Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов технических направлений подготовки и специальностей

Томск
«Эль Контент»
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.68я73
Е 585

Рецензенты:
Некряч Е. Н., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского Томского политехнического университета;
Гензе Л. В., канд. физ-мат. наук, доцент кафедры теории функций Национального исследовательского Томского государственного университета.

Ельцов А. А.
Е 585 Дифференциальные уравнения : учебное пособие / А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова. — Томск : Эль Контент, 2013. — 104 с.

ISBN 978-5-4332-0128-6

В краткой конспективной форме изложен материал по дифференциальным уравнениям в объёме, предусмотренном ныне действующей программой втузов. Пособие может быть использовано для изучения дисциплины студентами, обучающимися с применением дистанционных образовательных технологий. Отличительной особенностью является использование матричного и векторного аппарата. Теоретический курс дополнен примерами и контрольными заданиями. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.68я73

ISBN 978-5-4332-0128-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

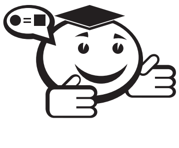
ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие представляет собой краткий конспект лекций по дифференциальным уравнениям. Пособие состоит из пяти глав. В первой главе рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах и приближённые методы решения уравнений первого порядка. Во второй главе изучаются уравнения n-го порядка. В том числе, уравнения, допускающие понижение порядка, линейные уравнения порядка n и их частный случай, линейные уравнения с постоянными коэффициентами. В третьей главе рассматриваются системы дифференциальных уравнений, в том числе и линейные. В четвертой даются элементы теории устойчивости. В пятой главе изучаются разностные уравнения. Изложение тесно увязано с линейной алгеброй [1, 2].

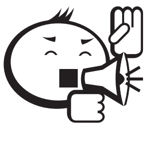
Весь материал разбит на блоки, содержащие небольшое число новых понятий. Материал достаточно полно иллюстрирован разнообразными примерами. Для более глубокого изучения можно использовать пособия из списка литературы.

Соглашения, принятые в книге

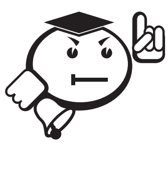
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



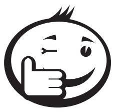
Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



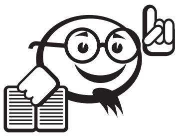
Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



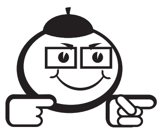
В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



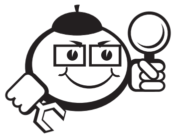
Эта пиктограмма означает совет. В данном блоке можно указать более простые или иные способы выполнения определенной задачи. Совет может касаться практического применения только что изученного или содержать указания на то, как немного повысить эффективность и значительно упростить выполнение некоторых задач.



Эта пиктограмма означает теорему. Данный блок состоит из *Названия теоремы* (Слова Теорема и Номера теоремы) и Текста теоремы.

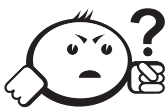


Эта пиктограмма означает лемму. Данный блок состоит из *Названия леммы* (Слова Лемма и Номера леммы) и Текста леммы.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Контрольные вопросы по главе

ВВЕДЕНИЕ

Многие разделы математики, особенно на ранних этапах её развития, зародились из решения практических задач. В том числе и поэтому многие математические понятия имеют в различных областях знаний конкретную интерпретацию. Например, производную скалярной функции скалярного аргумента, с одной стороны, можно трактовать как скорость движения материальной точки, а с другой, как тангенс угла наклона к оси OX касательной к графику функции [3]. Производная вектор-функции скалярного аргумента может трактоваться как вектор скорости и как вектор параллельный касательной [3]. Аналогично интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ есть площадь под кривой $y = f(x)$ или работа по перемещению материальной точки под действием силы $f(x)$ из точки a в точку b [4]. В других областях знаний также имеются свои интерпретации этих и других математических понятий. Поэтому с помощью математики могут быть описаны многие процессы и явления, то есть математика, кроме всего прочего, служит языком описания процессов и явлений реального мира. При изучении и описании явлений и процессов обычно абстрагируются от частностей и идеализируют рассматриваемый процесс или явление. Например, при изучении процессов в газовой среде рассматривают модель идеального газа. В результате такой идеализации получается математическая модель процесса или явления. Математические модели делятся на статические и динамические. Статические модели описывают стационарные, то есть установившиеся и не меняющиеся во времени, процессы. Динамические модели описывают неустановившиеся и меняющиеся во времени процессы.

Для многих динамических процессов и явлений бывает трудно написать закон их поведения в виде конкретной функции времени, а написать этот закон в виде уравнения, связывающего независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и некоторое количество её производных, т. е. в виде уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, часто значительно легче.

Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ называется дифференциальным уравнением порядка n. Если x векторная величина, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных, а если x скаляр — обыкновенным дифференциальным уравнением. В данном курсе изучаются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Примером математической модели в виде обыкновенного дифференциального уравнения является второй закон Ньютона. Пусть $S(t)$ — путь, пройденный телом к моменту времени t, $V(t)$ — скорость, $a(t)$ — ускорение, с которыми движется тело в момент t. Из определения скорости и ускорения, с учётом механического смысла производной, можем записать, что $V(t) = \dfrac{dS}{dt}$, $a(t) = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$. Пусть теперь тело с постоянной массой m движется под действием силы F. По второму закону Ньютона сила, масса и ускорение связаны соотношением $F = ma$, или $a = \dfrac{F}{m}$. Подставляя $a(t) = \dfrac{d^2S}{dt^2}$, имеем $\dfrac{d^2S}{dt^2} = \dfrac{F}{m}$. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка, дающее пример математической модели динамического процесса. Из полученного уравнения можем последовательно записать:

$$\frac{dS}{dt} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d^2S}{dt^2}\,dt + C_1 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,dt + C_1,$$

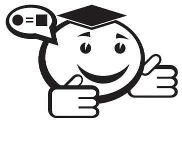
$$S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dS}{dt}\,dt + C_2 = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,dt + C_1 \right) dt + C_2 = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,dt \right) dt + C_1(t - t_0) + C_2.$$

Для нахождения констант C_1 и C_2 нужно иметь два соотношения которые можно получить, задав начальную величину пути, пройденного к моменту времени t_0, и начальную скорость. Пусть $S(t_0) = S_0$ — путь, пройденный телом к моменту времени t_0, а $V(t_0) = V_0$ — скорость тела в момент времени t_0. Тогда, подставляя эти значения в полученное ранее решение, имеем

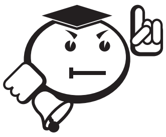
$$S(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,dt \right) dt + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = S_0,$$

$$V(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0} \frac{F}{m}\,dt + C_1 = C_1 = V_0.$$

С учётом найденных значений констант C_1 и C_2 окончательно получаем $S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\,dt \right) dt + V_0(t - t_0) + S_0$. Если кроме массы m постоянна и сила F, то закон изменения пути от времени будет иметь вид $S(t) = \dfrac{F(t - t_0)^2}{2m} + V_0(t - t_0) + S_0$.



Решением дифференциального уравнения в области *D назовём функцию $\varphi(x)$, заданную на отрезке или интервале (a, b), если при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение она обращает его в тождество относительно x в этой области.*



Решить дифференциальное уравнение означает описать всю совокупность его решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения, как и любого другого уравнения, состоит в преобразовании его к такому виду, из которого эти решения легко находятся. При этом два уравнения: $F_1(x, y, y') = 0$ и $F_2(x, y, y') = 0$ назовем эквивалентными в области D, если решения одного из них являются решениями другого. Идеальным было бы при нахождении решения осуществлять переход к эквивалентным уравнениям. Это не всегда удается. Поэтому в процессе преобразований мы должны следить, чтобы не терять решений и не приобретать новых.

Большинство аналитических методов решений дифференциальных уравнений заключается в сведении их к уравнению вида $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$, которое очень просто решается. Действительно, в данном случае можем записать $\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy$. Теперь, если $\Phi_1(x)$ какая-нибудь первообразная левой части, а $\Phi_2(y)$ — правой части, то последнее соотношение можно переписать в виде равенства $\Phi_1(x) = \Phi_2(y) + C$, разрешая которое относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения.

Как видим, решение дифференциального уравнения получается с точностью до некоторого количества произвольных постоянных, которые можно зафиксировать, задав некоторые условия на поведение решения. Так, в рассмотренном выше примере движения материальной точки под действием силы мы зафиксировали получившиеся в процессе решения константы, задав начальный путь и начальную скорость, то есть задав так называемые начальные условия. В данном курсе подобная задача рассмотрена более подробно.

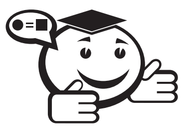
Классов дифференциальных уравнений, которые можно решить аналитически, не так уж и много. Часть из них изучается в данном курсе. Если по тем или иным причинам не удаётся найти аналитическое решение уравнения, то находят либо приближённое аналитическое, либо приближенное численное решение.

Глава 1

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Общие сведения

Изложенное ниже является введением в круг вопросов и задач, изучаемых в теории дифференциальных уравнений, и не претендует на полноту.



Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и некоторое количество её производных, т. е. уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

*называется **дифференциальным уравнением n-го порядка**. Если x — векторная величина, то уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**, а если x — скаляр, то **обыкновенным дифференциальным уравнением**.*

Для многих динамических, то есть меняющихся во времени, процессов и явлений бывает трудно написать закон их поведения в виде конкретной функции времени, а написать этот закон в виде дифференциального уравнения часто значительно легче. Построением дифференциальных уравнений для описания конкретных процессов, то есть построением математических моделей этих процессов, мы заниматься не будем.

Не оговаривая особо, будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Самым простым обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение 1-го порядка, то есть уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.2}$$

получающееся из (1.1) при $n = 1$. Функция $F(x, y, z)$ в (1.2) предполагается определённой на некотором множестве G из R^3.

Если уравнение (1.2) удается разрешить относительно y' и записать в виде

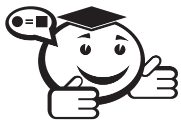
$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

то уравнение (1.3) называется уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной. Иногда уравнение (1.3) удобнее записывать в эквивалентном виде в так называемой дифференциальной форме:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.4}$$

Функции $f(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ предполагаются заданными на некотором множестве D плоскости R^2.

Мы будем пользоваться той записью, которая в данный момент удобнее.



Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке или интервале (a, b), называется ***решением дифференциального уравнения в области*** *D, если при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение она обращает его в тождество в этой области.*

Естественно, чтобы быть решением дифференциального уравнения первого порядка, функция $\varphi(x)$ должна быть дифференцируемой, а следовательно, и непрерывной. Кроме того, точка $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$ должна принадлежать множеству G, если речь идёт о решении уравнения (1.2), а точка $\big(x, \varphi(x)\big)$ должна принадлежать множеству D, если речь идёт о решении уравнений (1.3) или (1.4). Будем предполагать, что и первая производная функции $\varphi(x)$ непрерывна. Чтобы быть решением дифференциального уравнения n-го порядка, функция $\varphi(x)$ должна иметь n непрерывных производных.

При изучении дифференциальных уравнений выделяют качественную и количественную теории дифференциальных уравнений.

В качественной теории по виду дифференциального уравнения изучают свойства его решений, не находя их.

В количественной теории занимаются разработкой методов нахождения решений дифференциальных уравнений.

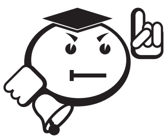
Мы будем заниматься количественной теорией дифференциальных уравнений.

В количественной теории рассматривают точные и приближенные методы нахождения решений. Займемся пока точными методами.

Решить дифференциальное уравнение означает описать всю совокупность его решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения, как и любого другого уравнения, состоит в преобразовании его к такому виду, из которого это решение легко находится. При этом два уравнения $F_1(x, y, y') = 0$ и $F_2(x, y, y') = 0$ назовём эквивалентными в области D, если решения одного из них являются решениями другого. Идеальным было бы при нахождении решения осуществлять переход к эквивалентным уравнениям. Это не всегда удаётся. Поэтому в процессе преобразований мы должны следить за тем, чтобы не терять решений и не приобретать новых.

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Самыми простыми в изучении являются уравнения вида $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$. Действительно, если $y(x)$ есть решение этого уравнения, то, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можем записать $\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy$.



Равенство подразумевает, что множество всех первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_1(x)$ — какая-нибудь первообразная левой части, а $\Phi_2(y)$ — правой части, то последнее соотношение можно переписать в виде $\Phi_1(x) = \Phi_2(y) + C$, разрешая которое относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения.

Большинство методов решений дифференциальных уравнений заключается в сведении их к уравнению рассмотренного выше типа.

Следующими по сложности являются уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть в выражении (1.3) правая часть $f(x, y)$ имеет вид $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то есть уравнение может быть представлено в виде

$$y' = f_1(x)f_2(y), \tag{1.5}$$

или в эквивалентной форме

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5) и (1.6) называются уравнениями с разделяющимися переменными.

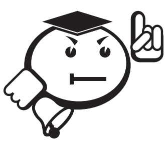
Если $f_2(y) \neq 0$ для $\forall y \in [c, d]$, то, с учетом того, что $y' = dy/dx$, из (1.5) получаем

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx,$$

откуда, с учетом инвариантности формы дифференциала первого порядка, имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx.$$

Как и ранее, полученное соотношение означает, что множество первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_2(y)$, $\Phi_1(x)$ — какие-либо первообразные левой и правой частей соответственно, то его можно переписать в виде $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$. Разрешая последнее относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения.



Заметим, что если $f_2(y_0) = 0$, то мы должны проверить, является ли функция $y = y_0$ решением исходного дифференциального уравнения, чтобы не потерять его в процессе нахождения решения.

Аналогично, для уравнения в форме (1.6), если $M_2(y) \neq 0$, $N_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$, $\forall y \in [c, d]$, получаем

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx,$$

или, интегрируя обе части по x,

$$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx.$$

Вычисляя полученные интегралы, находим все множество решений $\big($при $M_2(y) \neq 0$, $N_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$, $\forall y \in [c, d]\big)$ уравнения (1.6).

Пример 1.1

Для уравнения $y' = e^{x+y}$ имеем $y' = e^x e^y$, откуда $e^{-y}\,dy = e^x\,dx$ или, интегрируя обе части по x, $e^{-y} = -e^x + C$ и, наконец, $y = -\ln(-e^x + C)$.

Пример 1.2

Решить уравнение $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$. В предположении, что $y(x+1) \neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{x\,dx}{x+1}$ или, интегрируя, $\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|$, отсюда $y = C(x+1)e^{-x}$. Решение $y = 0$ получается при $C = 0$, а решение $x = -1$ не содержится в нем. Таким образом, решением уравнения являются функции $y = C(x+1)e^{-x}$, $x = -1$.

Пример 1.3

Решить уравнение $(e^{5x} + 9)\,dy = ye^{5x}\,dx$. В предположении, что $y \neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{e^{5x}\,dx}{e^{5x}+9}$ или, интегрируя, $\ln|y| = \dfrac{1}{5}\ln(e^{5x} + 9) + \ln|C|$, отсюда $y = C \cdot \sqrt[5]{e^{5x}+9}$. Решение $y = 0$ получается при $C = 0$.

1.3 Однородные уравнения

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***однородной степени*** *k, если для нее выполнено соотношение $F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется ***однородным****, если $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени, то есть $f(tx, ty) = f(x, y)$.*

В этом случае дифференциальное уравнение удаётся записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Действительно, если $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени, то $f(x, y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Обозначая $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, можем записать $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

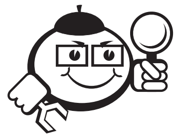
Отметим, что уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ является однородным тогда и только тогда, когда функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени.

В этом случае имеем

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy =$$
$$= x^k\left(M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy\right) = 0.$$

Разделив на x^k, получаем, что исходное уравнение свелось к уравнению $M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0$, которое легко приводится к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и, следовательно, является однородным. Естественно, мы должны проследить, чтобы не потерять решение $x = 0$, если оно есть, исходного уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = xu$, или, что то же самое, $u = \frac{y}{x}$, где u — новая искомая функция. Действительно, тогда $y' = u + u'x$ и исходное уравнение может быть переписано в виде $u + u'x = \varphi(u)$, или $u'x = \varphi(u) - u$. Из последнего соотношения при $\varphi(u) \neq u$ можем записать $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Заметим, что в случае $\varphi(u) = u$ исходное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными.



Пример 1.4

Решить уравнение $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$. Это однородное уравнение, так как $y^2 - 2xy$ и x^2 — однородные функции второй степени. Делаем замену $y = xu$, $dy = u\,dx + x\,du$. Подставляя в уравнение, имеем

$$(x^2u^2 - 2x^2u)\,dx + x^2(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на x^2, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\left(u^2 - u\right)\,dx + x\,du = 0.$$

Разделяя переменные, получаем $-\dfrac{du}{u(u-1)} = \dfrac{dx}{x}$, или, что то же самое, $\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u-1}\right)du = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя последнее соотношение, имеем $\ln|u| - \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C|$. Потенцируя (переходя от логарифмической функции к e^x), можем записать $\dfrac{u}{u-1} = Cx$, или, делая обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получаем $\dfrac{y}{y-x} = Cx$. При сокращении на x^2 мы потеряли решение $x = 0$, которое в найденное решение не входит. Кроме того, мы могли потерять решения при делении на $u(u-1)$. Случай $u = 0$ даёт решение $y = 0$, входящее в найденное при $C = 0$. Случай $u = 1$ даёт решение $y = x$, которое не входит в найденное.

Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводятся к однородным переносом начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, и заменой $a_1x + b_1y = z$, если этот определитель равен нулю.

1.4 Постановка задачи о выделении решений. Теорема существования и единственности

Как мы уже видели, множество решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ есть некоторое семейство функций, зависящее от константы. Хотелось бы выяснить условия на функцию $f(x, y)$, при выполнении которых можно выделить конкретное решение этого уравнения, удовлетворяющее заранее заданным требованиям. Для уравнения первого порядка требования формулируются следующим образом.

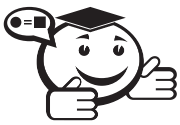
Найти решения дифференциального уравнения (1.3)

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющие условиям

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.7}$$

Сформулированные условия называются условиями Коши, а задача о выделении решения, удовлетворяющего условиям Коши, ***задачей Коши***.



Будем говорить, что ***функция*** $f(x, y)$ ***удовлетворяет условию Липшица по*** y ***в области*** D*, если для любых двух точек* (x, y_1), (x, y_2) *из этой области выполнено неравенство*

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leqslant L\left|y_1 - y_2\right|, \tag{1.8}$$

где L *— некоторая константа, не зависящая от* x *и* y*.*

Теорема (существования и единственности). Пусть в уравнении (1.3) $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$, заданная в области D на плоскости, непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица (1.8) по y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существуют интервал $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$ и функция $y = \varphi(x)$, заданная на этом интервале так, что $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию (1.7). Это решение единственно в том смысле, что если $y = \phi(x)$ есть решение уравнения (1.3), определенное на интервале (α, β), включающем в себя точку x_0, и удовлетворяющее условию (1.7), то функции $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают там, где они обе определены.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут ознакомиться с ним в [5–8].

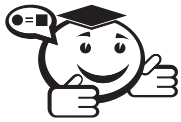
Множество D назовём выпуклым по y, если для всяких двух точек (x, y_1), (x, y_2) из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \bar{y})$, где $\bar{y}$ — число, лежащее между y_1 и y_2.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x, y)$ имеет там же непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, множество D — ограничено, замкнуто и выпукло по y, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет на множестве D условию Липшица по y. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| = \left|\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}(y_1 - y_2)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\right| \cdot \left|y_1 - y_2\right| \leqslant \max_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \cdot \left|y_1 - y_2\right|.$$

Поэтому в теореме существования и единственности вместо требования выполнения условия Липшица по y часто требуют, чтобы функция $f(x, y)$ имела непрерывную частную производную по переменной y. Особенно, если учитывать, что последнее условие проверять легче.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одно решение уравнения (1.3). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше, чем одно решение (нарушается единственность), либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).



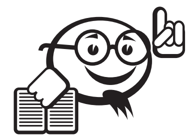
Семейство $y = \varphi(x, C)$ решений дифференциального уравнения (1.3) *назовём его **общим решением**, если для любого набора начальных данных $(x_0, y_0) \in D$ найдётся константа $\overline{C}$, на которой этот набор реализуется, то есть такая, что для решения $y = \varphi(x, \overline{C})$ выполнены начальные условия $y_0 = \varphi\left(x_0, \overline{C}\right)$.*

1.5 Линейные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка вида

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{1.9}$$

называется линейным дифференциальным уравнением. Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (1.9) называется линейным однородным, в противном случае — линейным неоднородным. Для линейного дифференциального уравнения теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.



Пусть $a_1(x)$, $a_0(x)$, $b(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, $a_1(x) \neq 0$ для $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Тогда для любой точки (x_0, y_0), $x_0 \in [a, b]$ существует единственное решение уравнения (1.9), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ и определенное на всем интервале $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1.10}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}dx$, или, интегрируя обе части, $\ln|y| = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx + \ln|C|$. Последнее соотношение, с учетом обозначения $\exp(x) = e^x$, записывается в форме

$$y = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx\right). \tag{1.11}$$

Заметим, что выбор точки x_0 влияет лишь на вид конкретной первообразной функции $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$.

Будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $a_1(x)y'+a_0(x)y = b(x)$ (1.9) ***методом Лагранжа***, или, что то же самое, ***методом вариации произвольной постоянной***.

Суть метода заключается в том, что мы пытаемся найти решение уравнения (1.9) в виде (1.11), в котором вместо константы C подставлена функция $C(x)$, то есть в виде

$$y = C(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx\right). \tag{1.12}$$

Так как по нашему предположению функция (1.12) есть решение уравнения (1.9), то при подстановке этой функции в уравнение последнее должно обращаться в тождество. Подставив решение (1.12) в (1.9) и приводя подобные, получаем соотношение $C'(x) = \dfrac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx\right)$. Интегрируя последнее, имеем

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt\right)\right)dx + C_1,$$

где C_1 — некоторая новая константа. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в (1.12), окончательно получаем общее решение исходного линейного уравнения:

$$y(x) = \left(\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt\right)\right)dx + C_1\right)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right).$$

Пример 1.5

Решить уравнение $y' + 2y = 4x$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2y = 0$. Решая его, получаем (при $x_0 = 0$) $y = Ce^{-2x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-2x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 4xe^{2x}$, откуда $C(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1$, и подставляя полученное выражение $C(x)$ в $y(x)$, получаем общее решение исходного уравнения $y(x) = (2xe^{2x} - e^{2x} + C_1)\,e^{-2x} = 2x - 1 + C_1e^{-2x}$.

Пример 1.6

Решить уравнение $y'+2xy = 6x$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2xy = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dy}{y} = -2x\,dx$, $\ln|y| = -x^2 + \ln|C|$, $y = Ce^{-x^2}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x^2}$. Подставляя y

и $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 6xe^{x^2}$ откуда $C(x) = 3e^{x^2} + C_1$ и $y(x) = 3 + C_1e^{-x^2}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 1.7

Решить уравнение $y' + 5y = e^{7x}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 5y = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dy}{y} = -5\,dx$, $\ln|y| = -5x + \ln|C|$, $y = Ce^{-5x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-5x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-5x} - 5C(x)e^{-5x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = e^{12x}$ откуда $C(x) = \dfrac{1}{12}e^{12x} + C_1$ и $y(x) = \dfrac{1}{12}e^{7x} + C_1e^{-5x}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 1.8

Решить уравнение $(4e^{3y} - x)\,dy = dx$. Вспоминая, что переменные x и y в дифференциальном уравнении равноправны и переписывая его в виде $4e^{3y} - x = \dfrac{dx}{dy}$, или, что то же самое, в форме $x' + x = 4e^{3y}$, получим, что данное уравнение является линейным относительно x и x'. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $x' + x = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dx}{x} = -dy$, $\ln|x| = -y + \ln|C|$, $x = Ce^{-y}$. Ищем теперь решение уравнения $x' + x = 4e^{3y}$ в виде $x = C(y)e^{-y}$. Подставляя x и $x' = C'(y)e^{-y} - C(x)e^{-y}$ в него, имеем $C'(y) = 4e^{4y}$, откуда $C(y) = e^{4y} + C_1$ и $y(x) = e^{3y} + C_1e^{-y}$ — общее решение исходного уравнения.

1.6 Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение

$$y' + a_0(x)y = b(x)y^n \tag{1.13}$$

называется ***уравнением Бернулли****.*

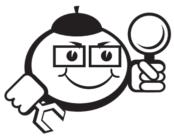
Так как при $n = 0$ получается линейное уравнение, а при $n = 1$ — уравнение с разделяющимися переменными, то предположим, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Разделим обе части (1.13) на y^n. Тогда

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a_0(x)}{y^{n-1}} = b(x). \tag{1.14}$$

Заметим, что

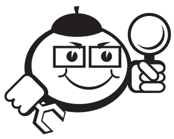
$$\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)' = \left(y^{-(n-1)}\right)' = -(n-1)y^{-(n-1)-1}y' = -(n-1)y^{-n}y' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}.$$

Поэтому сделаем в уравнении (1.14) замену, положив $\dfrac{1}{y^{n-1}} = z$. Тогда $\dfrac{y'}{y^n} = \dfrac{z'}{1-n}$. Подставляя полученное в (1.14), имеем $\dfrac{z'}{1-n} + a_0(x)z = b(x)$, или, что то же самое, $z' + (1-n)a_0(x)z = (1-n)b(x)$. Это линейное уравнение, которое мы решать умеем.



Пример 1.9

Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2xy^3$. Это уравнение Бернулли при $n = 3$. Разделив обе части уравнения на y^3, получаем $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{2x}{y^2} = 2x$. Делаем замену $z = \dfrac{1}{y^2}$. Тогда $z' = -2\dfrac{y'}{y^3}$, и поэтому уравнение переписывается в виде $-z' + 4xz = 4x$. Решая это линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной, получаем $z(x) = 1 + C_1e^{2x^2}$ откуда $\dfrac{1}{y^2} = 1 + C_1e^{2x^2}$ или, что то же самое, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + C_1e^{2x^2}}}$. При делении на y^3 мы потеряли решение $y = 0$, которое в полученное решение не входит.



Пример 1.10

Найти общее решение уравнения $2yy' - 2xy^2 = x^3$. Это уравнение получено из уравнения Бернулли $2y' - 2xy = x^3y^{-1}$ при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$. Тогда $z' = 2yy'$, и поэтому уравнение переписывается в виде $z' - 2xz = x^3$. Это линейное уравнение. Решаем вначале соответствующее однородное уравнение. Имеем $z' - 2xz = 0$, $z = Ce^{x^2}$. Находим теперь решение уравнения $z' - 2xz = x^3$ в виде $z = C(x)e^{x^2}$. Подставляя в него z и z', получаем $C'(x) = x^3e^{-x^2}$, откуда $C(x) = \displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$. Интегрируя по частям с $U = x^2$, $dV = x\exp(-x^2)\,dx$, имеем $C(x) = -\dfrac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C_1$.

Поэтому $z(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$, откуда $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$, или, что то же самое, $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}}$.

1.7 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.15}$$

Если существует функция $u(x, y)$ *такая, что*

$$du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy,$$

то уравнение (1.15) *называется* ***уравнением в полных дифференциалах***.

В этом случае его можно записать в виде $du(x, y) = 0$. Тогда $u(x, y) = C$. Если разрешить последнее соотношение относительно y, то получим общее решение уравнения (1.15).

Пример 1.11

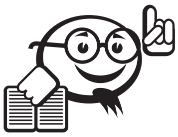
Дифференциальное уравнение $x\,dy + y\,dx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, так как $d(xy) = x\,dy + y\,dx$. Поэтому $xy = C$ есть общее решение этого уравнения.

Пример 1.12

Аналогично для уравнения $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$ выражение $x^2y = C$ есть общее решение, так как левая часть этого уравнения является дифференциалом функции $u(x, y) = x^2y$.

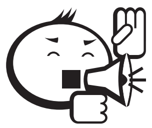
Как видим, уравнения в полных дифференциалах легко решаются, если знать функцию, дифференциалом которой является левая часть уравнения.

Вспоминая определение потенциальности поля $(M, N)^T$ [4], получаем справедливость следующей теоремы.



Уравнение (1.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда поле $(M, N)^T$ потенциально, или, что то же самое, криволинейный интеграл $\int\limits_L M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ не зависит от пути интегрирования.

Следствие. Если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ и область, в которой определены функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ односвязная, то уравнение (1.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.



Следствие даёт возможность выяснить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах или нет. Теорема позволяет найти решение уравнения в случае положительного ответа на предыдущий вопрос.

Пусть $(x_0, y_0) \in D$ — фиксированная, $(x, y) \in D$ — произвольная точки, L — путь, лежащий в D и соединяющий точки (x_0, y_0), (x, y). Если уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах, то функция $u(x, y)$ (потенциал поля $(M, N)^T$), вычисляемая по формуле $u(x, y) = \int\limits_L M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$, восстанавливает функцию $u(x, y)$ по её дифференциалу. В этом случае соотношение $u(x, y) = C$ описывает всю совокупность решений уравнения в полных дифференциалах.

Взяв в качестве пути, соединяющего точки (x_0, y_0), (x, y), ломаную линию, отрезки которой параллельны осям координат, получаем, что функция $u(x, y)$ (потенциал поля $(M, N)^T$) может быть найдена по одной из формул [4]:

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy$$

или

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy.$$

Функция $u(x, y)$ может быть также найдена из системы уравнений $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Пример 1.13

Найти общее решение уравнения $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$. Так как $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$, $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Поэтому, восстанавливая потенциал (подробнее о восстановлении потенциала смотри [4]), получаем

$$u(x, y) = \int_0^x (2x \cdot 0)\,dx + \int_0^y \left(x^2 - y^2\right)\,dy = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^y = x^2 y - \frac{y^3}{3}.$$

Тогда общий интеграл (общее решение) имеет вид $x^2 y - \dfrac{y^3}{3} = C$.

Пример 1.14

Уравнение $e^{-y}\,dx - \left(2y + xe^{-y}\right)\,dy = 0$ также является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right) = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y - xe^{-y}\right) = -e^{-y}.$$

Поэтому, восстанавливая потенциал, имеем

$$u(x, y) = \int_0^x e^{-0}\,dx - \int_0^y \left(2y + xe^{-y}\right)dy = x - y^2 + xe^{-y} - x = -y^2 + xe^{-y}.$$

Следовательно, общий интеграл (общее решение) уравнения равен

$$-y^2 + xe^{-y} = C.$$

Пример 1.15

Уравнение $2xy^3\,dx + \left(3x^2y^2 + 2y\right)dy = 0$ также является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3\right) = 6xy^2, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + 2y\right) = 6xy^2.$$

Найдём функцию $u(x, y)$ из системы уравнений $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y$. Из первого уравнения имеем

$$u(x,y) = \int 2xy^3\,dx = x^2y^3 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — функция, которую надо найти. Дифференцируя найденную функцию $u(x, y)$ по y, получаем, используя второе уравнение, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \varphi'(y) = 3x^2y^2 + 2y$. Отсюда $\varphi'(y) = 2y$ или $\varphi(y) = y^2 + C$. Поэтому $u(x, y) = x^2y^3 + y^2$, и соотношение $x^2y^3 + y^2 = C$ даёт всю совокупность решений уравнения.

. . . .

Взяв дифференциал некоторой функции двух переменных и приравняв его к нулю, получим уравнение в полных дифференциалах. Сократив на общий множитель (если он есть), мы, скорее всего, получим уравнение, не являющееся уравнением в полных дифференциалах. Поэтому возникает обратная задача: нельзя ли подобрать функцию так, чтобы, умножив на неё уравнение в дифференциальной форме, получить уравнение в полных дифференциалах. Эта задача носит название задачи о нахождении интегрирующего множителя. Оказывается, что найти интегрирующий множитель можно, но соотношения, позволяющие сделать это, часто оказываются более сложными, чем само уравнение.

1.8 Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши (1.3), (1.7) для дифференциального уравнения первого порядка: найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Пусть $y(x)$ — решение поставленной задачи Коши. Подставив это решение в уравнение (1.3), получим тождество $y'(x) \equiv f\big(x, y(x)\big)$. Интегрируя это тождество по x, получаем

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)\,dx,$$

или, что то же самое,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)\,dx. \tag{1.16}$$

Таким образом, мы показали, что всякое решение задачи Коши (1.3), (1.7) есть решение интегрального уравнения (1.16). С другой стороны, если $y(x)$ — дифференцируемое решение интегрального уравнения (1.16), то, дифференцируя (1.16) по x, получаем, что $y(x)$ — решение задачи Коши (1.3), (1.7).

Решение интегрального уравнения (1.16) будем искать с помощью метода последовательных приближений. Положим

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(x, y_n(x)\big)\, dx. \tag{1.17}$$

Оператор $A : M \to M$, отображающий метрическое пространство M в себя, называют ***сжимающим*** [9], *если* $\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2)$, *где* $0 < \alpha < 1$, ρ — *расстояние в* M.

Сжимающие операторы имеют неподвижную точку, то есть точку, которая оператором A переводится в себя. Если уравнение удаётся записать в виде $x = Ax$, в котором оператор A — сжимающий, то решение этого уравнения можно найти с помощью последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$, которые сходятся к решению уравнения $x = Ax$.

Таким образом, если оператор

$$(Ay)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)\, dx — \tag{1.18}$$

сжимающий [9], то последовательные приближения (1.17) сходятся к решению интегрального уравнения (1.16), а следовательно, и дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющему условию $y(x_0) = y_0$. Желающие могут познакомиться с доказательством сжимаемости оператора (1.18) в [9] или в приложении Б данного пособия.

Пример 1.16

Найдём с помощью метода последовательных приближений решение уравнения $y' = y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. Подставляя $y(0) = 1$ в (1.17), получаем

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + \int\limits_0^x 1\, dx = 1 + x, \quad y_2 = 1 + \int\limits_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \ldots,$$

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

С другой стороны, решая исходную задачу Коши, имеем $y = e^x$.

Таким образом, нами получено разложение функции e^x в ряд Тейлора в нуле (ряд Маклорена).

Перейдём теперь к изложению численного метода Эйлера решения задачи Коши (1.3), (1.7). Разобьём отрезок $[a, b]$, на котором мы ищем решение, на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Положим $y_i = y(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Так как по определению производной $y'(x_i) = \lim\limits_{h_i \to 0} \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i}$, то, заменяя производную $y'(x_i)$ конечной разностью $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ в уравнении (1.3), получаем $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i)$, или, что то же самое,

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i). \tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) является расчётной формулой метода Эйлера численного решения задачи Коши (1.3), (1.7). Вычислив y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, получим таблицу значений решения в точках x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Для оценки погрешности на одном шаге сетки в методе Эйлера разложим точное решение $y(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_i до членов второго порядка малости:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + O(h^2) = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2).$$

Сравнивая с (1.19), видим, что погрешность формулы (1.19) на одном шаге равна $O(h^2)$. К сожалению, метод Эйлера накапливает ошибку от шага к шагу. Поэтому на практике пользуются либо модификациями метода Эйлера, например методом прогноза и коррекции [10], либо другими методами, в частности методом Рунге–Кутта [10, 11].

Контрольные вопросы по главе 1

1. Определите тип дифференциального уравнения $y' = f(x)g(x)$.
2. Определите тип дифференциального уравнения $y' = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
3. Определите тип дифференциального уравнения $y' + x^3 y = \operatorname{tg} x$.
4. Определите тип дифференциального уравнения $y' + x^3 y = \sqrt{y}\, \operatorname{tg} x$.
5. Сформулируйте задачу Коши для уравнения 1-го порядка.
6. Сформулируйте теорему существования и единственности для уравнения 1-го порядка.
7. Как можно восстановить функцию по известному дифференциалу?
8. Сформулируйте необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Общие сведения

Напомним, что дифференциальным уравнением n-го порядка мы назвали уравнение (1.1), то есть уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Если это уравнение удаётся представить в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{2.1}$$

то его называют дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

Решением уравнения n-го порядка будет семейство функций вида

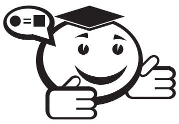
$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Для того, чтобы из этого семейства выделить конкретное решение, нужно на решение φ наложить некоторые ограничения.

Чаще всего задают начальные условия, то есть условия вида

$$y(x_0) = y_0^0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{2.2}$$

В этом случае задача о выделении конкретного решения носит название *задачи Коши*, которая заключается в нахождении решения уравнения (2.1), удовлетворяющего начальным условиям (2.2).

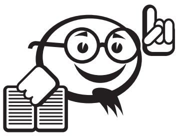


Будем говорить, что ***функция*** $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ***удовлетворяет условию Липшица по переменным*** $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ***в области*** D, *если для любых двух точек* $(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)$, $(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$ *из этой области выполнено неравенство*

$$\left|f\left(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1\right) - f\left(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2\right)\right| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} \left|z_i^1 - z_i^2\right|,$$

где L *— некоторая константа, не зависящая от* x *и* $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Справедлива следующая теорема.



Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условиям Липшица по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то найдётся окрестность точки x_0, в которой решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.2), существует и единственно.

Множество D назовём выпуклым по $z_1, z_2, \ldots, z_n$, если для всяких двух точек $(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)$, $(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$ из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n)$, где $\bar z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — числа вида $\alpha z_i^1 + (1-\alpha) z_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, α — число из отрезка $[0, 1]$.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имеет там же непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}$, множество D — ограничено, замкнуто и выпукло по $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то эта функция удовлетворяет на множестве D условию Липшица по $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать:

$$\begin{aligned}
\left|f\left(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1\right) - f\left(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n)}{\partial z_i}\left(z_i^1 - z_i^2\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n)}{\partial z_i}\right| \cdot \left|z_i^1 - z_i^2\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n) \in D}\left|\frac{\partial f(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n)}{\partial z_i}\right|\right) \cdot \left|z_i^1 - z_i^2\right| = \\
&= \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\max_{(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n) \in D}\left|\frac{\partial f(x, \bar z_1, \bar z_2, \ldots, \bar z_n)}{\partial z_i}\right|\right) \sum_{i=1}^{n} \left|z_i^1 - z_i^2\right|.
\end{aligned}$$

Поэтому в теореме существования и единственности для уравнения n-го порядка вместо требования выполнения условия Липшица по $z_1, z_2, \ldots, z_n$ часто требуют, чтобы функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имела непрерывные частные производные по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $\left(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}\right) \in D \subseteq R^{n+1}$ проходит только одно решение уравнения (2.1). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше, чем одно решение (нарушается единственность), либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

В отличие от уравнений первого порядка для уравнений порядка n, кроме постановки задачи Коши, возможны другие постановки задач о выделении решений. Рассмотрим некоторые из них.

Многоточечная задача. *Возьмем точки* x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Положим* $y(x_i) = y_i$. *Требуется найти решение уравнения* (1.1) $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, *удовлетворяющее условиям*

$$\alpha_i y(x_i) + \beta_i y'(x_i) = \gamma_i. \tag{2.3}$$

Краевая задача. *Для уравнения второго порядка можно поставить задачу о нахождении решения уравнения* $F(x, y, y', y'') = 0$, *удовлетворяющего условиям*

$$\begin{cases} \alpha_0 y(x_0) + \beta_0 y'(x_0) = \gamma_0, \\ \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \gamma_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для поставленных задач можно сформулировать и доказать свои теоремы существования, единственности и другие результаты подобного типа о выделении конкретных решений. В частности, весьма интересной является задача Штурма—Лиувилля для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями, которая подробно рассматривается при разложении функций в обобщённый ряд Фурье по ортогональным системам функций.

Всюду ниже мы подробно рассмотрим задачу Коши.

Общим решением уравнения (2.1) *назовём его решение* $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, *содержащее* n *постоянных, которые можно подобрать так, чтобы удовлетворить любой, заранее выбранный набор начальных условий* (2.2).

2.2 Уравнения, допускающие понижение порядка

Выше нами были рассмотрены методы решения некоторых классов уравнений первого порядка. Возникает естественное желание свести уравнение порядка выше первого к уравнению более низкого порядка. В некоторых случаях это удаётся сделать. Рассмотрим их.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ решаются последовательным интегрированием n раз

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,\ y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2, \ldots$$

Пример 2.1

Решить уравнение $xy'' = 1$. Можем записать $y'' = \frac{1}{x}$, следовательно, $y' = \ln|x| + C_1$ и, интегрируя ещё раз, окончательно получаем $y = \int \ln|x|\,dx + C_1x + C_2 = x\ln|x| - x + C_1x + C_2$.

Пример 2.2

Решить уравнение $y''' = \sin 3x$. Интегрируя, получаем

$$y'' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1, \quad y' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

2. В уравнениях вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, $k \geqslant 1$ (то есть не содержащих в явном виде неизвестной функции и некоторых её производных) порядок понижается с помощью замены переменной $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$, и мы получаем уравнение $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$ порядка $n - k$. Его решением является функция $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, или, вспоминая, что такое z, получаем уравнение $y^{(n-k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ рассмотренного в случае 1 типа.

Пример 2.3

Решить уравнение $x^2y'' = (y')^2$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $x^2z' = z^2$. Разделяя переменные, получаем

$-\dfrac{dz}{z^2} = -\dfrac{dx}{x^2}$. Интегрируя, имеем $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + C_1 = \dfrac{1 + C_1 x}{x}$, или, что то же самое, $z = \dfrac{x}{1 + C_1 x}$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = \dfrac{x}{1 + C_1 x}$, откуда $dy = \dfrac{x\,dx}{1 + C_1 x}$. Интегрируя при $C_1 \neq 1$, окончательно получаем $y = \dfrac{1}{C_1}x - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|1 + C_1 x| + C_2$. Если $C_1 = 0$, то $z = x$, $y' = x$ и $y = 0{,}5x^2 + C_3$. Кроме того, при делении на z^2 мы потеряли решение $y' = 0$, или, что то же самое, $y = C$.

Пример 2.4

Решить уравнение $xy'' = y'$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $xz' = z$. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, имеем $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $z = C_1 x$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1 x$, откуда $dy = C_1 x\,dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y = 0{,}5C_1 x^2 + C_2$.

Пример 2.5

Решить уравнение $y''(e^x + 1) = y'e^x$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $z'(e^x + 1) = ze^x$. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{e^x\,dx}{e^x + 1}$. Интегрируя, имеем $\ln|z| = \ln(e^x + 1) + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $z = C_1(e^x + 1)$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1(e^x + 1)$, откуда $dy = C_1(e^x + 1)\,dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y = C_1(e^x + 1) + C_2$.

3. Следующим уравнением, допускающим понижение порядка, является уравнение вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее в явном виде независимой переменной. Порядок уравнения понижается с помощью замены переменной $y' = p(y)$, где p — новая искомая функция, зависящая от y. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p, \quad y''' = \frac{d}{dx}(p'\cdot p) = \frac{dp'}{dx}\cdot p + p'\frac{dp}{dx} =$$

$$= \frac{dp'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot p + p'\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p''\cdot p^2 + (p')^2\cdot p$$

и так далее. По индукции имеем $y^{(n)} = \varphi_{n-1}(p, p', \ldots, p^{(n-1)})$. Подставляя в исходное уравнение, понижаем его порядок на единицу.

Пример 2.6

Решить уравнение $(y')^2 + 2yy'' = 0$. Делаем стандартную для данного случая замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p' \cdot p$. Подставляя в уравнение, получаем $p^2 + 2y\dfrac{dp}{dy} \cdot p = 0$. Разделяя переменные, при $p \neq 0$, имеем $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{2y}$. Интегрируя, получаем $\ln|p| = -\dfrac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $p = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$. Тогда $y' = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$, или $\sqrt{y}\,dy = C_1\,dx$. Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем $\dfrac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2$. При разделении переменных мы могли потерять решение $y = C$, которое получается при $p = 0$, или, что то же самое, при $y' = 0$, но оно содержится в полученном выше решении при $C_1 = 0$.

Пример 2.7

Решить задачу Коши $y'' = 2yy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Делаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p' \cdot p$. Подставляя в уравнение, получаем $\dfrac{dp}{dy} \cdot p = 2yp$. В силу начальных условий $p \neq 0$ $\bigl(y'(0) = 1\bigr)$, поэтому на p можно сократить. Разделяя переменные, имеем $dp = 2y\,dy$. Интегрируя, получаем $p = y^2 + C_1$. Тогда $y' = y^2 + C_1$. Учитывая начальные условия, получаем $C_1 = 1$. Поэтому $y' = y^2 + 1$ или $dy = (y^2 + 1)\,dx$. Разделяя в последнем равенстве переменные и интегрируя, окончательно получаем $\operatorname{arctg} y = x + C_2$. Учитывая начальные условия, получаем $C_2 = 0$. Таким образом, искомое решение есть $\operatorname{arctg} y = x$, или, что то же самое, $y = \operatorname{tg} x$.

4. Иногда удаётся подметить особенность, позволяющую понизить порядок уравнения способами, отличными от рассмотренных выше. Покажем это на примерах.

Пример 2.8

Если обе части уравнения $yy''' = y'y''$ разделить на $yy'' \neq 0$, то получим уравнение $\dfrac{y'''}{y''} = \dfrac{y'}{y}$, которое можно переписать в виде $\bigl(\ln|y''|\bigr)' = \bigl(\ln|y|\bigr)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y''| = \ln|y| + \ln|C|$, или, что то же самое, $y'' = Cy$. Получилось уравнение на порядок ниже и рассмотренного ранее типа.

Пример 2.9

Аналогично для уравнения $yy'' = y'(y'+1)$ имеем $\dfrac{y''}{y'+1} = \dfrac{y'}{y}$, или $\left(\ln|y'+1|\right)' = \left(\ln|y|\right)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y'+1| = \ln|y| + \ln|C_1|$, или $y' = C_1 y - 1$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\ln|C_1 y - 1| = C_1 x + C_2$. При делении $y(y'+1)$ мы потеряли решения $y = 0$ и $y = -x + C$, которые в ранее найденное решение не входят.

2.3 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим множество $M[a, b]$ всех определённых на отрезке $[a, b]$ функций. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f_1, f_2 \in M[a, b]$ по правилу $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для $\forall x \in [a, b]$;
2) умножения элемента $f \in M[a, b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ для $\forall x \in [a, b]$.

Относительно введённых операций $M[a, b]$ является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1, 2, 9].

Рассмотрим два подмножества множества $M[a, b]$:

- $C[a, b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций;
- $C^n[a, b]$ — множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

Отметим, что имеет место поэлементное включение $C^n[a, b] \subset C[a, b] \subset M[a, b]$. Так как множества $C[a, b]$ и $C^n[a, b]$ относительно введённых линейных операций замкнуты, то есть результат операции снова есть элемент соответствующего множества, то они являются линейными подпространствами пространства $M[a, b]$. Следовательно, как самостоятельные объекты $C[a, b]$ и $C^n[a, b]$ являются линейными пространствами. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств введённые пространства бесконечномерны.

Определим оператор $L : C^n[a, b] \to C[a, b]$ следующим образом:

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)},$$

где $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — непрерывные функции, $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Докажем, что оператор L линеен. Действительно, так как для любых производных порядка k выполняется равенство

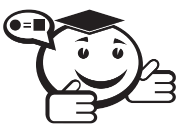
$$\frac{d^k}{dx^k}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \alpha_2 \frac{d^k y_2}{dx^k},$$

то можно записать

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) =$$

$$= \alpha_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k y_1}{dx^k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k y_2}{dx^k} = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2).$$

Сравнивая крайние части этого равенства, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.



Уравнение вида $L(y) = b(x)$, где $b(x)$ — некоторая функция, а $L(y)$ — введённый выше оператор, называется ***линейным дифференциальным уравнением** n**-го порядка***.

Иногда будем пользоваться подробными записями этого уравнения:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{2.5}$$

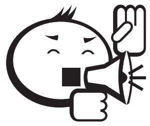
или

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b(x). \tag{2.6}$$

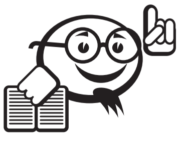
Так же как и для уравнений первого порядка, для линейных уравнений порядка n теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.

Теорема 2.2. Пусть функции $a_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и $b(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, $a_n(x) \neq 0$ для всякого x из $[\alpha, \beta]$ и пусть x_0 — некоторая точка этого отрезка. Тогда для любого набора начальных данных (2.2) $\left(y(x_0) = y_0^0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\right)$ существует единственное решение уравнения (2.5), определённое на всём отрезке $[\alpha, \beta]$.

Доказательство этого результата опустим.

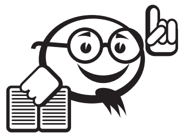


Отметим, что свойства решений линейных дифференциальных уравнений $L(y) = b(x)$ и $L(y) = 0$ подобны свойствам решений систем линейных алгебраических уравнений $Ax = B$ и $Ax = 0$. Приведём эти свойства.

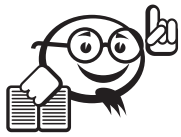


Теорема 2.3 (о наложении решений). Если y_1, y_2 — решения уравнений $L(y) = b_1(x)$ и $L(y) = b_2(x)$ с одной и той же левой частью и правыми частями $b_1(x)$, $b_2(x)$ соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ есть решение уравнения $L(y) = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$ с той же левой частью и правой частью, равной $\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$.

Доказательство. В силу линейности оператора L имеем $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Теорема доказана.



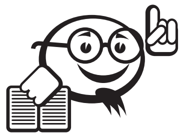
Следствие 1. Если y_1 — решение уравнения $L(y) = b_1$, y_2 — решение уравнения $L(y) = 0$, то для всякого числа α функция $y_1 + \alpha y_2$ — решение уравнения $L(y) = b_1$.



Следствие 2. Любая линейная комбинация решений уравнения $L(y) = 0$ снова есть решение этого уравнения.

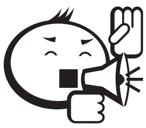
Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ есть решения уравнения $L(y) = 0$. Тогда $L\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j L(y_j) = 0$.

Следствие доказано.

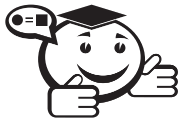


Следствие 3. Множество всех решений уравнения $L(y) = 0$ образует линейное подпространство пространства $C^n[a, b]$.

Доказательство. По предыдущему следствию линейные операции над решениями уравнения $L(y) = 0$ не выводят за пределы множества решений этого уравнения, что и доказывает следствие.



Напомним некоторые понятия линейной алгебры, которые нам потребуются в дальнейшем.



Система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называется ***линейно зависимой на отрезке*** *$[a, b]$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что*

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0$$

всюду на $[a, b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Так же как и для систем векторов, для систем функций справедливы следующие ниже свойства.

1. Система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда одна из них есть линейная комбинация остальных.

2. Всякая система функций, содержащая функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a, b]$, линейно зависима на $[a, b]$.

3. Всякая система функций, содержащая линейно зависимую на отрезке $[a, b]$ подсистему функций, линейно зависима на $[a, b]$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для систем векторов и предлагаются в качестве упражнений.

Приведём примеры линейно зависимых и линейно независимых систем функций.

Пример 2.10

Система функций $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ — линейно зависима на всей числовой оси, так как по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Пример 2.11

Функции $1, x, x^2, \ldots x^n$ образуют линейно независимую систему на любом отрезке числовой прямой, так как по основной теореме алгебры [7], полином (многочлен) степени n, у которого хотя бы один коэффициент отличен от нуля, не может обращаться в нуль более чем в n точках вещественной прямой.

Пример 2.12

Для доказательства линейной независимости системы функций $1, \cos x, \sin x$ требуется показать, что при любом ненулевом наборе констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выражение $\alpha_1 + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x$ не может тождественно равняться нулю.

Не всегда удаётся легко показать линейную зависимость или линейную независимость систем функций, пользуясь только определением. Для выяснения этого вопроса служит построенный ниже определитель.

Рассмотрим совокупность $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского*** *или* ***вронскианом системы функций*** $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Определитель Вронского служит индикатором линейной зависимости системы функций.

Теорема 2.4. Если система функций линейно зависима на $[\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю во всякой точке отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линейно зависима. Тогда по свойству 1 одну из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Подставляя эту линейную комбинацию в определитель Вронского, получаем, что при любом фиксированном x соответствующий столбец есть линейная комбинация остальных. Следовательно, по свойствам определителя он равен нулю для всех $x \in [\alpha, \beta]$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимая система решений линейного однородного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ коэффициентами и $a_n(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Предположим, что существует точка $x_0 \in [\alpha, \beta]$, в которой определитель Вронского $W(x_0)$ равен нулю. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Её определитель есть определитель Вронского $W(x_0)$, и так как по предположению $W(x_0) = 0$, то система имеет нетривиальное решение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ (хотя бы одно из α_j не равно нулю). Рассмотрим функцию $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x)$, где α_j — компоненты вектора α. Эта функция является решением уравнения $L(y) = 0$ по следствию 2 теоремы о наложении решений. С другой стороны, имеем:

$$y(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j'(x_0) = 0,$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что функция $y(x)$ удовлетворяет в точке x_0 системе нулевых начальных данных и по теореме существования и единственности $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Это противоречит линейной независимости системы функций $y_1, y_2, \dots, y_n$. Теорема доказана.

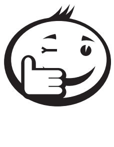
Займёмся выяснением размерности пространства решений однородного линейного уравнения $L(y) = 0$ и построением базиса в этом пространстве.

Теорема 2.6. Для любого линейного однородного дифференциального уравнения $L(y) = 0$ порядка n существует система, состоящая из n линейно независимых решений этого уравнения.

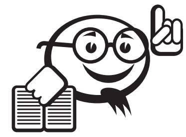
Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения $y_j(x)$, $j = 1, 2, \dots n$ уравнения $L(y) = 0$, чтобы выполнялись соотношения $y_j^{(k)}(x_0) = a_j^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. По теореме существования и единственности такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (2.7). Теорема доказана.



Замечание. Матрицу (2.7) можно взять единичную.



Теорема 2.7 (о виде общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимая система решений линейного однородного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$, то любое его решение есть линейная комбинация этих решений, то есть

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x), \tag{2.8}$$

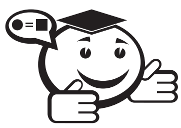
и, следовательно, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис пространства решений уравнения $L(y) = 0$.

Доказательство. Нам нужно показать, что любое частное решение уравнения $L(y) = 0$ получается из (2.8), то есть для любого набора начальных данных (2.2) $\left(y(x_0) = y_0^0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\right)$ существует набор чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такой, что соответствующее решение (2.8) удовлетворяет (2.2). Потребовав, чтобы решение (2.8) удовлетворяло условиям (2.2), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

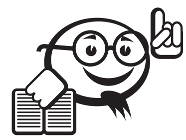
определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы.

Таким образом, нами показано, что, хотя само пространство $C^n[a, b]$ бесконечномерно, подпространство решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n конечномерно и имеет размерность n. Следовательно, в нём существует базис, состоящий из n функций.



Любой базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется ***фундаментальной системой решений этого уравнения****.*

Так же как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.



Теорема 2.8 (о виде общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения, то есть $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)$.

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ — какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородного линейного уравнения $L(y) = b$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных $y(x_0) = y_0^0, y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$ существует набор чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такой, что решение $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j y_j(x) + y_{\text{чн}}(x)$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы данное решение удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

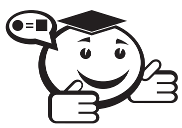
или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y_0^k - y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

2.4 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Поиск фундаментальной системы решений в общем случае является достаточно трудной задачей. Тем не менее есть класс уравнений, для которого эта задача достаточно легко решается. К изучению этого класса мы и приступаем.



Линейное дифференциальное уравнение (2.5) *назовём* ***уравнением с постоянными коэффициентами****, если в этом уравнении коэффициенты постоянны, то есть* $a_i(x) = \text{const}$.

Тогда соответствующее однородное уравнение $L(y) = 0$ будет иметь вид

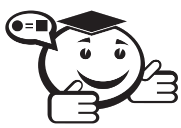
$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (2.9)$$

Решение уравнения (2.9) будем искать в виде $y = e^{rx}$. Тогда $y' = r \cdot e^{rx}$, $y'' = r^2 \cdot e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n \cdot e^{rx}$. Подставляя в (2.9), получаем

$$L(e^{rx}) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{rx} = e^{rx} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = e^{rx}(a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0) = 0.$$

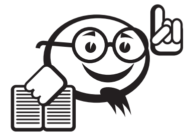
Так как e^{rx} нигде в нуль не обращается, то

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0. \qquad (2.10)$$



Уравнение (2.10) *называется* ***характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами***.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.



Теорема 2.9. Функция $y = e^{rx}$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.9) тогда и только тогда, когда r есть корень характеристического уравнения (2.10).

Возможны нижеследующие случаи.

1. *Все корни характеристического многочлена вещественны и различны*. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда получим n различных решений

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{r_n x} \tag{2.11}$$

уравнения (2.10). Докажем, что полученная система решений линейно независима. Рассмотрим её определитель Вронского:

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Множитель $e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x}$ в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x})$ нигде в нуль не обращается. Поэтому осталось показать, что второй сомножитель (определитель) не равен нулю. Допустим, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда строки этого определителя линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_1^{k-1} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_2^{k-1} = 0, \ldots,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot r_n^{k-1} = 0.$$

Таким образом, мы получили, что r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ есть n различных корней полинома $(n-1)$-й степени, а это невозможно. Следовательно, определитель в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x})$ не равен нулю и система функций (2.11) образует фундаментальную систему решений уравнения (2.9) в случае, когда корни характеристического уравнения различны.

Пример 2.13

Для уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ корнями характеристического уравнения $r^2 - 3r + 2 = 0$ будут $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Следовательно, фундаментальную систему решений составляют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, а общее решение записывается в виде $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. *Среди действительных корней характеристического уравнения есть кратные*. Предположим, что r_1 имеет кратность α, а все остальные различны. Рассмотрим вначале случай $r_1 = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_\alpha r^\alpha = 0,$$

так как в противном случае корень $r_1 = 0$ не являлся бы корнем кратности α. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_\alpha y^{(\alpha)} = 0,$$

то есть не содержит производных порядка ниже α. Этому уравнению удовлетворяют все функции, у которых производные порядка α и выше равны нулю. В частности, таковыми являются все полиномы степени не выше $\alpha - 1$, например

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^{\alpha-1}. \qquad (2.12)$$

Покажем, что данная система линейно независима. Составив определитель Вронского этой системы функций, получим

$$W\left(1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha-1}\right) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{\alpha-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (\alpha-1)x^{\alpha-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (\alpha-1)! \end{vmatrix}.$$

Это определитель треугольного вида с отличными от нуля элементами, стоящими на главной диагонали. Поэтому он отличен от нуля, что и доказывает линейную независимость системы функций (2.12). Заметим, что в одном из примеров предыдущего подраздела мы доказывали линейную независимость системы функций (2.12) другим способом. Пусть теперь корнем характеристического уравнения кратности α является число $r_1 \neq 0$. Произведём в уравнении (2.9) $L(y) = 0$ замену $y = ze^{r_1 x} = z\exp(r_1 x)$. Тогда

$$y' = (z' + r_1 z)e^{r_1 x}, \quad y'' = (z'' + 2r_1 z' + r_1^2 z)e^{r_1 x}$$

и так далее. Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, снова получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{(k)} = b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_1 z' + b_0 z = 0 \qquad (2.13)$$

и характеристическим уравнением

$$b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k + b_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j k^j = 0. \tag{2.14}$$

Отметим, что если k — корень характеристического уравнения (2.14), то $z = e^{kx}$ — решение уравнения (2.13), а $y = ze^{r_1 x} = e^{(k+r_1)x}$ является решением уравнения (2.9). Тогда $r = k + r_1$ — корень характеристического уравнения (2.10). С другой стороны, уравнение (2.9) может быть получено из уравнения (2.13) обратной заменой $z = ye^{-r_1 x}$, и поэтому каждому корню характеристического уравнения (2.10) соответствует корень $k = r - r_1$ характеристического уравнения (2.14). Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между корнями характеристических уравнений (2.10) и (2.14), причём различным корням одного уравнения соответствуют различные корни другого. Так как $r = r_1$ — корень кратности α уравнения (2.10), то уравнение (2.14) имеет $k = 0$ корнем кратности α. По доказанному ранее уравнение (2.13) имеет α линейно независимых решений

$$z_1 = 1,\ z_2 = x,\ z_3 = x^2, \ldots,\ z_\alpha = x^{\alpha-1},$$

которым соответствует α линейно независимых решений

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = xe^{r_1 x},\ y_3 = x^2 e^{r_1 x}, \ldots,\ y_\alpha = e^{r_1 x} x^{\alpha-1} \tag{2.15}$$

уравнения (2.9). Присоединяя полученную систему решений (2.15) к $n - \alpha$ решениям, соответствующим остальным корням характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае наличия действительных кратных корней.

Пример 2.14

Для уравнения $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ характеристическое уравнение $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 3 и $r = 1$ кратности 2, так как $r^5 - 2r^4 + r^3 = r^3(r-1)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^x$, $y_5 = xe^x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 xe^x$.

3. *Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.* Можно рассматривать комплексные решения, но для уравнений с действительными коэффициентами это не очень удобно. Найдём действительные решения, соответствующие комплексным корням. Так как мы рассматриваем уравнение с действительными коэффициентами, то для каждого комплексного корня $r_j = a + bi$ кратности α характеристического уравнения комплексно-сопряжённое ему число $r_k = a - bi$ также является корнем кратности α этого уравнения. Соответствующими этим корням парами решений являются функции $y_1^l = x^l e^{(a+bi)x}$ и $y_2^l = x^l e^{(a-bi)x}$, $l = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$. Вместо этих решений рассмотрим их линейные комбинации

$$\widetilde{y}_1^l = \frac{y_1^l + y_2^l}{2} = x^l e^{ax} \cos bx, \quad \widetilde{y}_2^l = \frac{y_1^l - y_2^l}{2i} = x^l e^{ax} \sin bx,$$

$l = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$, которые также являются решениями уравнения $L(y) = 0$. Так как преобразование, осуществляющее переход от y_1^l, y_2^l к $\widetilde{y}_1^l, \widetilde{y}_2^l$, $l = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$, невырожденное (с отличным от нуля определителем), то оно переводит линейно независимую систему решений в линейно независимую.

Пример 2.15

Для уравнения $y''' - 4y'' + 13y' = 0$ корни характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$ равны $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x} \cos 3x$, $y_3 = e^{2x} \sin 3x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$.

Пример 2.16

Для уравнения $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ характеристическое уравнение $r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ имеет корни $r = \pm 2i$ кратности 2, так как $r^4 + 8r^2 + 16 = (r^2 + 4)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = x \cos 2x$, $y_4 = x \sin 2x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x$.

С другими примерами нахождения фундаментальной системы решений и общего решения линейных однородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами можно познакомиться в п. 5.2.2 практикума [12] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

2.5 Метод вариации произвольных постоянных решения линейных неоднородных уравнений

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение (2.5)

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = b(x).$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений, а $y = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j y_j$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$. Аналогично случаю уравнений первого порядка будем искать решение уравнения (2.5) в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j. \tag{2.16}$$

Убедимся в том, что решение в таком виде существует. Для этого подставим функцию (2.16) в уравнение. Для подстановки функции в уравнение найдём её производные. Первая производная равна

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j'. \tag{2.17}$$

При вычислении второй производной в правой части (2.17) появится четыре слагаемых, при вычислении третьей производной — восемь слагаемых и так далее. Так как при подстановке решения (2.16) в уравнение (2.5) получается одно соотношение на n неизвестных функций, то остальные $n-1$ находятся в нашей власти. Поэтому первое слагаемое в (2.17) полагают равным нулю. С учётом этого вторая производная равна

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j' + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j''. \tag{2.18}$$

По тем же, что и раньше, соображениям, в (2.18) также полагаем первое слагаемое равным нулю. Наконец, n-я производная равна

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j^{(n)}. \tag{2.19}$$

Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, имеем

$$a_n(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) L(y_j) = b(x). \tag{2.20}$$

Второе слагаемое в (2.20) равно нулю, так как функции y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ являются решениями соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$. С учётом этого, соотношение (2.20) можно переписать в виде

$$a_n(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} = b(x). \tag{2.21}$$

Объединяя (2.21) с полученными при вычислении производных условиями, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения функций $C_j'(x)$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j' = 0, \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}, \ a_n(x) \neq 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и поэтому не равен нулю. Следовательно, существует единственное решение системы (2.22). Найдя его, получим функции $C_j'(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а следовательно, после интегрирования, и $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя эти значения в (2.16), получаем решение линейного неоднородного уравнения.

Для $n = 2$, то есть для уравнения второго порядка, система уравнений (2.22) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}, \end{cases}$$

а для $n = 3$ система (2.22) записывается в виде

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' = \dfrac{b(x)}{a_3(x)}. \end{cases}$$

Изложенный выше метод называется методом вариации произвольной постоянной или методом Лагранжа.

Пример 2.17

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{2}{e^{2x} + 4}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 4r + 3 = 0$ равны -1 и -3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{-3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2' составляем систему уравнений (2.22):

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ -C_1'e^{-x} - 3C_2'e^{-3x} = \dfrac{2}{e^{2x} + 4}, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1' = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 4}$, $C_2' = -\dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 4}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{2} + \widetilde{C}_1$, $C_2 = -e^x + 2\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{2} + \widetilde{C}_2$. Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, окончательно находим

$$y = -e^{-2x} + 2e^{-3x}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + \widetilde{C}_1e^{-x} + \widetilde{C}_2e^{-3x}.$$

Пример 2.18

Найдём общее решение уравнения $y'''-7y'-6y = e^{5x}$. Корни характеристического полинома $r^3 - 7r - 6$ соответствующего однородного уравнения равны -2, -1, 3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2', C_3' составляем систему уравнений (2.22)

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} + C_3'e^{3x} = 0, \\ -2C_1'e^{-2x} - C_2'e^{-x} + 3C_3'e^{3x} = 0, \\ 4C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} + 9C_3'e^{3x} = e^{5x}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = \frac{1}{5}e^{7x}$, $C_2' = -\frac{1}{4}e^{6x}$, $C_3' = \frac{1}{20}e^{2x}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \frac{1}{35}e^{7x} + \widetilde{C}_1$, $C_2 = -\frac{1}{24}e^{6x} + \widetilde{C}_2$, $C_3 = \frac{1}{40}e^{2x} + \widetilde{C}_3$. Подставляя C_1, C_2, C_3 в выражение для y, окончательно находим

$$y = \frac{1}{84}e^{5x} + \widetilde{C}_1e^{-2x} + \widetilde{C}_2e^{-x} + \widetilde{C}_3e^{3x}.$$

С другими примерами нахождения общего решения линейных неоднородных уравнений высших порядков можно познакомиться в п. 5.2.3 практикума [12] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

2.6 Уравнения с правой частью специального вида

Как было показано ранее, общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b(x)$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида это частное решение может быть найдено достаточно просто. Займёмся этим вопросом.

Функцию $b(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j(x)e^{\lambda_j x}$, где $P_j(x)$ — некоторые полиномы (многочлены), назовём квазиполиномом. По теореме о наложении решений если y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ — решения уравнений $L(y) = b_j(x)$, то $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ есть решение уравнения $L(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j b_j(x)$. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что правая часть уравнения $L(y) = b(x)$ с постоянными коэффициентами имеет вид $b(x) = P(x)e^{\lambda x}$. В частности, если $\lambda = \alpha + \beta i$ — комплексное число, то наиболее общей правой частью указанного типа является функция

$$b(x) = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big), \tag{2.23}$$

у которой $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые полиномы. Справедлив следующий результат.

Теорема 2.10. Линейное дифференциальное уравнение

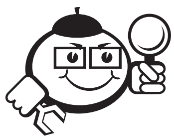
$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

с постоянными коэффициентами и правой частью вида (2.23) имеет частное решение

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}\big(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\big),$$

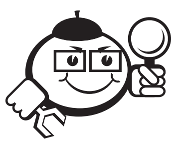
где $R(x)$, $S(x)$ — полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов $P(x)$, $Q(x)$; k — число, равное кратности корня $\alpha + \beta i$ характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, если $\alpha + \beta i$ — корень этого полинома, и $k = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического полинома.

Доказательство этого результата опустим.



Пример 2.19

Для уравнения $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ являются $r = 2$ кратности 1 и $r = 1$ кратности 2. Так как правая часть данного уравнения может быть записана в виде $(2x+3)\big(e^{0\cdot x}\big(\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x)\big)\big)$, то $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Следовательно, $\alpha + \beta i = 0$. Число $r = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $k = 0$, и частное решение ищем в виде $y = cx + d$. Так как $y' = c$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, то, подставляя в уравнение, получаем $5c - 2cx - 2d = 2x + 3$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-2c = 2$, $5c - 2d = 3$. Следовательно, $c = -1$, $d = -4$ и $y = -x - 4$ — частное, а $y = -x - 4 + C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x}$ — общее решения уравнения.



Пример 2.20

Для уравнения $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (2x+3)e^{2x}$ правая часть может быть записана в виде $(2x+3)\big(e^{2x}\big(\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x)\big)\big)$. Поэтому $\alpha = 2$, $\beta = 0$. Следовательно,

$\alpha+\beta i = 2$. Число $r = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(cx+d)e^{2x}$.

Пример 2.21

Для уравнения $y'' + y = \cos x$ корнями характеристического полинома $r^2 + 1$ являются числа $r = \pm i$ кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(a_1 \cos x + a_2 \sin x)$. Тогда

$$y' = (a_1 + a_2x)\cos x + (a_2 - a_1x)\sin x,$$

$$y'' = (2a_2 - a_1x)\cos x + (-2a_1 - a_2x)\sin x.$$

Подставляя в исходное уравнение и приводя подобные, получаем $2a_2 \cos x - 2a_1 \sin x = \cos x$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = 0{,}5$. Следовательно, $y = 0{,}5x\sin x$ — частное, $y = 0{,}5x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$ — общее решения уравнения.

С другими примерами нахождения частного решения линейных неоднородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами по виду правой части можно познакомиться в п. 5.2.4 практикума [12] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

Контрольные вопросы по главе 2

1. Напишите известные Вам типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.
2. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.
3. Напишите общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
4. Сформулируйте теорему о наложении решений для линейного дифференциального уравнения порядка n.
5. Что такое фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка?
6. Напишите вид общего решения решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
7. Корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами есть $r_1 = 8$, $r_{2,3,4} = 7$, $r_{5,6,7,8} = 2 \pm 3i$. Напишите фундаментальную систему решений этого уравнения и его общее решение.
8. Напишите вид общего решения решений линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.
9. Дополните систему функций x^3e^{3x}, $e^{2x}\cos x$, $\cos x$ до фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Определите порядок уравнения, для которого полученная система будет фундаментальной системой решений.
10. Напишите по виду правой части вид частного решения уравнения $y'' + 4y' + 3y = x^3e^{3x}$.

Глава 3

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Общая теория

Система уравнений, связывающая независимую переменную, искомые функции и некоторое количество их производных, то есть система уравнений вида

$$\begin{cases} F_1\left(x,\ y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)},\ y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots,\ y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}\right) = 0, \\ F_2\left(x,\ y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)},\ y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots,\ y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}\right) = 0, \\ \ldots \\ F_k\left(x,\ y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)},\ y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots,\ y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}\right) = 0, \end{cases}$$

называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Если эта система разрешена относительно старших производных $y_1^{(n_1)}, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_k^{(n_k)}$, то она называется системой в канонической форме и имеет вид

$$y_l^{(n_l)} = \varphi_l\left(x,\ y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)},\ y_2, \ldots, y_2^{(n_2-1)}, \ldots,\ y_k, \ldots, y_k^{(n_k-1)}\right), \quad l = \overline{1, k}.$$

Эту систему путём введения новых неизвестных функций [5–8, 13, 14] можно привести к виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

В этом случае система называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме или системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Покажем, как это можно сделать для одного уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ n-го порядка. Полагаем $y = z_1$, $z_2 = z_1' = y', \ldots, z_n = z_{n-1}' = y^{(n-1)}$. В результате можем составить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \ldots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n). \end{cases}$$

Если ввести в рассмотрение векторы $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ и вспомнить [3], что производная вектор-функции по скалярному аргументу вычисляется по формуле $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$, то систему (3.1) можно записать в векторной форме

$$y' = f(x, y), \tag{3.2}$$

которая по виду совпадает с записью дифференциального уравнения первого порядка.

Если функции f_i, $i = \overline{1, n}$ не зависят от x, то система (3.1) называется автономной. В этом случае обычно вместо x пишут t и систему записывают в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

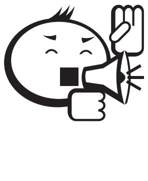
или в векторной форме

$$y' = f(y).$$

Если трактовать независимую переменную как время, то автономные системы отличаются тем, что их поведение не зависит от начала отсчёта переменной t, а зависит от начальной точки и времени, прошедшего с начала процесса. Действительно, сделав замену переменных $\tau = t - t_0$, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} = f\big(y(\tau)\big).$$

Более подробно с автономными системами можно ознакомиться в [8, 14].



Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) можно поставить задачу Коши: *найти решение* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ *системы* (3.1)*, удовлетворяющее начальным условиям*

$$\big(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)\big)^T = \big(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\big)^T. \tag{3.3}$$

В векторной форме условия (3.3) имеют вид $y(x_0) = y^0$.

Так же как и для дифференциальных уравнений, для систем дифференциальных уравнений справедлива теорема существования и единственности.

Теорема 3.1. Пусть в системе уравнений (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

все функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ непрерывны по совокупности переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ в области D и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда найдётся окрестность точки x_0, в которой решение системы уравнений (3.1), удовлетворяющее начальным данным (3.3), существует и единственно.

Доказательство этого результата опустим.

Семейство

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.4}$$

решений системы дифференциальных уравнений (3.1) *назовём её* ***общим решением****, если для любого набора начальных данных* $(x_0, y^0) = (x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$ *найдутся константы* $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$*, на которых этот набор реализуется, то есть такие, что для решений* $y_i = \varphi_i(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *выполнены начальные условия* $y_i^0 = \varphi_i(x_0, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — общее решение системы уравнений (3.1), то, как следует из определения, при любых $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ из области D система уравнений $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ разрешима относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то есть может быть записана в виде

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — некоторые, не обязательно однозначные, функции. Каждая из функций $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ обладает тем свойством, что на любом частном решении $y(x) = \big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big)^T$ системы уравнений (3.1) функция $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ тождественно равна константе, то есть $\psi_i\big(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big) \equiv C$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Функцию $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *назовём* ***интегралом системы дифференциальных уравнений*** (3.1)*, если на любом частном решении* $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ *системы уравнений* (3.1) *эта функция обращается в константу, то есть* $\psi\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \equiv C$.

Соотношение

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C,$$

где $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *— интеграл системы дифференциальных уравнений* (3.1)*, назовём* ***первым интегралом этой системы***.

Таким образом, соотношения (3.5) есть совокупность n первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1). Имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. Система первых интегралов (3.5) системы дифференциальных уравнений (3.1), полученная из общего решения (3.4), независима.

Доказательство теоремы опустим.

В теореме 3.2 утверждается, что для системы (3.5) первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) нельзя подобрать функцию $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, такую, чтобы выполнялось соотношение

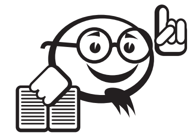
$$\phi\left(\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\right) = 0.$$

Отметим следующий факт.

Теорема 3.3. Если $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, некоторая совокупность первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) и $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — некоторая функция, то $\phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$ есть интеграл системы дифференциальных уравнений (3.1).

Доказательство. Пусть $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ — частное решение системы уравнений (3.1). Тогда $\psi_i\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \equiv C_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Подставляя эти соотношения в $\phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$, получаем константу $\phi(C_1, C_2, \ldots, C_m)$.

С другой стороны, справедлива следующая теорема.



Теорема 3.4. Любая совокупность, состоящая из не менее чем $n+1$-го первого интеграла системы дифференциальных уравнений (3.1), зависима.

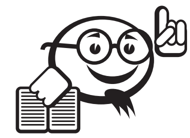
Доказательство этого результата опустим.

В теореме 3.4 утверждается, что если $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, — совокупность первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1), то существует функция $\phi(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$, такая, что выполняется соотношение

$$\phi\big(\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,\ \psi_{n+1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) = 0.$$

Из теорем 3.2, 3.3 и 3.4 следует, что для построения любого интеграла системы дифференциальных уравнений (3.1) достаточно знать n независимых первых интегралов этой системы дифференциальных уравнений. Общего метода нахождения n независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (3.1) нет. Часть из них (а иногда и все) может быть найдена с помощью метода интегрируемых комбинаций, рассмотренного ниже.

Для проверки независимости некоторой системы первых интегралов полезен следующий факт.



Теорема 3.5. Система первых интегралов $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ независима тогда и только тогда, когда ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

равен m, или, что то же самое, хотя бы один из миноров порядка m этой матрицы отличен от нуля.

Доказательство этого результата опустим.

В общем случае для решения систем имеются методы исключения неизвестных и интегрируемых комбинаций. Как указывалось ранее, любое уравнение порядка n можно свести к системе n уравнений в нормальной форме. Возможна и обратная процедура. На этой идее и основан метод исключения неизвестных. Разберём его на примере.

Пример 3.1

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \end{cases}$$

выражая y из второго уравнения, имеем $y = -x' + \cos t$, $y' = -x'' - \sin t$. Подставляя в первое уравнение и приводя подобные, получаем уравнение $x'' + 4x' + 3x = 0$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 4r + 3 = 0$ равны $r_1 = -3$, $r_2 = -1$. Поэтому $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = 3C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} + \cos t$. В векторной форме то же самое будет иметь вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$.

3.2 Системы дифференциальных уравнений в симметричной форме

Рассмотрим систему (3.1) дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

В этой системе переменные x и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неравноправны (x — независимая переменная, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции). Каждое из уравнений $y_i' = \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ можно переписать в виде $\dfrac{dy_i}{f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \dfrac{dx}{1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как правые части полученных соотношений равны, то, приравнивая левые части, получаем

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \qquad (3.6)$$

Умножим, при необходимости, знаменатели на одну и ту же функцию $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, например, если $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — дроби, то на общий знаменатель этих дробей. Положим

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_{n+1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вводя новые переменные $x_{n+1} = x$, $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, систему (3.6) можем переписать в виде

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}. \tag{3.7}$$

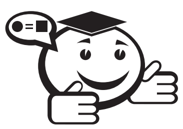
Система уравнений (3.7) называется системой дифференциальных уравнений в симметричной форме.

С другой стороны, возможен и обратный переход от системы дифференциальных уравнений в симметричной форме (3.7) к эквивалентной ей системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (3.1).

Действительно, из (3.7) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}, \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dx_{n+1}} = \dfrac{F_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{F_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Эта запись отличается от (3.1) лишь обозначениями. Сказанное выше позволяет дать следующее определение.



Интеграл и первый интеграл системы дифференциальных уравнений (3.8) *назовём соответственно* ***интегралом*** *и* ***первым интегралом системы дифференциальных уравнений*** (3.7).

3.3 Метод интегрируемых комбинаций

Система дифференциальных уравнений в симметричной форме (3.7) позволяет иногда получать первые интегралы с помощью так называемого метода интегрируемых комбинаций.

Интегрируемой комбинацией будем называть дифференциальное уравнение, которое легко решается. Например, для уравнения $\dfrac{dx + 2y\,dy}{x + y^2} = \dfrac{dx}{x}$, так как $dx + 2y\,dy = d\,(x + y^2)$, можем написать $\dfrac{d\,(x + y^2)}{x + y^2} = \dfrac{dx}{x}$, или, что то же самое, $d\ln|x + y^2| = d\ln|x|$. Так как дифференциалы равны, то сами функции отличаются на константу. Поэтому из последнего соотношения имеем $\ln|x + y^2| = \ln|x| + \ln|C|$ или, потенцируя (переходя от $\ln a$ к $e^{\ln a}$), получаем $\dfrac{x + y^2}{x} = C$. Заметим, что полученное выражение является первым интегралом исходного дифференциального уравнения.

Простейшей интегрируемой комбинацией является соотношение $d\psi = d\varphi$, из которого имеем $\psi = \varphi + C$, или $\psi - \varphi = C$. Частным случаем приведённой интегрируемой комбинации является соотношение $\dfrac{d\psi}{\varphi} = 0$, или, что то же самое, $d\psi = 0$, и, следовательно, $\psi = C$. Общего метода нахождения интегрируемых комбинаций нет. Различные интегрируемые комбинации можно получить с помощью известного свойства пропорций:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k b_k}, \tag{3.9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые числа. Иногда сравнительно просто удаётся найти лишь $k < n$ первых интегралов

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{3.10}$$

системы дифференциальных уравнений. Тогда, выражая из (3.10) k переменных и подставляя полученные соотношения в систему дифференциальных уравнений, понижаем порядок системы до $n - k$. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью метода интегрируемых комбинаций покажем на примерах.

Пример 3.2

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{2y - z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$. Первую интегрируемую комбинацию $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ видно сразу. Следовательно, $\ln|y| = \ln|z| + \ln|C_1|$. Потенцируя, получаем $y = C_1 z$, или, что то же самое, $\dfrac{y}{z} = C_1$. Умножая числитель и знаменатель второй дроби на 2, получаем $\dfrac{dx}{2y - z} = \dfrac{2\,dy}{2y} = \dfrac{dz}{z}$. Используя соотношение (3.9) с $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = -1$, получаем $\dfrac{dx - 2\,dy + dz}{2y - z - 2y - z} = \dfrac{dz}{z}$, или, что то же самое, $\dfrac{dx - 2\,dy + dz}{0} = \dfrac{dz}{z}$. Это возможно лишь при $dx - 2\,dy + dz = 0$. Переписывая полученное равенство в виде $d(x - 2y + z) = 0$, имеем второй первый интеграл $x - 2y + z = C_2$. Нетрудно показать, что найденные первые интегралы независимы.

Пример 3.3

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$. Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x, получаем $\dfrac{x\,dx}{xz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$. Используя соотношение (3.9) с $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$, получаем $\dfrac{x\,dx - dy}{0} = \dfrac{dz}{y}$. Это возможно лишь при $x\,dx - dy = 0$, или, умножая на 2, $2x\,dx - 2\,dy = 0$. Переписывая полученное равенство в виде $d(x^2 - 2y) = 0$, имеем первый интеграл $x^2 - 2y = C_1$. Второй первый интеграл найдём, исключая переменную y из системы дифференциальных уравнений. Для этого запишем систему в нормальной форме. Разделив в исходной системе все знаменатели на переменную z, получаем $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{(y/z)}$. Поэтому система дифференциальных уравнений в нормальной форме запишется в виде $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{z}. \end{cases}$ Выражая из полученного выше первого интеграла y и подставляя его во второе уравнение, имеем $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x^2 - C_1}{2z}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем $2z\,dz = (x^2 - C_1)\,dx$. Проинтегрировав, имеем $z^2 = \dfrac{x^3}{3} - C_1x + C_2$, или $z^2 - \dfrac{x^3}{3} + C_1x = C_2$. Подставляя C_1 из найденного ранее первого интеграла, получаем второй первый интеграл $z^2 - \dfrac{x^3}{3} + (x^2 - 2y)x = C_2$. Нетрудно показать, что найденные первые интегралы независимы.

3.4 Системы линейных дифференциальных уравнений

Если в системе (3.1) все функции f_i линейны по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то она называется линейной. В этом случае её можно переписать в виде

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1(x)y_1 + a_2^1(x)y_2 + \ldots + a_n^1(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_1^2(x)y_1 + a_2^2(x)y_2 + \ldots + a_n^2(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots \\ y_n' = a_1^n(x)y_1 + a_2^n(x)y_2 + \ldots + a_n^n(x)y_n + b_n(x). \end{cases} \tag{3.11}$$

Обозначая $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ через y, матрицу системы через $A(x)$, а вектор $\big(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)\big)^T$ через $b(x)$, систему (3.11) можем переписать в матричной форме

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{3.12}$$

или в эквивалентном виде

$$y' - A(x)y = b(x). \tag{3.13}$$

Будем по возможности пользоваться одной из форм (3.12) или (3.13) матричной записи. Если $b(x) = 0$, то получаем соответствующую систему однородных уравнений

$$y' = A(x)y, \tag{3.14}$$

или, что то же самое,

$$y' - A(x)y = 0. \tag{3.15}$$

Для систем линейных уравнений строится теория, полностью эквивалентная теории линейных уравнений порядка n. В частности, справедлива теорема о наложении решений и её следствия. В том числе и теорема о том, что множество решений однородной системы (3.14) образует линейное подпространство в пространстве дифференцируемых вектор-функций. Сформулируем и по возможности докажем эти результаты.

Так же как и в п. 2.3 мы рассматривали множество $M[a, b]$ всех определённых на отрезке $[a, b]$ скалярных функций, рассмотрим множество $M_n[a, b]$ всех заданных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)^T$. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f, g \in M_n[a, b]$ по правилу

$$(f+g)(x) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}\right)(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) + g_1(x) \\ f_2(x) + g_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) + g_n(x) \end{pmatrix} = f(x) + g(x) \text{ для } \forall x \in [a, b];$$

2) умножения элемента $f \in M_n[a, b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону

$$(\alpha f)(x) = \begin{pmatrix} \alpha f_1(x) \\ \alpha f_2(x) \\ \vdots \\ \alpha f_n(x) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \alpha \cdot f(x) \text{ для } \forall x \in [a, b].$$

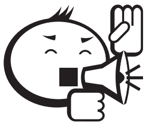
Так же как и соответствующее пространство $M[a, b]$ скалярных функций скалярного аргумента, пространство $M_n[a, b]$ относительно введённых операций является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1, 2, 9].

Рассмотрим два подмножества множества $M_n[a, b]$:

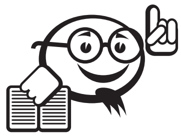
- $C_n[a, b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций;
- $C_n^k[a, b]$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ вектор-функций.

Отметим, что имеет место поэлементное включение $C_n^k[a, b] \subset C_n[a, b] \subset \subset M_n[a, b]$. Так как множества $C_n[a, b]$ и $C_n^k[a, b]$ замкнуты относительно введённых линейных операций, то есть результат операции снова принадлежит соответствующему множеству, то они являются линейными подпространствами пространства $M_n[a, b]$. Следовательно, как самостоятельные объекты, $C_n[a, b]$ и $C_n^k[a, b]$

являются линейными пространствами. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств введённые пространства, так же как и рассмотренные в п. 2.3 соответствующие пространства $M[a,b]$, $C[a,b]$ и $C^k[a,b]$ скалярных функций скалярного аргумента, бесконечномерны.



Отметим, что свойства решений систем линейных дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b(x)$ и $y' - A(x)y = 0$ подобны свойствам решений линейных дифференциальных уравнений $L(y) = b(x)$ и $L(y) = 0$ и систем линейных алгебраических уравнений $Ax = B$ и $Ax = 0$. Приведём эти свойства.



Теорема 3.6 (о наложении решений). Если $y^1 = (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)^T$, $y^2 = (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)^T$ — решения систем дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b^1(x)$ и $y' - A(x)y = b^2(x)$, у которых одна и та же левая часть, а правые равны соответственно $b^1(x)$, $b^2(x)$, то линейная комбинация $\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2$ есть решение уравнения

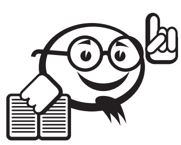
$$y' - A(x)y = \alpha_1 b^1(x) + \alpha_2 b^2(x)$$

с той же левой частью и правой частью равной $\alpha_1 b^1(x) + \alpha_2 b^2(x)$.

Доказательство. Можно воспользоваться линейностью оператора $L(y) = y' - A(x)y$ и повторить соответствующее доказательство теоремы 2.3 о наложении решений для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Предлагаем читателю проделать это самостоятельно. А можно доказать непосредственно, воспользовавшись свойствами умножения матрицы на вектор и правилом дифференцирования суммы вектор-функций $(y^1 + y^2)' = (y^1)' + (y^2)'$. Действительно, имеем

$$\left(y^1 + y^2\right)' - A(x)\left(y^1 + y^2\right) = \left(y^1\right)' + \left(y^2\right)' - A(x)y^1 - A(x)y^2 =$$
$$= \left(\left(y^1\right)' - A(x)y^1\right) + \left(\left(y^1\right)' - A(x)y^2\right) = \alpha_1 b^1(x) + \alpha_2 b^2(x).$$

Теорема доказана.



Следствие 1. Если $y^1 = (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)^T$, $y^2 = (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)^T$ — решения систем дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b^1(x)$ и $y' - A(x)y = 0$ соответственно, то для всякого числа α функция $y^1 + \alpha y^2$ — решение системы дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = b^1(x)$.

Следствие 2. Любая линейная комбинация решений системы дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$ снова есть решение этой системы дифференциальных уравнений.

Доказательство. Пусть $y^1, y^2, \ldots, y^m$ есть решения системы дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$. Тогда

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y^j\right)' - A(x)\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(\left(y^j\right)' - A(x)y^j\right) = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Множество всех решений системы дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$ образует линейное подпространство пространства $C_n^1[a, b]$.

Доказательство. По предыдущему следствию линейные операции над решениями системы дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$ не выводят за пределы множества решений этой системы уравнений, что и доказывает следствие.

Напомним понятия линейной алгебры, которые нам потребуются в дальнейшем.

Так же, как для векторов [1, 2] и систем скалярных функций, для систем вектор-функций вводятся понятия их линейной зависимости и линейной независимости.

Система вектор-функций $y^1, y^2, \ldots, y^m$ называется ***линейно зависимой на отрезке*** $[a, b]$*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что*

$$\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_m y^m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y^m = 0$$

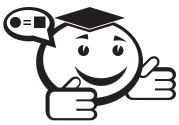
всюду на $[a, b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Так же как и для систем векторов, для систем функций справедливы следующие ниже свойства.

1. Система вектор-функций $y^1, y^2, \ldots, y^m$, $m \geqslant 2$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда одна из них есть линейная комбинация остальных.

2. Всякая система вектор-функций, содержащая функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a, b]$, линейно зависима на $[a, b]$.
3. Всякая система вектор-функций, содержащая линейно зависимую на отрезке $[a, b]$ подсистему вектор-функций, линейно зависима на $[a, b]$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для систем векторов и предлагаются в качестве упражнений.



Рассмотрим совокупность вектор-функций $y^1, y^2, \ldots, y^n$. Определитель, составленный из их координат,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \ldots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^n & y_2^n & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского*** *или* ***вронскианом системы вектор-функций*** $y^1, y^2, \ldots, y^n$.

Так же как и для систем скалярных функций, определитель Вронского системы вектор-функций служит индикатором её линейной зависимости или линейной независимости.

Теорема 3.7. Если система вектор-функций линейно зависима, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем векторов [1, 2] и систем скалярных функций, приведённому в п. 2.3. Предлагается сделать это самостоятельно.

Теорема 3.8. Если $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' - A(x)y = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем скалярных функций, приведённому в п. 2.3. Предлагается доказать эту теорему самостоятельно.

Займёмся выяснением размерности пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений $y' - A(x)y = 0$ и построением базиса в этом пространстве.

Теорема 3.9. Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений $y' = A(x)y$ порядка n с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$ существует система n линейно независимых решений этой системы уравнений.

Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_n^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^n & q_2^n & \dots & q_n^n \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения $y^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$ системы уравнений $y' - A(x)y = 0$, чтобы выполнялись соотношения $y_k^j(x_0) = q_k^j$, $k = 1, 2, \dots, n$. По теореме существования и единственности решений такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (3.16). Теорема доказана.

Матрицу (3.16) можно взять единичную.

Теорема 3.10 (о виде общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений). Если $y^1, y^2, \dots, y^n$ — линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' - A(x)y = 0$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то любое решение этой системы есть линейная комбинация решений $y^1, y^2, \dots, y^n$, то есть

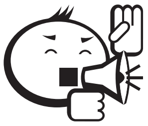
$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y^j(x),$$

и, следовательно, $y^1, y^2, \dots, y^n$ — базис пространства решений системы уравнений $y' - A(x)y = 0$.

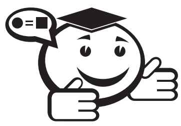
Доказательство. Нам нужно доказать, что для любого набора начальных данных (3.3) $\big(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)\big)^T = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T$ можно подобрать константы C_j, $j = 1, 2, \dots, n$, так, что соответствующее решение $y(x)$ удовлетворяет (3.3). Потребовав, чтобы решение $y(x)$ удовлетворяло условиям (3.3), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы.

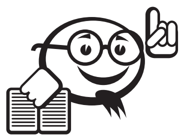


Таким образом, нами показано, что, хотя само пространство $C_n^1[a, b]$ бесконечномерно, подпространство решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка конечномерно и имеет размерность n. Следовательно, в нём существует базис, состоящий из n функций.



Любой базис пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка называется ***фундаментальной системой решений этой системы уравнений***.

Так же как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.



Теорема 3.11 (о виде общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений $y' = A(x)y + b(x)$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и компонентами вектора $b(x)$, $A(x) \neq 0$, для всех $x \in [\alpha, \beta]$, есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородной системы уравнений, то есть $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)$.

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородной системы линейных уравнений $y' = A(x)y + b(x)$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных $\big(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)\big)^T = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$ можно подобрать константы C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ так, что решение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y^j(x) + y_{\text{чн}}(x), \tag{3.17}$$

где $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы решение (3.17) удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) + (y_{\text{чн}})_k(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) = y_k^0 - (y_{\text{чн}})_k(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

3.5 Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Как и в случае линейных уравнений высших порядков, наиболее полно разработаны вопросы нахождения фундаментальной системы решений для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + \ldots + a_n^1 y_n, \\ y_2' = a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_n^2 y_n, \\ \ldots \\ y_n' = a_1^n y_1 + a_2^n y_2 + \ldots + a_n^n y_n. \end{cases} \tag{3.18}$$

Пусть A — матрица системы, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Учитывая, что $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$, систему (3.18) можем переписать в матричной форме

$$y' = Ay, \tag{3.19}$$

или, что то же самое, в виде

$$y' - Ay = 0. \tag{3.20}$$

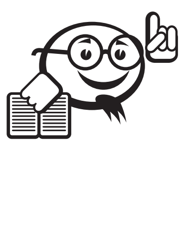
Будем искать ненулевое решение системы (3.18) в виде

$$y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T e^{rt} = (\alpha_1 e^{rt}, \alpha_2 e^{rt}, \ldots, \alpha_n e^{rt})^T. \tag{3.21}$$

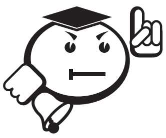
Вычисляя производную, имеем

$$y' = (\alpha_1 r e^{rt}, \alpha_2 r e^{rt}, \ldots, r\alpha_n e^{rt})^T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T r e^{rt} = \boldsymbol{\alpha} r e^{rt}. \tag{3.22}$$

Подставив (3.21) и (3.22) в (3.18), получаем равенство $\boldsymbol{\alpha} r e^{rt} = A\boldsymbol{\alpha} e^{rt}$, откуда, сокращая на e^{rt}, можем записать $\boldsymbol{\alpha} r = A\boldsymbol{\alpha}$ или $A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} r = A\boldsymbol{\alpha} - E\boldsymbol{\alpha} r = (A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$. Последнее соотношение $(A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$ есть система линейных алгебраических уравнений для нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A. С другой стороны, если r — собственное число, а $\boldsymbol{\alpha}$ — соответствующий ему собственный вектор матрицы A, то, подставляя $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$, $y' = \boldsymbol{\alpha} r e^{rt}$ в (3.18), получаем с учётом $(A - rE)\boldsymbol{\alpha} = 0$, что $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$ есть решение системы (3.18). Таким образом, нами доказан следующий результат.



Теорема 3.12. Вектор-функция $y = \boldsymbol{\alpha} e^{rt}$ является решением однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.18) тогда и только тогда, когда r — собственное число, а $\boldsymbol{\alpha}$ — соответствующий ему собственный вектор матрицы A.



Подробнее об определении и нахождении собственных векторов и собственных чисел смотрите в книгах по линейной алгебре, в частности [1] и [2].

Возможны два случая:

1) все собственные числа различны;
2) есть кратные собственные числа.

Разберём эти возможности по отдельности.

В первом случае имеем n решений

$$y^1 = \boldsymbol{\alpha}^1 e^{r_1 t},\ y^2 = \boldsymbol{\alpha}^2 e^{r_2 t}, \ldots,\ y^n = \boldsymbol{\alpha}^n e^{r_n t}.$$

Эта система функций линейно независима, так как её определитель Вронского отличен от нуля. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 e^{r_1 t} & \alpha_2^1 e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^1 e^{r_n t} \\ \alpha_1^2 e^{r_1 t} & \alpha_2^2 e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^2 e^{r_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n e^{r_1 t} & \alpha_2^n e^{r_2 t} & \ldots & \alpha_n^n e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \ldots + r_n)t} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Первый сомножитель $e^{(r_1 + \ldots + r_n)t}$ в полученном соотношении отличен от нуля. Второй сомножитель есть определитель, в строках которого стоят компоненты собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^n$ матрицы A. Так как система векторов $\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^n$ есть система, отвечающая разным собственным числам, то она линейно независима [2] и, следовательно, определитель отличен от нуля. Таким образом, мы получили n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Во втором случае возможны два варианта. Пусть для собственного числа r_j кратности k имеется k линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}^{j_1}, \boldsymbol{\alpha}^{j_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{j_k}$. Этот вариант ничем не отличается от предыдущего случая. Во втором варианте для собственного числа r_j кратности k имеется меньше чем k линейно независимых собственных векторов. Имеются два способа получения совокупности n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Первый основан на приведении матрицы к жордановой форме и изложен в [5, 15]. Второй называется методом Эйлера и заключается в том, что для собственного числа r_j соответствующие решения находятся в виде $y = P_{k-1}(t)e^{r_j t}$, где $P_{k-1}(t)$ — вектор-функция, каждая координата которой есть полином степени не выше $k - 1$ с неопределёнными коэффициентами, подлежащими определению. Подставляя это решение в (3.18), получаем соотношения для определения коэффициентов вектор-функции $P_{k-1}(t)$.

Пример 3.4

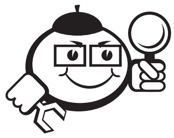
Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x - 2y - 2z, \\ y' = 3x + 6y + 5z, \\ z' = -2x - 2y - z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 1$ с соответствующим собственным вектором $p_1 = (0, 1, -1)^T$, $\lambda_2 = 2$ с собственным вектором $p_2 = (2, 1, -2)^T$ и $\lambda_3 = 3$ с собственным вектором $p_3 = (1, -1, 0)^T$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $p_1 e^t$, $p_2 e^{2t}$, $p_3 e^{3t}$, а общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.5

Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 3$ с соответствующим собственным вектором $p_1 = (-1, 1, 3)^T$ и $\lambda_{2,3} = -1$ кратности 2 с собственными векторами $p_2 = (1, 1, 0)^T$ и $p_3 = (2, 0, -1)^T$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $p_1 e^{3t}$, $p_2 e^{-t}$, $p_3 e^{-t}$, а общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$



Пример 3.6

Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 1$ с соответствующим собственным вектором $p_1 = (0, 2, 1)^T$ и $\lambda_{2,3} = -1$ кратности 2, которому соответствует только один собственный вектор $p_2 = (-1, 2, 1)^T$. Поэтому линейно независимые решения, соответствующие собственному числу $\lambda_{2,3} = -1$, ищем в виде

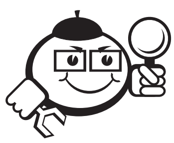
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ q + nt \\ s + rt \end{pmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{pmatrix} (a + bt)e^{-t} \\ (q + nt)e^{-t} \\ (s + rt)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти соотношения в исходную систему и приводя подобные, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} n - 2r = 0, \\ 4b + 2n = 0, \\ 2b + n = 0, \\ b - q + 2s = 0, \\ 4a - n + 2q = 0, \\ 2a + q - r = 0 \end{cases}$$

для нахождения чисел a, b, q, n, s, r. Решая эту систему, имеем $b = -r$, $q = r - 2a$, $n = 2r$, $s = r - a$. Придавая свободным неизвестным значения $a = C_2$, $r = C_3$, получаем общее решение исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ (1 + 2t)e^{-t} \\ (1 + t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$



Пример 3.7

Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4x - y \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Собственный вектор, отвечающий собственному числу $1+2i$, равен $p_1 = (1,\ 1-i)^T$. Для собственного числа $1-2i$ можно найти собственный вектор, а можно воспользоваться тем, что действительная и мнимая части решения $p_1 e^{(1+2i)t}$ являются линейно независимыми решениями системы. Поэтому общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}.$$

. . . .

С другими примерами нахождения фундаментальной системы решений и общего решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно познакомиться в п. 5.3.2 практикума [12] и других книгах по дифференциальным уравнениям.

3.6 Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений (3.12) $y' = A(x)y + b(x)$, или, что то же самое, (3.13) $y' - A(x)y = b(x)$.

Пусть имеется фундаментальная система решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$ системы (3.14) $y' = A(x)y$. Тогда общее решение системы (3.14) записывается в форме $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j y^j$. Будем искать частное решение неоднородной системы уравнений (3.11) в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j, \tag{3.23}$$

где $C_j(x)$ — функции, подлежащие определению. Дифференцируя вектор-функцию (3.23), получаем:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) (y^j)'. \tag{3.24}$$

Подставляя вектор-функцию (3.23) и её производную (3.24) в систему уравнений (3.13), получаем:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)(y^j)' - A(x) \left(\sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \left((y^j)' - A(x) y^j \right) = b(x). \end{gathered} \tag{3.25}$$

В этом соотношении слагаемое $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j(x) \left((y^j)' - A(x) y^j \right)$ равно нулю в силу того, что $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — решения однородной системы уравнений (3.14) $y' = A(x)y$.

Поэтому правая часть в (3.25) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j = b(x) \tag{3.26}$$

или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_k^j = b_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.27}$$

Так как определитель системы (3.26) есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$ однородной системы уравнений (3.14) $y' = A(x)y$, то он отличен от нуля, и поэтому система (3.26) имеет единственное решение $C_j'(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, которое можно найти по формулам Крамера:

$$C_j'(x) = \frac{W_j(x)}{W(x)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $W_j(x)$ — определитель, полученный из определителя $W(x)$ заменой столбца с номером j на столбец $b(x)$. Интегрируя последние равенства, окончательно получаем:

$$C_j(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(x)}{W(x)} dx + \widetilde{C}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя полученные значения $C_j(x)$ в (3.23), получаем общее решение $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j(x) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{C}_j y^j(x)$ системы уравнений (3.11).

Пример 3.8

Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + e^{3t} + 2 \end{cases}$ соответствующая однородная система уравнений имеет вид $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$ Собственные числа её матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие этим собственным числам, равны соответственно $(1, 1)^T$ и $(2, 3)^T$. Тогда фундаментальная система решений состоит из функций $(e^t, e^t)^T$ и $(2e^{2t}, 3e^{2t})^T$. Решение исходной системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем систему

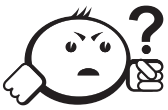
$$C_1'(t) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} + 2 \end{pmatrix}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 0, \\ C_1'(t)e^t + 3C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} + 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = -2e^{2t} - 4e^{-t}$, $C_2' = e^t + 2e^{-2t}$. Проинтегрировав, имеем $C_1(t) = -e^{2t} + 4e^{-t} + \widetilde{C}_1$, $C_2 = e^t - e^{-2t} + \widetilde{C}_2$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{C}_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \widetilde{C}_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} + 2 \\ 2e^{3t} + 1 \end{pmatrix}.$$



Контрольные вопросы по главе 3

1. Сформулируйте задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме Коши.
2. Запишите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ в матричной форме.
3. Запишите систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} + 1 \end{pmatrix} \right.$$

   в координатной форме.
4. Сформулируйте теорему о наложении решений для системы линейных дифференциальных уравнений.
5. Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка?
6. Напишите вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.
7. Напишите вид общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

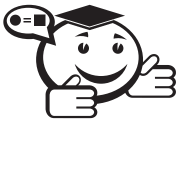
Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

4.1 Зависимость решения от параметров и начальных данных

Поведение динамических (изменяющих своё состояние во времени) объектов описывается дифференциальными или интегральными уравнениями. Уравнение, описывающее поведение объекта, будем называть математической моделью объекта.

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным уравнением $y' = f(x, y)$ с начальными данными $y(x_0) = y_0$ (задача Коши). Математическая модель объекта строится путём идеализации движения или процесса, следовательно, правые части дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в зависимости от допущений при идеализации могут различаться. Если начальные данные получены путём измерения положения реального объекта, то они всегда получаются с ошибкой (ошибки прибора, метода измерения, органов восприятия информации измеряющего).



Назовём задачу ***корректно поставленной****, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$*, такое, что при* $|x_1 - x_0| < \delta$*,* $|y_1 - y_0| < \delta$*,* $|f_1(x, y) - f(x, y)| < \delta$ *для решения* $y_0(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$*, определённого на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и проходящего через точку* (x_0, y_0) $\big(x_0 \in (\alpha, \beta)\big)$*, существует решение* $y_1(x)$ *уравнения* $y' = f_1(x, y)$*, определённое на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и проходящее через точку* (x_1, y_1)*, такое, что* $\sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |y_1(x) - y(x)| < \varepsilon$*, то есть при малом изменении правых частей дифференциального уравнения и начальных данных решение задачи Коши изменяется мало. В противном случае задачу будем считать некорректно поставленной.*

Имеется литература, посвящённая изучению некорректно поставленных задач [16, 17]. В данном разделе мы будем заниматься корректно поставленными задачами.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и ограничена в некоторой области G. Тогда задача Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ поставлена корректно.

При более жестких предположениях теорема будет доказана позже. С непосредственным доказательством желающие могут ознакомиться в [14].

Пусть $G \subset R^2$ — замкнутое множество, $P \subset R^n$ — n-мерный параллелепипед $P = \prod_{i=1}^{n}[-a_i, a_i]$, точка $(x, y) \in G$, а точка $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in P$, $f(x, y, \mu) = f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ — заданная на множестве $G \times P$ функция. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.2. Если функция

$$f(x, y, \mu) = f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

непрерывна в $G \times P$ по совокупности аргументов, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по y

$$\left|f(x, y_2, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) - f(x, y_1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\right| \leqslant L\left|y_2 - y_1\right|,$$

то для каждой точки (x_0, y_0), лежащей внутри G, можно указать на оси OX такой отрезок $[\alpha, \beta]$, включающий точку x_0, на котором решение $y(x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ (решение задачи Коши) непрерывно по совокупности переменных $x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Кроме того, если функция $f(x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ и её производные по $y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ до порядка $p > 0$ включительно внутри $G \times P$ непрерывны по $x, y, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и ограничены, то решение $y(x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ будет иметь по $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in P$ непрерывные по $x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ производные до порядка p в области $[\alpha, \beta] \times P$.

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. В общем случае доказательство аналогично. Будем искать решение задачи Коши $y' = f(x, y, \mu)$, $y(x_0, \mu) = y_0$ методом последовательных приближений (см. приложение Б). Положим

$$\varphi_0(x, \mu) = y_0,$$

$$\varphi_1(x,\mu) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(x, \varphi_0(x,\mu), \mu\big)\,dt,$$

$$\varphi_2(x,\mu) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(x, \varphi_1(x,\mu), \mu\big)\,dt$$

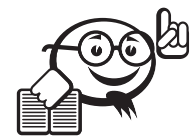
и так далее. По теореме о сжимающем операторе (см. приложение Б) эта последовательность сходится к нужному нам решению.

Рассмотрим задачу Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ решение этой задачи. Положим $t = x - x_0$, $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$. Тогда

$$x = t + x_0, \quad z = y(t + x_0, x_0, y_0) - y_0,$$

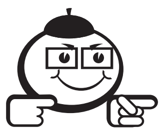
$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\big(y(t+x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{dt} = \frac{d\big(y(t+x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{d(t+x_0)} \cdot \frac{d(t+x_0)}{dt} =$$
$$= \frac{d\big(y(t+x_0, x_0, y_0) - y_0\big)}{d(t+x_0)} = \frac{d\big(y(x, x_0, y_0) - y_0\big)}{dx} = y'.$$

Заметим, что значению $x = x_0$ соответствует значение $t = 0$, $z(0) = y(x_0) - y_0 = 0$. Поэтому дифференциальное уравнение перепишется в виде $\dfrac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$ с начальным условием $z(0) = 0$. Таким образом, изучение зависимости решения от начальных данных свелось к изучению решения от параметров x_0, y_0.



Следствие. Если функция $f(x,y)$ имеет по x и y непрерывные производные до порядка $p > 0$ включительно, то решение задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ имеет непрерывные производные до порядка p.

В дальнейшем нам понадобится следующий важный результат.



Лемма (Адамара). Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in R^m$ и функция $F(x,z)$ имеет в некоторой выпуклой по x области $G \subseteq R^n \times R^m$ пространства $R^n \times R^m$ непрерывные производные по x до некоторого порядка $p > 0$ включительно. Тогда можно найти n таких функций $\Phi_i(x,y,z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеющих непрерывные производные по x, y до порядка $p - 1$ включительно, что

$$F(y,z) - F(x,z) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x,y,z)(y_i - x_i).$$

Доказательство. В силу выпуклости области имеем

$$F(y,z) - F(x,z) = \int\limits_0^1 F'_t\big(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2), \ldots, x_n + t(y_n - x_n), z\big)\,dt \quad (4.1)$$

По формуле производной сложной функции (см., например, [3]) получаем

$$F'_t\big(x_1 + t(y_1 - x_1),\, x_2 + t(y_2 - x_2), \ldots, x_n + t(y_n - x_n),\, z\big) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\big(x_i + t(y_i - x_i)\big)} \cdot \frac{\partial\big(x_i + t(y_i - x_i)\big)}{\partial t}. \tag{4.2}$$

Так как $\dfrac{\partial\big(x_i + t(y_i - x_i)\big)}{\partial t} = y_i - x_i$, то, положив $F_i = \dfrac{\partial F}{\partial\big(x_i + t(y_i - x_i)\big)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, соотношение (4.2) можно переписать в виде

$$F'_t\big(x_1 + t(y_1 - x_1),\, x_2 + t(y_2 - x_2), \ldots, x_n + t(y_n - x_n),\, z\big) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (y_i - x_i). \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), имеем

$$F(y, z) - F(x, z) = F(y_1, y_2, \ldots, y_n, z) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \\ = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (y_i - x_i)\right) dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \big(F_i \cdot (y_i - x_i)\big)\, dt = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 F_i\, dt.$$

Положив $\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \displaystyle\int_0^1 F_i\, dt$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Пусть $\varphi(x, \mu)$ и $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ решения уравнений

$$y' = f(x, \mu) \tag{4.4}$$

и

$$y' = f(x, \mu + \Delta\mu). \tag{4.5}$$

Подставляя $\varphi(x, \mu)$ в (4.4), а $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ в (4.5) и вычитая из второго первое, получим

$$\frac{d\big(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\big)}{dx} = f(x, \mu + \Delta\mu) - f(x, \mu).$$

Применяя к правой части последнего соотношения лемму Адамара, имеем

$$\frac{d\big(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\big)}{dx} = \big(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)\big)\Phi_1 + \Delta\mu\Phi_2,$$

где Φ_1, Φ_2 — непрерывные по x, μ, $\varphi(x, \mu)$, $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ функции. Разделив последнее соотношение на $\Delta\mu$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)}{\Delta\mu}\right) = \frac{\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)}{\Delta\mu}\Phi_1 + \Phi_2.$$

Заметим, что в силу леммы Адамара $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \Phi_1 = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \Phi_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \mu}$. Поэтому, переходя в полученном выше уравнении к пределу при $\Delta\mu \to 0$, имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial f}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Полученное уравнение называется уравнением в вариациях, а в теории автоматического управления — уравнением чувствительности. Обоснование справедливости предельного перехода, а также непрерывности и дифференцируемости соответствующих функций можно посмотреть в [14].

4.2 Определение устойчивости по Ляпунову

В предыдущем пункте мы занимались зависимостью решения от начальных данных в том случае, когда решение определено на ограниченном отрезке. В данном пункте мы будем исследовать этот вопрос в случае, когда решение определено на бесконечном полуинтервале $[a, \infty)$. Большой вклад в развитие данного вопроса внёс А. М. Ляпунов. Более подробное изложение можно найти в [8, 13–15, 18] и других пособиях.

. . . .

Пусть $y^0(x) = \left(y_1^0(x), y_2^0(x), \ldots, y_n^0(x)\right)^T$ — *решение системы уравнений* (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

с начальными данными $y(x_0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$, *определённое на полуинтервале* $[a, \infty)$. *Это решение будем называть* ***устойчивым****, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что при выполнении условий* $|x_1 - x_0| < \delta$, $\|y^1 - y^0\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i^1 - y_i^0)^2} < \delta$ $\left(x_1 \in [a, \infty)\right)$ *для любого решения* $y^1(x) = \left(y_1^1(x), y_2^1(x), \ldots, y_n^1(x)\right)^T$ *системы уравнений* (3.1) *с начальными данными* $y(x_1) = y_1 = (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)^T$, *определённого также на полуинтервале* $[a, \infty)$, *выполнено неравенство* $\left|y_i^1(x) - y_i^0(x)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *для всех* x *из полуинтервала* $[a, \infty)$. *Если при этом* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(y_i^1(x) - y_i^0(x)\right) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то решение* $y^0(x) = \left(y_1^0(x), y_2^0(x), \ldots, y_n^0(x)\right)^T$ *называется* ***асимптотически устойчивым***.

. . . .

Исследование устойчивости решений можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения с нулевыми начальными данными некоторой другой системы дифференциальных уравнений. Покажем, как это сделать. Пусть $y^0(x) = \left(y_1^0(x), y_2^0(x), \ldots, y_n^0(x)\right)^T$ — решение системы уравнений (3.1) с начальными данными $y^0(x_0) = y^0$, $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ — любое решение этой же системы уравнений. Для удобства записи дальнейшие вычисления проделаем в векторной форме. Желающие могут перейти к покоординатной форме записи и проделать вычисления в координатной форме. Напомним, что производная вектор-функции $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ скалярного аргумента вычисляется по формуле:

$$\left(\left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T\right)' = \left(y'_1(x), y'_2(x), \ldots, y'_n(x)\right)^T.$$

Подробнее о дифференцировании вектор-функций можно посмотреть в [3]. Рассмотрим вектор-функцию $z(x) = y(x) - y^0(x)$. Тогда $y(x) = z(x) + y^0(x)$, $y'(x) =$

$= z'(x) + \left(y^0(x)\right)'$. Так как $y(x)$ и $y^0(x)$ — решения системы уравнений (3.1), то, подставляя их в эту систему, получаем $y'(x) = z'(x) + \left(y^0(x)\right)' = f(x, y+z)$. Поэтому $z' + f(x, y^0) = f(x, y+z)$, или, что то же самое, $z' = f(x, y+z) - f(x, y^0)$. Рассмотрим теперь решение полученного уравнения с начальными данными $z(x_0) = 0$. Имеем $z(x_0) = y(x_0) - y^0(x_0) = y(x_0) - y_0 = 0$. Поэтому $y(x_0) = y_0$, и если для системы дифференциальных уравнений (3.1) $y' = f(x, y)$ выполнены условия теоремы существования и единственности, то $y(x)$ совпадает с $y^0(x)$. Следовательно, $z(x) \equiv 0$.

Решение $y(x) \equiv 0$ системы дифференциальных уравнений (3.1) *с начальными данными $y(x_0) = 0$ будем называть* ***точкой покоя*** *этой системы.*

Определение устойчивости точки покоя формулируется следующим образом.

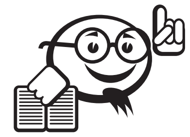
Точку покоя системы дифференциальных уравнений (3.1) *будем называть* ***устойчивой****, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при выполнении условий $|x_1| < \delta$, $|y_i^0| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $\left(x_1 \in [a, \infty)\right)$, для любого решения $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ системы уравнений* (3.1) *с начальными данными $y(x_1) = y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$, определённого также на полуинтервале $[a, \infty)$, выполнены неравенства $\left|y_i(x)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$ для всех x из полуинтервала $[a, \infty)$. Если при этом $\lim\limits_{x\to\infty} y_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то точка покоя называется* ***асимптотически устойчивой****.*

Имеются различные методы исследования устойчивости невозмущённого движения, в том числе и точки покоя.

4.3 Метод функций Ляпунова

Функцию $V(y) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ назовём ***не отрицательно определённой в содержащей начало координат области*** *$D \subseteq R^n$, если для всякого $y \in D$ $V(y) \geqslant 0$. Если, кроме того, $V(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$, то функция $V(y) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется* ***положительно определённой****.*

Аналогично, с заменой неравенств на противоположные, определяются не положительно определённая и отрицательно определённая функции.



Теорема 4.3 (Ляпунова об устойчивости). Если для системы дифференциальных уравнений (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

существует положительно определённая функция $V(y) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, такая, что функция $W = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не положительно определена, то точка покоя устойчива. Если функция W отрицательно определена, то точка покоя асимптотически устойчива.

Общего метода построения функций Ляпунова нет. Часто их берут в виде суммы чётных степеней координат.

4.4 Устойчивость линейных систем

Рассмотрим вначале систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением n-го порядка (2.5):

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Это уравнение имеет тривиальное решение, и в случае непрерывных коэффициентов это решение единственно.

Рассмотрим случай уравнения с постоянными коэффициентами. Предположим, что характеристическое уравнение имеет n различных корней λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$. Тогда общее решение уравнения (2.9):

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

будет иметь вид $y = \sum\limits_{l=1}^{n} C_l e^{\lambda_l x}$, где λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ корни характеристического уравнения. Исследуем устойчивость точки покоя уравнения (2.9) в этом случае. Имеем

$$|y| = \left| \sum_{l=1}^{n} C_l e^{\lambda_l x} \right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |C_l| \left| e^{\lambda_l x} \right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |C_l| \left| e^{(\operatorname{Re}\lambda_l + i \operatorname{Im}\lambda_l)x} \right| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} |C_l| \left| e^{i \operatorname{Im}\lambda_l x} \right| e^{\operatorname{Re}\lambda_l x} = \sum_{l=1}^{n} |C_l| e^{\operatorname{Re}\lambda_l x} \leqslant M e^{\left(\max\limits_{1 \leqslant l \leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_l\right)x},$$

где $M = \sum_{l=1}^{n} |C_l|$. Таким образом, если действительные части $\operatorname{Re}\lambda_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$ корней λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ характеристического уравнения отрицательны, то $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(\max\limits_{1\leqslant l\leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_l\right)x} = 0$. Поэтому точка покоя системы (2.9) асимптотически устойчива и, следовательно, устойчива на полуинтервале $[0, +\infty)$. В случае кратных корней результат остаётся верным, так как степенная функция растёт медленнее экспоненты, что нетрудно проверить с помощью правила Лопиталя [3].

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$y' = A(x)y + b(x). \tag{4.6}$$

Соответствующая однородная система будет иметь вид

$$y' = A(x)y. \tag{4.7}$$

Очевидно, что система (4.7) имеет тривиальное решение и в случае непрерывно дифференцируемых коэффициентов это решение единственно.

Пусть матрица A постоянна, то есть системы (4.6) и (4.7) есть системы с постоянными коэффициентами. Предположим вначале, что число собственных векторов матрицы A равно порядку системы, то есть равно n. Тогда общее решение системы (4.7) может быть записано в виде

$$y = \sum_{l=1}^{n} C_l \boldsymbol{\alpha}_l e^{\lambda_l x},$$

где λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ — собственные числа, а $\boldsymbol{\alpha}_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$ — соответствующие им собственные векторы матрицы A. Соответственно $y_i = \boldsymbol{\alpha}_l e^{\lambda_l x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — фундаментальная система решений системы уравнений (4.7).

Исследуем устойчивость точки покоя системы (4.7) в этом случае. Имеем

$$\|y\| = \sum_{l=1}^{n} |C_l|\, \|\boldsymbol{\alpha}_l\|\, \left|e^{\lambda_l x}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |C_l|\, \|\boldsymbol{\alpha}_l\|\, \left|e^{(\operatorname{Re}\lambda_l + i\operatorname{Im}\lambda_l)x}\right| =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} |C_l|\, \|\boldsymbol{\alpha}_l\|\, \left|e^{i\operatorname{Im}\lambda_l x}\right| e^{\operatorname{Re}\lambda_l x} = \sum_{l=1}^{n} |C_l|\, \|\boldsymbol{\alpha}_l\| e^{\operatorname{Re}\lambda_l x} \leqslant M e^{\left(\max\limits_{1\leqslant l\leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_l\right)x},$$

где $M = \sum_{l=1}^{n} |C_l|\, \|\boldsymbol{\alpha}_l\|$. Таким образом, если действительные части $\operatorname{Re}\lambda_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$ собственных чисел λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ матрицы A отрицательны, то $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(\max\limits_{1\leqslant l\leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_l\right)x} = 0$. Поэтому точка покоя системы (4.7) асимптотически устойчива и, следовательно, устойчива на полуинтервале $[0, +\infty)$. Если в случае кратных собственных чисел матрицы A число собственных векторов меньше n, то результат всё равно остаётся справедливым по тем же соображениям, что и в случае систем, описываемых линейным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами. Желающие могут прочитать об этом в [18].

4.5 Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3.1) в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

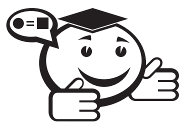
или, что то же самое, в векторной форме $y' = f(x, y)$.

Пусть $y(x) \equiv 0$ — точка покоя системы (3.1). Предполагая, что функция $f(x, y)$ дифференцируема, линеаризуем её (см. [3]) в окрестности точки $y = (0, 0, \ldots, 0)^T$, то есть представим в виде $f(x, y) = A(x)y + b(x, y)$, где $A(x)$ производная матрица функции $f(x, y)$ с элементами $a_j^i(x) = \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $b(x, y)$ — бесконечно малая вектор-функция более высокого порядка малости, чем $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Тогда система дифференциальных уравнений (3.1) запишется в виде

$$y' = A(x)y + b(x, y). \tag{4.8}$$

Отбрасывая в системе (4.8) члены более высокого порядка малости, чем $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, можем переписать её в форме:

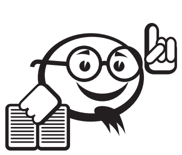
$$y' = A(x)y. \tag{4.9}$$



Система дифференциальных уравнений (4.9) *называется* ***системой первого приближения*** *для системы дифференциальных уравнений* (3.1).

Иногда удаётся судить об устойчивости точки покоя системы (3.1) по устойчивости точки покоя для системы (4.9).

Пусть система дифференциальных уравнений (3.1) является автономной, то есть функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ не зависят от x. Тогда система первого приближения (4.9) есть система с постоянными коэффициентами. В этом случае справедлив следующий результат.



Теорема 4.4. Если вещественные части всех собственных чисел матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений отрицательны, то точка покоя автономной системы асимптотически устойчива. Если хотя бы одно собственное число матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений имеет положительную вещественную часть, то точка покоя автономной системы неустойчива.

Доказательство этой теоремы опустим. Желающие могут ознакомиться с ним в [8, 13, 14].

Отметим, что если часть собственных чисел матрицы A системы первого приближения автономной системы дифференциальных уравнений имеет вещественную часть, равную нулю, то исследовать на устойчивость автономную систему дифференциальных уравнений по системе первого приближения нельзя.

Контрольные вопросы по главе 4

1. Дайте определение устойчивости решения дифференциального уравнения.
2. Что называется точкой покоя?
3. Дайте определение устойчивости точки покоя.
4. Что такое система первого приближения?
5. Когда можно исследовать устойчивость системы по первому приближению?
6. Приведите теорему об устойчивости линейной системы.

Глава 5

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1 Понятие разностного уравнения

Для скалярной функции скалярного переменного производная определяется соотношением $y'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$. Поэтому для дифференцируемых функций, при достаточно малых h, ошибка от замены производной $y'(t)$ разностью $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$ будет также мала.

Подставляя в дифференциальное уравнение $y' = f(t, y)$ вместо производной $y'(t)$ разность $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$, имеем $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h} = f(t, y)$, или, что то же самое, $y(t + h) = y(t) + hf(t, y)$. Полученное соотношение называется разностным уравнением первого порядка. Зная $y(t)$, можем последовательно найти $y(t + h)$, $y(t + 2h), \ldots, y(t + kh)$. Обычно в разностных уравнениях берут $t = 0$, $h = 1$. Вводя обозначение $y_k = y(kh)$, приведённое выше разностное уравнение первого порядка, можем записать в виде $y_k = y_{k-1} + f(y_{k-1})$.

Расчетные формулы численного решения дифференциальных уравнений, в том числе и формула метода Эйлера, представляют собой разностные уравнения, к более подробному изложению которых мы и переходим.

Для упрощения изложения будем считать, что отрезок $[a, b]$ разбит на части равноотстоящими точками (равномерной сеткой). В общем случае, то есть при произвольном разбиении отрезка $[a, b]$, проделать приведённые ниже рассуждения несложно, только формулы будут более громоздкими. Приблизить первую производную можно не только с помощью разности $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$, а, например, симметричной конечной разностью $\dfrac{y(t+h)-y(t-h)}{2h}$. Заменяя в дифференциальном уравнении $y' = f(t, y)$ первую производную этой разностью, получаем $\dfrac{y(t+h)-y(t-h)}{2h} =$

$= f(t, y)$, или, что то же самое, $y(t+h) = y(t-h) + 2hf(t, y)$, которое представляет собой разностное уравнение второго порядка. В общем виде, приведённое выше разностное уравнение второго порядка, можем записать в виде $y_{k+1} = y_{k-1} + f(y_{k-1})$. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(t, y, y')$. По определению второй производной можем записать

$$y''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{y'(t+h) - y'(t)}{h}.$$

Тогда $y''(t) \approx \dfrac{y'(t+h) - y'(t)}{h} \approx \dfrac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}$. Поэтому вторую производную заменяют конечной разностью $\dfrac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}$, и в приведённых выше обозначениях дифференциальное уравнение $y'' = f(t, y, y')$ перепишется в виде $y_{k+2} = 2y_{k+1} - y_k + f(y_k, y_{k+1})$. Таким образом, разностное уравнение первого порядка может быть записано в виде $y_k = \varphi(y_{k-1})$, а уравнение второго порядка в виде $y_{k+2} = \varphi(y_k, y_{k+1})$. Ясно, что для получения конкретного решения разностного уравнения первого порядка нужно знать начальное значение y_0, а для получения конкретного решения уравнения второго порядка необходимо знание двух значений y_0 и y_1. Прослеживается связь между разностными уравнениями и задачей Коши для дифференциальных уравнений. В общем случае разностное уравнение порядка n может быть записано в виде $F(y_{k+n}, y_{k+n-1}, \ldots, y_k) = 0$. Если удаётся разрешить это уравнение относительно y_{k+n}, то разностное уравнение записывается в виде $y_{k+n} = \varphi(y_{k+n-1}, \ldots, y_k)$.

5.2 Разностные уравнения первого порядка

Самыми простыми разностными уравнениями являются линейные разностные уравнения первого порядка. Самый общий вид линейного разностного уравнения первого порядка следующий:

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k = f_k. \tag{5.1}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a_k y_{k+1} + b_k y_k = 0. \tag{5.2}$$

Из (5.2) имеем $y_{k+1} = -\dfrac{b_k}{a_k}y_k$, откуда, при $k = 1$, получаем $y_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}y_0$. Далее, $y_2 = -\dfrac{b_2}{a_2}y_1 = \left(-\dfrac{b_1}{a_1}\right)\left(-\dfrac{b_2}{a_2}\right)y_0$. Продолжая дальше, окончательно имеем

$$y_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)y_0. \tag{5.3}$$

Любое решение уравнения (5.2) получается из (5.3) заданием начального условия y_0. Таким образом, (5.3) есть общее решение уравнения (5.2). Обычно берут $y_0 = 1$.

Если (5.1), а следовательно, и (5.2) есть уравнения с постоянными коэффициентами, то есть имеют вид

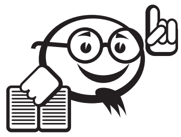
$$ay_{k+1} + by_k = f_k,$$

$$ay_{k+1} + by_k = 0,$$

то решение (5.3) принимает вид

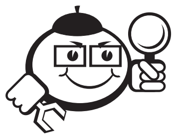
$$y_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} y_0.$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (5.1). Отметим, что для линейных разностных уравнений имеется полный аналог теоремы о наложении решений и её следствий. Отметим некоторые из них.



1. Если y_k^1 и y_k^2 два решения уравнения (5.1), то их разность есть решение уравнения (5.2).

2. Любое решение y_k уравнения (5.1) есть сумма какого-нибудь частного решения y_k^1 этого уравнения и общего решения уравнения (5.2), то есть имеет вид $y_k = y_k^1 + \alpha z_k$, где α — константа, а z_k — решение уравнения (5.2) при $y_0 = 1$.

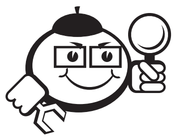


Пример 5.1

Идея задачи взята из [19]. Банк принимает вклады под p процентов годовых. Начисление процентов происходит ежемесячно. Вычислить, сколько будет денег на вкладе через год, если было положено A рублей.

Решение:

Начальное условие у нас $y_0 = A$. Через месяц на счёте будет $y_1 = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)A$. Через два месяца будет $y_2 = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)y_1 = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)\left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)A = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)^2 A$. Через год будет соответственно $y_{12} = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)^{12} A$. Подставить конкретные числа предоставляется читателю.



Пример 5.2

Банк выдаёт кредит под p процентов годовых. Погашение происходит ежемесячно. Вычислить, сколько будет выплачено денег в конце срока погашения, если было выдано A рублей.

Задачу предлагается решить самостоятельно.

5.3 Разностные уравнения второго порядка

Займёмся теперь линейными разностными уравнениями второго порядка. Самый общий вид линейного разностного уравнения второго порядка следующий:

$$a_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = f_k. \tag{5.4}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + c_k y_k = 0. \tag{5.5}$$

Для линейных разностных уравнений можно развить теорию, аналогичную теории для линейных дифференциальных уравнений.

Перейдём к рассмотрению частного случая линейных разностных уравнений — линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение второго порядка имеет вид

$$a y_{k+2} + b y_{k+1} + c y_k = f_k. \tag{5.6}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a y_{k+2} + b y_{k+1} + c y_k = 0. \tag{5.7}$$

По аналогии с уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами будем искать решение уравнения (5.7) в виде $y_k = \alpha q^k$. Подставляя это решение в (5.7), получаем $a\alpha q^{k+2} + b\alpha q^{k+1} + c\alpha q^k = 0$ или, сокращая на αq^k, получаем $aq^2 + bq + c = 0$. Таким образом, мы доказали, что для того чтобы $y_k = \alpha q^k$ было решением уравнения (5.7), нужно (необходимо), чтобы q было решением алгебраического (в данном случае квадратного) уравнения $aq^2 + bq + c = 0$. Рассмотрим возникающие здесь возможности.

1. Оба корня данного квадратного уравнения действительны и различны. Тогда мы имеем два линейно независимых решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = (q_2)^k$ уравнения (5.7). Тогда общее решение уравнения (5.7) будет иметь вид $y_k = \alpha_1 (q_1)^k + \alpha_2 (q_2)^k$.

2. Корни одинаковые, в этом случае говорят, что квадратное уравнение имеет корень кратности 2. Тогда, по аналогии с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, можно доказать, что решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = k(q_1)^k$ линейно независимы и общее решение уравнения (5.7) имеет вид $y_k = \alpha_1 (q_1)^k + \alpha_2 k (q_1)^k$.

3. Корни комплексные. Если коэффициенты уравнения действительны, то тогда эти корни являются комплексно сопряжёнными, то есть имеют вид $q_1 = s + ti$, $q_2 = s - ti$. Соответственно решения $y_k^1 = (q_1)^k$ и $y_k^2 = (q_2)^k$ уравнения (5.7) будут линейно независимы. Записав $q_1 = s + ti$, $q_2 = s - ti$ в тригонометрической форме, то есть в виде $q_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $q_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, где r — модуль, а φ — аргумент числа q_1, получаем $y_k^1 = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ и $y_k^2 = r^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)$. По теореме о наложении решений можем утверждать, что линейные комбинации $\dfrac{y_k^1 + y_k^2}{2} = r^k \cos k\varphi$ и $\dfrac{y_k^1 - y_k^2}{2i} = r^k \sin k\varphi$ тоже являются решениями уравнения (5.7), причём линейно независимыми. Тогда общее решение уравнения (5.7) может быть записано в виде $y_k = \alpha_1 r^k \cos k\varphi + \alpha_2 r^k \sin k\varphi$.

Пример 5.3

Решить уравнение $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$.

Решениями характеристического уравнения $q^2 - 5q + 6 = 0$ являются $q_1 = 2$, $q_2 = 3$. Поэтому имеем два линейно независимых решения $y_k^1 = 2^k$ и $y_k^2 = 3^k$ нашего уравнения $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y_k = \alpha_1 2^k + \alpha_2 3^k$.

Пример 5.4

Решить уравнение $y_{k+2} - 10y_{k+1} + 25y_k = 0$.

Решением характеристического уравнения $q^2 - 10q + 25 = 0$ является $q_1 = 5$ кратности 2. Следовательно, двумя линейно независимыми решениями уравнения $y_{k+2} - 10y_{k+1} + 25y_k = 0$ будут $y_k^1 = 5^k$ и $y_k^2 = k \cdot 5^k$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y_k = \alpha_1 5^k + \alpha_2 k \cdot 5^k$.

Пример 5.5

Решить уравнение $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 8y_k = 0$.

Решениями характеристического уравнения $q^2 + 4q + 8 = 0$ являются комплексно сопряжённые числа $q_1 = -2 + 2i$, $q_2 = -2 - 2i$. Модули комплексных чисел $q_1 = -2 + 2i$ и $q_2 = -2 - 2i$ равны $r = 2\sqrt{2}$, а аргумент — $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Тогда два линейно независимых решения уравнения $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 8y_k = 0$ равны $y_k^1 = \left(2\sqrt{2}\right)^k \cos\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$ и $y_k^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^k \sin\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$, а общее решение данного уравнения имеет вид $y_k = \alpha_1\left(2\sqrt{2}\right)^k \cos\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right) + \alpha_2\left(2\sqrt{2}\right)^k \sin\left(\dfrac{3\pi k}{4}\right)$.

Аналогичная теория может быть построена и для линейных разностных уравнений порядка n. Самый общий вид линейного разностного уравнения порядка n следующий:

$$a_k^n y_{k+n} + a_k^{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_k^0 y_k = f_k. \tag{5.8}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

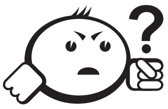
$$a_k^n y_{k+n} + a_k^{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_k^0 y_k = 0. \tag{5.9}$$

Для частного случая линейных разностных уравнений — линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами можем записать

$$a^n y_{k+n} + a^{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a^0 y_k = f_k. \tag{5.10}$$

Соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$a^n y_{k+n} + a^{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a^0 y_k = 0. \tag{5.11}$$



Контрольные вопросы по главе 5

1. Какое уравнение называется разностным?
2. Какое уравнение называется разностным уравнением 1-го порядка, 2-го порядка?
3. Какое уравнение называется линейным разностным уравнением 1-го порядка, 2-го порядка?
4. Запишите общее решение линейного однородного разностного уравнения $4y_{n+1} + 3y_n = 0$.
5. Запишите общее решение линейного однородного разностного уравнения $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Магазинников Л. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинникова. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2011.

[2] Горбанев Н. Н. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учеб. пособие / Н. Н. Горбанев, А. А. Ельцов, Л. И. Магазинников — 2-е изд., перераб. и доп. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.

[3] Ельцов А. А. Высшая математика I. Дифференциальное исчисление / А. А. Ельцов, Г. А. Ельцова, Л. И. Магазинников. — Томск : Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001.

[4] Ельцов А. А. Интегральное исчисление / А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова. — Томск : Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2013.

[5] Бугров Я. С. Высшая математика : учебник для вузов : в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2004. — Т 3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.

[6] Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. — М. : Высшая школа, 1991.

[7] Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. — М. : Наука, 1981.

[8] Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Высшая школа, 1967.

[9] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — 7-е изд. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[10] Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М. : Наука, 1967.

[11] Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1970.

[12] Ельцов А. А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям / А. А. Ельцов, Т. А. Ельцова. — Томск : Томск. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005.

[13] Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления : учеб. пособие для вузов / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1986.

[14] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Наука, 1964.

[15] Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1988.

[16] Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. — М. : Наука, 1978.

[17] Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979.

[18] Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости / Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1987.

[19] Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. — М. : Физматлит, 2004.

Приложение А

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

При решении алгебраических уравнений степени два и выше иногда приходится рассматривать конструкции вида $a + b \cdot \sqrt{-1}$, где a и b — некоторые действительные числа. Например, подставляя формально конструкцию $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ в не имеющее действительных корней уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$, получаем $\left(1 + 2 \cdot \sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1 + 2 \cdot \sqrt{-1}\right) + 5$. Действуя в полученном выражении с конструкцией $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ как с двучленом по правилам алгебры, известным из школы, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$(1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-1} + \left(2 \cdot \sqrt{-1}\right)^2 - 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{-1} + 5 = 4 + 4 \cdot (-1) = 0.$$

Таким образом, конструкцию $1 + 2 \cdot \sqrt{-1}$ можно считать корнем новой природы (не действительным) уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Пусть i — некоторый формальный символ, x и y — действительные (вещественные) числа. Конструкции вида $z = x + iy$ назовём комплексными числами, x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$ и будем обозначать их соответственно $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Обратные операции определяются однозначно и задаются формулами:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку (x, y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x+0\cdot i$, то эти операции совпадают с обычными операциями над действительными числами и поэтому комплексные числа являются расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i = 0 + i \cdot 1$ получаем $i^2 = i \cdot i = -1$.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Числа $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x, y) и осью OX. Поэтому можем записать $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным, и обозначают его $\arg z$. Наиболее удобным является выбор главного значения аргумента из промежутков $[0, 2\pi)$, $[-\pi, \pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. В пакете Mathcad главное значение аргумента выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$. При выборе главного значения аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$ его находят по формулам:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из других промежутков предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем записать $z = |z|\,e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому:

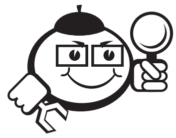
$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = |z_1|\cdot|z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов, получаем формулы Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$



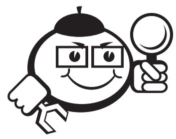
Пример 1

Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение:

Так как $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$, то, используя вышеприведённую формулу, имеем $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, получаем три значения корня кубического из единицы

$$\sqrt[3]{1}_1 = 1, \quad \sqrt[3]{1}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \sqrt[3]{1}_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



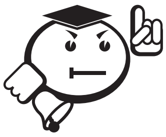
Пример 2

Найти $\sqrt{1+i}$.

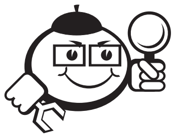
Решение:

Так как $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, то $\sqrt{1+i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1$. Придавая k последовательно значения 0, 1, получаем два значения $\sqrt{1+i}$:

$$\left(\sqrt{1+i}\right)_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right); \quad \left(\sqrt{1+i}\right)_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right).$$



Заметим, что квадратные корни из комплексных чисел отличаются только знаками.

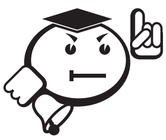


Пример 3

Решить уравнение $x^2 - 4x + 20$.

Решение:

Выделяя в левой части полный квадрат, получаем $x^2 - 4x + 20 = x^2 - 4x + 4 + 16 = (x-4)^2 + 16 = 0$. Следовательно, $(x-4)^2 = -16$. Извлекая квадратный корень из числа -16, имеем $\sqrt{-16} = \pm 4i$. Поэтому $x - 4 = \pm 4i$ или $x = 4 \pm 4i$. Подставляя любое из этих комплексных чисел в исходное уравнение, убеждаемся в том, что они являются его решением.

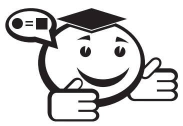


Заметим, что комплексные решения квадратных уравнений могут быть получены по той же формуле, что и действительные, но при отрицательном дискриминанте.

Приложение Б

ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

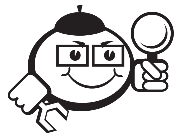
Достаточно интересной для практических применений является теорема Стефана Банаха о сжимающем операторе, называемая также принципом сжатых отображений и справедливая в полных метрических пространствах [9]. Прежде чем приступать к её изложению, дадим необходимые определения.



Определение 1. Множество M элементов произвольной природы называется ***метрическим пространством****, если каждой паре точек x, y из M поставлено в соответствие положительное число* $\rho(x, y)$*, удовлетворяющее условиям, называемым аксиомами метрического пространства:*

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *для всех x, y из M;*
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *для всех x, y, z из M.*

Примерами метрических пространств являются следующие.



Пример 1

Множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$. Справедливость аксиом 1 и 2 очевидна из свойств модуля. Из свойства $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$ следует соотношение:

$$|x - y| = |x - z - y + z| \leqslant |x - z| + |z - y|,$$

доказывающее справедливость аксиомы 3.

Пример 2

Множество R^n упорядоченных наборов из n вещественных чисел (векторов размерности n) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

Для удобства, там, где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_2^n. Справедливость аксиомы 1 следует из того, что арифметический корень всегда неотрицателен и сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \xi_i)^2} = \rho(y, x).$$

Справедливость аксиомы 3 следует из неравенства Коши—Буняковского [1, 2, 9]. Соответствующее доказательство можно найти, например, в [9].

Пример 3

То же, что и в предыдущем примере, множество R^n векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|.$$

Для удобства, там, где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_1^n.

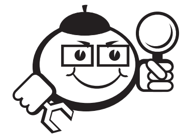
Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и сумма модулей равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i - \xi_i| = \rho(y, x).$$

Справедливость аксиомы 3 устанавливается следующей цепочкой вычислений:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(|\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i| \right) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i| + \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i - \eta_i| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$



Пример 4

То же, что и в предыдущих двух примерах, множество R^n векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \eta_i|.$$

В случае возникновения неоднозначности будем обозначать это пространство R^n_∞.

Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и максимум конечного числа модулей равен нулю тогда и только тогда, когда каждый из модулей равен нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из цепочки равенств

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \eta_i| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\eta_i - \xi_i| = \rho(y, x).$$

Далее, так как для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|,$$

то для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

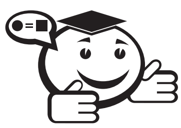
$$|\xi_i - \eta_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \zeta_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_i - \eta_i|.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \eta_i| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \zeta_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_i - \eta_i|,$$

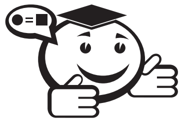
означающее справедливость аксиомы 3.

Понятие расстояния позволяет ввести определение окрестности конечной точки в метрическом пространстве.

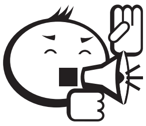


Определение 2. ***Окрестностью точки*** *$x_0 \in M$ назовем множество точек $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in M : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$.*

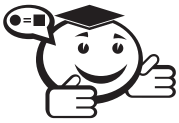
Тогда, по аналогии с определением предела последовательности в R^n [3], можем ввести следующее ниже определение предела последовательности точек метрического пространства.



Определение 3. Точка A называется ***пределом последовательности*** *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ при n, стремящемся к бесконечности $\left(A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n\right)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, зависящее от выбора ε, такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $\rho(A, a_n) < \varepsilon$.*



Последовательность, имеющую предел A, назовем сходящейся. Будем при этом говорить, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке A. Если же предела не существует, то последовательность назовем расходящейся. Так как бесконечно удаленная точка не является элементом из R, то числовая последовательность, имеющая пределом ∞, является расходящейся.



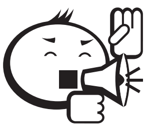
Определение 4. Последовательность метрического пространства X называется ***фундаментальной****, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех n, $m > N$ выполнено неравенство $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$.*

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

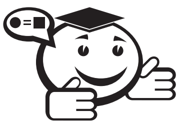
Доказательство. Так как $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что для всех n, $m > N$ выполнены неравенства $\rho(A, a_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\rho(A, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, поэтому

$$\rho(a_m, a_n) \leqslant \rho(A, a_n) + \rho(A, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.



Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть существуют метрические пространства, в которых не каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Например, во множестве рациональных чисел Q с тем же, что и в R, расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$, любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу, предела в Q не имеет.



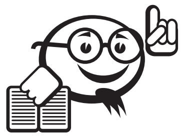
Определение 5. Метрическое пространство X называется ***полным****, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.*

Приведённые выше примеры 1, 2, 3, 4 метрических пространств являются полными метрическими пространствами.

Если в линейном пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (см. п. 2.3) ввести расстояние по формуле:

$$\rho(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|,$$

то это пространство становится полным метрическим пространством. Заметим, что пространство, полное в одной метрике, может не быть полным в другой метрике. Если в $C[a, b]$ ввести расстояние по формуле: $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$, то в этой метрике пространство $C[a, b]$ не является полным. Соответствующий пример последовательности непрерывных функций, сходящейся в этой метрике к разрывной функции, можно найти в книгах по функциональному анализу, например в [9].



Теорема (о сжимающем операторе). Пусть на полном метрическом пространстве X задан оператор $A : X \to X$ (то есть переводящий X в себя), такой, что $\forall x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y), \qquad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$ и не зависит от x и y. Тогда существует единственная точка x_0, такая, что

$$Ax_0 = x_0.$$

Оператор A, обладающий свойством (1), называется сжимающим, а точка x_0 — неподвижной точкой оператора A.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Зафиксируем её на процесс дальнейших рассуждений и положим

$$x_1 = Ax,\; x_2 = Ax_1, \ldots,\; x_n = Ax_{n-1}, \ldots.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ — фундаментальна. Действительно,

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2\rho(x, x_1) = \alpha^2\rho(x, Ax),$$

$$\ldots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha^n\rho(x, Ax).$$

Далее,

$$\begin{gathered}\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant \alpha^n(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\rho(x, Ax) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha}\rho(x, Ax).\end{gathered} \qquad (2)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\rho(x, Ax), \qquad (3)$$

откуда и следует утверждение о фундаментальности последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как X полное пространство, то существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Докажем, что $Ax_0 = x_0$. Для этого достаточно показать, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$. Действительно,

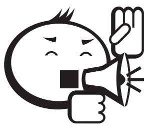
$$\rho(x_0, Ax_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_0, Ax_{n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_0, x_{n-1}).$$

Так как $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $\boldsymbol{N}$, такой, что для всех $n > \boldsymbol{N}$ выполнены неравенства $\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, неравенство $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. В силу произвольности ε из последнего неравенства следует, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, и поэтому $Ax_0 = x_0$.

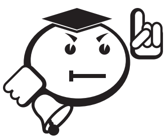
Докажем теперь единственность неподвижной точки у оператора сжатия. Предположим, что существуют два неподвижных элемента $x_0, y_0 \in X$ оператора A, то есть таких, что $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$. Тогда

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leqslant \alpha\rho(x_0, y_0).$$

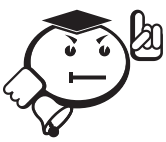
Если теперь допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из последнего неравенства следует, что $\alpha \geqslant 1$, что противоречит условию $0 < \alpha < 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.



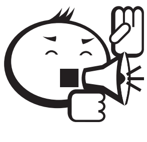
Переходя в (2) к пределу при ρ, стремящемся к ∞, получаем неравенство (3), служащее оценкой ошибки n-го приближения и одновременно оценкой скорости сходимости.



Замечание 1. Построение последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно начинать с любой точки x. Выбор x будет сказываться лишь на быстроте сходимости $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к x_0.



Замечание 2. Условие $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, $0 < \alpha < 1$ нельзя заменить на более слабое $\rho(Ax, Ay) \leqslant \rho(x, y)$ и даже на $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$. Соответствующий пример смотри в [9].



Принцип сжатых отображений применяется для доказательства сходимости итерационных процедур, то есть процедур вида $x_{n+1} = Ax_n$ с соответственно подобранным оператором A.

Пусть $A : R^n \to R^n$ — линейный оператор. Тогда $Ax + b = 0$ — система n линейных уравнений с n неизвестными. Рассмотрим оператор $B : R^n \to R^n$, действующий по формуле $Bx = Ax + b$. При $b \neq 0$ B — оператор, полученный из линейного оператора A сдвигом на вектор b. При $b = 0$ оператор B совпадает с оператором A. Найдем условия сжимаемости оператора B при различных метриках в пространстве R^n. Для R_1^n имеем:

$$\rho(Bx, By) = \rho(Ax + b, Ay + b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|(Ax)^i + b_i - (Ay)^i - b_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j - \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^i (x^j - y^j) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|a_j^i\right| \left|x^j - y^j\right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|a_j^i\right| \right) \left|x^j - y^j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|a_j^i\right| \right) \left|x^j - y^j\right| =$$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_j^i\right| \cdot \sum_{j=1}^{n} \left|x^j - y^j\right| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_j^i\right| \rho(x, y).$$

Таким образом, мы получили условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A.

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_j^i\right| < 1.$$

Для R_∞^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A имеет вид

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_j^i\right| < 1.$$

Для R_2^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^i\right)^2 < 1.$$

Соответствующие вычисления предлагается проделать самостоятельно или посмотреть в [9].

Подводя итоги, получаем, что если систему n линейных уравнений с n неизвестными удается записать в форме $x = Ax + b$ с матрицей A, удовлетворяющей одному из полученных условий сжимаемости оператора A, то, по теореме о сжимающем операторе, последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + b$ сходятся к точке x_0, являющейся решением данной системы линейных уравнений. Соответствующий процесс называется итерационным.

На этой идее основаны методы простой итерации и его модификации (метод Зейделя).

Пусть теперь функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. п. 1.4) решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, то есть непрерывна по совокупности переменных в некоторой области D и удовлетворяет в ней условию Липшица по y. Перейдём к эквивалентному интегральному уравнению

$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$. Рассмотрим оператор, действующий по формуле $By(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$. Этот оператор переводит непрерывную функцию в непрерывную. Получим условия сжимаемости оператора B в метрике пространства $C[a, b]$. Имеем:

$$\rho(By_1, By_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \Big(f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big) \Big)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a,b]} \int\limits_{x_0}^{x} \Big| f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big) \Big|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a,b]} \int\limits_{x_0}^{x} L |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \leqslant L\, |x - x_0| \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Таким образом, если $L\,|x - x_0| < 1$, то оператор B — сжимающий. Тогда, по теореме о сжимающем операторе, решение интегрального уравнения $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$, а следовательно, и задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, существует и единственно на интервале $\left(x_0 - \dfrac{1}{L}, x_0 + \dfrac{1}{L}\right)$.

Приложение В

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0\,dx = C.$

2. $\int 1\,dx = x + C.$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C,\ \alpha \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \widetilde{C}.$

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \widetilde{C}.$

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \widetilde{C}.$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7a. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2}x = \operatorname{th} x + C.$

16. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$

17. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$

Учебное издание

Ельцов Александр Александрович
Ельцова Тамара Александровна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.
Компьютерная верстка Перминова М. Ю.

Подписано 09.10.13. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 12,09. Тираж 500 экз. Заказ

Издано в ООО «Эль Контент»
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17
Отпечатано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.