Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова

Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям

2005

УДК517(07)
ББК 22.1я73
Е56

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, проф. **Е.Т. Ивлев**;
кафедра общей математики Томского
государственного университета,
зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук,
профессор **С.В. Панько**

Ельцов А.А., Ельцова Т.А.
Е56 Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005. — 204 с.
ISBN 5-86889-232-1

Рассмотрены примеры решения задач по неопределенному и определенному, кратным, поверхностным и криволинейным интегралам, элементам теории поля и дифференциальным уравнениям. Приведены задачи для самостоятельного решения. Отличительной особенностью является использование матричного и векторного аппарата.

УДК 517(07)
ББК 22.1я73

ISBN 5-86889-232-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Суха теория, мой друг,...
Гёте. Фауст

Данное пособие является частью блока учебных пособий [1–6] по курсу высшей математики, подготовленных в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники. Все эти пособия объединены общей идеей изложения курса математики на базе линейной алгебры и разбиты на части: линейная алгебра и дифференциальное исчисление [1–4], интегральное исчисление и дифференциальные уравнения [5], функции комплексного переменного, ряды, интегральные преобразования [6]. Являясь частью вышеуказанного блока, пособие имеет и самостоятельный интерес по следующим ниже причинам. При изучении курса математики большое значение имеет приобретение навыков и умений в решении задач по изучаемому разделу. Книги [7, 8], с помощью которых это умение можно приобрести, издавались давно и студенту, чаще всего, недоступны. Поэтому представляют достаточно большой интерес учебные пособия, позволяющие самостоятельно или с минимальной помощью преподавателя научиться решать задачи по тому или иному разделу математики. Они должны содержать большое количество решенных задач с подробными объяснениями и некоторое количество задач для самостоятельной работы. Данное пособие является попыткой написания такого труда и представляет собой практикум по интегральному исчислению и методам решения дифференциальных уравнений.

Цель практикума — помочь студенту в приобретении навыков вычисления неопределенных, определенных, двойных, тройных, криволинейных, поверхностных интегралов и нахождения решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений различных типов. Он может быть использован студентами различных форм обучения для самостоятельной работы и преподавателями для проведения практических занятий по указанным выше темам. Служит дополнением к учебному пособию [5]. Нумерация задач — по разделам: номер состоит из номера раздела и порядкового номера задачи. Ответы приведены в конце книги. Наиболее важные, с точки зрения авторов, формулы и определения заключены в рамку. При подготовке пособия использовались задачники [7–13].

Авторы

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение, свойства, таблицы интегралов и дифференциалов

Рекомендуется предварительно прочитать подразд. 1.1 из [5].

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)\,dx$) на отрезке $[a, b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$ $\left(dF(x) = f(x)\,dx\right)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$; 2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)dx) = \alpha\int f(x)dx \pm \beta\int g(x)dx$;

4) $\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'(t)dt$.

Заметим, что свойство 4 лежит в основе важнейшего метода нахождения интеграла с помощью замены переменной, рассматриваемого ниже.

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$.

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$.

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$.

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

7а. $\int e^x dx = e^x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

16. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C$.

17. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$.

Таблица основных дифференциалов

1. $dx = \dfrac{1}{a} d(ax) = \dfrac{1}{a} d(ax + b)$, где a и b — некоторые числа.

В частности, $dx = \dfrac{1}{2} d(2x) = \dfrac{1}{2} d(2x + b) = \dfrac{1}{3} d(3x) = \dfrac{1}{3} d(3x + b)$ и так далее.

2. $x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha + 1} d\left(x^{\alpha+1}\right) = \dfrac{1}{\alpha + 1} d\left(x^{\alpha+1} + b\right)$, $\alpha \neq -1$.

В частности, $xdx = \dfrac{1}{2} d\left(x^2\right) = \dfrac{1}{2} d\left(x^2 + b\right) = \dfrac{1}{2a} d\left(ax^2 + b\right)$,

$x^2 dx = \dfrac{1}{3} d\left(x^3\right) = \dfrac{1}{3} d\left(x^3 + b\right) = \dfrac{1}{3a} d\left(ax^3 + b\right)$, $\dfrac{dx}{x^2} = -d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -d\left(\dfrac{1}{x} + b\right)$,

$\dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{1}{2} d\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2} d\left(\dfrac{1}{x^2} + b\right)$, $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = 2d\left(\sqrt{x} + b\right)$.

3. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \dfrac{1}{a} d(a \ln x + b)$.

4. $e^x dx = d\left(e^x\right) = d\left(e^x + b\right)$, $e^{\alpha x} dx = \dfrac{1}{\alpha} d\left(e^{\alpha x}\right) = \dfrac{1}{\alpha} d\left(e^{\alpha x} + b\right)$.

5. $\cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x + b)$,

$\cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha} d(\sin\alpha x) = \frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\sin\alpha x + b\right)$.

6. $\sin x dx = -d(\cos x) = -d(\cos x + b)$,

$\sin\alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} d(\cos\alpha x) = -\frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\cos\alpha x + b\right)$.

7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) = d(\operatorname{tg} x + b)$, $\frac{dx}{\cos^2 \alpha x} = \frac{1}{\alpha} d(\operatorname{tg}\alpha x) = \frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta \operatorname{tg}\alpha x + b\right)$.

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x) = -d(\operatorname{ctg} x + b)$,

$\frac{dx}{\sin^2 \alpha x} = -\frac{1}{\alpha} d(\operatorname{ctg}\alpha x) = -\frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta \operatorname{ctg}\alpha x + b\right)$.

9. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x) = -d(\operatorname{arcctg} x)$,

$\frac{dx}{1+\alpha^2 x^2} = \frac{1}{\alpha} d(\operatorname{arctg}\alpha x) = \frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\operatorname{arctg}\alpha x\right) = -\frac{1}{\alpha\beta} d(\beta\operatorname{arcctg}\alpha x)$.

10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = \frac{1}{\alpha} d(\arcsin\alpha x) = \frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\arcsin\alpha x\right) = -\frac{1}{\alpha} d(\arccos\alpha x) =$$
$$= -\frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\arccos\alpha x\right) = \frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\arcsin\alpha x + \gamma\right) = -\frac{1}{\alpha\beta} d\left(\beta\arccos\alpha x + \gamma\right).$$

Нам также понадобится свойство дифференциала

$$df(x) = \frac{1}{a} d\left(af(x)\right) = \frac{1}{a} d\left(af(x) + b\right).$$

Неопределенные интегралы находят путем сведения исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределенных интегралов.

1.2. Приемы нахождения неопределенного интеграла

1.2.1. Подведение под знак дифференциала

Для овладения этим приемом рекомендуется изучить подразд. 1.2.1 учебного пособия [5], выучить таблицы интегралов и дифференциалов, приведенные выше и в подразд. 1.1 и 1.2. пособия [5], довести до автоматизма знание таблиц производных и дифференциалов и умение ими пользоваться в обе стороны, то есть не только уметь вычислять по исходной функции производную и дифференциал, но и по дифференциалу увидеть исходную функцию.

Иногда удается представить подынтегральное выражение в виде $f(x)dx = \varphi(u(x))du(x)$, где u — некоторая функция от x, и при этом интеграл $\int \varphi(u)\,du$ является табличным. Этот прием называется подведением под знак дифференциала и представляет собой простейший вариант замены переменной, выраженной свойством 4. Рассмотрим этот прием для некоторых интегралов, приведенных в таблице.

$$\boxed{\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

1.1. $\int x\sqrt[4]{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{2+x^2}\,d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{2+x^2}\,d\left(x^2+2\right) =$

$= \frac{1}{2}\int \left(2+x^2\right)^{1/4} d\left(x^2+2\right) = \frac{1}{2}\left(2+x^2\right)^{5/4} : \frac{5}{4} + C = \frac{2}{5}\left(2+x^2\right)^{5/4} + C.$

Заметим, что этот интеграл можно найти, сделав замену переменных $u = x^2+2$. Тогда $2x\,dx = du$, поэтому $x\,dx = \frac{du}{2}$ и $\int x\sqrt[4]{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/4}du =$

$= \frac{1}{2}u^{5/4} : \frac{5}{4} + C = \frac{2}{5}\left(2+x^2\right)^{5/4} + C.$

1.2. $\int x\sqrt[5]{3+7x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[5]{3+7x^2}\,d\left(x^2\right) = \frac{1}{2\cdot 7}\int \sqrt[5]{3+7x^2}\,d\left(7x^2\right) =$

$= \frac{1}{14}\int \left(3+7x^2\right)^{1/5} d\left(7x^2+3\right) = \frac{1}{14}\left(3+7x^2\right)^{6/5} : \frac{6}{5} + C = \frac{5}{84}\left(3+7x^2\right)^{6/5} + C.$

1.3. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int \sqrt{\sin x}\,d(\sin x) = \frac{2(\sin x)^{3/2}}{3} + C.$

1.4. $\int \sqrt[3]{\sin 5x}\cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sqrt[3]{\sin 5x}\,d(\sin 5x) = \frac{3\sin^{4/3}5x}{5\cdot 4} + C =$

$= \frac{3\sin^{4/3}5x}{20} + C.$

1.5. $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} 3x\,d(\operatorname{arctg} 3x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{6} + C.$

Задачи для самостоятельного решения

1.6. $\int (2+\sin 3x)^5\cos 3x\,dx.$ **1.7.** $\int \frac{(2+3\ln x)^4}{x}dx.$ **1.8.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x^2}}.$

1.9. $\int \frac{\sqrt[3]{1+2\ln x}}{x}dx.$ **1.10.** $\int \frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt{5+4\sin 3x}}.$ **1.11.** $\int \frac{dx}{x(3+5\ln x)^4}.$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C}$$

1.12. $\int \frac{x\,dx}{3+5x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{3+5x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{3+5x^2} = \frac{1}{2\cdot 5}\int \frac{d\left(5x^2\right)}{3+5x^2} = \frac{1}{10}\int \frac{d\left(3+5x^2\right)}{3+5x^2} =$

$= \frac{1}{10}\ln\left(3+5x^2\right) + C$. Знак модуля опущен в силу того, что $3+5x^2 \geq 3 > 0$ для $\forall x$ из R.

1.13. $\int \frac{x^3 dx}{2+3x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{2+3x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{2+3x^4} = \frac{1}{3\cdot 4}\int \frac{d\left(3x^4\right)}{2+3x^4} =$

$= \frac{1}{12}\int \frac{d\left(2+3x^4\right)}{2+3x^4} = \frac{1}{12}\ln\left(2+3x^4\right) + C$.

1.14. $\int \frac{e^x dx}{3e^x+2} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{3e^x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(3e^x\right)}{3e^x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(3e^x+2\right)}{3e^x+2} = \frac{1}{3}\ln\left(3e^x+2\right) + C$.

1.15. $\int \frac{\sin 5x}{7+4\cos 5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{d(\cos 5x)}{7+4\cos 5x} = -\frac{1}{5\cdot 4}\int \frac{d(4\cos 5x)}{7+4\cos 5x} =$

$= -\frac{1}{20}\int \frac{d(7+4\cos 5x)}{7+4\cos 5x} = -\frac{1}{20}\ln(7+4\cos 5x) + C$.

1.16. $\int \frac{dx}{(2+3\,\mathrm{tg}\,5x)\cos^2 5x} = \frac{1}{5}\int \frac{d(\mathrm{tg}\,5x)}{2+3\,\mathrm{tg}\,5x} = \frac{1}{15}\ln|2+3\,\mathrm{tg}\,5x| + C$.

Задачи для самостоятельного решения

1.17. $\int \frac{x^3}{5+3x^4}dx$. **1.18.** $\int \frac{dx}{\cos^2 2x\,(4+3\,\mathrm{tg}\,2x)}$. **1.19.** $\int \frac{e^{2x}dx}{3+e^{2x}}$.

1.20. $\int \frac{dx}{x(5+4\ln x)}$. **1.21.** $\int \frac{x\,dx}{4+9x^2}$. **1.22.** $\int \frac{x^2 dx}{25+16x^3}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + \tilde{C};\\ &\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + \tilde{C}\end{aligned}}$$

1.23. $\int \frac{x^3 dx}{1+4x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{1+\left(2x^4\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{1+\left(2x^4\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{d\left(2x^4\right)}{1+\left(2x^4\right)^2} =$

$= \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\left(2x^4\right) + C$.

1.24. $\int \frac{dx}{9+5x^2} = \int \frac{dx}{(3)^2 + \left(\sqrt{5}\cdot x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\sqrt{5}\cdot x\right)}{(3)^2 + \left(\sqrt{5}\cdot x\right)^2} =$

$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}\cdot x}{3}\right) + C.$

1.25. $\int \frac{dx}{x^2+10x+34} = \int \frac{dx}{x^2+10x+25+9} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+9} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2+3^2} =$

$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{3} + C.$

1.26. $\int \frac{x^5}{16+9x^{12}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{dx^6}{16+9x^{12}} = \frac{1}{6\cdot 3}\int \frac{d\left(3x^6\right)}{4^2+\left(3x^6\right)^2} =$

$= \frac{1}{18\cdot 4}\operatorname{arctg}\frac{3x^6}{4} + C = \frac{1}{72}\operatorname{arctg}\frac{3x^6}{4} + C.$

1.27. $\int \frac{x^6}{25+9x^{14}}dx = \frac{1}{7}\int \frac{dx^7}{25+9x^{14}} = \frac{1}{7\cdot 3}\int \frac{d\left(3x^7\right)}{5^2+\left(3x^7\right)^2} =$

$= \frac{1}{21\cdot 5}\operatorname{arctg}\frac{3x^7}{5} + C = \frac{1}{105}\operatorname{arctg}\frac{3x^7}{5} + C.$

1.28. $\int \frac{e^{6x}dx}{e^{12x}+9} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(e^{6x}\right)}{3^2+\left(e^{6x}\right)^2} = \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{e^{6x}}{3} + C.$

1.29. $\int \frac{e^{4x}dx}{4e^{8x}+25} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(e^{4x}\right)}{5^2+\left(2e^{4x}\right)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{d\left(2e^{4x}\right)}{5^2+\left(2e^{4x}\right)^2} = \frac{1}{8\cdot 5}\operatorname{arctg}\frac{2e^{4x}}{5} + C.$

1.30. $\int \frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{9+4\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2\cos x)}{3^2+(2\cos x)^2} =$

$= -\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\cos x}{3} + C.$

1.31. $\int \frac{\cos 5x dx}{4+9\sin^2 5x} = \frac{1}{5}\int \frac{\cos 5x d(5x)}{4+9\sin^2 5x} = \frac{1}{5}\int \frac{d(\sin 5x)}{4+9\sin^2 5x} =$

$= \frac{1}{5\cdot 3}\int \frac{d(3\sin 5x)}{2^2+(3\sin 5x)^2} = \frac{1}{5\cdot 3\cdot 2}\operatorname{arctg}\frac{3\sin 5x}{2} + C = \frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{3\sin 5x}{2} + C.$

1.32. $\int \frac{dx}{9\sin^2 7x+16\cos^2 7x} = \int \frac{dx}{\left(9\operatorname{tg}^2 7x+16\right)\cos^2 7x} = \frac{1}{7}\int \frac{d\left(\operatorname{tg} 7x\right)}{9\operatorname{tg}^2 7x+16} =$

$= \frac{1}{7\cdot 3}\int \frac{d\left(3\operatorname{tg} 7x\right)}{(3\operatorname{tg} 7x)^2+4^2} = \frac{1}{7\cdot 3\cdot 4}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} 7x}{4} + C = \frac{1}{84}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} 7x}{4} + C.$

1.33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x}\,(16+45x)} = \frac{2}{5}\int \frac{d\left(\sqrt{5x}\right)}{16+\left(3\sqrt{5x}\right)^2} = \frac{2}{3\cdot 5}\int \frac{d\left(3\sqrt{5x}\right)}{16+\left(3\sqrt{5x}\right)^2} =$

$$= \frac{2}{4\cdot 3\cdot 5}\operatorname{arctg}\frac{\left(3\sqrt{5x}\right)}{4} + C = \frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{\left(3\sqrt{5x}\right)}{4} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.34. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{25+36\sin^2 x}\,dx$. **1.35.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(9+4\operatorname{ctg}^2 x\right)}$.

1.36. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(9+7\ln^2 x\right)}$. **1.37.** $\displaystyle\int \frac{dx}{49+9x^2}$. **1.38.** $\displaystyle\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

1.39. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{25+4x^4}$. **1.40.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{9+4x^4}$. **1.41.** $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos^2 3x+25\sin^2 3x}$.

1.42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\,(4+18x)}$. **1.43.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x}\,(4+27x)}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C},\\ &\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}\end{aligned}}$$

1.44. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C.$

1.45. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-9x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{1-\left(3x^4\right)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{\sqrt{1-\left(3x^4\right)^2}} = \frac{1}{3\cdot 4}\int \frac{d\left(3x^4\right)}{\sqrt{1-\left(3x^4\right)^2}} =$

$$= \frac{1}{12}\arcsin\left(3x^4\right) + C.$$

1.46. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{9-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C.$

1.47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-14x-45}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+14x+45)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+14x+49-4)}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(x^2+14x+49\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+7)^2}} = \int \frac{d(x+7)}{\sqrt{4-(x+7)^2}} = \arcsin\frac{x+7}{2} + C.$$

1.48. $\int \frac{e^{5x}dx}{\sqrt{9-e^{10x}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(e^{5x}\right)}{\sqrt{3^2-\left(e^{5x}\right)^2}} = \frac{1}{5}\arcsin\frac{e^{5x}}{3} + C$.

1.49. $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{4-9e^{8x}}} = \frac{1}{12}\int \frac{d\left(3e^{4x}\right)}{\sqrt{4-\left(3e^{4x}\right)^2}} = \frac{1}{12}\arcsin\frac{3e^{4x}}{2} + C$.

1.50. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-3\cos^2 x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\cos x\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\cos x\right)}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\cos x\right)^2}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\cos x}{2} + C$.

1.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}\sqrt{25-12x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{25-12x}} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\int \frac{d\left(2\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{25-\left(2\sqrt{3x}\right)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{2\sqrt{3x}}{5} + C$.

Задачи для самостоятельного решения

1.52. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{9-4\sin^2 3x}}dx$. **1.53.** $\int \frac{dx}{\cos^2 5x\sqrt{16-9\,\mathrm{tg}^2\, 5x}}$.

1.54. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x\sqrt{36-25\,\mathrm{tg}^2\, 7x}}$. **1.55.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-25\ln^2 x}}$.

1.56. $\int \frac{dx}{\sqrt{49-4x^2}}$. **1.57.** $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$. **1.58.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{25-9x^4}}$.

1.59. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{49-9x^6}}$. **1.60.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{4-18x}}$. **1.61.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x}\sqrt{9-20x}}$.

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C}$$

1.62. $\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

1.63. $\int x^2e^{5x^3+4}dx = \frac{1}{3}\int e^{5x^3+4}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3\cdot 5}\int e^{5x^3+4}d\left(5x^3\right) =$

$= \frac{1}{15}\int e^{5x^3+4}d\left(5x^3+4\right) = \frac{1}{15}e^{5x^3+4} + C$.

1.64. $\int e^{4\sin 3x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int e^{4\sin 3x} d(\sin 3x) = \frac{1}{3\cdot 4}\int e^{4\sin 3x} d(4\sin 3x) =$

$= \frac{1}{12}e^{4\sin 3x} + C.$

1.65. $\int \frac{e^{3\,\mathrm{ctg}\,2x}}{\sin^2 2x}dx = -\frac{1}{6}\int e^{3\,\mathrm{ctg}\,2x} d(3\,\mathrm{ctg}\,2x) = -\frac{1}{6}e^{3\,\mathrm{ctg}\,2x} + C.$

Задачи для самостоятельного решения

1.66. $\int e^{3x^2+\ln x}dx.$ **1.67.** $\int e^{2\cos 5x}\sin 5x\,dx.$ **1.68.** $\int x^4 e^{3x^5}dx.$

1.69. $\int e^{\left(\ln^3 x+5\right)}\frac{\ln^2 x}{x}dx.$ **1.70.** $\int e^{\cos^2 7x}\sin 14x\,dx.$ **1.71.** $\int \frac{e^{5\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

$$\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C}$$

1.72. $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$

1.73. $\int x^2\cos\left(2x^3+3\right)dx = \frac{1}{3}\int \cos(2x^3+3)\,d\left(x^3\right) =$

$= \frac{1}{3\cdot 2}\int \cos\left(2x^3+3\right)d\left(2x^3\right) = \frac{1}{6}\sin\left(2x^3+3\right) + C.$

1.74. $\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

1.75. $\int x^3\sin\left(5x^4+6\right)dx = \frac{1}{4}\int \sin\left(5x^4+4\right)d\left(x^4\right) =$

$= \frac{1}{4\cdot 5}\int \sin\left(5x^4+6\right)d\left(5x^4\right) = -\frac{1}{20}\cos\left(5x^4+6\right) + C.$

Задачи для самостоятельного решения

1.76. $\int \cos 9x\,dx.$ **1.77.** $\int \sin(7x+8)\,dx.$ **1.78.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(3\sqrt{x}\right)dx.$

1.79. $\int \frac{\cos(5\ln x)}{x}dx.$ **1.80.** $\int e^x\cos\left(2e^x+5\right)dx.$

$$\boxed{\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$$

1.81. $\int \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2} = -\int \sin\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

1.82. $\int e^{1/x^4}\dfrac{dx}{x^5}=-\dfrac{1}{4}\int e^{1/x^4}\,d\left(\dfrac{1}{x^4}\right)=-\dfrac{1}{4}e^{1/x^4}+C$.

1.83. $\int\cos\dfrac{1}{x^3}\dfrac{dx}{x^4}=-\dfrac{1}{3}\int\cos\dfrac{1}{x^3}\,d\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{1}{x^3}+C$.

Задачи для самостоятельного решения

1.84. $\int e^{1/2x^3}\dfrac{dx}{x^4}$. **1.85.** $\int\dfrac{1}{x^7}\sin\dfrac{5}{x^6}\,dx$. **1.86.** $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{5x}\,dx$.

Разные задачи для самостоятельного решения на подведение под знак дифференциала

1.87. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x}\,\sqrt{3-2x}}$. **1.88.** $\int\dfrac{e^{4x}+2}{e^{3x}}\,dx$. **1.89.** $\int\sin^4 7x\cos 7x\,dx$.

1.90. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 3x\sqrt{1+\operatorname{tg}3x}}$. **1.91** $\int\dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{2\sin^2 x-3\cos^2 x}}$.

1.92. $\int\dfrac{e^{-8x}+e^{8x}}{e^{-8x}-e^{8x}}\,dx$. **1.93.** $\int\dfrac{\sin x\cos x\,dx}{3\sin^2 x+8\cos^2 x-1}$.

1.94. $\int\dfrac{7^{2-5\operatorname{arcctg}x}}{x^2+1}\,dx$. **1.95.** $\int\dfrac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos x}}\,dx$. **1.96.** $\int\dfrac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-2e^{2x}}}$.

1.97. $\int\dfrac{x^6\,dx}{\sqrt{x^7+9}-\sqrt{x^7}}$. **1.98.** $\int\dfrac{dx}{(1-x)^{100}}$. **1.99.** $\int\dfrac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{3\sin^2 x+4}}$.

1.100. $\int\dfrac{\sqrt{e^{2x}+5}}{e^{-2x}}\,dx$. **1.101.** $\int\dfrac{7\ln(2x-2)}{3(x-1)}\,dx$.

1.102. $\int\dfrac{2x}{5+x^2}\,dx$. **1.103.** $\int\dfrac{\ln x+1}{x\left(2\ln^2 x+3\right)}\,dx$. **1.104.** $\int\dfrac{x^3-3x}{3+x^4}\,dx$.

1.105. $\int\dfrac{x^2\,dx}{\left(1-x^3\right)^{10}}$. **1.106.** $\int\dfrac{\sin x}{5-\cos x}\,dx$. **1.107.** $\int\cos^2 2x\sin 2x\,dx$.

1.108. $\int\dfrac{x}{\left(5-x^2\right)^3}\,dx$. **1.109.** $\int\dfrac{3x^5+4\ln^2 x^2}{x}\,dx$. **1.110.** $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$.

1.111. $\int\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arcctg}^{-3}x}$. **1.112.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(5-2\sqrt{x}\right)}$. **1.113.** $\int\dfrac{\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx$.

1.114. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(4-\sqrt{3x^3}\right)^2}$. **1.115.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x+1}{1+x^2}dx$. **1.116.** $\int \frac{1}{x^3}\sin\frac{2}{x^2}dx$.

1.2.2. Интегрирование по частям

Предварительно рекомендуется изучить п. 1.2.2 из [5].

Иногда подынтегральное выражение можно представить в виде $U(x)dV(x)$, где $U(x)$ и $V(x)$ — дифференцируемые функции, и интеграл $\int V(x)\,dU(x)$ вычисляется проще, чем исходный. Тогда имеет смысл воспользоваться формулой

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x),$$

называемой формулой интегрирования по частям.

1.117. Вычислить $\int xe^{2x}dx$.

Положим $U = x$, $dV = e^{2x}dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int e^{2x}dx = 0,5e^{2x} + C$, и в качестве V можем взять $V = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}$. Поэтому $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$.

1.118. Вычислить $\int x\sin 4x dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \sin 4x\, dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$, и в качестве V можем взять $V = -\frac{1}{4}\cos 4x$. Следовательно, $\int x\sin 4x dx = -\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx = -\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$.

1.119. Вычислить $\int (x+4)\cos 5x dx$.

Полагаем $U = x + 4$, $dV = \cos 5x dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$, и в качестве V можем взять $V = \frac{1}{5}\sin 5x$, поэтому

$$\int (x+4)\cos 5x dx = \frac{1}{5}(x+4)\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}(x+4)\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C.$$

Обратим внимание на то, что при использовании формулы интегрирования по частям нужно удачно выбрать U и dV, чтобы интеграл, полученный в правой части формулы, находился легче. Пример, как лучше не делать, приведен в [5]. Основные рекомендации здесь следующие.

Если подынтегральная функция есть произведение полинома (многочлена) на экспоненту $(e^x = \exp(x))$ или тригонометрическую функцию, то обычно в качестве $U(x)$ выбирают полином, а все остальное относят к $dV(x)$.

Иногда требуется применить формулу интегрирования по частям несколько раз, например при вычислении следующих интегралов.

1.120. Вычислить $\int (x^2 + 3x)\sin 2x dx$.

Полагаем $U = x^2 + 3x$, $dV = \sin 2x dx$. Тогда $dU = (2x+3)dx$, $V = -\frac{1}{2}\cos 2x$ и $\int (x^2 + 3x)\sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (2x+3)\cos 2x dx$. Для вычисления второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = 2x + 3$, $dV = \cos 2x dx$. Тогда $dU = 2dx$, $V = \frac{1}{2}\sin 2x$, и поэтому $\int (2x+3)\cos 2x dx = \frac{1}{2}(2x+3)\sin 2x - \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx = \frac{1}{2}(2x+3)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. Таким образом, $\int (x^2 + 3x)\sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

1.121. Вычислить $\int (x+3)\operatorname{tg}^2 7x\, dx$.

Полагаем $U = x + 3$, $dV = \operatorname{tg}^2 7x\, dx$. Тогда $dU = dx$, $\int \operatorname{tg}^2 7x\, dx = \int \frac{\sin^2 7x}{\cos^2 7x} dx = \int \frac{1-\cos^2 7x}{\cos^2 7x} dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x + C$ и в качестве V можем взять $\frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x$. Поэтому $\int (x+3)\operatorname{tg}^2 7x\, dx = \left(\frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x\right)(x+3) - \int \left(\frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x\right) dx = \left(\frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x\right)(x+3) + \frac{1}{49}\ln|\cos 7x| + \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{7}(x+3)\operatorname{tg} 7x - \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{49}\ln|\cos 7x| + C$.

1.122. Вычислить $\int \arcsin^2 3x\, dx$.

Полагаем $U = \arcsin^2 3x$, $dV = dx$. Тогда $dU = \frac{6\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$, $V = x$ и $\int \arcsin^2 3x\, dx = x\arcsin^2 3x - 6\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} \arcsin 3x\, dx$. Для нахождения второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = \arcsin 3x,\ dV = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Тогда $dU = \dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{18}\int \frac{d\left(1-9x^2\right)}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + C$,

и в качестве V можно взять $V = -\dfrac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}$. Таким образом, окончательно получаем $\displaystyle\int \arcsin^2 3x\,dx = x\arcsin^2 3x - 6\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\arcsin 3x\,dx =$

$$= x\arcsin^2 3x - 6\left(-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}\arcsin 3x + \frac{1}{9}\int \sqrt{1-9x^2}\,\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}\right) = x\arcsin^2 3x +$$

$$+\frac{2}{3}\sqrt{1-9x^2}\arcsin 3x - 2x + C.$$

1.123. Вычислить $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2 5x\,dx$.

Пусть $U = \mathrm{arctg}^2 5x,\ dV = x\,dx$. Тогда $dU = \dfrac{5\cdot 2\,\mathrm{arctg}\,5x}{1+25x^2}dx$, $V = \dfrac{1}{2}x^2$

и $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2 5x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}^2 5x - 5\int \frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,5x\,dx}{1+25x^2}$. Полагая во втором слагаемом $U = \mathrm{arctg}\,5x,\ dV = \dfrac{x^2}{1+25x^2}dx$, имеем $dU = \dfrac{5dx}{1+25x^2}$, $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+25x^2}dx =$

$= \dfrac{1}{25}\displaystyle\int \frac{25x^2+1-1}{1+25x^2}dx = \frac{1}{25}x - \frac{1}{125}\mathrm{arctg}\,5x + C$, поэтому в качестве V можно взять $V = \dfrac{1}{25}x - \dfrac{1}{125}\mathrm{arctg}\,5x$ и, следовательно, $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+25x^2}\mathrm{arctg}\,5x\,dx =$

$$= \left(\frac{1}{25}x - \frac{1}{125}\mathrm{arctg}\,5x\right)\mathrm{arctg}\,5x - \int\left(\left(\frac{1}{25}x - \frac{1}{125}\mathrm{arctg}\,5x\right)\frac{5dx}{1+25x^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{25}x - \frac{1}{125}\mathrm{arctg}\,5x\right)\mathrm{arctg}\,5x - \frac{1}{250}\ln\left(1+25x^2\right) + \frac{1}{250}\mathrm{arctg}^2 5x + C =$$

$= \dfrac{1}{25}x\,\mathrm{arctg}\,5x - \dfrac{1}{250}\mathrm{arctg}^2 5x - \dfrac{1}{250}\ln\left(1+25x^2\right) + C$. Окончательно получаем $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2 5x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{50}\right)\mathrm{arctg}^2 5x - \frac{1}{5}x\,\mathrm{arctg}\,5x + \frac{1}{50}\ln\left(1+25x^2\right) + C$.

1.124. Вычислить $\int \ln^2(x+2)\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2(x+2)$, $dV=dx$. Тогда $dU=\dfrac{2\ln(x+2)}{x+2}dx$, $\int dV = = \int dx = x + C$. Если взять $V=x$, то дальнейшие преобразования получаются не очень хорошими. Взяв $V=x+2$, имеем $\int \ln^2(x+2)\,dx =$

$$= (x+2)\ln^2(x+2) - 2\int (x+2)\frac{\ln(x+2)}{x+2}dx = (x+2)\ln^2(x+2) - 2\int \ln(x+2)dx.$$

Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln(x+2)$, $dV=dx$, имеем $dU=\dfrac{dx}{x+2}$, $\int dV = x+C$ и, взяв $V=x+2$, имеем $\int \ln(x+2)\,dx = (x+2)\ln(x+2) - \int dx = (x+2)\ln(x+2) - x + C$. Поэтому $\int \ln^2(x+2)\,dx = (x+2)\ln^2(x+2) - 2(x+2)\ln(x+2) + 2x + C$.

1.125. Вычислить $\int x\ln^2 3x\,dx$.

Полагаем $U=\ln^2 3x$, $dV=xdx$. Тогда $dU=\dfrac{2\ln 3x}{x}dx$, $V=\dfrac{1}{2}x^2$, и поэтому $\int x\ln^2 3x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 3x - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{2\ln 3x}{x}dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 3x - \int x\ln 3x dx$.

Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U=\ln 3x$, $dV=xdx$, имеем $\int x\ln 3x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln 3x - \dfrac{1}{2}\int xdx = \dfrac{1}{2}x^2\ln 3x - -\dfrac{1}{4}x^2 + C$. Поэтому $\int x\ln^2 3x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 3x - \dfrac{1}{2}x^2\ln 3x + \dfrac{1}{4}x^2 + C$.

1.126. Вычислить $\int \ln\left(3x^2+4\right)dx$.

Полагаем $U=\ln\left(3x^2+4\right)$, $dV=dx$. Тогда $dU=\dfrac{6xdx}{3x^2+4}$, $V=x$, и поэтому $\int \ln\left(3x^2+4\right)dx = x\ln\left(3x^2+4\right) - \int \dfrac{6x^2}{3x^2+4}dx = x\ln\left(3x^2+4\right) -$

$$- 2\int \frac{3x^2+4-4}{3x^2+4}dx = x\ln\left(3x^2+4\right) - 2x + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

1.127. Вычислить $\int \dfrac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx$.

Интеграл вычисляется либо интегрированием по частям с $U=x^3$, $dV=\dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$, либо с помощью замены переменной $z=1+x^3$. В первом случае $dU=3x^2dx$, $V=\frac{4}{9}\left(1+x^3\right)^{3/4}$, и поэтому $\int\frac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx=\frac{4}{9}x^3\left(1+x^3\right)^{3/4}-$

$-\int\frac{4}{9}\left(1+x^3\right)^{3/4}-3x^2dx=\frac{4}{9}x^3\left(1+x^3\right)^{3/4}-\frac{16}{63}\left(1+x^3\right)^{7/4}+C$. Во втором случае

$dz=3x^2dx$, $x^3=z-1$, и поэтому $\int\frac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{\sqrt[4]{z}}dz=$

$=\frac{1}{3}\int z^{3/4}dz-\frac{1}{3}\int z^{-1/4}dz=\frac{4}{21}z^{7/4}-\frac{4}{9}z^{3/4}+C=\frac{4}{21}\left(1+x^3\right)^{7/4}-\frac{4}{9}\left(1+x^3\right)^{3/4}+C$.

С помощью интегрирования по частям вычисляется пятый интеграл в контрольной работе 5 пособия [5]. Шестой интеграл находится аналогично примеру 1.127.

Задачи для самостоятельного решения

1.128. $\int\frac{\arcsin 5x}{\sqrt{1-5x}}dx$. **1.129.** $\int x^7\sqrt[5]{8+x^4}\,dx$. **1.130.** $\int\ln^2(2x+3)\,dx$.

1.131. $\int\ln\left(x^2+9\right)dx$. **1.132.** $\int(x+2)\,\mathrm{arctg}\,5x\,dx$.

1.133. $\int(x+3)\sin 5x\,dx$. **1.134.** $\int\ln(3x+4)dx$.

1.135. $\int\ln\left(7x^2+4\right)dx$. **1.136.** $\int\mathrm{arctg}\,4x\,dx$.

1.137. $\int(2x+3)\mathrm{tg}^2 2x\,dx$. **1.138.** $\int\left(3x^2+5\right)\ln x\,dx$.

1.139. $\int\mathrm{arcctg}\,7x\,dx$. **1.140.** $\int(3x+1)e^{4x}dx$. **1.141.** $\int x^7e^{x^4}dx$.

1.142. $\int e^{3x}\cos 5x\,dx$. **1.143.** $\int e^{7x}\sin 3x\,dx$. **1.144.** $\int x^3e^{3x^2+5}dx$.

1.145. $\int(4x+1)\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$. **1.146.** $\int x\ln^2(x+3)\,dx$.

1.2.3. Простейшие преобразования подынтегрального выражения

Рекомендуется предварительно изучить п. 1.2.3 из [5].

Выделение целой части

Суть приема видна из примеров.

1.147. $\int\frac{x}{3x-2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x}{3x-2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x-2+2}{3x-2}dx=\frac{1}{3}\int dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{3x-2}=$

$=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\ln|3x-2|+C$.

1.148. $\int \frac{x}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+5-5}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x+5} =$

$= x - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C.$

1.149. $\int \frac{x^2}{x^2+36}dx = \int \frac{x^2+36-36}{x^2+36}dx = \int dx - 36\int \frac{dx}{x^2+36} =$

$= x - 6\operatorname{arctg}\frac{x}{6} + C.$

1.150. $\int \frac{x^2}{4x^2+9}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+9-9}{4x^2+9}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{9}{4}\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}x -$

$-\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.$

1.151. $\int \frac{(x-3)^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+9-6x}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+5-6x}{x^2+4}dx = \int dx +$

$+ 5\int \frac{dx}{x^2+4} - \int \frac{6x dx}{x^2+4} = \int dx + 5\int \frac{dx}{x^2+4} - 3\int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} = x + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} -$

$-3\ln\left(x^2+4\right) + C.$

Задачи для самостоятельного решения

1.152. $\int \frac{x+3}{2x-3}dx$. **1.153.** $\int \frac{2x+7}{3x-1}dx$. **1.154.** $\int \frac{(4x+5)^2}{16x^2+25}dx$.

1.155. $\int \frac{x^2}{9x^2+16}dx$. **1.156.** $\int \frac{2x+1}{3x-4}dx$. **1.157.** $\int \frac{3x+5}{4x-3}dx$.

Преобразование тригонометрического выражения

Наиболее часто применяются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

и некоторые другие.

1.158. $\int \sin^2 4x\,dx = \int \frac{1-\cos 8x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

1.159. $\int \cos^2 5x\,dx = \int \frac{1+\cos 10x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

1.160. $\int \cos 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 8x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

1.161. $\int \cos 3x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\,dx = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.

1.162. $\int \sin 2x \sin 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 9x)dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C$.

1.163. $\int \mathrm{ctg}^2\, 3x\,dx = \int \frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}dx = \int \frac{1-\sin^2 3x}{\sin^2 3x}dx = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\, 3x - x + C$.

1.164. $\int \cos^3 7x dx = \int \cos^2 7x \cos 7x dx = \int \left(1-\sin^2 7x\right)\cos 7x dx =$

$= \frac{1}{7}\int \left(1 - \sin^2 7x\right) d \sin 7x = \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{21}\sin^3 7x + C$.

1.165. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx =$

$= -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$

Задачи для самостоятельного решения

1.166. $\int \sin^2 5x\,dx$. **1.167.** $\int \sin^3 6x\,dx$. **1.168.** $\int \sin 8x \cos 5x\,dx$.

1.169. $\int \mathrm{tg}^2 4x\,dx$. **1.170.** $\int \mathrm{tg}^4 5x\,dx$. **1.171.** $\int \cos 8x \cos 5x\,dx$.

Выделение полного квадрата

Иногда удается получить табличный интеграл, выделив в подынтегральной функции выражения вида $(ax+b)^2$, то есть полный квадрат двучлена $ax+b$.

1.172. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25}$.

Имеем $x^2-6x+25=\left(x^2-6x+9\right)+16=(x-3)^2+4^2$. Сделав замену $x-3=t$, получаем $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dt}{t^2+4^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4}+C$.

1.173. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{-36x-9x^2+13}}$.

Имеем $-36x-9x^2+13=-9\left(x^2+4x+4\right)+36+13=49-9(x+2)^2$. Поэтому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-36x-9x^2+13}}=\int\frac{dx}{\sqrt{49-9(x+2)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x+2)}{7}+C.$$

1.174. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}$.

Имеем $-x^2+4x=-\left(x^2-4x+4\right)+4=4-(x-2)^2$. Поэтому $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}=$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

Интегралы $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$.

1.175. Вычислить $\int\frac{5x+3}{x^2-6x+18}dx$.

Производная знаменателя равна $2x-6$. Поэтому $\int\frac{5x+3}{x^2-6x+18}dx=$

$$=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-6)+\frac{5}{2}\cdot 6+3}{x^2-6x+18}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+18}dx+18\int\frac{dx}{x^2-6x+18}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2-6x+18\right)}{x^2-6x+18}+18\int\frac{dx}{\left(x^2-6x+9\right)+9}=\frac{5}{2}\ln\left(x^2-6x+18\right)+6\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C.$$

Интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{a^2-(x+b)^2}}$ выделением в числителе дифференциала подкоренного выражения сводится к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x+b)^2}}$.

1.176. Вычислить $\int \frac{(6x+2)dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$.

Производная подкоренного выражения равна $-2(x-2)$. Поэтому

$$\int \frac{(6x+2)dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int \frac{\left(-2(x-2)(-3)+14\right)dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -6\sqrt{4-(x-2)^2} + 14\arcsin\frac{x-2}{2} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.177. $\int \frac{dx}{x^2+6x+45}$. **1.178.** $\int \frac{dx}{x^2-8x+41}$. **1.179.** $\int \frac{dx}{9x^2+12x+20}$.

1.180. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-7}}$. **1.181.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2+12x}}$. **1.182.** $\int \frac{(3x+5)dx}{4x^2+4x+10}$.

1.183. $\int \frac{(2x+3)dx}{9x^2+12x+20}$. **1.184.** $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{7-4x^2+12x}}$.

1.185. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{8-4x^2+4x}}$.

1.2.4. Интегрирование рациональных дробей

Предварительно рекомендуется прочитать п. 1.2.4 из [5].

Рациональной дробью или рациональной функцией называется отношение двух полиномов (многочленов), то есть выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l x^l = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ и $Q(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l =$ $= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — полиномы (многочлены) степеней k и n соответственно. Если степень полинома (многочлена) в числителе меньше степени полинома в знаменателе, то есть $k < n$, то такую рациональную дробь называют правильной, если $k \ge n$, то рациональную дробь называют неправильной.

В случае неправильной дроби числитель можно представить в виде $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, где $R(x)$ и $S(x)$ — полиномы, называемые обычно, как и в случае действительных чисел, частным и остатком, причем степень полинома $S(x)$ меньше n. Тогда рациональная дробь запишется в виде

$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$, а интеграл от полинома $R(x)$ мы вычислять умеем.

Описанный прием называется выделением целой части рациональной дроби. Частное $R(x)$ в этом случае называется целой частью рациональной дроби, а $\frac{S(x)}{Q(x)}$ — правильной частью. Покажем на конкретном примере, как выделить целую часть и записать рациональную дробь в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби. Пусть

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 13x^2 + 25x - 16,\ Q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4.$$

Разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ так же, как мы делим вещественные числа. Имеем

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 13x^2 + 25x - 16 & x^3 - x^2 + 4x - 4 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2} \qquad\qquad\qquad & x^2 - x + 5 \\
-\,-x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 25x - 16 & \\
\underline{-x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x} \qquad\quad & \\
-\,5x^3 - 5x^2 + 21x - 16 & \\
\underline{5x^3 - 5x^2 + 20x - 20} & \\
x + 4 &
\end{array}$$

Таким образом, мы получили целую часть дроби (частное от деления полинома P на полином Q) $R(x) = x^2 - x + 5$ и остаток $S(x) = x + 4$ от этого деления. Поэтому можем записать $\frac{x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 13x^2 + 25x - 16}{x^3 - x^2 + 4x - 4} =$

$$= x^2 - x + 5 + \frac{x + 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4}.$$

Аналогичный пример можно найти в [5].

> Простейшими рациональными дробями назовем дроби $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{1}{x^2+a^2}$, $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ и дроби $\frac{1}{x^2+px+q}$, $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ при $p^2 - 4q < 0$.

Интегралы от первых трех дробей являются табличными. Интеграл $J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ может быть найден по рекуррентной формуле

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\times\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n,$$

два следующих заменой $x+\frac{p}{2}=t$ сводятся к интегралам $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$, $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$. Интегралы $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. Более подробно можно посмотреть в [5].

Любую правильную рациональную дробь можно представить как сумму простейших. Опишем этот алгоритм.

По основной теореме алгебры [14] любой полином может быть разложен на простейшие множители, то есть представлен в виде $Q(x)=$ $=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=a_n\prod_{l=1}^{n}(x-x_l)$, где x_l — действительные или комплексные корни полинома $Q(x)$, повторенные столько раз, какова их кратность.

Пусть полином $Q(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда правильную рациональную дробь можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n},$$

где $A_1, A_2, .., A_n$ — числа, подлежащие определению. Если x_i — корень кратности α, то ему в разложении на простейшие дроби соответствует α слагаемых $\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-x_i)^\alpha}$. Если x_j — комплексный корень кратности α полинома с действительными коэффициентами, то комплексно-сопряженное число $\bar{x}_j$ — тоже корень кратности α этого полинома. Слагаемые в разложении правильной рациональной дроби, соответствующие парам комплексно-сопряженных корней, объединяют и записывают одним слагаемым вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, если x_j, $\bar{x}_j$ — корни кратности один. Если x_j, $\bar{x}_j$ — корни кратности α, то им соответствует α слагаемых и соответствующее разложение имеет вид

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\dots+\frac{M_\alpha x+N_\alpha}{\left(x^2+px+q\right)^\alpha}.$$

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей свелось к интегрированию простейших дробей, рассмотренных в начале подраздела.

Одним из способов нахождения коэффициентов A_j, M_j, N_j в разложении правильной рациональной дроби является следующий. Правую часть полученного разложения с неопределенными коэффициентами A_j, M_j, N_j приводят к общему знаменателю. Так как знаменатели правой и левой частей равны, то должны быть равны и числители, которые являются полиномами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (так как полиномы равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x), получаем систему линейных уравнений для определения этих коэффициентов. Продемонстрируем изложенное на примерах.

Корни знаменателя вещественны и различны

1.186. Найти $\int \frac{x+1}{x^3-7x+6}dx$.

Согласно теореме Виета корни знаменателя ищем среди делителей свободного члена. Таковыми являются ±1, ±2, ±3, ±6. Подстановкой убеждаемся, что $x=1$ является корнем знаменателя. По теореме Безу знаменатель делится на $x-1$ без остатка. Разделив знаменатель на $x-1$, имеем

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 \qquad -7x+6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} \qquad\qquad & x^2+x-6 \\ -\,x^2-7x+6 & \\ \underline{x^2-\quad x} \quad & \\ -\,-6x+6 & \\ \underline{-6x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Поэтому знаменатель x^3-7x+6 можно записать в виде $x^3-7x+6=$ $=(x-1)(x^2+x-6)$. Два остальных корня находим, решая уравнение $x^2+x-6=0$. Таким образом, корнями знаменателя являются: $x_1=-3$, $x_2=1$ и $x_3=2$. Следовательно, $x^3-7x+6=(x+3)(x-1)(x-2)$ и подынтегральная функция может быть представлена в виде $\frac{x+1}{x^3-7x+6}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-2}$.

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x+1}{x^3-7x+6}=\frac{A_1(x-1)(x-2)+A_2(x+3)(x-2)+A_3(x+3)(x-1)}{x^3-7x+6}=$$

$$=\frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-3A_1+A_2+2A_3)x+(2A_1-6A_2-3A_3)}{x^3-7x+6}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\ -3A_1 + A_2 + 2A_3 = 1, \\ 2A_1 - 6A_2 - 3A_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -\frac{1}{10}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_3 = \frac{3}{5}$.

Таким образом, $\int \frac{x+1}{x^3 - 7x + 6} dx = -\frac{1}{10}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x-2} =$

$$= -\frac{1}{10}\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{5}\ln|x-2| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{(x-2)^6}{(x+3)(x-1)^5}\right| + C.$$

1.187. Найти $\int \frac{2x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$.

Корни знаменателя — $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 3$. Поэтому $x^3 - 2x^2 - 3x = (x+1)\,x\,(x-3)$ и подынтегральная функция может быть представлена в виде $\frac{2x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-3}$.

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A_1 x(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)x}{x^3 - 2x^2 - 3x} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-3A_1 - 2A_2 + A_3)x - 3A_2}{x^3 - 2x^2 - 3x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2, \\ -3A_1 - 2A_2 + A_3 = -9, \\ -3A_2 = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$.

Таким образом, $\int \frac{2x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-3} = 2\ln|x+1| +$

$$+ \ln|x| - \ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{x(x+1)^2}{x-3}\right| + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.188. $\int \frac{x^2-6x-1}{x^3-2x^2-5x+6}dx$. **1.189.** $\int \frac{x+11}{x^2+x-12}dx$.

1.190. $\int \frac{4x+2}{x^3+2x^2-x-2}dx$. **1.191.** $\int \frac{x^2+3x+5}{x^3+2x^2-5x-6}dx$.

Среди действительных корней знаменателя есть кратные

1.192. Найти $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Корни знаменателя — $x_1=2$ кратности 2 и $x_2=1$ кратности 1. Поэтому $x^3-5x^2+8x-4=(x-2)^2(x-1)$ и подынтегральная функция может быть представлена в виде $\frac{1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}$.

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{A_1(x-2)^2+A_2(x-1)(x-2)+A_3(x-1)}{x^3-5x^2+8x-4}=$$

$$=\frac{(A_1+A_2)x^2+(-4A_1-3A_2+A_3)x+(4A_1+2A_2-A_3)}{x^3-5x^2+8x-4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1+A_2=0, \\ -4A_1-3A_2+A_3=0, \\ 4A_1+2A_2-A_3=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1=1$, $A_2=-1$, $A_3=1$.

Таким образом, $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+8x-4}=\int \frac{dx}{x-1}-\int \frac{dx}{x-2}+\int \frac{dx}{(x-2)^2}=$

$$=\ln|x-1|-\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-2}+C.$$

1.193. Найти $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3(x+2)}dx$.

Корнями знаменателя являются числа $x_1=-2$ кратности 1 и $x_2=-1$ кратности 3. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде $\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4}{(x+1)^3}$.

Приводя к общему знаменателю, получаем $\dfrac{x^2+3x+3}{(x+1)^3(x+2)}=$

$$=\frac{A_1(x+1)^3+A_2(x+1)^2(x+2)+A_3(x+1)(x+2)+A_4(x+2)}{(x+1)^3(x+2)}.$$

Раскрывая в числителе правой части скобки и приводя подобные, имеем

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{\left(A_1+A_2\right)x^3+\left(3A_1+4A_2+A_3\right)x^2}{(x+1)^3(x+2)}+$$
$$+\frac{\left(3A_1+5A_2+3A_3+A_4\right)x+A_1+2A_2+2A_3+2A_4}{(x+1)^3(x+2)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1+A_2 & =0, \\ 3A_1+4A_2+A_3 & =1, \\ 3A_1+5A_2+3A_3+A_4 & =3, \\ A_1+2A_2+2A_3+2A_4 & =3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1=-1,\ A_2=1,\ A_3=0,\ A_4=1$.

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3(x+2)}dx=-\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}=$

$$=-\ln|x+2|+\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)^2}+C=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.194. $\displaystyle\int\frac{7x^2-6x-17}{(x-1)^3(x+3)^2}dx$. **1.195.** $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-7}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

1.196. $\displaystyle\int\frac{x^3+8x^2-15x-29}{(x+2)^2(x-3)^2}dx$. **1.197.** $\displaystyle\int\frac{3x^2-9x+7}{(x-2)^2(x-1)^3}dx$.

Корни знаменателя комплексные и различные

1.198. Найти $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+5x+17}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}dx$.

Корнями знаменателя являются две пары комплексно-сопряженных корней $x_{1,2}=-1\pm 2i$ и $x_{3,4}=\pm 2i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{x^3+2x^2+5x+17}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+5}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^3+2x^2+5x+17}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{\left(M_1+M_2\right)x^3+\left(2M_2+N_1+N_2\right)x^2}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}+$$

$$+\frac{\left(4M_1+2N_2+5M_2\right)x+\left(4N_1+5N_2\right)}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, имеем

$$\begin{cases} M_1+M_2 = 1, \\ 2M_2+N_1+N_2 = 2, \\ 4M_1+5M_2+2N_2 = 5, \\ 4N_1+5N_2 = 17. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $M_1=2$, $M_2=-1$, $N_1=3$, $N_2=1$.

Таким образом, $\int\frac{x^3+2x^2+5x+17}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}dx=\int\frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx-\int\frac{x-1}{x^2+4}dx=$

$$=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{dx}{x^2+2x+5}-\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{x^2+2x+5}+$$

$$+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}=\ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

1.199. Найти $\int\frac{x^3-9x^2-8x-11}{\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2+4x+8\right)}dx$.

Корнями знаменателя являются две пары комплексно-сопряженных корней $x_{1,2}=1\pm 2i$ и $x_{3,4}=-2\pm 2i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде $\frac{x^3-9x^2-8x-11}{\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2+4x+8\right)}=$

$=\frac{M_1x+N_1}{x^2-2x+5}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+4x+8}$. Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^3-9x^2-8x-11}{\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2+4x+8\right)}=\frac{\left(M_1+M_2\right)x^3+\left(4M_1-2M_2+N_1+N_2\right)x^2}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}+$$

$$+\frac{\left(8M_1+5M_2+4N_1-2N_2\right)x+\left(8N_1+5N_2\right)}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+4\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = 1, \\ 4M_1 - 2M_2 + N_1 + N_2 = -9, \\ 8M_1 + 5M_2 + 4N_1 - 2N_2 = -8, \\ 8N_1 + 5N_2 = -11. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $M_1 = -1,\ M_2 = 2,\ N_1 = -2,\ N_2 = 1$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^3 - 9x^2 - 8x - 11}{(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 4x + 8)}dx = -\int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 5}dx + \int \frac{2x+1}{x^2 + 4x + 8}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2 - 2x + 5} - 3\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} + \int \frac{(2x+4)dx}{x^2 + 4x + 8} - 3\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 2x + 5)}{x^2 - 2x + 5} - 3\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} + \int \frac{d(x^2 + 4x + 8)}{x^2 + 4x + 8} - 3\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + \ln(x^2 + 4x + 8) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.200. $\displaystyle\int \frac{11x^2 - 40x + 100}{(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 4x + 20)}dx$. **1.201.** $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 21x^2 + 51x - 36}{(x^2 + 9)(x^2 - 6x + 18)}dx$.

1.202. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 24x + 22}{(x^2 - 4x + 8)(x^2 - 2x + 10)}dx$.

Среди комплексных корней знаменателя есть кратные

1.203. Найти $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 12x - 22}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 2)}dx$.

Корни знаменателя комплексные — $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$ кратности 1 и $x_{3,4,5,6} = \pm 2i$ кратности 2. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде $\displaystyle\frac{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 12x - 22}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 2)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 + 4} +$

$\displaystyle + \frac{M_3 x + N_3}{(x^2 + 4)^2}$. Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^5-2x^4+8x^3-13x^2+12x-22}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+2\right)}=\frac{\left(M_1+M_2\right)x^5+\left(N_1+N_2\right)x^4}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+2\right)}+$$
$$+\frac{\left(8M_1+6M_2+M_3\right)x^3+\left(8N_1+6N_2+N_3\right)x^2}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+2\right)}+$$
$$+\frac{\left(16M_1+8M_2+2M_3\right)x+\left(16N_1+8N_2+2N_3\right)}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+2\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, имеем

$$\begin{cases} M_1+M_2=1, \\ N_1+N_2=-2, \\ 8M_1+6M_2+M_3=8, \\ 8N_1+6N_2+N_3=-13 \\ 16M_1+8M_2+2M_3=12, \\ 16N_1+8N_2+2N_3=-22. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $M_1=0$, $M_2=1$, $M_3=2$, $N_1=-1$, $N_2=-1$, $N_3=1$. Таким образом,

$$\int\frac{x^5-2x^4+8x^3-13x^2+12x-22}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+2\right)}dx=-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{x-1}{x^2+4}dx+\int\frac{2x+1}{\left(x^2+4\right)^2}dx=$$
$$=-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{xdx}{x^2+4}-\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{2xdx}{\left(x^2+4\right)^2}+\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}+C.$$

Интеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ посчитан по рекуррентной формуле

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$$

для вычисления интеграла $J_{n+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$ при $n=1$, $a=2$. Действительно, из рекуррентной формулы имеем $J_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+2a^2\right)^2}=\frac{1}{2\cdot 2^2}\frac{x}{\left(x^2+2^2\right)}+$

$$+\frac{2-1}{2\cdot 2^2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2^2\right)}=\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.204. $\int \dfrac{x^5 - 3x^3 - 15x^2 - 19x - 10}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx$.

1.205. $\int \dfrac{x^5 + 8x^3 - x^2 + 19x - 5}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+5\right)}\,dx$.

1.206. $\int \dfrac{2x^5 + 11x^3 + 3x^2 - 7x + 4}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+5\right)^2}\,dx$.

1.207. $\int \dfrac{3x^5 - 3x^4 + 56x^3 - 47x^2 + 235x - 232}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+9\right)^2}\,dx$.

Общий случай

1.208. Найти $\int \dfrac{2x^7+7x^6-14x^5-157x^4+217x^3+120x^2+224x+75}{x^2(x-3)\left(x^2+8x+25\right)}\,dx$.

Полином в знаменателе $x^2(x-3)\left(x^2+8x+25\right) = x^5+5x^4+x^3-75x^2$ имеет степень 5, а полином в числителе имеет степень 7. Следовательно, рациональная дробь является неправильной. Выделяя целую часть подынтегральной дроби, получаем

$$\frac{2x^7+7x^6-14x^5-157x^4+217x^3+120x^2+224x+75}{x^5+5x^4+x^3-75x^2} =$$

$$= 2x^2 - 3x - 1 + \frac{x^4-7x^3+45x^2+224x+75}{x^5+5x^4+x^3-75x^2}.$$

Далее, корни знаменателя — $x_{1,2}=0$ кратности 2, $x_3=3$ кратности 1 и пара комплексно-сопряженных корней $x_{4,5}=-4\pm 3i$ кратности 1. Поэтому для правильной части подынтегральной дроби можем записать

$$\frac{x^4-7x^3+45x^2+224x+75}{x^5+5x^4+x^3-75x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+8x+25}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^4-7x^3+45x^2+224x+75}{x^5+5x^4+x^3-75x^2} =$$

$$= \frac{(A_1+A_3+M)x^4 + (5A_1+A_2+8A_3-3M+N)x^3}{\left(x^2+8x+25\right)^2 x^2(x-3)} +$$

$$+ \frac{(A_1+5A_2+25A_3-3N)x^2 + (-75A_1+A_2)x - 75A_2}{\left(x^2+8x+25\right)^2 x^2(x-3)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, имеем

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + M = 1, \\ 5A_1 + A_2 + 8A_3 - 3M + N = -7, \\ A_1 + 5A_2 + 25A_3 - 3N = 45, \\ -75A_1 + A_2 = 224, \\ -75A_2 = 75. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -3$, $A_2 = -1$, $A_3 = 2$, $M = 2$, $N = -1$.

Таким образом, $\int \frac{2x^7 + 7x^6 - 14x^5 - 157x^4 + 217x^3 + 120x^2 + 224x + 75}{x^2(x-3)\left(x^2 + 8x + 25\right)} dx =$

$$= \int \left(2x^2 - 3x - 1\right)dx - 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{(x-3)} + \int \frac{(2x-1)dx}{\left(x^2 + 8x + 25\right)} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 -$$

$$- x - 3\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + \ln\left(x^2 + 8x + 25\right) - 3\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3} + C.$$

1.209. Вычислить $\int \frac{11x^3 + 20x^2 + 193x + 1095}{\left(x^2 - 4x + 29\right)(x+4)^2} dx$.

Подынтегральная дробь правильная (степень полинома в числителе меньше степени полинома в знаменателе). Корни знаменателя — $x_{1,2} = 4$ кратности 2 и пара комплексно-сопряженных корней $x_{4,5} = 2 \pm 5i$ кратности 1. Поэтому для подынтегральной дроби можем записать

$$\frac{11x^3 + 20x^2 + 193x + 1095}{\left(x^2 - 4x + 29\right)(x+4)^2} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{(x+4)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 - 4x + 29}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{11x^3 + 20x^2 + 193x + 1095}{\left(x^2 - 4x + 29\right)(x+4)^2} = \frac{(A_1 + M)x^3 + (A_2 + 8M + N)x^2}{\left(x^2 - 4x + 29\right)(x+4)^2} +$$

$$+ \frac{(13A_1 - 4A_2 + 16M + 8N)x + 116A_1 + 29A_2 + 16N}{\left(x^2 - 4x + 29\right)(x+4)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, имеем

$$\begin{cases} A_1 + M = 11, \\ A_2 + 8M + N = 20, \\ 13A_1 - 4A_2 + 16M + 8N = 193, \\ 116A_1 + 29A_2 + 16N = 1095. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1=9$, $A_2=-1$, $M=2$, $N=5$. Таким образом, $\int\frac{11x^3+20x^2+193x+1095}{\left(x^2-4x+29\right)(x+4)^2}dx=9\int\frac{dx}{x+4}-\int\frac{dx}{(x+4)^2}+\int\frac{(2x+5)dx}{x^2-4x+29}=$

$$=9\ln|x+4|+\frac{1}{x+4}+\ln\left(x^2-4x+29\right)+\frac{9}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{5}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.210. $\int\frac{3x^3-17x^2-22x+30}{\left(x^2+6x+10\right)(x-5)^2}dx$.

1.211. $\int\frac{4x^7-11x^6+18x^5-177x^4+646x^3-1055x^2+954x-433}{(x-1)^2(x-2)^2\left(x^2+4x+13\right)}dx.$

1.212. $\int\frac{2x^3+80x^2-756x+884}{\left(x^2+4x+40\right)(x-3)^2(x+2)}dx$.

Разложить рациональные дроби на элементарные, не находя коэффициентов.

1.213. $\frac{5x^2+x-3}{\left(x^2+2x+37\right)^3(x-4)^2(x+8)}$.

1.214. $\frac{3x^3-4x^2+5}{\left(x^2-10x+34\right)^2(x+5)^3(x-2)}$.

1.2.5. Интегрирование простейших иррациональностей

Рациональной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем отношение двух полиномов от этих переменных, или, что то же самое, отношение двух линейных комбинаций целых степеней этих переменных.

Пусть $R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}\right)$ — рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}$. Эта функция, а следовательно, и интеграл от нее рационализируются подстановкой $x=t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел r_1, r_2, .., r_n. Тогда $dx=rt^{r-1}dt$ и, подставляя x и dx в подынтегральное выражение, получаем под интегралом рациональную функцию аргумента t. Аналогично, если подынтегральное выражение

$$R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

есть рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, то подынтегральная функция рационализируется подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда $x = \dfrac{dt^r - b}{-ct^r + a}$. Подставляя в исходное выражение, получаем рациональную функцию от t.

1.215. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+9\right)\sqrt{x}}$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому делаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5dt$ и $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+9\right)\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5dt}{\left(t^2+9\right)t^3} = 6\int \frac{t^2}{t^2+9}dt =$

$$= 6\int \frac{t^2+9-9}{t^2+9}dt = 6\int dt - 54\int \frac{dt}{t^2+9} = 6t - 18\,\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C = 6\sqrt[6]{x} - 18\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{3} + C.$$

1.216. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x-7}}{3\sqrt{x-7}+\sqrt[5]{(x-7)^6}}dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 5 равно 10. Поэтому делаем замену $x - 7 = t^{10}$. Тогда $dx = 10t^9dt$ и $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(x-7)}}{3\sqrt{x-7}+\sqrt[5]{(x-7)^6}}dx =$

$$= \int \frac{t^2\,10t^9}{3t^5+t^{12}}dt = 10\int \frac{t^6}{3+t^7}dt = \frac{10}{7}\ln\left|3+t^7\right| + C = \frac{10}{7}\ln\left|3+(x-7)^{7/10}\right| + C.$$

1.217. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{(x+5)^3}}$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4. Поэтому делаем замену $x + 5 = t^4$. Тогда $dx = 4t^3dt$ и $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{(x+5)^3}} = \int \frac{4t^3dt}{2t^2+t^3} =$

$$= 4\int \frac{t}{t+2}dt = 4\int \frac{t+2-2}{t+2}dt = 4t - 8\ln|t+2| + C = 4\sqrt[4]{x+5} - 8\ln\left|\sqrt[4]{x+5}+2\right| + C.$$

1.218. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\left(4+\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}\right)}$.

Делаем замену $\dfrac{x+2}{x-1} = t^2$. Тогда $x = \dfrac{t^2+2}{t^2-1}$, $dx = -\dfrac{6tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$ и

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\left(4+\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right)} = -\int \frac{6t\left(t^2-1\right)^2 dt}{9\,(4+t)\left(t^2-1\right)^2} = -\frac{2}{3}\int \frac{t}{t+4}\,dt = -\frac{2}{3}\int \frac{t+4-4}{t+4}\,dt =$$

$$= -\frac{2}{3}t + \frac{8}{3}\ln\left|t+4\right| + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+4\right| + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.219. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2(x-2)^4}}$. **1.220.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}\left(2+\sqrt[3]{(x-3)}\right)}$.

1.221. $\int \frac{\sqrt[4]{x+2}\quad dx}{\sqrt[4]{(x+2)^3}\left(\sqrt{x+2}+5\right)}$. **1.222.** $\int \frac{\sqrt{x+8}}{x+8-\sqrt[3]{(x+8)^2}}\,dx$.

1.223. $\int \frac{\sqrt[4]{x+5}+1}{\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{(x+5)^3}}\,dx$. **1.224.** $\int \frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}+1}\,dx$.

Для интегрирования рациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ применяют замену $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$, выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$ — подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$, а для интегрирования выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ применяют замену $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$. Можно в этих случаях пользоваться аналогичными заменами с использованием гиперболических функций.

1.225. Вычислить $\int \frac{\left(2+x^3\right)dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Воспользуемся заменой $x = \frac{3}{2}\sin t$. Тогда $dx = \frac{3}{2}\cos t\,dt$, $\sqrt{9-4x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t$, $2+x^3 = 2+\frac{27}{8}\sin^3 t$ и исходный интеграл равен $\int\left(1+\frac{27}{16}\sin^3 t\right)dt$. Далее, $\int\left(1+\frac{27}{16}\sin^3 t\right)dt = t - \frac{27}{16}\int\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right) =$

$$= t - \frac{27}{16}\cos t + \frac{27}{48}\cos^3 t + C = \arcsin\frac{2x}{3} - \frac{27}{16}\cos\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right) +$$

$$+ \frac{9}{16}\cos^3\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right) + C.$$

Желающие могут преобразовать этот ответ.

1.226. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

Воспользуемся заменой $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t} = \frac{2}{\cos t}$ и исходный интеграл равен $\int \frac{dt}{2\sin t}$. Далее,

$$\int \frac{dt}{2\sin t} = \int \frac{\left(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}\right)dt}{4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{4}\int\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{t}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{t}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{2}\right| + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.227. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}}$. **1.228.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25+x^2}}$.

1.2.6. Интегрирование биномиального дифференциала $x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$

Для нахождения интегралов $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа, применяются следующие замены переменных (подстановки):

1) если p — целое, то интеграл относится к рассмотренному ранее в п. 1.2.5 типу интегралов и рационализируется заменой $x = t^q$, где q — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое, то применяется замена $ax^n + b = t^q$, где q — знаменатель числа p;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое, то используют замену $a + bx^{-n} = t^q$, или, что тоже самое, $ax^n + b = t^q x^n$, где q — знаменатель числа p.

Все эти замены были известны давно. Русский математик Пафнутий Львович Чебышёв показал, что во всех остальных случаях первообразная функции $x^m\left(ax^n+b\right)^p$ не является элементарной функцией. В честь него вышеперечисленные замены называются подстановками Чебышёва.

1.229. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2}$.

Здесь $m=-\frac{3}{4}$, $n=\frac{1}{6}$, $p=-2$. Так как p — целое, то применяем первую подстановку $x=t^{12}$. Тогда $dx=12t^{11}dt$ и, подставляя x и dx в исходный интеграл, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2}=\int \frac{12t^{11}dt}{t^9\left(1+t^2\right)^2}=12\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=12\operatorname{arctg} t-12\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Интеграл $\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}$ находится по рекуррентной формуле

$$\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^{n+1}}=\frac{t}{2na^2\left(a^2+t^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^n}$$

при $n=1$, $a=1$. Тогда $\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C$, поэтому

$$\int \frac{12t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2}=12\operatorname{arctg} t-12\left(\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)+C=6\operatorname{arctg} t-\frac{6t}{1+t^2}+C.$$

Делая обратную замену $t=\sqrt[12]{x}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2}=6\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}-\frac{6\sqrt[12]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}+C.$$

1.230. Вычислить $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{8+x^2}}dx$.

В данном случае $m=5$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n}=3$, то применяем замену $x^2+8=t^3$. Тогда $x^2=t^3-8$, $2xdx=3t^2dt$, $dx=\frac{3t^2dt}{2\sqrt{t^3-8}}$. Подставляя x и dx в исходный интеграл, получаем $\int \frac{x^5dx}{\sqrt[3]{8+x^2}}=\frac{3}{2}\int \frac{\left(t^3-8\right)^2t^2dt}{t}=$

$$=\frac{3}{2}\int\left(t^7-16t^4+64t\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{16t^5}{5}+\frac{64t^2}{2}\right)+C.$$

Делая обратную замену $t = \sqrt[3]{x^2+8}$, имеем

$$\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{8+x^2}}dx = \frac{3\sqrt[3]{\left(x^2+8\right)^8}}{16} - \frac{24\sqrt[3]{\left(x^2+8\right)^5}}{5} + 48\sqrt[3]{\left(x^2+8\right)^2} + C.$$

1.231. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}$.

Имеем $m = -\frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -\frac{1}{2}$. Так как $\frac{m+1}{n} + p = -2$ — целое, то применяем замену $\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = t^2$, или, что то же самое, $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{t^2-1}$. Возводя обе части последнего соотношения в куб, получаем $x = 8\left(t^2-1\right)^{-3}$, $dx = -48t\left(t^2-1\right)^{-4}dt$. Подставляя значения x и dx в исходный интеграл, с учётом того, что $2+\sqrt[3]{x} = t^2\sqrt[3]{x} = 2t^2\left(t^2-1\right)^{-1}$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}} = \int \frac{-48t}{\left(t^2-1\right)^4 16\sqrt{2}\left(t^2-1\right)^{-9/2}\left(2t^2\left(t^2-1\right)^{-1}\right)^{1/2}}dt =$$

$$= -\frac{48}{32}\int\left(t^2-1\right)dt = -\frac{3}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C.$$

Делая обратную замену $t = \sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}\right)^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.232. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(2\sqrt[3]{x}+5\right)^4}$. **1.233.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(2+3\sqrt[4]{x}\right)^3}$.

1.234. $\int \frac{\sqrt[4]{16+x^2}}{x}dx$. **1.235.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(3+\sqrt[3]{x^2}\right)^{1/5}}dx$. **1.236.** $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx$.

1.237. $\int \frac{x^4}{\sqrt{\left(8+x^2\right)^3}}$. **1.238.** $\int \frac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x^2}dx$.

1.2.7. Интегрирование выражений $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$. Подстановки Эйлера

Для нахождения интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R есть рациональная функция своих аргументов, разработано много методов. Например, с помощью выделения полного квадрата в выражении ax^2+bx+c данные интегралы заменой $x + \frac{b}{2\sqrt{|a|}} = t$ сводятся к одному из рассмотренных в п. 1.2.5 интегралов — $\int R_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)dx$, $\int R_1\left(t, \sqrt{A^2 - t^2}\right)dx$ или $\int R_1\left(t, \sqrt{A^2 + t^2}\right)dx$, где R_1 — другая, отличная от R, рациональная функция. Для вычисления указанных интегралов применяются также подстановки Эйлера:

1) если $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}x \quad \text{или} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x;$$

2) если $c > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad \text{или} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c};$$

3) если x_1, x_2 — действительные корни квадратного трехчлена ax^2+ $+bx+c$, то полагают $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

1.239. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 9}}$.

Так как $a = 1 > 0$, то полагаем $\sqrt{x^2 + 2x - 9} = t + x$. Возводя обе части этого соотношения в квадрат, получаем $x^2+2x-9 = t^2 + 2xt + x^2$. Из последнего, после приведения подобных, имеем $2x(1-t) = t^2 + 9$ или $x = \frac{t^2 + 9}{2(1-t)}$. Тогда $dx = \frac{2t(1-t)+t^2+9}{2(1-t)^2}dt = \frac{-t^2+2t+9}{2(1-t)^2}dt$. Подставляя x и dx в исходный интеграл, с учетом того, что $\sqrt{x^2+2x-9} = t + x = t + \frac{t^2+9}{2(1-t)} =$ $= \frac{-t^2+2t+9}{2(1-t)}$, получаем $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-9}} = \int \frac{4\left(-t^2+2t+9\right)(1-t)^2}{2(1-t)^2\left(-t^2+2t+9\right)\left(t^2+9\right)}dt =$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2x-9} - x}{3} + C.$$

1.240. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+4x-x^2}}$.

Так как $c=4>0$, то полагаем $\sqrt{4+4x-x^2}=tx-2$. Возводя обе части этого соотношения в квадрат, получаем $4+4x-x^2=x^2t^2-4xt+4$. Из последнего, после приведения подобных, имеем $x^2\left(t^2+1\right)=4x(1+t)$ или $x=\frac{4(1+t)}{t^2+1}$. Тогда $dx=\frac{4\left(t^2+1\right)-8\left(t^2+t\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{-4\left(t^2+2t-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt$.

Подставляя x и dx в исходный интеграл, с учетом того, что $\sqrt{4+4x-x^2}=tx-2=t\frac{4(1+t)}{t^2+1}-2=\frac{2\left(t^2+2t-1\right)}{t^2+1}$, получаем $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+4x-x^2}}=$

$$=\int \frac{-4\left(t^2+2t-1\right)\left(t^2+1\right)^2}{8(t+1)\left(t^2+2t-1\right)\left(t^2+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+4x-x^2}+2}{x}+1\right|+C.$$

1.241. Вычислить $\int \frac{x-\sqrt{3x-x^2-2}}{x\sqrt{3x-x^2-2}}dx$.

Так как $3x-x^2-2=-\left(x^2-3x+2\right)=-(x-1)(x-2)$, то делаем замену $\sqrt{3x-x^2-2}=t(x-1)$. Возводя обе части этого соотношения в квадрат, получаем $3x-x^2-2=-(x-1)(x-2)=t^2(x-1)^2$. Сократив на $x-1$, имеем $t^2(x-1)=2-x$ или $\left(t^2+1\right)x=t^2+2$. Тогда

$$x=\frac{t^2+2}{t^2+1},\quad dx=\frac{2t\left(t^2+1\right)-2t\left(t^2+2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{-2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt.$$

Подставляя x и dx в исходный интеграл, с учетом того, что $\sqrt{3x-x^2-2}=t(x-1)=t\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}-1\right)=\frac{t}{t^2+1}$, $x-\sqrt{3x-x^2-2}=\frac{t^2+2}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}=$ $=\frac{t^2-t+2}{t^2+1}$, получаем $\int \frac{x-\sqrt{3x-x^2-2}}{x\sqrt{3x-x^2-2}}dx=\int\frac{\left(t^2-t+2\right)\left(t^2+1\right)^2(-2t)}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)^3 t}dt=$

$=-2\int\frac{t^2-t+2}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}dt$. Раскладывая на простые дроби, имеем

$$\frac{t^2-t+2}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}=\frac{M_1t+N_1}{t^2+2}+\frac{M_2t+N_2}{t^2+1}=$$

$$=\frac{(M_1t+N_1)\left(t^2+1\right)+(M_2t+N_2)\left(t^2+2\right)}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}=$$

$$=\frac{(M_1+M_2)t^3+(N_1+N_2)t^2+(M_1+2M_2)t+N_1+2N_2}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&M_1+M_2=0,\\&N_1+N_2=1,\\&M_1+2M_2=-1,\\&N_1+2N_2=2\end{aligned}$$

для нахождения M_1, M_2, N_1, N_2. Решая эту систему, имеем $M_1=1$, $M_2=-1$, $N_1=0$, $N_2=1$. Таким образом, $\dfrac{t^2-t+2}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}=\dfrac{t}{t^2+2}+\dfrac{-t+1}{t^2+1}$.

Поэтому $-2\displaystyle\int\frac{t^2-t+2}{\left(t^2+2\right)\left(t^2+1\right)}dt=-\int\frac{2tdt}{t^2+2}+\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\int\frac{2dt}{t^2+1}=-\ln\left(t^2+2\right)+$ $+\ln\left(t^2+1\right)-2\operatorname{arctg}t+C=\ln\dfrac{t^2+1}{t^2+2}-2\operatorname{arctg}t+C$. Делая обратную замену $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$, окончательно получаем $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{3x-x^2-2}}{x\sqrt{3x-x^2-2}}dx=-\ln x-$ $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}+C$.

Задачи для самостоятельного решения

1.242. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4x-25}}$. **1.243.** $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$.

1.244. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-6x-x^2}}$. **1.245.** $\displaystyle\int\sqrt{4-2x-x^2}\,dx$.

1.246. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{3x+x^2}dx}{x}$. **1.247.** $\displaystyle\int\sqrt{4x-3-x^2}\,dx$.

1.248. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+6x-16}}$.

1.2.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Для интегрирования рациональных функций вида $R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. К сожалению, универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к большим вычислениям. Поэтому по возможности пользуются следующими подстановками. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то делают замену $\cos x = t$ и тогда $\sin x dx = -dt$. При $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ полагают $\sin x = t$, при этом $\cos x dx = dt$, а в случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ делают замену $\operatorname{tg} x = t$, при которой $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, или $\operatorname{ctg} x = t$.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

1.249. Вычислить $\int \cos^2 4x \sin^3 4x\, dx$.

Так как при смене знака у функции $\sin 4x$ подынтегральная функция меняет знак, то делаем замену $\cos 4x = t$. Тогда $-4\sin 4x dx = dt$, поэтому

$$\int \cos^2 4x \sin^3 4x\, dx = -\frac{1}{4}\int t^2\left(1-t^2\right)dt = \frac{t^5}{20} - \frac{t^3}{12} + C = \frac{\cos^5 4x}{20} - \frac{\cos^3 4x}{12} + C.$$

1.250. Вычислить $\int \frac{\cos^3 5x}{\sin^6 5x}dx$.

Так как при смене знака у функции $\cos 5x$ подынтегральная функция меняет знак, то, делая замену $\sin 5x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 5x}{\sin^6 5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^6} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^6} - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{25t^5} + \frac{1}{15t^3} + C =$$

$$= -\frac{1}{25\sin^5 5x} + \frac{1}{15\sin^3 5x} + C.$$

1.251. Вычислить $\int \frac{1}{\cos^4 3x}dx$.

Так как при смене знака у функций $\cos 3x$ и $\sin 3x$ подынтегральная функция не меняет знак, то делаем замену $\operatorname{tg} 3x = t$. Тогда $x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t$,

$dx = \frac{dt}{3\left(1+t^2\right)}$, $\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Подставляя, получаем $\int \frac{1}{\cos^4 3x}dx =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \left(1+t^2\right)dt = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}t^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x + C.$$

1.252. Вычислить $\int \cos^3 7x \sin^6 7x dx$.

Так как при смене знака у функции $\cos 7x$ подынтегральная функция меняет знак, то делаем замену $\sin 7x = t$. Тогда $\int \cos^3 7x \sin^6 7x dx =$

$$= \frac{1}{7}\int t^6 \left(1-t^2\right)dt = \frac{t^7}{49} - \frac{t^9}{63} + C = \frac{\sin^7 7x}{49} - \frac{\sin^9 7x}{63} + C.$$

1.253. Вычислить $\int \frac{\sin^3 3x}{2+\cos^2 3x}dx$.

Так как при смене знака у функции $\sin 3x$ подынтегральная функция меняет знак, то делаем замену $\cos 3x = t$, получаем $\int \frac{\sin^3 3x}{2+\cos^2 3x}dx =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{2+t^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{3-\left(t^2+2\right)}{2+t^2}dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}t + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin 3x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

1.254. Вычислить $\int \frac{1}{\sin^6 5x}dx$.

Так как при смене знака у функций $\cos 5x$ и $\sin 5x$ подынтегральная функция не меняет знак, то делаем замену $\operatorname{ctg} 5x = t$. Подставляя, получаем $\int \frac{1}{\sin^6 5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{1+t^2} = -\frac{1}{5}\int \left(1+t^2\right)^2 dt = -\frac{1}{5}\int dt - \frac{1}{5}\int 2t^2 dt -$

$$-\frac{1}{5}\int t^4 dt = -\frac{t}{5} - \frac{2t^3}{15} - \frac{t^5}{25} + C = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x - \frac{2\operatorname{ctg}^3 5x}{15} - \frac{\operatorname{ctg}^5 5x}{25} + C.$$

1.255. Вычислить $\int \frac{2+\cos x}{2-\cos x}dx$.

Так как подынтегральная функция не подпадает ни под один из частных случаев, то делаем замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad 2+\cos x=2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3+t^2}{1+t^2},\quad 2-\cos x=2-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3t^2+1}{1+t^2}.$$

Подставляя, получаем $2\int\frac{t^2+3}{\left(3t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}dt=2\int\frac{4}{3t^2+1}dt+2\int\frac{-1}{t^2+1}dt=$

$$=\frac{8}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{3}t\right)}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}-2\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}t\right)-2\operatorname{arctg}t+C=\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-$$

$$-2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C=\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-2x+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.256. $\int\frac{\cos^3 9x}{25+\sin^2 9x}dx$. **1.257.** $\int\cos^8 3x\sin^3 3x\,dx$.

1.258. $\int\frac{\sin^2 7x}{\cos^6 7x}dx$. **1.259.** $\int\frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}$.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, и его свойства

Определение имеется в подразд. 2.1 пособия [5]. Рассмотрим одну из задач, приводящих к понятию интеграла.

Пусть имеется стержень длиной l и переменной плотностью $f(x)$, сосредоточенной на отрезке $[0, l]$. Разобьем отрезок $[0, l]$ на части точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l$. Заменим массу стержня между точками x_i, x_{i+1} величиной $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ — некоторая фиксированная точка.

Тогда $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ — приблизительная масса стержня. Переходя в этой сумме к пределу по всевозможным разбиениям, получаем, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ — масса стержня.

К понятию интеграла приводят также задачи вычисления площадей плоских фигур, объемов тел, работы по перемещению материальной точки под действием переменной силы и другие.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

Остальные свойства можно найти в [5] и других книгах.

2.2. Вычисление определенного интеграла

Предварительно рекомендуется изучить подразд. 2.2, 2.3, 2.4 пособия [5].

Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Тогда для вычисления определенного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

> Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для вычисления определенных интегралов мы можем применять весь набор приемов и методов нахождения неопределенных интегралов.

В частности, справедливы формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU$$

и замены переменной

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt,$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$ — дифференцируемые функции; φ: $[\alpha, \beta] \to [a, b]$ — биективное (взаимно однозначное) дифференцируемое отображение, такое, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

2.1. $\int\limits_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx = \int\limits_e^{e^3} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^3} = \frac{\ln^2\left(e^3\right) - \ln^2 e}{2} = \frac{9-1}{2} = 4.$

2.2. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^5 4x \cos 4x dx = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^5 4x d\left(\sin 4x\right) = \frac{\sin^6 4x}{24}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} =$

$= \frac{1}{24}\left(\sin^6\pi - \sin^6\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}\left((0)^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\right) = -\frac{9}{512}.$

2.3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 3x dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \cos 3x\,dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \frac{1}{3}\sin 3x$, и, применяя формулу интегрирования по частям, получаем $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 3x dx =$

$= \frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/6}\sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}.$

2.4. Вычислить $\int_0^1 x^3 e^{2x^2+1}dx$.

Полагаем $U = x^2$, $dV = xe^{2x^2+1}dx$. Тогда $dU = 2xdx$, $V = \frac{1}{4}e^{2x^2+1}$, и после применения формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_0^1 x^3 e^{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}x^2 e^{2x^2+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{2x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 e^{2x^2+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{8}e^{2x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{8}e = \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{8}e.$$

2.5. Вычислить $\int_4^9 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

Положим $x = t^2$. Тогда $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $dx = 2tdt$, и поэтому исходный интеграл равен

$$\int_2^3 \frac{2t^3dt}{1+t} = 2\int_2^3 \frac{\left(\left(t^3+1\right)-1\right)dt}{1+t} = 2\int_2^3 \frac{\left((t+1)\left(t^2-t+1\right)-1\right)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int_2^3 \left(t^2-t+1\right)dt - 2\int_2^3 \frac{dt}{1+t} = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= 2\left(\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 2\right) - (\ln 4 - \ln 3)\right) = \frac{29}{3} - 2\ln\frac{4}{3}.$$

2.6. Вычислить $\int_1^{22} \frac{dx}{4+\sqrt{x+3}}$.

Положим $x + 3 = t^2$. Тогда $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $dx = 2tdt$, и поэтому

$$\int_1^{22} \frac{dx}{4+\sqrt{x+3}} = 2\int_2^5 \frac{tdt}{t+4} = 2\int_2^5 \frac{t+4-4}{t+4}dt = 2\int_2^5 dt - 8\int_2^5 \frac{dt}{t+4} =$$

$$= 2t\Big|_2^5 - 8\ln(t+4)\Big|_2^5 = 2(5-2) - 8(\ln 9 - \ln 6) = 6 - 8\ln 1{,}5.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.7. $\int_0^2 x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx$. **2.8.** $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{2+3\ln x}}{x}dx$. **2.9.** $\int_0^1 \frac{x^5}{1+4x^6}dx$.

2.10. $\int_0^1 \frac{x^5}{4+9x^{12}}dx$. **2.11.** $\int_0^{\pi/2} e^{3\sin 5x}\cos 5x\,dx$. **2.12.** $\int_1^2 e^{2/x}\frac{dx}{x^2}$.

2.13. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \sin 3\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **2.14.** $\int_0^{2/\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{9+25x^4}$. **2.15.** $\int_0^{\pi/2} (2x+3)\sin 7x\,dx$.

2.16. $\int\limits_0^e \ln(3x+2)dx$. **2.17.** $\int\limits_0^{\pi/12} (3x+1)\,\mathrm{tg}^2 4x dx$.

2.18. $\int\limits_1^3 \mathrm{arctg}\, 7x dx$. **2.19.** $\int\limits_0^5 xe^{9x}dx$. **2.20.** $\int\limits_{65}^{4097} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1-\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$.

2.21. $\int\limits_0^{\pi/9} \dfrac{dx}{\cos^4 3x}$. **2.22.** $\int\limits_1^{14} \dfrac{\sqrt[4]{x+2}+4}{\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{(x+2)^3}}dx$.

2.23. $\int\limits_0^{\pi/20} \cos^6 5x \sin^3 5x dx$.

2.3. Несобственные интегралы

2.3.1. Несобственные интегралы первого рода

Предварительно рекомендуется изучить п. 2.6.1 из [5].

Распространение понятия интеграла на случай, когда функция задана на неограниченном промежутке, приводит к понятию несобственного интеграла первого рода.

Пусть $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a, \infty)$ и для всякого $A \ge a$ существует интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$. Предел $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. Если $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ определяется аналогично.

Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ можем записать $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и назвать этот интеграл сходящимся, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ расходящимся. В качестве точки a выбирают обычно 0.

Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Заметим, что всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится. Кроме того, если подынтегральная функция положительна, то понятия сходимости и абсолютной сходимости интегралов совпадают.

Говорят, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится в смысле главного значения Коши, если существует и конечен предел $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$.

Заметим, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

1. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то для всякого $b \geq a$ интеграл $\int\limits_{b}^{\infty} f(x)dx$ сходится и $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{\infty} f(x)dx$.

2. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} \alpha f(x)\,dx$ и имеет место равенство $\int\limits_{a}^{\infty} \alpha f(x)\,dx = \alpha\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

3. Если интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ сходятся, то сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx \pm \int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Обратное утверждение неверно, то есть если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

2.24. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8}$.

Имеем $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^{A}\frac{dx}{x^2-4x+8}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^{A}\frac{dx}{(x-2)^2+4}=$

$=\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\right)\Bigg|_2^A=\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{A-2}{2}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{\pi}{4}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\pi/4$.

2.25. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_2^{\infty}\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx$.

По определению получаем $\int\limits_2^{\infty}\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^{A}\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx=$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_2^{A}\frac{d\left(x^2-4x+8\right)}{x^2-4x+8}=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)\Big|_0^A\right)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(A^2-4A+8\right)-\ln 8=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

2.26. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$.

Имеем

$$\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}\int\limits_e^{A}\frac{d(\ln x)}{\sqrt[5]{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}\frac{5}{4}(\ln x)^{4/5}\Big|_e^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{5}{4}(\ln A)^{4/5}-\frac{5}{4}\right)=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

2.27. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{(2x+e)\ln^2(2x+e)}$.

По определению имеем $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{(2x+e)\ln^2(2x+e)}=\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_e^{A}\frac{d\left(\ln(2x+e)\right)}{\ln^2(2x+e)}=$

$=\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln(2x+e)}\right)\Bigg|_e^A=\lim\limits_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln(3e)}-\frac{1}{2\ln(2A+e)}\right)=\frac{1}{2\ln(3e)}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{2\ln(3e)}$.

2.28. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha(2x+3)}dx$, $\alpha > 0$.

По определению получаем $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha(2x+3)}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^{A} e^{-\alpha(2x+3)}dx =$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\alpha}\int_0^A e^{-\alpha(2x+3)}\, d\left(-\alpha(2x+3)\right)\right) = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(2x+3)}\Big|_0^A\right) = \frac{1}{2\alpha e^{3\alpha}} -$$

$- \lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(2A+3)} = \frac{1}{2\alpha e^{3\alpha}}$. Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{2\alpha e^{3\alpha}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Используя определение, вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость.

2.29. $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{(4x-1)\ln^3(4x-1)}$. **2.30.** $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[7]{\ln x}}$. **2.31.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$.

2.32. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^5}}$. **2.33.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+17}$. **2.34.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+17}$.

Не всегда удается выяснить сходимость несобственных интегралов с помощью определения. Иногда в этом помогают теоремы сравнения, сформулированные ниже.

Теорема сравнения в непредельной форме. Пусть для всякого $x \ge A$ $(A \ge a)$ выполнено неравенство $|f(x)| \le |g(x)|$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ абсолютно сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, а если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ абсолютно расходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ абсолютно расходится.

Теорема сравнения в предельной форме. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0, \infty$, то интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

Напомним, что всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится. С другой стороны, если интеграл абсолютно расходится, то он может как сходиться, так и расходиться и данные теоремы ничем помочь не могут. В этом случае для выяснения сходимости несобственного интеграла приходится пользоваться другими результатами. Если подынтегральная функция положительна, то понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают, что упрощает ситуацию и позволяет пользоваться теоремами сравнения для выяснения как сходимости, так и расходимости интегралов.

Напомним также, что бесконечно малая при $x \to \infty$ функция $f(x)$ имеет порядок малости α относительно бесконечно малой при $x \to \infty$ функции $g(x)$, если $f(x)$ и $g^{\alpha}(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g^{\alpha}(x)}$ существует и не равен нулю и бесконечности. Более подробно про бесконечно малые и бесконечно большие можно прочитать в [3, 4] или любой другой книге, в которой изложена теория пределов.

> Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного. Заметим, что этот интеграл при $\alpha \le 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.
>
> Из вышесказанного следует, что если α — порядок малости бесконечно малой $f(x)$ относительно бесконечно малой $1/x$, то при $\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, а при $\alpha \le 1$ — абсолютно расходится. Если $f(x) \ge 0$ для всех $x \ge \alpha$, то слово «абсолютно» можно опустить.

2.35. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{4+3\cos x}{x^2}dx$.

Так как $-1 \le \cos x \le 1$ для всех $x \ge 1$, то можем записать $\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{4+3\cos x}{x^2} \le \dfrac{7}{x^2}$. Интегралы $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ и $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{7}{x^2}dx$ сходятся. Поэтому, используя верхнюю оценку для подынтегральной функции $\dfrac{4+3\cos x}{x^2} \le \dfrac{7}{x^2}$, по теореме сравнения в непредельной форме заключаем, что исходный интеграл тоже сходится.

2.36. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{4+3\cos x}{x}dx$.

Так как $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{4+3\cos x}{x} \le \dfrac{7}{x}$ для всех $x \ge 1$, а интегралы $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x}dx$ и $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{7}{x}dx$ расходятся, то, используя нижнюю оценку подынтегральной функции

$\frac{1}{x} \le \frac{4+3\cos x}{x}$, по теореме сравнения в непредельной форме заключаем, что исходный интеграл тоже расходится.

2.37. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x\left(4x^2+1\right)}dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$ (см. [3, 4]), получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x\left(4x^2+1\right)}:\frac{1}{x^{\alpha}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x\left(4x^2+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^3\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<3;\\ 1/4, & \text{если } \alpha=3;\\ \infty, & \text{если } \alpha>3.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 3, и, следовательно, по теореме сравнения в предельной форме заключаем, что интеграл сходится.

2.38. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{(2x+1)\sqrt[3]{x+3}}dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3x+2}}{(2x+1)\sqrt[3]{x+3}}:\frac{1}{x^{\alpha}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x+2}\cdot x^{\alpha}}{(2x+1)\sqrt[3]{x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}\cdot x^{\alpha}}{x\cdot\sqrt[3]{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<5/6;\\ 3/2, & \text{если } \alpha=5/6;\\ \infty, & \text{если } \alpha>5/6.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен $5/6$, и, следовательно, интеграл расходится.

2.39. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{8x+3}}dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{8x+3}}:\frac{1}{x^{\alpha}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt[3]{8x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x\sqrt[3]{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{8+\frac{3}{x}}}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<4/3;\\ 1/2, & \text{если } \alpha=4/3;\\ \infty, & \text{если } \alpha>4/3.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен $4/3$, и, следовательно, интеграл сходится.

2.40. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{3x^2+4x+8}\,dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{3x^2+4x+8} : \frac{1}{x^{\alpha}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}\quad x^{\alpha}}{3x^2+4x+8} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}\cdot x^{\alpha}}{x^2\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1,5; \\ 1/3, & \text{если } \alpha = 1,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 1,5, и, следовательно, интеграл сходится.

2.41. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{4x^3+3}}{3x^2+7}\,dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^3+3}}{3x^2+7} : \frac{1}{x^{\alpha}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}\sqrt{4x^3+3}}{3x^2+7} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{x^3}}}{x^2\left(3+\dfrac{7}{x^2}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 0,5; \\ 2/3, & \text{если } \alpha = 0,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 0,5, и, следовательно, интеграл расходится.

2.42. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$.

Интеграл расходится, так как имеет место оценка $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}} \ge \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ для всех $x \ge e$, а интеграл $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$, как можно показать с помощью определения, расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Используя признак сравнения, выяснить сходимость следующих несобственных интегралов. (В ответе указаны сходимость и порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$.)

2.43. $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x+3}{\left(x^2+4\right)\sqrt{3x+2}}dx$. **2.44.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x^2+5\sqrt{x}+4}dx$.

2.45. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{4x^3+5}}dx$. **2.46.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x+1)}{2+(x+1)^2\sqrt[3]{4x+3}}dx$.

2.47. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{5x^2+1}}{\sqrt{7x^4+3}}dx$. **2.48.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{4x^2+7}}{(7x+5)\sqrt[4]{x^3+1}}dx$.

2.3.2. Несобственные интегралы второго рода

Предварительно рекомендуется изучить п. 2.6.2 из [5].

Распространение понятия интеграла на случай, когда функция не ограничена на заданном промежутке, приводит к понятию несобственного интеграла второго рода.

Если $f(x)$ не ограничена на (a, b), то это может быть в некоторых окрестностях (вблизи) точек a и b или в окрестности внутренней точки отрезка $[a, b]$. При изложении теории мы рассмотрим случай с особенностью в точке b.

Пусть $f(x)$ задана на полуинтервале $[a, b)$ и не ограничена в некоторой окрестности точки b. Пусть далее для всякого $0<\delta<b-a$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается $\int\limits_a^{b} f(x)dx$. Если $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

Аналогично, если $f(x)$ не ограничена вблизи точки a, то предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ также называется несобственным интегралом второго рода, сходящимся, когда этот предел существует и конечен, и расходящимся в противном случае. Когда $f(x)$ не ограничена в некоторой окрестности внутренней точки c из отрезка $[a, b]$, то естественно назвать несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ сходящимся, если одновременно сходятся несобственные интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$. Естественно и для случая, когда $f(x)$ не ограничена вблизи точек a и b одновременно, назвать несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла $\int_a^d f(x)dx$ и $\int_d^b f(x)dx$, где d — некоторая точка отрезка $[a, b]$.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов второго рода $\int_a^b f(x)dx$ в случае, когда подынтегральная функция является неограниченной в окрестности точки b и не имеет других особенностей на отрезке $[a, b]$.

1. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то для всякого $c \in [a, b)$ интеграл $\int_c^b f(x)dx$ сходится и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

2. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^b \alpha f(x)dx$ и имеет место равенство $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Если интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то сходятся интегралы $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx$ и $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Обратное утверждение неверно, то есть если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны.

Для других типов несобственных интегралов второго рода свойства аналогичны.

2.49. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{2\ln x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$, поэтому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{2\ln x}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt[3]{2\ln x}} = \lim_{\delta\to 0}\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2\ln x)^2}\Bigg|_{1+\delta}^e =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{4\ln^2 e} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{4\ln^2(1+\delta)}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{4}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$.

2.50. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[4]{-3\ln x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$. Поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например, следующим образом: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[4]{-3\ln x}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt[4]{-3\ln x}} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt[4]{-3\ln x}}$.

Для первого из них $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt[4]{-3\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{3}\int\limits_\delta^{0,5}\frac{d(-3\ln x)}{\sqrt[4]{-3\ln x}}\right) =$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\delta\to 0}\frac{4}{3}(-3\ln x)^{3/4}\Big|_\delta^{0,5} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\lim_{\delta\to 0}\left((-3\ln 0,5)^{3/4} - (-3\ln\delta)^{3/4}\right) = -\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится, и поэтому исходный интеграл также расходится.

2.51. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$, поэтому

$$\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{1/e}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_\delta^{1/e} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2(1/e)} + \frac{1}{2\ln^2\delta}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $-0,5$.

2.52. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$, поэтому разбиваем исходный интеграл на сумму двух, например, следующим образом: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^3 x} + \int\limits_{1/e}^1 \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Сходимость первого слагаемого установлена в предыдущем примере. Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int_{1/e}^{1} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{\delta\to 0} \int_{1/e}^{1-\delta} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1/e}^{1-\delta} = -\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\ln^2(1-\delta)}-1\right) = \infty .$$

Таким образом, мы получили расходящийся интеграл. Следовательно, исходный интеграл расходится.

2.53. Выяснить сходимость интеграла $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$. Поэтому

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\delta\to 0} \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\delta\to 0} \arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{2-\delta} = \lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin\frac{2-\delta}{2} - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$.

2.54. Выяснить сходимость интеграла $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 3$. По определению имеем $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int_{3+\delta}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left(\frac{4}{3}(x-3)^{3/4}\right)\Bigg|_{3+\delta}^{4} = \frac{4}{3}$.

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $4/3$.

2.55. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^6}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 3$. По определению имеем $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^6}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int_1^{3-\delta} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^6}} = -\lim\limits_{\delta\to 0}\left(5(3-x)^{-1/5}\right)\Big|_1^{3-\delta} = \infty$.

Следовательно, интеграл расходится.

2.56. Выяснить сходимость интеграла $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 4$. Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} + \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}}$.

Для первого из них имеем

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} = \lim_{\delta\to 0} \int_2^{4-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} = -\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(4-x)^2}\right)\Bigg|_2^{4-\delta} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}.$$

Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Задачи для самостоятельного решения

Используя определение, выяснить сходимость несобственных интегралов второго рода.

2.57. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[5]{4\ln x}}$. **2.58.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[7]{2\ln x}}$. **2.59.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln^3 x}}$.

2.60. $\int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{7\ln x}}$. **2.61.** $\int\limits_3^6 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$. **2.62.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}}$. **2.63.** $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$.

2.64. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$. **2.65.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^4}}$. **2.66.** $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}$.

Не всегда удается выяснить сходимость несобственных интегралов с помощью определения. Иногда в этом помогают теоремы сравнения, сформулированные ниже.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

Теорема сравнения в непредельной форме. Пусть для всякого $b-\delta \le x < b$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема сравнения в предельной форме. Если $f(x)$ и $g(x)$ — неотрицательные бесконечно большие одного порядка роста, то есть $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0, \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ используются в признаке сравнения в качестве эталонных.

Заметим, что эти интегралы сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \ge 1$.

2.67. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}\,\sqrt[5]{2-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 3$ и $x = \pm\sqrt{2}$. Точки $x = \pm\sqrt{2}$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{3-x}$, имеем

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}\,\sqrt[5]{2-x^2}}:\frac{1}{(3-x)^2}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt[3]{x-3}\,\sqrt[5]{2-x^2}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1/3;\\ \frac{1}{\sqrt[5]{-7}}, & \text{если } \alpha=1/3;\\ 0, & \text{если } \alpha>1/3.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $1/3$ и интеграл сходится.

2.68. Выяснить сходимость интеграла $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{16-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=\pm4$. Точки $x=0$ и $x=-4$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\frac{1}{4-x}$, имеем

$$\lim_{x\to4}\frac{(4-x)^{\alpha}}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{16-x^2}}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)^{\alpha}}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{4-x}\,\sqrt[3]{4+x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1/3;\\ \frac{1}{4}, & \text{если } \alpha=1/3;\\ 0, & \text{если } \alpha>1/3.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $1/3$ и интеграл сходится.

2.69. Выяснить сходимость интеграла $\int_0^1\frac{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}{x^2}\,dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}2x}}{\sqrt{2x}\,\sqrt{x^3}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1{,}5;\\ \sqrt{2}, & \text{если } \alpha=1{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>1{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5 и интеграл расходится.

2.70. Выяснить сходимость интеграла $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{1-\cos2x}}{x}\,dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}\sqrt[3]{1-\cos2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2\sin^2x}}{\sqrt[3]{2x^2}\,\sqrt[3]{x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1/3;\\ \sqrt[3]{2}, & \text{если } \alpha=1/3;\\ 0, & \text{если } \alpha>1/3.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $1/3$ и интеграл сходится.

2.71. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+2\sqrt[7]{x}\right)}{x}dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\ln\left(1+2\sqrt[7]{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}2\ln\left(1+2\sqrt[7]{x}\right)}{2\sqrt[7]{x}\;\sqrt[7]{x^6}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<6/7;\\ 2, & \text{если } \alpha=6/7;\\ 0, & \text{если } \alpha>6/7.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $6/7$ и интеграл сходится.

2.72. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{\sin x}}-1}{x}dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(e^{\sqrt{\sin x}}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(e^{\sqrt{\sin x}}-1\right)\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}\;\sqrt{x}\sqrt{x}}=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<0{,}5;\\ 1, & \text{если } \alpha=0{,}5;\\ 0, & \text{если } \alpha>0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $0{,}5$ и интеграл сходится.

2.73. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\,(x-1)}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=2$ и $x=1$. Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два, например, следующим образом:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\,(x-1)}=\int\limits_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2-x}\,(x-1)}+\int\limits_{1,5}^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\,(x-1)}.$$

Первый из этих интегралов расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x\to 1$ относительно $\frac{1}{1-x}$ равен 1, а второй — сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x\to 2$ относительно $\frac{1}{2-x}$ равен $\frac{1}{2}$. Так как одно из слагаемых есть интеграл расходящийся, то и исходный интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Используя теорему сравнения, выяснить сходимость следующих несобственных интегралов. (В ответе указаны: точка, в которой функция бесконечно большая; порядок роста подынтегральной функции относительно пробной функции; сходимость.)

2.74. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}\;\sqrt[3]{x-3}}$. **2.75.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}\;\sqrt[3]{\pi-x}}{\sin x}dx$. **2.76.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}}{x^2}dx$.

2.77. $\int\limits_0^2 \frac{e^{\sqrt[4]{\sin x}}-1}{\sqrt{x^3}}dx$. **2.78.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$. **2.79.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{27-x^3}}$.

2.80. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(81-x^4\right)^5}}$. **2.81.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{64-x^6}}$. **2.82.** $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}\,\sqrt[4]{16-x^2}}$.

2.83. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,\sqrt[5]{4-x^2}}$. **2.84.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[5]{1-\cos 4x}}{x}dx$.

2.85. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{\mathrm{tg} 3x}}-1}{x^2}dx$. **2.86.** $\int\limits_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-1}{\sqrt{\sin x}}dx$. **2.87.** $\int\limits_0^2 \frac{e^{\sqrt[4]{x}}-1}{\sin^3 x}dx$.

2.88. $\int\limits_0^4 \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^5-1}{\sqrt{\sin x}}dx$. **2.89.** $\int\limits_0^4 \frac{e^{\sqrt[4]{x}}-1}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.

2.4. Приложения определенного интеграла

Рекомендуется предварительно прочитать подразд. 2.7 из [5].

2.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Назовем трапецию простейшей областью первого типа, если она ограничена кривыми $x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и для всех $x\in[a,b]$ выполнено неравенство $f_1(x)\le f_2(x)$. Для простейшей области площадь S криволинейной трапеции равна

$$S=\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

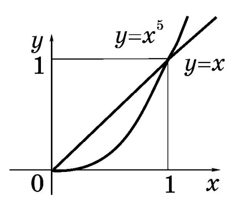
Аналогично, если $\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)$ для всех $y\in[c,d]$, то для криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=c$, $y=d$, $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$ (простейшей области второго типа), имеем

$$S=\int\limits_c^d \left(\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right)dy.$$

В общем случае плоскую область разбивают на простейшие области рассмотренных выше типов.

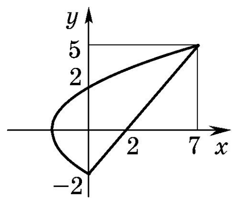
2.90. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^5$ и $y=x$.

Эти кривые пересекаются в точках $A(0,0)$ и $B(1,1)$. Поэтому



$$S=\int\limits_0^1 \left(x-x^5\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

2.91. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x + 4$ и $x - y - 2 = 0$.



Эти кривые пересекаются в точках $A(0, -2)$ и $B(7, 5)$. В данном случае лучше рассматривать простейшую область второго типа. Поэтому

$$S = \int_{-2}^{5} \left(y + 2 - \frac{y^2 - 4}{3} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{10y}{3} - \frac{y^3}{9} \right) \Bigg|_{-2}^{5} = 19\frac{1}{18}.$$

2.92. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \sin x$.

В данном случае $S = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \,\big|_0^{\pi/2} = -(0 - 1) = 1$.

2.4.2. Вычисление объемов

Пусть область такова, что для $\forall\, x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ сечения плоскостью $x = \text{const}$. В этом случае для вычисления объема справедлива формула $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ вокруг оси OX, имеем $V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Если эту трапецию вращать вокруг оси OY, то $V = 2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$.

Аналогично для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $c \le y \le d$, $0 \le x \le \varphi(y)$ вокруг оси OY, имеем

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Если эту трапецию вращать вокруг оси OX, то $V = 2\pi\int\limits_c^d y\varphi(y)dy$.

2.93. Трапеция ограничена кривыми $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ и $y = 0$. Вычислить объем тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OX.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = \pi\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2.94. Трапеция ограничена кривыми $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$. Вычислить объем тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OY.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = 2\pi\int_0^1 xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 x^3dx = \frac{2\pi}{4}.$$

2.4.3. Вычисление длины дуги кривой

Если кривая в пространстве задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, или, что то же самое, в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \left(x(t), y(t), z(t)\right)^T = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

то длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\,dt.$$

В случае плоской кривой (кривой на плоскости), заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, или, что то же самое, в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(x(t), y(t)\right)^T,$$

предыдущая формула приобретает вид $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_t(t)\right)^2 + \left(y'_t(t)\right)^2}\,dt$.

Для плоской кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$, длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то для вычисления длины кривой справедлива формула

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'_\varphi\right)^2 + \rho^2}\,d\varphi.$$

2.95. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками $x_1 = \pi/6$ и $x_2 = \pi/3$.

Кривая задана явно. Находя производную, имеем $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$. Подставляя в формулу для нахождения длины дуги кривой, заданной явно, получаем

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x}.$$

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}\right| - \ln 3\right).$$

2.96. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$.

Кривая задана параметрически. Вычисляя x'_t и y'_t, получаем $x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$. Подставляя в формулу вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически, имеем

$$I = 3a\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\, dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi} |\sin 2t|\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -3a\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 3a.$$

2.97. Найти длину дуги кривой $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, заключенной между точками $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/4$.

Кривая задана в полярной системе координат. Находим $\rho'_\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Подставляя в формулу вычисления длины дуги кривой, заданной в полярной системе координат, имеем

$$I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

2.4.4. Вычисление количества электричества

Пусть по проводнику течёт ток с силой $I(t)$ и $I(t) \geq 0$ для всех $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть, далее, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда количество электричества, протекшее по проводнику за время Δt_i, равно $\Delta Q_i = I(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i — некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем величину количества электричества, протекшего по проводнику за время от момента T_1 до момента T_2, равную $Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} I(t)dt$. Если сила тока $I(t)$ меняет знак за отрезок времени от T_1 до T_2, то $Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} I(t)dt$ равно разности между количеством электричества, протекшим по проводнику в ту и другую стороны.

2.98. Падение напряжения в электрической цепи 220 В. В цепь включена постоянная нагрузка с сопротивлением 15 Ом и дополнительно вводится сопротивление со скоростью 0,2 Ом/с. Какое количество электричества протечёт по цепи за 1 мин?

По закону Ома падение напряжения U, сила тока I и сопротивление R связаны между собой соотношением $I = \dfrac{U}{R}$. По условиям задачи сопротивление цепи изменяется по закону $R(t) = 15 + \int\limits_0^t 0,2dt = 15 + 0,2t$.

Тогда, по закону Ома, сила тока изменяется по закону $I(t) = \dfrac{U}{R(t)} = \dfrac{220}{R(t)} = \dfrac{220}{15 + 0,2t}$. Поэтому количество электричества, протекшее по проводнику за 1 мин, равно

$$\int\limits_0^{60} I(t)dt = \int\limits_0^{60} \frac{220}{15 + 0,2t}dt = \frac{220}{0,2}\ln(15 + 0,2t)\Big|_0^{60} =$$

$$= 1100\big(\ln(15 + 12) - \ln 15\big) = 1100 \ln 1,8 \text{ Кл.}$$

2.4.5. Вычисление длины пути

Пусть тело движется со скоростью $v = f(t)$, $t \in [T_1, T_2]$. Разобьём отрезок времени $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2$. Пусть, далее, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. За время Δt_i тело пройдёт путь $f(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i — некоторый момент времени между моментами t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем величину пути, пройденного телом за время от момента T_0 до момента T_1, равную $S = \int\limits_{T_0}^{T_1} f(t)dt$. Средняя скорость, развиваемая телом от момента T_0 до момента T_1, равна $v_{ср} = \frac{S}{T_1 - T_0} = \frac{1}{T_1 - T_0}\int\limits_{T_0}^{T_1} f(t)dt$. Пусть $a(t)$ — ускорение, а $v(t)$ — скорость, с которыми движется тело. Тогда $a(t) = v'(t)$. Поэтому если тело, начальная скорость которого $v(t_0)$, движется с ускорением $a(t)$, то скорость тела в момент времени t равна $v(t) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(t)dt$.

2.99. Начальная скорость тела $v(0) = 2$ м/с. Тело движется с ускорением $a(t) = \sqrt{1+t}$. Определить путь, пройденный за 15 с после начала движения, и среднюю скорость за это время.

Так как ускорение переменное, то скорость тела в момент времени t равна

$$v(t) = 2 + \int\limits_0^t \sqrt{1+t}\,dt = 2 + \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^t = 2 + \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} \text{ м/с}.$$

Тогда путь, пройденный телом, равен $S = \int\limits_0^{15}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right)dt = \left(\frac{4}{3}t + \frac{4}{15}(1+t)^{5/2}\right)\Bigg|_0^{15} = \frac{4392}{15} = 292{,}8$ м, а средняя скорость за 15 с движения равна $v_{ср} = \frac{S}{15} = \frac{4392}{225} = 19{,}52$ м/с.

2.4.6. Вычисление работы

Пусть переменная сила $f(x)$, $x \in [a,b]$, направлена под углом $\alpha(x)$ к направлению движения. Разобьём отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда работа под действием силы $f(x)$ по перемещению материальной точки из начала в конец отрезка $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ равна $\Delta A_i = f(\xi_i)\cos\alpha(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i — некоторая точка отрезка $[x_i, x_i + \Delta x_i]$. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу по всевозможным разбиениям, получаем величину работы по перемещению материальной точки из начала в конец отрезка $[a,b]$, равную $A = \int\limits_a^b f(x)\cos\alpha(x)dx$. Если направление силы совпадает с направлением движения, то $\cos\alpha(x) = 1$ и тогда работа равна

$$A = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

2.100. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать воду из заполненного до краёв резервуара, имеющего форму параболоида вращения высотой 9 м и радиусом основания 3 м. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Поместим начало координат в вершину параболоида. Ось OZ направим вдоль оси вращения. Тогда уравнение параболоида будет иметь вид $z = a(x^2 + y^2)$. По условиям задачи $a = 1$. Следовательно, радиус окружности, образованной пересечением параболоида плоскостью $z = \text{const}$, будет равен $R = \sqrt{z}$, а площадь этой окружности равна $S = \pi R^2 = \pi z$. Заменим объём тела, заключённый между плоскостями $z = \text{const}$ и $z + \Delta z = \text{const}$, объёмом цилиндра радиуса $\sqrt{z}$ и высотой Δz, который равен $\Delta V = \pi z\Delta z$. Масса жидкости, заключённая в этом объёме, равна $\Delta M = \rho\Delta V = \pi\rho z\Delta z$. Для подъема этой жидкости на высоту $h - z = 9 - z$ требуется выполнить работу $\Delta A = \Delta M g(9 - z) = \pi\rho g z(9 - z)\Delta z$. Вся работа по выкачиванию воды из резервуара равна

$$A = \int\limits_0^9 \pi\rho g z(9 - z)dz = \pi\rho g\left(\frac{9}{2}z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^9 = \pi\rho g\left(\frac{729}{2} - \frac{729}{3}\right) =$$

$$= \pi\rho g\frac{243}{2} \approx 3742613{,}1 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.101. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

2.102. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x^2$, $y = x^3$.

2.103. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$.

2.104. Трапеция ограничена кривыми $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Найти объем тела, полученного вращением этой трапеции: а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

2.105. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{x}$, заключенной между точками $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$.

2.106. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$.

2.107. Найти длину дуги кривой $\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, заключенной между точками $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

2.108. Первоначальное падение напряжения в электрической цепи 220 В. В цепь включена постоянная нагрузка с сопротивлением 10 Ом, дополнительно вводится сопротивление со скоростью 0,25 Ом/с, и падение напряжения увеличивается со скоростью 0,02 В/с. Какое количество электричества протечёт по цепи за 2 мин?

2.109. Начальная скорость тела $v(0) = 2$ м/с. Тело движется с ускорением $a(t) = e^{-t}$. Определить среднюю скорость за 20 с после начала движения.

2.110. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать жидкость из заполненного до краев резервуара, имеющего форму прямого кругового цилиндра высотой 6 м и радиусом основания 3 м. Плотность жидкости $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Определение и свойства

Предварительно рекомендуется прочитать подразд. 3.1 из [5]. Общее определение дано в [5]. Для иллюстрации, как из него получить конкретное определение при фиксированном n, ниже дадим определение двойного интеграла. Вначале напомним одно понятие.

Пусть $D \subset R^n$ — некоторое множество. Диаметром этого множества назовем число $d = \sup\limits_{x,y \in D} \rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена в области $D \subset R^2$. Разобьем область D на части кривыми, пронумеруем полученные элементарные области D_i, выберем внутри каждой из них по точке ξ^i, η^i и составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(\xi^i, \eta^i\right)\sigma\left(D_i\right)$, где $\sigma\left(D_i\right)$ — площадь области D_i. Предел полученных сумм по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек $\left(\xi^i, \eta^i\right)$, при условии, что максимальный из диаметров элементарных областей стремится к нулю, называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$, а функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману.

Определение тройного интеграла получается из общего по тем же принципам, что и определение двойного. Предлагается сформулировать его самостоятельно.

Всюду далее будем обозначать тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ $\iiint\limits_D f(x, y, z,)\, dxdydz$, кратный интеграл от функции $f(x)$ — $\int\limits_D f(x)dx$, где $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ — n-мерный вектор.

Кривую или поверхность будем называть многообразием.

Отметим наиболее часто используемые при вычислении кратных интегралов свойства при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. Если область D разбита на две области D_1, D_2 так, что $D = D_1 \cup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются лишь по многообразию разбиения, то

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_{D_1} f(x)dx + \int\limits_{D_2} f(x)dx .$$

2. $\int\limits_D (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_D f(x)dx \pm \int\limits_D g(x)dx$.

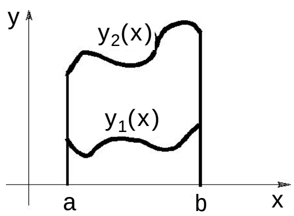
3. $\int\limits_D k\,f(x)\,dx = k\int\limits_D f(x)\,dx$.

Остальные свойства можно найти в [5] и других книгах по интегральному исчислению. Классы интегрируемых функций описаны там же.

3.2. Вычисление кратных интегралов

3.2.1. Вычисление двойных интегралов

Вычисление кратных интегралов, при сформулированных ниже условиях на функцию $f(x)$, сводится к последовательному нахождению определенных интегралов с помощью повторных интегралов [5].



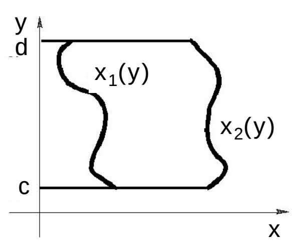
Пусть D — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, и при этом выполнено неравенство $y_1(x) \le y_2(x)$, функция $f(x, y)$ интегрируема в D.

Предположим, что для всякого $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Тогда для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ имеет место соотношение

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (3.1)$$

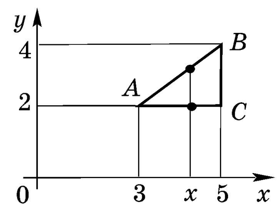
Для криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=c$, $y=d$, $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $x_1(y) \le x_2(y)$ для всякого $y \in [c, d]$, если функция $f(x,y)$ интегрируема в D и для всякого $y \in [c, d]$ существует интеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то имеет место формула



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3.2)$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (3.1) и (3.2), называются повторными. Таким образом, для вычисления кратных интегралов необходимо уметь представлять их в виде повторных. Заметим, что порядок, в котором производится интегрирование, иногда влияет на сложность вычислений. Соответствующие примеры есть в [13] и [15].

3.1. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(3, 2), B(5, 4), C(5, 2). Вычислить интеграл $\iint\limits_D \left(x^2 + 4y\right)dxdy$.



Перейдем к повторному интегралу типа (3.1) и расставим пределы интегрирования в нем. Найдем уравнения прямых AB, BC, AC. Записывая уравнение прямой, проходящей через две точки, получаем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-3}{5-3} = \dfrac{y-2}{4-2}$, или, что то же самое, $y = x - 1$. Уравнение прямой AC имеет вид $y = 2$, а уравнение прямой BC — $x = 5$. Таким образом, область может быть задана неравенствами $3 \le x \le 5$, $2 \le y \le x-1$. Поэтому

$$\iint\limits_D \left(x^2 + 4y\right)dxdy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_2^{x-1} \left(x^2 + 4y\right)dy.$$

Находим внутренний интеграл: $\int\limits_2^{x-1} \left(x^2 + 4y\right)dy = \left(x^2y + 2y^2\right)\Big|_2^{x-1} =$

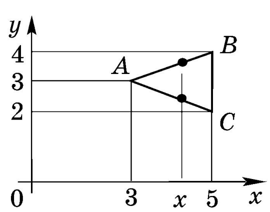
$= x^2(x-1) + 2(x-1)^2 - 2x^2 - 8 = x^3 - x^2 - 4x - 6$. Подставляя в исходный интеграл, получаем $\iint\limits_D \left(x^2 + 4y\right)dxdy = \int\limits_3^5 \left(x^3 - x^2 - 4x - 6\right)dx =$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_3^5 = 59\frac{1}{3}.$$

Переход к интегралу типа (3.2) и последующие вычисления предлагается проделать самостоятельно.

3.2. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(3, 3), B(5, 4), C(5, 2). Вычислить интеграл $\iint\limits_D (3x + 2y)dxdy$.

Перейдем к повторному интегралу типа (3.1) и расставим пределы интегрирования в нем. Найдем уравнения прямых AB, BC, AC. Записывая



уравнение прямой, проходящей через две точки, получаем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-3}{5-3} = \dfrac{y-3}{4-3}$, или, что то же самое, $y = \dfrac{x+3}{2}$. Аналогично для прямой AC: $\dfrac{x-3}{5-3} = \dfrac{y-3}{2-3}$, или, что то же самое,

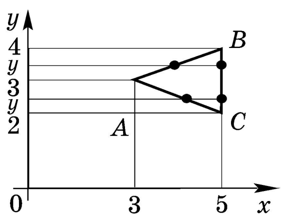
$y = \dfrac{-x+9}{2}$. Уравнение прямой BC имеет вид $x = 5$. Таким образом, область может быть задана неравенствами $3 \le x \le 5$, $\dfrac{-x+9}{2} \le y \le \dfrac{x+3}{2}$. Поэтому

$$\iint\limits_D (3x+2y)dxdy = \int_3^5 dx \int_{\frac{-x+9}{2}}^{\frac{x+3}{2}} (3x+2y)dy = \int_3^5 \left(3xy + y^2\right)\Big|_{\frac{-x+9}{2}}^{\frac{x+3}{2}} dx =$$

$$= \int_3^5 \left(3x\frac{x+3}{2} + \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 3x\frac{-x+9}{2} - \left(\frac{-x+9}{2}\right)^2 \right) dx =$$

$$= \int_3^5 \left(3x^2 - 3x - 18\right) dx = \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x \right)\Bigg|_3^5 = 38.$$

Для перехода к интегралу типа (3.2) требуется разбить область на две: D_1 с границами $c_1 = 2$, $d_1 = 3$, $x_1^1(y) = -2y+9$, $x_2^1(y) = 5$ и D_2 с границами $c_2 = 3$, $d_2 = 4$, $x_1^2(y) = 2y-3$, $x_2^2(y) = 5$. Поэтому



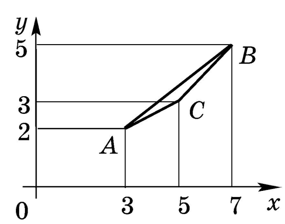
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^3 dy \int_{-2y+9}^{5} (3x+2y)dx +$$

$$+ \int_3^4 dy \int_{2y-3}^{5} (3x+2y)dx.$$

Досчитать предлагается самостоятельно.

3.3. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(3, 2), B(7, 5), C(5, 3). В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Найдем уравнения прямых AB, BC, AC. Уравнение прямой AB можно записать в виде $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{3}$, или, что то же самое, в форме $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$; прямой AC — в форме $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1}$,



или $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; прямой CB — в виде $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2}$, или $y = x - 2$. Как для перехода к интегралу вида (3.1), так и для перехода к интегралу вида (3.2) приходится разбивать область на две. Для интеграла вида (3.1) соответствующие области задаются неравенствами

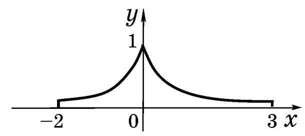
$$D_1: \ 3 \le x \le 5, \ \ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, \ \ D_2: \ 5 \le x \le 7, \ \ x - 2 \le y \le \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}} f(x,y)\,dy + \int\limits_5^7 dx \int\limits_{x-2}^{\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}} f(x,y)\,dy$.

Расставить пределы интегрирования, взяв внешний интеграл по y (то есть представить двойной интеграл в виде повторного интеграла вида (3.2)), предлагается самостоятельно.

3.4. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \left(e^x + 2y\right)dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $-2 \le x \le 3$, $y \le e^x$, $y \le e^{-x}$.

При переходе к повторному интегралу типа (3.1) граница $y_2(x)$ на участках $-2 \le x \le 0$ и $0 \le x \le 3$ задаётся разными уравнениями. Поэтому область приходится разбивать на две, задаваемых неравенствами D_1: $-2 \le x \le 0$, $0 \le y \le e^x$ и D_2: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le e^{-x}$.



Поэтому $\iint\limits_D \left(e^x+2y\right)dxdy = \int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{e^x} \left(e^x+2y\right)dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{e^{-x}} \left(e^x+2y\right)dy$.

Для первого слагаемого, вычисляя внутренний интеграл, получаем

$\int\limits_0^{e^x} \left(e^x + 2y\right)dy = \left(e^x y + y^2\right)\Big|_0^{e^x} = e^x \cdot e^x + \left(e^x\right)^2 - 0 = 2e^{2x}$.

Тогда $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{e^x} \left(e^x + 2y\right)dy = \int\limits_{-2}^0 2e^{2x}dx = e^{2x}\Big|_{-2}^0 = 1 - e^{-4}$. Аналогично, вычисляя внутренний интеграл во втором слагаемом, имеем $\int\limits_0^{e^{-x}} \left(e^x + 2y\right)dy =$

$= \left(e^x y + y^2\right)\Big|_0^{e^{-x}} = e^x \cdot e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2 - 0 = 1 + e^{-2x}$. Поэтому $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{e^{-x}} \left(e^x + 2y\right)dy =$

$= \int\limits_0^3 \left(1 + e^{-2x}\right)dx = \left(x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^3 = 3 - \frac{1}{2}e^{-6} - \left(0 - \frac{1}{2}e^0\right) = 3{,}5 - 0{,}5e^{-6}$.

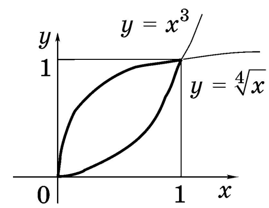
Таким образом, окончательно получаем

$$\iint\limits_D \left(e^x + 2y\right)dxdy = 1 - e^{-4} + 3{,}5 - 0{,}5e^{-6} = 4{,}5 - e^{-4} - 0{,}5e^{-6}.$$

Заметим, что для представления данного двойного интеграла в виде повторного интеграла типа (3.2) нам пришлось бы разбивать область на три. Предоставляем возможность проделать это читателю самостоятельно.

3.5. Пусть область D задана неравенствами $y \ge x^3$, $y \le \sqrt[4]{x}$. Тогда для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ можем записать $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$

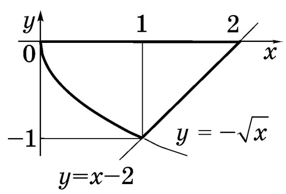
$$= \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[4]{x}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^4}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx.$$



3.6. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Исходная область представлена в виде объединения областей D_1: $0 \le x \le 1$, $-\sqrt{x} \le y \le 0$ и D_2: $1 \le x \le 2$, $x-2 \le y \le 0$. Таким образом, эта область ограничена кривыми $y = -\sqrt{x}$, $y = x-2$ и $x = 0$. Ее также можно задать неравенствами $D: -1 \le y \le 0,\ y^2 \le x \le y+2$. Поэтому $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$



$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx.$$

Задачи для самостоятельного решения

В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ для заданной области D перейти к повторным и расставить пределы интегрирования (приведены оба варианта ответа).

3.7. Область D задана неравенствами:

а) $x \le -|y|,\ x^2+y^2 \le -2x$; **б)** $y \le -|x|,\ x^2+y^2 \le -2y$;

в) $x \ge y,\ x^2+y^2 \le 2y$; **г)** $x \ge y,\ x^2+y^2 \le -2x$; **д)** $x \le y,\ x^2+y^2 \le 2y$;

е) $x \ge y,\ x^2+y^2 \le -2y$; **ж)** $y \le -x^2,\ y \ge -\sqrt{-x}$; **з)** $y \le 0,\ y \ge x^2-9$;

и) $y \ge 0,\ y \le 16-x^2$; **к)** $y \ge x^2,\ y \le 16-x^2$.

3.8. Область D есть внутренность треугольника с вершинами:

а) A(2,0), B(5,0), C(5,–6); **б)** A(2,0), B(5,1), C(5,–6);

в) A(–1,2), B(2,4), C(5,–2); **г)** A(–1,0), B(2,5), C(5,–2).

3.9. Область D есть внутренность четырехугольника с вершинами A(0,0), B(3,2), C(4,1), D(3,–2).

3.10. В повторном интеграле поменять порядок интегрирования:

а) $\int_0^4 dx \int_0^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_4^6 dx \int_0^{(x-6)^2} f(x,y)\,dy$;

б) $\int_0^2 dx \int_0^{2x^2} f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_0^{-(x-4)^3} f(x,y)dy$;

в) $\int_0^2 dx \int_{-3}^{0} f(x,y)dy + \int_2^5 dx \int_{x-5}^{0} f(x,y)dy$.

3.11. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x} dy$; **б)** $\int_2^3 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$; **в)** $\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin y^2 dy$;

г) $\int_0^{\pi^2} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} \frac{1}{x} \cos\frac{y}{x} dx$; **д)** $\int_0^1 dx \int_0^1 ye^{xy} dy$; **е)** $\int_0^1 dx \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} y \cos xy dy$.

3.12. Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_D (2-2x-4xy)dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $y \ge 0$, $x^2+y^2 \le 2x$;

б) $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$, где D — внутренность треугольника с вершинами $A(-1,0)$, $B(1,3)$, $C(4,-1)$;

в) $\iint\limits_D e^{x^2+y} dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $1 \le x \le 2$, $y \le \ln 2x$, $y \ge \ln x$;

г) $\iint\limits_D \left(x+y^2\right)dxdy$, где D — область, заданная неравенством $|x|+|y| \le 1$;

д) $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $x \le 3$, $y \le x$, $xy \ge 1$;

е) $\iint\limits_D (x+3y)dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $x \ge 0$, $x \le 2\pi$, $y \ge 0$, $y \le 3+\cos x$;

ж) $\iint\limits_D xydxdy$, где D — область, заданная неравенствами $y \le 2x$, $y \ge x$, $xy \le 1$;

з) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x \le 2$, $y \le 2$, $xy \le 1$.

3.2.2. Вычисление тройных интегралов

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторных одним из следующих двух способов.

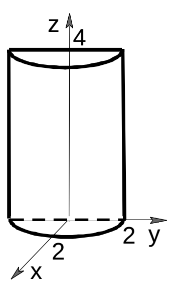
Пусть V — область, расположенная между плоскостями $x=a$, $x=b$, и для $\forall x \in [a, b]$ область V однозначно проектируется на плоскость YOZ, и D_x — эта проекция. Тогда

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x,y,z)dydz \right) dx .$$

Если V — цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, с направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z=z_1(x, y)$, $z=z_2(x, y)$, то

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \big(f(x,y,z)\big)dz .$$

3.13. Пусть область V задана неравенствами $x \ge 0$, $z \ge 0$, $z \le 4$, $x^2+y^2 \le 4$. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x+2y)dxdydz$.



Данная область есть цилиндр, ограниченный поверхностями $z=0$, $z=4$. Проекция этого цилиндра на плоскость XOY есть правая половина круга с границей $x=0$, $x^2+y^2=4$, которая одновременно является направляющей цилиндра. Поэтому

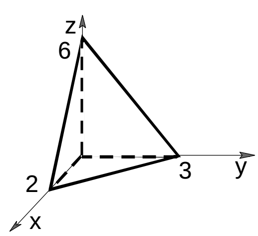
$$\iiint_V (x+2y)dxdydz = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^4 (x+2y)dz .$$

Вычисляя внутренний интеграл, имеем $\int_0^4 (x+2y)dz = (x+2y)\,z\Big|_0^4 =$

$= 4(x+2y)$. Поэтому $\iiint_V (x+2y)\,dxdydz = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4x+8y)\,dy =$

$$= 4\int_0^2 \left(xy+y^2\right)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx = 8\int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2}\right)dx = -\frac{8}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{64}{3}.$$

3.14. Пусть область V задана неравенствами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $3x+2y+z \le 6$. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V xydxdydz$.



Проекция области на плоскость XOY есть треугольник с границей $x=0$, $y=0$, $3x+2y=6$.

Поэтому $\iiint\limits_V xydxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{6-3x}{2}} dy \int\limits_0^{6-3x-2y} xydz$. Вычисляя внутренний интеграл, имеем $\int\limits_0^{6-3x-2y} xydz = xyz\Big|_0^{6-3x-2y} = xy(6-3x-2y) = 6xy-3x^2y-2xy^2$.

Следовательно, $\iiint\limits_V xydxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{6-3x}{2}} \left(6xy-3x^2y-2xy^2\right)dy =$

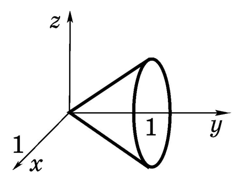
$$= \int\limits_0^2 \left(3xy^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}xy^3\right)\Bigg|_0^{\frac{6-3x}{2}} dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{3x(2-x)(6-3x)^2}{8} - \frac{x(6-3x)^3}{12}\right)dx =$$

$$= -\int\limits_0^2 \frac{9x(2-x)^3}{8}dx.$$

Вычисляя последний интеграл, получаем $\iiint\limits_V xydxdydz = 1{,}8$.

3.15. Пусть область V задана неравенствами $y \geq 0$, $y \leq 0$, $x^2+z^2 \leq y^2$. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xydxdydz$.

Данная область есть прямой круговой конус, лежащий в полупространстве $y \geq 0$ и ограниченный плоскостью $y = 1$. Проекция этого конуса на плоскость XOZ есть круг с границей $x^2+z^2=1$, который одновременно является направляющей конуса. Поэтому, расставляя пределы интегрирования, получаем $\iiint\limits_V xydxdydz = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^1 xydy$. Вычисляя



внутренний интеграл, имеем $\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^1 xydy = \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{x^2+z^2}}^1 = \frac{1}{2}x\left(1-x^2-z^2\right)$.

Следовательно, $\iiint\limits_V xydxdydz = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\left(1-x^2-z^2\right)dz =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 x\left(\left(1-x^2\right)z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 x\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

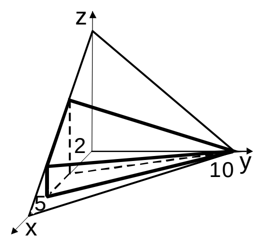
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^1 \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx^2 = -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^1 = 0.$$

3.16. Пусть область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=0$, $x+2y=4$, $z=x^2+y^2+2$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

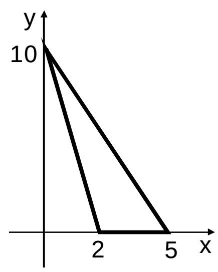
Данная область есть цилиндр с образующей, параллельной оси OZ, с направляющей, являющейся границей треугольника $x=0$, $y=0$, $x+2y=4$, и ограниченный поверхностями $z=0$, $z=x^2+y^2+2$. Проекция этого цилиндра на плоскость XOY есть треугольник с границей $x=0$, $y=0$, $x+2y=4$, которая одновременно является направляющей цилиндра. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\frac{4-x}{2}} dy\int\limits_0^{x^2+y^2+2} f(x,y,z)dz.$$

3.17. Область V ограничена поверхностями $y=0$, $z=0$, $5x+y=10$, $2x+y=10$, $x+y+z=10$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

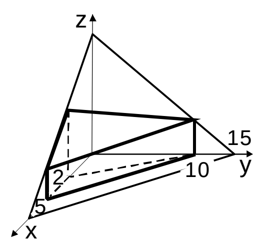


Область однозначно проектируется на треугольник $5x+y=10$, $2x+y=10$, $y=0$, лежащий в плоскости XOY, является цилиндром, ограниченным поверхностями $z=0$, $z=10-x-y$, направляющая которого есть указанный выше треугольник. Поэтому $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$



$$=\int\limits_0^{10} dy\int\limits_{\frac{10-y}{5}}^{\frac{10-y}{2}} dx\int\limits_0^{10-x-y} f(x,y,z)dz.$$

3.18. Область V ограничена поверхностями $y=0$, $z=0$, $5x+y=10$, $2x+y=10$, $x+y+z=15$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.



Область однозначно проектируется на треугольник $y=0$, $5x+y=10$, $2x+y=10$, лежащий в плоскости XOY, является цилиндром, ограниченным поверхностями $z=0$, $z=15-x-y$, направляющая которого есть указанный выше треугольник. Поэтому $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^{10} dy\int\limits_{\frac{10-y}{5}}^{\frac{10-y}{2}} dx\int\limits_0^{15-x-y} f(x,y,z)dz.$

Задачи для самостоятельного решения

3.19. В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами (приведен один из вариантов ответа):

а) $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0,\quad 2x + y \le 2,\quad z \le x^2 + y^2 + 3$;

б) $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0,\quad x + 2y \le 2,\quad x^2 + y^2 \ge z$;

в) $z \ge 0,\quad x^2 + y^2 \le 8 - z$; **г)** $y \ge 0,\quad z \ge 0,\quad x^2 + y^2 \le 8 - z$;

д) $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0,\quad 2x + 3y \le 6,\quad x + y + z - 5 \le 0$;

е) $x \ge 0,\quad z \ge 1,\quad z \le 10,\quad x^2 + y^2 \le 4y$;

ж) $y \ge 2,\quad z \ge 0,\quad z \le 8,\quad x^2 + y^2 \le 4y$;

з) $x \ge 0,\ z \ge 0,\ x + 5y \ge 15,\ x + 3y \le 15,\ x + y + 2z \le 15$;

и) $x \ge 0,\ z \ge 0,\ x + 5y \ge 15,\ x + 3y \le 15,\ x + y + 2z \le 25$;

к) $x + z \le 4,\quad x - z \le 4,\quad 2x \le x^2 + y^2 \le 4x$;

л) $z \ge 0,\quad 2y + z \le 8,\quad 2y \le x^2 + y^2 \le 4y$.

3.20. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{x+y} (x + y + z)dz$; **б)** $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_0^{y^2} dx \int\limits_0^{x^2+y^2} (1 + z)dz$;

в) $\int\limits_0^1 dz \int\limits_{z^2}^{z} dx \int\limits_0^{(x+z)^2} x\sqrt{y}dy$; **г)** $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dz \int\limits_{x-z}^2 2ydy$.

3.21. Вычислить интегралы:

а) $\iiint\limits_V \sqrt{x}dxdydz$, если область V задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 2x$, $0 \le z \le 2$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x + y + z + 3)^4}$, если область V задана неравенствами $x + y + z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

в) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, если область V задана неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

г) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + z^2}dxdydz$, если область V задана неравенствами $x^2 + z^2 \le y^2$, $0 \le y \le 2$.

3.3. Замена переменных в кратных интегралах

Рекомендуется предварительно прочитать подразд. 3.3 из [5].

3.3.1. Криволинейные системы координат

Пусть $D, D_1 \subseteq R^n$ — области, $r : D_1 \to D$ — отображение,

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \mathrm{L} \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

Если r — биективное (взаимно однозначное) отображение, то будем говорить, что задана криволинейная система координат, так как в этом случае положение точки $x \in D$ однозначно определяется точкой $u \in D_1$. Если вектор-функция r дифференцируема, то криволинейную систему координат будем называть регулярной. Если векторы r'_{u_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$, попарно ортогональны, то криволинейная система координат называется ортогональной. В частности, криволинейная система координат на плоскости будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v)$, $r'_v(u, v)$. Аналогично криволинейная система координат в R^3 будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v, w)$, $r'_v(u, v, w)$, $r'_w(u, v, w)$.

Теорема. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, заданная в области $D \subset R^n$, $r : D_1 \to D$ — биективное (осуществляющее взаимно однозначное соответствие) дифференцируемое отображение

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \mathrm{L} \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

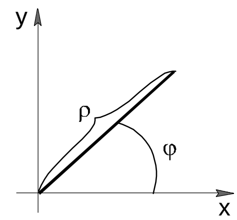
Тогда

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_{D_1} f(u)\|r'(u)\|du,$$

где $\|r'(u)\|$ — модуль якобиана $|r'(u)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$, то есть определителя матрицы Якоби, или, что то же самое, производной матрицы $r'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$.

3.3.2. Криволинейные системы координат на плоскости. Полярная система координат

Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки и углом φ между радиус-вектором точки и осью. Если в роли оси полярной системы взять ось OX, то в координатном виде переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ В векторной форме то же самое записывается в виде

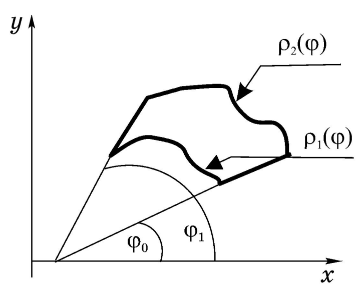


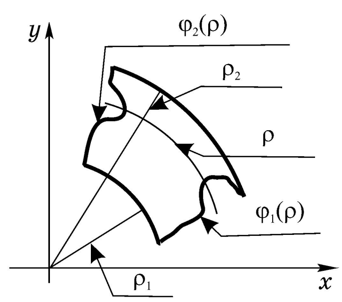
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi) \\ y(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\,\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\,\mathbf{j}.$$

Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Чаще всего берут полуинтервалы $[0, 2\pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $[-\pi, \pi)$. Полярная система координат является ортогональной. Для полярной системы координат на плоскости формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле приобретает вид

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Простейшими областями на плоскости для полярной системы координат являются области, заданные неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$





или $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$, $\varphi_1(\rho) \le \varphi \le \varphi_2(\rho)$. Соответственно расстановка пределов интегрирования в полярной системе координат будет иметь вид

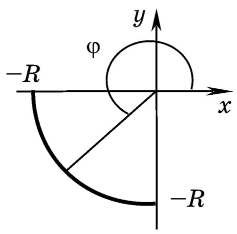
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

в случае первой простейшей области и

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi$$

в случае второй простейшей области.

3.22. Вычислить интеграл $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dy$.



Перейдем к полярным координатам. Так как область интегрирования есть четверть круга радиуса R, лежащая в третьем квадранте, то

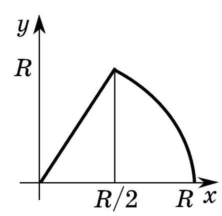
$$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dy = \int\limits_{0}^{R} \sqrt[3]{\rho^2}\,\rho\,d\rho \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{R} \left(\varphi\Big|_{\pi}^{3\pi/2}\right)\sqrt[3]{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{R} \sqrt[3]{\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{R} \rho^{5/3}\,d\rho =$$

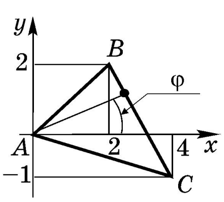
$$= \frac{3\pi}{16}\rho^{8/3}\Big|_0^R = \frac{3\pi}{16}R^{8/3}.$$

3.23. Вычислить $J = \int\limits_{0}^{R/2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3}x} \sqrt{x^2+y^2}\,dy + \int\limits_{R/2}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

Область интегрирования есть сектор, изображенный на рисунке. Переходя к полярным координатам, имеем $J = \int\limits_{0}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \sqrt{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int\limits_{0}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho^2 d\rho = \frac{\pi R^3}{9}$.



3.24. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(4,-1)$. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

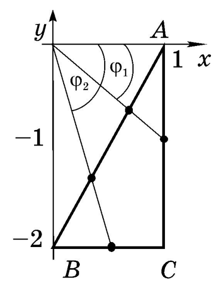


Уравнения прямых AB, AC и BC — $y = x$, $y = -\frac{1}{4}x$ и $3x + 2y = 10$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Уравнение прямой $3x+2y=10$ в полярных координатах переписывается в виде $3\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi = 10$, или, что то же самое, $\rho = \frac{10}{3\cos\varphi + 2\sin\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\operatorname{arctg} 0{,}25}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{10}{3\cos\varphi+2\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho.$$

3.25. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(1,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,-2)$. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

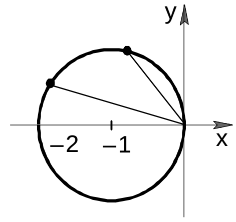
Уравнения прямых AB, AC и BC есть $2x-y=2$, $x=1$ и $y=-2$ соответственно. Уравнение прямой $2x-y=2$ в полярных координатах имеет вид $2\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi = 2$, или, выражая ρ через φ, $\rho = \frac{1}{2\cos\varphi - \sin\varphi}$, уравнение прямой $x=1$ имеет вид $\rho\cos\varphi = 1$, или $\rho = \frac{1}{\cos\varphi}$, а уравнение прямой $y=-2$ переписывается в виде $\rho\sin\varphi = -2$, или, что то же самое, $\rho = \frac{-2}{\sin\varphi}$. С учетом того, что при



изменении угла φ в пределах $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \operatorname{arctg}(-2)$ и $\operatorname{arctg}(-2) \le \varphi \le 0$ длина радиус-вектора точки, принадлежащей треугольнику ABC, меняется в разных пределах, имеем $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\operatorname{arctg}(-2)} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2\cos\varphi - \sin\varphi}}^{\frac{-2}{\sin\varphi}} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho +$

$$+ \int\limits_{\operatorname{arctg}(-2)}^{0} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2\cos\varphi - \sin\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

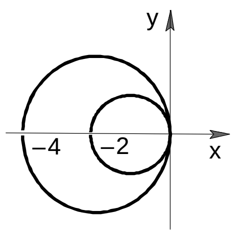
3.26. Пусть область D — внутренность круга с центром в точке $A(-1,0)$ и радиуса 1. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.



Уравнение данной окружности в декартовых координатах записывается в виде $(x+1)^2 + y^2 = 1$, или, после преобразований, $x^2+y^2=-2x$. Переходя к полярным координатам, получаем для этой окружности уравнение $\rho=-2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{-2\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

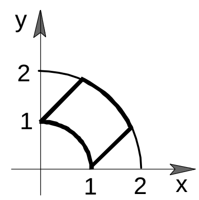
3.27. Пусть область D задана неравенствами $x^2+y^2\le-4x$, $x^2+y^2\ge-2x$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.



Уравнение окружности $x^2+y^2=-4x$ в полярных координатах имеет вид $\rho=-4\cos\varphi$, а окружности $x^2+y^2=-2x$ — $\rho=-2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_{-2\cos\varphi}^{-4\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3.28. Пусть область D задана неравенствами $1\le x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, $x-y\le 1$, $x-y\ge-1$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.



Уравнения прямых $x-y=1$ и $x-y=-1$ в полярных координатах имеют соответственно вид $\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi=1$ и $\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi=-1$. Так как

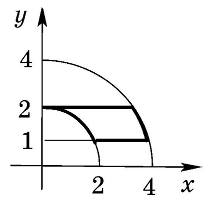
$$\cos\varphi-\sin\varphi=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right),$$

то эти уравнения переписываются в виде $\rho\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=1$ и $\rho\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=-1$. Разрешая последние относительно φ, получаем соответственно $\varphi=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$ и $\varphi=\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$. Поэтому $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$

$$=\int\limits_1^2\rho d\rho\int\limits_{\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi.$$

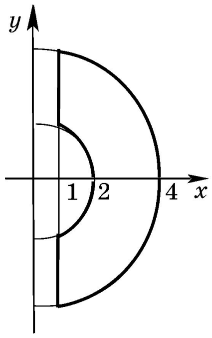
3.29. Пусть область D задана неравенствами $4\le x^2+y^2\le 16$, $1\le y\le 2$, $x\ge 0$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Уравнения прямых $y=1$ и $y=2$ в полярных координатах имеют вид $\rho\sin\varphi=1$ и $\rho\sin\varphi=2$. Разрешая последние относительно φ, получаем соответственно $\varphi=\arcsin\frac{1}{\rho}$ и $\varphi=\arcsin\frac{2}{\rho}$. Поэтому $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_2^4\rho\,d\rho\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{2}{\rho}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,d\varphi$.



3.30. Пусть область D задана неравенствами $4\le x^2+y^2\le 16$, $x\ge 1$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Уравнение прямой $x=1$ в полярных координатах имеет вид $\rho\cos\varphi=1$. Разрешая его относительно φ, получаем соответственно $\varphi=\arccos\frac{1}{\rho}$ для участка прямой, лежащего в полуплоскости $y>0$, и $\varphi=-\arccos\frac{1}{\rho}$ для участка прямой, лежащего в полуплоскости $y<0$. Поэтому

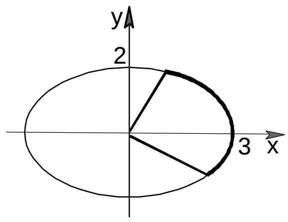


$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_2^4\rho\,d\rho\int\limits_{-\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arccos\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Иногда бывает удобно перейти от декартовых координат к обобщённым полярным координатам либо по формулам $\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi,\\ y=b\rho\sin\varphi,\end{cases}$ либо по формулам $\begin{cases}x=a\rho\cos^{\gamma}\varphi,\\ y=b\rho\sin^{\gamma}\varphi,\end{cases}$ что в векторной форме записывается в виде $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=r(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}x(\rho,\varphi)\\ y(\rho,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\rho\cos\varphi\\ b\rho\sin\varphi\end{pmatrix}=a\rho\cos\varphi\mathbf{i}+b\rho\sin\varphi\mathbf{j}$ в первом случае и соответственно $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=r(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}x(\rho,\varphi)\\ y(\rho,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\rho\cos^{\gamma}\varphi\\ b\rho\sin^{\gamma}\varphi\end{pmatrix}=a\rho\cos^{\gamma}\varphi\mathbf{i}+b\rho\sin^{\gamma}\varphi\mathbf{j}$ во втором. Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Для первой замены модуль якобиана равен $|J|=ab\rho$, а для второй — $|J|=\gamma ab\rho\sin^{\gamma-1}\varphi\cos^{\gamma-1}\varphi$. Первая замена обычно применяется в том случае, когда область есть эллипс или какая-то его часть, ограниченная дугой этого эллипса.

3.31. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt[3]{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $4x^2+9y^2\le 36$, $y\le\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y\ge-\frac{2}{3\sqrt{3}}x$.

Область интегрирования есть часть эллипса, поэтому удобно сделать замену $x=3\rho\cos\varphi$, $y=2\rho\sin\varphi$. Уравнения границ в новых координатах имеют соответственно вид $\rho=1$, $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому, когда



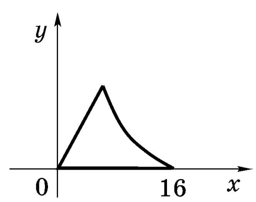
точка пробегает область, переменная ρ меняется в пределах $0\le\rho\le1$, а переменная φ — в пределах от значения $\varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$ до значения $\varphi_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Пересчитывая подынтегральную функцию в новых координатах, имеем

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9}+\frac{4\rho^2\sin^2\varphi}{4}}=\sqrt[3]{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\sqrt[3]{\rho^2}=\rho^{\frac{2}{3}}.$$

Модуль якобиана перехода равен $|J|=3\cdot2\cdot\rho=6\rho$. Поэтому $\iint\limits_D \sqrt[3]{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}\,dxdy=$

$$=\int_0^1 d\rho\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}6\rho\,d\varphi=6\int_0^1\rho^{\frac{5}{3}}d\rho\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=6\int_0^1\left(\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right)\rho^{\frac{5}{3}}d\rho=3\pi\int_0^1\rho^{\frac{5}{3}}d\rho=3\pi\frac{3}{8}\rho^{\frac{8}{3}}\Big|_0^1=\frac{9\pi}{8}.$$

3.32. Вычислить интеграл $\iint\limits_D\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $\sqrt{9x}+\sqrt{4y}\le 12$, $y\le\frac{81}{4}$, $y\ge0$.



Разделив обе части первого неравенства на 6, можно переписать его в виде $\sqrt{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{y}{9}}\le2$. Это наталкивает на применение замены $x=4\rho\cos^4\varphi$, $y=9\rho\sin^4\varphi$.

Тогда уравнение границы $\sqrt{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{y}{9}}=2$ можно записать в виде $\sqrt{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{y}{9}}=\sqrt{\rho}\cos^2\varphi+\sqrt{\rho}\sin^2\varphi=\sqrt{\rho}=2$. Или, что то же самое, $\rho=4$. Уравнение границы $y = \frac{81}{4}x$ записывается в виде $9\rho\sin^4\varphi = \frac{81}{4}4\rho\cos^4\varphi$ или, после преобразований, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$. Поэтому $0 \le \rho \le 4$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Переходя к новым координатам в подынтегральной функции, получаем $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\rho}\cos\varphi + \sqrt{3}\sqrt[4]{\rho}\sin\varphi$.

Якобиан перехода (определитель матрицы Якоби, или, что то же самое, определитель производной матрицы) равен $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = 4\cdot 4\cdot 9\cdot\rho\cos^3\varphi \times \sin^3\varphi = 144\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$. Таким образом,

$$\iint_D \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right)dxdy = \int_0^4 d\rho \int_0^{\pi/3} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\rho}\cos\varphi + \sqrt{3}\sqrt[4]{\rho}\sin\varphi\right)144\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= 144\sqrt{2}\int_0^4 \rho^{5/4}d\rho \int_0^{\pi/3} \cos^4\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi + 144\sqrt{3}\int_0^4 \rho^{5/4}d\rho\int_0^{\pi/3}\cos^3\varphi\sin^4\varphi\, d\varphi.$$

Для внутреннего интеграла в первом слагаемом имеем

$$\int_0^{\pi/3}\cos^4\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi = -\int_0^{\pi/3}\cos^4\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi) = -\int_0^{\pi/3}\cos^4\varphi\, d(\cos\varphi) +$$

$$+\int_0^{\pi/3}\cos^6\varphi\, d(\cos\varphi) = -\frac{\cos^5\varphi}{5}\bigg|_0^{\pi/3} + \frac{\cos^7\varphi}{7}\bigg|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2^5\cdot 5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2^7\cdot 7} - \frac{1}{7} = \frac{233}{4480}.$$

Для внутреннего интеграла во втором слагаемом получаем

$$\int_0^{\pi/3}\sin^4\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/3}\sin^4\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi) = \frac{\sin^5\varphi}{5}\bigg|_0^{\pi/3} - \frac{\sin^7\varphi}{7}\bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{7} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{2^5\cdot 5} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^7}{2^7\cdot 7} = \frac{9\sqrt{3}\cdot 2^2\cdot 7 - 27\sqrt{3}\cdot 5}{2^7\cdot 5\cdot 7} = \frac{117\sqrt{3}}{4480}.$$

Тогда $\iint_D \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right)dxdy = 144\sqrt{2}\int_0^4\left(-\frac{233}{4480}\right)\rho^{5/4}\, d\rho +$

$$+ 144\sqrt{3}\int_0^4\left(\frac{117\sqrt{3}}{4480}\right)\rho^{5/4}d\rho = \frac{9\left(233\sqrt{2} + 117\cdot 3\right)}{280}\rho^{9/4}\cdot\frac{4}{9}\bigg|_0^4 = \frac{3728 + 2808\sqrt{2}}{35}.$$

Иногда бывает удобно перейти к криволинейной системе координат, отличной от рассмотренных выше.

3.33. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (2x-y)\,dxdy$, где D — внутренность параллелограмма со сторонами $3x-y-1=0$, $3x-y+1=0$, $3x-2y=0$, $3x-2y-1=0$.

При расстановке пределов интегрирования в декартовой системе координат приходится разбивать область интегрирования на три. Введение новых переменных по формулам $u=3x-y$, $v=3x-2y$ позволяет проще вычислить этот интеграл. При этом $x=\dfrac{2u-v}{3}$, $y=u-v$, и когда точка (x,y) пробегает параллелограмм, то u и v меняются в пределах $-1\le u\le 1$, $0\le v\le 1$. Подынтегральная функция в координатах u и v приобретает вид $2x-y=\dfrac{4u-2v}{3}-(u-v)=\dfrac{u+v}{3}$. Определитель матрицы Якоби (якобиан перехода) равен $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}= =\begin{vmatrix}2/3 & -1/3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$. Тогда $|J|=\dfrac{1}{3}$,

$$\iint\limits_D (2x-y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}du\int_0^1\frac{u+v}{3}\cdot\frac{1}{3}\,dv=\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}\left(uv+\frac{1}{2}v^2\right)\Big|_0^1 du=\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}\left(u+\frac{1}{2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{9}.$$

3.34. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, где D — область, заданная неравенствами $y\ge x$, $y\le 4x$, $xy\ge 1$, $xy\le 9$. Переписав уравнения прямых $y=x$, $y=4x$, на которых лежит часть границы области, в форме $\dfrac{y}{x}=1$, $\dfrac{y}{x}=4$, видим, что удобно сделать замену переменных $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$. Так как данную область можно задать неравенствами $x\le y\le 4x$, $1\le xy\le 9$, то переменные u и v меняются соответственно в пределах $1\le u\le 9$, $1\le v\le 4$. Выражая старые переменные через новые, получаем $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$. Подынтегральная функция в новых переменных принимает вид $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$. Якобиан перехода (определитель матрицы Якоби) равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{u}}{4\sqrt{uv}\,\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{u}\,\sqrt{v}}{4\sqrt{u}\,\sqrt{v^3}} = \frac{1}{2v}.$$

Поэтому $\iint\limits_D x\,dx\,dy = \int\limits_1^9 du \int\limits_1^4 \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\,dv = \int\limits_1^9 du \int\limits_1^4 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2v^{\frac{3}{2}}}\,dv = -\int\limits_1^9 \left(\left. \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{2v^{\frac{1}{2}}} \right|_1^4 \right) du =$

$$= -\int\limits_1^9 \left(\frac{\sqrt{u}}{2} - \sqrt{u} \right) du = \int\limits_1^9 \left(\frac{\sqrt{u}}{2} \right) du = \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{2}{3} \right|_1^9 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

3.35. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^2y^2}$, где D — область, заданная неравенствами $y \ge 4x^2$, $y \le 9x^2$, $x \ge y^2$, $x \le 4y^2$. Переписав уравнения границ в виде $\frac{y}{x^2} \ge 4$, $\frac{y}{x^2} \le 9$, $\frac{x}{y^2} \ge 1$, $\frac{x}{y^2} \le 4$, видим, что удобно сделать замену $u = \frac{y}{x^2}$, $v = \frac{x}{y^2}$. Тогда $4 \le u \le 9$, $1 \le v \le 4$. Выражая x и y через u и v, получаем $x = vy^2$, $u = \frac{y}{v^2y^4}$, $y^4v^2u = y$, $y^3 = \frac{1}{uv^2}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{uv^2}}$,

$$x = v\frac{1}{\sqrt[3]{u^2v^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{u^2v}}.$$

Якобиан (определитель производной матрицы, или, что тоже самое, матрицы Якоби) равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}\,v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{-2/3}\,v^{-4/3} \\ -\frac{1}{3}u^{-4/3}\,v^{-2/3} & -\frac{2}{3}u^{-1/3}\,v^{-5/3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{9}u^{-6/3}\,v^{-6/3} - \frac{1}{9}u^{-6/3}\,v^{-6/3} = \frac{3}{9}u^{-6/3}\,v^{-6/3} = \frac{1}{3}u^{-2}\,v^{-2}.$$

Подынтегральная функция в новых координатах принимает вид $\frac{1}{x^2y^2} = \sqrt[3]{u^2v^4}\,\sqrt[3]{u^4v^2} = u^2v^2$. Тогда $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^2y^2} = \int\limits_4^9 du \int\limits_1^4 u^2v^2\,\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}\,dv =$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_4^9 du \int\limits_1^4 dv = \frac{1}{3}\int\limits_4^9 \left(v\Big|_1^4 \right) du = \frac{1}{3} \cdot 3\int\limits_4^9 du = u\Big|_4^9 = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.36. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами:

а) $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ y \ge -x,\ \ y \le \sqrt{3}x$;

б) $y \ge -x,\ y \le \sqrt{3}\,x,\ x \le 3$; **в)** $y \ge -x,\ y \le \sqrt{3}\,x,\ \ 3x + 2y \le 6$;

г) $x - 2y \ge 4,\ \ x \le 4,\ \ y \ge -2$; **д)** $x^2 + y^2 \le -4y$; **е)** $-2y \le x^2 + y^2 \le -4y$;

ж) $x \le -|y|,\ \ x^2 + y^2 \le -2x$; **з)** $y \le -|x|,\ \ x^2 + y^2 \le -2y$;

и) $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ x \le 0,\ \ x - y \le 1,\ \ x - y \ge -1$;

к) $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ 1 \le y \le 2,\ \ x \le 0$; **л)** $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ -2 \le y \le -1,\ \ x \ge 0$;

м) $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ -2 \le y \le -1,\ \ x \le 0$; **н)** $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ x \le -1$;

о) $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ y \le -1$; **п)** $4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ \ y \ge 1$; **р)** $x^2 + y^2 \le 4,\ \ x \ge 1$.

3.37. Вычислить интегралы, перейдя предварительно к полярным координатам:

а) $\iint\limits_D (5x^2 - 4xy)dxdy$, если область D задана неравенствами $y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 2x$;

б) $\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2)dxdy$, если область D задана неравенствами $\frac{\pi}{2} \le x^2 + y^2 \le \pi$;

в) $\iint\limits_D ydxdy$, если область D задана неравенствами $y \ge 0,\ \ x \ge 3$, $x^2 + y^2 \le 6x$;

г) $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 5}\,dxdy$, если область D задана неравенствами $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x,\ \ 1 \le x^2 + y^2 \le 16$.

3.38. Вычислить интегралы, перейдя предварительно к одной из обобщённых полярных систем координат:

а) $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, если область D задана неравенствами $y \ge -\frac{2}{3}x$, $36 \le 9x^2 + 4y^2 \le 324$;

б) $\iint\limits_D \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}dxdy$, если область D задана неравенствами $4x^2 + y^2 \le 16,\ \ x \le 0,\ \ y \ge 0$;

в) $\iint\limits_D xydxdy$, если область D задана неравенствами $y \ge \frac{2}{3}x$, $36 \le 4x^2 + 9y^2 \le 576$;

г) $\iint\limits_D ydxdy$, если область D задана неравенствами $1 \le \left(\frac{x}{3}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} \le \sqrt[3]{9}$, $x \ge 0,\ \ y \ge 0$;

д) $\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{4x}{3}} + \sqrt{2y}\right) dxdy$, если область D задана неравенствами $1 \le \sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{y}{2}} \le 2,\ \ y \ge \frac{1}{6}x,\ \ x \ge 0$.

3.39. Вычислить интегралы, подобрав удобную систему координат:

а) $\iint\limits_D (12x + 3y)dxdy$, если область D задана неравенствами $1 \le x + 2y \le 3,\ \ -2 \le 3x - y \le 5$;

б) $\iint\limits_D \frac{y}{x^3}dxdy$, если область D задана неравенствами $6 \le 3x + 2y \le 12$, $-x \le y \le 5x$;

в) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x}$, если область D задана неравенствами $x^2 \le y \le 9x^2$, $x \le y \le 4x$;

г) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^3y^3}$, если область D задана неравенствами $x^3 \le y \le 27x^3$, $y^3 \le x \le 9y^3$;

д) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^4y}$, если область D задана неравенствами $x^3 \le y \le 8x^3$, $y^2 \le x \le 4y^2$;

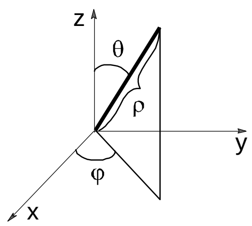
е) $\iint\limits_D y^2dxdy$, если область D задана неравенствами $x \le y \le 3x$, $4 \le xy \le 5$;

ж) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy^2}$, если область D задана неравенствами $x \le y^2 \le 10x$, $3x \le y \le 5x$;

з) $\iint\limits_D ydxdy$, если область D задана неравенством $|x| + |y| \le 1$.

3.3.3. Криволинейные системы координат в R^3. Сферическая и цилиндрическая системы координат

Возможны два обобщения полярной системы координат на случай пространства R^3. Первое из них называется **сферической системой координат**. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки, углом θ между радиус-вектором точки и осью OZ, углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX. Формулы перехода в координатной форме имеют вид



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

В векторной форме эти формулы записываются в виде

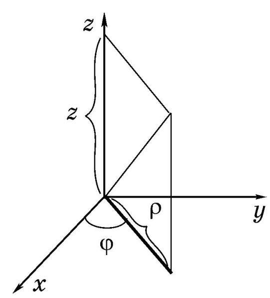
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,\theta) \\ y(\rho,\varphi,\theta) \\ z(\rho,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$= (\rho\cos\varphi\sin\theta)\,\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (\rho\cos\theta)\,\mathbf{k}.$$

При этом $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Как и в полярной системе координат, допускается угол φ выбирать из любого полуинтервала длиной 2π.

Формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Второе обобщение полярной системы координат называется **цилиндрической системой координат**. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ проекции радиус-вектора точки на плоскость XOY, углом φ между этой проекцией и осью OX, координатой z. Формулы перехода в координатной форме записываются в виде



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,z) \\ y(\rho,\varphi,z) \\ z(\rho,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

При этом $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Так же как в полярной и сферической системах координат, в цилиндрической системе координат допускается угол φ выбирать из любого полуинтервала длиной 2π.

Формула перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\,.$$

3.40. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{0} \left(x^2+y^2\right)dz$, перейдя к сферической системе координат.

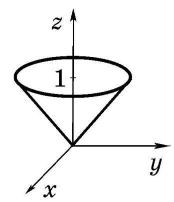
Область интегрирования есть часть нижней половины шара с центром в начале координат и радиуса R, лежащей в полупространстве $x \ge 0$. Поэтому $0 \le \rho \le R$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$. Далее, $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\theta$. Следовательно, $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{0} \left(x^2+y^2\right)dz = \int\limits_{0}^{R} d\rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\rho^2\sin^2\theta\right)\rho^2\sin\theta d\theta =$

$$= \int\limits_{0}^{R} \rho^4 d\rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{2\pi}{15}R^5\,.$$

3.41. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a} dz$, перейдя к цилиндрической системе координат.

Область интегрирования есть половина кругового цилиндра радиуса 1, лежащая в полупространстве $y \ge 0$. Поэтому $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le z \le a$. Следовательно, $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{a} dz = \int\limits_{0}^{1} d\rho \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} \rho\, dz = \frac{a\pi}{2}$.

3.42. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{D} y^2 dxdydz$, если область D задана неравенствами $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 3$.



Область интегрирования есть внутренность прямого кругового конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащая в полупространстве $z \ge 0$ и ограниченная плоскостью $z = 3$. В данном случае удобно перейти к цилиндрической системе координат. Из уравнения

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $z=3$ получаем $x^2+y^2=9$. Поэтому проекцией данной части конуса на плоскость XOY будет круг радиуса 3 с центром в начале координат. Следовательно, $0\le\rho\le3$, $0\le\varphi<2\pi$. Уравнение данной нам части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в цилиндрической системе координат будет иметь вид $z=\rho$. Поэтому $\rho\le z\le3$. Подынтегральная функция в цилиндрической системе координат примет вид $y^2=\rho^2\sin^2\varphi$. Таким образом, получаем

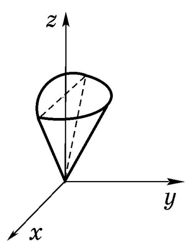
$$\iiint\limits_D y^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 d\rho\int_\rho^3\rho^2\sin^2\varphi\rho\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 d\rho\int_\rho^3\rho^3\sin^2\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\left(\rho^3\sin^2\varphi\cdot z\Big|_\rho^3\right)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\sin^2\varphi\cdot\rho^3(3-\rho)d\rho=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{3\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi=$$

$$=\frac{243}{20}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{243}{20}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{243}{40}\left(\varphi-\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{243}{40}2\pi=12{,}15\pi.$$

3.43. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D yzdxdydz$, если область D задана неравенствами $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2\le4$, $y\ge0$.

Область интегрирования есть вырезанная в шаре $x^2+y^2+z^2\le4$ внутренностью конуса $z^2=x^2+y^2$ часть, лежащая в пересечении (общей части) полупространств $y\ge0$, $z\ge0$. Так как область является частью шара, то удобно перейти к сферической системе координат. При этом угол θ принимает наибольшее значение, когда точка лежит на части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, и оно равно значению $\theta_1=\mathrm{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}$. Поэтому $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. Проекция области на плоскость XOY будет часть круга с центром в начале координат и лежащая в полуплоскости $y\ge0$. Следовательно, $0\le\varphi\le\pi$. Так как сфера имеет радиус, равный 2, то ρ меняется в пределах $0\le\rho\le2$. Подынтегральная функция в сферической системе координат примет вид $yz=\rho^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta$. Таким образом, получаем $\iiint\limits_D yzdxdydz=$



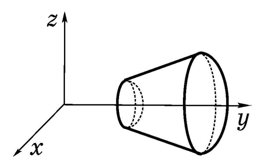
$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^2\rho^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\rho^2\sin\theta d\rho=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^2\rho^4\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\right)\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2d\theta=\frac{32}{5}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta d\theta=$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi \left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{15}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{8\sqrt{2}}{15}\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

3.44. В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$, где D — область, заданная неравенствами $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$, $y^2 \ge \frac{1}{4}\left(x^2+z^2\right)$, $y \ge 0$, перейти к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования.

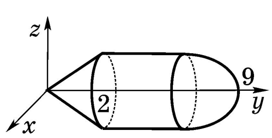
Область интегрирования есть находящаяся между сфер $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$ внутренность конуса $y^2=\frac{1}{4}\left(x^2+z^2\right)$, лежащая в полупространстве $y \ge 0$. В данном случае лучше перейти к сферическим координатам, предварительно поменяв местами оси OY и OZ, то есть произвести переход по формулам $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\varphi\sin\theta$, где θ —угол между радиус-вектором точки и осью OY, а остальные переменные те же, что и в стандартной сферической системе координат. Наибольшее значение угол θ принимает в случае, когда точка лежит на поверхности конуса, и оно равно $\theta_1=\operatorname{arctg} 2$, следовательно, $0\le\theta\le\operatorname{arctg}2$. Так как проекция области на плоскость XOZ есть круг с центром в начале координат, то $0\le\varphi<2\pi$. И наконец, когда точка лежит в области интегрирования, её радиус-вектор изменяется в пределах $1\le\rho\le3$. Таким образом, получаем $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=$



$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}2}d\theta\int_0^{3}f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho.$$

3.45. В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, где D — область, заданная неравенствами $x^2+z^2\le4$, $y^2\ge x^2+z^2$, $y\ge0$, $y\le 9-x^2-z^2$, перейти к цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования.

Область интегрирования ограничена цилиндром $x^2+z^2=4$ с образующей, параллельной оси OY, конусом $y^2=x^2+z^2$ и параболоидом вращения $y=9-x^2-z^2$. В данном случае лучше перейти к цилиндрическим координатам, предварительно поменяв местами оси OY и OZ, то есть произвести переход по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=y$, $z=\rho\sin\varphi$, где ρ — проекция радиус-вектора точки на плоскость XOZ; φ — угол между этой проекцией и осью OX. Так как проекция области на плоскость XOZ есть круг с центром в начале



координат радиуса 2, то $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$. Пересчитывая уравнения границ $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 9 - x^2 - z^2$ в цилиндрические координаты, имеем соответственно $y^2 = x^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = \rho^2$, или $y = \rho$, и $y = 9 - x^2 - z^2 = 9 - \left(\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi\right) = 9 - \rho^2$. Следовательно, y меняется в пределах $\rho \le y \le 9 - \rho^2$. Таким образом, получаем $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_\rho^{9-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, y, \rho\sin\varphi)\rho\, dy.$$

Иногда бывает удобно перейти от декартовых координат к обобщённым сферическим по формулам $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases}$ либо в более общем виде

$$\begin{cases} x = a\rho\cos^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta, \\ y = b\rho\sin^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta, \\ z = c\rho\cos^\gamma\theta. \end{cases}$$

В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, \theta) \\ y(\rho, \varphi, \theta) \\ z(\rho, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ c\rho\cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$= (a\rho\cos\varphi\sin\theta)\,\mathbf{i} + (b\rho\sin\varphi\sin\theta)\,\mathbf{j} + (c\rho\cos\theta)\,\mathbf{k}$$

для первой замены и в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, \theta) \\ y(\rho, \varphi, \theta) \\ z(\rho, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\cos^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta \\ b\rho\sin^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta \\ c\rho\cos^\gamma\theta \end{pmatrix} =$$
$$= (a\rho\cos^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta)\,\mathbf{i} + (b\rho\sin^\gamma\varphi\sin^\gamma\theta)\,\mathbf{j} + (c\rho\cos^\gamma\theta)\,\mathbf{k}$$

для второй замены.

Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Для первой замены модуль якобиана равен $|J| = abc\rho^2\sin\theta$, а для второй — $|J| = abc\rho^2\gamma^2\sin^{2\gamma-1}\theta\left(\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\right)^{\gamma-1}$.

Первая замена обычно применяется в том случае, когда область есть эллипсоид или какая-то его часть, ограниченная частью поверхности этого эллипсоида.

Удобен бывает также переход к обобщённым цилиндрическим координатам по формулам $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$ либо в более общем виде $\begin{cases} x = a\rho\cos^{\gamma}\varphi, \\ y = b\rho\sin^{\gamma}\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, z) \\ y(\rho, \varphi, z) \\ z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\cos\varphi \\ b\rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = (a\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (b\rho\sin\varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

для первой замены или

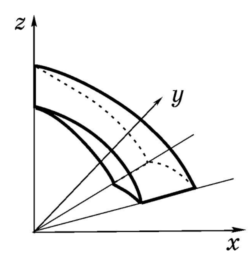
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, z) \\ y(\rho, \varphi, z) \\ z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho\cos^{\gamma}\varphi \\ b\rho\sin^{\gamma}\varphi \\ z \end{pmatrix} = (a\rho\cos^{\gamma}\varphi)\mathbf{i} + (b\rho\sin\varphi^{\gamma})\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

для второй замены.

При этом $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Угол φ допускается выбирать из любого полуинтервала длиной 2π. Для первой замены модуль якобиана равен $|J| = ab\rho$, а для второй — $|J| = ab\rho\gamma\sin^{\gamma-1}\varphi\cos^{\gamma-1}\varphi$. Первая замена обычно применяется в том случае, когда область есть эллиптический цилиндр или какая-то его часть, ограниченная частью поверхности этого цилиндра.

3.46. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz$, где D — область, заданная неравенствами $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \le 4$, $y \le \frac{3\sqrt{3}x}{2}$ $y \ge x$, $z \ge 0$.

Область интегрирования есть часть эллипсоида, поэтому удобно сделать замену $x = 2\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = 3\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = 4\rho\cos\theta$. Пересчитывая уравнения эллипсоидов $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 4$ в новые координаты, получаем $1 \le \rho^2 \le 4$, следовательно, $1 \le \rho \le 2$. Проекция области на плоскость XOY есть часть эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4$, лежащая между прямыми $y = \frac{3}{2}x$ и $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}x$. Записывая уравнение первой прямой в новых координатах, имеем $3\rho\sin\varphi\sin\theta = \frac{3}{2}2\cos\varphi\sin\theta$ или, после преобразований, $\mathrm{tg}\varphi = 1$. Для второй прямой



получаем $3\rho\sin\varphi\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} 2\cos\varphi\sin\theta$ или, что то же самое, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. Так как $z \ge 0$, то $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Подынтегральная функция в новых координатах будет иметь вид $z = 4\rho\cos\theta$, модуль якобиана равен $|J| = 2\cdot 3\cdot 4\rho^2\sin\theta = 24\rho^2\sin\theta$. Подставляя в исходный интеграл, получаем $\iiint\limits_D z\,dxdydz =$

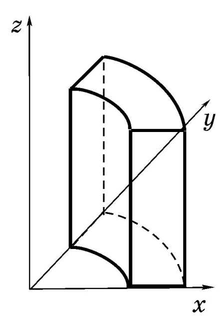
$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_1^2 4\rho\cos\theta \cdot 24\rho^2 \sin\theta d\rho = 96\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_1^2 \rho^3 \sin\theta\cos\theta d\rho =$$

$$= 96\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_1^2 d\theta = 24\cdot 15\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = 24\cdot 15\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= \frac{24\cdot 15}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{24\cdot 15}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 15\pi.$$

3.47. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D (x+y)z\,dxdydz$, где D — область, заданная неравенствами $4 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$.

Область интегрирования есть часть эллиптического цилиндра, поэтому удобно сделать замену $x = 3\rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\sin\varphi$, $z = z$. Пересчитывая уравнения эллиптических цилиндров



$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 4$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 9$ в новые координаты, получаем $4 \le \rho^2 \le 9$, следовательно, $2 \le \rho \le 3$. Проекция области на плоскость XOY есть ее часть, заключённая между эллипсами $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 4$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 9$ и лежащая в первом квадранте, следовательно, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Подынтегральная функция в новых координатах будет иметь вид $(x+y)z = (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)\rho z$, модуль якобиана равен $|J| = 2\cdot 3\rho = 6\rho$. Подставляя в исходный интеграл, получаем $\iiint\limits_D (x+y)z\,dxdydz =$

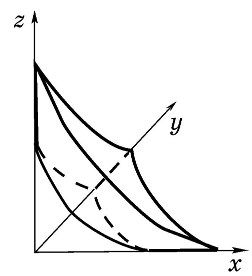
$$= 6\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_2^3 d\rho \int\limits_0^2 (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)\rho^2 z dz = 6\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_2^3 (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)\rho^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 d\rho =$$

$$= 12\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_2^3 (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)\rho^2 d\rho = 12\int\limits_0^{\pi/2} (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_2^3 d\varphi =$$

$$= 12\left(9 - \frac{8}{3}\right)\int\limits_0^{\pi/2} (3\cos\varphi + 2\sin\varphi)d\varphi = 12\frac{19}{3}(3\sin\varphi - 2\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 380.$$

3.48. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{xyz}}$, где D — область, заданная неравенствами $1 \le \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{4}} \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Введём новые переменные по формулам $x = 2\rho\cos^4\varphi\sin^4\theta$, $y = 3\rho\sin^4\varphi\sin^4\theta$, $z = 4\rho\cos^4\theta$. Тогда уравнение границы $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{4}} = 1$ можно записать в виде $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{4}} = \sqrt{\frac{2\rho\cos^4\varphi\sin^4\theta}{2}} + \sqrt{\frac{3\rho\sin^4\varphi\sin^4\theta}{3}} + \sqrt{\frac{4\rho\cos^4\theta}{4}} = \sqrt{\rho}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sqrt{\rho}\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sqrt{\rho}\cos^2\theta = \sqrt{\rho} = 1$. Или, что то же самое, $\rho = 1$. Аналогично для второй границы $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{4}} = 2$ получаем $\sqrt{\rho} = 2$, или, что то же самое, $\rho = 4$. Поэтому $1 \le \rho \le 4$. Так как часть границы проходит по осям OX, OY, OZ и область лежит в первом октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), то $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Переходя к новым координатам в подынтегральной функции, получаем $\frac{1}{\sqrt{xyz}} =$



$= \frac{1}{2\sqrt{6}\rho^{3/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta\cos^2\theta}$. Модуль якобиана перехода равен

$$|J| = 2\cdot 3\cdot 4\rho^2 4^2 \sin^7\theta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\cos^3\theta = 384\rho^2\sin^7\theta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\cos^3\theta.$$

Таким образом, $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{xyz}} = \frac{384}{2\sqrt{6}}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_1^4 \frac{\rho^2\sin^7\theta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\cos^3\theta}{\rho^{3/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta\cos^2\theta}d\rho =$

$$= \frac{192}{\sqrt{6}}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_1^4 \rho^{1/2}\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\cos\theta d\rho =$$

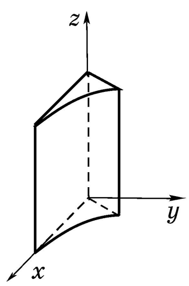
$$= \frac{192}{\sqrt{6}} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \left(\cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta \cos\theta\, \rho^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_1^4 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{128 \cdot 7}{\sqrt{6}} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta \cos\theta d\varphi = \frac{128 \cdot 7}{\sqrt{6}} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \cos\theta \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} \right) d\theta =$$

$$= \frac{128 \cdot 7}{2 \cdot \sqrt{6}} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta d\theta = \frac{128 \cdot 7}{2 \cdot \sqrt{6}} \frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{128 \cdot 7}{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{112}{\sqrt{6}}.$$

3.49. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D \sqrt[3]{x}\, z dx dy dz$, где D — область, заданная неравенствами $1 \le \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \le 9$, $1 \le z \le 2$, $y \ge 0$, $y \le \frac{5}{2}x$.

В данном случае удобно перейти к обобщенной цилиндрической системе координат по формулам $x = 2\rho\cos^3\varphi$, $y = 5\rho\sin^3\varphi$, $z = z$.



Модуль якобиана равен $|J| = 2 \cdot 5 \cdot 3\rho\cos^2\varphi \times \sin^2\varphi = 30\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Границы области $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ и $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 9$ в новых координатах будут иметь вид $\rho^{2/3}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 1$ и $\rho^{2/3} = 9$. То есть $1 \le \rho \le 27$. Переписывая уравнение границы $y = \frac{5}{2}x$ в новых координатах, получаем $5\rho\sin^3\varphi = \frac{5}{2}2\rho\cos^3\varphi$ или $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Поэтому $0 \le \varphi \le \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Подынтегральная функция в новых координатах будет иметь вид $\sqrt[3]{x}\, z = \sqrt[3]{2\rho\cos^3\varphi} \cdot z = \sqrt[3]{2\rho} \cdot \cos\varphi \cdot z$. Таким образом,

$$\iiint\limits_D \sqrt[3]{x}\, z dx dy dz = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{27} d\rho \int_1^2 \sqrt[3]{2\rho} \cos\varphi \cdot z\, 30\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi dz =$$

$$= 30\sqrt[3]{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{27} d\rho \int_1^4 \rho^{4/3} z \cos^3\varphi \sin^2\varphi dz = 15\sqrt[3]{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{27} \rho^{4/3} \cos^3\varphi \sin^2\varphi\, z^2\Big|_1^2 d\rho =$$

$$= 3 \cdot 15\sqrt[3]{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{27} \rho^{4/3} \cos^3\varphi \sin^2\varphi d\rho = 45\sqrt[3]{2} \int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \sin^2\varphi\, \rho^{7/3} \cdot \frac{3}{7}\Big|_1^{27} d\varphi =$$

$$=\frac{135\sqrt[3]{2}}{7}\int\limits_0^{\pi/4}\cos^3\varphi\sin^2\varphi\left(3^7-1\right)d\varphi=\frac{135\sqrt[3]{2}}{7}\left(3^7-1\right)\int\limits_0^{\pi/4}\sin^2\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{135\sqrt[3]{2}}{7}\cdot 2186\left(\frac{\sin^3\varphi}{3}-\frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{135\sqrt[3]{2}}{7}\cdot 2186\left(\frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^3}{3}-\frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^5}{5}\right)=$$

$$=\frac{135\cdot 2186\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 7\sqrt{2}}{7\cdot 120}=\frac{9837\sqrt[6]{32}}{4}.$$

Иногда бывает удобно перейти к криволинейной системе координат, отличной от рассмотренных выше.

3.50. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D (x+2y-z)\,dxdydz$, где D — внутренность параллелепипеда с гранями $x+y+2z=1$, $x+y+2z=3$, $2x+y+5z=0$, $2x+y+5z=2$, $x+3y+5z=1$, $x+3y+5z=6$.

При расстановке пределов интегрирования в декартовой системе координат приходится разбивать область интегрирования на несколько частей. Введение новых переменных по формулам $u=x+y+2z$, $v=2x+y+5z$, $w=x+3y+5z$ позволяет проще вычислить этот интеграл. При этом u, v и w меняются в пределах $1\le u\le 3$, $0\le v\le 2$, $1\le w\le 6$. Выражая старые координаты через новые [1, 2], получаем $x=\dfrac{10u-v-3w}{5}$, $y=\dfrac{5u-3v+w}{5}$, $z=\dfrac{-5u+2v+w}{5}$. Подынтегральная функция в координатах u, v, w приобретает вид $x+2y-z=\dfrac{10u-v-3w}{5}+\dfrac{10u-6v+2w}{5}-\dfrac{-5u+2v+w}{5}=$ $=\dfrac{25u-9v-2w}{5}$. Определитель матрицы Якоби (якобиан перехода) равен

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}.$$

Модуль якобиана равен $|J|=\dfrac{1}{5}$. Тогда $\iiint\limits_D (x+2y-z)\,dxdydz=\int\limits_1^3 du\int\limits_0^2 dv\int\limits_1^6 \dfrac{25u-9v-2w}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\,dw=$

$$=\frac{1}{25}\int\limits_1^3 du\int\limits_0^2 dv\int\limits_1^6 (25u-9v-2w)\,dw=\frac{1}{25}\int\limits_1^3 du\int\limits_0^2\left((25u-9v)w\Big|_1^6-w^2\Big|_1^6\right)dv=$$

$$= \frac{1}{25}\int_1^3 du\int_0^2 \left(\left(25u - 9v\right)5 - 35\right)dv = \frac{1}{5}\int_1^3 du\int_0^2 \left(25u - 9v - 7\right)dv =$$

$$= \frac{1}{5}\int_1^3 \left(\left(25u - 7\right)v\Big|_0^2 - \frac{9v^2}{2}\Bigg|_0^2\right)du = \frac{1}{5}\int_1^3 \left(2\left(25u - 7\right) - 18\right)du =$$

$$= \frac{1}{5}\int_1^3 \left(50u - 32\right)du = \frac{1}{5}\left(25u^2\Big|_1^3 - 32u\Big|_1^3\right) = \frac{1}{5}\left(25\cdot 8 - 32\cdot 2\right) = \frac{136}{5} = 27,2.$$

3.51. Вычислить интеграл $\iiint\limits_D y^4 z\,dx\,dy\,dz$, где D — область, заданная неравенствами $2x \le y \le 4x$, $1 \le xy \le 3$, $-x \le z \le 2x$. Переписав неравенства, задающие область, в виде $2 \le \frac{y}{x} \le 4$, $1 \le xy \le 3$, $-1 \le \frac{z}{x} \le 2$, видим, что удобно сделать замену переменных $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$, $w = \frac{z}{x}$. Тогда переменные u, v и w меняются соответственно в пределах $2 \le u \le 4$, $1 \le v \le 3$, $-1 \le w \le 2$. Выражая старые переменные через новые, получаем $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$, $y = \sqrt{uv}$, $z = w\sqrt{\frac{v}{u}}$. Подынтегральная функция в новых переменных принимает вид $y^4 z = \left(\sqrt{uv}\right)^4 w\sqrt{\frac{v}{u}} = u^{3/2}v^{5/2}w$. Якобиан перехода (определитель матрицы Якоби) равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2u^{1/2}v^{1/2}} & 0 \\ \frac{v^{1/2}}{2u^{1/2}} & \frac{u^{1/2}}{2v^{1/2}} & 0 \\ -\frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}}w & \frac{1}{2u^{1/2}v^{1/2}}w & \frac{v^{1/2}}{u^{1/2}} \end{vmatrix} = -\frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}}.$$

Модуль якобиана равен $\left|J\right| = \frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}}$. Поэтому $\iiint\limits_D y^4 z\,dx\,dy\,dz =$

$$= \int_2^4 du\int_1^3 dv\int_{-1}^2 u^{3/2}v^{5/2}\,w\frac{v^{1/2}}{2u^{3/2}}\,dw = \frac{1}{2}\int_2^4 du\int_1^3 dv\int_{-1}^2 v^3 w\,dw = \frac{1}{4}\int_2^4 du\int_1^3 \left(v^3 w\,\Big|_{-1}^2\right)dv =$$

$$= \frac{3}{4}\int_2^4 du\int_1^3 v^3 dv = \frac{3}{16}\int_2^4 \left(v^4\,\Big|_1^3\right)du = \frac{3\cdot 80}{16}\int_2^4 du = 15\,u\Big|_2^4 = 15\cdot\left(4-2\right) = 30.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.52. В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ перейти к сферическим или цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами:

а) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25$;

б) $x \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 9 - x^2 - y^2$; **в)** $x^2 + y^2 \le 9,\ x^2 + y^2 \le 10z,\ z \le 10,\ y \ge 0$;

г) $x^2 + y^2 \le 9,\ x^2 + y^2 \ge 10z,\ z \ge 0,\ y \ge 0$;

д) $x \ge 0,\ z \ge 0,\ 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$; **е)** $y \ge 0,\ 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$;

ж) $y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 16 - x^2 - y^2$; **з)** $x^2 + y^2 \le 5z,\ z \le 5$;

и) $x^2 + y^2 \le 10z,\ z \le 10,\ x \ge 0$.

3.53. Вычислить интегралы по заданным областям, перейдя предварительно к сферическим или цилиндрическим координатам:

а) $\iiint\limits_D x^2 dxdydz$, если область D задана неравенствами $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ -z \le y \le z$;

б) $\iiint\limits_D (x^2 + y^2) z dxdydz$, если область D задана неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\quad z \ge 0$;

в) $\iiint\limits_D y dxdydz$, если область D задана неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 3z,\quad z \ge 0,\quad y \ge 0$;

г) $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, если область D задана неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 9,\quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\quad z \le 4$.

3.54. Вычислить интегралы по заданным областям, перейдя предварительно к одной из обобщённых сферических или цилиндрических систем координат:

а) $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt[3]{6x^2y^2}}$, если область D задана неравенствами

$$1 \le \left(\frac{x}{3}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{3}\right)^{2/3} \le 2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0;$$

б) $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{3xy}}$, если область D задана неравенствами

$$1 \le \sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{y}{3}} \le 3,\quad y \ge 0,\quad y \le \frac{27}{4}x;$$

в) $\iiint\limits_D 4(x+3z)dxdydz$, если область D задана неравенствами $1 \le \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \le 4,\ \ 2 \le x \le 5,\ \ y \ge 0$;

г) $\iiint\limits_D yzdxdydz$, если область D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 16,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \le 0$.

3.55. Вычислить интегралы по заданным областям, сделав удобную замену переменных:

а) $\iiint\limits_D (4x+2y+z)dxdydz$, если область D задана неравенствами $-1 \le x - y + 3z \le 2,\ \ 0 \le 2x + y - z \le 3,\ \ 2 \le x + 2y - z \le 4$;

б) $\iiint\limits_D (3x-5y+3z)dxdydz$, если область D задана неравенствами $0 \le 3x + y + z \le 2,\ \ -1 \le x - y + z \le 1,\ \ 1 \le -x + 2y - z \le 3$;

в) $\iiint\limits_D \frac{y^3 z}{x} dxdydz$, если область D задана неравенствами $x \le y \le 2x,\ \ 2 \le xy \le 4,\ \ 1 \le z \le 5$;

г) $\iiint\limits_D \frac{y^2 z}{x^6} dxdydz$, если область D задана неравенствами $x \le y^2 \le 2x,\ \ 2x \le y \le 4x,\ \ x^2 \le z \le 5x^2$;

д) $\iiint\limits_D \frac{z}{x^2} dxdydz$, если область D задана неравенствами $x^2 \le y \le 3x^2,\ \ y^2 \le x \le 4y^2,\ \ x \le z \le 2x$;

е) $\iiint\limits_D \frac{(2x+3y)^2 z}{xy^2} dxdydz$, если область D задана неравенствами $6 \le 2x + 3y \le 12,\ \ x \le y \le 2x,\ \ y \le z \le 3y$.

3.4. Геометрические приложения кратных интегралов

Рекомендуется предварительно прочитать подразд. 3.4 из [5].

Из определения двойного интеграла следует, что площадь $S(D)$ плоской области D выражается формулой

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Из определения тройного интеграла следует, что объем $V(G)$ пространственной области G выражается формулой

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Для поверхности, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D$, или, что то же самое, в векторной форме $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$, площадь поверхности равна $S = \iint\limits_D \left| [r'_u(u,v), r'_v(u,v)] \right| dudv$, где $[r'_u, r'_v]$ — векторное произведение [1, 2] векторов

$$r'_u = x'_u(u,v)\mathbf{i} + y'_u(u,v)\mathbf{j} + z'_u(u,v)\mathbf{k},$$
$$r'_v = x'_v(u,v)\mathbf{i} + y'_v(u,v)\mathbf{j} + z'_v(u,v)\mathbf{k},$$

вычисляемое по формуле

$$[r'_u, r'_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

а $\left| [r'_u, r'_v] \right|$ — длина этого вектора, которая находится по формуле

$$\left| [r'_u, r'_v] \right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}.$$

Если поверхность задана явно уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, то площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}\, dxdy.$$

3.56. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Кривые пересекаются в точках $A(0,0)$ и $B(1,1)$. Поэтому $S = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy =$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left. \left(\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

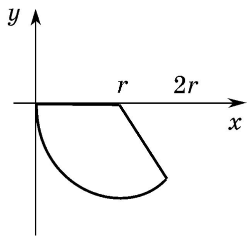
3.57. Найти площадь области, заданной неравенствами $2y \le x^2 + y^2 \le 4y$, $y \ge x$.

Переходя в интеграле $S(D)=\iint\limits_D dxdy$ к полярным координатам, имеем

$$S(D)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}\rho\,d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}d\varphi=6\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1-\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=\left(3\varphi-\frac{3}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=\frac{9\pi}{4}+\frac{3}{2}.$$

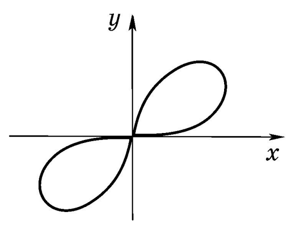
3.58. Вычислить площадь области, заданной неравенствами $(x-r)^2+y^2\le r^2$, $y\le0$, $-2x+2r\ge y$, перейдя предварительно к полярным координатам.



Проще всего эту задачу решать, если перенести начало координат в центр окружности, то есть перейти к новым переменным по формулам $x_1=x-r$, $y_1=y$. В новых переменных область будет задаваться неравенствами $(x_1)^2+(y_1)^2\le r^2$, $y_1\le0$, $-2x_1\ge y_1$. Находя точки пересечения прямой $y_1=-2x_1$ с окружностью $(x_1)^2+(y_1)^2=r^2$, получаем $x_1=\pm\frac{r}{\sqrt5}$, $y_1=\mp\frac{2r}{\sqrt5}$. На границе области лежит точка $\left(\frac{r}{\sqrt5},-\frac{2r}{\sqrt5}\right)$. Поэтому в полярных координатах область будет задаваться неравенствами $0\le\rho\le r$, $\pi\le\varphi\le2\pi+\operatorname{arctg}(-2)=2\pi-\operatorname{arctg}2$. Следовательно, $S=\iint\limits_D dxdy=$

$$=\int\limits_0^r\rho\,d\rho\int\limits_{\pi}^{2\pi-\operatorname{arctg}2}d\varphi=\frac{r^2(\pi-\operatorname{arctg}2)}{2}.$$

3.59. Вычислить площадь области, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2=8xy$.



Удобно перейти к полярной системе координат. В этой системе координат уравнение кривой будет иметь вид $\rho^4=8\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$, или, что то же самое, $\rho=2\sqrt{\sin2\varphi}$. Кривая, а следовательно, и область, ею ограниченная, симметрична относительно начала координат. Поэтому $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{\sin2\varphi}}\rho d\rho+\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{\sin2\varphi}}\rho\,d\rho=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{\sin2\varphi}}\rho\,d\rho=$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\rho^2\Big|_0^{2\sqrt{\sin2\varphi}}\right)d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}4\sin2\varphi d\varphi=-2\cos2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=4.$$

3.60. Найти объем области, ограниченной поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=3$, $z=x^2+y^2+1$.

Данная область является цилиндром, проекция которого на плоскость XOY есть треугольник с границей $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$, одновременно являющейся направляющей цилиндра. Сверху и снизу цилиндр ограничен поверхностями $z = 0,\ z = x^2 + y^2 + 1$. Поэтому $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz =$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{x^2+y^2+1} dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left(x^2 + y^2 + 1\right) dy = \int_0^3 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right)\Bigg|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2(3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} + (3-x) \right) dx = 18 .$$

3.61. Вычислить площадь поверхности $z = x^2 + y^2,\ (x, y) \in D$, если область D задается неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\quad x \ge 0,\quad y \ge x,\quad y \le \sqrt{3}x$.

Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то, подставляя в формулу площади поверхности, имеем $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$. Переходя к полярным координатам, получаем $S = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{12}\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_1^2 \right) d\varphi =$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(17)^{3/2} - (5)^{3/2}}{12}\, d\varphi = \pi\, \frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{144} .$$

3.62. Вычислить площадь шарового сектора, вырезанного в сфере радиуса R частью конуса $x^2 + y^2 = z^2$, лежащей в полупространстве $z \ge 0$.

Данная поверхность есть часть сферы радиуса R, лежащая в полупространстве $z \ge 0$. Вспомним, что в сферической системе координат $x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$, где ρ — длина радиус-вектора точки, φ — угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX, θ — угол между радиус-вектором точки и осью OZ, координатной поверхностью при фиксированном $\rho = R$ и $\varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \pi]$ является сфера радиуса R. Если точка принадлежит заданной в условии части сферы, то угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$, а угол θ — в пределах $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Поэтому параметрическое уравнение данного шарового сектора можно записать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta$, где $0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. То же самое в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{r} = \left(R\cos\varphi\sin\theta\right)\mathbf{i} + \left(R\sin\varphi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(R\cos\theta\right)\mathbf{k},\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,\ r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)^T.$$

Вычисляя векторное произведение $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]$, получаем

$$\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix}$$

или, находя определитель, имеем

$$\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \left(-R^2\sin^2\theta\cos\varphi\right)\mathbf{i} - \left(R^2\sin^2\theta\sin\varphi\right)\mathbf{j} - \left(R^2\cos\theta\sin\theta\right)\mathbf{k}.$$

Вычисляя модуль (длину) этого вектора, получаем $\left|\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right| =$

$= \sqrt{\left(R^2\sin^2\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(R^2\sin^2\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(R^2\cos\theta\sin\theta\right)^2} = R^2\sin\theta$. Поэтому

$$S = \iint\limits_D \left|\left[r'_\varphi(\varphi,\theta), r'_\theta(\varphi,\theta)\right]\right| d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} R^2\sin\theta d\theta = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi R^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.63. Вычислить площади следующих областей:

а) ограниченной линиями $y = x$, $y = x^4$;

б) заданной неравенствами $(x - r)^2 + y^2 \le r^2$, $y \le 0$, $-2x + 2r \le y$, перейдя предварительно к полярным координатам;

в) ограниченной линией $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2y^2$.

3.64. Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями:

а) $z = x^2$, $x + y = 3$, $z = 0$, $y = 0$; **б)** $x = 4$, $y = 3x$, $z = 0$, $z = y^2$.

3.65. Найти площади:

а) части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, где x, y меняются в области, заданной неравенствами $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$, $y \le \sqrt{3}x$;

б) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, для которой $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

4.1. Кривые на плоскости и в пространстве. Поверхности в пространстве

Вектор-функция одного аргумента

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — векторы декартова базиса, описывает в R^3 некоторую кривую, а вектор-функция двух аргументов

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right)^T =$$
$$= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

описывает в R^3 некоторую поверхность. В случае $z(t) \equiv 0$ получаем кривую, лежащую в плоскости XOY, $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, или, как иногда говорят, плоскую кривую.

Кривую $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ назовем гладкой на $[\alpha, \beta]$, если существует $r'(t)$ и $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Поверхность $r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ назовем гладкой в области D, если существуют непрерывные производные

$$r'_u(u, v) = x'_u(u, v)\mathbf{i} + y'_u(u, v)\mathbf{j} + z'_u(u, v)\mathbf{k},$$
$$r'_v(u, v) = x'_v(u, v)\mathbf{i} + y'_v(u, v)\mathbf{j} + z'_v(u, v)\mathbf{k}$$

и векторное произведение [1, 2] векторов r'_u и r'_v, вычисляемое по формуле

$$[r'_u, r'_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

отлично от нуля для всех $(u, v) \in D$.

Непрерывную кривую назовем кусочно-гладкой на $[\alpha, \beta]$, если отрезок $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых кривая гладкая. Непрерывную поверхность назовем кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число поверхностей, каждая из которых гладкая.

Будем говорить, что кривая ориентирована, если задан порядок следования точек по этой кривой при возрастании параметра от α к β. Замкнутую кривую на плоскости ориентируют обычно так, чтобы при обходе кривой против часовой стрелки область, ограничиваемая этой кривой, оставалась слева.

Для гладкой кривой ориентация определяется естественным образом выбором единичного направляющего вектора касательной.

Заметим, что вектор $\mathbf{n} = \pm[r'_u, r'_v]$ есть вектор нормали к поверхности $\mathbf{r}(u, v)$. Фиксируя направление нормали $\pm\mathbf{n}$, фиксируем ориентацию поверхности.

4.2. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

Предварительно следует прочитать подразд. 4.3 из [5]. Общее определение дано в [5]. Дадим определение криволинейного интеграла первого рода.

Определение. Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая кривая Γ и на Γ — функция $F(x, y, z)$. Разобьем Γ на части точками и внутри каждого элементарного участка кривой выберем по точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$. Найдем значения функции в этих точках, умножим полученные значения на длину данного элементарного участка кривой и просуммируем. Предел полученных сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка кривой при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом первого рода и обозначается $\int\limits_L F(x, y, z)\, dl$.

Аналогично из общего определения получается определение поверхностного интеграла первого рода, который обозначается $\iint\limits_S F(x, y, z)\, dS$. При этом исходную поверхность разбивают на элементарные участки кривыми. Предлагается сформулировать его самостоятельно.

Если $F(x, y, z) \equiv 1$, то $\int\limits_L dl$ равен длине дуги кривой L, а $\iint\limits_S dS$ — площади поверхности S, по которым эти интегралы вычисляются.

Отметим, что величина криволинейного (поверхностного) интеграла первого рода не изменяется при изменении ориентации кривой (поверхности).

При параметрическом $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ или, что то же самое, векторном

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^{T} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,,\ t \in [\alpha, \beta],$$

задании кривой криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L} F(x, y, z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F\,\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt\,.$$

В случае плоской кривой $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \big(x(t), y(t)\big)^{T} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ $\big(t \in [\alpha, \beta]\big)$ эта формула приобретает вид

$$\int\limits_{L} F(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F\,\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt\,.$$

Если плоская кривая задается явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, то последняя формула записывается в форме

$$\int\limits_{L} F(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} F\,\big(x, f(x)\big)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx\,.$$

4.1. Вычислить $\int\limits_{\gamma} y\,dl$, где **а)** γ — часть кубической параболы $y = x^3$, $0 \le x \le 2$; **б)** γ — отрезок, соединяющий точки $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

а) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} y\,dl = \int\limits_{0}^{2} x^3\sqrt{1 + \Big(\big(x^3\big)'\Big)^2}\,dx = \int\limits_{0}^{2} x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx = \frac{1}{36}\int\limits_{0}^{2}\sqrt{1 + 9x^4}\,d\big(9x^4 + 1\big) =$

$\displaystyle = \frac{2}{36 \cdot 3}\big(1 + 9x^4\big)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{54}\Big(\sqrt{145^3} - 1\Big).$

б) Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, можно записать в виде $y = 2x$. Если $0 \le x \le 2$, то точка (x, y) принадлежит отрезку AB.

Поэтому $\displaystyle\int\limits_{\gamma} y\,dl = \int\limits_{0}^{2} 2x\sqrt{1 + (2)^2}\,dx = \sqrt{5}\,x^2\Big|_0^2 = 4\sqrt{5}\,.$

Заметим, что в примере 4.1,б для сведения криволинейного интеграла к определенному можно было воспользоваться параметрическим уравнением прямой.

4.2. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(xy+z)\,dl$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A(1,2,-1)$ и $B(2,1,3)$.

В данном случае следует воспользоваться параметрическим уравнением отрезка AB, которое можно записать в виде $x=1+t$, $y=2-t$, $z=-1+4t$, $0\le t\le 1$. Тогда $x'_t=1$, $y'_t=-1$, $z'_t=4$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma}(xy+z)dl=\int\limits_{0}^{1}((1+t)(2-t)+(-1+4t))\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(4)^2}\,dt=\sqrt{18}\int\limits_{0}^{1}\left(1+5t-t^2\right)dt=$$

$$=3\sqrt{2}\left(t+\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=19\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.3. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(x+2y)\,dl$ вдоль кривой $\begin{cases}x=\sin^3 t,\\ y=\cos^3 t,\end{cases}$ если $t\in[\pi,2\pi]$.

Так как $x'_t=3\sin^2 t\cos t$, $y'_t=-3\cos^2 t\sin t$, то $\int\limits_{\gamma}(x+2y)\,dl=$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\sin^3 t+2\cos^3 t\right)\sqrt{\sin^2 2t}\,dt=\frac{3}{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\sin^3 t+2\cos^3 t\right)|\sin 2t|\,dt.$$

Раскрывая $|\sin 2t|$ и вычисляя полученные интегралы, имеем

$$\int\limits_{\gamma}(x+2y)\,dl=\frac{3}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\left(\sin^3 t+2\cos^3 t\right)\sin 2t\,dt-\frac{3}{2}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\left(\sin^3 t+2\cos^3 t\right)\sin 2t\,dt=-\frac{6}{5}.$$

4.4. Вычислить $\int\limits_{\gamma}\left(x+2y+5z^2\right)dl$ вдоль окружности, образованной пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=4$ с плоскостью $2x-3y=0$.

Проекция данной окружности на плоскость XOY есть отрезок прямой, образующий с осью OX угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Поэтому параметрическое уравнение данной окружности может быть записано в виде $x=2\sin t\times\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $y=2\sin t\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $z=2\cos t$, $0\le t<2\pi$, если в качестве параметра взять угол между радиус-вектором точки на окружности и осью OZ. Тогда $x'_t=2\cos t\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $y'_t=2\cos t\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $z'_t=-2\sin t$, $dl=2dt$ и, следовательно, $\int\limits_{\gamma}\left(x+2y+5z^2\right)dl=$

$$=2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(2\sin t\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+4\sin t\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+20\cos^2 t\right)dt=40\pi.$$

4.5. Вычислить $\int\limits_{\gamma} xydl$ вдоль части окружности, лежащей в первом октанте и образованной пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=4$ с плоскостью $z=a$.

Проекция данной окружности на плоскость XOY есть окружность $x^2+y^2=4-a^2$. Параметрическое уравнение данной части окружности может быть записано в виде $x=\sqrt{4-a^2}\cos t$, $y=\sqrt{4-a^2}\sin t$, $z=a$, $0 \le t < \frac{\pi}{2}$, если в качестве параметра взять угол между проекцией радиус-вектора точки окружности на плоскость $z=a$ и плоскостью XOZ. Тогда $x'_t=-\sqrt{4-a^2}\sin t$, $y'_t=\sqrt{4-a^2}\cos t$, $z'_t=0$, $dl=\sqrt{4-a^2}dt$ и, следовательно, $\int\limits_{\gamma} xydl=\int\limits_0^{\pi/2}\left(4-a^2\right)^{3/2}\sin t\cos t\,dt=\frac{\left(4-a^2\right)^{3/2}}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\left(4-a^2\right)^{3/2}}{2}$.

4.6. Найти длину дуги одного витка винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что $l=\int\limits_L dl$. Так как $x'_t=-\sin t$, $y'_t=\cos t$, $z'_t=1$, то $dl=\sqrt{2}dt$, и поэтому

$$l=\int\limits_L dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi.$$

При параметрическом $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$ или, что то же самое, векторном

$$\mathbf{r}(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)^T=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in D,$$

задании поверхности поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле $\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|[r'_u,r'_v]\right|du\,dv$, где $[r'_u,r'_v]$ — векторное произведение [1, 2] векторов

$$r'_u(u,v)=x'_u(u,v)\mathbf{i}+y'_u(u,v)\mathbf{j}+z'_u(u,v)\mathbf{k},$$
$$r'_v(u,v)=x'_v(u,v)\mathbf{i}+y'_v(u,v)\mathbf{j}+z'_v(u,v)\mathbf{k},$$

вычисляемое по формуле

$$[r'_u,r'_v]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

а $\left|[r'_u, r'_v]\right|$ — длина этого вектора, которая находится по формуле

$$\left|[r'_u, r'_v]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}.$$

Для поверхности, заданной явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, последняя формула приобретает вид

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \iint_D F\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}\, dx\, dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XOY.

4.7. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (2x + y + z)dS$, если поверхность S есть часть плоскости $3x + 2y - 4z = 12$, ограниченная координатными плоскостями.

Поверхность задается явно уравнением $z = \dfrac{-12 + 3x + 2y}{4}$. Тогда $z'_x = \dfrac{3}{4}$, $z'_y = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}$. Проекция поверхности на плоскость XOY есть треугольник D, ограниченный кривыми $x = 0$, $y = 0$, $3x + 2y = 12$. Поэтому $\iint_S (2x + y + z)dS = \iint_D \left(2x + y + \dfrac{-12 + 3x + 2y}{4}\right)\dfrac{\sqrt{29}}{4}\, dxdy =$

$$= \frac{\sqrt{29}}{16}\int_0^4 dx \int_0^{\frac{12-3x}{2}} (-12 + 11x + 6y)\, dy = \frac{\sqrt{29}}{16}\int_0^4 \left(36 + 30x - \frac{39}{4}x^2\right)dx = -7\sqrt{29}.$$

4.8. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (2x - y + 3z)dS$, если поверхность S есть полусфера $x = -\sqrt{4 - y^2 - z^2}$.

Данная поверхность есть часть сферы радиуса 2, лежащая в полупространстве $x \le 0$. Вспомним, что в сферической системе координат $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, где ρ — длина радиус-вектора точки; φ —угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX; θ — угол между радиус-вектором точки и осью OZ, координатной поверхностью при фиксированном $\rho = R$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ является сфера радиуса R. Если точка принадлежит заданной в условии половине сферы, то угол φ меняется в пределах $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$, а угол θ — в пределах $0 \le \theta \le \pi$. Поэтому одно из возможных параметрических уравнений данной половины сферы можно записать в виде $x = 2\cos\varphi\sin\theta$, $y = 2\sin\varphi\sin\theta$, $z = 2\cos\theta$, где $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \pi$. То же самое в векторной форме имеет вид $\mathbf{r} = (2\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (2\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\theta)\mathbf{k}$,

$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \pi$. Другая параметризация получается, если в сферической системе координат поменять роли осей OX и OZ. Соответствующее уравнение будет иметь вид $x = 2\cos\theta$, $y = 2\cos\varphi\sin\theta$, $z = 2\sin\varphi\sin\theta$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$ — угол между проекцией радиус-вектора точки сферы на плоскость YOZ и осью OY, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ — угол между радиус-вектором точки сферы и осью OX.

Воспользуемся первой параметризацией. Тогда

$$r'_\varphi = (-2\sin\varphi\sin\theta,\ 2\cos\varphi\sin\theta,\ 0)^T,$$

$$r'_\theta = (2\cos\varphi\cos\theta,\ 2\sin\varphi\cos\theta,\ -2\sin\theta)^T.$$

Вычисляя векторное произведение $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]$ этих векторов, получаем $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin\varphi\sin\theta & 2\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ 2\cos\varphi\cos\theta & 2\sin\varphi\cos\theta & -2\sin\theta \end{vmatrix}$ или, раскладывая этот определитель по элементам первой строки, имеем $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \left(-4\sin^2\theta\cos\varphi\right)\mathbf{i} - \left(4\sin^2\theta\sin\varphi\right)\mathbf{j} - (4\cos\theta\sin\theta)\mathbf{k}$.

Вычисляя модуль (длину) этого вектора, получаем $\left|\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right| = \sqrt{\left(4\sin^2\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(4\sin^2\theta\sin\varphi\right)^2 + (4\cos\theta\sin\theta)^2} = 4\sin\theta$.

Поэтому $dS = 4\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$, и, следовательно, $\iint\limits_S (2x - y + 3z)dS =$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} (4\cos\varphi\sin\theta - 2\sin\varphi\sin\theta + 6\cos\theta)\, 4\sin\theta d\theta = -16\pi.$$

Мы получим тот же результат, если воспользуемся второй параметризацией или явным уравнением данной части сферы.

4.9. Вычислить площадь поверхности той части параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$, которая лежит в полупространстве $z \ge 0$.

Из определения поверхностного интеграла первого рода следует, что $S = \iint\limits_\sigma d\sigma$. Так как $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, то $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$, и поэтому $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$, где D — проекция поверхности на плоскость XOY. Эта проекция есть круг с центром в начале координат радиуса 2. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получаем

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho = \frac{2\pi\left(\sqrt{17^3} - 1\right)}{12} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

4.10. Вычислить $\int\limits_{\gamma}\left(x+3\sqrt{y}\right)dl$:

а) вдоль кривой $y=x^2$, $0\le x\le 2$;
б) вдоль отрезка, соединяющего точки $A(2,1,3)$, $B(3,4,7)$.

4.11. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(3x+2y+5z)\,dl$ вдоль отрезка, соединяющего точки $A(1,2,4)$, $B(2,4,3)$.

4.12. Вычислить $\int\limits_{\gamma}\left(x^2+y+2z\right)dl$ вдоль кривой $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\pi$.

4.13. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(x+y+3z)\,dl$ вдоль окружности, образованной пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=9$ с плоскостью $x-y=0$.

4.14. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$ от точки $(1,0)$ до точки $(e,1)$.

4.15. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{S}(4x-3y+z)\,dS$, если поверхность S есть часть плоскости $3x-5y-3z=15$, ограниченная координатными плоскостями.

4.16. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{S}(x+4y-z)\,dS$, если поверхность S есть полусфера $y=\sqrt{16-x^2-z^2}$.

4.17. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{S}(4x-y+3z)\,dS$, если поверхность S есть полусфера $z=-\sqrt{25-x^2-y^2}$.

4.3. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода

Предварительно следует прочитать подразд. 4.4 из [5]. Общее определение дано в [5]. Дадим определение криволинейного интеграла второго рода.

Рассмотрим кривую Г. Пусть $\tau(x,y,z)$ — единичный вектор касательной к Г в точке (x,y,z). Рассмотрим элементарный участок Г и выберем точку на нем. Введем вектор $\overline{dl}=\tau\,dl$, где dl — длина соответствующего участка кривой, а τ вычислен в выбранной точке. Назовем $\overline{dl}$ ориентированной длиной соответствующего участка кривой.

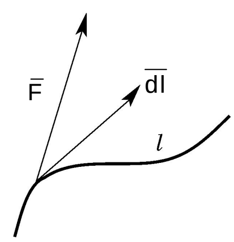
Определение. Пусть задана ориентированная непрерывная кусочно-гладкая кривая Г и на Г — вектор-функция $F(x,y,z)=$

$= P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$. Разобьем кривую на части точками, внутри каждого полученного элементарного участка кривой выберем по точке $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, ..., $M_n(x_n,y_n z_n)$. Найдем значения $F(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,\dots,n$, вектор-функции в этих точках, умножим скалярно эти значения на ориентированную длину $\overline{dl}$ данного элементарного участка кривой и просуммируем. Предел полученных сумм $\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i,y_i,z_i),\overline{dl_i}\right)$, если он существует, не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек внутри каждого элементарного участка при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется криволинейным интегралом второго рода или интегралом от вектора F вдоль l и обозначается $\int_L\left(F(x,y,z),\overline{dl}\right)$.

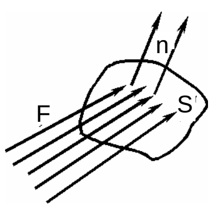
Аналогично получается определение поверхностного интеграла второго рода. Предлагается дать его самостоятельно.

Отметим, что криволинейный и поверхностный интегралы 2-го рода меняют знак при смене ориентации кривой и поверхности.

Если $\bar{F}(x,y,z)$ — сила, действующая на материальную точку, движущуюся под действием этой силы по кривой L, то $\int_\gamma\left(\bar{F}(x,y,z),\overline{dl}\right)$ — работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой.



Если кривая L замкнута, то работа по перемещению точки вдоль L называется циркуляцией.



Если $F(x,y,z)$ — стационарное (не зависящее от времени) поле скоростей текущей жидкости, S — поверхность, через которую течет эта жидкость, то $\iint_S\left(F(x,y,z),\overline{dS}\right)$ — количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени (поток вектора через поверхность).

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t),\\ z = z(t)\end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = \left(x(t),y(t),z(t)\right)^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Тогда для криволинейного интеграла второго рода имеем $\int_\gamma\left(F(x,y,z),\overline{dl}\right) =$

$$= \int\limits_{\gamma} \big(P\,(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q\,(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R\,(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\big)dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz\,.$$

В случае плоской кривой $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = x\,(t)\,\mathbf{i} + y\,(t)\,\mathbf{j}$ получим $\int\limits_{\gamma} \big(F(x, y, z), \overline{dl}\,\big) = \int\limits_{\gamma} \big(P\,((x(t), y(t))\,x'(t) + Q\,(x(t), y(t))\,y'(t)\big)dt =$

$$= \int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x),\ x \in [a,b]$, то последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_{\gamma} \big(F(x, y, z), \overline{dl}\,\big) = \int\limits_{a}^{b} P\,(x, f(x))\,dx + Q\,(x, f(x))\,f'(x)\,dx\,.$$

Заметим, что все формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода получены при соглашении, что направлением обхода кривой считается направление, задаваемое вектором касательной $r'(t)$, если кривая задана параметрически или векторно, и вектором касательной $(1, f'(x))^T$, если кривая задана явно. Если по каким-либо соображениям обходить кривую необходимо в обратном направлении, то все знаки в формулах нужно поменять на противоположные.

4.18. Вычислить $\int\limits_{\gamma} (x + 2y)dx + xydy$:

а) вдоль кривой $y = \ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$;

б) вдоль кривой $x = \cos^2 t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$ в сторону увеличения параметра;

в) вдоль отрезка, соединяющего точки $A(1,2)$, $B(3,-2)$ в направлении от A к B.

а) Так как $dy = \dfrac{dx}{x}$, то $\int\limits_{\gamma} (x + 2y)dx + xydy =$

$$= \int\limits_{1}^{e} \left((x + 2\ln x)dx + \frac{x \ln x dx}{x}\right) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \ln x - 3x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2 + 5}{2}\,.$$

б) Так как $dx = -2\cos t \sin t\,dt,\ dy = \cos t\,dt$, то $\int\limits_{\gamma} (x + 2y)\,dx + xydy =$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \left((\cos^2 t + 2\sin t)(-2\cos t \sin t) + \cos^2 t \sin t \cos t\right)dt =$$

$$= \left(\frac{2\cos^4 t}{4} - \frac{4\sin^3 t}{3} - \frac{\cos^4 t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0\,.$$

в) Воспользуемся параметрическим уравнением отрезка AB: $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 4t,\ 0 \le t \le 1$. Тогда $dx = 2dt,\ dy = -4dt$ и, следовательно,

$$\int_\gamma (x + 2y)\,dx + xy\,dy = \int_0^1 \big(((1 + 2t) + 2(2 - 4t))2 + (1 + 2t)(2 - 4t)(-4)\big)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2 - 12t + 32t^2\right)dt \left(2t - 6t^2 + \frac{32}{2}t^3\right)\Bigg|_0^1 = 6\frac{2}{3}.$$

4.19. Вычислить $\int_\gamma (2x + y + z)dx + (xy + yz)dy + \left(xy + z^2\right)dz$:

а) вдоль кривой $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 2$ в сторону увеличения параметра;

б) вдоль отрезка, соединяющего точки $A(2,1,3)$, $B(1,2,4)$ от A к B.

а) Так как $dx = 2dt,\ dy = 2t\,dt,\ dz = 3t^2dt$, то

$$\int_\gamma (2x + y + z)dx + (xy + yz)dy + \left(xy + z^2\right)dz =$$

$$= \int_0^2 \left(\left(4t + t^2 + t^3\right)2dt + \left(2t^3 + t^5\right)2tdt + \left(2t^3 + t^6\right)3t^2dt\right) = 326\frac{6}{35}.$$

б) Воспользуемся параметрическим уравнением данного отрезка прямой $x = 2 - t,\ y = 1 + t,\ z = 3 + t,\ 0 \le t \le 1$. Тогда $dx = -dt,\ dy = dt,\ dz = dt$, и поэтому $\int_\gamma (2x + y + z)\,dx + (xy + yz)\,dy + \left(xy + z^2\right)dz =$

$$= \int_0^1 \left(-8 + ((2 - t)(1 + t) + (1 + t)(3 + t)) + \left((2 - t)(1 + t) + (3 + t)^2\right)\right)dt = \int_0^1 (8 + 12t)dt = 14.$$

4.20. Вычислить работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x, y) = \left(x + y^2,\ x^2 + y\right)^T = \left(x + y^2\right)\mathbf{i} + \left(x^2 + y\right)\mathbf{j}$ вдоль кривой $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [\pi, 2\pi]$ в сторону увеличения параметра.

Работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int_L \left(x + y^2\right)dx + \left(x^2 + y\right)dy$.

Так как $dx = -a\sin t\,dt,\ dy = b\cos t\,dt$, то $\int_L \left(f, \overline{dl}\right) =$

$$= \int_\pi^{2\pi} \left(\left(b^2 - a^2\right)\sin t\cos t - ab^2\sin^3 t + a^2b\cos^3 t\right)dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

4.21. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x, y, z) = \left(x + y,\ xy,\ \left(-2x^2 + z\right)\right)^T = (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \left(-2x^2 + z\right)\mathbf{k}$ вдоль кривой $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ z = t,\ 0 \le t \le \pi$ в сторону увеличения параметра.

Аналогично предыдущей задаче, работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) =$

$= \int\limits_L (x+y)\,dx + xydy + \left(-2x^2 + z\right)dz$.

Так как $dx = -2\sin 2t\,dt$, $dy = 2\cos 2t\,dt$, $dz = dt$, то получаем $\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) =$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left((\cos 2t + \sin 2t)(-2\sin 2t) + 2\cos^2 2t \sin 2t + \left(-2\cos^2 2t + t\right)\right)dt =$$

$$= \left(\frac{\cos^2 2t}{2} - \frac{\cos^3 2t}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2\pi.$$

4.22. Вычислить $\int\limits_\gamma (x-y)dx + 2xydy + 5z^2dz$ вдоль части эллипса, образованного пересечением эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ с плоскостью $\sqrt{3}x - y = 0$ и лежащего в полупространстве $z \ge 0$ в направлении от точки $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{7}}, 0\right)$ к точке $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, -\frac{6}{\sqrt{7}}, 0\right)$.

Полуосями данного эллипса являются полуось $c = 5$ эллипсоида и расстояние от начала координат до точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (проекции эллипсоида на плоскость XOY) с прямой $\sqrt{3}x - y = 0$. Эта полуось равна $d = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \sqrt{4\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{31}}{2}$, где a и b — полуоси эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ — угол между прямой $\sqrt{3}x - y = 0$ и осью OX. Тогда параметрическое уравнение нужной нам части эллипса имеет вид $x = \frac{\sqrt{31}}{2}\cos\frac{\pi}{3}\sin t = \frac{\sqrt{31}}{4}\sin t$, $y = \frac{\sqrt{31}}{2}\sin\frac{\pi}{3}\sin t = \frac{\sqrt{93}}{4}\sin t$, $z = 5\cos t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, если угол t отсчитывать от оси OZ, и вид $x = \frac{\sqrt{31}}{4}\cos t$, $y = \frac{\sqrt{93}}{4}\cos t$, $z = 5\sin t$, $0 \le t \le \pi$, если угол t отсчитывать от плоскости XOY.

Воспользовавшись второй параметризацией, получаем $dx = -\frac{\sqrt{31}}{4}\sin t\,dt$,

$dy = -\frac{\sqrt{93}}{4}\sin t dt$, $dz = 5\cos t dt$, $\int\limits_{\gamma}(x-y)\,dx + 2xydy + 5z^2dz =$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left(\left(-\frac{31}{16}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\cos t \sin t - \frac{93\sqrt{31}}{32}\cos^2 t \sin t + 625\sin^2 t \cos t\right)\right)dt = -\frac{31\sqrt{31}}{16}.$$

4.23. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(x+y)dx + (2x-z)dy + ydz$ вдоль эллипса, образованного пересечением эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ с плоскостью $x = d$, $0 < d < 2$, двигаясь против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $(2,0,0)$.

Проекция данного эллипса на плоскость YOZ есть эллипс $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}= =1-\frac{d^2}{4}$. Поэтому параметрическое уравнение эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$, $x = d$ может быть записано в виде $x = d$, $y = \frac{3\sqrt{4-d^2}}{2}\cos t$, $z = \frac{5\sqrt{4-d^2}}{2}\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, если в качестве параметра взять угол между проекцией радиус-вектора точки эллипса на плоскость $x = d$ и плоскостью XOY.

Тогда $dx = 0$, $dy = -\frac{3\sqrt{4-d^2}}{2}\sin t dt$, $dz = \frac{5\sqrt{4-d^2}}{2}\cos t dt$ и, следовательно, $\int\limits_{\gamma}(x+y)dx + (2x-z)dy + ydz =$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi}\left(d\sqrt{4-d^2}\sin t + \frac{5}{4}\left(4-d^2\right)\sin^2 t + \frac{5}{4}\left(4-d^2\right)\cos^2 t\right)dt =$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi}\left(d\sqrt{4-d^2}\sin t + \frac{5}{4}\left(4-d^2\right)\right)dt = -\frac{15\pi}{4}\left(4-d^2\right).$$

Если поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$, $(u,v) \in D$, то поверхностный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \left(P\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\begin{vmatrix} y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \\ z'_u(u,v) & z'_v(u,v)\end{vmatrix} - \right.$$

$$- Q\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ z'_u(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix} +$$

$$\left. + R\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}\right) dudv.$$

Заметим, что под знаком интеграла стоит скалярное произведение векторов $F = (P, Q, R)^T$ и $[r'_u, r'_v]$, найденное при значениях параметров u и v.

В случае явного задания поверхности S уравнением $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, поверхностный интеграл второго рода находится по формуле $\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \left(-P(x,y,\varphi)\varphi'_x - Q(x,y,\varphi)\varphi'_y + R(x,y,\varphi)\right)dxdy$, в которой $\varphi = \varphi(x,y)$, $\varphi'_x = \varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y = \varphi'_y(x,y)$, а D есть проекция поверхности S на плоскость XOY. Получить аналогичные формулы в случае, когда поверхность задана явно одним из уравнений $y = \psi(x,z)$ или $x = \chi(y,z)$, не представляет труда.

Напомним, что формулы для вычисления поверхностного интеграла второго рода получены при ориентации поверхности с помощью вектора нормали $\mathbf{n} = [r'_u, r'_v]$. При необходимости выбора другой стороны поверхности все знаки в формулах поменяются на противоположные.

В [5] показано, что поверхностный интеграл второго рода может быть также записан в стандартном [7, 11] виде $\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) =$ $= \iint\limits_S \left(F(x,y,z), n_0\right)dS = \iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$, а если поверхность S может быть задана одновременно уравнениями $x = \varphi_1(y,z)$, $y = \varphi_2(x,z)$, $z = \varphi_3(x,y)$, то находить его можно по формуле $\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) =$

$$= \pm \iint\limits_{D_1} P\left(\varphi_1(y,z), y, z\right)dydz \pm \iint\limits_{D_2} Q\left(x, \varphi_2(x,z), z\right)dxdz \pm \iint\limits_{D_3} R\left(x, y, \varphi_3(x,y)\right)dxdy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции поверхности S на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY соответственно и берется знак «+», если угол между вектором нормали и осью, вдоль которой ведется проектирование, острый, а знак «–», если этот угол тупой.

Заметим, что если поверхность S параллельна координатной плоскости YOZ, то $\iint\limits_S \left(f(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz$.

Аналогично, если S параллельна плоскости XOZ, то $\iint\limits_S \left(f(x,y,z), \overline{dS}\right) =$ $= \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz$, а когда S параллельна плоскости XOY, то $\iint\limits_S \left(f(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$.

4.24. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(9yz, 9xyz, 2xy)^T$ через часть плоскости $2x-y+3z=6$, ограниченную координатными плоскостями в сторону нормали $(2,-1,3)$.

Поток вектора через поверхность равен поверхностному интегралу второго рода $I = \iint\limits_S 9yzdydz + 9xyzdxdz + 2xydxdy$. Поверхность однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Вычислим этот интеграл с помощью проектирования на плоскость XOY. Так как явное уравнение поверхности $z=\dfrac{6-2x+y}{3}$, то $z'_x = -\dfrac{2}{3}$, $z'_y = \dfrac{1}{3}$. Поэтому

$$I = \iint\limits_D \left(9y\frac{6-2x+y}{3}\frac{2}{3} + 9xy\frac{6-2x+y}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2xy \right) dxdy =$$

$= \iint\limits_D \left(12y - 8xy + 2x^2y + 2y^2 - xy^2\right)dxdy$, где D — проекция поверхности S на плоскость XOY. Расставляя в последнем интеграле пределы интегрирования и вычисляя полученный повторный интеграл, имеем

$$I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{2x-6}^{0} \left(12y - 8xy + 2x^2y + 2y^2 - xy^2\right)dy = -\frac{36}{5}.$$

4.25. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(x+y, xz+y, y+z)^T$ через внешнюю сторону пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью $x-2y+3z=6$.

Поток вектора через поверхность равен поверхностному интегралу второго рода $\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right)$. Поверхность S есть сумма поверхностей S_1, S_2, S_3, S_4, где S_1 — поверхность треугольника, лежащего в плоскости YOZ, следовательно, имеющая уравнение $x = 0$, с вершинами (0,0,0), (6,0,0), (0,–3,0), ориентированная в сторону нормали $-\mathbf{i}$; S_2 — поверхность треугольника, лежащего в плоскости XOZ, следовательно, имеющая уравнение $y=0$, с вершинами (0,0,0), (6,0,0), (0,0,2), ориентированная в сторону нормали $\mathbf{j}$; S_3 — поверхность треугольника, лежащего в плоскости XOY, следовательно, имеющая уравнение $z = 0$, с вершинами (0,0,0), (6,0,0), (0,–3,0), ориентированная в сторону нормали $-\mathbf{k}$; S_4 — часть плоскости $x-2y+3z=6$, заключенная между координатными плоскостями и ориентированная в сторону нормали $(1,-2,3)^T$.

Поэтому $\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_{S_1} \left(f, \overline{dS}\right) + \iint\limits_{S_2} \left(f, \overline{dS}\right) + \iint\limits_{S_3} \left(f, \overline{dS}\right) + \iint\limits_{S_4} \left(f, \overline{dS}\right)$. Так как поверхность S_1 лежит в плоскости YOZ, то $\iint\limits_{S_1} \left(f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_{S_1} (x+y)dydz$. Подставляя уравнение $x=0$ поверхности S_1 и учитывая ориентацию поверхности в сторону вектора нормали $-\mathbf{i}$, имеем $\iint\limits_{S_1} \left(f, \overline{dS}\right) = -\iint\limits_{D_1} (x+y)\Big|_{x=0} dydz =$

$=-\iint\limits_{D_1} ydydz$, где D_1 — треугольник с вершинами (0,0,0), (0,0,2), (0,–3,0), являющийся проекцией поверхности S_1 на плоскость YOZ. Вычисляя последний интеграл, получаем $-\iint\limits_{D_1} ydydz = -\int\limits_{-3}^{0} ydy \int\limits_{0}^{\frac{2y+6}{3}} dz = -\int\limits_{-3}^{0}\left(z\Big|_0^{\frac{2y+6}{3}} \right) ydy =$

$$= -\int\limits_{-3}^{0}\left(\frac{2y+6}{3}\right) ydy = -\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{0}\left(2y^2+6y\right)dy = -\frac{1}{3}\left(\frac{2y^3}{3}+\frac{6y^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = 3.$$

Так как поверхность S_2 лежит в плоскости XOZ, то $\iint\limits_{S_2}\left(f, \overline{dS}\right) =$ $= \iint\limits_{S_2}(xz+y)dxdz$. Подставляя уравнение $y=0$ поверхности S_2 и учитывая ориентацию поверхности в сторону вектора нормали **j**, имеем $\iint\limits_{S_2}\left(f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_{D_2}(xz+y)\big|_{y=0} dxdz = \iint\limits_{D_2} xzdxdz$, где D_2 — треугольник с вершинами (0,0,0), (0,0,2), (6,0,0), являющийся проекцией поверхности S_2 на плоскость XOZ. Вычисляя последний интеграл, получаем $\iint\limits_{D_2} xzdxdz =$

$$= \int\limits_{0}^{6} xdx \int\limits_{0}^{\frac{x-6}{-3}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{6}\left(xz^2\Big|_0^{\frac{x-6}{-3}} \right)dx = \frac{1}{2\cdot 9}\int\limits_{0}^{6} x(x-6)^2 dx = \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6}\left(x^3-12x^2+36x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{12x^3}{3}+\frac{36x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{6} = 6.$$

Так как поверхность S_3 лежит в плоскости XOY, то $\iint\limits_{S_3}\left(f, \overline{dS}\right) =$ $= \iint\limits_{S_3}(y+z)dxdy$. Подставляя уравнение $z=0$ поверхности S_3 и учитывая ориентацию поверхности в сторону вектора нормали $-\mathbf{k}$, имеем $\iint\limits_{S_3}\left(f, \overline{dS}\right) = -\iint\limits_{D_3}(y+z)\big|_{y=0} dxdy = -\iint\limits_{D_3} ydxdy$, где D_3 — треугольник с вершинами (0,0,0), (6,0,0), (0,–3,0), являющийся проекцией поверхности S_3 на плоскость XOY. Вычисляя последний интеграл, получаем $-\iint\limits_{D_3} ydxdy =$

$$= -\int\limits_{-3}^{0} ydy \int\limits_{0}^{2y+6} dx = -\int\limits_{-3}^{0}\left(x\Big|_0^{2y+6}\right)ydy = -\int\limits_{-3}^{0}(2y+6)ydy = -\left(\frac{2y^3}{3}+\frac{6y^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = 9.$$

Уравнение поверхности S_4 в явной форме может быть записано в виде $z=\dfrac{6-x+2y}{3}$. Так как $z'_x=-\dfrac{1}{3}$, $z'_y=\dfrac{2}{3}$, то вектор $\left(-z'_x,-z'_y,1\right)$ нормали к поверхности S_4 равен $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},1\right)$ и параллелен вектору $(1,-2,3)$, задающему нужную нам сторону поверхности.

Вычисляя интеграл $\iint\limits_{S_4}\left(f,\overline{dS}\right)$ проектированием на плоскость XOY, получаем $\iint\limits_{S_4}\left(f,\overline{dS}\right)=\iint\limits_{D_3}\left(\dfrac{1}{3}(x+y)-\dfrac{2}{3}\left(x\dfrac{6-x+2y}{3}+y\right)+y+\dfrac{6-x+2y}{3}\right)dxdy=$

$$=\iint\limits_{D_3}\left(-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{9}xy+2\right)dxdy=\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{0}^{2y+6}\left(-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{9}xy+2\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{0}\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}xy+\frac{2}{27}x^3-\frac{2}{9}x^2y+2x\right)\Bigg|_0^{2y+6}dy=$$

$$=\int\limits_{-3}^{0}\left(-\frac{2}{3}(2y+6)^2+\frac{4}{3}(2y+6)y+\frac{2}{27}(2y+6)^3-\frac{2}{9}(2y+6)^2y+2(2y+6)\right)dy=$$

$$=\left(-\frac{1}{9}(2y+6)^3+\frac{8}{9}\frac{y^3}{3}+4y^2+\frac{1}{108}(2y+6)^4-\frac{2}{9}y^4-\frac{16}{9}y^3-4y^2+\frac{(2y+6)^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=0.$$

Таким образом, $\iint\limits_{S}\left(f,\overline{dS}\right)=\iint\limits_{S_1}\left(f,\overline{dS}\right)+\iint\limits_{S_2}\left(f,\overline{dS}\right)+\iint\limits_{S_3}\left(f,\overline{dS}\right)+\iint\limits_{S_4}\left(f,\overline{dS}\right)=$ $=3+6+9+0=18$.

4.26. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(x,x+y,y+z)^T$ через половину сферы $y=-\sqrt{R^2-x^2-z^2}$ в сторону внешней нормали.

Параметрическое уравнение данной половины сферы можно написать в виде $x=R\cos\varphi\sin\theta$, $y=R\cos\varphi\sin\theta$, $z=R\cos\theta$, где $\pi\le\varphi\le2\pi$, $0\le\theta\le\pi$, или, что то же самое, в векторной форме $\mathbf{r}=\left(R\cos\varphi\sin\theta\right)\mathbf{i}+\left(R\sin\varphi\sin\theta\right)\mathbf{j}+$ $+\left(R\cos\theta\right)\mathbf{k}$. Тогда

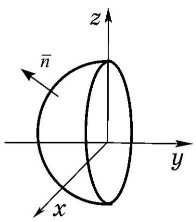
$$r'_\varphi=\left(-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,0\right)^T,$$

$$r'_\theta=\left(R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\theta\right)^T.$$

Вычисляя векторное произведение $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]$ этих векторов, получаем

$$\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix}$$

или, находя определитель, имеем $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right] = \left(-R^2\sin^2\theta\cos\varphi\right)\mathbf{i} - \left(R^2\sin^2\theta\sin\varphi\right)\mathbf{j} - \left(R^2\cos\theta\sin\theta\right)\mathbf{k}$.



Этот вектор образует острый угол с осью OY, так как скалярное произведение $\left(\left[r'_\varphi, r'_\theta\right], \mathbf{j}\right) = -R^2\sin^2\theta\sin\varphi \geq 0$ при $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, следовательно, он направлен внутрь сферы. Поэтому в качестве вектора нормали берем противоположный ему вектор $-\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]$. Подставляя выражения x, y, z в функцию f и вычисляя скалярное произведение $\left(f, -\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right)$, получаем $\left(f, -\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right) = R^3\left((1+0,5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\right)$.

Поэтому поток вектора через поверхность равен $\iint\limits_S \left(f, \overline{dS}\right) =$

$$= \int\limits_\pi^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi R^3\left((1+0,5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta = 2\pi R^3.$$

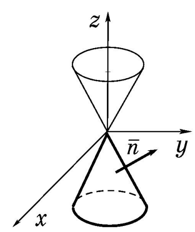
4.27. Вычислить поток вектора $f(x,y,z) = (y-x,\ 2y = z,\ 2x+y)^T$ через боковую поверхность конуса $z = -\sqrt{x^2+y^2}$, $z \geq -4$ в сторону внешней нормали.

Вспомним, что в сферической системе координат $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, где ρ — длина радиус-вектора точки; φ — угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX; θ — угол между радиус-вектором точки и осью OZ, координатной поверхностью при фиксированном $\theta = \theta_0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in (0, \infty)$ является половина конуса, лежащая в полупространстве $z \geq 0$, когда $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, и в полупространстве $z \leq 0$, когда $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. При этом образующая конуса [1,2] образует угол θ_0 с осью OZ. Если точка принадлежит заданной в условии части конуса, то угол $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$, угол φ меняется в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а длина ρ радиус-вектора точки меняется в пределах $0 < \rho \leq 4\sqrt{2}$.

Поэтому параметрическое уравнение данной части конуса можно записать в виде $x = \rho\cos\varphi\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}}$, $y = \rho\sin\varphi\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2}}$, $z = \rho\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\rho}{\sqrt{2}}$ или, что то же самое, в векторной форме $\mathbf{r} = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 4\sqrt{2}$. Тогда $r'_\rho = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $r'_\varphi = -\frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ и, вычисляя векторное произведение этих векторов, имеем

$$\left[r'_\rho,\ r'_\varphi\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\rho\cos\varphi}{2}\mathbf{i} + \frac{\rho\sin\varphi}{2}\mathbf{j} + \frac{\rho}{2}\mathbf{k}.$$

Этот вектор образует с осью OZ острый угол, так как скалярное произведение $\left(\left[r'_\rho, r'_\varphi\right], \mathbf{k}\right) = \frac{\rho}{2} > 0$, и, следовательно, является внешней нормалью нужной нам половины конуса (внешняя нормаль к половине конуса, лежащей в полупространстве $z \ge 0$, образует с осью OZ тупой угол, а внешняя нормаль к половине конуса, лежащей в полупространстве $z \le 0$, образует с осью OZ острый угол). Подставляя выражения x, y, z в функцию f и вычисляя скалярное произведение $\left(f, \left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right)$, получаем $\left(f, \left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right) =$



$= \frac{\rho^2}{2\sqrt{2}}\left(0{,}5\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + 2\sin 2\varphi\right)$. Поэтому поток вектора через поверхность равен

$$\iint_S \left(f, \overline{dS}\right) = \int_0^{4\sqrt{2}} \frac{\rho^2}{2\sqrt{2}}\,d\rho \int_0^{2\pi} \left(0{,}5\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + 2\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{64}{3}\pi.$$

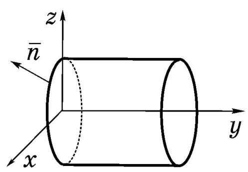
4.28. Вычислить поток вектора $f(x, y, z) = (yz, x + y, x + z)^T$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + z^2 = 9$, $0 \le y \le 4$ в сторону внешней нормали.

Одно из параметрических уравнений данного цилиндра можно записать в виде $x = 3\sin\varphi$, $y = y$, $z = 3\cos\varphi$ или, что то же самое, в векторной форме $\mathbf{r}(y, \varphi) = (3\sin\varphi, y, 3\cos\varphi)^T$, где φ — угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOZ и осью OZ, меняющийся в пределах

$0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le y \le 4$. Тогда $r'_\varphi = (3\cos\varphi, 0, -3\sin\varphi)^T$, $r'_y = (0,1,0)^T$ [3,4] и, вычисляя векторное произведение этих векторов, имеем

$$\left[r'_\varphi, r'_y\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3\cos\varphi & 0 & -3\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3\sin\varphi)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (3\cos\varphi)\mathbf{k}.$$

Этот вектор является внешней нормалью цилиндра, так как скалярное произведение $\left(\left[r'_\varphi, r'_y\right], \mathbf{i}\right) = 3\sin\varphi$ при $0 < \varphi < \pi$ больше нуля и поэтому



составляет, как и внешняя нормаль цилиндра, острый угол с осью OX, а при $\pi < \varphi < 2\pi$ меньше нуля и поэтому составляет, как и внешняя нормаль цилиндра, тупой угол с осью OX. Подставляя выражения x, y, z в функцию f и вычисляя скалярное произведение $\left(f, \left[r'_\varphi, r'_y\right]\right)$, получаем $\left(f, \left[r'_\varphi, r'_y\right]\right) = 9\left(0,5(y+1)\sin 2\varphi + 0,5 + 0,5\cos 2\varphi\right)$. Поэтому поток вектора через поверхность равен

$$\iint_S \left(f, \overline{dS}\right) = \int_0^4 dy \int_0^{2\pi} \left(0,5(y+1)\sin 2\varphi + 0,5 + 0,5\cos 2\varphi\right) = 36\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.29. Вычислить $\int_\gamma 3y^2dx + 4xdy$:

а) вдоль кривой $y^2 = x$ от точки A(0,0) до точки B(4,2);

б) вдоль кривой $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ в сторону увеличения параметра;

в) вдоль отрезка прямой, соединяющего точки A(1,1), B(3,–2) в направлении от точки A к точке B.

4.30. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x,y,z) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

а) вдоль кривой $x = 3\cos t$, $y = 5\sin t$, $z = t^2$, $0 \le t \le \pi$ в сторону увеличения параметра;

б) вдоль отрезка прямой, соединяющего точки A(2,1,–1), B(3,4,2) в направлении от точки A к точке B.

4.31. Вычислить $\int_\gamma (2x - y)dx + (x + 3y)dy + (x - z)dz$ вдоль эллипса, образованного пересечением эллипсоида $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1$ с плоскостью

$x-y=0$ в порядке следования точек $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5},0\right)$, $(0,0,5)$, $\left(-\frac{12}{5},-\frac{12}{5},0\right)$, $(0,0,-5)$, $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5},0\right)$.

4.32. Вычислить $\int\limits_{\gamma}(3x+y)\,dx+(x-2z)\,dy-(2x-3y)\,dz$ вдоль эллипса, образованного пересечением эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ с плоскостью $y=d$, $0<d<3$, двигаясь против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $(0,3,0)$.

4.33. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(3x+4y,\ 2y+z,\ x+z)^T$ через часть поверхности $3x-2y+4z=18$, заключенную между координатными плоскостями в сторону нормали $(3,-2,4)$.

4.34. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=\left(x^2+2y,\ 2xy-z,\ y-z\right)^T$ через внешнюю сторону пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью $2x-3y+z=6$.

4.35. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(x+5y,\ x-3y,\ 3z)^T$:

а) через половину сферы $x=-\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ в сторону внешней нормали;

б) через половину сферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ в сторону внешней нормали;

в) через поверхность тора $x=(3+2\cos\theta)\cos\varphi$, $y=(3+2\cos\theta)\sin\varphi$, $z=2\sin\theta$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi<2\pi$ в сторону внешней нормали.

4.36. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(xy,x+y,\ y+z)^T$ через боковую поверхность конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 4$ в сторону внешней нормали.

4.37. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=(x-y,xy,\ z)^T$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2=4$, $0\le z\le 3$ в сторону внешней нормали.

4.4. Элементы теории поля

Предварительно рекомендуется прочитать подразд. 4.5 из [5].

Говорят, что в области $G\subset R^3$ $(D\subset R^2)$ задано векторное поле, если задана вектор-функция $f: G\subset R^3\to R^3$ $(f: D\subset R^2\to R^2)$, то есть функция вида

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{pmatrix}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k},$$

$$\left(f(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}\right)$$

с областью определения $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$. Аналогично говорят, что в области $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$ задано скалярное поле, если задана скалярнозначная функция $f: G \subset R^3 \to R$ $(f: D \subset R^2 \to R)$ с областью определения $G \subset R^3$ $(D \subset R^2)$.

Если областью определения векторного поля является множество точек на плоскости, то поле называют плоским. Векторное поле можно интерпретировать как множество точек, к каждой из которых присоединен вектор.

Вектор $\operatorname{grad} U = (U')^T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)^T$ называется градиентом скалярной функции (скалярного поля).

Скаляр $\frac{\partial U}{\partial \bar{a}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)$ называется производной по направлению вектора $\bar{a}$ от скалярной функции векторного аргумента.

Более подробно о градиенте и производной по направлению можно прочитать в [3,4].

Векторное поле (вектор-функцию) назовем потенциальным, если существует скалярная функция (скалярное поле) $U(x,y,z)$ такая, что $\operatorname{grad} U = (U')^T = f(x,y,z) = (P,Q,R)^T$. Функцию U назовем при этом потенциалом поля f.

Заметим, что если U — потенциал поля f, то $U + C$ тоже потенциал этого поля.

В [5] показано, что векторное поле $f(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$ является потенциальным в области $\Omega \subset R^3$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

1) криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L, полностью лежащему в Ω, равен нулю $\left(\int_L (f, \overline{dl}) = 0 \text{ для } \forall L \subset \Omega\right)$ или, что то же самое, циркуляция поля по любому замкнутому пути, полностью лежащему в Ω, равна нулю;

2) если A_1, A_2 — любые две точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ — две произвольные кривые, их соединяющие, то $\int_{L_1} (f, \overline{dl}) = \int_{L_2} (f, \overline{dl})$, то есть криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования.

Если поле потенциально и $U(x,y,z)$ — его потенциал, то

$$\int_L (f, \overline{dl}) = U(A_2) - U(A_1).$$

Это дает возможность восстановить потенциал, если известно, что поле потенциально.

Вектор

$$\operatorname{rot} f(x,y,z)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

называется ротором (вихрем) вектор-функции $f(x,y,z)$.

Если поле $f(x,y,z)=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)^T$ потенциально и существует непрерывная производная $f'(x,y,z)$ [3,4], то $\operatorname{rot} f=0$.

Если область Ω является односвязной и $\operatorname{rot} f=0$, то поле потенциально.

Для плоского поля $f(x,y)=\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ условие $\operatorname{rot} f=0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Поэтому верны следующие утверждения:

1) если плоское поле потенциально, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

2) если $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и область односвязная, то плоское поле f потенциально;

3) если область односвязная, то любой криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx+Qdy$ по произвольному контуру L не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$;

4) если область односвязная, то поле плоское потенциально тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

4.38. Для функции $u=e^{2x-y+3z}$ найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,4,-2)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{a}}$ в точке M_0 в направлении вектора $\bar{a}=(-2,\ 2,\ 1)^T$.

Вычисляя частные производные, имеем

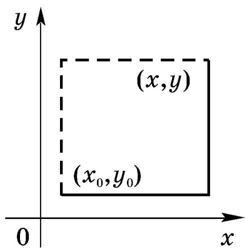
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{2x-y+3z}\cdot 2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^{2x-y+3z}\cdot(-1),\ \frac{\partial u}{\partial z}=e^{2x-y+3z}\cdot 3.$$

Поэтому $\operatorname{grad} u(x,y,z)=\left(2e^{2x-y+3z},\ -e^{2x-y+3z},\ 3e^{2x-y+3z}\right)^T$.

Тогда $\operatorname{grad} u(1,4,-2) = \left(2e^{-8}, -e^{-8}, 3e^{-8}\right)^T$. Далее, длина вектора $\bar{a}$ равна $|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = 3$. Следовательно, $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)^T$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{a}}(1,4,-2) = \left(\operatorname{grad} u(1,4,-2), \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\right) = -\frac{4}{3}e^{-8} - \frac{2}{3}e^{-8} + e^{-8} = -e^{-8}.$$

4.39. Доказать, что поле $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+1 \\ 2x^2y \end{pmatrix} = \left(2xy^2+1\right)\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$ потенциально и восстановить его потенциал.



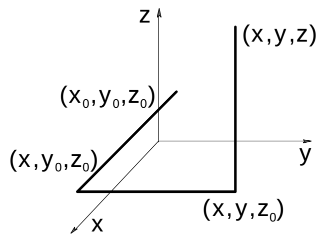
Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 4xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и поле потенциально во всей плоскости. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} Pdx + Qdy$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат (0,0). Конечную точку возьмем произвольную с координатами (x,y). Наиболее простыми путями интегрирования являются две возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображенного на рисунке (с учетом того, что $(x_0,y_0) = (0,0)$), $U(x,y) = \int\limits_{A_0}^{A} \left(f, \overline{dl}\right) =$

$$= \int_0^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy = \int_0^x (2x\cdot 0+1)\,dx + \int_0^y 2x^2y\,dy = x + x^2y^2.$$

Таким образом, $U(x,y) = x + x^2y^2$. Заметим, что функция $x + x^2y^2 + C$ также является потенциалом исходного поля.

4.40. Доказать, что поле $f(x,y,z) = \left(2xyz,\ x^2z,\ x^2y+2z\right)^T = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + \left(x^2y+2z\right)\mathbf{k} = (P,Q,R)^T$ потенциально и восстановить его потенциал.

Найдем $\operatorname{rot} f = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$. Так как $\dfrac{\partial R}{\partial y} = x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = x^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 2xy$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xz$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xz$, то $\operatorname{rot} f = 0$ и поле потенциально во всем пространстве. Следовательно, криволинейный интеграл



$\int\limits_{A_0}^{A} Pdx + Qdy + Rdz$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат (0,0,0). Конечную точку возьмем произвольную с координатами (x,y,z). Наиболее простыми путями интегрирования являются возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображенного на рисунке (с учетом того, что $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$), $U(x,y,z) =$

$$= \int\limits_{A_0}^{A} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{0}^{x} P(x,0,0)\,dx + \int\limits_{0}^{y} Q(x,y,0)\,dy + \int\limits_{0}^{z} R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{0}^{x} (2x\cdot 0\cdot 0)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{y} \left(x^2 z\cdot 0\right)dy + \int\limits_{0}^{z} \left(x^2 y + 2z\right)dz = x^2yz + z^2 .$$

Таким образом, $U(x,y,z)=x^2yz+z^2$. Заметим, что любой другой потенциал исходного поля равен x^2yz+z^2+C.

Назовем величину $\operatorname{div} F(x,y,z) = \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ дивергенцией векторного поля F или функцией источника.

Для векторных полей имеют место следующие теоремы.

Теорема (Стокса). Пусть L — замкнутый кусочно-гладкий контур в R^3, S — любая кусочно-гладкая поверхность, натянутая на L. Согласуем ориентации L и S так, чтобы если смотреть из конца вектора нормали к S, определяющего сторону, то обход L совершался бы против часовой стрелки. Тогда если f — дифференцируемая функция, то циркуляция вектора f по контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot} f$ через поверхность S, натянутую на этот контур, то есть

$$\int\limits_{L} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint\limits_{S} \left(\operatorname{rot} f, \overline{dS}\right).$$

Эта формула называется формулой Стокса.

В случае плоской области теорема Стокса формулируется следующим образом.

Теорема (Грина). Пусть D — плоская область с кусочно-гладкой границей ∂D, и ∂D ориентирована так, что обход по ней в положительном направлении совершается против часовой стрелки. Тогда, если $f(x,y)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{\partial D} \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\operatorname{rot} f, \overline{dxdy}\right) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy .$$

Эта формула называется формулой Грина.

Теорема. Пусть G — область в R^3 и ∂G — кусочно-гладкая граница G, ориентированная в сторону внешней нормали. Тогда если $f(x,y,z)$ — дифференцируемая функция, то поток вектора через границу области G равен интегралу по области G от $\operatorname{div} f$, то есть

$$\iint\limits_{\partial G} \left(f, \overline{dS}\right) = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} f(x,y,z)\,dxdydz .$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского.

Перечисленные теоремы позволяют упростить вычисление криволинейных и поверхностных интегралов в случае замкнутых кривых и поверхностей.

4.41. Вычислить циркуляцию поля $f(x,y) = \left(x-y^2, xy\right)^T = \left(x-y^2\right)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ вдоль замкнутой кривой, пробегаемой против часовой стрелки и состоящей из отрезка оси OX и дуги $y=\sqrt{4x-x^2}$.

Циркуляция поля равна криволинейному интегралу второго рода по замкнутому контуру. Так как кривая плоская и замкнутая, то для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой Грина $\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, где D — область, ограниченная исходным контуром. По формуле Грина имеем $\int\limits_L \left(x-y^2\right)dx + (xy)\,dy = \iint\limits_D 3ydxdy$.

В данном случае область D можно задать неравенствами $x^2+y^2 \le 4x$, $x \ge 0$. Расставляя пределы интегрирования и вычисляя, получаем

$$\iint\limits_D 3ydxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} 3ydy = 3\int\limits_0^4 \frac{4x-x^2}{2}\,dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 16 .$$

4.42. Вычислить циркуляцию поля $f(x,y,z) = \left(xz+y^2\right)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \left(xy+z^2\right)\mathbf{k}$ вдоль контура треугольника с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,4)$, пробегаемого в порядке следования точек $ABCA$.

Так как кривая пространственная и замкнутая, то воспользуемся формулой Стокса. В роли поверхности, натянутой на контур, удобно взять часть плоскости, в которой лежит треугольник ABC, ограниченную координатными плоскостями. Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = x$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = x$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, то, вычисляя $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$, получаем $\operatorname{rot} f = x\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$, и по формуле Стокса

$$\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_L \left(xz + y^2\right)dx + (xy)dy + \left(xy + z^2\right)dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\text{rot } f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_S x dydz + (x - y)dxdz + (-y)dxdy .$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник ABC, имеет вид $2x + 4y + z - 4 = 0$, или, переписывая в явном виде, $z = 4 - 2x - 4y$. Плоскость однозначно проектируется на все три координатные плоскости, и поверхностный интеграл может быть вычислен проектированием на любую из них. Вычислим его проектированием на плоскость XOY.

Так как $z'_x = -2$, $z'_y = -4$, то $\iint\limits_S x\, dydz + (x - y)\, dxdz + (-y)\, dxdy =$

$= \iint\limits_D (x \cdot 2 + (x - y) \cdot 4 + (-y))\, dxdy = \iint\limits_D (6x - 5y)dxdy$, где D — проекция нашей поверхности на плоскость XOY. Так как D есть треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 2$, то, расставляя пределы интегрирования и вычисляя, получаем $\iint\limits_D (6x - 5y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-2y} (6x - 5y)dx =$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x^2 - 5xy\right)\Big|_0^{2-2y} dy = \int\limits_0^1 \left(3\,(2 - 2y)^2 - 5\,(2 - 2y)y\right)dy = \frac{7}{3}.$$

4.43. Найти циркуляцию поля $f\,(x, y, z) = \left(x + y,\ xy,\ \left(-2x^2 + z\right)\right)^T =$ $= (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \left(-2x^2 + z\right)\mathbf{k}$ вдоль контура, образованного пересечением части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащей в первом октанте, с координатными плоскостями. Направление обхода — в порядке следования точек ABCA, где A(4,0,0), B(0,4,0), C(0,0,4).

Так как кривая пространственная и замкнутая, то воспользуемся формулой Стокса. В роли поверхности, натянутой на контур, удобно взять часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащую в первом октанте и ограниченную координатными плоскостями. Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = -4x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, то, вычисляя $\text{rot } f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$,

получаем $\text{rot } f = 4x\mathbf{j} + (y - 1)\mathbf{k}$, и по формуле Стокса

$$\int\limits_L \left(f, \overline{dl}\right) = \int\limits_L (x + y)\, dx + xydy + \left(-2x^2 + z\right)dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\text{rot } f, \overline{dS}\right) = \iint\limits_S 4xdxdz + (y - 1)\, dxdy .$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся параметрическим уравнением сферы (см. задачи 4.8 и 4.26) $x = 4\cos\varphi\sin\theta$,

$y=4\sin\varphi\sin\theta$, $z=4\cos\theta$, где $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ или, что то же самое, в векторной форме $\mathbf{r}=4\cos\varphi\sin\theta\mathbf{i}+4\sin\varphi\sin\theta\mathbf{j}+4\cos\theta\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_\varphi=(-4\sin\varphi\sin\theta,\ 4\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,$$

$$r'_\theta=(4\cos\varphi\cos\theta,\ 4\sin\varphi\cos\theta,\ -4\sin\theta)^T.$$

Поэтому $\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]=-16\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i}-16\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j}-16\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}$.

Этот вектор направлен внутрь сферы. Поэтому в качестве вектора нормали берем вектор $-\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]$. Подставляя выражения x, y, z в функцию $\operatorname{rot} f$ и вычисляя скалярное произведение $\left(\operatorname{rot} f, -\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right)$, получаем $\left(\operatorname{rot} f, -\left[r'_\varphi, r'_\theta\right]\right)=32\sin^3\theta\sin 2\varphi+64\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi-8\sin 2\theta$. Поэтому

$$\iint\limits_S\left(f,\overline{dS}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\pi/2}(32\sin^3\theta\sin 2\varphi+64\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi+8\sin 2\theta)\,d\varphi=-4\pi+\frac{128}{3}.$$

4.44. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=\left(2x+3z^3, -4x+y, 2x-y+z^2\right)^T$ через внешнюю сторону пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=2$.

Так как поле дифференцируемо, а поверхность замкнута, то поток можно вычислить непосредственно (см. задачу 4.25) или воспользоваться теоремой Гаусса-Остроградского. По теореме Гаусса-Остроградского поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности может быть вычислен по формуле $\iint\limits_S\left(f,\overline{dS}\right)=\iiint\limits_G \operatorname{div} f(x,y,z)\,dxdydz$, где S — внешняя сторона пирамиды; G — область, заключенная внутри пирамиды. Вычисляя дивергенцию, получаем $\operatorname{div} f(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2+1+2z=3+2z$.

Подставляя в формулу Гаусса-Остроградского, имеем

$$\iint\limits_S\left(f,\overline{dS}\right)=\iiint\limits_G(3+2z)\,dxdydz.$$

Расставляя пределы интегрирования в интеграле справа, получаем

$$\iiint\limits_G(3+2z)\,dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}dy\int\limits_0^{2-x-y}(3+2z)\,dz.$$

Вычисляя полученный интеграл, окончательно имеем $\iint\limits_S\left(f,\overline{dS}\right)=2$.

4.45. Найти поток векторного поля $f(x,y,z)=xz\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+yz\mathbf{k}=(xz,xy,yz)^T$ через внешнюю сторону поверхности, ограниченной конусом $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=-3$.

По теореме Гаусса-Остроградского поток векторного поля через поверхность равен $\iint\limits_{\partial G}\left(f,\overline{dS}\right)=\iint\limits_{\partial G} xzdydz+xydxdz+yzdxdy=\iiint\limits_{G} \operatorname{div} f(x,y,z)\,dxdydz=$
$=\iiint\limits_{G}(x+y+z)\,dxdydz$.

Переходя к цилиндрическим координатам, окончательно получаем $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{3}\rho d\rho\int\limits_{-3}^{-\rho}\left((\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)+z\right)dz=-\dfrac{81\pi}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.46. Для функции $u=3xy^2+x^2z-z^3$ найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,1,-3)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\bar{a}=(2,1,-2)$.

4.47. Доказать, что поле $f(x,y)=\left(2xy^3-2x,\ 3x^2y^2+1\right)^T=\left(2xy^3-2x\right)\mathbf{i}+$ $+\left(3x^2y^2+1\right)\mathbf{j}=(P,Q)^T$ потенциально и восстановить его потенциал.

4.48. Доказать, что поле $f(x,y)=\left(3x^2+y^2,\ 2xy-3y^2\right)^T=\left(3x^2+y^2\right)\mathbf{i}+$ $+\left(2xy-3y^2\right)\mathbf{j}=(P,Q)^T$ потенциально и восстановить его потенциал.

4.49. Доказать, что поле $f(x,y,z)=\left(y^2z^4-2xz,\ 2xyz^4+3y^2,\ 4xy^2z^3-x^2\right)^T$ потенциально и восстановить его потенциал.

4.50. Вычислить циркуляцию поля $f(x,y)=(x+y,\ 2x+y)^T=(x+y)\mathbf{i}+$ $+(2x+y)\mathbf{j}$ вдоль замкнутой кривой, состоящей из отрезка оси OY и дуги $x=\sqrt{4-y^2}$ и пробегаемой против часовой стрелки.

4.51. Вычислить циркуляцию поля $f(x,y,z)=(x+3y)\mathbf{i}+(2x-2)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ вдоль контура треугольника с вершинами в точках $A(3,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,-8)$, пробегаемого в порядке следования точек $ABCA$.

4.52. Найти циркуляцию поля $f(x,y,z)=\left(x+2y,\ xy,\ (-2x+z)\right)^T=$ $=(x+2y)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+(-2x+z)\mathbf{k}$ вдоль контура, образованного пересечением части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, лежащей в множестве $x\le 0,\ y\le 0,\ z\ge 0$, с координатными плоскостями, пробегаемого в порядке следования точек $(-4,0,0)$, $(0,-4,0)$, $(0,0,4)$, $(-4,0,0)$.

4.53. Найти поток векторного поля $f(x,y,z)=xy\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(y+z)\mathbf{k}=$ $=(xy,\ x+y,\ y+z)^T$ через внешнюю сторону поверхности, ограниченной конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=16$.

4.54. Вычислить поток вектора $f(x,y,z)=\left(x^2+2yz^2,\ 2xy+x^2z,\ xy-z\right)^T$ через внешнюю сторону пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью $2x-3y+z=6$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Уравнения первого порядка

5.1.1. Общие сведения

Предварительно рекомендуется изучить подразд. 5.1 учебного пособия [5].

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) называется уравнением, разрешенным относительно производной, если его можно записать в виде

$$y' = f(x, y) \tag{5.2}$$

или, что то же самое, в так называемой дифференциальной форме

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{5.3}$$

Функции $f(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ предполагаются заданными на некотором множестве D плоскости R^2.

Определение. Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке или интервале (a,b), называется решением дифференциального уравнения в области D, если при подстановке $\varphi(x)$ в уравнение она обращает его в тождество в этой области.

Решить дифференциальное уравнение означает описать всю совокупность его решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения, как и любого другого уравнения, состоит в преобразовании его к такому виду, из которого это решение легко находится. При этом два уравнения $F_1(x, y, y') = 0$ и $F_2(x, y, y') = 0$ назовем эквивалентными в области D, если решения одного из них являются решениями другого. Идеальным было бы при нахождении решения осуществлять переход к эквивалентным уравнениям. Это не всегда удается. Поэтому в процессе преобразований мы должны следить, чтобы не терять решений и не приобретать новых.

Большинство методов решений дифференциальных уравнений заключается в сведении их к уравнению вида

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy, \tag{5.4}$$

которое очень просто решается. Действительно, если $y(x)$ есть решение этого уравнения, то в силу инвариантности формы первого дифференциала можем записать $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy$. Равенство подразумевает, что множество всех первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_1(x)$ — какая-нибудь первообразная левой части, а $\Phi_2(y)$ — правой части, то последнее соотношение можно переписать в виде равенства $\Phi_1(x) = \Phi_2(y) + C$, разрешая которое относительно y, получаем всю совокупность решений уравнения (5.4).

Множество решений дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ есть некоторое семейство функций, зависящее от константы. Для уравнения первого порядка требования, при выполнении которых можно выделить конкретное решение этого уравнения, формулируются следующим образом.

Найти решения дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$y(x_0) = y_0 . \tag{5.5}$$

Сформулированные условия называются условиями Коши, а задача о выделении решения, удовлетворяющего условиям Коши, — **задачей Коши**.

Условия разрешимости задачи Коши приведены в теореме существования и единственности [5]. Приведем эту теорему с легче проверяемыми, но более жесткими, чем в [5] условиями на функцию $f(x,y)$.

Теорема (существования и единственности). Пусть в уравнении (5.2) $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$, заданная в области D на плоскости, непрерывна по совокупности переменных x, y и имеет непрерывную производную по y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существуют интервал $(x_0 - \lambda,\ x_0 + \lambda)$ и функция $y = \varphi(x)$, заданная на этом интервале так, что $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (5.2), удовлетворяющее условию (5.5). Это решение единственно в том смысле, что если $y = \phi(x)$ есть решение уравнения (5.2), определенное на интервале (α, β), включающем в себя точку x_0, и удовлетворяющее условию (5.5), то функции $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают там, где они обе определены.

При выполнении этих условий через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одно решение уравнения (5.1). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через нее может проходить больше чем одно решение (нарушается единственность) либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

Определение. Семейство $y = \varphi(x, C)$ решений дифференциального уравнения (5.3) назовем его общим решением, если для любого набора начальных данных $(x_0, y_0) \in D$ найдется константа $\bar{C}$, на которой этот набор реализуется, то есть такая, что для решения $y = \varphi(x, \bar{C})$ выполнены начальные условия $y_0 = \varphi(x_0, \bar{C})$.

5.1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f_1(x)\, f_2(y) \tag{5.6}$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \tag{5.7}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными.

При $f_2(y) \neq 0$ для $\forall\, y \in [c,d]$, разделив обе части (5.6) на $f_2(y)$, получаем уравнение вида (5.4) $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$, решать которое мы умеем.

Аналогично для уравнения (5.7), если $M_2(y) \neq 0$, $N_1(x) \neq 0$ $\forall\, x \in [a,b]$, $\forall\, y \in [c,d]$, получаем уравнение вида (5.4) $\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = -\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}dx$.

Заметим, что если $f_2(y_0) = 0$ или $M_2(y_0) = 0$, $N_1(x_0) = 0$, то мы должны проверить, являются ли функции $y = y_0$, $x = x_0$ решениями исходного дифференциального уравнения, чтобы не потерять их в процессе нахождения решения.

Уравнение $y' = f(ax + by + c)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными либо заменой $z = ax + by + c$, либо заменой $z = ax + by$.

5.1. Решить уравнение $y' = e^{2x+3y}$.

Имеем $y' = e^{2x}e^{3y}$, откуда $e^{-3y}dy = e^{2x}dx$ или, интегрируя обе части, $\dfrac{1}{3}e^{-3y} = -\dfrac{1}{2}e^{2x} + C$ и, наконец, $y = -\dfrac{1}{3}\ln\left(-\dfrac{3}{2}e^{2x} + C\right)$.

5.2. Решить уравнение $xydx - (x^2 - 9)dy = 0$.

В предположении, что $y(x^2 - 9) \neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x\,dx}{x^2 - 9}$ или, интегрируя, $\ln|y| = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2 - 9\right| + \ln|C|$, отсюда $y = C\sqrt{x^2 - 9}$. Решение $y = 0$ получается при $C = 0$, а решения $x = \pm 9$ не содержатся в нем. Таким образом, решение уравнения $y = C\sqrt{x^2 - 9}$, $x = \pm\, 9$.

5.3. Решить уравнение $(e^{3x} + 10)dy = ye^{3x}dx$.

В предположении, что $y \neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{e^{3x}\,dx}{e^{3x} + 10}$ или, интегрируя, $\ln|y| = \dfrac{1}{3}\ln\left(e^{3x} + 10\right) + \ln|C|$, отсюда $y = C\sqrt[3]{e^{3x} + 10}$. Решение $y = 0$ получается при $C = 0$.

5.4. Решить уравнение $y' = (9x+4y-5)^2$.

Делаем замену $z=9x+4y-5$. Тогда $z'=9+4y'$ и, подставляя в исходное уравнение, получаем $z'=4z^2+9$ или, разделяя переменные, $\dfrac{dz}{4z^2+9}=dx$.

Интегрируя последнее, имеем $\operatorname{arctg}\dfrac{2z}{3}=6x+C$ или $z=\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}(6x+C)$. Делая обратную замену, получаем $9x+4y-5=\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}(6x+C)$ или, разрешая относительно y, $y=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}(6x+C)-9x+5\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

5.5. $x^3\left(y^2-1\right)dx+\left(1+x^4\right)dy=0$. **5.6.** $\left(x^2+2\right)y'=x\operatorname{tg}y$.

5.7. $(x+5)dy-(y+1)xdx=0$. **5.8.** $(x+3)ydy+(y+2)dx=0$.

5.9. $\left(x^3-9\right)\sin y\,y'=x^2\cos y$. **5.10.** $x^2\left(1+y^2\right)dx=y\left(2+x^3\right)dy$.

5.11. $\left(e^{2x}+5\right)y^2dy-\left(1+y^3\right)e^{2x}dx=0$. **5.12.** $y'=\dfrac{2y+5}{2x-1}$.

5.13. $x^3y'+y^2=0$. **5.14.** $(3+\ln y)yxdx-\left(x^2+2\right)dy=0$.

5.15. $y'\operatorname{tg}x=y-2$. **5.16.** $3x^2\sqrt{9-y^2}=y'\left(1+x^6\right)$.

5.17. $3y'+2=\sqrt{2x+3y-4}$. **5.18.** $3y'+5=(5x+3y+7)^3$.

5.1.3. Однородные уравнения

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородной степени k, если для нее выполнено соотношение $F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^kF(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ — однородная функция нулевой степени, то есть $f(tx,ty)=f(x,y)$.

В этом случае дифференциальное уравнение удаётся записать в виде $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Отметим, что уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ является однородным тогда и только тогда, когда функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ однородные функции одной и той же степени.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = xu$ или, что то же самое, $u = \dfrac{y}{x}$, где u — новая искомая функция.

Тогда $y' = u + u'x$, или, что то же самое, $dy = udx + xdu$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ приводятся к однородным переносом начала координат в точку пересечения прямых $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Если этот определитель равен нулю, то замена $a_1 x + b_1 y = z$ превращает исходное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

5.19. Решить уравнение $y' = \dfrac{4y - 3x}{y}$. Функция $\dfrac{4y - 3x}{y}$ — однородная нулевой степени, так как $\dfrac{4ty - 3tx}{ty} = \dfrac{4y - 3x}{y}$. Поэтому данное уравнение однородное. Делаем замену $y = xu$. Тогда $y' = u + u'x$ и, подставляя y и y' в уравнение, получаем $u + u'x = \dfrac{4ux - 3x}{ux} = \dfrac{4u - 3}{u}$, или, что то же самое,

$$u'x = \frac{4u - 3}{u} - u = -\frac{u^2 - 4u + 3}{u}.$$

Разделяя переменные, имеем $-\dfrac{udu}{u^2 - 4u + 3} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем $-\displaystyle\int \frac{udu}{u^2 - 4u + 3} = \int \frac{dx}{x}$. Вычислим вначале интеграл в левой части. Корни знаменателя подынтегральной функции 1 и 3, поэтому она может быть разложена на простейшие дроби следующим образом: $\dfrac{u}{u^2 - 4u + 3} = \dfrac{A}{u - 3} + \dfrac{B}{u - 1} = \dfrac{Au - A + Bu - 3B}{(u - 3)(u - 1)} = \dfrac{(A + B)u - A - 3B}{u^2 - 4u + 3}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, получаем систему уравнений $\begin{cases} A + B = 1, \\ A + 3B = 0 \end{cases}$ для нахождения A и B. Решая эту систему, имеем $B = -\dfrac{1}{2}$, $A = \dfrac{3}{2}$. Таким образом, $\displaystyle\int \frac{udu}{u^2 - 4u + 3} = \int \frac{3/2}{u - 3} du - \int \frac{1/2}{u - 1} du =$

$=\frac{3}{2}\ln|u-3|-\frac{1}{2}\ln|u-1|$. Поэтому $\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-3|=\ln|x|+\ln C$, откуда $\frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-3}\right)^3}=Cx$ или $\frac{\sqrt{(y/x)-1}}{\left(\sqrt{(y/x)-3}\right)^3}=Cx$. При делении на x мы ничего не потеряли, так как $x=0$ не является решением исходного уравнения. При делении на $u^2-4u+3=(u-1)(u-3)$ мы могли потерять решения, соответствующие значениям $u=1$ и $u=3$. Случай $u=1$ дает решение $y=x$, содержащееся в найденном решении при $C=0$, а случай $u=3$ дает решение $y=3x$, в найденном решении не содержащееся.

5.20. Решить уравнение $\left(y^2-xy\right)dx+x^2dy=0$.

Это однородное уравнение, так как y^2-xy и x^2 — однородные функции второй степени. Делаем замену $y=xu$, $dy=udx+xdu$. Подставляя в уравнение, имеем $\left(x^2u^2-x^2u\right)dx+x^2\left(udx+xdu\right)=0$.

Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на x^2, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u^2dx+xdu=0$.

Разделяя переменные, получаем $-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее соотношение, имеем $\frac{1}{u}=\ln x+C$. Делая обратную замену $u=\frac{y}{x}$, получаем $\frac{x}{y}=\ln x+C$. При сокращении на x^2 мы потеряли решение $x=0$, которое в найденное решение не входит. Кроме того, мы могли потерять решения при делении на u^2. Это дает решение $y=0$, также не входящее в найденное.

5.21. Решить уравнение $(2x-y+3)dx+(x+y+6)dy=0$.

Точка пересечения прямых $2x-y+3=0$, $x+y+6=0$ имеет координаты $x=-3$, $y=-3$. Поэтому делаем замену $x_1=x+3$, $y_1=y+3$ или, выражая старые координаты через новые, $x=x_1-3$, $y=y_1-3$. Тогда $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, $2x-y+3=2x_1-y_1$, $x+y+6=x_1+y_1$.

В новых координатах уравнение переписывается в виде однородного уравнения $(2x_1-y_1)dx_1+(x_1+y_1)dy_1=0$. Делаем замену $y_1=x_1u$, $dy_1=udx_1+x_1du$. Подставляя в уравнение, имеем $(2x_1-ux_1)dx_1+(x_1+ux_1)\times$ $\times(udx_1+x_1du)=0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем уравнение с разделяющимися переменными $x_1\left(u^2+2\right)dx_1+x_1^2(u+1)du=0$.

Разделяя переменные, получаем $-\frac{(u+1)du}{u^2+2}=\frac{dx_1}{x_1}$. Интегрируя последнее соотношение, имеем $\ln|x_1| = -\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + \ln|C|$. Делая обратную замену $u = \frac{y_1}{x_1}$, получаем $\ln|x_1| = -\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 + 2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ $\times \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1\sqrt{2}} + \ln|C|$. И наконец, возвращаясь к переменным x, y, имеем $\ln\left((y+3)^2 + 2(x+3)^2\right) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y+3}{(x+3)\sqrt{2}} = C$. Так как $x = -3$ решением исходного уравнения не является, то при делении на x_1 мы ничего не потеряли.

Задачи для самостоятельного решения

5.22. $y^2 + x^2y' = 2xyy'$. **5.23.** $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$.

5.24. $\left(3x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$. **5.25.** $2y' = \frac{y^2 - 3x^2}{x^2}$.

5.26. $xy' - y = (2x+y)\left(\ln(2x+y) - \ln x\right)$. **5.27.** $xy' = y - 2x\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$.

5.28. $\left(y^2 - 3xy\right)dx = x^2dy$. **5.29.** $2y^2 + x^2y' + 2xyy' = 0$.

5.30. $(2x-3y+2)dx + (x+y+6)dy = 0$. **5.31.** $(2x+y+1)y' = 4x+2y+3$.

5.32. $3x - y + 3 = (2x-y-1)y'$.

5.1.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Уравнение первого порядка вида

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{5.8}$$

называется линейным дифференциальным уравнением. Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (5.8) называется линейным однородным, в противном случае — линейным неоднородным.

В общем виде линейное уравнение решено в [5].

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.8) находят **методом Лагранжа** или, что то же самое, **методом вариации произвольной постоянной**.

Алгоритм этого метода следующий:

1) ищем вначале общее решение соответствующего однородного уравнения $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$; оно записывается в виде $y(x) = Cy_1(x)$;

2) ищем решение исходного уравнения (5.8) в виде $y(x) = C(x)y_1(x)$; подставляя y и $y'(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x)$ в исходное уравнение, получаем равенство для нахождения $C'(x)$, а следовательно, и $C(x)$.

> Дифференциальное уравнение $y' + a_0(x)y = b(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Заменой $\dfrac{1}{y^{n-1}} = z$ уравнение Бернулли превращается в линейное уравнение.

5.33. Решить уравнение $y' - 3y = e^{2x}$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' - 3y = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dy}{y} = 3dx$, $\ln|y| = 3x + \ln|C|$, $y = Ce^{3x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{3x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = e^{-x}$, откуда $C(x) = -e^{-x} + C_1$, и $y(x) = C_1e^{3x} - e^{2x}$ — общее решение исходного уравнения.

5.34. Решить задачу Коши $y' - 3x^2y = 6x^2$, $y(0) = 3$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' - 3x^2y = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dy}{y} = 3x^2dx$, $\ln|y| = x^3 + \ln|C|$, $y = Ce^{x^3}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{x^3}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{x^3} + 3x^2C(x)e^{x^3}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 6x^2e^{-x^3}$, откуда $C(x) = -2e^{-x^3} + C_1$ и $y(x) = -2 + C_1e^{x^3}$ — общее решение исходного уравнения. Подставляя начальные данные, получаем $y(0) = -2 + C_1e^0 = 3$ и, следовательно, $C_1 = 5$. Поэтому искомое решение задачи Коши имеет вид $y(x) = -2 + 5e^{x^3}$.

5.35. Решить уравнение $xdy - 2ydx = 3x^5dx$.

Это линейное относительно y и y' уравнение, так как его можно переписать в виде $xy' - 2y = 3x^5$. Решая соответствующее последнему однородное уравнение $xy' - 2y = 0$, получаем последовательно $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x}$, $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$ и, наконец, $y = Cx^2$. Ищем теперь решение уравнения $xy' - 2y = 3x^5$ в виде $y = C(x)x^2$. Подставляя в него

y и $y' = C'(x)x^2 + 2C(x)x$, имеем $C'(x) = 3x^2$, откуда $C(x) = x^3 + C_1$. Подставляя полученное выражение $C(x)$ в $y(x)$, получаем общее решение $y(x) = \left(x^3 + C_1\right)x^2 = x^5 + C_1x^2$ уравнения $xy' - 2y = 3x^5$. При переходе от исходного уравнения к уравнению $xy' - 2y = 3x^5$ мы потеряли решение $x = 0$, которое в найденное не входит.

5.36. Решить уравнение $\left(4y^3 + x\right)dy = ydx$.

Вспоминая, что переменные x и y в дифференциальном уравнении равноправны, и переписывая его в виде $4y^3 + x = yx'$ или, что то же самое, в форме $yx' - x = 4y^3$, видим, что данное уравнение является линейным относительно x и x'. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $yx' - x = 0$. Решая его, получаем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, $\ln|x| = \ln|y| + \ln|C|$, $x = Cy$. Ищем теперь решение уравнения $yx' - x = 4y^3$ в виде $x = C(y)y$. Подставляя x и $x' = C'(y)y + C(y)$ в него, имеем $C'(y) = 4y$, откуда $C(y) = 2y^2 + C_1$, и $x(y) = 2y^3 + C_1y$ — общее решение уравнения $yx' - x = 4y^3$. При преобразовании исходного уравнения к виду $yx' - x = 4y^3$ мы потеряли решение $y = 0$, которое в найденное не входит.

5.37. Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}\sqrt{y}$.

Это уравнение Бернулли при $n = \dfrac{1}{2}$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{y}$, получаем $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} + 2x\sqrt{y} = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Делаем замену $z = \sqrt{y}$. Тогда $z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, и поэтому уравнение переписывается в виде $2z' + 2xz = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Решая это линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной, получаем $z(x) = (x + C_1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, откуда $\sqrt{y} = (x + C)_1\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$, или, что то же самое, $y = \left((x + C_1)e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^2$. При делении на $\sqrt{y}$ мы потеряли решение $y = 0$, которое в полученное решение не входит.

5.38. Найти общее решение уравнения $3\sqrt{y}y' - 4xy\sqrt{y} = 2x^3$.

Это уравнение получено из уравнения Бернулли $3y' - 4xy = 2x^3y^{-1/2}$ при $n = -\dfrac{1}{2}$. Делаем замену $z = y^{3/2}$. Тогда $z' = \dfrac{3}{2}\sqrt{y}y'$, и поэтому уравнение переписывается в виде $z' - 2xz = x^3$. Это линейное уравнение. Решаем вначале соответствующее однородное уравнение. Имеем $z' - 2xz = 0$,

$z = Ce^{x^2}$. Находим теперь решение уравнения $z' - 2xz = x^3$ в виде $z = C(x)e^{x^2}$. Подставляя в него z и z', получаем $C'(x) = x^3e^{-x^2}$, откуда $C(x) = \int x^3e^{-x^2}dx$. Интегрируя по частям с $U = x^2$, $dV = x\exp\left(x^2\right)dx$, имеем $C(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1$. Поэтому $z(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1e^{x^2}$, откуда $y^{3/2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1e^{x^2}$, или, что то же самое, $y^3 = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1e^{x^2}\right)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

5.39. $y' - 4y = 2e^{3x}$. **5.40.** $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = \cos x$.

5.41. $3x^2\left(x^3 + y\right)dx = dy$. **5.42.** $y' + 2y\sin 2x = \sin x\cos x$.

5.43. $\left(4x - y^4\right)y' = 2y$. **5.44.** $(3y + 1)dx = (5y + 3x)dy$.

5.45. $\left(xy' - \ln^2 x\right)\ln x = 3y$. **5.46.** $(x + 2)dy = \left(3y + 2(x + 2)^5\right)dx$.

5.47. $y^3y' - x^2y^4 = x^2$. **5.48.** $y' - 3x^2y = x^2y^4$.

5.49. $dy\left(x + x^3(y + 2)\right) = (y + 2)dx$. **5.50.** $y' - 6xy = 6x\sqrt[3]{y^2}$.

5.51. $2y' = y^3\left(x^2 - 1\right)\cos x - \frac{y}{x - 1}$. **5.52.** $\left(x^4 + e^{-2y}\right)y' = 4x^3$.

Решить задачу Коши.

5.53. $y' + 2xy = e^{x^2}y^2$, $y(0) = 1$. **5.54.** $\left(x + y^2\right)dy = y\,dx$, $y(0) = 2$.

5.55. $y' + 5y = 2e^{-3x}$, $y(0) = 2$. **5.56.** $\frac{3xy'}{4\sqrt[4]{y}} - 3\sqrt[4]{y^3} = 2x$, $y(1) = 0$.

5.1.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $u(x,y)$, дифференциал которой $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ совпадает с левой частью $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ этого уравнения.

В [5] показано, что уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах в области $D \subseteq R^2$ тогда и только тогда, когда поле $(M,N)^T$ потенциально в этой области или, что то же самое, криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L M(x,y)dx + N(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, полностью лежащего в области D.

Если существуют непрерывные в односвязной области $D \subseteq R^2$ производные $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Пусть $(x_0, y_0) \in D$ — фиксированная, $(x,y) \in D$ — произвольная точки, L — путь, лежащий в D и соединяющий точки (x_0, y_0), (x,y). Если уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах, то функция $u(x,y)$ (потенциал поля $(M,N)^T$), вычисляемая по формуле $u(x,y) = \int\limits_L M(x,y)dx + N(x,y)dy$, восстанавливает функцию $u(x,y)$ по ее дифференциалу. В этом случае соотношение $u(x,y) = C$ описывает всю совокупность решений уравнения в полных дифференциалах.

Взяв в качестве пути, соединяющего точки (x_0, y_0), (x,y), ломаную линию, отрезки которой параллельны осям координат, получаем, что функция $u(x,y)$ (потенциал поля $(M,N)^T$) может быть найдена по одной из формул:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy$$

или

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$$

Функция $u(x,y)$ может быть также найдена из системы уравнений $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

5.57. Найти общее решение уравнения $(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

Так как $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2) = 2y$, $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Поэтому, восстанавливая потенциал, получаем

$$u(x,y) = \int\limits_0^x (3x^2 + 0)dx + \int\limits_0^y 2xydy = \left(x^3\right)\Big|_0^x + \left(xy^2\right)\Big|_0^y = x^3 + xy^2.$$

Тогда общий интеграл (общее решение) имеет вид $x^3 + xy^2 = C$.

5.58. Найти общее решение уравнения $2xy^3dx+\left(3x^2y^2+2y\right)dy=0$.

Так как $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3\right)=6xy^2$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2+2y\right)=6xy^2$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,y)$ из системы уравнений $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+2y$.

Из первого уравнения имеем $u(x,y)=\int 2xy^3dx=x^2y^3+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ —функция, которую надо найти. Дифференцируя найденную функцию $u(x,y)$ по y, получаем, используя второе уравнение, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+\varphi'(y)=$ $=3x^2y^2+2y$. Отсюда $\varphi'(y)=2y$ или $\varphi(y)=y^2+C$. Поэтому $u(x,y)=x^2y^3+y^2$ и соотношение $x^2y^3+y^2=C$ дает всю совокупность решений уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Найти решения дифференциальных уравнений.

5.59. $\left(y^3+2xy^2\right)dx+\left(3xy^2+2x^2y\right)dy=0$.

5.60. $y\cos\left(xy+y^2\right)dx+(x+2y)\cos\left(xy+y^2\right)dy=0$.

5.61. $\left(4x^3y^3+2x\right)dx+3x^4y^2dy=0$. **5.62.** $y^2dx+\left(2xy+3y^2\right)dy=0$.

В следующих ниже задачах определить тип дифференциального уравнения и решить их. Так как задача определения типа дифференциального уравнения решается неоднозначно (одно и то же уравнение иногда можно отнести к разным типам), то приведен один из возможных вариантов ответа.

5.63. $x^5\left(y^3+9\right)dx-\left(1+x^6\right)y^2dy=0$. **5.64.** $xy^2y'=x^2+y^3$.

5.65. $\left(x^4+5\right)\cos y\cdot y'=x^3\sin y$. **5.66.** $\left(xy+e^x\right)dx-xdy=0$.

5.67. $\left(x^3+3\right)ydy+x^2(y+4)dx=0$. **5.68.** $y'-2ye^x=2\sqrt{y}e^x$.

5.69. $\left(e^{3y}+6\right)xdx=e^{3y}\left(1+x^2\right)dy$. **5.70.** $y'-2ye^x=2y^2e^x$.

5.71. $x\left(2+3\ln^2x\right)y^3dy-\left(1+y^4\right)\ln xdx=0$.

5.72. $xy'+x^3+xy+y=0$. **5.73.** $\left(3x^2y+y^2\right)dx+\left(x^3+2xy\right)dy=0$.

5.74. $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$. **5.75.** $\left(5x^4y^2+2xy\right)dx+\left(2x^5y+x^2\right)dy=0$.

5.76. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$. **5.77.** $(2xy^3+1)dx+3x^2y^2dy=0$.

5.78. $(x+1)y'-(y^2+2)=0$. **5.79.** $xy'=y-xe^{y/x}$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям (решить задачу Коши).

5.80. $xy'+2y=5x^3,\ y(1)=3$. **5.81.** $xy'-(1+2x)y=0,\ y(1)=e^2$.

5.82. $x^3dy-y^2(3x-2y)dx=0,\ y(2)=-1$.

5.83. $(5x^4y+2x)dx+x^5dy=0,\ y(1)=2$.

5.84. $xy'-3y=6\sqrt[3]{y},\ y(-1)=8$. **5.85.** $yy'=x(1+y^4),\ y\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=1$.

5.86. $xy'=y+x\,\mathrm{tg}^2\frac{y}{x},\ y(1)=\frac{\pi}{2}$.

5.87. $(\sin x+1)dy=y\cos x\,dx,\ y(0)=1$.

5.88. $(2xy+3x^2)dx+(x^2+2y)dy=0,\ y(1)=1$.

5.2. Уравнения высших порядков

5.2.1. Общие сведения. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рекомендуется предварительно ознакомиться с п. 5.2.1 и п. 5.2.2 из пособия [5].

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0. \tag{5.9}$$

Если это уравнение удается представить в виде

$$y^{(n)}=f\left(x, y, \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{5.10}$$

то его называют дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Множество решений дифференциального уравнения n-го порядка есть некоторое семейство функций, зависящих от n констант. Для выделения из этого семейства конкретного решения, нужно на решение наложить некоторые ограничения.

Чаще всего задают начальные условия, то есть условия вида

$$y(x_0)=y_0^0,\ y'(x_0)=y_0^1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}. \tag{5.11}$$

В этом случае задача о выделении конкретного решения носит название **задачи Коши**, которая заключается в нахождении решения уравнения (5.10), удовлетворяющего начальным условиям (5.11).

Условия разрешимости задачи Коши даются в теореме существования и единственности [5]. Приведем эту теорему с легче проверяемыми, но более жесткими, чем в [5] условиями на правую часть уравнения (5.10).

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ непрерывна по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то найдется окрестность точки x_0, в которой решение уравнения (5.10), удовлетворяющее начальным условиям (5.11), существует и единственно.

При выполнении этих условий через точку $\left(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}\right) \in D$ проходит только одно решение уравнения (5.10). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через нее может проходить больше чем одно решение (нарушается единственность) либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

В отличие от уравнений первого порядка, для уравнений порядка n, кроме постановки задачи Коши, возможны другие постановки задач о выделении решений. Подробнее об этом можно прочитать в [5].

Выше нами были рассмотрены методы решения некоторых классов уравнений первого порядка. Возникает естественное желание свести уравнение порядка выше первого к уравнению более низкого порядка. Порядок уравнения удается понизить в следующих случаях.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ решаются последовательным интегрированием n раз

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2, \ldots .$$

2. В уравнениях вида $F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, $k \geq 1$ (то есть не содержащих в явном виде неизвестную функцию и некоторые ее производные), порядок понижается с помощью замены переменной $y^{(k)} = z(x)$.

Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \ldots,$ $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$, и мы получаем уравнение $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$ порядка $n-k$.

3. В уравнении $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащем в явном виде независимую переменную, порядок понижается с помощью замены переменной $y' = p(y)$, где p — новая искомая функция, зависящая от y. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p, \quad y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{dp'}{dx}p + p'\frac{dp}{dx} = \frac{dp'}{dy}\frac{dy}{dx}p + p'\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} =$$

$= p''p^2 + (p')^2 p$ и так далее. По индукции имеем $y^{(n)} = \varphi_{n-1}\left(p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right)$. Подставляя в исходное уравнение, понижаем его порядок на единицу.

4. Уравнение удается представить в виде, когда в левой и правой частях стоят полные производные по x некоторых функций, зависящих от $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Тогда сами функции отличаются на константу.

Ниже приведены примеры на все рассмотренные случаи.

5.89. Решить уравнение $e^{-3x}y'' = 1$.

Уравнение относится к первому из рассмотренных выше типов. Можем записать $y'' = e^{3x}$, следовательно, $y' = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$, и, интегрируя еще раз, окончательно получаем $y = \frac{1}{9}e^{3x} + C_1x + C_2$.

5.90. Решить уравнение $y''' = \cos 5x$.

Аналогично предыдущему, уравнение относится к первому из рассмотренных выше типов. Интегрируя, получаем $y'' = \frac{1}{5}\sin 5x + 2C_1$,

$y' = -\frac{1}{25}\cos 5x + 2C_1x + C_2$, $y = -\frac{1}{125}\cos 5x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

5.91. Решить уравнение $y''(\sin x + 3) = y'\cos x$.

Уравнение относится ко второму случаю. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, имеем $z'(\sin x + 3) = z\cos x$ или, разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z} = \frac{\cos x dx}{\sin x + 3}$. Интегрируя последнее уравнение, имеем $\ln|z| = \ln(\sin x + 3) + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $z = C_1(\sin x + 3)$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1(\sin x + 3)$, откуда получаем $y = -C_1\cos x + 3C_1x + C_2$. При делении на z мы могли потерять решение $y' = 0$, или, что то же самое, $y = C$, которое входит в найденное.

5.92. Решить уравнение $(x-1)y'' = y' + 2$.

Уравнение относится ко второму случаю. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $(x-1)z' = z + 2$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z+2} = \frac{dx}{x-1}$. Интегрируя, имеем $\ln|z+2| = \ln|x-1| + \ln|C_1|$, или, что то же самое, $z = C_1(x-1) - 2$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1(x-1) - 2$, откуда $dy = (C_1(x-1) - 2)dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y = 0{,}5C_1(x-1)^2 - 2x + C_2$. При разделении переменных мы могли потерять решения соответствующие случаям $x = 1$ и $z = -2$. Функция $x = 1$ решением уравнения не является. Если $z = -2$, то $y' = -2$, или $y = -2x + C$. Это решение входит в найденное при $C_1 = 0$.

5.93. Решить уравнение $y''\left(x^2+1\right)=2xy'$.

Уравнение не содержит y. Поэтому делаем замену $y'=z(x)$. Тогда $y''=z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $z'\left(x^2+1\right)=2xz$ или, разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z}=\frac{2x\,dx}{x^2+1}$. Интегрируя, имеем $\ln|z|=\ln\left(x^2+1\right)+\ln|C_1|$, или, что то же самое, $z=C_1\left(x^2+1\right)$. Последнее соотношение записывается в виде $y'=C_1\left(x^2+1\right)$, откуда $dy=C_1\left(x^2+1\right)dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y=C_1\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)+C_2$. При разделении переменных мы могли потерять решение, соответствующее случаю $z(x)=0$. Тогда $y'=0$, или $y=C$, но это решение входит в найденное при $C_1=0$.

5.94. Решить уравнение $2+(y')^2=2yy''$.

Уравнение не содержит x. Поэтому делаем замену $y'=p(y)$, тогда $y''=p'p$, и, подставляя в уравнение, получаем $2+p^2=2y\frac{dp}{dy}p$. Разделяя переменные, при $y\neq 0$ имеем $\frac{2p\,dp}{p^2+2}=\frac{dy}{y}$. Интегрируя, получаем $\ln\left(p^2+2\right)=\ln|y|+\ln|C_1|$, или, что то же самое, $p^2+2=C_1y$. Тогда $(y')^2=C_1y-2$, или $y'=\pm\sqrt{C_1y-2}$. После разделения переменных получаем $\frac{dy}{\sqrt{C_1y-2}}=\pm dx$. Интегрируя последнее равенство, окончательно имеем $\frac{2\sqrt{C_1y-2}}{C_1}=\pm x+C_2$. Функции $y=0$ и $y=\frac{2}{C_1}$ решениями не являются, поэтому при разделении переменных мы решений не потеряли.

5.95. Решить уравнение $(y+3)y''=(y')^2+4y'$.

Если обе части уравнения разделить на $(y+3)(y'+4)\neq 0$, то получим уравнение $\frac{y''}{y'+4}=\frac{y'}{y+3}$, которое можно переписать в виде $\left(\ln|y'+4|\right)'=\left(\ln|y+3|\right)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y'+4|=\ln|y+3|+\ln|C|$, или, что то же самое, $y'+4=C_1(y+3)$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\ln\left|\left(C_1(y+3)-4\right)\right|=C_1x+\ln|C_2|$, или, что то же самое, $C_1(y+3)-4=C_2e^{C_1x}$. Кроме того, при делении на $(y+3)(y'+4)$ мы потеряли решения $y=-3$ и $y=-4x+C$, в найденном не содержащиеся.

5.96. Решить уравнение $2xy'y'' = (y')^2 + 2$.

Имеем, аналогично предыдущей задаче, $\dfrac{2y'y''}{(y')^2 + 2} = \dfrac{1}{x}$, или

$\left(\ln\left((y')^2 + 2\right)\right)' = \left(\ln|x|\right)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln\left((y')^2 + 2\right) = \ln|x| + \ln|C_1|$, или $y' = \pm\sqrt{C_1 x - 2}$.

Интегрируя, получаем $y = \pm\dfrac{2}{3C_1}(C_1 x - 2)^{3/2} + C_2$.

5.97. Решить задачу Коши $3\left(4 + x^2\right)y'' = 2(y')^2 + 18$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Разделив на $\left(x^2 + 4\right)\left((y')^2 + 9\right) \neq 0$, получим уравнение $\dfrac{3y''}{(y')^2 + 9} = \dfrac{2}{x^2 + 4}$,

которое можно переписать в виде $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y'}{3}\right)' = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)'$. Из последнего соотношения следует, что $\operatorname{arctg}\dfrac{y'}{3} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C_1$. Подставляя начальные данные, получаем $C_1 = 0$. Тогда $\operatorname{arctg}\dfrac{y'}{3} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$, или, что то же самое, $y' = \dfrac{3}{2}x$. Интегрируя, получаем $y = \dfrac{3}{4}x^2 + C_2$. Учитывая начальные условия, получаем $C_2 = 1$. Поэтому $y = \dfrac{3}{4}x^2 + 1$ — искомое решение исходного уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения.

5.98. $y'''(\cos x + 3) + y''\sin x = 0$. **5.99.** $2xy'y'' = (y')^2 + 3$.

5.100. $y'' - 2y'\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$. **5.101.** $y'' = \operatorname{tg}^2 x$.

5.102. $(1 + x)y'' = y' + 3$. **5.103.** $\left(1 + y^2\right)y'' = 2y(y')^2$.

5.104. $y'' - 3y' = -x$. **5.105.** $y'' = \ln^2 x$. **5.106.** $\left(1 + x^2\right)y'' = 2xy'$.

5.107. $y'' - 2y'\operatorname{ctg} 2x = \sin 4x$. **5.108.** $x^3 y''' = 1 + x^4$.

Решить задачу Коши.

5.109. $2y'' + (y')^2 = 2e^y$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

5.110. $3y''' - 2(y')^2 y'' = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = \dfrac{3}{2}$, $y''(0) = \dfrac{3}{4}$.

5.111. $2(y')^2 - y''(y + 5) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

5.2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рекомендуется предварительно ознакомиться с п. 5.2.3 и п. 5.2.4 из пособия [5].

Уравнение вида

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,y^{(k)} = b(x)$$

называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка. Если $b(x) = 0$, то уравнение называется однородным линейным уравнением, если $b(x) \neq 0$, — неоднородным. Если коэффициенты в линейном уравнении постоянны, то есть $a_i(x) = \mathrm{const}$, то дифференциальное уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами.

Пусть $C[a,b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, $C^n[a,b]$ — множество функций, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно.

Если ввести оператор $L : C^n[a,b] \to C[a,b]$ по формуле

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,y^{(k)},$$

то линейное дифференциальное уравнение можно записать в виде $L(y) = b(x)$, где $b(x)$ — некоторая функция, а $L(y)$ — введенный выше оператор.

Большую роль как в теории, так и в практике играют теорема о наложении решений и ее следствия, а также получаемые с их помощью теоремы об общем виде решений однородного и неоднородного уравнений. Более подробно об этом можно посмотреть в [5].

Понятия линейной зависимости и линейной независимости систем функций [5] вводятся так же, как и для систем векторов [1]. Свойства те же [1, 5]. Отметим, что размерность пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n равна n. Любой базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения (линейно независимая совокупность из n решений) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения, то

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = \sum_{k=1}^{n} C_ky_k \text{ —}$$

общее решение этого уравнения.

Наиболее просто фундаментальная система решений находится для уравнений с постоянными коэффициентами.

Алгебраическое уравнение

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1r + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kr^k = 0$$

называется характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Для корней характеристического уравнения возможны нижеследующие случаи.

1. Все корни характеристического многочлена вещественны и различны. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда совокупность решений

$$y_1 = e^{r_1x},\ y_2 = e^{r_2x},\ \ldots,\ y_n = e^{r_nx}$$

является фундаментальной системой решений соответствующего дифференциального уравнения.

2. Среди действительных корней характеристического уравнения есть кратные. Если r_1 — корень кратности α, то ему соответствует α линейно независимых решений

$$y_1 = e^{r_1x},\ y_2 = xe^{r_1x},\ y_3 = x^2e^{r_1x},\ \ldots,\ y_\alpha = x^{\alpha-1}e^{r_1x}$$

уравнения. Присоединяя эту систему решений к $n-\alpha$ решениям, соответствующим остальным корням характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае наличия действительных кратных корней.

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни. Для уравнений с действительными коэффициентами, если $r_j = a + bi$ — комплексный корень кратности α характеристического уравнения, то комплексно-сопряженное ему число $r_k = a - bi$ также является корнем кратности α этого уравнения. Этим корням соответствует линейно независимая система решений

$$y_1^l = x^le^{ax}\cos bx,\ y_2^l = x^le^{ax}\sin bx,\ l = 0, 1, \ldots, \alpha - 1.$$

Присоединяя эту систему решений к $n–2\alpha$ решениям, соответствующим остальным корням характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае наличия комплексных кратных корней.

5.112. Для уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$ корни характеристического уравнения $r^2 - 2r - 3 = 0$ равны $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Следовательно, фундаментальную систему решений составляют функции $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$, а общее решение записывается в виде $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

5.113. Для уравнения $y''' - 8y'' + 16y' = 0$ характеристическое уравнение $r^3 - 8r^2 + 16r = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 1 и $r = 4$ кратности 2, так как $r^3 - 8r^2 + 16r = r\left(r-4\right)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{4x}$, $y_3 = xe^{4x}$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2e^{4x} + C_3xe^{4x}$.

5.114. Для уравнения $y^{(5)} - 10y^{(4)} + 25y''' = 0$ характеристическое уравнение $r^5 - 10r^4 + 25r^3 = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 3 и $r = 5$ кратности 2, так как $r^5 - 2r^4 + r^3 = r^3\left(r-5\right)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{5x}$, $y_5 = xe^{5x}$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{5x} + C_5xe^{5x}$.

5.115. Для уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$ корни характеристического уравнения $r^2 + 2r + 10 = 0$ равны $r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = e^{-x}\cos 3x$, $y_2 = e^{-x}\sin 3x$, а общее решение имеет вид $y = C_1e^{-x}\cos 3x + C_2e^{-x}\sin 3x$.

5.116. Для уравнения $y''' - 6y'' + 13y' = 0$ корни характеристического уравнения $r^3 - 6r^2 + 13r = 0$ равны $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}\cos 2x$, $y_3 = e^{3x}\sin 2x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2e^{3x}\cos 2x + C_3e^{3x}\sin 2x$.

5.117. Для уравнения $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$ характеристическое уравнение $r^4 + 18r^2 + 81 = 0$ имеет корни $r = \pm 3i$ кратности 2, так как $r^4 + 18r^2 + 81 = \left(r^2 + 9\right)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, $y_3 = x\cos 3x$, $y_4 = x\sin 3x$, а общее решение имеет вид $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3x\cos 3x + C_4x\sin 3x$.

Задачи для самостоятельного решения

5.118. $y'' - 4y' + 3y = 0$. **5.119.** $y'' + 5y' + 4y = 0$.

5.120. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$. **5.121.** $y'' + 4y' + 4y = 0$.

5.122. $y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$. **5.123.** $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.

5.124. $y'' + 4y = 0$. **5.125.** $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

5.126. $y'' - 4y' + 5y = 0$. **5.127.** $y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$.

5.2.3. Метод вариации произвольных постоянных решения линейных неоднородных уравнений

Рекомендуется предварительно ознакомиться с п. 5.2.5 из пособия [5].

Алгоритм метода следующий:

1) находим фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения;

2) ищем решение неоднородного уравнения в виде $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j(x)y_j$, где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — функции, подлежащие определению; для нахождения функций $C_j'(x)$ составляем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x)y_j = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x)y_j' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x)\,y_j^{(n-1)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}, \; a_n(x) \neq 0. \end{cases}$$

Для $n = 2$, то есть для уравнения второго порядка, эта система уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 = 0, \\ C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}, \end{cases}$$

а для $n = 3$ система записывается в виде

$$\begin{cases} C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 + C_3'\,y_3 = 0, \\ C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' + C_3'\,y_3' = 0, \\ C_1'\,y_1'' + C_2'\,y_2'' + C_3'\,y_3'' = \dfrac{b(x)}{a_3(x)}. \end{cases}$$

Изложенный метод называется методом вариации произвольной постоянной или методом Лагранжа.

5.128. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = \dfrac{5e^{2x}}{e^{2x} + 9}$.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + y' - 6y = 0$. Корни его характеристического уравнения $r^2 + r - 6 = 0$ равны 2 и -3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2' составляем

систему уравнений $\begin{cases} C_1'e^{2x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ 2C_1'e^{2x} - 3C_2'e^{-3x} = \dfrac{5e^{2x}}{e^{2x}+9}. \end{cases}$

Умножая первое уравнение на 3 и складывая результат со вторым, получаем $5C_1'e^{2x} = \dfrac{5e^{2x}}{e^{2x}+9}$, или $C_1' = \dfrac{1}{e^{2x}+9}$. Далее, умножая первое уравнение на 2 и вычитая из второго, имеем $-5C_2'e^{-3x} = \dfrac{5e^{2x}}{e^{2x}+9}$, или $C_2' = -\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}+9}$.

Интегрируя, получаем $C_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+9} = \int \frac{e^{-2x}}{1+9e^{-2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^{-2x}\right)}{1+9e^{-2x}} =$

$= -\dfrac{1}{18}\ln\left(1+9e^{-2x}\right) + \tilde{C}_1$, $C_2 = -\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{e^{2x}+9}dx = -\int \frac{e^{3x}\left(e^{2x}+9-9\right)}{e^{2x}+9}dx = -\int e^{3x}dx +$

$+ 9\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+9}dx = -\frac{1}{3}e^{3x} + 9\int \frac{e^{x}\left(e^{2x}+9-9\right)}{e^{2x}+9}dx = -\frac{1}{3}e^{3x} + 9\int e^{x}dx - 81\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+9}dx =$

$= -\dfrac{1}{3}e^{3x} + 9e^{x} - 27\operatorname{arctg}\dfrac{e^{x}}{3} + \tilde{C}_2$.

Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, окончательно находим

$$y = -\frac{1}{18}e^{2x}\ln\left(1+9e^{-2x}\right) - \frac{1}{3} + 9e^{-2x} - 27e^{-3x}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}}{3} + \tilde{C}_1e^{2x} + \tilde{C}_2e^{-3x}.$$

5.129. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{27}{e^{2x}+9}$.

Корни характеристического полинома $r^3 - 2r^2 - r + 2$ соответствующего однородного уравнения равны $-1, 1, 2$. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{x}$, $y_3 = e^{2x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x}$. Для нахождения производных C_1', C_2', C_3' составляем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{x} + C_3'e^{2x} = 0, \\ -C_1'e^{-x} + C_2'e^{x} + 2C_3'e^{2x} = 0, \\ C_1'e^{-x} + C_2'e^{x} + 4C_3'e^{2x} = \dfrac{27}{e^{2x}+9}. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения первое, получаем $3C_3'e^{2x} = \dfrac{27}{e^{2x}+9}$, или $C_3' = \dfrac{9}{e^{2x}\left(e^{2x}+9\right)}$. Складывая первое и второе уравнения, имеем $2C_2'e^{x} + 3C_3'e^{2x} = 0$, или $C_2' = -\dfrac{3}{2}C_3'e^{x}$. Подставляя найденное ранее C_3', окончательно получаем $C_2' = -\dfrac{27}{2e^{x}\left(e^{2x}+9\right)}$. Вычитая из первого уравнения второе, имеем $2C_1'e^{-x} - C_3'e^{2x} = 0$, или $C_1' = \dfrac{1}{2}C_3'e^{3x}$. Подставляя найденное ранее C_3', окончательно получаем $C_1' = \dfrac{9e^{x}}{2\left(e^{2x}+9\right)}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \dfrac{9}{2}\displaystyle\int \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+9}dx = \dfrac{9}{2}\displaystyle\int \dfrac{d\left(e^{x}\right)}{\left(e^{x}\right)^2+3^2} = \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^{x}}{3} + \tilde{C}_1$,

$$C_2 = -\frac{27}{2}\int \frac{dx}{e^{x}\left(e^{2x}+9\right)} = -\frac{27}{2}\int \frac{e^{-3x}dx}{1+9e^{-2x}} = -\frac{27}{2\cdot 9}\int \frac{e^{-x}\left(9e^{-2x}+1-1\right)dx}{1+9e^{-2x}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int e^{-x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{e^{-x}}{1+9e^{-2x}}dx = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(3e^{-x}\right) + \tilde{C}_2, \quad C_3 = \int \frac{9dx}{e^{2x}\left(e^{2x}+9\right)} =$$

$$= \int\left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}+9}\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \int \frac{1}{e^{2x}+9}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \int \frac{e^{-2x}}{1+9e^{-2x}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{18}\ln\left(1+9e^{-2x}\right) + \tilde{C}_3.$$

Подставляя C_1, C_2, C_3 в выражение для y, окончательно находим

$$y = \frac{3}{2}e^{-x}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}}{3} - \frac{1}{2}e^{x}\operatorname{arctg}\left(3e^{-x}\right) + 1 + \frac{1}{18}e^{2x}\ln\left(1+9e^{-2x}\right) + \tilde{C}_1e^{-x} + \tilde{C}_2e^{x} + \tilde{C}_3e^{2x}.$$

5.130. Решить задачу Коши $y'' + 16y = \dfrac{4}{\cos^3 4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Найдем вначале общее решение однородного уравнения. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + 16y = 0$. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 16 = 0$ равны $\pm 4i$. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = \cos 4x$ и $y_2 = \sin 4x$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)\cos 4x + C_2(x)\sin 4x$. Для нахождения производных C_1', C_2' составляем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' \cos 4x + C_2' \sin 4x = 0, \\ -4C_1' \sin 4x + 4C_2' \cos 4x = \dfrac{4}{\cos^3 4x} \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} C_1' \cos 4x + C_2' \sin 4x = 0, \\ -C_1' \sin 4x + C_2' \cos 4x = \dfrac{1}{\cos^3 4x}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на $\cos 4x$, второе — на $\sin 4x$ и вычитая из полученного первого полученное второе, находим $C_1' = -\dfrac{\sin 4x}{\cos^3 4x}$. Далее, умножая первое уравнение на $\sin 4x$, второе — на $\cos 4x$ и складывая результаты, имеем $C_2' = \dfrac{1}{\cos^2 4x}$. Интегрируя функции C_1' и C_2', получаем $C_1 = -\dfrac{1}{8\cos^2 4x} + \tilde{C}_1$, $C_2 = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + \tilde{C}_2$. Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, находим общее решение неоднородного уравнения $y(x) = -\dfrac{1}{8\cos 4x} +$ $+\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 4x} + \tilde{C}_1 \cos 4x + \tilde{C}_2 \sin 4x$.

Находим $y'(x) = -\dfrac{\sin 4x}{2\cos^2 4x} + \dfrac{2\sin 4x \cos^2 4x + \sin^3 4x}{\cos^2 4x} - 4\tilde{C}_1 \sin 4x +$ $+ 4\tilde{C}_2 \cos 4x$. Тогда начальные условия запишутся в виде $\begin{cases} y(0) = -\dfrac{1}{8} + \tilde{C}_1 = 1, \\ y'(0) = 4\tilde{C}_2 = -1. \end{cases}$

Из последнего получаем $\tilde{C}_1 = \dfrac{9}{8}$, $\tilde{C}_2 = -\dfrac{1}{4}$. Подставляя эти значения в общее решение неоднородного уравнения, находим решение задачи Коши $y(x) = -\dfrac{1}{8\cos 4x} + \dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 4x} + \dfrac{9}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{4}\sin 4x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнения.

5.131. $y'' - 25y = \dfrac{10e^{5x}}{4+e^{5x}}$. **5.132.** $y'' - 2y' - 3y = \dfrac{4}{9+e^{2x}}$.

5.133. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+4}$. **5.134.** $y'' + 9y = 3\,\mathrm{tg}^2\,3x$.

5.135. $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{e^{-5x}}{x^2-2x+1}$. **5.136.** $y'' + 2y' + 10y = \dfrac{3e^{-x}}{\sin 3x}$.

5.137. $y'' - 6y' + 25y = 4e^{3x}\,\mathrm{tg}\,4x$. **5.138.** $y''' + 4y' = 4\,\mathrm{tg}\,2x$.

Решить задачу Коши.

5.139. $y'' - 16y = \dfrac{8}{1+e^{4x}}$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = 2\ln 2$.

5.140. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^5}$, $y(1) = \dfrac{e^3}{12}$, $y'(1) = e^3$.

5.141. $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos^3 2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

5.142. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.2.4. Уравнения с правой частью специального вида

Рекомендуется предварительно ознакомиться с п. 5.2.6 из пособия [5].

Теорема (о виде общего решения линейного неоднородного уравнения). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b(x)$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения.

Для уравнений с постоянными коэффициентами

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = b(x)$$

и правой частью $b(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$, у которой $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые полиномы, частное решение может быть найдено в виде

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}\left(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\right),$$

где $R(x)$, $S(x)$ — полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов $P(x)$, $Q(x)$; k — число, равное кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, если $\alpha+\beta i$ — корень этого полинома, и $k=0$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического полинома.

5.143. Для уравнения $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 9x + 3$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0$ являются $r = 1$ кратности 1 и $r = 3$ кратности 2. Так как правая часть может быть записана в виде $(9x+3)e^{0\cdot x}(\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x))$, то $\alpha = 0$, $\beta = 0$, и, следовательно, $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $k = 0$, и частное решение ищем в виде $y = cx + d$. Так как $y' = c$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, то, подставляя в уравнение, получаем $15c - 9cx - 9d = 9x + 3$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-9c = 9$, $15c - 9d = 3$. Решая эту систему, получаем $c = -1$, $d = -2$, и поэтому $y = -x - 2$ — частное, а $y = -x - 2 + C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$ — общее решения уравнения.

5.144. Для уравнения $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (9x+3)e^x$ правая часть может быть записана в виде $(9x+3)e^x(\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x))$, следовательно, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, и число $\alpha + \beta i = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(cx + d)e^x$.

5.145. Для уравнения $y'' + 9y = 12\sin 3x$ корнями характеристического полинома $r^2 + 9$ являются числа $r = \pm 3i$ кратности 1. Правая часть этого уравнения может быть записана в виде $12\sin 3x = e^{0\cdot x}(0\cdot\cos 3x + 12\sin 3x)$, поэтому $\alpha = 0, \beta = 3$, следовательно, $\alpha + \beta i = 3i$ является корнем кратности 1 характеристического полинома. Поэтому $k = 1$, и частное решение ищем в виде $y = x(a_1\cos 3x + a_2\sin 3x)$. Тогда $y' = (a_1 + 3a_2x)\cos 3x + (a_2 - 3a_1x)\sin 3x$, $y'' = (6a_2 - 9a_1x)\cos 3x + (-6a_1 - 9a_2x)\sin 3x$.

Подставляя в исходное уравнение и приводя подобные, получаем $6a_2\cos 3x - 6a_1\sin 3x = 12\sin 3x$, откуда $a_1 = -2$, $a_2 = 0$. Следовательно, $y = -2x\cos 3x$ — частное, а $y = -2x\cos 3x + C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ — общее решения уравнения.

5.146. Для уравнения $y''' - 4y'' + y' + 6y = 4x + 7$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$ являются числа $-1, 2, 3$. Так как правая часть может быть записана в виде $(4x+7)e^{0\cdot x}(\cos(0\cdot x) + \sin(0\cdot x))$, то $\alpha = 0, \beta = 0$ и, следовательно, $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Числа $\alpha + \beta i = 0$ среди этих корней нет. Поэтому $k = 0$, и частное решение ищем в виде $y = cx + d$.

5.147. Для уравнения $y'' + 9y = \cos 4x$ корнями характеристического полинома $r^2 + 9$ являются числа $r = \pm 3i$ кратности 1. Правая часть этого уравнения может быть записана в виде $\cos 4x = e^{0\cdot x}(\cos 4x + 0\cdot\sin 4x)$, поэтому $\alpha = 0, \beta = 4$, следовательно, $\alpha + \beta i = 4i$ не является корнем характеристического полинома. Поэтому $k = 0$, и частное решение ищем в виде $y = a_1\cos 4x + a_2\sin 4x$.

5.148. Для уравнения $y''' - 4y'' + y' + 6y = x^2e^{-x} + e^x\cos 3x + xe^{5x}$ записать частное решение с неопределенными коэффициентами.

По теореме о наложении решений частным решением данного уравнения является функция $y=y_1+y_2+y_3$, где y_1 — частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)=x^2e^{-x}$, y_2 — частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)=e^x\cos 3x$, y_3 — частное решение уравнения с правой частью $f_3(x)=xe^{5x}$. Корнями характеристического полинома соответствующего однородного уравнения являются числа $-1, 2, 3$. Для правой части f_1 число $\alpha+\beta i=-1$ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, поэтому $y_1=x\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$. Для правой части f_2 число $\alpha+\beta i=$ $=1+3i$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $y_2=(d\cos 3x+g\sin 3x)e^x$. Для правой части f_3 число $\alpha+\beta i=5$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_3=(hx+t)e^{5x}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение.

5.149. $y''-7y'+6y=(3x+1)e^x$. **5.150.** $y''-7y'+6y=(2x+3)e^{2x}$.

5.151. $y''-5y'+6y=x\cos 2x+\left(5x-\dfrac{5}{2}\right)\sin 2x$.

5.152. $y''+6y'+25y=e^{-3x}(2x-5)$.

5.153. $y''-2y'+10y=e^x\sin 3x$. **5.154.** $y''+4y'+20y=17\sin 4x$.

5.155. $y''+3y'+2y=3x^2e^x$. **5.156.** $y''-4y'+4y=\cos x+2\sin x$.

Решить задачу Коши.

5.157. $y''+25y=x\cos 5x+\sin 5x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

5.158. $y''-6y'+45y=e^x\cos x$, $y(0)=\dfrac{39}{1537}$, $y'(0)=-\dfrac{4}{1537}$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами для уравнений.

5.159. $y''+16y=\left(x^2+3x\right)e^x+xe^x\cos 4x+\sin 4x$.

5.160. $y''-6y'+25y=(x+3)e^x+xe^{3x}\cos 4x+\sin 5x$.

5.3. Системы дифференциальных уравнений

5.3.1. Общий случай

Предварительно рекомендуется прочитать п. 5.3.1 из [5].

Обычно рассматривают систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши)

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ y_2'=f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ \qquad\ldots\ldots\\ y_n'=f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \end{cases} \tag{5.12}$$

которую также можно записать в векторной форме $y' = f(x, y)$, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y))^T$, по виду совпадающей с записью дифференциального уравнения первого порядка.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно поставить задачу Коши: найти решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T.$$

Так же как и для дифференциальных уравнений, для систем дифференциальных уравнений справедлива теорема существования и единственности.

Теорема. Пусть в системе уравнений (5.12) все функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ в области D и имеют непрерывные частные производные по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда найдется окрестность точки x_0, в которой решение системы уравнений (5.12), удовлетворяющее начальным данным

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T,$$

существует и единственно.

В общем случае для решения систем имеются методы интегрируемых комбинаций и исключения неизвестных.

Разберем на примерах метод исключения неизвестных.

5.161. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - 2y - y' - 7x = \cos t - \sin t, \\ x' + x + y = -\sin t. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения, имеем $y = -x - x' - \sin t$. Дифференцируя, получаем $y' = -x'' - x' - \cos t$. Подставляя y и y' в первое уравнение и приводя подобные, получаем уравнение $x'' + 4x' - 5x = -3\sin t$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического полинома $r^2 + 4r - 5$ соответствующего однородного уравнения равны $r_1 = -5$, $r_2 = 1$. Поэтому $x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения. Находя частное решение неоднородного уравнения по виду правой части, имеем $x_{чн} = \frac{3}{13}\cos t + \frac{9}{26}\sin t$. Таким образом, общее решение уравнения $x'' + 4x' - 5x = -3\sin t$ равно $x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + \frac{3}{13}\cos t + \frac{9}{26}\sin t$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = 4C_1e^{-5t} - 2C_2e^{t} - \frac{15}{26}\cos t - \frac{29}{26}\sin t$, или

в векторной форме $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 4e^{-5t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{13}\cos t + \frac{9}{26}\sin t \\ -\frac{15}{26}\cos t - \frac{29}{26}\sin t \end{pmatrix}$.

5.162. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = x - 2y + t, \\ y' = 2x - 3y + t^2, \end{cases} \quad x(0) = -3,\ y(0) = 1.$$

Выражая из первого уравнения y, получаем $y = \frac{1}{2}(x - x' + t)$. Дифференцируя, имеем $y' = \frac{1}{2}(x' - x'' + 1)$. Подставляя y и y' во второе уравнение и приводя подобные, получаем $x'' + 2x' + x = -2t^2 + 3t + 1$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического полинома $r^2 + 2r + 1$ соответствующего однородного уравнения равны $r_{1,2} = -1$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения есть $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$. Частное решение, найденное по виду правой части, $x = -2t^2 + 11t - 17$. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения есть $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} - 2t^2 + 11t - 17$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = C_1e^{-t} + C_2\left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-t} - t^2 + 8t - 14$, или в векторной

форме $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} te^{-t} \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t^2 + 11t - 17 \\ -t^2 + 8t - 14 \end{pmatrix}$.

Подставляя начальные данные, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x(0) = C_1 - 17 = -3, \\ y(0) = C_1 - \frac{1}{2}C_2 - 14 = 1, \end{cases}$$

решая которую, имеем $C_1 = 14$, $C_2 = -2$. Таким образом, решением задачи

Коши будет $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} te^{-t} \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t^2 + 11t - 17 \\ -t^2 + 8t - 14 \end{pmatrix}$.

5.3.2. Системы линейных уравнений. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рекомендуется прочитать пп. 5.3.2 и 5.3.3 из [5].

Если в системе обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме все функции, стоящие в правых частях, линейны по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то она называется линейной. В этом случае ее можно переписать в виде

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1(x)y_1 + a_2^1(x)y_2 + \ldots + a_n^1(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_1^2(x)y_1 + a_2^2(x)y_2 + \ldots + a_n^2(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_1^n(x)y_1 + a_2^n(x)y_2 + \ldots + a_n^n(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

или в матричной форме

$$y' = A(x)y + b(x),$$

где $A(x)$ — матрица системы; $b(x)=(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T$; $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$; $y'=(y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$. Если $b(x)=0$, то получаем соответствующую систему однородных уравнений $y' = A(x)y$.

Для систем линейных уравнений строится теория, полностью эквивалентная теории линейных уравнений порядка n. В частности, справедливы играющая большую роль в теории и практике теорема о наложении решений и получаемые с ее помощью теоремы о виде общего решения однородной и неоднородной систем.

Теорема (о наложении решений). Если y_1, y_2 — решения систем линейных уравнений $y' = A(x)y + b_1(x)$ и $y' = A(x)y + b_2(x)$ соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ есть решение системы линейных уравнений $y' = A(x)y + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

Понятия линейной зависимости и линейной независимости систем вектор-функций вводятся так же, как для векторов [1, 2] и систем скалярных функций [5]. Свойства те же. Размерность пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений порядка n равна n. Любой базис пространства решений этой системы (линейно независимая совокупность из n решений) называется фундаментальной системой решений.

Теорема (о виде общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений). Если $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то любое решение этой системы есть линейная комбинация решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$, то есть $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j y^j(x)$, и, следовательно, $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — базис пространства решений системы уравнений $y' = A(x)y$.

Теорема (о виде общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Общее решение $y_{он}$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений $y' = A(x)y + b(x)$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и компонентами вектора $b(x)$, $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, есть сумма общего решения $y_{оо}$ соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ и какого-либо частного решения $y_{чн}$ неоднородной системы уравнений, то есть $y_{он}(x) = y_{оо}(x) + y_{чн}(x)$.

Наиболее просто фундаментальная система решений находится для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Отметим следующий результат.

Теорема. Вектор-функция

$$y = \alpha e^{rt} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T e^{rt} = (\alpha_1 e^{rt}, \alpha_2 e^{rt}, \ldots, \alpha_n e^{rt})^T$$

является решением однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $y' = A(x)y$, если r — собственное число, а α — ему соответствующий собственный вектор матрицы A.

Собственные векторы и собственные числа изучаются в линейной алгебре. Напомним, что ненулевой вектор x называется собственным вектором матрицы A, если имеет место соотношение $Ax = rx$ для некоторого числа r. Число r при этом называют собственным числом матрицы A, соответствующим собственному вектору x. Переписав соотношение $Ax = rx$ в виде $(A - rE)x = 0$, получаем в матричной форме однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов матрицы A, которая имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель $\det(A - rE)$ равен нулю. Таким образом, получаем алгоритм для нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A:

1) из уравнения $\det(A - rE) = 0$ находим собственные числа $r_1, r_2, \ldots, r_m$ $(m \leq n)$ матрицы A;

2) находя фундаментальные системы решений однородных систем линейных уравнений $(A - r_j E)x = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, получаем собственные векторы, отвечающие собственным числам r_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Более подробно о нахождении собственных чисел и собственных векторов можно прочитать, например, в [1, 2].

Возможны два случая: 1) все собственные числа различны; 2) есть кратные собственные числа. Разберем эти возможности по отдельности.

В первом случае имеем линейно независимую систему из n решений $y^1 = \alpha^1 e^{r_1 t}$, $y^2 = \alpha^2 e^{r_2 t}$, …, $y^n = \alpha^n e^{r_n t}$.

Во втором случае возможны два варианта. В первом для собственного числа r_j кратности k имеется k линейно независимых собственных векторов $\alpha^{j_1}, \alpha^{j_2}, \ldots, \alpha^{j_k}$. Этот вариант ничем не отличается от предыдущего случая. Во втором варианте для собственного числа r_j кратности k имеется меньше чем k линейно независимых собственных векторов. Мы будем пользоваться методом Эйлера, который заключается в том, что для собственного числа r_j соответствующие решения находятся в виде $y = P_{k-1}(t)e^{r_j t}$, где $P_{k-1}(t)$ — вектор-функция, каждая координата которой есть полином степени не выше $k-1$ с неопределенными коэффициентами, подлежащими определению. Подставляя это решение в исходную однородную систему, получаем соотношения для определения коэффициентов вектор-функции $P_{k-1}(t)$.

5.163. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -6x + 2y \end{cases}$, или, что то же самое, в матричной форме $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, матрица системы равна $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. Составляем уравнение $\det(A - rE) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ -6 & 2-r \end{vmatrix} = 0$ для нахождения собственных чисел. Раскрывая определитель, получаем уравнение $r^2 - 3r - 4 = 0$, решениями которого являются числа $r_1 = -1$ и $r_2 = 4$. Составляем однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному числу $r_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 1-r_1 & -1 \\ -6 & 2-r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, или, что то же самое, в координатной форме $\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -6\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0. \end{cases}$ Второе уравнение пропорционально первому, поэтому его можем вычеркнуть. Следовательно, общее решение этой системы есть $\gamma_2 = 2\gamma_1$. Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем фундаментальную систему решений рассматриваемой системы линейных уравнений, а следовательно, и собственный вектор $\alpha_1 = (1, 2)^T$ матрицы системы дифференциальных уравнений, соответствующий собственному числу $r_1 = -1$. Аналогично для собственного числа $r_2 = 4$, решая систему уравнений $\begin{pmatrix} 1-r_2 & -1 \\ -6 & 2-r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем собственный вектор $\alpha_2 = (-1, 3)^T$. Поэтому фундаментальная система решений данной системы дифференциальных уравнений состоит из функций $\alpha_1 e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$, $\alpha_2 e^{4t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} -e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{pmatrix}$, а общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{pmatrix}$.

5.164. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z, \end{cases}$ или, что то же самое, в матричной форме

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, матрица системы равна $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Составляем уравнение $\det(A - rE) = \begin{vmatrix} 4-r & -1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 1 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = 0$ для нахождения собственных чисел. Раскрывая определитель, получаем уравнение $(2-r)(3-r)^2 = 0$, решениями которого являются числа $r_1 = 2$ и $r_{2,3} = 3$ кратности 2. Составляем однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному числу $r_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4-r_1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-r_1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое, в координатной форме $\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$

Первое уравнение есть сумма второго и третьего уравнений, поэтому его можно вычеркнуть. Решая оставшуюся систему, получаем общее решение $\gamma_2 = \gamma_1$, $\gamma_3 = \gamma_1$. Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем собственный вектор $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, отвечающий собственному числу $r_1 = 2$. Составляем теперь однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному числу $r_{2,3} = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4-r_{2,3} & -1 & -1 \\ 1 & 2-r_{2,3} & -1 \\ 1 & -1 & 2-r_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое, в координатной форме $\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0. \end{cases}$

Все три уравнения одинаковы, поэтому два из них вычеркиваем. Общее решение полученной системы есть $\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$. Придавая свободным неизвестным γ_2, γ_3 значения $\gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0$ и $\gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$, получаем два линейно независимых собственных вектора $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$ и $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$, отвечающих собственному числу $r=3$. Поэтому фундаментальная система решений системы дифференциальных уравнений состоит из функций

$$\alpha_1 e^{2t} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix},\ \alpha_2 e^{3t} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3 e^{3t} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix}e^{3t}\\0\\e^{3t}\end{pmatrix},$$ а общее

решение имеет вид $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}e^{3t}\\0\\e^{3t}\end{pmatrix}$.

5.165. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z, \end{cases}$ или,

что то же самое, в матричной форме $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, матрица системы равна $\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Составляя уравнение для нахождения собственных чисел, имеем $\det(A - rE) = \begin{vmatrix}4-r & -1 & 0\\3 & 1-r & -1\\1 & 0 & 1-r\end{vmatrix} = 0$ или, раскрывая определитель, получаем уравнение $8 - 12r + 6r^2 - r^3 = (2-r)^3 = 0$, решениями которого является число $r_{1,2,3} = 2$ кратности 3. Составляем однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих этому собственному числу:

$$\begin{pmatrix}4 - r_{1,2,3} & -1 & 0\\3 & 1 - r_{1,2,3} & -1\\1 & 0 & 1 - r_{1,2,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\3 & -1 & -1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

или, что то же самое, в координатной форме $\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0. \end{cases}$

Второе уравнение есть сумма первого и третьего уравнений, поэтому его можно вычеркнуть. Решая оставшуюся систему, получаем общее решение $\gamma_2 = 2\gamma_1$, $\gamma_3 = \gamma_1$. Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем только один собственный вектор $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, отвечающий собственному числу $r_{1,2,3} = 2$.

Поэтому линейно независимые решения, соответствующие собственному числу $r_{1,2,3} = 2$, ищем в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bt+ct^2 \\ p+qt+st^2 \\ m+nt+kt^2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} (a+bt+ct^2)e^{2t} \\ (p+qt+st^2)e^{2t} \\ (m+nt+kt^2)e^{2t} \end{pmatrix}$.

Подставляя эти соотношения в исходную систему и приводя подобные, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2c+s=0, \\ -3c+k+s=0, \\ -c+k=0, \\ -2b+2c+q=0, \\ -3b+n+2s+q=0, \\ -b+2k+n=0, \\ -2a+b+p=0, \\ -3a+m+p+q=0, \\ -a+m+n=0 \end{cases}$$

для нахождения чисел $a, b, c, k, m, n, p, q, s$. Решая эту систему, имеем $k=c$, $m=a-b+2c$, $n=b-2c$, $p=2a-b$, $q=2b-2c$, $s=2c$. Придавая свободным неизвестным значения $a=C_1$, $b=C_2$, $c=C_3$, получаем общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (-1+2t)e^{2t} \\ (-1+t)e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t^2e^{2t} \\ \left(-2t+2t^2\right)e^{2t} \\ \left(2-2t+t^2\right)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

5.166. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x+y, \\ y' = -2x+3y, \end{cases}$ или, что то же самое, в матричной форме $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, матрица системы равна $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Решая уравнение $\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ -2 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 5 = 0$ для нахождения собственных чисел, получаем $r_{1,2} = 2 \pm i$. Для собственного числа $r_1 = 2+i$ однородная система линейных алгебраических уравнений для нахождения собственного вектора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-(2+i) & 1 \\ -2 & 3-(2+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i) & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в координатной форме $\begin{cases} -(1+i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + (1-i)\gamma_2 = 0. \end{cases}$

Если первое уравнение умножить на $1-i$, то получим второе уравнение, следовательно, оно пропорционально первому, поэтому его можем вычеркнуть. Тогда общее решение этой системы есть $\gamma_2=(1+i)\gamma_1$. Полагая $\gamma_1=1$, получаем собственный вектор $\alpha_1=(1,1+i)^T$ матрицы системы дифференциальных уравнений, соответствующий собственному числу $r_1=2+i$. Аналогично для собственного числа $r_2=\bar{r}_1=2-i$ собственным вектором является вектор $\alpha_2=\bar{\alpha}_1=(1,1-i)^T$. Поэтому система вектор-функций

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\alpha_1 e^{(2+i)t}=\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}e^{(2+i)t}=\begin{pmatrix}e^{(2+i)t}\\(1+i)e^{(2+i)t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}(\cos t+i\sin t)\\(1+i)e^{2t}(\cos t+i\sin t)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\alpha_2 e^{(2-i)t}=\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}e^{(2-i)t}=\begin{pmatrix}e^{(2-i)t}\\(1-i)e^{(2-i)t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}(\cos t-i\sin t)\\(1-i)e^{2t}(\cos t-i\sin t)\end{pmatrix}$$

является фундаментальной системой решений исходной системы дифференциальных уравнений. Можно показать, что система вектор-функций

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\operatorname{Re} e^{(2+i)t}\\\operatorname{Re}(1+i)e^{(2+i)t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\operatorname{Im} e^{(2+i)t}\\\operatorname{Im}(1+i)e^{(2+i)t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\sin t\\e^{2t}(\cos t+\sin t)\end{pmatrix},$$

состоящая из действительной и мнимой частей полученных решений, также является фундаментальной системой решений исходной системы дифференциальных уравнений. Так как вторая система вектор-функций есть система вещественнозначных решений, а первая — комплекснозначных, то для записи общего решения используем вторую систему вектор-функций. Таким образом, общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{2t}\sin t\\e^{2t}(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение следующих систем дифференциальных уравнений.

5.167. $\begin{cases}x'=2x+y,\\y'=3x+4y.\end{cases}$ **5.168.** $\begin{cases}x'=x-3y,\\y'=3x+y.\end{cases}$ **5.169.** $\begin{cases}x'=2x+y,\\y'=-x+4y.\end{cases}$

5.170. $\begin{cases}x'=2x-y+2z,\\y'=x+2z,\\z'=-2x+y-z.\end{cases}$ **5.171.** $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$ **5.172.** $\begin{cases}x'=x-2y,\\y'=2x-3y.\end{cases}$

5.173. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\-15&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$ **5.174.** $\begin{cases}x'=-2x+2y,\\y'=-4x+7y.\end{cases}$

5.175. $\begin{cases}x'=-3x+2y+2z,\\y'=-3x-y+z,\\z'=-x+2y.\end{cases}$ **5.176.** $\begin{cases}x'=4x+2y-2z,\\y'=x+3y-z,\\z'=3x+3y-z.\end{cases}$

5.3.3. Метод вариации произвольных постоянных

Предварительно рекомендуется прочитать п. 5.3.4 из [5].

Алгоритм метода следующий:

1) находим фундаментальную систему решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$ соответствующей однородной системы уравнений;

2) ищем решение уравнения неоднородной системы уравнений в виде $y(x)=C_1(x)y^1+C_2(x)y^2+\ldots+C_n(x)y^n=\sum\limits_{j=1}^{n}C_j(x)y^j$, где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — функции, подлежащие определению;

3) для нахождения функций $C_j'(x)$ составляем систему алгебраических уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n}C_j'(x)y^j=b(x)$, или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^{n}C_j'(x)y_k^j=b_k(x),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

4) решая полученную систему, находим $C_j'(x)$, $j=1, 2, \ldots, n$, а следовательно, и $C_j(x)$.

5.177. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=-x+y+2e^{2t},\\ y'=2x+e^{2t},\end{cases}$ или, что то же самое, в матричной форме $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\ 2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix}$, соответствующая однородная система уравнений имеет вид $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\ 2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, матрица системы равна $\begin{pmatrix}-1&1\\ 2&0\end{pmatrix}$. Составляем уравнение $\det(A-rE)=$ $=\begin{vmatrix}-1-r&1\\ 2&0-r\end{vmatrix}=0$ для нахождения собственных чисел. Раскрывая определитель, получаем уравнение $r^2+r-2=0$, решениями которого являются числа $r_1=1$ и $r_2=-2$. Составляем однородную систему линейных уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному числу $r_1=1$: $\begin{pmatrix}-1-r_1&1\\ 2&-r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\ 2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, или, что то же самое, в координатной форме $\begin{cases}-2\gamma_1+\gamma_2=0,\\ 2\gamma_1-\gamma_2=0.\end{cases}$ Второе уравнение пропорционально первому, поэтому его можем вычеркнуть. Следовательно, общее решение этой системы есть $\gamma_2=2\gamma_1$. Полагая $\gamma_1=1$, получаем фундаментальную систему решений рассматриваемой системы линейных уравнений, а следовательно, и собственный вектор $\alpha_1 = (1, 2)^T$ матрицы системы дифференциальных уравнений, соответствующий собственному числу $r_1 = 1$. Аналогично для собственного числа $r_2 = -2$, решая систему уравнений $\begin{pmatrix} -1-r_2 & 1 \\ 2 & -r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем собственный вектор $\alpha_2 = (1, -1)^T$. Поэтому фундаментальная система решений соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений состоит из функций $\alpha_1 e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$, $\alpha_2 e^{-2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$. Решение исходной системы ищем в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем систему

$$C_1'(t)\begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + C_2'(t)\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$

или в координатной форме $\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-2t} = 2e^{2t}, \\ 2C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-2t} = e^{2t}. \end{cases}$

Решая эту систему, находим $C_1' = e^t$, $C_2' = e^{4t}$. Проинтегрировав, имеем $C_1(t) = e^t + \tilde{C}_1$, $C_2 = \dfrac{1}{4}e^{4t} + \tilde{C}_2$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{C}_1\begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{2t} \\ \frac{7}{4}e^{2t} \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение следующих систем дифференциальных уравнений.

5.178. $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$ **5.179.** $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$

5.180. $\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ **5.181.** $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -x + 3y + \dfrac{e^{2t}}{\cos^3 t}. \end{cases}$

5.182. $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \dfrac{1}{e^{-2t}+9}, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ **5.183.** $\begin{cases} x' = -2x + 4y, \\ y' = -2x + 2y + \dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

Раздел 1

1.6. $\frac{(\sin 3x+2)^6}{18}+C$. **1.7.** $\frac{(2+3\ln x)^5}{15}+C$. **1.8.** $\frac{1}{3}\sqrt{2+3x^2}+C$.

1.9. $\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{1+2\ln x}\right)^4+C$. **1.10.** $\frac{1}{6}\sqrt{5+4\sin 3x}+C$.

1.11. $-\frac{1}{15}(3+5\ln x)^{-3}+C$. **1.17.** $\frac{1}{12}\ln\left(3x^4+5\right)+C$.

1.18. $\frac{1}{6}\ln\left|4+3\operatorname{tg}2x\right|+C$. **1.19.** $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)+C$.

1.20. $\frac{1}{4}\ln\left|4\ln x+5\right|+C$. **1.21.** $\frac{1}{18}\ln\left(4+9x^2\right)+C$.

1.22. $\frac{1}{48}\ln\left|16x^3+25\right|+C$. **1.34.** $\frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{6\sin x}{5}+C$.

1.35. $-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{ctg}x}{3}+C$. **1.36.** $\frac{1}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}\ln x}{3}+C$.

1.37. $\frac{1}{21}\operatorname{arctg}\frac{3x}{7}+C$. **1.38.** $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$. **1.39.** $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{2x^2}{5}+C$.

1.40. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{2x^2}{3}+C$. **1.41.** $\frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}3x}{2}+C$.

1.42. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2x}}{2}+C$. **1.43.** $\frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3x}}{2}+C$.

1.52. $\frac{1}{6}\arcsin\frac{2\sin 3x}{3}+C$. **1.53.** $\frac{1}{15}\arcsin\frac{3\operatorname{tg}5x}{4}+C$.

1.54. $\frac{1}{35}\arcsin\frac{5\operatorname{tg}7x}{6}+C$. **1.55.** $\frac{1}{5}\arcsin\frac{5\ln x}{4}+C$.

1.56. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{7}+C$. **1.57.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C$. **1.58.** $\frac{1}{6}\arcsin\frac{3x^2}{5}+C$.

1.59. $\frac{1}{9}\arcsin\frac{3x^3}{7}+C$. **1.60.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3\sqrt{2x}}{2}+C=\frac{1}{6}\arcsin(9x-1)+C$.

1.61. $\frac{1}{5}\arcsin\frac{2\sqrt{5x}}{3}+C$. **1.66.** $\frac{1}{6}e^{3x^2}+C$. **1.67.** $-\frac{1}{10}e^{2\cos 5x}+C$.

1.68. $\frac{1}{15}e^{3x^5}+C$. **1.69.** $\frac{1}{3}e^{\ln^3 x+5}+C$. **1.70.** $-\frac{1}{7}e^{\cos^2 7x}+C$.

1.71. $\frac{2}{5}e^{5\sqrt{x}}+C$. **1.76.** $\frac{1}{9}\sin 9x+C$. **1.77.** $-\frac{1}{7}\cos(7x+8)+C$.

1.78. $-\frac{2}{3}\cos\left(3\sqrt{x}\right)+C$. **1.79.** $\frac{1}{5}\sin(5\ln x)+C$.

1.80. $\frac{1}{2}\sin\left(2e^{x}+5\right)+C$. **1.84.** $-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2x^3}}+C$. **1.85.** $\frac{1}{30}\cos\frac{5}{x^6}+C$.

1.86. $5\cos\frac{1}{5x}+C$. **1.87.** $\frac{2}{\sqrt{6}}\arcsin\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3}}+C$. **1.88.** $e^{x}-\frac{2}{3}e^{-3x}+C$.

1.89. $\frac{1}{35}\sin^5 7x+C$. **1.90.** $\frac{2}{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}3x}+C$.

1.91. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arccos\frac{\sqrt{5}\cos x}{\sqrt{2}}+C$. **1.92.** $-x-\frac{1}{8}\ln\left|1-e^{-16x}\right|+C$.

1.93. $-\frac{1}{10}\ln\left(7-5\sin^2 x\right)+C$. **1.94.** $\frac{1}{5\ln 7}7^{2-5\operatorname{arcctg}x}+C$.

1.95. $-\frac{5}{4}(\cos x)^{4/5}+C$. **1.96.** $-\frac{1}{2}\left(1-2e^{2x}\right)^{1/2}+C$.

1.97. $\frac{2}{189}\left(x^7+9\right)^{3/2}+\frac{2}{189}\left(x^7\right)^{3/2}+C$. **1.98.** $-\frac{(x-1)^{-99}}{99}+C$.

1.99. $\frac{2}{3}\sqrt{3\sin^2 x+4}+C$. **1.100.** $\frac{1}{3}\left(e^{2x}+5\right)^{3/2}+C$.

1.101. $\frac{7}{6}\ln^2|2x-2|+C$. **1.102.** $\ln\left(x^2+5\right)+C$.

1.103. $\frac{1}{4}\ln\left(2\ln^2 x+3\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\ln x}{\sqrt{3}}+C$.

1.104. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+3\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$. **1.105.** $\frac{1}{27\left(1-x^3\right)^9}+C$.

1.106. $\ln(5-\cos x)+C$. **1.107.** $-\frac{1}{6}\cos^3 2x+C$. **1.108.** $\frac{1}{4\left(x^2-5\right)^2}+C$.

1.109. $\frac{3}{5}x^5+\frac{16}{3}\ln^3 x+C$. **1.110.** $-\frac{1}{3}\left(3-x^2\right)^{3/2}+C$.

1.111. $-\frac{\operatorname{arcctg}^4 x}{4}+C$. **1.112.** $-\ln\left|5-2\sqrt{x}\right|+C$. **1.113.** $\frac{4}{5}(\operatorname{tg}x)^{5/4}+C$.

1.114. $\frac{2}{3\sqrt{3}\left(4-\sqrt{3x^3}\right)}+C$. **1.115.** $\operatorname{arctg}x+\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$.

1.116. $\frac{1}{4}\cos\frac{2}{x^2}+C$. **1.128.** $-\frac{2}{5}\sqrt{1-5x}\arcsin 5x+\frac{4}{5}\sqrt{1+5x}+C$.

1.129. $\frac{5}{24}x^4\left(x^4+8\right)^{6/5}-\frac{25}{264}x^4\left(x^4+8\right)^{11/5}+C$.

1.130. $\frac{1}{2}(2x+3)\ \ln^2(2x+3)-(2x+3)\ \ln(2x+3)+2x+C$.

1.131. $x\ln\left(x^2+9\right)-2x+6\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

1.132. $\left(\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{50}\right)\operatorname{arctg}5x-\frac{x}{10}-\frac{1}{5}\ln\left(25x^2+1\right)+C$.

1.133. $-\frac{x+3}{5}\cos 5x+\frac{\sin 5x}{25}+C$. **1.134.** $\left(x+\frac{4}{3}\right)\ln|3x+4|-x+C$.

1.135. $x\ln\left(7x^2+4\right)-2x+\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}x}{2}+C$.

1.136. $x\operatorname{arctg}4x-\frac{1}{8}\ln\left(16x^2+1\right)+C$.

1.137. $(2x+3)\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x-x\right)+\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+x^2+C$.

1.138. $\left(x^3+5x\right)\ln|x|-\frac{1}{3}x^3-5x+C$.

1.139. $x\operatorname{arcctg}7x+\frac{1}{14}\ln\left(49x^2+1\right)+C$.

1.140. $\frac{3x}{4}e^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+C$. **1.141.** $\frac{1}{4}\left(x^4-1\right)e^{x^4}+C$.

1.142. $\frac{1}{34}e^{3x}\left(3\cos 5x+5\sin 5x\right)+C$.

1.143. $\frac{1}{58}e^{7x}\left(7\sin 3x-3\cos 3x\right)+C$. **1.144.** $\frac{1}{6}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)e^{3x^2+5}+C$.

1.145. $\left(2x^2+x+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}2x-x-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+1\right)+C$.

1.146. $\frac{1}{2}\left(x^2-9\right)\ln^2(x+3)-\frac{1}{2}\left(x^2-6x-27\right)\ln(x+3)+\frac{1}{4}\left(x^2-18x\right)+C$.

1.152. $\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\ln|2x-3|+C$. **1.153.** $\frac{2}{3}x+\frac{23}{9}\ln|3x-1|+C$.

1.154. $x+\frac{5}{4}\ln\left(16x^2+25\right)+C$. **1.155.** $\frac{1}{9}x-\frac{4}{27}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$.

1.156. $\frac{2}{3}x+\frac{11}{9}\ln|3x-4|+C$. **1.157.** $\frac{3}{4}x+\frac{29}{16}\ln|4x-3|+C$.

1.166. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$. **1.167.** $-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{18}\cos^3 6x+C$.

1.168. $-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{26}\cos 13x+C$. **1.169.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x-x+C$.

1.170. $\frac{1}{15}\operatorname{tg}^3 5x-\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x+x+C$. **1.171.** $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{26}\sin 13x+C$.

1.177. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{6}+C$. **1.178.** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{5}+C$.

1.179. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{4}+C$. **1.180.** $\arcsin\frac{x-4}{3}+C$.

1.181. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-3}{4}+C$.

1.182. $\frac{3}{8}\ln\left(4x^2+4x+10\right)-\frac{7}{12}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C$.

1.183. $\frac{1}{9}\ln\left(9x^2+12x+20\right)+\frac{5}{36}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{4}+C$.

1.184. $-\frac{3}{4}\sqrt{7-4x^2+12x}+\frac{13}{4}\arcsin\frac{2x-3}{4}+C$.

1.185. $-\frac{1}{4}\sqrt{8-4x^2+4x}+\frac{5}{4}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$.

1.188. $\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x-3}\right|+C$. **1.189.** $\ln\left|\frac{(x-3)^2}{x+4}\right|+C$.

1.190. $\ln\left|\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\right|+C$. **1.191.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)(x-2)^2}{x+1}\right|+C$.

1.194. $\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+C$. **1.195.** $\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right|+\frac{1}{x-1}+C$.

1.196. $\ln\left|\frac{(x-3)^2}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}+C$. **1.197.** $-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+C$.

1.200. $-\ln\left(x^2-2x+10\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+\ln\left(x^2-4x+20\right)+2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}+C$.

1.201. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-6x+18\right)-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C$.

1.202. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+\ln\left(x^2-2x+10\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$.

1.204. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x-2}{2\left(x^2+2x+2\right)}+C$.

1.205. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)-\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\frac{x+6}{x^2+3}+C.$

1.206. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{43}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{3x+10}{10\left(x^2+5\right)}+$

$+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C.$

1.207. $-\frac{23}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{5x+36}{18\left(x^2+9\right)}+C.$

1.210. $\frac{2}{x-5}+\ln|x-5|+\ln\left(x^2+6x+10\right)-2\operatorname{arctg}(x+3)+C.$

1.211. $2x^2-3x+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}+2\ln|x-1|+\ln\left(x^2+4x+13\right)-$

$-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$

1.212. $3\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+40\right)+\frac{2}{x-3}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{6}+C.$

1.213. $\frac{A_1x+B_1}{x^2+2x+37}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+2x+37\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(x^2+2x+37\right)^3}+\frac{C_1}{x-4}+$

$+\frac{C_2}{(x-4)^2}+\frac{D}{x+8}.$

1.214. $\frac{A_1x+B_1}{x^2-10x+34}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2-10x+34\right)^2}+\frac{C_1}{x+5}+\frac{C_2}{(x+5)^2}+\frac{C_3}{(x+5)^3}+\frac{D}{x-2}.$

1.219. $\sqrt[3]{\frac{x-5}{x-2}}+C.$ **1.220.** $6\sqrt[6]{x-3}-6\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x-3}}{\sqrt{2}}+C.$

1.221. $2\ln\left(5+\sqrt{x+2}\right)+C.$

1.222. $2\sqrt{x+8}+6\sqrt[6]{x+8}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x+8}-1}{\sqrt[6]{x+8}+1}\right|+C.$

1.223. $2\sqrt{x+5}+C.$ **1.224.** $\left(\sqrt{x-3}-3\right)^2+6\ln\left|\sqrt{x-3}+1\right|+C.$

1.227. $-\frac{\sqrt{16-9x^2}}{16x}+C.$ **1.228.** $-\frac{\sqrt{25+x^2}}{25x}+C.$

1.232. $-\frac{1}{2\left(2\sqrt[3]{x}+5\right)^3}+C.$ **1.233.** $-\frac{4}{9}\frac{1+3\sqrt[4]{x}}{\left(2+3\sqrt[4]{x}\right)^2}+C.$

1.234. $-2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt[4]{16+x^2}}{2}+\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{16+x^2}-2}{\sqrt[4]{16+x^2}+2}\right|+C.$

1.235. $\dfrac{5}{6}\left(3+\sqrt[3]{x^2}\right)^{9/5}-\dfrac{45}{8}\left(3+\sqrt[3]{x^2}\right)^{4/5}+C\,.$

1.236. $-\left(\dfrac{4+x^2}{x^2}\right)^{1/2}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4+x^2}-|x|}{\sqrt{4+x^2}+|x|}\right|+C\,.$

1.237. $\dfrac{8|x|}{\sqrt{8+x^2}}-6\ln\left|\dfrac{\sqrt{8+x^2}+|x|}{\sqrt{8+x^2}-|x|}\right|+\dfrac{1}{2}|x|\sqrt{8+x^2}+C\,.$

1.238. $-\dfrac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x}-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x}-1\right|+\dfrac{1}{6}\ln\left|\left(\dfrac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x}\right)^2+\dfrac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x}+1\right|+$

$+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\sqrt[3]{5+x^3}+x}{\sqrt{3}\,x}+C\,.$

1.242. $-\dfrac{25}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4x-25}\right|+\dfrac{29}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4x-25}+2\right|-$

$-\dfrac{29}{2\left(x+\sqrt{x^2+4x-25}+2\right)}+C\,.$

1.243. $-\ln\left|\sqrt{x^2+4x-5}-x-2\right|+C\,.$

1.244. $-6\dfrac{x\left(\sqrt{9-6x-x^2}+3\right)}{\sqrt{9-6x-x^2}-x+3}-\dfrac{x^4}{\left(\sqrt{9-6x-x^2}-x+3\right)^2}-$

$-36\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{9-6x-x^2}+3}{x}+C\,.$

1.245. $\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{5}}+\dfrac{x+1}{2}\sqrt{4-2x-x^2}+C\,.$

1.246. $\sqrt{3x+x^2}+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3x+x^2}+x}{\sqrt{3x+x^2}-x}\right|+C\,.$

1.247. $\dfrac{(x-2)\sqrt{4x-3-x^2}}{2}-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{4x-x^2-3}}{x-1}+C\,.$

1.248. $-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+6x-16}+x-2}+C$.

1.256. $\dfrac{26}{45}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin 9x}{5}-\dfrac{1}{9}\sin 9x+C$.

1.257. $\dfrac{1}{33}\cos^{11}3x-\dfrac{1}{27}\cos^{9}3x+C$. **1.258.** $\dfrac{1}{35}\operatorname{tg}^5 7x+\dfrac{1}{21}\operatorname{tg}^3 7x+C$.

1.259. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{2}+C$.

Раздел 2

2.7. $6-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{4}$. **2.8.** $\dfrac{1}{4}\left(5\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{2}\right)$. **2.9.** $\dfrac{1}{24}\ln 5$. **2.10.** $\dfrac{1}{36}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$.

2.11. $\dfrac{1}{15}\left(e^3-1\right)$. **2.12.** $\dfrac{1}{2}\left(e^2-e\right)$. **2.13.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **2.14.** $\dfrac{1}{30}\operatorname{arctg}\dfrac{20}{3\sqrt{3}}$.

2.15. $\dfrac{19}{49}$. **2.16.** $\dfrac{3e+2}{3}\ln(3e+2)-e-\dfrac{2}{3}\ln 2$.

2.17. $\dfrac{\pi+4}{16}\sqrt{3}-\dfrac{1}{96}\pi^2-\dfrac{1}{12}\pi-\dfrac{3}{16}\ln 2$.

2.18. $3\operatorname{arctg}21-\operatorname{arctg}7-\dfrac{1}{14}\ln\dfrac{221}{25}$. **2.19.** $\dfrac{1}{81}\left(44e^{45}+1\right)$.

2.20. $124+3\ln\dfrac{9}{5}$. **2.21.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. **2.22.** $18-12\ln\dfrac{3}{2}$.

2.23. $\dfrac{2}{315}-\dfrac{11}{10080}\sqrt{2}$. **2.29.** $\dfrac{1}{8\ln^2(4e-1)}$. **2.30.** Расходится.

2.31. Расходится. **2.32.** $\dfrac{1}{27}\sqrt{3}$. **2.33.** $\dfrac{1}{8}\pi-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$.

2.34. Расходится. **2.43.** $\alpha=1{,}5$; сходится. **2.44.** $\alpha=1{,}5$; сходится.

2.45. $\alpha=1$; расходится. **2.46.** $\alpha=\dfrac{4}{3}$; сходится.

2.47. $\alpha=1$; расходится. **2.48.** $\alpha=\dfrac{3}{4}$; расходится. **2.57.** $\dfrac{5}{16}\sqrt[5]{256}$.

2.58. Расходится. **2.59.** Расходится. **2.60.** $-\dfrac{5}{28}(7\ln 2)^{4/5}$.

2.61. $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{27}$. **2.62.** $\dfrac{5}{4}$. **2.63.** $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$. **2.64.** Расходится.

2.65. Расходится. **2.66.** Расходится. **2.74.** $\alpha=\dfrac{5}{6}$; сходится.

2.75. В точке $x=0$ $\alpha=\frac{1}{2}$, в точке $x=\pi$ $\alpha=\frac{1}{3}$; сходится.

2.76. В точке $x=0$ $\alpha=\frac{1}{2}$, в точке $x=\frac{\pi}{2}$ $\alpha=\frac{3}{2}$; расходится.

2.77. $\alpha=\frac{5}{4}$; расходится. **2.78.** $\alpha=\frac{1}{6}$; сходится.

2.79. $\alpha=\frac{1}{5}$; сходится. **2.80.** $\alpha=\frac{5}{3}$; расходится. **2.81.** $\alpha=\frac{1}{5}$; сходится.

2.82. В точке $x=2$ $\alpha=\frac{3}{2}$; в точке $x=4$ $\alpha=\frac{1}{4}$; расходится.

2.83. $\alpha=\frac{1}{5}$; сходится. **2.84.** $\alpha=\frac{3}{5}$; сходится.

2.85. $\alpha=\frac{3}{2}$; расходится. **2.86.** $\alpha=\frac{1}{6}$; сходится.

2.87. $\alpha=\frac{11}{4}$; расходится. **2.88.** $\alpha=\frac{1}{6}$; сходится.

2.89. $\alpha=\frac{1}{12}$; сходится. **2.101.** $\frac{e^6-1}{2e^2}$. **2.102.** $52\frac{1}{12}$. **2.103.** $21\frac{1}{3}$.

2.104. а) $\pi(e-2)$; **б)** $\frac{1}{2}\pi\left(e^2+1\right)$.

2.105. $-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{21}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{8}\left(\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}-\ln\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right)$. **2.106.** 2π. **2.107.** $\sqrt{3}$.

2.108. $876{,}8\ln 4+96$. **2.109.** $2{,}95+0{,}05e^{-20}$. **2.110.** $3992120{,}64$.

Раздел 3

3.7. а) $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{-2x-x^2}}^{\sqrt{-2x-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x}^{-x}f(x,y)dy=$

$$=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{y}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-y}f(x,y)dx;$$

б) $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-x}f(x,y)dy=$

$$=\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{-2y-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{y}^{-y}f(x,y)dx;$$

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{-1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

д) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy =$

$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$;

е) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{-2y-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{-2y-y^2}} f(x,y)\,dx$;

ж) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x}}^{-x^2} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{-y^2} f(x,y)\,dx$;

з) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{x^2-9}^{0} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-9}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+9}}^{\sqrt{y+9}} f(x,y)\,dx$;

и) $\int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{0}^{16-x^2} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{16} dy \int\limits_{-\sqrt{16-y}}^{\sqrt{16-y}} f(x,y)\,dx$;

к) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{16-x^2} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^8 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_8^{16} dy \int\limits_{-\sqrt{16-y}}^{\sqrt{16-y}} f(x,y)\,dx$.

3.8. а) $\int\limits_2^5 dx \int\limits_{-2x+4}^{0} f(x,y)dy = \int\limits_{-6}^{0} dy \int\limits_{\frac{4-y}{2}}^{5} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_2^5 dx \int\limits_{-2x+4}^{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}} f(x,y)dy = \int\limits_{-6}^{0} dy \int\limits_{2-\frac{1}{2}y}^{5} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y+2}^{5} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{\frac{4-2x}{3}}^{\frac{2x+8}{3}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{\frac{4-2x}{3}}^{8-2x} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{4-3y}{2}}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{3y-8}{2}}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)dx;$

г) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{\frac{-x-1}{3}}^{\frac{5x+5}{3}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{\frac{-x-1}{-3}}^{\frac{29-7x}{3}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-3y-1}^{\frac{29-3y}{7}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{5} dy \int\limits_{\frac{3y-5}{5}}^{\frac{29-3y}{7}} f(x,y)dx.$

3.9. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{\frac{2}{3}x} f(x,y)dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{3x-11}^{-x+5} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-\frac{3}{2}y}^{\frac{y+11}{3}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{3}{2}y}^{\frac{y+11}{3}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{3}{2}y}^{-y+5} f(x,y)dx.$

3.10. а) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y^2/4}^{6-\sqrt{y}} f(x,y)dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{\sqrt{y/2}}^{4-\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx;$

в) $\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+5} f(x,y)dx.$

3.11. а) 1,125; **б)** 1,5; **в)** 1, переменить порядок интегрирования; **г)** 2, переменить порядок интегрирования; **д)** $e-2$, переменить порядок интегрирования; **е)** –0,5, переменить порядок интегрирования.

3.12. а) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} (2-2x-4xy)\,dy = -\frac{8}{3};$

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\frac{-x-1}{5}}^{\frac{3x+3}{2}} (3x+2y)dy + \int\limits_{1}^{4} dx \int\limits_{\frac{-x-1}{5}}^{\frac{-4x+13}{3}} (3x+2y)dy = 45\frac{1}{3};$

в) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\ln x}^{\ln 2x} e^{x^2+y}dy = \frac{e^4-e}{2};$

г) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} \left(x+y^2\right)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{-x+1} \left(x+y^2\right)dy = \frac{1}{3}$; **д)** $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} xy^2 dy = \frac{716}{45}$;

е) $\int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{3+\cos x} (x+3y)dy = 6\pi^2 + 28,5\pi$;

ж) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_{x}^{2x} xydy + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int\limits_{x}^{\frac{1}{x}} xydy = \frac{1}{4}\ln 2$;

з) $\int\limits_{0}^{0,5} dx \int\limits_{0}^{2} \left(x^2+y^2\right)dy + \int\limits_{0,5}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{x}} \left(x^2+y^2\right)dy = \frac{47}{12}$.

3.19. **а)** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2-2x} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2+3} f(x,y,z)dz$; **б)** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-2y} dx \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$;

в) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} dy \int\limits_{0}^{8-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz$;

г) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{8-x^2}} dy \int\limits_{0}^{8-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz$; **д)** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\frac{6-2x}{3}} dy \int\limits_{0}^{5-x-y} f(x,y,z)\,dz$;

е) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx \int\limits_{1}^{10} f(x,y,z)dz = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{1}^{10} f(x,y,z)dz$;

ж) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2}^{2+\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{0}^{8} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx \int\limits_{0}^{8} f(x,y,z)\,dz$;

з) $\int\limits_{0}^{15} dx \int\limits_{\frac{15-x}{5}}^{\frac{15-x}{3}} dy \int\limits_{0}^{\frac{15-x-y}{2}} f(x,y,z)\,dz$; **и)** $\int\limits_{0}^{15} dx \int\limits_{\frac{15-x}{5}}^{\frac{15-x}{3}} dy \int\limits_{0}^{\frac{25-x-y}{2}} f(x,y,z)\,dz$;

к) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_{x-4}^{4-x} f(x,y,z)\,dz + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int\limits_{x-4}^{4-x} f(x,y,z)dz +$

$+\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int\limits_{x-4}^{4-x} f(x,y,z)dz$;

л) $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx \int_0^{8-2y} f(x,y,z)dz + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx \int_0^{8-2y} f(x,y,z)dz +$

$+\int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx \int_0^{8-2y} f(x,y,z)dz.$

3.20. а) $\frac{19}{8}$; **б)** $\frac{7592}{10395}$; **в)** $\frac{10871}{7920}$; **г)** $-\frac{53}{70}$.

3.21. а) $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^2 \sqrt{x}dz = \frac{64\sqrt{2}}{15}$;

б) $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{3-x-y} \frac{dz}{(xy+z+3)^4} = \frac{1}{144}$;

в) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz\,dz = \frac{4}{3}$; **г)** $\int_0^2 dy \int_{-y}^{y} dx \int_{-\sqrt{y^2-x^2}}^{\sqrt{y^2-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,zdz = 0$.

3.36. а) $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_1^2 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

б) $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{3/\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

в) $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\frac{6}{3\cos\varphi+2\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

г) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\mathrm{arctg}\,0,5} d\varphi \int_{\frac{4}{\cos\varphi-2\sin\varphi}}^{-\frac{2}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho +$

$+\int_{-\mathrm{arctg}\,0,5}^{0} d\varphi \int_{\frac{4}{\cos\varphi-2\sin\varphi}}^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

д) $\int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_0^{-4\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$; **е)** $\int_{-\pi}^{0} d\varphi \int_{-2\sin\varphi}^{-4\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

ж) $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{-2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$;

з) $\int\limits_{-3\pi/4}^{-\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{-2\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\,;$

и) $\int\limits_{1}^{2} \rho d\rho \int\limits_{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

к) $\int\limits_{2}^{4} \rho\, d\rho \int\limits_{\pi-\arcsin\frac{2}{\rho}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

л) $\int\limits_{2}^{4} \rho d\rho \int\limits_{-\arcsin\frac{2}{\rho}}^{-\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

м) $\int\limits_{2}^{4} \rho\, d\rho \int\limits_{-\pi+\arcsin\frac{1}{\rho}}^{-\pi+\arcsin\frac{2}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

н) $\int\limits_{2}^{4} \rho\, d\rho \int\limits_{\pi-\arccos\frac{1}{\rho}}^{\pi+\arccos\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

о) $\int\limits_{2}^{4} \rho\, d\rho \int\limits_{-\pi+\arcsin\frac{1}{\rho}}^{-\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

п) $\int\limits_{2}^{4} \rho\, d\rho \int\limits_{\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi\,;$

р) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{1/\cos\varphi}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\,.$

3.37. а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \left(5\cos^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi\right)\rho^3 d\rho = \frac{25\pi}{8} - \frac{8}{3}\,;$

б) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \cos\rho^2 \cdot \rho\, d\rho = -\pi\,;$ **в)** $\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{\frac{3}{\cos\varphi}}^{6\cos\varphi} \sin\varphi \cdot \rho^2 d\rho = 9\,;$

г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1}^{4} \sqrt[3]{5+\rho^2} \cdot \rho\, d\rho = \frac{\pi}{24}\left(21\sqrt[3]{21} - 6\sqrt[3]{6}\right).$

3.38. а) $260\sqrt{2}$, замена $x = 2\rho\cos\varphi$, $y = 3\rho\sin\varphi$, $|J| = 6\rho$, $1 \le \rho \le 3$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{16\pi}{3}$, замена $x = 2\rho\cos\varphi$, $y = 4\rho\sin\varphi$, $|J| = 8\rho$, $0 \le \rho \le 1$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$;

в) 0, замена $x = 3\rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\sin\varphi$, $|J| = 6\rho$, $1 \le \rho \le 4$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$;

г) $\frac{832}{35}$, замена $x = 3\rho\cos^3\varphi$, $y = 4\rho\sin^3\varphi$, $|J| = 36\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, $1 \le \rho \le 3$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

д) $\frac{837}{20}$, замена $x = 3\rho\cos^4\varphi$, $y = 2\rho\sin^4\varphi$, $|J| = 24\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$, $1 \le \rho \le 4$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

3.39. а) 12, замена $u = x + 2y$, $v = 3x - y$, $|J| = \frac{1}{7}$, $1 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 5$;

б) $12\ln 2$, замена $u = 3x + 2y$, $v = \frac{y}{x}$, $|J| = \frac{u}{(3+2v)^2}$, $6 \le u \le 12$, $-1 \le v \le 5$;

в) $\frac{20}{3}$, замена $u = \frac{y}{x^2}$, $v = \frac{y}{x}$, $|J| = \frac{v^2}{u^3}$, $1 \le u \le 9$, $1 \le v \le 4$;

г) 26, замена $u = \frac{y}{x^3}$, $v = \frac{x}{y^3}$, $|J| = \frac{1}{8u^{3/2}v^{3/2}}$, $1 \le u \le 27$, $1 \le v \le 9$;

д) $\frac{5\left(\sqrt[5]{8}-1\right)\left(\sqrt[5]{2}-1\right)}{18}$, замена $u = \frac{y}{x^3}$, $v = \frac{x}{y^2}$, $|J| = \frac{1}{5u^{8/5}v^{9/5}}$, $1 \le u \le 8$, $1 \le v \le 4$;

е) 4,5, замена $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$, $|J| = \frac{1}{2u}$, $1 \le u \le 3$, $4 \le v \le 5$;

ж) 1,8, замена $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{y}{x}$, $|J| = \frac{u}{v^4}$, $1 \le u \le 10$, $3 \le v \le 5$;

з) 0, замена $u = x + y$, $v = x - y$, $|J| = \frac{1}{2}$, $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$.

3.52. а) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_3^5 f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2 d\rho$;

б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^3 \rho\, d\rho \int_0^{9-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$;

в) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2/10}^{10} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$;

г) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho^2/10} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$;

д) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_3^{4} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho$;

е) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_3^{4} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho$;

ж) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4} \rho d\rho \int\limits_0^{16-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$;

з) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{5} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/5}^{5} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$;

и) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{10} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/10}^{10} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$.

3.53. а) $\frac{31\pi}{15}$; **б)** $\frac{93\pi}{4}$; **в)** 13,5; **г)** 8π.

3.54. а) $\frac{27\left(4\sqrt{2}-1\right)\pi}{10}$, замена $x = 3\rho\cos^3\varphi\sin^3\theta$, $y = 2\rho\sin^3\varphi\sin^3\theta$, $z = 3\rho\cos^3\theta$;

б) 24, замена $x = 4\rho\cos^4\varphi$, $y = 3\rho\sin^4\varphi$, $z = z$;

в) 2016, замена $x = x$, $y = 3\rho\sin\varphi$, $z = 4\rho\cos\varphi$;

г) 2455,2, замена $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = 2\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = 3\rho\cos\theta$.

3.55. а) -2, замена $u = x - y + 3z$, $v = 2x + y - z$, $w = x + 2y - z$;

б) 16, замена $u = 3x + y + z$, $v = x - y + z$, $w = -x + 2y - z$;

в) 54, замена $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$, $w = z$;

г) 4,5, замена $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x^2}$;

д) 0,25, замена $u = \frac{y}{x^2}$, $v = \frac{x}{y^2}$, $w = \frac{z}{x}$;

е) 252, замена $u = 2x + 3y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{y}$.

3.63. а) 0,3; **б)** $\int\limits_{-\mathrm{arctg}\,2}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{r} \rho\, d\rho = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{arctg}\, 2$; **в)** $\frac{\pi}{2}$.

3.64. а) 6,75; **б)** 576. **3.65. а)** $\frac{3\pi}{2}$; **б)** $\frac{8\pi}{3}$.

Раздел 4

4.10. а) $\frac{\sqrt{17^3}-1}{3}$; **б)** $\frac{43}{6}\sqrt{26}$. **4.11.** $28\sqrt{6}$.

4.12. $\frac{1}{2}\sqrt{10}\left(2\pi^2+9\pi+12\right)$. **4.13.** 0.

4.14. $\sqrt{e^2+1}+\ln\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}-1$. **4.15.** $-\frac{200}{3}\sqrt{43}$.

4.16. 256π. **4.17.** -375π. **4.29. а)** $34\frac{2}{3}$; **б)** 0; **в)** –18.

4.30. а) $30\pi+0{,}5\pi^4$; **б)** $21\frac{1}{2}$. **4.31.** $\frac{25}{4}\pi$. **4.32.** $\frac{40}{9}\pi\left(d^2-9\right)$.

4.33. 216. **4.34.** –13,5. **4.35. а)** $-\frac{2}{3}\pi R^3$; **б)** $-\frac{2}{3}\pi R^3$; **в)** $12\pi^2$.

4.36. $-\frac{64}{3}\pi$. **4.37.** 12π.

4.46. $\mathrm{grad}\, u\,(2,1,-3)=(-9,12,-23)^T$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{a}}=\frac{40}{3}$.

4.47. $U(x,y)=x^2y^3-x^2+y$. **4.48.** $U(x,y)=xy^2+x^3-y^3$.

4.49. $U(x,y,z)=xy^2z^4-x^2z+y^3$. **4.50.** 2π. **4.51.** $\frac{3}{2}$.

4.52. $-\frac{64}{3}-16\pi+24$. **4.53.** $\frac{8192\pi}{3}$. **4.54.** $-\frac{27}{2}$.

Раздел 5

5.5. $\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{C}{x^4+1}$, $y=-1$. **5.6.** $\sin y = C\sqrt{x^2+2}$.

5.7. $y\frac{Ce^x}{(x+5)^5}-1$, $x=-5$. **5.8.** $(x+3)e^y=C\,(y+2)^2$, $y=-2$.

5.9. $\cos y = \dfrac{C}{\sqrt[3]{x^3-9}}$. **5.10.** $\left(y^2+1\right)^3 = C\left(x^3+2\right)^2$, $x=-\sqrt[3]{2}$.

5.11. $\left(y^3+1\right)^2 = C\left(e^{2x}+5\right)^3$. **5.12.** $y=\dfrac{C(2x-1)-5}{2}$.

5.13. $y=\dfrac{2x^2}{2Cx^2-1}$, $y=0$. **5.14.** $\ln y = C\sqrt{x^2+2}-3$.

5.15. $y=2+C\sin x$. **5.16.** $y=3\sin\left(\operatorname{arctg} x^3+C\right)$, $y=\pm 3$.

5.17. $2\sqrt{2x+3y-4}=x+C$. **5.18.** $-\dfrac{1}{2(5x+3y+7)^2}=x+C$.

5.22. $y^2-xy=Cx$. **5.23.** $\ln\left(y^2+2x^2\right)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x\sqrt{2}}+C=0$.

5.24. $\sin\dfrac{y}{x}=C-3\ln|x|$. **5.25.** $y=\dfrac{Cx^3+3x}{1-Cx^2}$, $y=-x$.

5.26. $y=xe^{Cx}-2x$. **5.27.** $y=x\arccos Cx^2$.

5.28. $\dfrac{y}{y-4x}=\dfrac{C}{x^4}$, $x=0$, $y=4x$. **5.29.** $x+4y=Cxy^2$, $y=0$, $y=-\dfrac{x}{4}$.

5.30. $\ln\left|2x^2+y^2+12x-4y-2xy+20\right|+4\operatorname{arctg}\dfrac{y-x-2}{x+4}=C$.

5.31. $2x+y-\dfrac{1}{4}\ln|8x+4y+5|=4x+C$.

5.32. $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\left(\dfrac{y+9}{x+4}\right)^2-3\left(\dfrac{y+9}{x+4}\right)+3\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\left(\dfrac{y+9}{x+4}-\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\ln|C(x+4)|$.

5.39. $y=Ce^{4x}-2e^{3x}$. **5.40.** $y=\dfrac{C}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{2}$.

5.41. $y=-x^3-1+\tilde{C}e^{x^3}$. **5.42.** $y=\dfrac{1}{4}+\tilde{C}e^{\cos 2x}$.

5.43. $x=-\dfrac{1}{4}y^4+\tilde{C}y^2$, $y=0$.

5.44. $x=\dfrac{5}{9}(3y+1)\ln|3y+1|+\dfrac{5}{9}+\tilde{C}(3y+1)$, $3y+1=0$.

5.45. $y=\ln|\ln x|\cdot\ln^3 x+\tilde{C}\ln^3 x$. **5.46.** $y=(x+2)^5+\tilde{C}(x+2)^3$, $x=-2$.

5.47. $y^4=Ce^{\frac{4}{3}x^3}-1$. **5.48.** $y^{-3}=Ce^{-3x^3}-\dfrac{1}{3}$, $y=0$.

5.49. $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\tilde{C}}{(y+2)^2} - \dfrac{2}{3}(y+2)$, $y = -2$, $x = 0$. **5.50.** $y = \left(\tilde{C}e^{x^2} - 1\right)^3$, $y = 0$.

5.51. $\dfrac{1}{y^2} = -(x^2 - 1)\sin x - (x-1)\cos x + \tilde{C}(x-1)$, $y = 0$.

5.52. $x^4 = -\dfrac{1}{3}e^{-2y} + \tilde{C}e^{y}$. **5.53.** $y^{-1} = e^{x^2}(1-x)$.

5.54. $x = y^2 - 2y$. **5.55.** $y = e^{-3x} + e^{-5x}$. **5.56.** $\sqrt[4]{y^3} = -x + x^3$.

5.59. $xy^3 + x^2y^2 = C$. **5.60.** $\sin\left(xy + y^2\right) = C$.

5.61. $x^2 + x^4y^3 = C$. **5.62.** $xy^2 + y^3 = C$.

5.63. Уравнение с разделяющимися переменными, $y^3 + 9 = C\sqrt{x^6 + 1}$.

5.64. Уравнение Бернулли, $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.

5.65. Уравнение с разделяющимися переменными, $\sin y = C\sqrt[4]{x^4 + 5}$.

5.66. Линейное уравнение, $y = Ce^x + e^x \ln|x|$, $x = 0$.

5.67. Уравнение с разделяющимися переменными, $12\ln|y+4| - 3y = \ln\left|x^3 + 3\right| + C$, $x^3 + 3 = 0$.

5.68. Уравнение Бернулли или с разделяющимися переменными, $\sqrt{y} = Ce^{e^x} - 1$, $y = 0$.

5.69. Уравнение с разделяющимися переменными, $\left(e^{3y} + 6\right)^2 = C\left(x^2 + 1\right)^3$.

5.70. Уравнение Бернулли или с разделяющимися переменными, $y^{-1} = Ce^{-2e^x} - 1$, $y = 0$.

5.71. Уравнение с разделяющимися переменными, $y^4 + 1 = C\left(3\ln^2 x + 2\right)^{2/3}$.

5.72. Линейное уравнение, $y = C\dfrac{e^{-x}}{x} - x^2 + 3x - 6 + \dfrac{6}{x}$.

5.73. Уравнение в полных дифференциалах, $x^3y + xy^2 = C$.

5.74. Однородное уравнение, $y = C\left(y^2 - x^2\right)$, $y = x$.

5.75. Уравнение в полных дифференциалах, $x^5y^2 + x^2y = C$.

5.76. Однородное уравнение, $\ln\left(y^2+x^2\right)+2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

5.77. Уравнение в полных дифференциалах, $x+x^2y^3=C$.

5.78. Уравнение с разделяющимися переменными, $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}=$ $=\ln|x+1|+C$.

5.79. Однородное уравнение, $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$.

5.80. Линейное уравнение, $y=x^3+\frac{2}{x^2}$.

5.81. Уравнение с разделяющимися переменными, $y=xe^{2x}$.

5.82. Однородное уравнение, $(2y-x)^2=\frac{8}{3}x(y-x)y$.

5.83. Уравнение в полных дифференциалах, $y=\frac{3-x^2}{x^5}$.

5.84. Уравнение Бернулли или с разделяющимися переменными, $y^2=\left(6x^2-2\right)^3$.

5.85. Уравнение с разделяющимися переменными, $y^2=\operatorname{tg}\left(x^2\right)$.

5.86. Однородное уравнение, $\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=\ln|x|$.

5.87. Уравнение с разделяющимися переменными, $y=\sin x+1$.

5.88. Уравнение в полных дифференциалах, $x^3+x^2y+y^2=3$.

5.98. $y=C_1\left(\frac{3}{2}x^2-\cos x\right)+C_2x+C_3$.

5.99. $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x-3)^{\frac{3}{2}}+C_2$. **5.100.** $y=C_1\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}+C_2$.

5.101. $y=-\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$.

5.102. $y=C_1(x+1)^2-3x+C_2$. **5.103.** $y=\operatorname{tg}\left(C_1x+C_2\right)$.

5.104. $y=\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}+C_1e^{3x}+C_2$.

5.105. $y=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\frac{3x^2}{2}\ln x+\frac{7x^2}{4}+C_1x+C_2$.

5.106. $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$.

5.107. $y=-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{x}{2}-C_1\cos 2x+C_2$.

5.108. $y=\frac{x^4}{24}+\frac{\ln|x|}{2}+C_1x^2+C_2x+C_3$. **5.109.** $x=3-2e^{-y/2}$.

5.110. $y=2-3\sqrt{1-x}$. **5.111.** $y=\frac{5x-2}{4-x}$.

5.118. $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$. **5.119.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$.

5.120. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3$. **5.121.** $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$.

5.122. $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+C_3x^2e^{-3x}$.

5.123. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{3x}+C_5xe^{3x}$.

5.124. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

5.125. $y=C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x+C_3x\cos\sqrt{3}x+C_4x\sin\sqrt{3}x$.

5.126. $y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$.

5.127. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\cos x+C_3e^{2x}\sin x$.

5.131. $y=-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}e^{-5x}\ln\left(e^{5x}+4\right)-\frac{1}{20}e^{5x}\ln\left(1+4e^{-5x}\right)+C_1e^{-5x}+C_2e^{5x}$.

5.132. $y=-\frac{1}{27}-\frac{1}{3}e^{-x}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}}{3}+\frac{1}{81}e^{2x}+\frac{1}{243}e^{3x}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}}{3}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

5.133. $y=\frac{1}{2}xe^{2x}-e^{2x}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}xe^{2x}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{4}x^2e^{2x}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+$

$+C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3x^2e^{2x}$.

5.134. $y=\frac{1}{6}\sin 3x\ln\left|\frac{\sin 3x+1}{\sin 3x-1}\right|-\frac{2}{3}+C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

5.135. $y=-e^{-5x}-e^{-5x}\ln|x-1|+C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}$.

5.136. $y=-xe^{-x}\cos 3x+\frac{1}{3}e^{-x}\sin 3x\ln|\sin 3x|+C_1e^{-x}\cos 3x+C_2e^{-x}\sin 3x$.

5.137. $y=-\frac{1}{8}e^{3x}\cos 4x\ln\left|\frac{\sin 4x+1}{\sin 4x-1}\right|+C_1e^{3x}\cos 4x+C_2e^{3x}\sin 4x$.

5.138. $y=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\ln\left|\frac{\sin 4x+1}{\sin 4x-1}\right|+C_1+$

$+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

5.139. $y=\frac{1}{8}e^{-4x}+\frac{3}{8}e^{4x}+\frac{1}{4}e^{4x}\ln\left(e^{-4x}+1\right)-\frac{1}{4}e^{-4x}\ln\left(e^{4x}+1\right)-\frac{1}{4}$.

5.140. $y = \left(\frac{1}{12x^3} + x - 1\right)e^{3x}$.

5.141. $y = -\frac{7}{4}\cos 2x + \sin 2x - \frac{1}{4\cos 2x} + \frac{\sin^2 2x}{2\cos 2x}$.

5.142. $y = -\frac{5}{2}e^{-3x} + 3e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$.

5.149. $y = e^x\left(-\frac{3}{10}x - \frac{8}{25}\right)x + C_1e^x + C_2e^{6x}$.

5.150. $y = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\right) + C_1e^x + C_2e^{6x}$.

5.151. $y = \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

5.152. $y = \left(\frac{1}{8}x - \frac{5}{16}\right)e^{-3x} + C_1e^{-3x}\cos 4x + C_2e^{-3x}\sin 4x$.

5.153. $y = -\frac{1}{6}xe^x\cos 3x + C_1e^x\cos 3x + C_2e^x\sin 3x$.

5.154. $y = \frac{1}{4}\sin 4x - \cos 4x + C_1e^{-2x}\cos 4x + C_2e^{-2x}\sin 4x$.

5.155. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{19}{36}\right)e^x + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

5.156. $y = \frac{11}{25}\cos x + \frac{2}{25}\sin x + C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

5.157. $y = \left(-\frac{9}{100}x + 1\right)\cos 5x + \left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{209}{500}\right)\sin 5x$.

5.158. $y = \frac{39}{1537}e^x\cos x - \frac{4}{1537}e^x\sin x$.

5.159. $y = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^x\left((Dx + F)\cos 4x + (Ex + G)\sin 4x\right) + $
$+x\left(M\cos 4x + N\sin 4x\right)$.

5.160. $y = e^x\left(Ax + B\right) + xe^{3x}\left((Cx + D)\cos 4x + (Ex + G)\sin 4x\right) + $
$+\left(M\cos 5x + N\sin 5x\right)$.

5.167. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$.

5.168. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t\cos 3t \\ e^t\sin 3t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^t\sin 3t \\ -e^t\cos 3t \end{pmatrix}$.

5.169. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} te^{3t} \\ (1+t)e^{3t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

5.170. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$

5.171. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}.$

5.172. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2te^{-t} \\ (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$

5.173. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t} (2\cos 3t - \sin 3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \sin 3t \\ e^{2t} (\cos 3t + 2\sin 3t) \end{pmatrix}.$

5.174. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 4e^{6t} \end{pmatrix}.$

5.175. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \cos 2t \\ -e^{-t} \sin 2t \\ e^{-t} \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \sin 2t \\ e^{-t} \cos 2t \\ e^{-t} \sin 2t \end{pmatrix}.$

5.176. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} \\ te^{2t} \\ 3te^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$

5.178. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \ln\left(1+e^{2t}\right) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \\ -e^t \ln\left(1+e^{2t}\right) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \end{pmatrix}.$

5.179. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t+1)e^t - t^2 - 2 \\ te^t - 2t \end{pmatrix}.$

5.180. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \cos t - \sin t \ln|\cos t| \\ 2t \sin t + 2\cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix}.$

5.181. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \cos t \\ e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \sin t \\ e^{2t} (\cos t + \sin t) \end{pmatrix} +$

$$+\begin{pmatrix} e^{2t}\left(\dfrac{1}{\cos t}+2\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}\right) \\ e^{2t}\left(\dfrac{1}{2\cos t}-\dfrac{\sin t}{2\cos^2 t}+\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}+\sin t\right) \end{pmatrix}.$$

5.182. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}e^{2t}\ln\left(9+e^{-2t}\right)+\dfrac{2}{3}e^t\operatorname{arctg}\dfrac{e^{-t}}{3} \\ -e^{2t}\ln\left(9+e^{-2t}\right)+\dfrac{2}{3}e^t\operatorname{arctg}\dfrac{e^{-t}}{3} \end{pmatrix}.$$

5.183. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t-\sin 2t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t+\sin 2t \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -2t\cos 2t+\sin 2t\ln\left|\sin 2t\right| \\ t\left(\sin 2t-\cos 2t\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cos 2t+\sin 2t\right)\ln\left|\sin 2t\right| \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Горбанев Н.Н. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учеб. пособие / Н.Н. Горбанев, А.А. Ельцов, Л.И. Магазинников. 2-е изд., перераб. и доп. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 2001.

2. Магазинников Л.И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников. 2-е изд., стер. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 2001.

3. Ельцов А.А. Высшая математика I. Дифференциальное исчисление: Учеб. пособие / А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 2001.

4. Магазинников Л.И. Высшая математика I. Практикум по введению в математический анализ и дифференциальному исчислению: Учеб. пособие / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 2001.

5. Ельцов А.А. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2005.

6. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учеб. пособие. Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998.

7. Сборник задач по курсу высшей математики: Учеб. пособие для втузов / Под ред. Г.И. Кручковича. 3-е изд., перераб. М.: Высшая школа, 1973.

8. Марон А.И. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. М.: Наука, 1970; М.: Наука, 1979.

9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969.

10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979.

11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1969.

12. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1978.

13. Гюнтер Н.М. Сборник задач по высшей математике. Т.2 / Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

15. Терехина Л.И. Кратные интегралы. Теория поля / Л.И. Терехина, И.И. Фикс, А.И. Фикс. Томск: Областной центр информационных технологий, 1998.

Учебное издание

Ельцов Александр Александрович
Ельцова Тамара Александровна

ПРАКТИКУМ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Редактор Л.И. Кирпиченко
Компьютерная верстка Е.Н. Воронина

Подписано в печать 00.00.05. Формат 60x90/16.
Бумага офисная. Печать офсетная. Гарнитура School.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. 17,14. Тираж . Заказ .

Издано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. 8 (3822) 533018.

Отпечатано в ОАО «Асиновская типография»
г. Асино, ул. Проектная, 24