Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов технических направлений подготовки и специальностей

Томск
«Эль Контент»
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
Е 585

Рецензенты:
Некряч Е. Н., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского Томского политехнического университета;
Гензе Л. В., канд. физ-мат. наук, доцент кафедры теории функций Национального исследовательского Томского государственного университета.

Ельцов А. А.
Е 585 Интегральное исчисление : учебное пособие / А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова. — Томск : Эль Контент, 2013. — 138 с.

ISBN 978-5-4332-0115-6

В краткой конспективной форме изложен материал по неопределённому и определённому, кратным, поверхностным и криволинейным интегралам, элементам теории поля в объёме, предусмотренном ныне действующей программой вузов. Пособие может быть использовано для изучения дисциплины студентами, обучающимися с применением дистанционных образовательных технологий. Отличительной особенностью является использование матричного и векторного аппарата. Теоретический курс дополнен примерами и контрольными заданиями. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-4332-0115-6

© Ельцов А. А.,
Ельцова Т. А., 2013
© Оформление.
ООО «Эль Контент», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

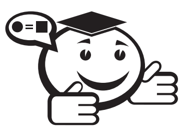
ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие представляет собой краткий конспект лекций по интегральному исчислению. Пособие состоит из четырёх глав. В первой — изучаются методы вычисления неопределённых интегралов. Во второй — рассмотрен определённый интеграл для функции одной переменной и его приложения. В третьей — рассматриваются кратные (двойные и тройные) интегралы. При изучении замены переменных в кратных интегралах используется аппарат векторного дифференциального исчисления [2, 3], что формально упрощает изложение и делает его единым как для функций одной переменной, так и для функций многих переменных. В четвертой — с использованием векторного дифференциального исчисления изучаются криволинейные, поверхностные интегралы и элементы теории поля. Изложение тесно увязано с линейной алгеброй [1].

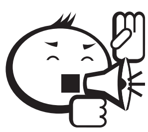
Весь материал разбит на блоки, содержащие небольшое число новых понятий. Материал достаточно полно иллюстрирован разнообразными примерами. После каждого блока помещены задания для самостоятельной работы с ответами, которые могут быть использованы студентами для проверки правильности усвоения материала или преподавателями для проведения практических занятий. Для более глубокого изучения можно использовать пособия из списка литературы.

Соглашения, принятые в книге

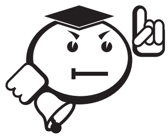
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.

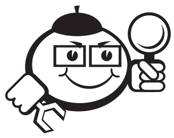


Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



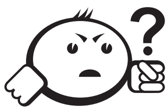
В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.

Эта пиктограмма означает теорему. Данный блок состоит из *Названия теоремы* (Слова Теорема и Номера теоремы) и Текста теоремы.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Контрольные вопросы по главе

ВВЕДЕНИЕ

Математика долгое время была сугубо прикладной наукой. Многие её разделы зародились из решения практических задач. Ещё древние греки решали задачи о вычислении площадей плоских фигур и объёмов сложных тел.

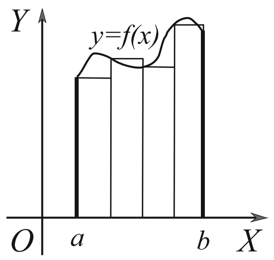


Рис. 1

Приведём задачу о вычислении площади плоской фигуры. Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Пусть m_i — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, а M_i — наибольшее значение функции $f(x)$ на том же отрезке. Заменим площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $m_i\Delta x_i$ прямоугольника с высотой m_i (рис. 1). Это площадь с недостатком. Тогда $\underline{\sigma}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$ — приблизительная площадь исходной трапеции с недостатком. Аналогично $\overline{\sigma}_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$ — приблизительная площадь исходной трапеции с избытком. Площадь S исходной криволинейной трапеции находится между этими значениями. Мы также можем заменить площадь трапеции между точками x_i, x_{i+1} площадью $f(\xi_i)\Delta x_i$ прямоугольника с высотой $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ — некоторая фиксированная точка. Сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ также будет давать приблизительную площадь исходной трапеции и будет находиться между суммами $\underline{\sigma}_n$ и $\overline{\sigma}_n$. Интуитивно ясно, что, переходя во всех трёх суммах к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что максимальная длина $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, получаем некоторую величину, которую и принимают за площадь исходной криволинейной трапеции. Подобная идея суммирования и предельного перехода используется и при решении некоторых физических задач.

Пусть тело движется со скоростью $V = f(t)$, $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. За время Δt_i тело пройдёт путь $f(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i — некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем путь, пройденный телом за время от момента T_0 до момента T_1.

В конечном итоге рассмотрение подобных задач привело к понятию определённого интеграла (интеграла Римана), который изучается во втором разделе данного пособия. Суть этого понятия следующая.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на конечном отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Предел сумм σ_n по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ_i при условии, что максимальная длина $\lambda = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} |\Delta x_i| = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i|$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, называется ***определенным интегралом (интегралом Римана) от функции*** *$f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а сама функция $f(x)$ называется* ***интегрируемой по Риману***.

Совершенно ясно, что вычислять пределы сумм, полученных в определении интеграла Римана, достаточно сложно и утомительно. Нужен метод, позволяющий обойти возникающие сложности. Этот метод был найден Ньютоном и Лейбницем и связан с решением задачи, обратной задаче дифференцирования, суть которой следующая.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Функция $F(x)$, производная $F'(x)$ которой совпадает с функцией $f(x)$, называется ***первообразной для*** *$f(x)$.*

Задача нахождения первообразной решается неоднозначно в том смысле, что у одной и той же функции существует много первообразных. Непосредственным вычислением проверяется, что функции $2\sin^2 x$, $-\cos 2x$, $-2\cos^2 x$ являются первообразными для функции $2\sin 2x$. Этот факт не случаен. Оказывается, что первообразные одной и той же функции отличаются одна от другой на константу. Для указанных выше функций это подтверждается школьными формулами тригонометрии, а в общем случае доказывается в курсе интегрального исчисления.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом от этой функции*** *и обозначается $\int f(x)\,dx$.*

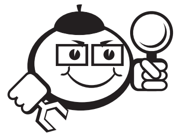
Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$. Тогда,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) - F(a),$$

то есть определённый интеграл по отрезку $[a, b]$ от функции $f(x)$ равен разности значений какой-либо из первообразных функции $f(x)$ на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Приведённая выше формула называется формулой Ньютона—Лейбница.

Формула Ньютона—Лейбница связывает неопределённый и определённый интегралы. Если мы сможем находить неопределённые интегралы, то с использованием формулы Ньютона—Лейбница определённые интегралы легко вычисляются.

Для нахождения неопределённых интегралов используются прежде всего таблица интегралов и свойства неопределённого интеграла. Приёмы вычисления неопределённого интеграла основаны на сведении путём преобразований исходного интеграла к одному или нескольким табличным. Часть из этих приёмов изучается в курсе интегрального исчисления.



Пример 1

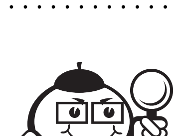
Вычислить $\int x \cdot \sqrt[4]{2 + x^2}\,dx$.

Решение:

Так как $xdx = \frac{1}{2}d\,(x^2) = \frac{1}{2}d\,(x^2 + 2)$, то можем записать:

$$\int x \cdot \sqrt[4]{2 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{2 + x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{2 + x^2}\,d(x^2 + 2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(2 + x^2\right)^{\frac{1}{4}} d(x^2 + 2) = \frac{1}{2}\left(2 + x^2\right)^{\frac{5}{4}} : \frac{5}{4} + C = \frac{2}{5}\left(2 + x^2\right)^{\frac{5}{4}} + C.$$



Пример 2

Найти $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 4x \cos 4x\,dx$.

Решение:

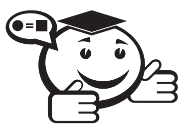
$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 4x \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 4x\, d\sin 4x = \left.\frac{\sin^6 4x}{24}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sin^6\pi - \sin^6\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}\left((0)^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\right) = -\frac{9}{512}.$$

. . . .

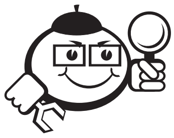
До сих пор мы определяли интеграл от ограниченной функции, заданной на конечном отрезке. В некоторых задачах, в том числе и физических, требуется рассматривать интеграл от функции по промежутку бесконечной длины или от неограниченной функции, заданной на конечном промежутке. Распространение понятия интеграла на указанные случаи приводит к понятиям несобственных интегралов 1-го и 2-го рода.

Рассмотрим вначале случай, когда функция $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a, \infty)$.



Предположим, что наша функция интегрируема на каждом ограниченном отрезке из промежутка $[a, \infty)$, то есть для всякого $A \geqslant a$ существует интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$ называется ***несобственным интегралом 1-го рода (интегралом по неограниченному промежутку)*** *и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл 1-го рода называется* ***сходящимся****, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл 1-го рода называется* ***расходящимся****.*

Можно также рассматривать несобственные интегралы 1-го рода по промежуткам $(-\infty, a]$ и $(-\infty, \infty)$.



Пример 3

Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A - \ln 1) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A = \begin{cases} \infty, & \text{при } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha \leqslant 1$ расходится и при $\alpha > 1$ сходится.

. . . .

Пусть теперь функция $f(x)$ задана на полуинтервале $[a, b)$ и не ограничена вблизи точки b (в некоторой окрестности точки b).

. . . .

Предположим, что функция интегрируема на всяком входящем в полуинтервал $[a, b)$ отрезке, то есть для всякого $0 < \delta < b - a$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ называется ***несобственным интегралом 2-го рода (интегралом от неограниченной функции)*** *и обозначается $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл 2-го рода называется* ***сходящимся****, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл 2-го рода называется* ***расходящимся****.*

. . . .

Аналогично определяются несобственные интегралы 2-го рода в случаях, когда подынтегральная функция не ограничена вблизи точки a, во внутренней точке отрезка $[a,\ b]$, вблизи точек a и b одновременно.

Пример 4

Рассмотрим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\big|_{\varepsilon}^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha < 1$ сходится и при $\alpha \geqslant 1$ расходится.

. . . .

Аналогичные выводы можно сделать относительно несобственных интегралов $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ с особенностями соответственно в точках $x = a$ и $x = b$.

Реализованная выше для скалярной функции скалярного аргумента схема построения интеграла Римана применима и для других классов функций. Покажем, как это делается для функций, заданных на кривой.

Функция $f(x, y)$ двух переменных, скалярная или векторная, может быть задана в некоторой плоской области или на кривой, лежащей на плоскости. Аналогично функция трёх переменных может быть задана в некоторой пространственной области, на поверхности или на кривой в пространстве.

Назовём кривую Г гладкой, если в каждой её точке существует касательная, и кусочно-гладкой, если кривую можно разбить на конечное число участков, на каждом из которых кривая гладкая. Будем называть кривую Г ориентированной, если задан порядок следования точек на кривой. Если кривая гладкая, то её можно ориентировать с помощью направляющего вектора касательной. Заметим, что координаты любого единичного вектора равны косинусам углов, образованных этим вектором с соответствующей координатной осью. Таким образом, если $\tau(x, y, z)$ единичный вектор касательной к Г в точке (x, y, z), то $\tau(x, y, z) = \big(\cos\alpha(x, y, z), \cos\beta(x, y, z), \cos\gamma(x, y, z)\big)$, где α, β, γ — углы, образованные вектором касательной с осями OX, OY, OZ соответственно. Поэтому ориентацию кривой можно задать с помощью косинусов углов между вектором касательной и координатными осями.

Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая кривая L конечной длины и на L — ограниченная скалярнозначная функция $f(M)$, где $M(x, y, z)$ — некоторая точка кривой. Разобьем L на элементарные участки точками. Внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Вычислим значения $f(M_i)$ функции в этих точках, умножим полученные значения на длину Δl_i данного элементарного участка кривой и просуммируем. Предел полученных сумм, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется ***криволинейным интегралом первого рода****.*

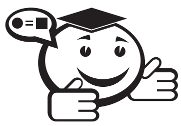
Для функций, заданных на ориентированной кривой, значение $f(M_i)$ умножим на $\Delta l_i \cos\alpha_i$, $\Delta l_i \cos\beta_i$, $\Delta l_i \cos\gamma_i$, где α_i, β_i, γ_i — углы между касательной к кривой в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и осями OX, OY, OZ соответственно. Предел сумм:

$$S_n^\alpha = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta l_i \cos\alpha_i,$$

$$S_n^{\beta} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta l_i \cos\beta_i,$$

$$S_n^{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta l_i \cos\gamma_i,$$

называемых интегральными суммами Римана, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что длина элементарного участка стремится к нулю, называется ***криволинейным интегралом второго рода*** *и обозначается* $\int\limits_L f(x, y, z)\,dx,\ \int\limits_L f(x, y, z)\,dy,\ \int\limits_L f(x, y, z)\,dz.$



Пусть теперь на ориентированной непрерывной кусочно-гладкой кривой L конечной длины задана вектор-функция $f(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. *Если L — ориентированная кривая, то у нас уже определены криволинейные интегралы второго рода:*

$$\int\limits_L P(x, y, z)\cos\alpha\,dl = \int\limits_L P(x, y, z)\,dx,$$

$$\int\limits_L Q(x, y, z)\cos\beta\,dl = \int\limits_L Q(x, y, z)\,dy,$$

$$\int\limits_L R(x, y, z)\cos\gamma\,dl = \int\limits_L R(x, y, z)\,dz.$$

Взяв сумму однотипных интегралов, получаем

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz —$$

криволинейный интеграл второго рода*, который иногда обозначают* $\int\limits_L \left(f(x, y, z),\ \overline{dl}\right)$, *где* $\overline{dl} = \tau(x, y, z)\,dl.$

Заметим, что между криволинейными интегралами первого и второго рода существует связь, выражаемая формулой:

$$\int\limits_L \left(f(x, y, z),\ \overline{dl}\right) = \int\limits_L \left(f(x, y, z), \tau(x, y, z)\right) dl.$$

Вычисление всех определённых выше криволинейных интегралов сводится тем или иным способом к вычислению определённых интегралов. Как это делается, показано в курсе.

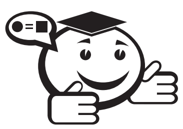
Рассмотренная выше идея построения определённого и криволинейных интегралов используется и для введения кратных и поверхностных интегралов и реализована в данном курсе.

Глава 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Определение и свойства

В дифференциальном исчислении по данной функции находилась её производная. В этом разделе будем заниматься задачей, обратной к задаче нахождения производной.



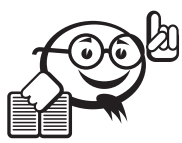
Функция $F(x)$ называется ***первообразной для функции*** $f(x)$ ***(дифференциала*** $f(x)\,dx$*) на отрезке $[a, b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$ $\left(dF(x) = f(x)\,dx\right)$.*

Нетрудно видеть, что функция $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ является первообразной для функции $\cos^3 x$. Действительно,

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \cos x - \sin^2 x \cos x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) = \cos^3 x.$$

Аналогично доказывается, что $\sin 2x$ является первообразной для $2\cos 2x$.

Докажем несколько свойств первообразных.



Теорема 1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то $F(x) + C$, где C — некоторая константа, также является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Действительно, $\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные одной и той же функции, то их разность $F(x) - \Phi(x)$ есть константа.

Доказательство. Докажем вначале, что если для $\forall x \in [a, b]$ $\varphi'(x) = 0$, то $\varphi(x)$ есть константа на $[a, b]$. Пусть x_1, x_2 — любые две точки из $[a, b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях, существует точка ξ из отрезка $[x_1, x_2]$, такая, что $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1)$. Так как по условию $\varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$, и поэтому, в силу произвольности x_1, x_2, $\varphi(x)$ есть константа на $[a, b]$. Вычисляя производную, получаем $\big(F(x) - \Phi(x)\big)' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех x из $[a, b]$, и, по доказанному выше, $F(x) - \Phi(x)$ есть константа. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 получается важный результат.

Теорема 3. Любые две первообразные одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x) = F(x) + C$.

Теорема 3 позволяет ввести нижеследующий объект.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)\,dx$) называется ***неопределенным интегралом от этой функции*** *и обозначается* $\int f(x)\,dx$.

Укажем несколько свойств неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Доказательство. Действительно, если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $d\int f(x)\,dx = d\big(F(x) + C\big) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказывается аналогично.

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Доказательство. Вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(a\int f(x)\,dx\right) = ad\left(\int f(x)\,dx\right) = af(x)\,dx$. Последнее означает справедливость доказываемого свойства.

$$4.\ \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему, вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right) = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)\,dx = f(x)\,dx \pm g(x)\,dx = \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = d\left(\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx\right)$. Свойство доказано.

Заметим, что свойства 3 и 4 означают линейность операции интегрирования.

$$5.\ \int f(x)\,dx = \int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Доказательство. Так как по свойству инвариантности формы первого дифференциала $f(x)\,dx = f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt$, то, используя свойство 1, получаем

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx = f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt = d\int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Утверждение доказано.

Это свойство лежит в основе нахождения интеграла с помощью замены переменной.

Используя свойства 1–5 и свойства дифференциалов, сводят вычисление интегралов к так называемым табличным интегралам.

Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C.$

2. $\int 1\,dx = x + C.$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \widetilde{C}.$

5а. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \widetilde{C}.$

6а. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7а. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$ 9. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$ 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$

12. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C.$ 13. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C.$

14. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$ 15. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$

Иногда возникает необходимость вычисления интегралов $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ и $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, которые соответственно равны.

16. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C.$

17. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$

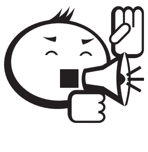
Формулы 5а, 6а, 16, 17 будут доказаны позднее. Остальные обратны табличным производным и могут быть легко получены.

1.2 Приемы нахождения неопределенных интегралов

Вычисление неопределённых интегралов производится сведением исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределённых интегралов.

1.2.1 Подведение под знак дифференциала

Иногда удается представить подынтегральное выражение $f(x)\, dx$ в виде $\varphi(u)\, du$, где u — некоторая функция от x, то есть записать его в форме $f(x)\, dx = \varphi(u(x))\, du(x)$, и при этом интеграл $\int \varphi(u)\, du$ является табличным. Тогда если $\int \varphi(u)\, du = F(u) + C$, то по свойству 5 неопределённого интеграла $F(u(x)) + C = \int \varphi(u(x))\, du(x) = \int \varphi(u(x)) u'(x)\, dx = \int f(x)\, dx$. Этот прием называется подведением под знак дифференциала и представляет собой простейший вариант использования формулы замены переменной, выраженной свойством 5. Для овладения этим приёмом необходимы устойчивое (доведённое до автоматизма) знание таблиц производных и дифференциалов и умение ими пользоваться в обе стороны, то есть необходимо не только уметь вычислять по исходной функции производную и дифференциал, но и по дифференциалу увидеть исходную функцию.



Нам также понадобится свойство дифференциала

$$df(x) = \frac{1}{a} d(af(x)) = \frac{1}{a} d(af(x) + b).$$

Пример 1.1

$$\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

С другой стороны, $\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C;$

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + C.$$

Этот пример показывает, что у одной и той же функции может быть несколько разных первообразных, связанных между собой соотношением $\Phi(x) = F(x) + C$.

Займёмся более подробно указанным приёмом. Вначале приведём таблицу дифференциалов в необходимой нам форме.

Таблица основных дифференциалов.

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b — некоторые числа. В частности, $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x+b) = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее.

2. $x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}+b)$, $\alpha \neq -1$.

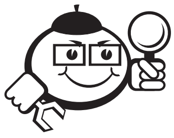
В частности, $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b)$, $x^2\,dx = \frac{1}{3}d(x^3) = \frac{1}{3}d(x^3+b)$, $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}+b\right)$, $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}+b\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = 2d\left(\sqrt{x}+b\right)$.

3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \frac{1}{a}d(a\ln x + b)$.
4. $e^x\,dx = d(e^x) = d(e^x + b)$.
5. $\cos x\,dx = d\sin x = d(\sin x + b)$.
6. $\sin x\,dx = -d\cos x = -d(\cos x + b)$.
7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x = d(\mathrm{tg}\,x + b)$.
8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x = -d(\mathrm{ctg}\,x + b)$.
9. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\,x) = -d(\mathrm{arcctg}\,x)$.
10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Остальное читатель в состоянии восстановить самостоятельно из таблицы производных.

Покажем теперь применение вышесказанного для некоторых интегралов с указанием табличных, к которым они сводятся.

Интегралы $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C.$



Пример 1.2

$\int x \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1)$. В этом месте можно либо продолжить вычисления непосредственно и тогда получим

$$\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C,$$

либо сделать замену переменных $u = x^2 + 1$ и тогда

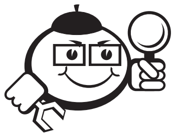
$$\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2}u^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$\int \sin^3 5x \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 5x\,d\sin 5x = \frac{\sin^4 5x}{5\cdot 4} + C = \frac{\sin^4 5x}{20} + C.$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

Интегралы $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$



Пример 1.3

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Знак модуля опущен в силу того, что $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ для $\forall x$ из R.

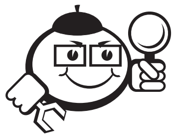
$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$$

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x)}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C.$$

$$\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{1+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x+1)}{1+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\ln(1+\cos 3x) + C.$$

$$\int \frac{\cos 5x}{2+\sin 5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(\sin 5x)}{2+\sin 5x} = \frac{1}{5}\ln(2+\sin 5x) + C.$$

Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \widetilde{C}.$



Пример 1.4

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4) + C.$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\dfrac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+1} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} =$$

$= \operatorname{arctg}(x+3) + C.$

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{d\,(x^6)}{1+x^{12}} = \frac{1}{6}\int \frac{d\,(x^6)}{1+(x^6)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^6) + C.$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{d\,(x^5)}{1+x^{10}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\,(x^5)}{1+(x^5)^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x^5) + C.$$

$$\int \frac{e^{5x}\,dx}{e^{10x}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{1+(e^{5x})^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(e^{5x}) + C.$$

$$\int \frac{e^{4x}\,dx}{e^{8x}+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{1+(e^{4x})^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(e^{4x}) + C.$$

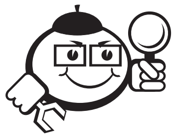
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

Для интеграла $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ имеем $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} =$

$= \displaystyle\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$ Таким образом, нами доказана формула 5а таблицы интегралов.

Часть из приведённых выше примеров можно решить, используя эту формулу.

Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \widetilde{C}.$



Пример 1.5

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+8)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+9-1)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2+6x+9)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \arcsin(x+3) + C.$$

$$\int \frac{e^{5x}\,dx}{\sqrt{1-e^{10x}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x})}{\sqrt{1-(e^{5x})^2}} = \frac{1}{5}\arcsin(e^{5x}) + C.$$

$$\int \frac{e^{4x}\,dx}{\sqrt{1-e^{8x}}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(e^{4x})}{\sqrt{1-(e^{4x})^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(e^{4x}) + C.$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{4}}} = -\arcsin\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

Для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ имеем

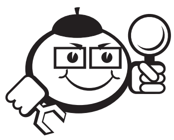
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Таким образом, нами доказана формула 6а таблицы интегралов.

. . . .

Часть из приведённых выше примеров можно решить, используя эту формулу.

Интегралы $\int e^x\,dx = e^x + C.$



Пример 1.6

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

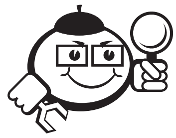
$$\int x^3 e^{2x^4+1}\,dx = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}\,d(2x^4) = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}\,d(2x^4+1) = \frac{1}{8}e^{2x^4+1} + C.$$

$$\int e^{3\sin 2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{6}\int e^{3\sin 2x}\,d(3\sin 2x) = \frac{1}{6}e^{3\sin 2x} + C.$$

$$\int \frac{e^{2\,\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2\,\mathrm{tg}\,x}\,d(2\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{2}e^{2\,\mathrm{tg}\,x} + C.$$

. . . .

Интегралы $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

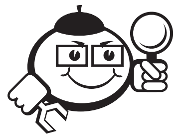


Пример 1.7

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

$$\int x\cos(x^2+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+3)\,d(x^2+3) = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C.$$

Интегралы $\int f\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\int f\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot d\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right).$



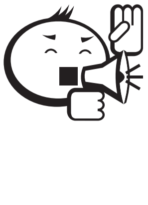
Пример 1.8

$$\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \cos\frac{1}{x}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

$$\int e^{1/x^2}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{1/x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C.$$

$$\int \sin\frac{1}{x^3}\cdot\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\int \sin\frac{1}{x^3}d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{x^3} + C.$$

1.2.2 Интегрирование по частям



Пусть $U(x)$ и $V(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда, вычисляя дифференциал произведения функций $U(x)$ и $V(x)$, получаем $d\big(U(x)V(x)\big) = U(x)\,dV(x) + V(x)\,dU(x)$. Поэтому можем записать $U(x)\,dV(x) = d\big(U(x)V(x)\big) - V(x)\,dU(x)$. Вычисляя интеграл от обеих частей последнего равенства с учетом того, что $\int d\big(U(x)V(x)\big) = U(x)V(x) + C$, получаем соотношение

$$\int U(x)\,dV(x) = UV - \int V(x)\,dU(x),$$

называемое формулой интегрирования по частям. Понимают его в том смысле, что множество первообразных, стоящее в левой части, совпадает со множеством первообразных, получаемых по правой части.

Пример 1.9

Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Положим $U = x$, $dV = e^x dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int e^x\,dx = e^x + C$, и в качестве V можем взять $V = e^x$. Поэтому $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$.

Пример 1.10

Вычислить интеграл $\int x\cos x\,dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \cos x\,dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos x\,dx = \sin x + C$, и в качестве V можем взять $V = \sin x$. Следовательно, $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx =$ $= x\sin x + \cos x + C$.

Пример 1.11

Вычислить интеграл $\int x\cos 5x\,dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \cos 5x\,dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$, и в качестве V можем взять $V = \frac{1}{5}\sin 5x$, поэтому можем написать $\int x\cos 5x\,dx =$ $= \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

При использовании формулы интегрирования по частям нужно удачно выбрать U и dV так, чтобы интеграл, полученный в правой части формулы, находился легче. Приведём пример неудачного выбора U и dV. Положим в примере 1.9 $U = e^x$, $dV = x\,dx$. Тогда $dU = e^x\,dx$, $V = \frac{x^2}{2}$ и $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx$. Вряд ли интеграл $\int x^2e^x\,dx$ можно считать проще исходного.

Основные рекомендации здесь такие.

Если подынтегральная функция есть произведение полинома (многочлена) на экспоненту $\left(e^x = \exp(x)\right)$ *или тригонометрическую функцию, то обычно в качестве* $U(x)$ *выбирают полином, а всё остальное относят к* $dV(x)$.

Пример 1.12

Заметим, что иногда требуется применить формулу интегрирования по частям несколько раз, например при вычислении интеграла $\int x^2 e^{3x}\,dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = e^{3x}\,dx$. Тогда $dU = 2x\,dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$ и $\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x}\,dx$. Для вычисления второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = x$, $dV = e^{3x}\,dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$, и поэтому $\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$. Таким образом,

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

Интеграл $\int x^2 \sin x\,dx$ предлагается найти самостоятельно.

Приведём ещё несколько примеров на применение формулы интегрирования по частям.

Пример 1.13

Вычислить $\int x\,\mathrm{tg}^2\,6x\,dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \mathrm{tg}^2 6x\,dx$. Тогда $dU = dx$, $\int \mathrm{tg}^2 6x\,dx = \int \frac{\sin^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \int \frac{1-\cos^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x + C$, и в качестве V можем взять $\frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x$. Поэтому $\int x\mathrm{tg}^2 6x\,dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}\,6x - x^2 - \int\left(\frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x\right)dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}\,6x - x^2 + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| + \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}\,6x + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| - \frac{x^2}{2} + C.$

Пример 1.14

Вычислить $\int \arcsin^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \arcsin^2 x$, $dV = dx$. Тогда $dU = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $V = x$ и $\int \arcsin^2 x\,dx =$ $= x\arcsin^2 x - 2\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$. Для нахождения второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = \arcsin x$, $dV = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$, и в качестве V можно взять $V = -\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, окончательно получаем:

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Пример 1.15

Вычислить $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \mathrm{arctg}^2 x$, $dV = x\,dx$. Тогда $dU = \dfrac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$, $V = \dfrac{1}{2}x^2$ и $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx =$ $= \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}^2 x - \int \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{arctg}\,x\,dx$. Полагая во втором слагаемом $U = \mathrm{arctg}\,x$, $dV =$ $= \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$, имеем $dU = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx = \int \dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x - \mathrm{arctg}\,x + C$, поэтому в качестве V можно взять $V = x - \mathrm{arctg}\,x$ и, следовательно,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{arctg}\,x\,dx = (x - \mathrm{arctg}\,x)\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{x - \mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx =$$

$$= (x - \mathrm{arctg}\,x)\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{arctg}^2 x - x\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Пример 1.16

Вычислить $\int \ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \ln^2 x$, $dV = dx$. Тогда $dU = \dfrac{2\ln x}{x}dx$, $V = x$, и поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U = \ln x$, $dV = dx$, имеем $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. Поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

Пример 1.17

Вычислить $\int x\ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \ln^2 x$, $dV = x\,dx$. Тогда $dU = \dfrac{2\ln x}{x}dx$, $V = \dfrac{1}{2}x^2$, и поэтому $\int x\ln^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U = \ln x$, $dV = x\,dx$, имеем $\int x\ln x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{2}\int x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$. Поэтому

$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 1.18

Вычислить $\int \ln(x^2+3)\,dx$.

Полагаем $U = \ln(x^2+3)$, $dV = dx$. Тогда $dU = \dfrac{2x\,dx}{x^2+3}$, $V = x$, и поэтому

$$\int \ln(x^2+3)\,dx = x\ln(x^2+3) - 2\int \frac{x^2}{x^2+3}dx = x\ln(x^2+3) - 2x + 2\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 1.19

Интеграл $\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$ вычисляется либо интегрированием по частям с $U = x^5$, $dV = \frac{x^4}{(1+x^5)^3}dx$, либо с помощью замены переменной $z = 1 + x^5$. В первом случае $dU = 5x^4\,dx$, $V = -\frac{1}{10(1+x^5)^2}$, и поэтому $\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = -\frac{x^5}{10(1+x^5)^2} + \int \frac{5x^4}{10(1+x^5)^2}dx = -\frac{x^5}{10(1+x^5)^2} - \frac{1}{10(1+x^5)} + C.$

Во втором случае $dz = 5x^4\,dx$, $x^5 = z - 1$, и поэтому

$$\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = \frac{1}{5}\int \frac{z-1}{z^3}dz = \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^2}dz - \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^3}dz =$$

$$= -\frac{1}{5z} + \frac{1}{10z^2} + C = -\frac{1}{5(1+x^5)} + \frac{1}{10(1+x^5)^2} + C.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем в обоих случаях один и тот же результат.

Приведём два примера применения формулы интегрирования по частям с далеко не очевидным итогом.

Пример 1.20

Вычислим интеграл $J = \int e^x \cos x\,dx$.

Положив $U = e^x$, $dV = \cos x\,dx$, получаем $J = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$. Применив к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям с $U = e^x$, $dV = \sin x\,dx$, имеем $J = e^x \sin x + e^x \cos x - J$. Разрешая последнее равенство относительно J, получаем

$$J = \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Таким образом, нами, в частном случае $a = 1$, $b = 1$, доказана формула 16 из таблицы интегралов. Интеграл примера 1.20, равно как и интегралы $\int e^x \sin x\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, называется циклическим. Циклические интегралы вычисляются по схеме примера 1.20. Предлагается вывести формулы для вычисления этих интегралов самостоятельно или ознакомиться с их получением, например, в [4].

Пример 1.21

С помощью формулы интегрирования по частям найдём $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$. Положив $U = \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $dV = dx$, получаем

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \int \frac{2nx^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} +$$
$$+ \int \frac{2n\left(x^2+a^2-a^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} -$$
$$-2na^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1}.$$

Из крайних частей последнего равенства, разрешая относительно J_{n+1}, получаем рекуррентную формулу:

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}J_n + \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} \tag{1.1}$$

для вычисления интеграла J_{n+1} при любом n. Действительно, $J_1 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. Тогда $J_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C$. Аналогично находятся $J_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}$, J_4 и так далее. По приведённой схеме эти интегралы получены в таблицах интегралов [6] и других.

1.2.3 Простейшие преобразования подынтегрального выражения

Рассмотрим некоторые преобразования подынтегрального выражения, применение которых позволяет иногда достаточно легко найти интеграл.

Выделение целой части.

Суть приёма видна из примера 1.22.

Пример 1.22

1. $\int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + C.$
2. $\int \frac{x}{x+3}dx = \int \frac{x+3-3}{x+3}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = x - 3\ln|x+3| + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} = x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+16}dx = \int \frac{x^2+16-16}{x^2+16}dx = \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+16} = x - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4}dx = \int dx + \int \frac{4xdx}{x^2+4} = \int dx + 2\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} =$
$= x + 2\ln(x^2+4) + C.$

. . . .

Преобразование тригонометрического выражения.

Наиболее часто применяется понижение степени с использованием формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

преобразование произведения в сумму по формулам:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$$

и некоторые другие.

Пример 1.23

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

3. $\displaystyle\int \cos 3x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

4. $\displaystyle\int \cos 2x\sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)\,dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C.$

5. $\displaystyle\int \sin 2x\sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 8x)\,dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

6. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

. . . .

Выделение полного квадрата.

Иногда удаётся получить табличный интеграл, выделив в подынтегральной функции выражения вида $(ax+b)^2$, то есть полный квадрат двучлена $ax+b$. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1.24

1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Знаменатель дроби можем преобразовать следующим образом: $x^2+4x+20 = (x^2+4x+4)+16 = (x+2)^2+4^2$. Сделав замену $x+2=t$, окончательно получаем $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dt}{t^2+4^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}+C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C$.

2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}}$.

Выражение под корнем можно преобразовать следующим образом: $18x-9x^2-5 = -9(x^2-2x+1)+9-5 = 4-9(x-1)^2$. Поэтому можем написать $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x-1)}{2}+C$.

3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

Аналогично предыдущим примерам можно написать $-x^2-2x = -(x^2+2x+1)+1 = 1-(x+1)^2$. Поэтому $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = \arcsin(x+1)+C$.

Выделение дифференциала.

Интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Пример 1.25

Вычислить интеграл $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx$.

Производная знаменателя равна $2x+4$. Поэтому:

$$\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+20}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+20}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+20)}{x^2+4x+20} - \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+20}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+20) - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C.$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ найден ранее.)

Аналогично интеграл $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$ выделением в числителе дифференциала подкоренного выражения сводится к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1.26

Вычислить интеграл $\int \frac{(4x+2)\,dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$.

Производная подкоренного выражения равна $-2(x+1)$. Поэтому

$$\int \frac{(4x+2)\,dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = -2\int \frac{\big(-2(x+1)-1\big)\,dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = -2\sqrt{1-(x+1)^2} + 2\arcsin(x+1) + C.$$

1.2.4 Интегрирование рациональных дробей

***Рациональной дробью**, или **рациональной функцией**, называется отношение двух полиномов (многочленов), то есть выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где*

$$P(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l x^l = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и

$$Q(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ —}$$

*полиномы (многочлены) степеней k и n соответственно. Если степень полинома (многочлена) в числителе меньше степени полинома в знаменателе, то есть $k < n$, то такую рациональную дробь называют **правильной**.*

В дальнейшем будем считать, что $k < n$, так как в противном случае всегда можно представить числитель в виде $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, где $R(x)$ и $S(x)$ — полиномы, называемые обычно, как и в случае действительных чисел, частным и остатком, причем степень полинома $S(x)$ меньше n. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{1.2}$$

а интеграл от полинома $R(x)$ мы вычислять умеем.

Пример 1.27

Покажем на примере, как можно получить разложение (1.2). Пусть $P(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$. Разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ так же, как мы делим вещественные числа. Имеем

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
x^7 & +3x^6 & +3x^5 & & -3x^3 & +4x^2 & +x & -2 & x^3+3x^2+x-2 \\ \cline{9-9}
x^7 & +3x^6 & +x^5 & -2x^4 & & & & & x^4+2x^2-4x+7 \\ \cline{1-4}
 & & 2x^5 & +2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & +x & -2 & \\
 & & 2x^5 & +6x^4 & +2x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -4x^4 & -5x^3 & +8x^2 & +x & -2 & \\
 & & & -4x^4 & -12x^3 & -4x^2 & +8x & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 7x^3 & +12x^2 & -7x & -2 & \\
 & & & & 7x^3 & +21x^2 & +7x & -14 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & -9x^2 & -14x & +12 &
\end{array}$$

Таким образом, мы получили целую часть дроби (частное от деления полинома P на полином Q) $R(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 7$ и остаток $S(x) = -9x^2 - 14x + 12$ от этого деления. Поэтому можем записать $\dfrac{x^7 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2}{x^3 + 3x^2 + x - 2} = x^4 + 2x^2 - 4x + 7 + \dfrac{-9x^2 - 14x + 12}{x^3 + 3x^2 + x - 2}$.

Простейшими рациональными дробями *назовём дроби* $\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $\dfrac{1}{x^2+px+q}$, $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Рассмотрим интегрирование этих дробей. Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, $n \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ являются табличными, а интеграл $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ может быть найден или по рекуррентной формуле (1.1) $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n$, полученной выше интегрированием J_n по частям, или с помощью таблиц [6]. Интегралы $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ в случае, когда знаменатель имеет комплексные корни (дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$), сводятся с помощью выделения полного квадрата к интегралам $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$, $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ заменой $x + \frac{p}{2} = t$. Наконец, как это указывалось ранее, интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Таким образом, осталось научиться раскладывать правильные рациональные дроби на сумму простейших.

По основной теореме алгебры [5] любой полином может быть разложен на простейшие множители, то есть представлен в виде

$$Q(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = a_n\prod_{l=1}^{n}(x-x_l),$$

где x_l — действительные или комплексные корни полинома $Q(x)$, повторенные столько раз, какова их кратность.

Пусть полином $Q(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда правильная рациональная дробь может быть представлена в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — числа, подлежащие определению. Если x_i — корень кратности α, то ему в разложении на простейшие дроби соответствует α слагаемых $\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-x_i)^\alpha}$. Если x_j — комплексный корень кратности α полинома с действительными коэффициентами, то комплексносопряженное число $\bar{x}_j$ — тоже корень кратности α этого полинома. Чтобы не иметь дело с комплексными числами при интегрировании рациональных дробей, слагаемые в разложении правильной рациональной дроби, соответствующие парам комплексно сопряженных корней, объединяют и записывают одним слагаемым вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, если x_j, $\bar{x}_j$ — корни кратности один. Если x_j, $\bar{x}_j$ — корни кратности α, то им соответствует α слагаемых и соответствующее разложение имеет вид:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\alpha x+N_\alpha}{(x^2+px+q)^\alpha}.$$

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей свелось к интегрированию простейших дробей, рассмотренных выше.

Одним из способов нахождения коэффициентов A_j, M_j, N_j в разложении правильной рациональной дроби является следующий. Правую часть полученного разложения с неопределенными коэффициентами A_j, M_j, N_j приводят к общему знаменателю. Так как знаменатели правой и левой частей равны, то должны быть равны и числители, которые являются полиномами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (так как полиномы равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x), получаем систему линейных уравнений для определения этих коэффициентов. Продемонстрируем изложенное на примерах.

Пример 1.28

Найти $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx.$

Корни знаменателя — $x_1 = -2$ кратности 1 и $x_2 = 1$ кратности 2. Поэтому $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x+2)}{x^3 - 3x + 2} = \\ = \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_2 + A_3)x + (A_1 - 2A_2 + 2A_3)}{x^3 - 3x + 2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 & = 1, \\ -2A_1 + A_2 + A_3 & = -1, \\ A_1 - 2A_2 + 2A_3 & = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = \frac{7}{9}$, $A_2 = \frac{2}{9}$, $A_3 = \frac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\ = \frac{7}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Пример 1.29

Найти $\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} dx.$

Корни знаменателя — $x_1 = 2$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3} = -1 \pm i$. Поэтому $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+2x+2)$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-2)}{x^3-2x-4} = \\ = \frac{(A+M)x^2+(2A-2M+N)x+(2A-2N)}{x^3-2x-4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A+M & = 2, \\ 2A-2M+N & = 2, \\ 2A-2N & = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1$, $M = 1$, $N = 2$.

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2+2x-2}{x^3-2x-4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \\ + \int \frac{x+1+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \\ = \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Пример 1.30

Найти $\displaystyle\int \frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx.$

Корни знаменателя — $x_{1,2} = 5$ кратности 2 и пара комплексносопряжённых корней $x_{3,4} = -1 \pm i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и подобные, получаем

$$\frac{-14x^2+54x+43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{(A_1+M)x^3+(-3A_1+A_2-10M+N)x^2}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} + \\ + \frac{(-8A_1+2A_2+25M-10N)x+(-10A_1+2A_2+25N)}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + M & = 0, \\ -3A_1 + A_2 - 10M + N & = -14, \\ -8A_1 + 2A_2 + 25M - 10N & = 54, \\ -10A_1 + 2A_2 + 25N & = 43. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $M = 2$, $N = 1$.

Таким образом,

$$\int \frac{-14x^2 + 54x + 43}{(x^2 + 2x + 2)(x-5)^2} dx = -2\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{(x-5)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx =$$

$$= -2\ln|x-5| + \frac{1}{x-5} + \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Пример 1.31

Найти $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 4}{(x^2+1)^2(x-1)} dx.$

Корни знаменателя — $x_1 = 1$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3,4,5} = \pm i$ кратности 2. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + 4}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2+1)^2}.$$

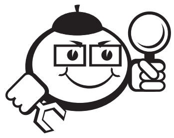
Дальнейшие вычисления предлагается проделать самостоятельно.

1.2.5 Интегрирование простейших иррациональностей и выражений, содержащих тригонометрические функции

Рациональной функцией переменных *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовём отношение двух полиномов от этих переменных, или, что то же самое, отношение двух линейных комбинаций всевозможных произведений целых степеней этих переменных.*

Пусть $R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}\right)$ — рациональная функция от x, $\sqrt[r_1]{x}$, $\sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}$. Эта функция, а следовательно, и интеграл от неё, рационализируется подстановкой $x = t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда $dx = rt^{r-1}\,dt$

и, подставляя x и dx в подынтегральное выражение, получаем под интегралом рациональную функцию аргумента t. Аналогично, если подынтегральное выражение $R\left(x, \sqrt[r_1]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}, \sqrt[r_2]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}\right)$ есть рациональная функция от x, $\sqrt[r_1]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}, \sqrt[r_2]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\dfrac{ax+b}{cx+f}}$, то подынтегральная функция рационализируется подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+f} = t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда $x = \dfrac{ft^r - b}{-ct^r + a}$. Подставляя в исходное выражение, получаем рациональную функцию от t.



Пример 1.32

Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$.

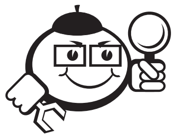
Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому делаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1}dt =$$

$$= 6\int (t^2+1)dt + 6\int \frac{dt}{t^2-1} = 6\int (t^2+1)dt + 3\int \frac{dt}{t-1} - 3\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t-1| - 3\ln|t+1| + C = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C.$$



Пример 1.33

Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}}dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 5 равно 10. Поэтому делаем замену $x + 2 = t^{10}$. Тогда $dx = 10t^9\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}}dx = \int \frac{t^6 10t^9 dt}{t^5 - t^{16}} = 10\int \frac{t^{10}}{1 - t^{11}}dt =$$

$$= -\frac{10}{11}\ln\left|1 - t^{11}\right| + C = -\frac{10}{11}\ln\left|1 - (x+2)^{\frac{11}{10}}\right| + C.$$

Пример 1.34

Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}\,dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4. Поэтому делаем замену $x-1 = t^4$. Тогда $dx = 4t^3\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}\,dx = \int \frac{(t+1)4t^3dt}{t^2+t^3} = 4\int t\,dt = 2t^2 + C = 2\sqrt{x-1} + C.$$

Для интегрирования рациональных функций вида $R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. К сожалению, универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к большим вычислениям. Поэтому по возможности пользуются следующими подстановками. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то делают замену $\cos x = t$, и тогда $\sin x\,dx = -dt$. При $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ полагают $\sin x = t$, при этом $\cos x\,dx = dt$, а в случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ делают замену $\operatorname{tg} x = t$, при которой $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, или замену $\operatorname{ctg} x = t$. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1.35

Вычислить интеграл $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx.$

Делаем замену $\cos x = t$. Тогда $\displaystyle\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx = -\int t^4(1-t^2)\,dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

Пример 1.36

Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Пример 1.37

Найти интеграл $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$.

Делаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1+t^2)^2\,dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)\,dt}{t^4} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Заметим, что в данном примере лучше было сделать замену $\operatorname{ctg} x = t$, так как эта подстановка быстрее приводит к цели. Действительно, тогда $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, и поэтому $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = -\int \frac{(1+t^2)^2\,dt}{(1+t^2)} = -\int (1+t^2)\,dt = -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C = -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$

Пример 1.38

Вычислить интеграл $\int \cos^3 x \sin^8 x\,dx$.

Делаем замену $\sin x = t$. Тогда $\int \cos^3 x \sin^8 x\,dx = \int t^8(1-t^2)\,dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$

Пример 1.39

Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx \int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = \int \frac{2-(t^2+1)}{1+t^2}dt =$$
$$= 2\operatorname{arctg} t - t + C = 2\operatorname{arctg}\sin x - \sin x + C.$$

Пример 1.40

Найти интеграл $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx.$

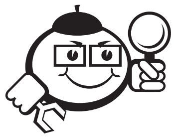
Делаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int \frac{(1+t^2)^3\,dt}{(1+t^2)} = \int (1+t^2)^2\,dt =$$
$$= \int dt + \int 2t^2\,dt + \int t^4\,dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

Для интегрирования рациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ применяют замену $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$, выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$ — подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$, а для интегрирования выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ применяют замену $x = a\operatorname{tg} t$ или $x = a\operatorname{ctg} t$. Можно в этих случаях пользоваться также заменами с гиперболическими функциями.

Пример 1.41

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ воспользуемся заменой $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$ и исходный интеграл равен интегралу $\int \frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t}$. Тогда $\int \frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t} = \int \frac{dt}{4\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t + C$. Делая обратную замену $t = \arcsin\frac{x}{2}$, получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C$. После преобразований получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C.$



Пример 1.42

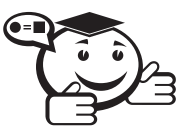
Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ воспользуемся заменой $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}$ и исходный интеграл равен интегралу $\int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t}$. Тогда $\int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$. Делая обратную замену $t = \operatorname{arctg} x$, получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C$. После преобразований получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

1.3 Задача интегрирования в конечном виде

В этой главе мы научились находить первообразные, а следовательно, и неопределённые интегралы для некоторых типов функций. В связи с этим совершенно естественным является вопрос о классе функций, для каждой из которых существует первообразная. Ответ на него даёт следующая теорема.

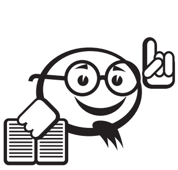
Для любой непрерывной функции существует первообразная.

Обобщение понятия первообразной на функции, имеющие конечное число точек разрыва, даётся следующим образом.



Функция $F(x)$ называется ***первообразной для функции*** *$f(x)$ (****дифференциала*** *$f(x)\,dx$) на отрезке $[a, b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, и $F'(x) = f(x)$ во всех точках существования производной функции $F(x)$.*

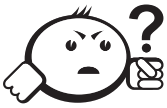
Справедлива следующая теорема.



Для любой функции, имеющей конечное число точек разрыва 1-го рода, существует первообразная, дифференцируемая во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

Доказательство этих результатов, а также решение задачи восстановления первообразной будут приведены в п. 2.2.

Как известно, элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и им обратные функции, а также полученные из перечисленных с помощью конечного числа их суперпозиций и конечного числа операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корня. При изучении производных мы видели, что производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Для первообразной это не так. Не для каждой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. Это даёт возможность введения новых, неэлементарных функций с помощью операции интегрирования. Интегралы от функций, для которых первообразная не является элементарной функцией, называются неберущимися. Наиболее известными неэлементарными функциями являются $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}x + C$ — интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{ci}x + C$ — интегральный косинус, $\mathrm{li}x + C = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^y}{y}dy$ — интегральный логарифм.



Контрольные вопросы по главе 1

1) Что называется первообразной?
2) Что называется неопределённым интегралом?
3) В чём отличие неопределённого интеграла от первообразной?
4) Дифференциалами каких функций являются $x\,dx$, $x^2\,dx$, $\sin 2x\,dx$, $\cos 3x\,dx$, $\frac{1}{1+x^2}dx$, $\frac{x}{1+x^2}dx$, $\frac{1}{x}dx$, $\frac{1}{x^2}dx$?
5) Приведите формулу интегрирования по частям.
6) Что называется правильной рациональной дробью?
7) Корнями знаменателя правильной рациональной дроби являются числа 1, 2, 3. Запишите разложение этой дроби на простейшие.
8) Корнями знаменателя правильной рациональной дроби являются числа $1 + 2i$, $1 - 2i$, 5, 7. Запишите разложение этой дроби на простейшие.

Глава 2

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Определение, свойства, существование

В дополнение к рассмотренным во введении задачам, приводящим к понятию интеграла, рассмотрим ещё две подобных задачи.

Задача о вычислении количества электричества. Пусть по проводнику течёт ток с силой тока $I(t)$ и $I(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть далее $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда количество электричества, протекшее по проводнику за время Δt_i, равно $\Delta Q_i = I(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i — некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, при условии, что $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta t_i$ стремится к нулю, получаем количество электричества, протекшего по проводнику за время от момента T_1 до момента T_2. Если сила тока $I(t)$ меняет знак за отрезок времени от T_1 до T_2, то получаем разность между количеством электричества, протёкшим по проводнику в ту и другую сторону.

Задача о вычислении работы силы при прямолинейном движении материальной точки. Пусть $f(x)$ — переменная сила, направленная параллельно отрезку $[a, b]$, под действием которой материальная точка движется по прямой от точки a к точке b. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Будем считать, что на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сила постоянна и равна $f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ — некоторая фиксированная точка. Тогда работа по перемещению материальной точки из начала в конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ приблизительно равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Суммируя по всем участкам разбиения, получаем, что $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ приближённо есть работа по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a, b]$. Работу по перемещению точки из начала в конец отрезка $[a, b]$ положим равной пределу по всевозможным разбиениям суммы $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при условии, что $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i$ стремится к нулю.

Подобные задачи и легли в основу рассмотренного далее понятия определённого интеграла.

---

*Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a \leqslant b < \infty)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (если $b < a$, то разбиваем точками $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$ и ξ_i выбираем из отрезка $[x_{i+1}, x_i]$) и составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Предел сумм σ_n по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ_i, при условии, что максимальная длина $\lambda = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} |\Delta x_i| = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i|$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, называется **определенным интегралом (интегралом Римана) от функции** $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а сама функция $f(x)$ называется **интегрируемой по Риману**.*

Строго говоря, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла при условии существования всех используемых ниже интегралов.

---

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Доказательство. Следует из определения, так как все Δx_i меняют знак.

---

2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

Доказательство. Действительно, если $c \in [a, b]$, то, включив c в число точек разбиения, получаем требуемое. Если $c \notin [a, b]$, то при $b < c$ применяем только что доказанное к отрезку $[a, c]$ и пользуемся свойством 1. При $c < a$ аналогично.

3. $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

4. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

5. Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и $a \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

6. Если $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a, b]$ и $a \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \;(a \leqslant b).$

8. Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $a \leqslant b$, то $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$

9. Первая теорема о среднем. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, где μ — некоторое число, $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Доказательство. Свойства 3–9 следуют из определения, так как все записанные в них соотношения справедливы для любых интегральных сумм и сохраняются при переходе к пределу.

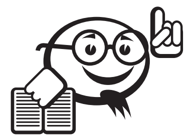
10. Вторая теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка c из $[a, b]$, такая, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$

Доказательство. Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка c из $[a, b]$, такая, что $f(c) = \mu$, что в силу свойства 9 влечёт требуемое.

Выясним условия интегрируемости функции $f(x)$.

Пусть $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ — какое-нибудь разбиение отрезка $[a, b]$. Положим $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,\, x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i,\, x_{i+1}]} f(x)$, где $\inf X$ — точная нижняя грань, а $\sup X$ — точная верхняя грань множества X. Заметим, что m_i — наименьшее, а M_i — наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и если функция $f(x)$ непрерывна, то по второй теореме Вейерштрасса наименьшее и наибольшее значения достигаются и вместо inf и sup можно написать min и max. Суммы $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ и $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ называются нижней и верхней суммами Дарбу. Заметим, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любой интегральной суммы σ_n, построенной с использованием этого разбиения, выполняется неравенство $s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$.

Отметим некоторые свойства сумм Дарбу.



Теорема 2.1. При добавлении числа точек разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае, когда добавлена всего лишь одна точка $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда в нижней сумме Дарбу вместо слагаемого $m_i \Delta x_i$ появится сумма $m_i^1(y_i - x_i) + m_i^2(x_{i+1} - y_i)$, в которой $m_i^1 = \inf\limits_{x\in[x_i,\, y_i]} f(x)$, $m_i^2 = \inf\limits_{x\in[y_i,\, x_{i+1}]} f(x)$. Так как $m_i \leqslant m_i^1$, $m_i \leqslant m_i^2$ (при уменьшении промежутка наименьшее значение функции может только увеличиться), то

$$m_i^1(y_i - x_i) + m_i^2(x_{i+1} - y_i) \geqslant m_i(y_i - x_i) + m_i(x_{i+1} - y_i) = m_i \Delta x_i.$$

Так как все остальные слагаемые остались без изменения, то возрастание нижних сумм Дарбу доказано. Аналогично доказывается, что верхняя сумма Дарбу при добавлении числа точек разбиения не увеличивается. Теорема доказана.

Самым простым разбиением отрезка $[a, b]$ является разбиение, состоящее из точек a и b. Этому разбиению соответствуют суммы Дарбу $s_1 = m(b - a)$ и $S_1 = M(b - a)$, где $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Из теоремы 2.1 следует справедливость неравенств $s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_{n-1} \leqslant s_n \leqslant S_n \leqslant S_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant S_1$ для любых разбиений отрезка $[a, b]$, и поэтому множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху и как ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань $I_* = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$. Аналогично доказывается, что множество верхних сумм Дарбу как ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань $I^* = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$. I_* и I^* называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу. Нетрудно показать, что $I_* = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $I^* = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Действительно, по определению точной верхней грани, для произвольной окрестности $U(I_*)$ числа I_* найдётся разбиение отрезка $[a, b]$, такое, что нижняя сумма Дарбу s_n, соответствующая этому разбиению, принадлежит $U(I_*)$

$\left(s_n \in U(I_*)\right)$. Рассматривая последовательность разбиений, включающих найденное, получаем наше утверждение. Аналогично для верхнего интеграла Дарбу.

Из свойств пределов в неравенствах следует, что $I_* \leqslant I^*$.

Теорема 2.2. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $I_* = I^*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его на процесс дальнейших рассуждений. Тогда, по сказанному выше, для этого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$, для которого $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$. Далее, по определению точной верхней грани для выбранного $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма σ_n, такая, что $|\sigma_n - s_n| < \varepsilon$. Поэтому $|s_n - I| < 2\varepsilon$ для любого разбиения отрезка $[a, b]$, для которого $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i| < \delta$. Последнее означает, что $I_* = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = I$. Аналогично показывается, что и для верхних сумм Дарбу $I^* = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $I_* = I^*$. Обозначим их общее значение через I. Так как по доказанному ранее $I = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и $s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n$ для любого n, то по теореме о зажатой функции [2–4] предел интегральных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ существует и равен I. Теорема доказана.

С помощью только что доказанной теоремы можно заняться выделением множества функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 2.3. Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и ξ_i, η_i — точки наименьшего и наибольшего значений этой функции на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, которые достигаются согласно второй теореме Вейерштрасса. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, согласно теореме Римана [3, 4], она равномерно непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x, y, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$, выполнено неравенство $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$. Пусть теперь разбиение отрезка $[a, b]$ таково, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Тогда, по только что сказанному, $f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ (знак модуля опущен, так как разность $f(\eta_i) - f(\xi_i)$ неотрицательна). Поэтому $S_n - s_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(f(\eta_i) - f(\xi_i)\right)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon\Delta x_i = \varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon(b - a)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ и, по предыдущей теореме, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

Следствие. Функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

Доказательство. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на участки непрерывности. На каждом из них функция интегрируема. По свойству 2 аддитивности интеграла получаем требуемое.

Теорема 2.4. Всякая монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Примем эту теорему без доказательства.

Доказательство существования интеграла Римана для других классов функций требует введения новых понятий и дополнительных рассмотрений. Желающие могут ознакомиться с этим в [3, 4].

Пример 2.1

Примером функции, для которой не существует интеграл Римана, служит функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Действительно, если при любом разбиении отрезка $[a, b]$ точки ξ_i выберем рациональными, то интегральная сумма будет равна длине отрезка интегрирования, а если точки ξ_i выберем иррациональными, то интегральная сумма будет равна нулю. Отсюда следует, что предел интегральных сумм зависит от выбора точек ξ_i и поэтому интеграл Римана от функции $D(x)$ не существует.

2.2 Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона—Лейбница

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. *Эту функцию называют:* ***интеграл как функция верхнего предела***. *Отметим несколько свойств этой функции.*

Теорема 2.5. Если $f(x)$ интегрируемая на $[a, b]$ функция, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. По свойству 9 определенного интеграла (теорема о среднем) имеем $\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = \mu h$, откуда при $h \to 0$ получаем требуемое.

Теорема 2.6. Если $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ функция, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.

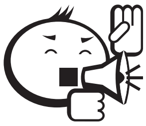
Доказательство. По свойству 10 определенного интеграла (вторая теорема о среднем) имеем $\dfrac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(c)$, где c — некоторая точка отрезка $[x, x+h]$. В силу непрерывности функции f получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

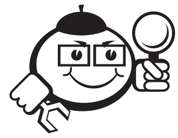
Доказанная теорема решает задачу восстановления первообразной для непрерывной функции с помощью интеграла как функции верхнего предела и даёт конструктивное доказательство (то есть доказательство с построением объекта, существование которого утверждается) теоремы 1.1. Более того, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то, разбивая отрезок $[a, b]$ на участки непрерывности функции $f(x)$, получаем, что с помощью интеграла как функции верхнего предела можно восстановить обобщённую первообразную и в этом случае, а заодно и установить справедливость теоремы 1.2.

Доказательство. Из теоремы 2.6 следует, что $\Phi(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ — другая первообразная $f(x)$. Далее, так как $\Phi(a) = 0$, то $0 = F(a) + C$, следовательно, $C = -F(a)$ и поэтому $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Полагая $x = b$, получаем формулу Ньютона—Лейбница.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) - F(a).$$



Из формулы Ньютона—Лейбница следует, что для вычисления определённых интегралов мы можем применять весь набор приёмов и методов нахождения неопределённых интегралов.



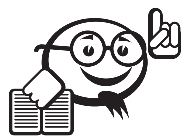
Пример 2.2

1. $\int\limits_0^1 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2}\,d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$

2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\cos x\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\,d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\sin^4\frac{\pi}{3} - \sin^4\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \right.$

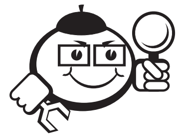
$\left. -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right) = \frac{5}{64}.$

2.3 Интегрирование по частям в определённом интеграле



В определенном интеграле сохраняется формула интегрирования по частям. В этом случае она приобретает вид

$$\int\limits_a^b U\,dV = UV\big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU.$$



Пример 2.3

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

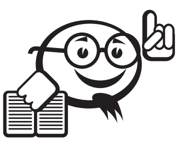
2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = xe^{x^2}\,dx$. Тогда $dU = 2x\,dx$, $V = \frac{1}{2}e^{x^2}$ и $\int\limits_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-0-e+1) = \frac{1}{2}$.

. . . .

2.4 Замена переменных в определённом интеграле

Иногда возникает необходимость перейти в интеграле к новой переменной. Имеет место следующий результат.

. . . .



Теорема 2.7. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — дифференцируемое биективное (взаимно однозначное) отображение, такое, что $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$.

. . . .

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что функция $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$. Это выполнено, например, когда функции $f(x)$ и $\varphi'(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода (кусочно-непрерывны), так как в этом случае функция $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ также кусочно-непрерывна и, по следствию из теоремы 2.3, интегрируема. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на части точками $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Этому разбиению отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствует разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_i = \varphi(t_i)$. Так как $\varphi(t)$ дифференцируема, то, по теореме Лагранжа о конечных приращениях [2–4], $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ — некоторая точка. Положим $\xi_i = \varphi(\tau_i) \in [x_i, x_{i+1}]$. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\varphi(\tau_i)\big)\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

В левой части этого равенства стоит интегральная сумма для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а справа — для интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$. Так как оба интеграла существуют, то, переходя в этом равенстве к пределу по всевозможным разбиениям, получаем справедливость утверждения теоремы.

Пример 2.4

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. Положим $x = t^2$. Тогда $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $dx = 2t\,dt$, и поэтому исходный интеграл равен:

$$\int\limits_0^2 \frac{2t^3\,dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{\left((t^3+1)-1\right)dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{\left((t+1)(t^2-t+1)-1\right)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 (t^2-t+1)\,dt - 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2-(\ln 3-\ln 1)\right) = \frac{16}{3} - 2\ln 3.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$. Положим $x + 1 = t^2$. Тогда $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $dx = 2t\,dt$ и поэтому

$$\int\limits_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}} = 2\int\limits_2^3 \frac{t\,dt}{t+2} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int\limits_2^3 dt - 4\int\limits_2^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_2^3 - 4\ln(t+2)\Big|_2^3 = 2(3-2) - 4(\ln 5 - \ln 4) = 2 - 4\ln 1{,}25.$$

2.5 Приближённое вычисление определённого интеграла

Если первообразная является неэлементарной функцией или находится достаточно сложно, то использование формулы Ньютона—Лейбница для вычисления определённого интеграла затруднено. В этом случае определённый интеграл вычисляют приближённо, чаще всего численно. Получением формул для численного вычисления интеграла мы и займёмся.

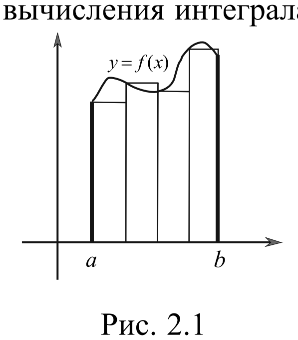


Рис. 2.1

Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Так как интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей точками $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ (рис. 2.1). Положив в интегральной сумме $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ последовательно $\xi_i = x_i$, $\xi_i = x_{i+1}$ и $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, получаем в результате формулы для приближённого вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

называемые формулами прямоугольников.

Называются они так потому, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, заменяется в первом случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x_i)$, во втором случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x_{i+1})$, а в третьем случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Если криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, заменить трапецией с вершинами в точках $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $\big(x_i, f(x_{i+1})\big)$, то для приближённого вычисления интеграла получаем формулу:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

называемую формулой трапеций.

Точность формул прямоугольников и формулы трапеций имеет порядок $\frac{1}{n^2}$. Доказательство данного факта можно посмотреть, например, в [4, 8].

2.6 Несобственные интегралы

Выше был определён интеграл для ограниченных и заданных на ограниченном отрезке функций. Распространим понятие интеграла на случаи, когда одно или оба этих условия нарушаются.

2.6.1 Несобственные интегралы первого рода

Рассмотрим вначале случай, когда функция задана на промежутке $[a, \infty)$. Так как понятие интеграла по конечному промежутку уже введено, то рассмотрим конечный отрезок $[a, A]$, входящий в полуинтервал $[a, \infty)$, и соответственно интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$ по этому промежутку. Переходя к пределу, при стремлении A к бесконечности, получаем понятие несобственного интеграла по бесконечному промежутку (первого рода). Формализация этой идеи приводит к следующему определению.

Пусть $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a, \infty)$ и для всякого $A \geqslant a$ существует интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$ называется ***несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку)*** *и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется* ***сходящимся****, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется* ***расходящимся****.*

Пример 2.5

Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim\limits_{A\to\infty}(\ln A - \ln 1) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A = \begin{cases}\infty, & \text{при } \alpha < 1,\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{при } \alpha > 1,\end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha \leqslant 1$ расходится и при $\alpha > 1$ сходится.

Этот интеграл часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного.

Пример 2.6

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

Имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^A\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(A-1)-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.7

Выяснить сходимость интеграла $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx=\int_1^{\infty} x\exp(-x^2)\,dx$.

По определению получаем

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^{A} e^{-x^2}d(-x^2)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^A\right)=\frac{1}{2e}-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}e^{-A^2}=\frac{1}{2e}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $0{,}5e^{-1}$.

Пример 2.8

Для интеграла $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ имеем

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}\int_e^{A}\frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_e^A=\lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{\ln A}-2\right)=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 2.9

Для интеграла $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ по определению имеем

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\int_e^{A}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_e^A=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+1\right)=1.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 2.10

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha > 0$.

По определению $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^{A} e^{-\alpha x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\int\limits_0^{A} e^{-\alpha x}d(-\alpha x) =$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^A\right) = \frac{1}{\alpha} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\alpha}e^{-A} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{\alpha}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий важный результат.

Теорема 2.8. Критерий Коши. Несобственный интеграл первого рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A \geqslant a$, такое, что для всех $A_1, A_2 \geqslant A$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

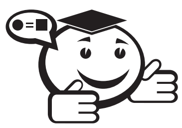
Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится интеграл* $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Отметим, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится.

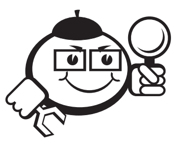
Доказательство. Действительно, тогда для интеграла $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ выполнен критерий Коши, а в силу справедливости неравенства $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx\right|$ критерий Коши выполнен и для интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Обратное утверждение неверно, точнее, если интеграл сходится, то он не обязан сходиться абсолютно.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ определяется аналогично. Предлагается проделать это самостоятельно.



*Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ можем записать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ и назвать этот интеграл **сходящимся**, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **расходящимся**. В качестве точки a выбирают обычно 0.*



Пример 2.11

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$. По определению сходимости этого интеграла получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A_1\to-\infty} \int\limits_{A_1}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \lim_{A_2\to+\infty} \int\limits_{0}^{A_2} \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A_1\to-\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \frac{1}{2}\lim_{A_2\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}.$$

Так как оба слагаемых расходятся, то исходный интеграл расходится. Получаемая при этом неопределённость $\infty - \infty$ при разных скоростях стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$ даёт разные результаты. В частности, если $A_1 = -\sqrt{n^2-1}$, $A_2 = \sqrt{n-1}$, то

$$\frac{1}{2}\lim_{A_1\to-\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \frac{1}{2}\lim_{A_2\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\ln n - 2\ln n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -\infty.$$

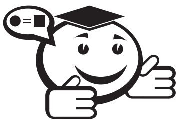
Если $A_1 = -\sqrt{n-1}$, $A_2 = \sqrt{n^2-1}$, то абсолютно аналогично показывается, что этот предел равен $+\infty$. Подобрав скорости стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$, можно получить в пределе любое заранее заданное число от $-\infty$ до $+\infty$.

С другой стороны, при согласованном стремлении верхнего и нижнего пределов к ∞ можем записать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-A}^{A} =$$

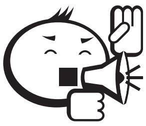
$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\Big(\ln(A^2+1) - \ln(A^2+1)\Big) = 0.$$

Это дает возможность ввести новое понятие.



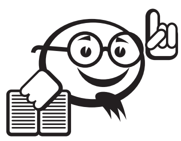
Говорят, что ***несобственный интеграл первого рода*** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ***сходится в смысле главного значения Коши****, если существует и конечен предел* $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$

В случае если рассматривают сходимость интеграла в смысле главного значения Коши, то перед знаком интеграла добавляют буквы V. P., то есть пишут V. P. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (V. P. — начальные буквы французских слов «valeur principal», переводящихся как «главное значение»).



Рассмотренный выше пример показывает, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$

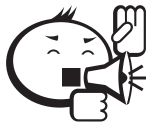


1. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то для всякого $b \geqslant a$ интеграл $\int\limits_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится и $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{\infty} f(x)\,dx.$

2. Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} \alpha f(x)\,dx$ и имеет место равенство $\int\limits_a^{\infty} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx.$

3. Если интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ сходятся, то сходятся интегралы $\int\limits_a^{\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx$ и имеет место равенство

$$\int\limits_a^{\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \pm \int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx.$$



Обратное утверждение неверно, то есть если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны.

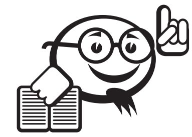
Доказательство. Например, интегралы $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ расходятся, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$, как будет показано позднее, сходится.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

Сходимость не всех несобственных интегралов первого рода просто выяснить по определению. Поэтому часто используют так называемые признаки сравнения в непредельной и предельной формах.

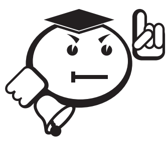
Теорема 2.9. Пусть для всякого $x \geqslant A$ $(A \geqslant a)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant |g(x)|$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ абсолютно сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, а если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ абсолютно расходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ абсолютно расходится.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы для всех $A \geqslant a$ имеем $\int_a^A |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^A |g(x)|\,dx$. Тогда если интеграл $\int_a^\infty |g(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^A |f(x)|\,dx$ есть монотонно возрастающая ограниченная сверху функция от A и поэтому имеет предел при $A \to \infty$. Если интеграл $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится, то $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A |f(x)|\,dx = \infty$, и поэтому $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A |g(x)|\,dx = \infty$.

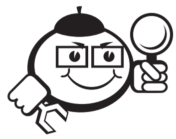


Теорема 2.10. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые в $+\infty$ одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0, \infty$, то интегралы $\int_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = |K|$. Возьмем $0 < \varepsilon < |K|$. По определению предела существует $M > 0$, такое, что для всех $x > M$ выполнено неравенство $|K| - \varepsilon < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < |K| + \varepsilon$, а следовательно, и неравенство $|g(x)|\big(|K| - \varepsilon\big) < |f(x)| < \big(|K| + \varepsilon\big)|g(x)|$. Из последнего неравенства и теоремы 2.9 получаем утверждение теоремы.



Замечание. После изучения теоремы 2.10 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла первого рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно малой при $x \to \infty$. То, что это не так, показывает следующий пример.



Пример 2.12

Возьмем функцию, график которой состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $\left(n - \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $(n, 1)$, $\left(n + \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 2^n x + 1 - n2^n, & x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n\right], \\ -2^n x + 1 + n2^n, & x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2^n}\right], \\ 0, & x \notin \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n + \dfrac{1}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Площадь, заключенная между графиком этой функции и осью OX, равна сумме площадей треугольников с вершинами в точках $\left(n - \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $(n, 1)$, $\left(n + \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как площадь каждого такого треугольника равна $\dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \dfrac{1}{4} + \dfrac{0{,}25}{1 - 0{,}5} = \dfrac{3}{4}$. Заметим, что условие ограниченности функции $f(x)$ несущественно, так как вершины треугольников можно взять, например, в точках $\left(n - \dfrac{1}{n \cdot 2^n}, 0\right)$, (n, n), $\left(n + \dfrac{1}{n \cdot 2^n}, 0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пример 2.13

Интегралы $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$ и $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходятся абсолютно при любом $\alpha > 1$. Действительно, $\left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$ для всех $x > 0$, а интеграл $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}$ — сходящийся, а так как $\dfrac{1}{x^\alpha} > 0$, если $x > 0$, то и абсолютно сходящийся при любом $\alpha > 1$. Напомним, что если $f(x) \geqslant 0$, то понятия сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ совпадают.

Покажем теперь, что при любом $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится, но не абсолютно. Действительно, $\int\limits_\pi^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_\pi^A \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$. Применим к стоящему справа интегралу формулу интегрирования по частям. Положим $U = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $dV = \sin x\,dx$. Тогда $dU = -\dfrac{\alpha\,dx}{x^{\alpha+1}}$, $\int dV = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$ и можем положить $V = -\cos x$. Далее получаем

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_{\pi}^{A}-\int_{\pi}^{A}\frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right)=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\Bigg|_{\pi}^{A}\right)-\lim_{A\to\infty}\left(\int_{\pi}^{A}\frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right).$$

Предел выражения справа существует, так как оба слагаемых имеют конечный предел. Действительно $\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi}^{A}\right)=\frac{1}{\pi}$, а так как интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx$ сходится абсолютно при $\alpha>0$ (показано выше), то существует и конечен предел второго слагаемого. Поэтому существует предел выражения слева и, следовательно, интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ сходящийся. Аналогично показывается, что при любом $0<\alpha\leqslant 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$ сходится. Покажем теперь, что при любом $0<\alpha\leqslant 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ не является абсолютно сходящимся. Действительно, для всех вещественных чисел выполнено неравенство $\sin^2 x\leqslant|\sin x|$. Следовательно, можем записать:

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx\geqslant\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{1-\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}}-\lim_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx.$$

Так как при $0<\alpha\leqslant 1$ интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходящийся и $\frac{1}{x}>0$, то $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{dx}{2x^{\alpha}}=\infty$. Далее, интеграл $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx$ сходящийся, так как можем записать $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx=$ $=2^{\alpha-2}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(2x)^{\alpha}}d(2x)=2^{\alpha-2}\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos u}{u^{\alpha}}du$, а последний интеграл сходящийся. Следовательно, предел второго слагаемого конечен. Тогда $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\infty$, и поэтому $\int_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится.

. . . .

Заметим, что при $\alpha=1$ эти примеры рассмотрены в [4] и [7].

Пример 2.14

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} dx.$

Так как $\left|\frac{2+\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{3}{x^2}$ для всех $x \geqslant 1$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx$ сходится, то и исходный интеграл тоже сходится.

Пример 2.15

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(x+1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 2; \\ 1, & \text{если } \alpha = 2; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 2, и так как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

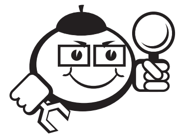
Пример 2.16

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$ получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1{,}5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1{,}5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5, и так как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1,5}}$ сходится, то исходный интеграл сходится.



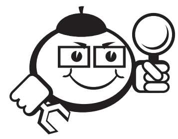
Пример 2.17

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < \frac{4}{3}; \\ 1, & \text{если } \alpha = \frac{4}{3}; \\ \infty, & \text{если } \alpha > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен $\frac{4}{3}$ и, следовательно, интеграл сходится.



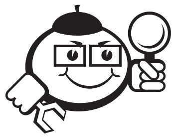
Пример 2.18

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}\,x^{\alpha}}{x^2+4} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 1,5 и, следовательно, интеграл сходится.



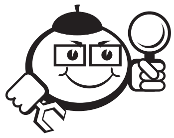
Пример 2.19

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}\,dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{x}$, получаем

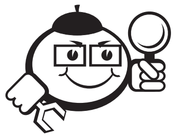
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}\sqrt{x^3+2}}{x^2+5} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 0{,}5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0{,}5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $\frac{1}{x}$ равен 0,5 и, следовательно, интеграл расходится.



Пример 2.20

Интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится, так как имеет место оценка $e^{-x^2} \leqslant xe^{-x^2}$ для всех $x \geqslant 1$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$, как было показано ранее, сходящийся.



Пример 2.21

Интеграл $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ расходится, так как имеет место оценка $\frac{1}{\sqrt{\ln x}} \geqslant \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ для всех $x \geqslant e$, а интеграл $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, как было показано ранее, расходится.

2.6.2 Несобственные интегралы второго рода

Предположим теперь, что подынтегральная функция $f(x)$ неограниченна на промежутке (a, b). Эта особенность может быть в точках a, b или во внутренней точке этого промежутка. Мы рассмотрим случай с особенностью в точке b, то есть в случае, когда функция $f(x)$ неограниченна в некоторой окрестности точки b. При этом функцию будем считать заданной на полуинтервале $[a, b)$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ от функции $f(x)$ по несколько меньшему отрезку $[a,\, b-\delta]$, входящему в полуинтервал $[a,\, b)$. Устремляя в интеграле $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ верхний предел интегрирования к точке b, то есть при δ, стремящемся к нулю, получаем понятие несобственного интеграла второго рода (интеграла от неограниченной функции). Формализация рассмотренной идеи приводит к следующему определению.

*Пусть $f(x)$ задана на полуинтервале $[a,\, b)$ и неограничена вблизи точки b (в некоторой окрестности точки b). Пусть далее для всякого $0 < \delta < b - a$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ называется **несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции)** и обозначается $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется **сходящимся**, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется **расходящимся**.*

Аналогично определяются несобственные интегралы второго рода в случаях, когда подынтегральная функция неограниченна вблизи точки a, во внутренней точке отрезка $[a,\, b]$, вблизи точек a и b одновременно. Для удобства изложения мы рассматриваем случай особенности на верхнем пределе. Для остальных вариантов предлагается проделать это самостоятельно.

Пример 2.22

Рассмотрим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \ne 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha < 1$ сходится и при $\alpha \geqslant 1$ расходится. Аналогичные выводы можно сделать про несобственные интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

Интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ *используются в признаке сравнения в качестве эталонных.*

Пример 2.23

В интеграле $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 1$, поэтому $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^e \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0} 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\delta}^e = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}\right) =$ $= 2$.

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 2.24

В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 0$ и $x = 1$, поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} =$ $= \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$. Для первого из них $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{0,5} \frac{d\ln x}{\sqrt{-\ln x}} =$ $= -\lim\limits_{\delta\to 0} 2\sqrt{-\ln x}\Big|_\delta^{0,5} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-2\sqrt{-\ln 0,5} + 2\sqrt{-\ln\delta}\right) = -\infty$. Следовательно, интеграл расходится, и поэтому исходный интеграл также расходится.

Пример 2.25

В интеграле $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$, поэтому $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{1/e} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_\delta^{1/e} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln\delta}\right) = 1.$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 2.26

Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 1$. Поэтому $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\delta} =$

$= \lim\limits_{\delta\to 0}\big(\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0\big) = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.27

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 1$. По определению имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^2\right) = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{2-1} - 2\sqrt{1+\delta-1}\right) =$

$= \lim\limits_{\delta\to 0}\left(2 - \sqrt{\delta}\right) = 2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 2.28

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$. По определению имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim\limits_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{2-x}\right)\Big|_1^{2-\delta} = 2$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 2.29

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$. Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. Для первого из них имеем $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x)^2}\right)\Bigg|_1^{2-\delta} = \frac{3}{2}$. Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются и доказываются критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 2.11. Критерий Коши. Несобственный интеграл второго рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $\delta_1, \delta_2 \leqslant \delta$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

Теорема 2.12. Пусть для всякого $b - \delta \leqslant x < b$ выполнено неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Теорема 2.13. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие одного порядка роста, то есть $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0,\ \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Замечание. После изучения теоремы 2.13 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла второго рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно большой при $x \to b$. То, что это не так, показывает следующий пример.

Пусть функция $f(x) \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность точек интервала $(a,\ b)$, сходящаяся к точке b. Возьмем функцию $\varphi(x)$, график которой на отрезке $[a,\ x_1]$ совпадает с графиком функции $f(x)$, а на интервале $(x_1,\ b)$ состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $(x_{2k-1},\ 0)$, $\big(x_{2k}, f(x_{2k})\big)$, $(x_{2k+1},\ 0)$, $k = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi(x)$ не является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)$ не существует $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{2k-1}) = 0,\ \lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{2k}) = \infty\right)$. По теореме 2.12, интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, так как по построению $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$.

Пример 2.30

Для интеграла $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{3-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 2$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Точки $x = \pm\sqrt{3}$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{x-2}$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\alpha}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{3-x^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0{,}5; \\ -1, & \text{если } \alpha = 0{,}5; \\ 0, & \text{если } \alpha > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5 и интеграл сходится.

Пример 2.31

В интеграле $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{9-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 1$ и $x = \pm 3$. Точки $x = 1$ и $x = -3$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{3-x}$, имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{9-x^2}} = \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{3+x}} = \begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha < \dfrac{1}{3};\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6}}, & \text{если } \alpha = \dfrac{1}{3};\\ 0, & \text{если } \alpha > \dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\dfrac{1}{3}$ и интеграл сходится.

Пример 2.32

Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{\sin x}}{x^2}\,dx.$

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}} = \begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha < 1{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha = 1{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha > 1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5 и интеграл расходится.

Пример 2.33

В интеграле $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}\,dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<\dfrac{2}{3};\\ 1, & \text{если } \alpha=\dfrac{2}{3};\\ 0, & \text{если } \alpha>\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $\frac{2}{3}$ и интеграл сходится.

Пример 2.34

Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{x}dx.$

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}8;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}8;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}8.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,8 и интеграл сходится.

Пример 2.35

В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5 и интеграл сходится.

Пример 2.36

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 0$ и $x = 1$. Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

Первый из этих интегралов сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 0$ относительно $1/x$ равен $1/2$, а второй — расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 1$ относительно $\frac{1}{1-x}$ равен 1. Поэтому интеграл расходится.

2.7 Приложения определённого интеграла

2.7.1 Вычисление площадей плоских фигур

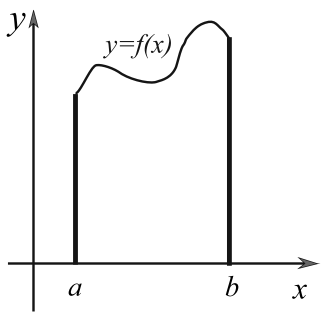


Рис. 2.2

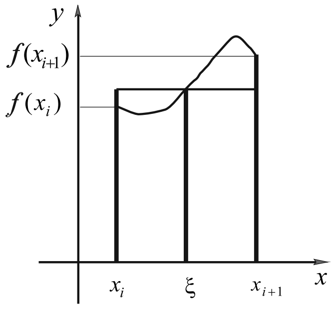


Рис. 2.3

Пусть $f(x) \geqslant 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ (рис. 2.2). Разобьём отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Заменим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, прямоугольником $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(\xi_i)$ (рис. 2.3). Площадь этого прямоугольника равна $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\Delta x_i$, и если f — непрерывная функция, то при достаточно малом Δx_i близка площади заменяемой трапеции. Просуммировав, получим, с одной стороны, приближенное значение площади криволинейной трапеции, с другой стороны, интегральную сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Переходя к пределу при увеличении числа точек разбиения, получаем площадь S исходной криволинейной трапеции $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Назовём трапецию простейшей областью, если она ограничена кривыми $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и для всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Нетрудно видеть, что для простейшей области $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$.

Аналогично, если $\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$ для всех $y \in [c, d]$, то для криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = c$, $y = d$, $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ (простейшей области второго типа), имеем

$$S = \int\limits_c^d \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right) dy.$$

В общем случае плоскую область разбивают на простейшие области рассмотренных выше типов.

Пример 2.37

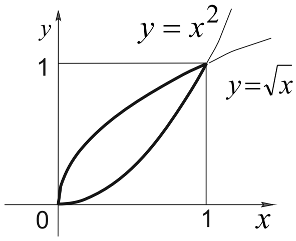


Рис. 2.4

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 2.4). Эти кривые пересекаются в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$. Поэтому

$$S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2.38

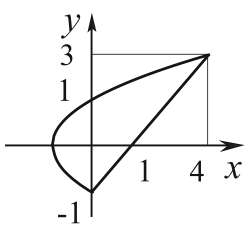


Рис. 2.5

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$ (рис. 2.5). Эти кривые пересекаются в точках $A(0, -1)$ и $B(4, 3)$. В данном случае лучше рассматривать простейшую область второго типа. Поэтому

$$S = \int\limits_{-1}^3 \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^3 = \frac{16}{3}.$$

Пример 2.39

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^{-|x|}$. В данном случае

$$S = \int_{-2}^{1} e^{-|x|}\,dx = \int_{-2}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-|x|}\,dx = \int_{-2}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx =$$

$$= e^{x}\Big|_{-2}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1} - e^{-2}.$$

2.7.2 Вычисление объёмов

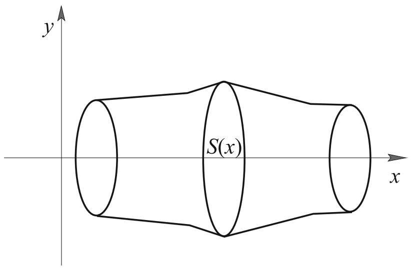


Рис. 2.6

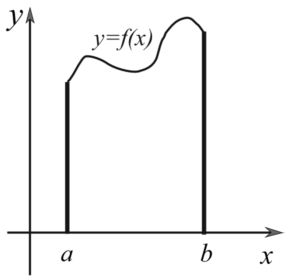


Рис. 2.7

Пусть область такова, что для $\forall x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ сечения плоскостью $x = \text{const}$ (рис. 2.6). Тогда, заменяя объём области, заключенной между плоскостями $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, на объём цилиндра $S(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i — некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, получаем $V = \int_a^b S(x)\,dx$.

Для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ (рис. 2.7) вокруг оси OX, имеем $V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OY, то можно показать, что $V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$.

Аналогично для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant x \leqslant \varphi(y)$ вокруг оси OY, имеем $V = \pi\int_c^d x^2\,dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OX, то $V = 2\pi\int_c^d y\varphi(y)\,dy$.

Пример 2.40

Трапеция ограничена кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OX.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.41

Трапеция ограничена кривыми $y = x$, $y = 0$, $x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OY.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x^2\,dx = \frac{2\pi}{3}.$$

2.7.3 Вычисление длины дуги кривой

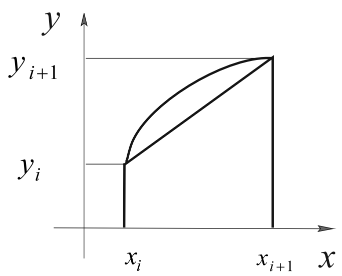


Рис. 2.8

Рассмотрим кривую L. Разделим кривую на части точками (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,n$. Заменим дугу кривой между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) хордой, эти точки соединяющей (рис. 2.8). Тогда для длины дуги Δl_i имеем $\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

Пусть кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t)\big)^T$. Разделив отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $t_0, t_1, \ldots, t_n$, получаем разбиение кривой точками $\big(x(t_i), y(t_i)\big)^T$. Тогда $\Delta l_i \approx \sqrt{\big(x_t'(\tau_i)\big)^2 + \big(y_t'(\tau_i)\big)^2}\,\Delta t_i$, где τ_i — точка, лежащая между t_i и t_{i+1}. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n-1} \Delta l_i \approx \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\big(x_t'(\tau_i)\big)^2 + \big(y_t'(\tau_i)\big)^2}\,\Delta t_i$. Переходя в этой сумме к пределу при увеличении числа точек разбиения, имеем

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x_t'(t)\big)^2 + \big(y_t'(t)\big)^2}\,dt. \tag{2.1}$$

Аналогично, для пространственной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)^T =$ $= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, длина кривой равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt. \tag{2.2}$$

Для кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$, формула (2.1) приобретает вид

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx. \tag{2.3}$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} x_\varphi' = r_\varphi'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y_\varphi' = r_\varphi'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в формулу (2.1) для вычисления длины кривой, получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r_\varphi')^2 + (r)^2}\, d\varphi. \tag{2.4}$$

Пример 2.42

Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$. Так как кривая задана явно, то $l = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$. Делаем замену $t = \sqrt{x^2+1}$. Тогда $x^2 = t^2 - 1$, $2x\,dx = 2t\,dt$, и поэтому $l = \int\limits_2^3 \frac{t^2\,dt}{t^2-1} = \int\limits_2^3 dt +$ $+ \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \int\limits_2^3 dt + \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{dt}{t+1} = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3 = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Пример 2.43

Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$.

Так как кривая задана параметрически, то $x_t' = -3a\cos^2 t\,\sin t$, $y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$, и поэтому

$$l = 3a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \frac{3a}{2}\int\limits_0^{2\pi} |\sin 2t|\,dt =$$

$$= 6a\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = -6a\,\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 3a.$$

Пример 2.44

Найти длину дуги кривой $\rho = 2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Так как кривая задана в полярной системе координат, $\rho_\varphi' = -2\sin\varphi$, то

$$l = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin\varphi)^2 + (2\cos\varphi)^2}\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = 2\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Получился ожидаемый результат, так как уравнение $\rho = 2\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ определяет окружность радиуса 1 с центром в точке $x = 1$, $y = 0$.

Контрольные вопросы по главе 2

1) Каков геометрический смысл определённого интеграла?
2) Каков физический смысл определённого интеграла?
3) Что такое несобственный интеграл первого рода?
4) Какой несобственный интеграл первого рода называется сходящимся?
5) Что такое несобственный интеграл второго рода?
6) Какой несобственный интеграл второго рода называется сходящимся?

Глава 3

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1 Определение и свойства

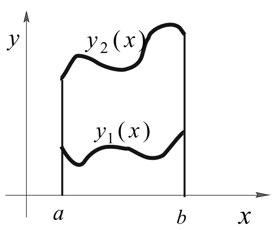


Рис. 3.1

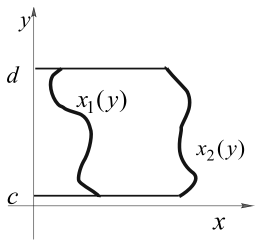
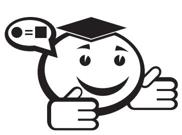


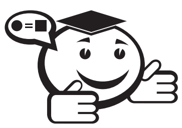
Рис. 3.2

Идея, использованная при построении определённого интеграла Римана, может быть распространена для построения кратных интегралов от функций многих переменных. Только для области на плоскости разбивать область интегрирования на части нужно кривыми, а для области в пространстве поверхностями. Формализация этой идеи для функций многих переменных приводится в этом пункте.

Простейшей областью первого типа на плоскости назовём криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $\big(y_1(x) \leqslant y_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]\big)$ (рис. 3.1). Простейшей областью второго типа на плоскости назовём криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = c$, $y = d$, $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ $\big(x_1(y) \leqslant x_2(y)$ для всякого $y \in [c, d]\big)$ (рис. 3.2).



Пусть X есть простейшая область первого или второго типа на плоскости. ***Мерой*** *$\mu(X)$* ***множества*** *X назовём площадь соответствующей области.*



Пусть X есть объединение непересекающихся простейших областей на плоскости. ***Мерой*** *$\mu(X)$* ***множества*** *X назовём сумму мер (площадей), составляющих множество X непересекающихся простейших областей.*

*Пусть X есть область в R^3. **Мерой** $\mu(X)$ **множества** X назовём объём соответствующей области.*

*Пусть $D \subset R^n$ — некоторое множество. **Диаметром** этого множества назовём число $d = \sup\limits_{x,y \in D} \rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y.*

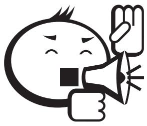
*Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и ограничена в области $D \subset R^n$. Разобьем область D на части поверхностями размерности $n-1$ (в R^2 — кривыми, в R^3 — поверхностями и так далее), пронумеруем полученные элементарные области D_i, выберем внутри каждой из них по точке ξ^i и составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi^i)\sigma(D_i)$, где $\sigma(D_i)$ — мера области D_i (в R^2 — площадь, в R^3 — объём и так далее). Предел полученных сумм по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ^i, при условии, что максимальный из диаметров элементарных областей стремится к нулю, называется **кратным интегралом от функции** $f(x)$ (**двойным на плоскости, тройным** в R^3 и так далее) и обозначается $\int\limits_D f(x)\,dx$ в общем случае, $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ в R^2 и $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ в R^3, а функция $f(x)$ называется **интегрируемой по Риману**.*

Отметим некоторые свойства кратных интегралов при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. Если область D разбита на две области D_1, D_2 так, что $D = D_1 \cup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются лишь по поверхности разбиения, то $\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f(x)\,dx + \int\limits_{D_2} f(x)\,dx$.

2. $\int\limits_D \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_D f(x)\,dx \pm \int\limits_D g(x)\,dx$.

3. $\int\limits_D kf(x)\,dx = k\int\limits_D f(x)\,dx$.

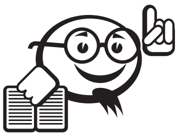


Следующие ниже свойства справедливы для скалярнозначных функций.

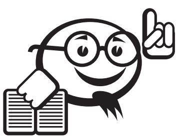
4. Если $f(x) \geqslant 0$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)\,dx \geqslant 0$.

5. Если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)\,dx \leqslant \int\limits_D g(x)\,dx$.

6. $\left|\int\limits_D f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_D |f(x)|\,dx$.



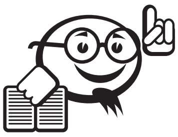
7. Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m\sigma(D) \leqslant \int\limits_D f(x)\,dx \leqslant M\sigma(D)$.



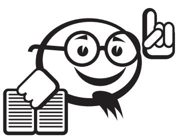
8. $\int\limits_D f(x)\,dx = \mu\sigma(D)$, где μ — некоторое число, такое, что $m \leqslant \mu \leqslant$ $\leqslant M$.

9. Если $f(x)$ непрерывна в области D, то существует точка c из D, такая, что $\int\limits_D f(x)\,dx = f(c)\sigma(D)$.

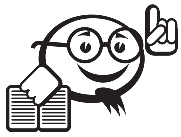
Аналогично тому, как это сделано при рассмотрении интеграла от функции одной переменной, можно рассмотреть нижние и верхние суммы Дарбу, нижний и верхний интегралы Дарбу и доказать следующие результаты.



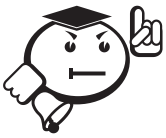
Теорема 3.1. Интеграл от функции $f(x)$ по области D существует тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу равны между собой.



Теорема 3.2. Для всякой непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции существует интеграл по этой области.



Теорема 3.3. Если область D можно разбить на конечное число областей, в замыкании каждой из которых функция непрерывна, то она интегрируема на этом множестве.



Определения ограниченного и замкнутого множеств можно найти в [3, 4, 12]. Любознательным читателям предлагается доказать теоремы 3.1, 3.2, 3.3 самостоятельно или посмотреть их доказательства в [4, 7, 9, 10].

3.2 Вычисление кратных интегралов

3.2.1 Вычисление двойных интегралов

Доказательство. Рассмотрим вначале самый простой случай прямоугольной области $D = [a, b] \times [c, d]$. Предположим, что для всякого $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$. Разобьём отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на части точками $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Положим $D_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $m_{i,j} = \min\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x, y)$, $M_{i,j} = \max\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x, y)$. Выберем на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, по точке ξ_i. При любых $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ и $y \in [y_j, y_{j+1}]$ справедливо неравенство

$$m_{i,j} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{i,j}.$$

Интегрируя это неравенство по y на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$, имеем

$$m_{i,j}\Delta y_j \leqslant I_j(\xi_i) = \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant M_{i,j}\Delta y.$$

Умножая последнее неравенство на Δx_i и суммируя, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{i,j}\Delta y_j \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{i,j}\Delta y_j \Delta x_i. \tag{3.1}$$

Заметим, что в левой и правой частях неравенства (3.1) стоят соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, которые могут быть введены так же, как и для определённого интеграла. В случае, когда функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, каждая из сумм Дарбу совпадает с одной из интегральных сумм. Так как $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy\Delta x_i = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,dy$, то, переходя в неравенстве (3.1) к пределу, имеем, в случае интегрируемости функции $f(x, y)$,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Последнее неравенство эквивалентно соотношению

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Аналогично, если существует $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right) dy.$$

Обычно вместо $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$ пишут $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$.

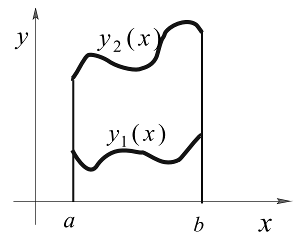


Рис. 3.3

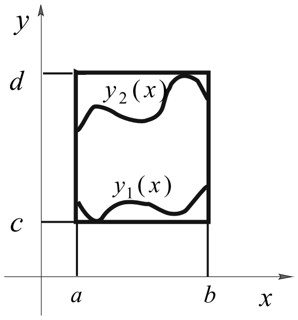


Рис. 3.4

Пусть теперь D — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, и при этом выполнено неравенство $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (рис. 3.3). Заключим эту область в прямоугольник $D_1 = [a, b] \times [c, d]$, где $c = \min\limits_{x \in [a,b]} y_1(x)$, $d = \max\limits_{x \in [a,b]} y_2(x)$ (рис. 3.4).

Положим

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } x \in D, \\ 0, & \text{если } x \notin D. \end{cases}$$

В силу построения $f^*(x, y)$ получаем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f^*(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy \right) dx. \tag{3.2}$$

Далее, $\int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy = \int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x, y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y)\,dy + \int\limits_{y_2(x)}^d f^*(x, y)\,dy$. Так как $\int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x, y)\,dy = \int\limits_{y_2(x)}^d f^*(x, y)\,dy = 0$, то (3.2) можно переписать в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

или, что то же самое,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{3.3}$$

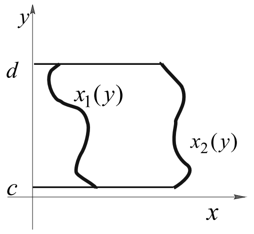
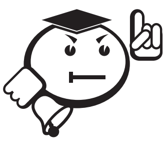


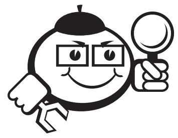
Рис. 3.5

Для криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = c$, $y = d$ $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ $\big(x_1(y) \leqslant x_2(y)$ (рис. 3.5), для $\forall y \in [c, d]\big)$ имеем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{3.4}$$



Интегралы, стоящие в правых частях формул (3.3) и (3.4), называются повторными, а результат о сведении кратного интеграла к одному из повторных носит название теоремы Фубини. Таким образом, мы свели вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению одномерных интегралов, вначале внутреннего, а затем внешнего. Заметим, что порядок, в котором производится интегрирование, иногда влияет на сложность вычислений. Соответствующие примеры есть в [11] и в практикуме [13].



Пример 3.1

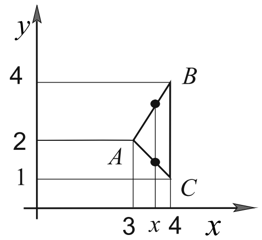


Рис. 3.6

Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(3, 2)$, $B(4, 4)$, $C(4, 1)$ (рис. 3.6). Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x + 2y)\,dx\,dy$.

Перейдём к повторному интегралу типа (3.3) и расставим пределы интегрирования в нём. Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Записывая уравнение прямой, проходящей через две точки, получаем уравнение прямой AB $\dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{y-2}{4-2}$, или, что то же самое, $y = 2x - 4$. Аналогично для прямой AC: $\dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{y-2}{1-2}$, или $y = -x + 5$. Уравнение прямой BC имеет вид $x = 1$. Таким образом, область может быть задана неравенствами $3 \leqslant x \leqslant 4$, $-x + 5 \leqslant y \leqslant 2x - 4$. Поэтому

$$\iint\limits_D (x + 2y)\,dx\,dy = \int\limits_3^4 dx \int\limits_{-x+5}^{2x-4} (x + 2y)\,dy = \int\limits_3^4 \left(xy + y^2\right)\Big|_{-x+5}^{2x-4} dx =$$

$$= \int\limits_3^4 \left(x(2x-4)+(2x-4)^2 - x(-x+5) - (-x+5)^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_3^4 (6x^2 - 15x - 9)\, dx = \left(2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 9x\right)\Bigg|_3^4 = 12{,}5.$$

Для перехода к интегралу типа (3.4) требуется разбить область на две. Мы подобное проделаем в следующем примере, а читателю предлагаем в данном примере сделать это самостоятельно.

Пример 3.2

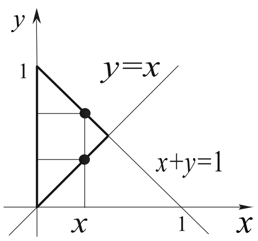


Рис. 3.7

Пусть область D задана неравенствами $y+x \leqslant 1$, $y-x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ (рис. 3.7). В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Перейдем вначале к повторному интегралу типа (3.3). Тогда $a = 0$; $b = 0{,}5$; $y_1(x) = x$; $y_2(x) = 1 - x$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{0,5} dx \int\limits_x^{1-x} f(x, y)\, dy.$$

Для перехода к интегралу типа (3.4) требуется разбить область на две: D_1 с границами $c_1 = 0$; $d_1 = 0{,}5$; $x_1^1(y) = 0$; $x_2^1(y) = y$ и D_2 с границами $c_2 = 0{,}5$; $d_2 = 1$; $x_1^2(y) = 0$; $x_2^2(y) = 1 - y$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{0,5} dy \int\limits_0^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_0^{1-y} f(x, y)\, dx.$$

Пример 3.3

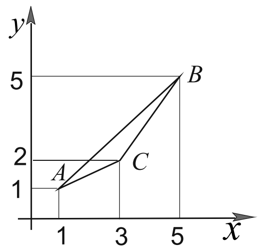


Рис. 3.8

Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 5)$, $C(3, 2)$ (рис. 3.8). В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Уравнение прямой AB можно записать в виде $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1}$ или, что то же самое, в форме $y = x$; прямой AC — в форме $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1}$ или $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; прямой CB — в виде $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3}$ или $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$. Как для перехода к интегралу вида (3.2), так и для перехода к интегралу вида (3.4) приходится разбивать область на две. Для интеграла вида (3.3) соответствующие области задаются неравенствами: D_1 — $1 \leqslant x \leqslant 3$; $0{,}5x + 0{,}5 \leqslant y \leqslant x$, D_2 — $3 \leqslant x \leqslant 5$; $1{,}5x - 2{,}5 \leqslant y \leqslant x$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{0,5x+0,5}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_3^5 dx \int\limits_{1,5x-2,5}^{x} f(x, y)\,dy.$$

Расставить пределы интегрирования, взяв внешний интеграл по y (то есть представить двойной интеграл в виде повторного интеграла вида (3.4), предлагается самостоятельно.

Пример 3.4

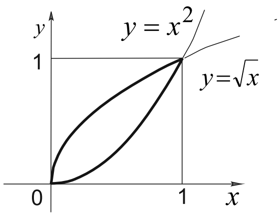


Рис. 3.9

Пусть область D задана неравенствами $y \geqslant x^2$, $y \leqslant \sqrt{x}$ (рис. 3.9). Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

Пример 3.5

Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dx.$$

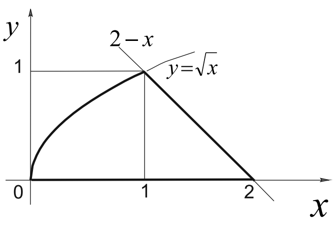


Рис. 3.10

Исходная область представлена в виде объединения двух областей: D_1 — $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$ и D_2 — $1 \leqslant x \leqslant 2$; $0 \leqslant y \leqslant 2 - x$ (рис. 3.10). Таким образом, эта область ограничена кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ и $x = 0$ (рис. 3.10). Её также можно задать неравенствами $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y^2 \leqslant x \leqslant 2 - y$. Поэтому $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy =$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

3.2.2 Вычисление тройных интегралов

Аналогично случаю двойного интеграла доказывается, что если $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ — параллелепипед, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Пусть теперь V — область, расположенная между плоскостями $x = a$, $x = b$ и для $\forall x \in [a, b]$ область V однозначно проектируется на плоскость YOZ и D — эта проекция. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_D f(x, y, z)\, dy\, dz \right) dx.$$

Если V — цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \big(f(x, y, z)\big)\, dz.$$

Пример 3.6

Пусть область V ограничена поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$, $z = x^2 + y^2 + 1$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Данная область есть цилиндр, ограниченный поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 1$. Проекция этого цилиндра на плоскость XOY есть квадрат с границей $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 4$, которая одновременно является направляющей цилиндра. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z)\, dz.$$

Пример 3.7

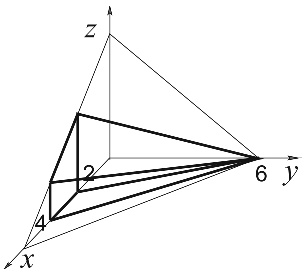


Рис. 3.11

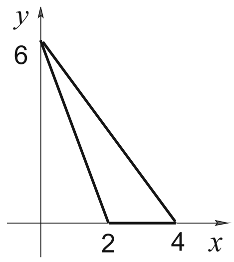


Рис. 3.12

Область V ограничена поверхностями $y = 0$, $z = 0$, $3x+y = 6$, $3x+2y = 12$, $x+y+z = 6$ (рис. 3.11). В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Область однозначно проектируется на треугольник $y = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ (рис. 3.12), лежащий в плоскости XOY, является цилиндром, ограниченным поверхностями $z = 0$, $z = 6 - x - y$, направляющая которого есть указанный выше треугольник. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^6 dy \int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} dx \int\limits_0^{6-x-y} f(x, y, z)\, dz.$$

3.3 Замена переменных в кратных интегралах

3.3.1 Криволинейные системы координат

Положение точки на прямой, на плоскости, в R^3 и в R^n можно определить различными способами. В частности, это можно сделать, задав её декартовы координаты. Иногда же бывает удобно фиксировать положение точки при помощи других величин, например связанных с решаемой задачей. Выяснением этих вопросов для общего случая мы и займёмся.

Пусть $D, D_1 \subseteq R^n$ — области, $r : D_1 \to D$ — отображение

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

Если r — биективное (взаимно однозначное) отображение, то будем говорить, что задана криволинейная система координат, так как в этом случае положение точки $x \in D$ однозначно определяется точкой $u \in D_1$. Если вектор-функция r дифференцируема, то криволинейную систему координат будем называть регулярной. Заметим, что в этом случае, по теореме о производной обратной функции [4], обратное отображение, осуществляемое вектор-функцией r^{-1}, дифференцируемо.

Система вектор-функций $x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ при $u_l = \text{const}$ образует, как и в случае декартовых координат, систему координатных поверхностей. Пересечения координатных поверхностей образуют координатные поверхности меньшей размерности. В частности при $n = 2$, отображение $r = r(u, v)$ задаёт криволинейную систему координат на плоскости, а кривые:

$$(x, y)^T = r(u, C_2) = x(u, C_2)\mathbf{i} + y(u, C_2)\mathbf{j},$$

$$(x, y)^T = r(C_1, v) = x(C_1, v)\mathbf{i} + y(C_1, v)\mathbf{j}$$

образуют координатные линии. Аналогично при $n = 3$ отображение $r = r(u, v, w)$ задаёт криволинейную систему координат в пространстве R^3, поверхности:

$$(x, y, z)^T = r(u, v, C_3) = x(u, v, C_3)\mathbf{i} + y(u, v, C_3)\mathbf{j} + z(u, v, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(u, C_2, w) = x(u, C_2, w)\mathbf{i} + y(u, C_2, w)\mathbf{j} + z(u, C_2, w)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, v, w) = x(C_1, v, w)\mathbf{i} + y(C_1, v, w)\mathbf{j} + z(C_1, v, w)\mathbf{k}$$

образуют координатные поверхности, а их пересечения, то есть кривые:

$$(x, y, z)^T = r(u, C_2, C_3) = x(u, C_2, C_3)\mathbf{i} + y(u, C_2, C_3)\mathbf{j} + z(u, C_2, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, v, C_3) = x(C_1, v, C_3)\mathbf{i} + y(C_1, v, C_3)\mathbf{j} + z(C_1, v, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, C_2, w) = x(C_1, C_2, w)\mathbf{i} + y(C_1, C_2, w)\mathbf{j} + z(C_1, C_2, w)\mathbf{k},$$

образуют систему координатных линий.

Длины векторов r'_{u_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$, то есть числа $h_i = |r'_{u_l}|$, $l = 1, 2, \ldots, n$, называются *коэффициентами Ламе* криволинейной системы координат. Если векторы r'_{u_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$ попарно ортогональны, то криволинейная система координат называется ортогональной. В частности, криволинейная система координат на плоскости будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v)$, $r'_v(u, v)$. Аналогично криволинейная система координат в R^3 будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v, w)$, $r'_v(u, v, w)$, $r'_w(u, v, w)$. Коэффициенты Ламе на плоскости равны $h_u = \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2}$, $h_v = \sqrt{(x'_v)^2 + (y'_v)^2}$, а в R^3 соответственно — $h_u = \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2}$, $h_v = \sqrt{(x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2}$, $h_w = \sqrt{(x'_w)^2 + (y'_w)^2 + (z'_w)^2}$.

Заметим, что для ортогональной криволинейной системы координат модуль определителя матрицы Якоби r' (производной матрицы) [2–4] равен произведению коэффициентов Ламе.

3.3.2 Полярная система координат на плоскости

Наиболее часто используемой криволинейной системой координат на плоскости является полярная система координат (рис. 3.13). Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки и углом φ между радиус-вектором точки и осью. Если в роли оси полярной системы взять ось OX, то в координатном виде переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi) \\ y(\rho, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j}.$$

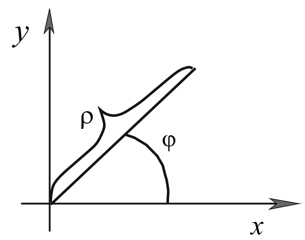


Рис. 3.13

Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Чаще всего берут полуинтервалы $[0, 2\pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $[-\pi, \pi)$. Полярная система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

$$r'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T, \quad r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi)^T,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для полярной системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$.

3.3.3 Сферическая и цилиндрическая системы координат в R^3

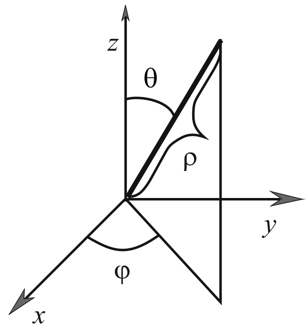


Рис. 3.14

Возможны два обобщения полярной системы координат на случай пространства R^3. Первое из них называется сферической системой координат (рис. 3.14). Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки, углом θ между радиус-вектором точки и осью OZ, углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

При этом $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, \theta) \\ y(\rho, \varphi, \theta) \\ z(\rho, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$= (\rho\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + \rho\cos\theta\mathbf{k}.$$

Сферическая система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

$$r'_\rho = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^T,$$

$$r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,$$

$$r'_\theta = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, -\rho\sin\theta)^T,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для сферической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho\sin\varphi$, $h_\theta = \rho$.

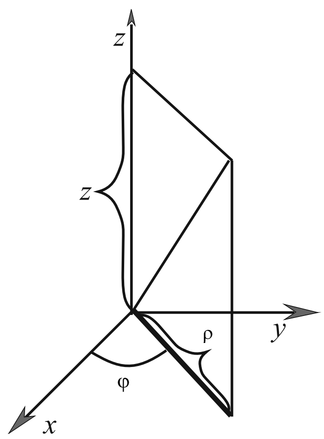


Рис. 3.15

Второе обобщение полярной системы координат называется цилиндрической системой координат (рис. 3.15). Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ проекции радиус-вектора точки на плоскость XOY, углом φ между этой проекцией и осью OX, координатой z. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид

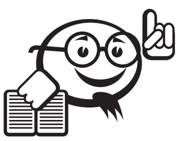
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho,\ \varphi,\ z) = \begin{pmatrix} x(\rho,\ \varphi, z) \\ y(\rho,\ \varphi, z) \\ z(\rho,\ \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Цилиндрическая система координат также ортогональна. Предлагается проверить это самим. Коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$.

3.3.4 Замена переменных в интегралах



Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, заданная в области $D \subset R^n$, $r : D_1 \to D$ — биективное (осуществляющее взаимно однозначное соответствие) дифференцируемое отображение,

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f\big((u)\big)\|r'(u)\|du,$$

где $\|r'(u)\|$ — модуль якобиана $|r'(u)|$ (определителя матрицы Якоби или, что то же самое, производной матрицы $r'(u)$).

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда взаимно однозначное дифференцируемое отображение D_1 в D можно записать в виде $r = r(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)^T$. Разобьём область D_1 на части прямыми $u = u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $v = v_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$, параллельными координатным осям. Этому разбиению соответствует разбиение области D кривыми $r = r(u_k, v) = \left(x(u_k, v), y(u_k, v)\right)^T$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $r = r(u, v_l) = \left(x(u, v_l), y(u, v_l)\right)^T$, $l = 1, 2, \ldots, m$ (рис. 3.16). При этом прямоугольник D_{1kl} с вершинами (u_k, v_l), (u_{k+1}, v_l), (u_k, v_{l+1}), (u_{k+1}, v_{l+1}) перейдёт в криволинейный четырёхугольник D_{kl}, ограниченный линиями $r(u_k, v)$, $r(u, v_l)$, $r(u_{k+1}, v)$, $r(u, v_{l+1})$ (рис. 3.17).

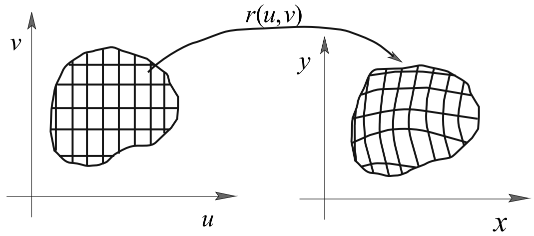


Рис. 3.16

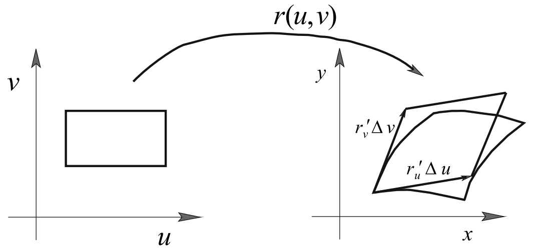


Рис. 3.17

Пусть $(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_l)$ — точка прямоугольника D_{1kl}, $\widetilde{x}_{kl} = x(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_l)$, $\widetilde{y}_{kl} = y(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_l)$. Рассмотрим интегральную сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f(\widetilde{x}_{kl}, \widetilde{y}_{kl})\, \sigma(D_{kl})$$

для вычисления интеграла от функции f по области D, в которой $\sigma(D_{kl})$ — площадь четырёхугольника D_{kl}. Из геометрического смысла производной [3] следует, что вектор $r'_u(u_k, v_l)$ является касательным к кривой $r(u, v_l)$ в точке (u_k, v_l), а вектор $r'_v(u_k, v_l)$ будет касательным вектором кривой $r(u_k, v)$ в той же точке. Далее,

$$r(u_{k+1}, v_l) - r(u_k, v_l) = r'_u(\widetilde{u}_k, v_l)\Delta u_k = r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k + \alpha_1(\Delta u_k),$$

$$r(u_k, v_{l+1}) - r(u_k, v_l) = r'_v(u_k, \widetilde{v}_l)\Delta v_l = r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l + \alpha_2(\Delta v_l),$$

где $\alpha_1(\Delta u_k)$ и $\alpha_2(\Delta v_l)$ — бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu_k и Δv_l. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, построенного на векторах $r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k = \begin{pmatrix} x'_u(u_k, v_l)\Delta u_k \\ y'_u(u_k, v_l)\Delta u_k \end{pmatrix}$, $r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l = \begin{pmatrix} x'_v(u_k, v_l)\Delta v_l \\ y'_v(u_k, v_l)\Delta v_l \end{pmatrix}$, отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u_k)^2 + (\Delta v_l)^2$. Заметим, что если $r(u, v)$ — линейное преобразование координат, то четырёхугольник D_{kl} совпадает с параллелограммом, построенным на векторах $r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k$, $r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Его площадь ΔS равна $\left|\left[r'_u(u_k, v_l), r'_v(u_k, v_l)\right]\right| \Delta u_k \Delta v_l$. Вычисляя $\left|\left[r'_u(u, v), r'_v(u, v)\right]\right|$, получаем

$$\left|\left[r'_u(u, v), r'_v(u, v)\right]\right| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \right| = \left\| \begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix} \right\| = |\det r'|.$$

Таким образом,

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f\left(x(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_l), y(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_l)\right) \left| r'(u_k, v_l) \right| \Delta u_k \Delta v_l.$$

Переходя в последней сумме к пределу при увеличении числа разбиений, получаем вывод о справедливости теоремы в случае $n = 2$. Для $n = 3$ доказательство аналогично, если заменить объём соответствующей элементарной области объёмом параллелепипеда, построенного на векторах:

$$r'_u(u, v, w)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u, v, w)\Delta u \\ y'_u(u, v, w)\Delta u \\ z'_u(u, v, w)\Delta u \end{pmatrix}, \quad r'_v(u, v, w)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u, v, w)\Delta v \\ y'_v(u, v, w)\Delta v \\ z'_v(u, v, w)\Delta v \end{pmatrix},$$

$$r'_w(u, v, w)\Delta w = \begin{pmatrix} x'_w(u, v, w)\Delta w \\ y'_w(u, v, w)\Delta w \\ z'_w(u, v, w)\Delta w \end{pmatrix},$$

который равен $\left|\left(r'_u(u, v, w), r'_v(u, v, w), r'_w(u, v, w)\right)\right| \Delta u \Delta v \Delta w$ или, что то же самое, модулю определителя матрицы Якоби (модулю якобиана) $|\det r'|$ вектор-функции, отображающей R^3 в R^3, умноженному на объём $\Delta u \Delta v \Delta w$. В общем случае требуется замена меры n-мерной элементарной области на меру n-мерного параллелепипеда, которая равна модулю определителя матрицы Якоби (модулю определителя производной матрицы), умноженному на объём элементарной области в новых переменных. Теорема доказана.

Заметим, что для ортогональной системы координат на плоскости $dS = h_u h_v \, du \, dv$, где h_u и h_v — коэффициенты Ламе. Аналогично в R^3 $dV = h_u h_v h_w \, du \, dv \, dw$.

Для полярной системы координат на плоскости матрица Якоби равна

$$r'(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ тоже равен ρ, и формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле приобретает вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Пример 3.8

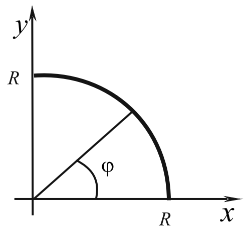


Рис. 3.18

В интеграле $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy$ перейдём к полярным координатам. Так как область интегрирования есть четверть круга радиуса R (рис. 3.18), лежащая в первом квадранте, то

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^R \rho\,d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 3.9

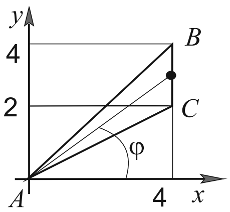


Рис. 3.19

Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 4)$, $C(4, 2)$ (рис. 3.19). В интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AB, AC и BC — $y = x$, $y = 0{,}5x$ и $x = 4$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg} 0{,}5 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. Уравнение прямой $x = 4$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi = 4$ или, что то же самое, $\rho = \dfrac{4}{\cos\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\operatorname{arctg} 0{,}5}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Пример 3.10

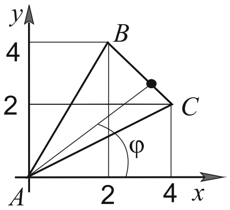


Рис. 3.20

Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 2)$ (рис. 3.20). В интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AC, AB и BC — $y = 2x$, $y = 0{,}5x$ и $x+y = 6$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg} 0{,}5 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2$. Уравнение прямой $x + y = 6$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 6$ или, что то же самое, $\rho = \dfrac{6}{\cos\varphi + \sin\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\operatorname{arctg} 0{,}5}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_0^{\frac{6}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Пример 3.11

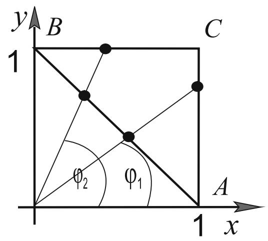


Рис. 3.21

Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(1,\,0)$, $B(0,\,1)$, $C(1,\,1)$ (рис. 3.21). В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AB, AC и BC есть $x+y=1$, $x=1$ и $y=1$ соответственно. Уравнение прямой $x+y=1$ в полярных координатах имеет вид $\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=1$, или, выражая ρ через φ, $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$, уравнение прямой $x=1$ имеет вид $\rho\cos\varphi=1$, или $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi}$, а уравнение прямой $y=1$ переписывается в виде $\rho\sin\varphi=1$ или, что то же самое, $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi}$. С учётом того, что при изменении угла φ в пределах $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ длина радиус-вектора точки, принадлежащей треугольнику ABC, меняется в разных пределах, имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}}f(\rho,\varphi)\rho\,d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}}f(\rho,\varphi)\rho.$$

Пример 3.12

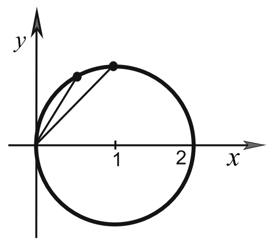


Рис. 3.22

Пусть область D — внутренность круга с центром в точке $A(1,0)$ и радиус 1 (рис. 3.22). В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнение данной окружности в декартовых координатах записывается в виде $(x-1)^2+y^2=1$ или, после преобразований, $x^2+y^2=2x$. Переходя к полярным координатам, получаем для этой окружности уравнение $\rho=2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Пример 3.13

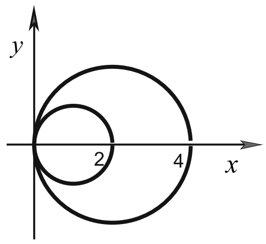


Рис. 3.23

Пусть область D задана неравенствами $x^2 + y^2 \leqslant 4x$, $x^2 + y^2 \geqslant 2x$ (рис. 3.23). Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4x$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 4\cos\varphi$, а окружности $x^2 + y^2 = 2x$ имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Для сферической системы координат матрица Якоби $r'(\rho, \varphi, \theta)$ равна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен $-\rho^2\sin\theta$, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ равен $\rho^2\sin\theta$, и формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Для цилиндрической системы координат матрица Якоби $r'(\rho, \varphi, z)$ равна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ также равен ρ, и формула перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Пример 3.14

Вычислить интеграл $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dz$, перейдя к сферической системе координат.

Область интегрирования есть верхняя половина шара с центром в начале координат и радиуса R. Поэтому $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Далее, $x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\theta$. Следовательно,

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dz = \int\limits_{0}^{R} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^2\sin^2\theta\right)\rho^2\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int\limits_{0}^{R} \rho^4\, d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{15}R^5.$$

Пример 3.15

Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a} dz$, перейдя к цилиндрической системе координат.

Область интегрирования есть половина кругового цилиндра радиуса 1, лежащая в полупространстве $x \geqslant 0$. Поэтому $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$. Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a} dz = \int\limits_{0}^{1} d\rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a} \rho\, dz = \frac{a\pi}{2}.$$

3.4 Приложения кратных интегралов

3.4.1 Вычисление площадей плоских фигур

Из определения двойного интеграла следует, что площадь $S(D)$ плоской области D выражается формулой $S(D) = \iint\limits_{D} dx\, dy$. Если область D есть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $y = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и для $\forall x \in [a, b]$ $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, то

$$S(D) = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int\limits_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)\,dx$$

— формула площади области D, полученная нами в п. 2.6.1.

Пример 3.16

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$. Имеем $S = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{5x} dy = \int\limits_0^1 (5x - x)\,dx = \left.\dfrac{4x^2}{2}\right|_0^1 = 2$.

3.4.2 Вычисление объёмов тел

Из определения тройного интеграла следует, что объём $V(G)$ пространственной области G выражается формулой $V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz$.

Если G — цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, такими, что $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$ для $\forall (x, y) \in D$, то

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D \big(z_2(x, y) - z_1(x, y)\big)\,dx\,dy.$$

Пример 3.17

Найти объём области, ограниченной поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 3$, $z = x^2 + y^2 + 1$. Данная область является цилиндром, проекция которого на плоскость XOY есть прямоугольник с границей $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 3$ одновременно являющейся направляющей цилиндра. Сверху и снизу цилиндр ограничен поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 1$. Поэтому

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{x^2+y^2+1} dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 \left(x^2 + y^2 + 1\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \left.\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\right|_0^3 dx = \int\limits_0^4 (3x^2 + 12)\,dx = \left.\left(x^3 + 12x\right)\right|_0^4 = 112.$$

3.4.3 Вычисление площади поверхности

Пусть поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$ $(u, v) \in D$, или в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

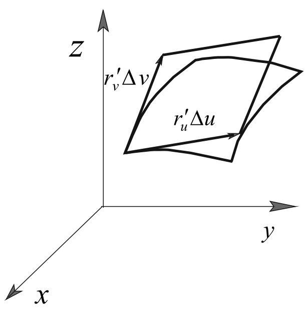


Рис. 3.24

Рассмотрим кусок поверхности, ограниченный линиями $r = r(u, v_0)$, $r = r(u_0, v)$, $r = r(u, v_0 + \Delta v)$, $r = r(u_0 + \Delta u, v)$ (рис. 3.24). Из геометрического смысла производной [3] следует, что вектор $r'_u(u_0, v_0)$ является касательным к кривой $r(u, v_0)$ в точке (u_0, v_0), а вектор $r'_v(u_0, v_0)$ будет касательным вектором кривой $r(u_0, v)$ в той же точке. Далее, $r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) = r'_u(\widetilde{u}_0, v_0)\Delta u = r'_u(u_0, v_0)\Delta u + \alpha_1(\Delta u)$, $r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0) = r'_v(u_0, \widetilde{v}_0)\Delta v = r'_v(u_0, v_0)\Delta v + \alpha_2(\Delta v)$, где $\alpha_1(\Delta u)$ и $\alpha_2(\Delta v)$ — бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu и Δv. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, лежащего в касательной плоскости и построенного на векторах $r'_u(u, v)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u, v)\Delta u \\ y'_u(u, v)\Delta u \\ z'_u(u, v)\Delta u \end{pmatrix}$ и $r'_v(u, v)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u, v)\Delta v \\ y'_v(u, v)\Delta v \\ z'_v(u, v)\Delta v \end{pmatrix}$, отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Площадь ΔS этого параллелограмма равна $\left|\left[r'_u(u, v), r'_v(u, v)\right]\right|\Delta u\Delta v$. Проводя построения, аналогичные построениям в определении двойного интеграла, получаем, что площадь поверхности равна

$$S = \iint\limits_D \left|\left[r'_u(u, v), r'_v(u, v)\right]\right| du\, dv.$$

Пусть поверхность задана явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Всякую такую поверхность можно задать параметрически (взяв в качестве параметров x, y) или в векторной форме уравнением $r = r(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_x(x, y) = \mathbf{i} + f'_x(x, y)\mathbf{k}, \quad r'_y(x, y) = \mathbf{j} + f'_y(x, y)\mathbf{k},$$

$$\left[r'_x(x, y), r'_y(x, y)\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x, y) \\ 0 & 1 & f'_y(x, y) \end{vmatrix} = -f'_x(x, y)\mathbf{i} - f'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Поэтому $\left|\left[r'_x(x, y), r'_y(x, y)\right]\right| = \sqrt{1 + \left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}$, и площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}\, dx\, dy.$$

Пример 3.18

Вычислить площадь поверхности $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, если область D задаётся неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то, подставляя в формулу площади поверхности, имеем $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$. Переходя к полярным координатам, получаем $S =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}\left(1 + 4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 \right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(65)^{\frac{3}{2}} - 1}{12}\,d\varphi = \pi\frac{65\sqrt{65} - 1}{6}.$$

Пример 3.19

Вычислить площадь поверхности сферы.

Параметрическое уравнение сферы радиуса R можно записать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ или, что то же самое, в векторной форме $r = (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (R\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ 0)^T, \quad r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\theta)^T.$$

Поэтому

$$[r'_\varphi, r'_\theta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j} - R^2\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}.$$

Вычисляя модуль этого вектора, получаем $\left|[r'_\varphi, r'_\theta]\right| = R^2\sin\theta$. Поэтому $S =$

$$= \iint\limits_D \left|\left[r'_\varphi(\varphi, \theta),\ r'_\theta(\varphi, \theta)\right]\right| d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} R^2\sin\theta\,d\theta = 4\pi R^2.$$

Контрольные вопросы по главе 3

1) Каков геометрический смысл двойного интеграла?
2) Каков геометрический смысл тройного интеграла?
3) Что такое полярная система координат?
4) Что такое сферическая и цилиндрическая системы координат?

Глава 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

4.1 Кривые на плоскости и в пространстве

Рассмотрим вектор-функцию одного аргумента

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — векторы декартова базиса. В случае плоскости эта запись приобретает вид $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$ и начала всех векторов $r(t)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую кривую, называемую годографом вектор-функции $r(t)$, а вектор-функцию $r(t)$ называют векторным представлением этой кривой. Эта функция широко используется в физике для описания движения материальной точки M, так как, чтобы знать положение точки в момент времени t, необходимо указать координаты этой точки как функции времени, т. е. задать ее в виде $M\big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Например, функция

$$r(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

определяет движение точки по винтовой линии, а функция

$$r(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$

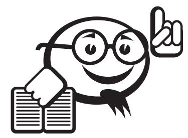
— движение точки по окружности. Зафиксировав момент времени $t = t_0$, мы найдем положение точки в этот момент.

Кривую $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ назовем гладкой на $[\alpha, \beta]$, если существует $r'(t)$ и $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Непрерывную кривую назовем кусочно-гладкой на $[\alpha, \beta]$, если отрезок $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых кривая гладкая.

Кривую будем обозначать одной из букв Г, γ, L. Будем говорить, что кривая замкнута, если $r(\alpha) = r(\beta)$. Если существуют значения $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ параметра, такие, что $r(t_1) = r(t_2)$, то кривая имеет самопересечения, если таких значений t_1, t_2 нет, то кривая без самопересечений.

Будем говорить, что кривая ориентирована, если задан порядок следования точек по этой кривой при возрастании параметра от α к β. Ориентацию кривой можно сменить, введя новый параметр, например по формуле $\tau = \beta + \alpha - t$. Замкнутую кривую на плоскости ориентируют обычно так, чтобы при обходе кривой против часовой стрелки область, ограничиваемая этой кривой, оставалась слева.

Для гладкой кривой ориентация определяется естественным образом выбором единичного направляющего вектора касательной, так как в этом случае имеет место следующий результат.



В каждой точке гладкой кривой существует касательная. Производная $r'(t)$ направлена по этой касательной в сторону возрастания параметра.

Доказательство можно найти в [2–4].

4.2 Поверхности в пространстве

Рассмотрим вектор-функцию двух аргументов

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)^T = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — векторы декартова базиса. Если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны и начала всех векторов $r(u, v)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую поверхность, называемую годографом вектор-функции $r(u, v)$, а вектор-функцию $r(u, v)$ называют векторным представлением этой поверхности. Поверхность будем обозначать одной из букв S, σ.

Поверхность назовем гладкой, если существуют непрерывные производные r'_u, r'_v и $[r'_u, r'_v] \neq 0$. Непрерывную поверхность назовём кусочно-гладкой, если её можно разбить на конечное число поверхностей, каждая из которых гладкая.

Фиксируя v, получаем кривую $r(u, v_0)$, и вектор r'_u направлен по касательной к этой кривой. Аналогично r'_v направлен по касательной к кривой $r(u_0, v)$ при фиксированном u. Поэтому r'_u и r'_v лежат в касательной плоскости к $r(u, v)$ (если она существует). Тогда $n = \pm[r'_u, r'_v]$ — вектор нормали к поверхности $r(u, v)$. Фиксируя направление нормали $\pm n$, фиксируем ориентацию поверхности.

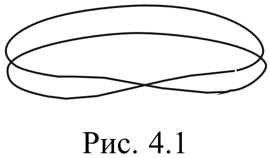


Рис. 4.1

Назовём поверхность двухсторонней, если нельзя перейти по поверхности непрерывным образом из точки в ту же точку, но с противоположным направлением нормали. В противном случае поверхность назовем односторонней. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса (рис. 4.1). Модель листа Мёбиуса можно получить, если склеить полоску бумаги, предварительно повернув одну из коротких сторон на 180°. Мы будем иметь дело с двухсторонними поверхностями.

4.3 Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

Кривую или поверхность будем называть многообразием.

Пусть задано непрерывное кусочно-гладкое многообразие σ *и на* σ — *функция* $F(x, y, z)$. *Разобьем* σ *на части многообразиями меньшей размерности (кривую — точками, поверхность — кривыми) и внутри каждого полученного элементарного многообразия выберем по точке* $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$. *Посчитаем значения функции в этих точках, умножим эти значения на меру данного элементарного многообразия (длину или площадь соответствующего участка многообразия) и просуммируем. Предел полученных сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения многообразия на части и выбора точек внутри каждого элементарного многообразия, при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется* ***интегралом по многообразию (криволинейным интегралом****, если* σ — *кривая, и поверхностным, если* σ — *поверхность)* ***первого рода*** *и обозначается в общем случае* $\int\limits_{\sigma} F(x, y, z)\, d\sigma$, *в случаях криволинейного и поверхностного интегралов* $\int\limits_{L} F(x, y, z)\, dl$, $\iint\limits_{S} F(x, y, z)\, dS$ *соответственно.*

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt$, и поэтому криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{L} F(x, y, z)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt.$$

В случае плоской кривой

$$r(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\left(x(t),\,y(t)\right)^T=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}\ \left(t\in[\alpha,\,\beta]\right)$$

эта формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y,z)\,dl=\int\limits_\alpha^\beta F\left(x(t),\,y(t)\right)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Пусть плоская кривая задана явно уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,\,b]$. Всякую такую кривую можно считать заданной параметрически $\begin{cases}x=x,\\ y=f(x),\end{cases}$ взяв в качестве параметра x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_L F(x,y,z)\,dl=\int\limits_a^b F\left(x,f(x)\right)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Для поверхности, заданной параметрически $\begin{cases}x=x(u,\,v),\\ y=y(u,\,v),\\ z=z(u,\,v),\end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r(u,\,v)=\begin{pmatrix}x(u,\,v)\\ y(u,\,v)\\ z(u,\,v)\end{pmatrix}=\left(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v)\right)^T=x(u,\,v)\mathbf{i}+$ $+\,y(u,\,v)\mathbf{j}+z(u,\,v)\mathbf{k}$, $(u,\,v)\in D$, $dS=\left|[r_u',\,r_v']\right|du\,dv$, и поэтому поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D F\left(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v)\right)\left|[r_u',\,r_v']\right|du\,dv.$$

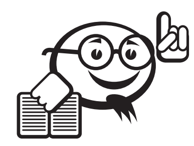
Если поверхность задана явно уравнением $z=\varphi(x,\,y)$, то

$$dS=\sqrt{1+\left(\varphi_x'(x,\,y)\right)^2+\left(\varphi_y'(x,\,y)\right)^2}\,dx\,dy,$$

и последняя формула приобретает вид

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D F\left(x,\,y,\,\varphi(x,\,y)\right)\sqrt{1+(\varphi_x')^2+\left(\varphi_y'\right)^2}\,dx\,dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XOY.



Величина криволинейного (поверхностного) интеграла первого рода не изменяется при изменении ориентации кривой (поверхности), то есть

$$\int\limits_\sigma F(x,y,z)\,d\sigma=\int\limits_{\sigma^-} F(x,y,z)\,d\sigma.$$

Доказательство. Докажем теорему для криволинейного интеграла и кривой, заданной параметрически. Введем новый параметр τ по формуле $t = t(\tau) = b + a - \tau$. Тогда

$$r(t) = r(b + a - \tau) = x(b + a - \tau)\mathbf{i} + y(b + a - \tau)\mathbf{j} + z(b + a - \tau)\mathbf{k}.$$

Заметим, что когда τ движется от a к b, то t движется от b к a и наоборот. При этом $dt = -d\tau$, и кривая обходится в противоположном направлении. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma^-} F(x, y, z)\, dl = \int\limits_a^b F\Big(x\big(t(\tau)\big), y\big(t(\tau)\big), z\big(t(\tau)\big)\Big)\Big\|r'\big(t(\tau)\big)\Big\| d\tau =$$

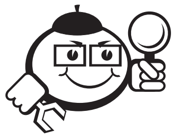
$$= -\int\limits_b^a F\big(x(t), y(t), z(t)\big)\big\|r'(t)\big\|\, dt = \int\limits_\gamma F(x, y, z)\, dl,$$

где

$$\Big\|r'\big(t(\tau)\big)\Big\| = \sqrt{\Big(x'\big(t(\tau)\big)\Big)^2 + \Big(y'\big(t(\tau)\big)\Big)^2 + \Big(z'\big(t(\tau)\big)\Big)^2},$$

$$\big\|r'(t)\big\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}$$

— норма (длина) векторов $r'\big(t(\tau)\big)$ и $r'(t)$ соответственно. Теорема доказана.



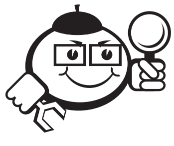
Пример 4.1

Вычислить $\int\limits_\gamma y\, dl$, где а) γ — парабола $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) γ — прямая, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

а) $\int\limits_\gamma y\, dl = \int\limits_0^1 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \Big(\big(2\sqrt{x}\big)'\Big)^2}\, dx = \int\limits_0^1 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\, dx = \int\limits_0^1 2\sqrt{x+1}\, dx =$

$= \dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{4}{3}\big(2\sqrt{2} - 1\big).$

б) $\int\limits_\gamma y\, dl = \int\limits_0^1 x\sqrt{1 + (1)^2}\, dx = \sqrt{2}\,\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$



Пример 4.2

Вычислить $\int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$ вдоль кривой $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \end{cases}$ если $t \in [0, \pi]$.

Имеем

$$\int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, dl = \int\limits_0^\pi a\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^\pi a^2\, dt = a^2\pi.$$

Пример 4.3

Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$, если поверхность S есть часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

Эта поверхность задаётся явно уравнением $z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$. Тогда $z'_x = -2$, $z'_y = -\frac{4}{3}$, $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}$. Проекция поверхности на плоскость XOY есть треугольник D, ограниченный кривыми $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Поэтому

$$\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS = \iint\limits_D \left(4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3} dx\, dy =$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} dy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = 4\sqrt{61}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 4\sqrt{61}.$$

4.4 Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода

4.4.1 Определение

Рассмотрим многообразие σ. Пусть $\tau(x, y, z)$ — единичный вектор касательной к σ в точке (x, y, z), если σ — кривая, а $n(x, y, z)$ — единичный вектор нормали к σ в точке (x, y, z), если σ — поверхность в R^3. Рассмотрим элементарный участок σ и выберем точку на нём. Введём векторы $\overline{dl} = \tau\, dl$ и $\overline{dS} = n\, dS$, где dl и dS — длина и площадь соответствующего участка кривой или поверхности, а τ и n вычислены в выбранной точке. Будем считать, что $\overline{d\sigma} = \overline{dl}$, если σ — кривая, и $\overline{d\sigma} = \overline{dS}$, если σ — поверхность. Назовём $\overline{d\sigma}$ ориентированной мерой соответствующего участка кривой или поверхности.

Пусть заданы ориентированное непрерывное кусочно-гладкое многообразие σ *и на* σ *— вектор-функция* $F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. *Разобьем многообразие на части многообразиями меньшей размерности (кривую — точками, поверхность — кривыми), внутри каждого полученного элементарного многообразия выберем по точке* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$. *Посчитаем значения* $F(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *век-*

тор-функции в этих точках, умножим скалярно эти значения на ориентированную меру $\overline{d\sigma_i}$ данного элементарного многообразия (ориентированные длину или площадь соответствующего участка многообразия) и просуммируем. Предел полученных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(F(x_i, y_i, z_i), \overline{d\sigma_i}\right)$, если он существует, не зависит от способа разбиения многообразия на части и выбора точек внутри каждого элементарного многообразия, при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется ***интегралом по многообразию (криволинейным интегралом****, если* σ *— кривая, и поверхностным, если* σ *— поверхность)* ***второго рода****,* ***интегралом вдоль ориентированного многообразия****, или* ***интегралом от вектора*** F ***вдоль*** σ*, и обозначается в общем случае* $\int\limits_{\sigma}\left(F(x, y, z), \overline{d\sigma}\right)$*, в случаях криволинейного и поверхностного интегралов* $\int\limits_{L}\left(F(x, y, z), \overline{dl}\right)$*,* $\iint\limits_{S}\left(F(x, y, z), \overline{dS}\right)$ *соответственно.*

. . . .

. . . .

Другой вариант введения криволинейных и поверхностных интегралов второго рода можно найти в [7, 9, 10].

. . . .

4.4.2 Физический смысл

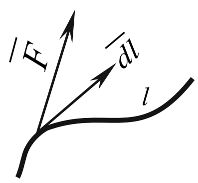


Рис. 4.2

Пусть $\overline{F}(x, y, z)$ — сила, действующая на материальную точку, движущуюся под действием этой силы по кривой l (рис. 4.2). Тогда $\left(\overline{F}, \overline{dl}\right)$ — работа, затраченная на перемещение точки по кривой на участке dl. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\int\limits_{\gamma}\left(\overline{F}(x, y, z), \overline{dl}\right)$ — работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой.

. . . .

Если кривая L замкнута, то работа по перемещению точки вдоль L называется циркуляцией.

. . . .

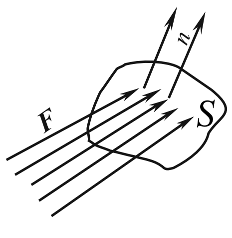


Рис. 4.3

Пусть теперь $F(x, y, z)$ — стационарное (не зависящее от времени) поле скоростей текущей жидкости, S — поверхность, через которую течёт эта жидкость (рис. 4.3). Тогда $\left(F, \overline{dS}\right)$ — объём жидкости, протекающей через dS в единицу времени. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\iint\limits_{S}\left(F(x, y, z), \overline{dS}\right)$ — количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени (поток вектора через поверхность).

4.4.3 Вычисление и свойства

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Тогда вектор касательной приобретает вид $r'(t) = (x'_t, y'_t, z'_t)$, а единичный вектор касательной $\tau = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ равен

$$\left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}\right)^T.$$

Так как $dl = \|r'(t)\|\, dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt$, то

$$\overline{dl} = \tau\, dl = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\|r'(t)\|\, dt = r'(t)\, dt = (x'_t\, dt, y'\, dt, z'_t\, dt)^T,$$

и для криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int\limits_\gamma \big(F(x, y, z), \overline{dl}\big) =$$

$$= \int\limits_\gamma \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big)\, dt =$$

$$= \int\limits_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

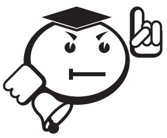
В случае плоской кривой $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t)\big)^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ получим

$$\int\limits_\gamma \big(F(x, y, z), \overline{dl}\big) = \int\limits_\gamma \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)\, dt =$$

$$= \int\limits_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то её можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра переменную x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_{\gamma} \left(F(x, y, z), \overline{dl}\right) = \int\limits_{a}^{b} P\big(x, f(x)\big)\,dx + Q\big(x, f(x)\big)f'(x)\,dx.$$



Заметим, что все формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода получены при соглашении, что направлением обхода кривой считается направление, задаваемое вектором касательной $r'(t)$, если кривая задана параметрически или векторно, и вектором касательной $\left(1, f'(x)\right)^T$, если кривая задана явно. Если по каким-либо соображениям обходить кривую необходимо в обратном направлении, то все знаки в формулах нужно поменять на противоположные.

Если поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D,$$

то при задании стороны поверхности с помощью вектора нормали $[r'_u, r'_v]$ единичный вектор нормали равен $n = \dfrac{[r'_u, r'_v]}{\left\|[r'_u, r'_v]\right\|}$ и так как $dS = \left\|[r'_u, r'_v]\right\|\,du\,dv$, то

$$\overline{dS} = n\,dS = [r'_u, r'_v]\,du\,dv =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv = \left(\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) du\,dv =$$

$$= \left(\left| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' \right| \mathbf{i} - \left| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' \right| \mathbf{j} + \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \right| \mathbf{k} \right) du\,dv,$$

где $\left| \begin{pmatrix} y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}' \right| = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$, $\left| \begin{pmatrix} x(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}' \right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$, $\left| \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}' \right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ — якобианы (определители матриц Якоби, или, что то же самое, матриц производных) [2–4] вектор-функций $\begin{pmatrix} y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ соответственно. Тогда для вычисления поверхностного интеграла второго рода получаем формулу:

$$\iint\limits_S \left(F(x, y, z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \left(P\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \left| \begin{pmatrix} y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}' \right| - \right.$$

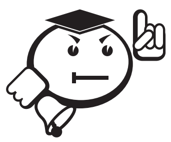
$$- Q\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \left| \begin{pmatrix} x(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}' \right| +$$

$$\left. + R\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \left| \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}' \right| \right) du\, dv.$$

Пусть поверхность S задана явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$. Тогда, если в качестве параметров взять x, y, её можно считать заданной в векторной форме $r(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x, y)\mathbf{k}$, $(x, y) \in D$, или, что то же самое, параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = \varphi(x, y). \end{cases}$ Тогда $r'_x = \big(1, 0, \varphi'_x(x, y)\big)^T$, $r'_y = \big(0, 1, \varphi'_y(x, y)\big)^T$, $[r'_x, r'_y] = -\varphi'_x(x, y)\mathbf{i} - \varphi'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, и поверхностный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_S \left(F(x, y, z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \big(-P(x, y, \varphi)\varphi'_x - Q(x, y, \varphi)\varphi'_y + R(x, y, \varphi)\big)\, dx\, dy,$$

в которой $\varphi = \varphi(x, y)$, $\varphi'_x = \varphi'_x(x, y)$, $\varphi'_y = \varphi'_y(x, y)$, а D есть проекция поверхности S на плоскость XOY. Получить аналогичные формулы в случае, когда поверхность задана явно одним из уравнений $y = \varphi(x, z)$ или $x = \varphi(y, z)$, предлагается читателю.



Напомним, что мы получили формулы для вычисления поверхностного интеграла второго рода при ориентации поверхности с помощью вектора нормали $n = [r'_u, r'_v]$. При необходимости выбора другой стороны поверхности все знаки в формулах поменяются на противоположные.

Рассмотрим теперь более подробно интегральную сумму, используемую в определении поверхностного интеграла второго рода. Для удобства записи введём обозначения $P_l = P(x_l, y_l, z_l)$, $Q_l = Q(x_l, y_l, z_l)$, $R_l = R(x_l, y_l, z_l)$. Имеем

$$\sum_{l=1}^{n} \left(F(x_l, y_l, z_l), \overline{dS_l}\right) = \sum_{l=1}^{n} \left((P_l, Q_l, R_l), \overline{dS_l}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \big((P_l, Q_l, R_l), n(x_l, y_l, z_l)\big)\, dS_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (P_l \cos\alpha_l\, dS_l + Q_l \cos\beta_l\, dS_l + R_l \cos\gamma_l\, dS_l),$$

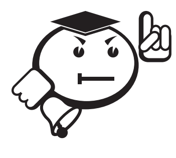
где $\cos\alpha_l$, $\cos\beta_l$, $\cos\gamma_l$ — направляющие косинусы (координаты) единичного вектора нормали $n(x_l, y_l, z_l)$, dS_l — площадь элементарного участка S_l поверхности S. Рассмотрим проекцию элементарного участка S_l поверхности на одну из координатных плоскостей, например на плоскость XOY. Площадь ΔD_{3l} этой проекции равна $\Delta D_{3l} = \pm dS_l \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью XOY и касательной плоскостью к поверхности в точке (x_l, y_l, z_l). Знак плюс берётся, если этот угол острый, и минус, если этот угол тупой. По определению угла между плоскостями этот угол совпадает с углом между нормальными векторами этих плоскостей, то есть с углом γ_l между векторами $n(x_l, y_l, z_l)$ и $\mathbf{k}$. Таким образом, $dS_l \cos\gamma_l = \pm\Delta D_{3l}$. Обозначив через ΔD_{1l} площадь проекции S_l на плоскость YOZ, а через ΔD_{2l} площадь проекции S_l на плоскость XOZ, можно аналогично показать, что $dS_l \cos\alpha_l = \pm\Delta D_{1l}$, $dS_l \cos\beta_l = \pm\Delta D_{2l}$. Поэтому $\sum\limits_{l=1}^{n}\left(F(x_l, y_l, z_l), \overline{dS_l}\right) = \sum\limits_{l=1}^{n}(\pm P_l\Delta D_{1l} \pm Q_l\Delta D_{2l} \pm R_l\Delta D_{3l})$. Последнее даёт право записать поверхностный интеграл второго рода в стандартном виде:

$$\iint\limits_S \left(F(x, y, z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_S \left(F(x, y, z), n_0\right) dS =$$
$$= \iint\limits_S P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

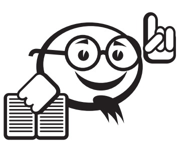
а если поверхность S может быть задана одновременно уравнениями $x = \varphi_1(y, z)$, $y = \varphi_2(x, z)$, $z = \varphi_3(x, y)$, то вычислять поверхностный интеграл второго рода по формуле:

$$\iint\limits_S \left(F(x, y, z), \overline{dS}\right) = \pm\iint\limits_{D_1} P\left(\varphi_1(y, z), y, z\right) dy\, dz \pm$$
$$\pm\iint\limits_{D_2} Q\left(x, \varphi_2(x, z), z\right) dx\, dz \pm \iint\limits_{D_3} R\left(x, y, \varphi_3(x, y)\right) dx\, dy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции поверхности S на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY соответственно и знак «+» берётся, если угол между вектором нормали и осью, вдоль которой ведётся проектирование, острый, а знак «−», если этот угол тупой.



Заметим, что для криволинейного и поверхностного интегралов имеют место общие для всех интегралов свойства. Отметим некоторые из них в формулировках, отражающих специфику этих интегралов.



Теорема 1. Криволинейный и поверхностный интегралы 2-го рода зависят от ориентации кривой и поверхности, точнее,

$$\int\limits_{\sigma} \left(F(x, y, z), \overline{d\sigma}\right) = -\int\limits_{\sigma^-} \left(F(x, y, z), \overline{d\sigma}\right).$$

Доказательство опустим.

Замечание. Если в качестве ориентированной кривой взять отрезок $[a, b]$ оси OX с направлением обхода от a к b, то определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода по этой кривой, а теорему 1 считать обобщением свойства 1 определённого интеграла на случай ориентированного многообразия.

Теорема 2. Пусть $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ и размерность пересечения $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = n - 1$. Тогда

$$\int\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \left(F, \overline{d\sigma}\right) = \int\limits_{\sigma_1} \left(F, \overline{d\sigma}\right) + \int\limits_{\sigma_2} \left(F, \overline{d\sigma}\right).$$

Доказательство. Включив в число многообразий разбиения в определении интеграла по многообразию второго рода общую границу σ_1 с σ_2, получаем требуемое.

Теорема 3 (о среднем для криволинейного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то существует точка (x_0, y_0, z_0) на кривой γ, такая, что для криволинейного интеграла второго рода выполнено соотношение

$$\int\limits_{\gamma} \left(f, \overline{dl}\right) = \left(f(x_0, y_0, z_0), \tau(x_0, y_0, z_0)\right)\cdot L,$$

где L — длина кривой γ.

Доказательство опустим.

Теорема 4 (о среднем для поверхностного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на гладкой поверхности σ, то существует точка (x_0, y_0, z_0) поверхности σ, такая, что для поверхностного интеграла второго рода выполнено равенство

$$\int\limits_{\sigma} \left(f, \overline{dS}\right) = \left(f(x_0, y_0, z_0),\, n(x_0, y_0, z_0)\right)\cdot S,$$

где S — площадь поверхности σ.

Доказательство опустим.

Пример 4.4

Вычислить $\int\limits_{\gamma} y^2\,dx + x^2\,dy$ вдоль кривой $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ если $t \in [0, \pi]$, в направлении увеличения параметра.

Имеем

$$\int\limits_{\gamma} y^2\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^{\pi} \left(b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t(b\cos t)\right) dt = -\frac{4}{3}ab^2.$$

Пример 4.5

Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x, y, z) = \left(x^3, xy, (x+z)\right)^T = x^3\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ в направлении увеличения параметра.

Работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_L x^3\,dx + xy\,dy + (x+z)\,dz$. Так как кривая задана параметрически и $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$, $dz = dt$, то

$$\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^3 t(-\sin t) + \cos^2 t\sin t + (\cos t + t)\right) dt =$$

$$= \left(\frac{\cos^4 t}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} + \sin t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

Пример 4.6

Вычислить поток вектора $f(x, y, z) = (yz, xyz, xy)^T$ через часть плоскости $x + y + z = a$, лежащую в первом октанте в направлении вектора $(1, 1, 1)$.

Поток вектора через поверхность равен поверхностному интегралу второго рода $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + xyz\,dx\,dz + xy\,dx\,dy$. Поверхность однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Поэтому интеграл может быть вычислен с помощью проектирования на них. Тогда

$$\iint\limits_S yz\,dy\,dz + xyz\,dx\,dz + xy\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} yz\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} xyz\,dx\,dz + \iint\limits_{D_3} xy\,dx\,dy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции поверхности S на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY соответственно. Знаки плюс перед интегралами взяты потому, что вектор нормали к поверхности составляет острые углы со всеми координатными осями. Посчитаем первый интеграл. Имеем $\iint\limits_{D_1} yz\,dy\,dz = \int\limits_0^a y\,dy \int\limits_0^{a-y} z\,dz = \int\limits_0^a y\,dy \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{a-y} =$ $= \frac{1}{2}\int\limits_0^a y(a-y)^2\,dy = \frac{a^4}{24}$. Третий интеграл считается аналогично и также равен $\frac{a^4}{24}$.

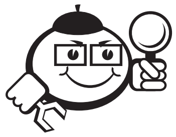
Для второго интеграла имеем:

$$\iint\limits_{D_2} xyz\,dx\,dz = \iint\limits_{D_2} x(a-x-z)z\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-z)z\,dz = \int\limits_0^a x\,dx \left(\frac{1}{2}(a-x)z^2 - \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{a-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^a (a-x)^3 x\,dx = \frac{(a-x)^4 x}{24}\Big|_0^a - \frac{(a-x)^5}{120}\Big|_0^a = \frac{a^5}{120}.$$

Поэтому поток вектора через поверхность равен $\frac{a^4}{12} + \frac{a^5}{120}$.



Пример 4.7

Вычислить поток вектора $f(x, y, z) = (x + y, y, z)^T$ через верхнюю половину сферы радиуса R в сторону внешней нормали.

Параметрическое уравнение верхней половины сферы радиуса R можно написать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, или, что то же самое, в векторной форме $r = (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (R\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ 0)^T, \quad r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\theta)^T.$$

Поэтому

$$[r'_\varphi, r'_\theta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j} - R^2\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}.$$

Этот вектор образует с осью OZ тупой угол, поэтому в качестве вектора нормали берём вектор $-[r'_\varphi, r'_\theta]$. Подставляя выражения x, y, z в функцию f и вычисляя скалярное произведение $\left(f, -[r'_\varphi, r'_\theta]\right)$, получаем $\left(f, -[r'_\varphi, r'_\theta]\right) = R^3\big((1 + 0{,}5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\big)$.

Поэтому поток вектора через поверхность равен:

$$\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\left((1 + 0{,}5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta =$$

$$= R^3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1 + 0{,}5\sin 2\varphi)(1 - \cos^2\theta)\sin\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta =$$

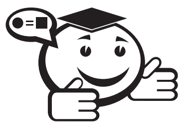
$$= R^3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left((1 + 0{,}5\sin 2\varphi)\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right) - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^3.$$

. . . .

4.5 Элементы теории поля

Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода находят важные применения в теории поля. К её изложению мы и приступаем.

. . . .



Говорят, что ***в области*** $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$ ***задано векторное поле****, если задана вектор-функция* $f : G \subset R^3 \to R^3$ $(f : G \subset R^3 \to R^2$, $f : D \subset R^2 \to R^2$, $f : D \subset R^2 \to R^3)$*, то есть функция вида*

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\left(f(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j}, \right.$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

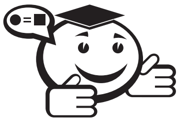
$$\left. f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \\ R(x, y) \end{pmatrix} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} + R(x, y)\mathbf{k} \right)$$

с областью определения $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$*. Аналогично говорят, что* ***в области*** $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$ ***задано скалярное поле****, если задана скалярнозначная функция* $f : G \subset R^3 \to R$ $(f : D \subset R^2 \to R)$ *с областью определения* $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$.

. . . .

Если областью определения и областью значений векторного поля являются множества точек на плоскости, то поле называют плоским. Векторное поле можно интерпретировать как множество точек, к каждой из которых присоединён вектор. Примерами векторных полей являются: поле скоростей текущей жидкости, электрическое поле точечного заряда, магнитное поле, плотность электрического тока.

Напомним введённые ранее понятия, имеющие отношение к векторным и скалярным полям.



Вектор

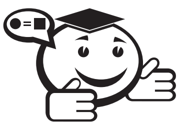
$$\operatorname{grad} U = (U')T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)^T$$

называется ***градиентом скалярной функции (скалярного поля)***.

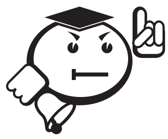
Скаляр

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{a}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

называется ***производной по направлению вектора*** $\overline{a}$ ***от скалярной функции векторного аргумента***.

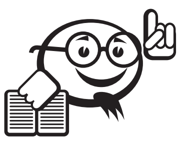


Векторное поле или вектор-функцию назовём ***потенциальным****, если существует скалярная функция (скалярное поле)* $U(x, y, z)$*, такая, что* $\operatorname{grad} U = (U')^T = f(x, y, z) = (P, Q, R)^T$. *Функцию* U *назовём при этом* ***потенциалом поля*** f.



Заметим, что если U — потенциал поля f, то $U + C$ тоже потенциал этого поля.

Критерием потенциальности поля служит следующий результат.



Векторное поле $f(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \left(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\right)^T$ является потенциальным в области $\Omega \subset R^3$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L, полностью лежащему в Ω, равен нулю $\left(\int_L (f, \overline{dl}) = 0 \text{ для } \forall L \subset \Omega\right)$, или, что то же самое, циркуляция поля по любому замкнутому пути равна нулю;

2) если A_1, A_2 — любые две точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ — две произвольные кривые, их соединяющие, то $\int\limits_{L_1} \left(f, \overline{dl}\right) =$ $= \int\limits_{L_2} \left(f, \overline{dl}\right)$, то есть криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования.

Если поле потенциально и $U(x,y,z)$ — его потенциал, то

$$\int\limits_{L} \left(f, \overline{dl}\right) = U(A_2) - U(A_1).$$

. . . .

Доказательство. Покажем вначале, что условия 1 и 2 эквивалентны. Пусть выполнено условие 1, A_1, A_2 — две произвольные точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ — две кривые, соединяющие A_1 и A_2. Рассмотрим замкнутый контур $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда

$$0 = \int\limits_{L} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{L_1^+} \left(f, \overline{dl}\right) + \int\limits_{L_2^-} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{L_1^+} \left(f, \overline{dl}\right) - \int\limits_{L_2^+} \left(f, \overline{dl}\right),$$

откуда и следует требуемое. Пусть теперь выполнено условие 2, L — произвольный замкнутый контур, лежащий в Ω и A_1, A_2 — две произвольные точки, лежащие на контуре L. Точками A_1, A_2 контур L разбивается на два контура $L_1, L_2 \subset \Omega$ так, что $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем

$$0 = \int\limits_{L_1^+} \left(f, \overline{dl}\right) - \int\limits_{L_2^+} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{L_1^+} \left(f, \overline{dl}\right) + \int\limits_{L_2^-} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{L} \left(f, \overline{dl}\right).$$

Перейдём к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть поле потенциально, то есть существует скалярная функция U, такая, что $\operatorname{grad} U = (U')^T = (P, Q, R)^T$, A_1, A_2 — произвольные точки из Ω и $L \subset \Omega$ — произвольный путь, соединяющий A_1, A_2. Пусть кривая L задана параметрически так, что значению параметра t_1 соответствует точка A_1, а значению параметра t_2 соответствует точка A_2. Так как $(U')^T = (U'_x, U'_y, U'_z)^T = (P, Q, R)^T$, то

$$\int\limits_{L} \left(f(x, y, z), \overline{dl}\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt.$$

Подынтегральная функция есть производная $\dfrac{dU}{dt}$ сложной функции $U\big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Поэтому последний интеграл равен

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_2) - U(t_1) = U(A_2) - U(A_1).$$

Мы получили, что интеграл зависит от конечных точек и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Необходимость доказана.

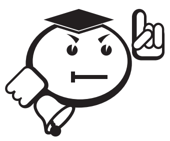
Достаточность. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, $A(x, y, z)$ — произвольная точка из Ω, A_0 — фиксированная точка из Ω. Покажем, что функция $U(x, y, z) = \int\limits_{A_0}^{A} \left(f(x, y, z), \overline{dl}\right)$ есть потенциал поля $f(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Для этого достаточно показать, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y, z)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z)$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z)$. Возьмём точку $A_1(x + \Delta x, y, z)$. Тогда $U(x + \Delta x, y, z) = \int\limits_{A_0}^{A_1} \left(f(x, y, z), \overline{dl}\right)$. В силу независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования последний интеграл равен

$$\int\limits_{A_0}^{A} \left(f(x, y, z), \overline{dl}\right) + \int\limits_{A}^{A_1} \left(f(x, y, z), \overline{dl}\right) = U(x, y, z) + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y, z)\, dt.$$

По теореме о среднем $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y, z)\, dt = P(x_1, y, z)\Delta x$, где x_1 — некоторая точка отрезка $[x, x + \Delta x]$. Заметим, что эту точку можно записать в виде $x_1 = x + \theta\Delta x$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ — некоторое число. Поэтому

$$\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = P(x_1, y, z).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y, z)$. Аналогично устанавливается справедливость оставшихся соотношений $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z)$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z)$. Теорема доказана.



Доказанная теорема даёт возможность восстановить потенциал, если известно, что поле потенциально, но она не даёт практических рецептов выяснения потенциальности поля. Попытаемся получить характеристики, позволяющие установить потенциальность поля.

Введём вектор

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

который назовём ротором (вихрем) вектор-функции $f(x, y, z)$.

Поле называется ***безвихревым****, если* $\operatorname{rot} f = 0$.

Между величиной $\operatorname{rot} f$ и потенциальностью поля $f(x, y, z)$ существует связь, выражаемая следующей теоремой.

Если поле

$$f(x, y, z) = \big(P(x, y, z),\, Q(x, y, z),\, R(x, y, z)\big)^T$$

потенциально и существует непрерывная производная $f'(x, y, z)$, то оно безвихревое (*всякое потенциальное дифференцируемое поле является безвихревым*), то есть $\operatorname{rot} f = 0$.

Доказательство. Если поле потенциально, то существует скалярнозначная функция $U(x, y, z)$, такая, что

$$U'(x, y, z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \big(P(x, y, z),\, Q(x, y, z),\, R(x, y, z)\big)^T.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = R$. Тогда

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение верно лишь при дополнительных ограничениях на область, в которой задано векторное поле. Для уточнения формулировок введём некоторые понятия.

Множество называется ***связным****, если для любых двух точек из этого множества существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве.*

*Точку множества назовём **внутренней точкой**, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в данном множестве; **внешней точкой**, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая вне данного множества; **граничной**, если во всякой окрестности этой точки есть как точки данного множества, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек данного множества назовём **его границей**.*

*Множество назовём **односвязным**, если его граница есть связное множество.*

Если область Ω является односвязной и векторное поле безвихревое ($\operatorname{rot} f = 0$), то оно потенциально.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут познакомиться с ним в [8].

Рассмотрим более подробно плоский случай. Пусть векторное поле задано на плоскости, то есть имеет вид

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} f(x, y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Таким образом, для плоского поля условие $\operatorname{rot} f = 0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тогда сформулированные выше результаты о потенциальности поля приобретают следующий вид.

Если плоское поле потенциально, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и область односвязная, то плоское поле f потенциально.

Если область односвязная, то любой криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ по произвольному контуру L не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Если область односвязная, то поле потенциально тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Пример 4.8

Доказать, что поле $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ потенциально и восстановить его потенциал.

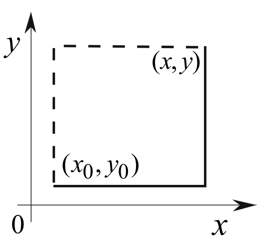


Рис. 4.4

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, и поле потенциально во всей плоскости. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0, 0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x, y). Наиболее простыми путями интегрирования являются две возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке 4.4 $\big($с учётом того, что $(x_0, y_0) = (0, 0)\big)$,

$$U(x, y) = \int\limits_{A_0}^{A} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_0^x P(x, 0)\,dx + \int\limits_0^y Q(x, y)\,dy = \int\limits_0^x (2x \cdot 0)\,dx + \int\limits_0^y x^2\,dy = x^2 y.$$

Таким образом, $U(x, y) = x^2 y$.

Пример 4.9

Доказать, что поле $f(x, y, z) = \left(y^2 z,\ 2xyz,\ xy^2 + 3z^2\right)^T = y^2 z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + (xy^2 + 3z^2)\mathbf{k} = (P, Q, R)^T$ потенциально и восстановить его потенциал.

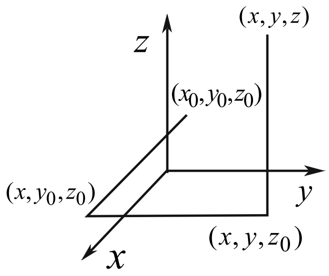


Рис. 4.5

Найдём $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$. Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = y^2$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2yz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz$, то $\operatorname{rot} f = 0$, и поле потенциально во всём пространстве. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0, 0, 0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x, y, z). Наиболее простыми путями интегрирования являются возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке 4.5 $\big($с учётом того, что $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)\big)$,

$$U(x, y, z) = \int\limits_{A_0}^{A} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_0^x P(x, 0, 0)\,dx + \int\limits_0^y Q(x, y, 0)\,dy + \int\limits_0^z R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^x (0 \cdot 0)\,dx + \int\limits_0^y (2xy \cdot 0)\,dy + \int\limits_0^z (xy^2 + 3z^2)\,dz = xy^2 z + z^3.$$

Таким образом, $U(x, y, z) = xy^2 z + z^3$.

. . . .

. . . .

Введём ещё одну характеристику векторного поля, называемую ***дивергенцией****, или* ***функцией источника****, по формуле:*

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}.$$

. . . .

. . . .

Назовём поле ***соленоидальным*** *или* ***трубчатым****, если дивергенция равна нулю в каждой его точке.*

. . . .

Сформулируем несколько результатов, связывающих рассмотренные выше понятия.

. . . .

Теорема (Стокса). Пусть L — замкнутый кусочно-гладкий контур в R^3, S — любая кусочно-гладкая поверхность, натянутая на L. Согласуем ориентации L и S так, чтобы если смотреть из конца вектора нормали к S, определяющего сторону, то обход L совершается против часовой стрелки. Тогда если f — дифференцируемая функция, то циркуляция вектора f по контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot} f$ через поверхность S, натянутую на этот контур, то есть

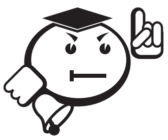
$$\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\operatorname{rot} f, \overline{dS}\right).$$

Эта формула называется формулой Стокса. Примем эту теорему без *доказательства*.

....

....



Формула Стокса позволяет дать другую характеристику векторного поля $\operatorname{rot} f$.

....

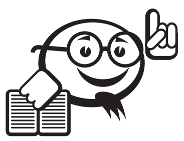
По теореме о среднем для поверхностного интеграла второго рода (теорема 4 п. 4.4.3), $\iint\limits_S \left(\operatorname{rot} f, \overline{dS}\right) = \left(\operatorname{rot} f(x_0, y_0, z_0), \overline{n}_0\right)\sigma(S)$, где $\overline{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности S в некоторой её средней точке (x_0, y_0, z_0), $\sigma(S)$ — площадь поверхности S. Тогда

$$(\operatorname{rot} f, \overline{n}_0) = \lim_{\sigma(S)\to 0} \frac{1}{\sigma(S)} \iint\limits_S \left(\operatorname{rot} f, \overline{dS}\right) = \lim_{\sigma(S)\to 0} \frac{1}{\sigma(S)} \int\limits_S \left(f, \overline{dl}\right).$$

Другими словами, если через точку M_0 провести поверхность и на этой поверхности взять контур, охватывающий точку M_0, то проекция $(\operatorname{rot} f, \overline{n}_0)$ вектора $\operatorname{rot} f$ на направление нормали $\overline{n}_0$ к поверхности S в точке M_0 равна пределу средней плотности циркуляции $\dfrac{1}{\sigma(S)} \int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right)$ вектора f по контуру L при стягивании контура в точку M_0.

В случае плоской области, если положить $\overline{dx\,dy} = dx\,dy\mathbf{k}$, теорема Стокса формулируется следующим образом.

....



Теорема (Грина). Пусть D — плоская область с кусочно-гладкой границей ∂D и ∂D ориентирована так, что обход по ней в положительном направлении совершается против часовой стрелки. Тогда если $f(x, y)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{\partial D} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\operatorname{rot} f, \overline{dx\,dy}\right) =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Эта формула называется формулой Грина.

....

Теорема (Остроградского). Пусть G — область в R^3 и ∂G — кусочно-гладкая граница G, ориентированная в сторону внешней нормали. Тогда, если $f(x, y, z)$ — дифференцируемая функция, то поток вектора через границу области G равен интегралу по области G от $\operatorname{div} f$, то есть

$$\iint\limits_{\partial G} \left(f, \overline{dS}\right) = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} f(x, y, z) \cdot dx\,dy\,dz.$$

Эта формула называется формулой Гаусса—Остроградского.

Формула Гаусса—Остроградского позволяет дать физическую интерпретацию дивергенции и соленоидальности векторного поля.

Пусть G — шар с центром в точке (x_0, y_0, z_0) радиуса ε. Применяя к правой части формулы Гаусса—Остроградского теорему о среднем для тройного интеграла, получаем $\iint\limits_{\partial G} \left(f, \overline{dS}\right) = \operatorname{div} f(x_1, y_1, z_1) V_\varepsilon$, где (x_1, y_1, z_1) — некоторая точка шара, V_ε — его объём. Тогда

$$\operatorname{div} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint\limits_{\partial G} \left(f, \overline{dS}\right),$$

то есть $\operatorname{div} f$ в точке M_0 равна пределу отношения потока вектора f через границу замкнутой области G, охватывающей точку, к объёму области G, при стягивании области в точку M_0.

Таким образом, если $\operatorname{div} f(x_0, y_0, z_0) > 0$*, то говорят, что* ***в точке — источник****, если* $\operatorname{div} f(x_0, y_0, z_0) < 0$*, то говорят, что* ***в точке — сток****, если* $\operatorname{div} f(x_0, y_0, z_0) = 0$*, то говорят, что* ***в точке нет ни источников, ни стоков****.*

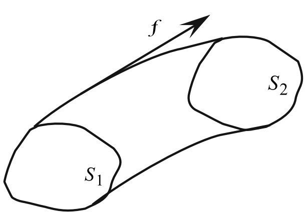


Рис. 4.6

Рассмотрим более подробно соленоидальные поля. Пусть L — замкнутый контур. Через каждую его точку проведём линию, касательная к которой параллельна вектору $f(x, y, z)$. Такие линии называются векторными или силовыми линиями поля. Поверхность, образованную векторными линиями поля f, проходящими через точки замкнутого контура L, назовём векторной трубкой (рис. 4.6). В силу построения векторной трубки вектор нормали n к ней перпендикулярен вектору f. Тогда $\left(f(x, y, z), n\right) dS = \left(f, \overline{dS}\right) = 0$ в любой точке векторной трубки. Поэтому для любого куска S поверхности векторной трубки $\int\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) = 0$, то есть поток вектора через поверхность векторной трубки равен нулю (через неё, как и через боковую поверхность реальной трубы, ничего ни вытекает, ни втекает). Пусть S_1 и S_2 — два сечения векторной трубки, векторы нормалей к которым направлены в одну сторону, и S — полная поверхность трубки, состоящая из S_1^-, $S_2^+ = S_2$ и поверхности трубки между этими сечениями. Тогда по теореме Гаусса—Остроградского $\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) = \iiint\limits_G \operatorname{div} f(x, y, z) \cdot dx\,dy\,dz$, и так как для соленоидального поля $\operatorname{div} f(x, y, z) = 0$ для всех точек области G, то $\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) = 0$. Так как поток вектора через боковую поверхность трубки равен нулю, то из последнего соотношения следует, что $\iint\limits_{S_1^-} \left(f, \overline{dS}\right) + \iint\limits_{S_2^+} \left(f, \overline{dS}\right) = 0$, а следовательно, и $\iint\limits_{S_2} \left(f, \overline{dS}\right) = -\iint\limits_{S_1^-} \left(f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_{S_1^+} \left(f, \overline{dS}\right)$. Таким образом, для соленоидальных полей потоки вектора через любые сечения равны между собой.

Пример 4.10

Найти поток векторного поля $f(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k} = (xz, xy, yz)^T$ через внешнюю сторону поверхности, лежащей в первом октанте и ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$. По теореме Гаусса—Остроградского поток векторного поля через замкнутую поверхность равен

$$\iint\limits_{\partial G} (f, \overline{dS}) = \iint\limits_{\partial G} xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz + yz\,dx\,dy =$$

$$= \iiint\limits_G \operatorname{div} f(x, y, z) \cdot dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G (x + y + z) \cdot dx\,dy\,dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, окончательно получаем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \rho\,d\rho \int\limits_0^H \left((\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi) + z\right) dz = R^2 H\left(\frac{2}{3}R + \frac{1}{8}\pi H\right).$$

Контрольные вопросы по главе 4

1) Каков геометрический смысл криволинейного интеграла?
2) Каков физический смысл криволинейного интеграла?
3) Каков геометрический смысл поверхностного интеграла?
4) Каков физический смысл поверхностного интеграла?
5) Какое поле называется потенциальным?
6) Как с помощью криволинейного интеграла восстановить потенциал поля?
7) Какое поле называется соленоидальным?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Горбанев Н. Н. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учеб. пособие / Н. Н. Горбанев, А. А. Ельцов, Л. И. Магазинников. — 2-е изд., перераб. и доп. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.

[2] Ельцов А. А. Высшая математика I. Дифференциальное исчисление / А. А. Ельцов, Г. А. Ельцова, Л. И. Магазинников. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.

[3] Зорич В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. — М. : Наука, 1981. — Ч. 1. ; 1984. — Ч. 2.

[4] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1969. — Т. 1, 2 ; 1970. — Т. 3.

[5] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1963.

[6] Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971.

[7] Бугров Я. С. Высшая математика : учебник для вузов : в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.

[8] Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1970.

[9] Будак Б. Н. Кратные интегралы и ряды / Б. Н. Будак, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1967.

[10] Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1969.

[11] Гюнтер Н. М. Сборник задач по высшей математике / Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — Т. 2.

[12] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — М. : Физматлит, 2009.

[13] Ельцов А. А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям / А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005.

Приложение А

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a + b \cdot \sqrt{-1}$, где a и b — некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$, получаем $\left(1 + 2 \cdot \sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1 + 2 \cdot \sqrt{-1}\right) + 5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем:

$$(1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-1} + \left(2 \cdot \sqrt{-1}\right)^2 - 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-1} + 5 = 4 + 4 \cdot (-1) = 0.$$

Таким образом, конструкцию $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Пусть i — некоторый формальный символ, x и y — действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z = x + iy$ назовём комплексными числами, x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$ и будем обозначать их соответственно $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку (x, y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то эти операции совпадают с обычными операциями над действительными числами и поэтому комплексные числа являются расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i = 0 + i \cdot 1$ получаем $i^2 = i \cdot i = -1$.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным, и обозначают его $\arg z$. Наиболее удобным является выбор главного значения аргумента из промежутков $[0, 2\pi)$, $[-\pi, \pi)$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. В пакете Mathcad главное значение аргумента выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$. При выборе главного значения аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$ его находят по формулам:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из других промежутков предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z|\,e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому:

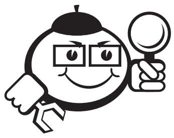
$$z_1z_2 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,|z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$



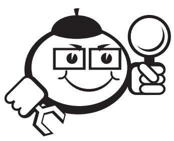
Пример 1

Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение:

Так как $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$, то, используя вышеприведённую формулу, имеем $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, получаем три значения корня кубического из единицы

$$\sqrt[3]{1}_1 = 1, \quad \sqrt[3]{1}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \sqrt[3]{1}_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



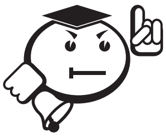
Пример 2

Найти $\sqrt{1+i}$.

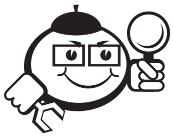
Решение:

Так как $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, то $\sqrt{1+i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1$. Придавая k последовательно значения 0, 1, получаем два значения $\sqrt{1+i}$:

$$\left(\sqrt{1+i}\right)_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right); \quad \left(\sqrt{1+i}\right)_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right).$$



Заметим, что квадратные корни из комплексных чисел отличаются только знаками.

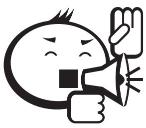


Пример 3

Решить уравнение $x^2 - 4x + 20$.

Решение:

Выделяя в левой части полный квадрат, получаем $x^2 - 4x + 20 = x^2 - 4x + 4 + 16 = (x-4)^2 + 16 = 0$. Следовательно, $(x-4)^2 = -16$. Извлекая квадратный корень из числа -16, имеем $\sqrt{-16} = \pm 4i$. Поэтому $x - 4 = \pm 4i$ или $x = 4 \pm 4i$. Подставляя любое из этих комплексных чисел в исходное уравнение, убеждаемся в том, что они являются его решением.



Заметим, что комплексные решения квадратных уравнений могут быть получены по той же формуле, что и действительные, но при отрицательном дискриминанте.

Приложение Б

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0\,dx = C.$

2. $\int 1\,dx = x + C.$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \widetilde{C}.$

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \widetilde{C}.$

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7a. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

16. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$

17. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$

Приложение В

ПРЯМАЯ ТАБЛИЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

$du^{\alpha} = \alpha \cdot u^{\alpha-1}\, du;$

$d \ln u = \dfrac{du}{u};$

$da^{u} = a^{u} \ln a\, du;$

$d \cos u = -\sin u\, du;$

$d \sin u = \cos u\, du;$

$d \operatorname{tg} u = \dfrac{du}{\cos^2 u};$

$d \operatorname{ctg} u = -\dfrac{du}{\sin^2 u};$

$d \arcsin u = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}};$

$d \arccos u = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}};$

$d \operatorname{arctg} u = \dfrac{du}{1+u^2};$

$d \operatorname{arcctg} u = -\dfrac{du}{1+u^2};$

где $u = u(x)$ — любая дифференцируемая функция.

Приложение Г

ОБРАТНАЯ ТАБЛИЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax + b)$, где a и b — некоторые числа. В частности, $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x + b) = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x + b)$ и так далее.

2. $x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{a+1}d(x^{\alpha+1}) = \frac{1}{a+1}d(x^{\alpha+1} + b)$, $\alpha \neq -1$. В частности, $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2 + b)$, $x^2\,dx = \frac{1}{3}d(x^3) = \frac{1}{3}d(x^3 + b)$, $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x} + b\right)$, $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2} + b\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = 2d\left(\sqrt{x} + b\right)$.

3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \frac{1}{a}d(a\ln x + b)$.

4. $e^x\,dx = d(e^x) = d(e^x + b)$.

5. $\cos x\,dx = d\sin x = d(\sin x + b)$.

6. $\sin x\,dx = -d\cos x = -d(\cos x + b)$.

7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x = d(\mathrm{tg}\,x + b)$.

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x = -d(\mathrm{ctg}\,x + b)$.

9. $\frac{dx}{1 + x^2} = d(\mathrm{arctg}\,x) = -d(\mathrm{arcctg}\,x)$.

10. $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Учебное издание

Ельцов Александр Александрович
Ельцова Тамара Александровна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.
Компьютерная верстка Перминова М. Ю.

Подписано 03.09.13. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 16,28. Тираж 500 экз. Заказ

Издано в ООО «Эль Контент»
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17
Отпечатано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.