переходной матрицей для системы, описываемой уравнением (6.5.21).

Уравнение сопряженной системы можно получить и воспользовавшись дифференциальным уравнением n-го порядка. Однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t)y = 0 \tag{6.5.23}$$

можно записать как $D_n(p)y = 0$, где $D_n(p)$ – линейный оператор, определяемый формулой

$$D_n(p) = p^n + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)p^{(n-k)}, \quad p^k = \frac{d^k}{dt^k},$$

а $a_k(t)$ – действительные функции.

Тогда сопряженный линейный оператор определяется как

$$D_n^*(p) = (-1)^n p^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} p^{n-k} a_k(t), \tag{6.5.24}$$

где запись $p^{n-k} a_k(t)$ говорит о том, что p^{n-k} действует на произведение $a_k(t)$ и зависимой переменной.

Сопряженное линейное дифференциальное уравнение $D_n^*(p)\alpha = 0$ будет записываться в виде

$$(-1)^n p^n \alpha + (-1)^{n-1} p^{n-1} \left(a_1(t)\alpha\right) + ... + a_n(t)\alpha = 0 .$$

Если дифференциальное уравнение (6.5.23) представить в стандартной матричной форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, то матрица $\mathbf{A}(t)$ является матрицей Фробениуса

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & ... & ... & -a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Для сопряженной системы матричное уравнение согласно (6.5.21) равно $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\alpha}$ и матрица $-\mathbf{A}^T(t)$ имеет вид

$$-\mathbf{A}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & a_n(t) \\ -1 & 0 & ... & 0 & a_{n-1}(t) \\ 0 & -1 & ... & 0 & a_{n-2}(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Выполняя последовательное дифференцирование компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$, можно показать, что операторная и матричная формы уравнений сопряженной системы эквивалентны.

Можно найти сопряженный оператор и на основе его определения

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, D(p)\mathbf{x} \rangle = \langle \left[D^*(p) \right]^T \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle .$$

Это определение часто используется при формулировке критериев существования и единственности решения дифференциальных уравнений.

6.5.3. Общее решение нестационарных уравнений

Используя понятие сопряженной системы, можно получить общее решение уравнений состояния нестационарных систем. В общем виде уравнения состояния линейной системы задаются в виде (6.2.5)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)r, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}, \end{aligned}$$

Уравнение для переходной матрицы сопряженной системы имеет вид (6.5.22)

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)}{dt} = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\mathbf{A}(t),$$

Умножим первое из уравнений (6.2.5) на $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)$ слева, а уравнение (6.5.22) – на $\mathbf{x}$ справа:

$$\dot{\Phi}(t,\tau)\dot{\mathbf{x}} = \dot{\Phi}(t,\tau)\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \dot{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(t)r ,$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)}{dt}\mathbf{x} = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\mathbf{A}(t)\mathbf{x},\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(t,\tau)\mathbf{x} = -\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Сложение последних двух выражений приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\mathbf{x}\right]=\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\cdot\mathbf{B}(t)\mathbf{r}. \qquad (6.5.25)$$

Проинтегрируем уравнение (6.5.25) в пределах от τ до *t*. В результате получим

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\mathbf{x}(t)-\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau,\tau)\mathbf{x}(\tau)=\int_{\tau}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(\lambda,\tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda .$$

Из последнего выражения найдем $\mathbf{x}(t)$, учитывая, что $\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau,\tau)=\mathbf{E}$,

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}(\tau)+\mathbf{\Phi}(t,\tau)\int_{\tau}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(\lambda,\tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda .$$

Воспользовавшись тем, что

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\lambda,\tau)=\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,\lambda)=\mathbf{\Phi}(t,\lambda),$$

окончательно получим

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,\tau)\cdot\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\lambda)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda . \qquad (6.5.26)$$

Решение для $\mathbf{y}(t)$ получается подстановкой уравнения (6.5.26) во второе из уравнений (6.2.5)

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\lambda)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda+\mathbf{D}(t)\mathbf{r}(t). \qquad (6.5.27)$$

Выражения (6.5.26) и (6.5.27) являются общим решением неоднородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений (6.2.5). По своему виду и структуре они подобны соответственно решениям (6.4.13) и (6.4.14).

6.6 Уравнения в частных производных

6.6.1. Уравнения Лагранжа

Проще всего подойти к уравнению Лагранжа, рассматривая пример механической системы [14] (рис. 6.2).

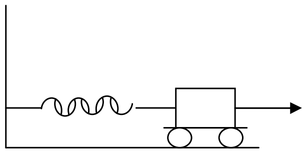


Рис. 6.2. К выводу уравнения Лагранжа

Кинетическая энергия движущегося тела с массой *M* равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \tag{6.6.1}$$

Потенциальная энергия пружины

$$V = \int_{x_0}^{x} Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2. \tag{6.6.2}$$

По второму закону Ньютона уравнение движения тела будет (силой трения пренебрегаем):

$$M \ddot{x} + Kx = 0. \tag{6.6.3}$$

Дифференцируя соотношение (6.6.1) сначала по $\dot{x}$, а затем по t, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right] = M \ddot{x}. \tag{6.6.4}$$

Дифференцируя соотношение (6.6.2) по x, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx. \tag{6.6.5}$$

Складывая соотношения (6.6.4) и (6.6.5) и учитывая уравнение (6.6.3), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,, \tag{6.6.6}$$

являющееся частным случаем *уравнения движения Лагранжа* для системы без потерь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0\,. \tag{6.6.7}$$

В уравнении (6.6.7) переменные $x_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ называются *обобщенными координатами.* Термин «обобщенные координаты» пришел из классической механики, хотя по сути это те же переменные состояния системы.

Введем обозначение

$$L\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\right) = T\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\right) - V\left(\mathbf{x}\right), \tag{6.6.8}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор переменных состояния системы.

Функция (6.6.8) называется *лагранжианом* системы. С учетом обозначения(6.6.8) уравнение (6.6.7) для консервативной (без потерь энергии) системы в случае отсутствия внешних воздействий можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L \tag{6.6.9}$$

Уравнение (6.6.9) известно как *уравнение Эйлера – Лагранжа*.

Уравнение движения (6.6.9) может быть выведено из вариационного принципа Даламбера. Этот принцип состоит в том, что любая динамическая система под действием консервативных сил движется с минимумом средней по времени разности между кинетической и потенциальной энергиями. Это означает, что

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\,dt=0 \qquad \text{или} \qquad \int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=0, \tag{6.6.10}$$

где δ означает соответствующую вариацию.

Найдем вариацию лагранжиана δL:

$$\delta L=\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)\delta\dot{\mathbf{x}}+\left(\mathrm{grad}_{\mathbf{x}} L\right)\delta\mathbf{x} \tag{6.6.11}$$

с нулевыми граничными условиями на концах интервала (t_1,t_2), т.е. $\delta\mathbf{x}(t_1)=\delta\mathbf{x}(t_2)=0$.

Подставляя выражение (6.6.11) в формулу (6.6.10), получим

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)\delta\dot{\mathbf{x}}\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathrm{grad}_{\mathbf{x}} L\right)\delta\mathbf{x}dt=\\ =\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)\delta\mathbf{x}\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)\delta\mathbf{x}dt+\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathrm{grad}_{\mathbf{x}} L\right)\delta\mathbf{x}dt=\\ =\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathrm{grad}_{\mathbf{x}} L-\frac{d}{dt}\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)\right]\delta\mathbf{x}dt=0.\end{gathered} \tag{6.6.12}$$

Уравнение (6.6.12) может быть удовлетворено только тогда, когда равно нулю выражение в квадратных скобках. Это условие приводит к уравнению Эйлера – Лагранжа (6.6.9).

Можно показать [14], что для систем с потерями (при отсутствии внешних воздействий) уравнение Эйлера – Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)-\mathrm{grad}_{\mathbf{x}} L+\mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} F=0, \tag{6.6.13}$$

где F называется диссипативной (рассеивающей) функцией Релея, представляющей по своему физическому смыслу мощность, теряемую (рассеиваемую) системой.

При воздействии на систему внешних сил уравнение движения Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} T\right) - \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} T = \mathbf{r}, \tag{6.6.14}$$

где $\mathbf{r}$ – обобщенные силы.

Если потери отсутствуют, то $\mathbf{r} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V$. При записи уравнения (6.6.14) учтено, что потенциальная энергия $V(\mathbf{x})$ не зависит от $\dot{\mathbf{x}}$.

К уравнению Эйлера – Лагранжа

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} F - \frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} F\right) = 0 \tag{6.6.15}$$

приходят при синтезе оптимальных по заданному критерию систем вариационным методом. Интегрирование уравнения (6.6.15) возможно лишь в некоторых частных случаях:

функция F не зависит от $\dot{\mathbf{x}}$, т.е. $F = F(\mathbf{x}, t)$;

функция F зависит только от $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$, т.е. $F = F\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right)$;

функция F не зависит от $\mathbf{x}$, т.е. $F = F\left(\dot{\mathbf{x}}\right)$ или $F = F\left(\dot{\mathbf{x}}, t\right)$;

функция F линейна относительно $\dot{\mathbf{x}}$.

В остальных случаях приходится довольствоваться численными методами.

Следует заметить, что уравнения Эйлера – Лагранжа по своему виду не зависят от выбора системы координат в пространстве состояния.

6.6.2. Уравнения Гамильтона

Обозначим через p_i компоненту обобщенного момента системы, соответствующую координате x_i. Тогда

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (6.6.16)$$

Кинетическую энергию системы можно представить как функцию обобщенных скоростей и координат

$$T = T\left(\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n, x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

или

$$T_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}}\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\right). \qquad (6.6.17)$$

Функция (6.6.17) называется *функцией Лагранжа* для кинетической энергии.

С другой стороны кинетическую энергию можно представить как функцию обобщенного момента и координат

$$T_{\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{p}, \mathbf{x}\right) = T_{\mathbf{p}}\left(p_1, p_2, ..., p_n, x_1, x_2, ..., x_n\right). \qquad (6.6.18)$$

Эта функция называется *функцией Гамильтона* для кинетической энергии.

Конечно, эти две функции, представленные формулами (6.6.17) и (6.6.18) равны:

$$T_{\mathbf{p}} = T_{\dot{\mathbf{x}}} \qquad (6.6.19)$$

Дифференцируя выражение (6.6.19) по x_i, получим

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_2} \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \qquad (6.6.20)$$

С учетом равенства (6.6.16), уравнение (6.6.20) можно записать:

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i} + \ldots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \qquad (6.6.21)$$

По теореме Эйлера [4] имеем

$$2T_{\dot{\mathbf{x}}} = \dot{x}_1 \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_2} + \ldots + \dot{x}_n \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_n},$$

что, учитывая соотношение (6.6.16), сведется к уравнению

$$2T_{\dot{\mathbf{x}}} = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 + \ldots + p_n \dot{x}_n = 2T_{\mathbf{p}}. \qquad (6.6.22)$$

Дифференцируя последнее выражение по x_i, имеем

$$2\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + \ldots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \qquad (6.6.23)$$

Вычитая выражение (6.6.21) из выражения (6.6.23), получим

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = -\frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i}. \qquad (6.6.24)$$

Теперь продифференцируем выражение (6.6.19) по p_i:

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_2} \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i},$$

или, с учетом соотношения (6.6.16),

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \ldots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i}. \qquad (6.6.25)$$

Возьмем частную производную по p_i от выражения (6.6.22):

$$2\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \ldots + \dot{x}_i + \ldots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i}. \qquad (6.6.26)$$

Вычитая выражение (6.6.25) из равенства (6.6.26), получим

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = \dot{x}_i\,. \qquad (6.6.27)$$

Используя формулы (6.6.27) и (6.6.16), уравнение Лагранжа (6.6.14) приведем к виду

$$\dot{p}_i + \frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = r_i. \qquad (6.6.28)$$

Две системы уравнений (6.6.27) и (6.6.28)) называются *уравнениями Гамильтона* (для кинетической энергии).

В случае консервативной системы входное воздействие определяется выражением

$$r_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad (6.6.29)$$

где $V = V(\mathbf{x})$ – потенциальная энергия, не зависящая от $\dot{\mathbf{x}}$.

Так как лагранжиан определяется формулой (6.6.8)

$$L\left(\dot{x}_i, x_i\right) = T_{\dot{x}}\left(\dot{x}_i, x_i\right) - V\left(x_i\right),$$

то его частные производные равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_i} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

С учетом этого, уравнение Эйлера – Лагранжа (6.6.9) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_i}\right)=\frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial x_i}-\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} T_{\dot{\mathbf{x}}}\right)=\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} T_{\dot{\mathbf{x}}}-\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V. \tag{6.6.30}$$

Функция, выражающая полную энергию системы через координаты **x** и импульсы **p**, называют *функцией Гамильтона H*. То есть

$$H=T_{\mathbf{p}}+V=H(\mathbf{p},\mathbf{x}). \tag{6.6.31}$$

Дифференцируя выражение (2.6.31), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}=\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{6.6.32}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial p_i}. \tag{6.6.33}$$

Подставляя равенства (6.6.29), (6.6.32) и (6.6.33) в уравнения (6.6.28) и (6.6.27), окончательно имеем

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{6.6.34}$$

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{6.6.35}$$

Две системы уравнений (6.6.34) и (6.6.35) носят название *канонических уравнений Гамильтона.*

Поскольку при движении консервативной системы ее полная энергия остается неизменной, H – функция Гамильтона не зависит от времени и $\frac{dH}{dt} = 0$. Это действительно так, поскольку

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right),$$

а выражение в скобках, согласно уравнениям (6.6.34) и (6.6.35), равно нулю, если H явно не зависит от времени.

6.6.3. Уравнение Гамильтона – Якоби

Во многих случаях решения уравнений (6.6.34), (6.6.35) найти не удается. Один из путей решения этих уравнений состоит в переходе от координат $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ к другой системе координат $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, относительно которых преобразованные уравнения имеют более простой вид. Такие преобразования, результатом которых являются новые уравнения все в той же канонической форме, называются *каноническими преобразованиями*. Отсюда, если

$$p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{и} \quad x_i = x_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{6.6.36}$$

есть канонические преобразования, то уравнения движения в новой системе координат $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ будут иметь все тот же канонический вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i}, \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i}, \end{aligned} \tag{6.6.37}$$

где $\bar{H}$ – гамильтониан, выраженный в новой системе $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Смысл преобразований (6.6.36) и перехода к каноническим уравнениям Гамильтона (6.6.37) состоит в том, чтобы гамильтониан $\bar{H}$ являлся бы только функцией переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и не зависел бы от $\boldsymbol{\beta}$. Такую цель позволяет достичь преобразование

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \tag{6.6.38}$$

где функция $S(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})$ называется *производящей функцией.*

Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} = 0, \tag{6.6.39}$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} = const. \tag{6.6.40}$$

Из первой системы уравнений (6.6.39) вытекает, что все α_i – константы. Вторая система уравнений (6.6.40) следует из того факта, что $\bar{H}$ зависит только от α_i, а все α_i – константы. Системы уравнений (6.6.39) и (6.6.40) много проще, чем уравнения (6.6.34) и (6.6.35). Дело за малым: нужно определить производящую функцию $S(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению в частных производных

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_i\right) = \bar{H}(\alpha_i). \tag{6.6.41}$$

Чтобы немного упростить уравнение (6.6.41), проведем следующие рассуждения.

Так как $\beta_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$, то

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i}. \tag{6.6.42}$$

Найдем производную по *t* от уравнения (6.6.41), предполагается пока, что $\bar{H}$ зависит также и от β_i

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} \cdot \frac{d\beta_i}{dt}.$$

Используя равенства (6.6.37) и (6.6.42), из последнего уравнения имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}-\frac{d\alpha_i}{dt}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial \alpha_i}=\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{d\alpha_i}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right). \qquad (6.6.43)$$

Чтобы гамильтониан $\bar{H}$ не зависел от β_i, первое слагаемое в уравнении (6.6.43), согласно соотношению (6.6.39), должно быть равно нулю. Это будет выполняться, если справедливо уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right).$$

Из последнего соотношения получаем уравнение для S

$$H=-\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad (6.6.44)$$

которое называется *уравнением Гамильтона – Якоби*.

К каноническим уравнениям Гамильтона и Гамильтона – Якоби приходят при синтезе оптимальных систем методом максимума Понтрягина или методом динамического программирования Беллмана [14].

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет стандартная форма (каноническая форма фазовой переменной) записи уравнений состояния?
2. Что такое нормальные координаты системы?
3. Как можно перейти к нормальной (канонической) форме уравнений состояния?
4. Какой вид имеют матрицы в канонической форме уравнений состояния?
5. Что такое переходная (фундаментальная) матрица?
6. Какие методы существуют для вычисления переходной матрицы?
7. Назовите основные свойства переходной матрицы.
8. Что такое сопряженная система и сопряженный оператор?
9. В каком случае переходная матрица нестационарной системы представляет матричную экспоненту?
10. Что такое матрицант и как он вычисляется?

11. Каков физический смысл лагранжиана системы?

12. Сформулируйте принцип Даламбера.

13. Запишите простейшее уравнение Эйлера – Лагранжа.

14. В каких случаях возможно аналитическое решение уравнения Эйлера – Лагранжа?

15. Каков физический смысл функции Гамильтона?

16. В чем смысл перехода к каноническим уравнениям Гамильтона – Якоби?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпов А.Г.* Математические основы теории систем. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 184 с. ISBN 978-5-89503-357-9.

2. *Карпов А.Г.* Математические основы теории систем. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 138 с.

3. *Карпов А.Г.* Теория автоматического управления. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТМЛ-Пресс, 2012. – 264 с. ISBN 978-5-9130-2136-6.

4. *Карпов А.Г.* Цифровые системы автоматического управления (Основы теории): Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 288 с. ISBN 978-5-89503-358-6.

5. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.,* Основы системного анализа. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 396 с. ISBN 5-89503-004-1.

6. *Вунш Г.* Теория систем. – М.: Советское радио, 1978. – 288 с.

7. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.* Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с. ISBN 5-283-01563-7.

8. *Закревский А.Д.* Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. – М.: Наука, 1971. – 512 с.

9. *Мелихов А.Н.* Ориентированные графы и конечные автоматы. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

10. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. – М.: “Наука”, 1970. – 620с.

11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Госиздат, 1951.

12. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: “Наука”, 1974.

13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: “Наука”, 1966.

14. *Ту Ю.* Современная теория управления. – М.: “Машиностроение”, 1971. – 472с.

Учебное издание

Александр Георгиевич Карпов

Математические основы теории систем

Учебное пособие

Издание подготовлено
в авторской редакции
6.7 Коорректор Г.И. Иванченко
Верстка макета и дизайн обложки

Редактор
Верстка

Изд. лиц. Подписано к печати.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times».
Усл. п. л.. Уч.-изд. л.. Тираж 100 экз.

ООО «Издательство ТМЛ-Пресс»
634050, г. Томск, ул. Советская, 33, оф. 10, тел. (382-2) 52-87-15

Отпечатано Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники,
г. Томск, пр. Ленина, 40