Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Л.И. Магазинников,
А.Л. Магазинникова

Высшая математика I

# Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии

Учебное пособие
Издание четвёртое, исправленное и дополненное

*Рекомендовано Сибирским региональным
учебно-методическим центром высшего
профессионального образования
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия*

Томск 2007

УДК [512.64+514.12](075)
ББК 22.1я73
М 12

Рецензенты:
кафедра высшей математики Томского гос. ун-та, зав. каф. д-р физ.-мат. наук, проф. С.В.Панько;
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики Томского политехнического ун-та Е.Т.Ивлев.

**Магазинников Л.И.,**
**Магазинникова А.Л.**

М12 Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2007. — 162 с.

В пособии приведено более трёхсот задач по линейной алгебре и аналитической геометрии, треть из них сопровождается подробным решением. В каждом подразделе приведены задачи для самостоятельной работы в количестве, достаточном для аудиторной и домашней работы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки инженерно-технических специальностей технических университетов.

---

Учебное издание

Магазинников Леонид Иосифович,
Магазинникова Анна Леонидовна

Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии

---

ISBN 5-86889-258-5

# Оглавление

## Предисловие

В Томском университете систем управления и радиоэлектроники подготовлено к изданию и частично уже издано полное методическое обеспечение курса высшей математики, состоящее из пяти пособий, содержащих теоретический материал в изложении, близком к лекционному. Каждая теоретическая часть дополнена практикумом решения задач по соответствующему разделу. Данное пособие содержит задачи по линейной алгебре и аналитической геометрии и предназначено для проведения практических занятий по этим разделам в реальных условиях острого дефицита времени.

Темы, рассмотренные в пособии, определены рабочей программой курса высшей математики по разделу "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", которую мы приводим ниже.

*1. Элементы линейной алгебры*

Матрицы и действия над ними. Понятие матрицы. Некоторые виды матриц. Равенство матриц, сложение, умножение на число и произведение матриц. Определители порядка $n$ и их свойства. Определители 2-го и 3-го порядка. Понятие определителя порядка $n$. Алгебраические дополнения и миноры. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.

Линейные пространства. Понятие $n$-мерного арифметического пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Понятие ранга матрицы. Теорема о базисном миноре и ее следствия. Базис и координаты. Понятие произвольного линейного пространства. Подпространства. Евклидовы линейные пространства. Аффинные и евклидовы точечно-векторные пространства. Формулы перехода от одного базиса к другому. Преобразования систем координат.

Системы линейных уравнений и их исследование. Формы записи систем, виды систем. Теорема о совместности произвольной системы линейных уравнений. Решение систем в случае $n = m$, $D \neq 0$. Решение систем в случае $n \neq m$. Системы линейных однородных уравнений.

Алгебра геометрических векторов. Линейные операции над векторами. Базис и координаты. Деление отрезка в данном отношении, проекция вектора на ось. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их приложения.

Линейные операторы, линейные и квадратичные формы. Матрица линейного оператора. Линейные формы. Понятие квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к главным осям.

*2. Приложение линейной алгебры к задачам аналитической геометрии*

Прямая линия на плоскости. Общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, канонические и параметрические уравнения.

Уравнение плоскости. Общие, канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

Кривые второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

Некоторые виды поверхностей: цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения, поверхности второго порядка. Полярная система координат.

Структура пособия такова. Весь материал разбит на два раздела и 17 подразделов. Каждый подраздел содержит указания, какой теоретический материал по пособию [5] следует изучить перед соответствующим практическим занятием. Затем приводятся типовые задачи с полным решением. Все подразделы заканчиваются задачами для самостоятельной работы в количестве, по нашему мнению, достаточном для аудиторной и домашней работы. Кроме этого имеется программное и методическое обеспечение, позволяющее тиражировать индивидуальные задания и контрольные работы в практически неограниченном числе вариантов. Некоторые индивидуальные задания, примеры которых приведены в [5], можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля при наличии устройства "Символ"или его компьютерного аналога. Все перечисленное и составляет полное методическое обеспечение учебной дисциплины, все части которого написаны с единых позиций.

Изучать теоретический материал предлагается по учебным пособиям [1-8], приведенным в списке литературы. Не исключается использование и других учебников и учебных пособий или отдельных их частей для более глубокого усвоения материала, включая их в соответствующие подразделы данного пособия.

Авторы с благодарностью примут все критические замечания и учтут их в дальнейшей работе над практикумом.

# ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

## 1. Действия над матрицами

Рекомендуется изучить по учебному пособию [5] раздел 1.1 (с. 7-12) и ознакомиться с решением задач, приведенных ниже.

**1.1.** Дано две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу $C = 3A - 4B$. В ответ запишите наименьший элемент матрицы $C$.

*Решение.* По правилу умножения матрицы на число

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 6 & -6 & -12 & 15 \end{bmatrix}.$$

$$-4B = \begin{bmatrix} -4 \cdot 1 & -4 \cdot (-1) & -4 \cdot 1 & -4 \cdot 2 \\ -4 \cdot (-2) & -4 \cdot 3 & -4 \cdot 5 & -4 \cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 & -8 \\ 8 & -12 & -20 & -24 \end{bmatrix}.$$

По правилу сложения матриц находим $C = 3A + (-4B)$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 6 & -6 & -12 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 & -8 \\ 8 & -12 & -20 & -24 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & 6+4 & 9-4 & 12-8 \\ 6+8 & -6-12 & -12-20 & 15-24 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 \\ 14 & -18 & -32 & -9 \end{bmatrix}.$$

Наименьший элемент матрицы $C$ равен $-32$.

*Ответ:* $-32$.

**1.2.** Дано три матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Какое из произведений $A \cdot B$ или $A \cdot C$ существует? Найдите элемент $d_3^2$, стоящий во второй строке и третьем столбце этого произведения.

*Решение.* Произведение двух матриц определено только тогда, когда число элементов в строке первой матрицы равно числу элементов в столбце второй матрицы. Размеры матриц: $A$ $(2\times4)$, $B$ $(4\times3)$. Матрицы $A$ и $B$ условию удовлетворяют. Размеры матриц: $A$ $(2\times4)$, $C$ $(2\times3)$. Матрицы $A$ и $C$ условию не удовлетворяют. Поэтому определено только произведение $A\cdot B$.

Чтобы найти элемент $d_3^2$ матрицы $A \cdot B$, нужно элементы второй строки матрицы A умножить на соответствующие элементы третьего столбца матрицы B и сложить полученные произведения, т.е.

$$d_3^2 = 3\cdot5 + 1\cdot4 + 2\cdot(-1) + 4\cdot3 = 15 + 4 - 2 + 12 = 29.$$

*Ответ:* 29.

**1.3**. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $C = A \cdot B$.

*Решение.* Размеры матриц: $A$ $(2\times2)$, $B$ $(2\times3)$. Произведение $A \cdot B$ определено. Матрица $C = A \cdot B$ имеет размер $(2 \times 3)$. По правилу умножения матриц находим матрицу $C$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot1+(-3)\cdot2 & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot4 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot1+5\cdot2 & 4\cdot(-3)+5\cdot4 & 4\cdot(-2)+5\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6 & -6-12 & -4+3 \\ 4+10 & -12+20 & -8-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -18 & -1 \\ 14 & 8 & -13 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* $\begin{bmatrix} -4 & -18 & -1 \\ 14 & 8 & -13 \end{bmatrix}$.

**1.4.** Даны матрицы
$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Найдите матрицы: а) $D=AC+3BC$; б) $G=AC+3CB$; в) $Q=CA+3CB$. В ответ запишите наибольшие элементы матриц $D$, $G$ и $Q$.

*Решение.*

а) По свойству операций над матрицами можно вынести за скобки вправо матрицу $C$: $D=(A+3B)C$. Находим
$$A+3B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}.$$
$$D=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20+6 & -5+3 \\ -20-14 & 5-7 \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 26 & -2 \\ -34 & -2 \end{bmatrix}.$$

б) Так как $C\cdot B\neq B\cdot C$, то $D\neq G$. В этом случае за скобку матрицу $C$ вынести нельзя. Поэтому требуется найти каждое слагаемое отдельно.
$$A\cdot C=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 8-6 & -2-3 \\ 16+10 & -4+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix};$$
$$C\cdot B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3 & 8+4 \\ 2-3 & 4-4 \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\qquad 3CB=\begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix};$$
$$D=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 23 & 1 \end{bmatrix}$$

в) По свойству операций над матрицами можно вынести за скобки влево матрицу $C$: $Q = C(A + 3B)$. Находим

$$A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+5 & 12+7 \\ 10-5 & 6-7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 19 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* 26; 31; 25.

**1.5.** Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу $D = A^T C - 2A^T B^T$. В ответ запишите наименьший элемент матрицы $D$.

*Решение.* По свойству операций над матрицами можно вынести за скобки влево матрицу $A^T$: $D = A^T(C - 2B^T)$. Находим матрицу $B^T$. Операция транспонирования матрицы – это замена её строк столбцами с теми же номерами.

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу

$$C - 2B^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 & -10 \\ -4 & 8 & -4 \\ -14 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $A$:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно выполнить умножение

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем элементы матрицы $D$:

$d_1^1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-6) = 8 + 6 = 14$

$d_2^1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 6 + 9 - 1 = 14$

$d_3^1 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = -2 - 6 - 3 = -11$

$d_1^2 = -4 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-6) = -16$

$d_2^2 = -4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -12 + 15 = 3$

$d_3^2 = -4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = 4 - 10 = -6$

Итак, $D = \begin{bmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* $-16$.

Если матрица A квадратная, то определено произведение $D = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$. Обозначают $D = A^n$. Матрицу $D$ называют $n$-ой степенью матрицы $A$. По определению полагают $A^0 = E$ ($E$ – единичная матрица).

**1.6.** Найти куб матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

*Решение.*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1-2 \\ 3+6 & -3+4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-9 & 2-6 \\ 9+3 & -9+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* $\begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.7.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу $C = 2A - 3B$. В ответ также запишите сумму элементов матрицы $C$.

*Ответ:* $C = \begin{bmatrix} 13 & -8 & -12 \\ -7 & 24 & -7 \end{bmatrix}$; 3.

**1.8.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу $C = 2B - A$. В ответ также запишите сумму элементов матрицы $C$.

*Ответ:* $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -11 & -1 & 8 \end{bmatrix}$; $-4$.

**1.9.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу $C = 4A - 5B$. В ответ также запишите сумму элементов матрицы $C$.

*Ответ:* $C = \begin{bmatrix} 27 & 1 & 8 \\ -2 & 10 & -20 \\ -9 & 18 & 9 \end{bmatrix}$; 42.

**1.10.** Дано, что

$$3 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найдите значения $x, y, z, v$.

*Ответ:* $x = 2$, $y = 6$, $z = -4$, $v = 10$.

**1.11.** Дано, что

$$3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & x & 2 \\ -3 & 1 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & z \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 3 \\ v & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Найдите значения $x, y, z, v$.

*Ответ:* $x = 0$, $y = 4$, $z = 3$, $v = -7$.

**1.12.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

*Ответ:* $C = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**1.13.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

*Ответ:* $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$.

**1.14.** Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Найдите матрицы $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

*Ответ:* $C = \begin{bmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

**1.15.** Найдите матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -15 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Убедитесь на данном примере в справедливости равенства $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

*Ответ:* $[7]$.

**1.16.** Дано произведение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Найдите значения $x_2, x_3, y_1$.

*Ответ:* $x_2 = 6$, $x_3 = -7$, $y_1 = 17$.

**1.17.** Дано произведение матриц

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 16 & 24 & 8 \\ 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите следующие элементы матрицы $C$: $c_2^4$, $c_3^1$, $c_1^3$ (верхний индекс – номер строки).

*Ответ:* $c_2^4 = 0$, $c_3^1 = -8$, $c_1^3 = 0$.

**1.18.** Дано произведение матриц

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите следующие элементы матрицы $C$: $c_2^1$, $c_3^2$, $c_1^3$, $c_2^4$, $c_3^4$ (верхний индекс – номер строки).

*Ответ:* $c_2^1 = -3$, $c_3^2 = 21$, $c_1^3 = 14$, $c_2^4 = -14$, $c_3^4 = 28$.

**1.19.** Найдите квадрат матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -5 & 8 & -6 \\ -6 & -5 & 18 \end{bmatrix}$.

**1.20.** Пусть $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{bmatrix}$. Докажите, что $A^2 = -A$.

**1.21.** Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$. Проверьте, что $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**1.22.** Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицы: а) $D = 2BC - AC$; б)$G = 2CB - CA$.

$$\textit{Ответ: } D = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -3 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

**1.23.** Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицы: а) $D = -AC + 2B^TC$; б)$G = C^T 2A^T - 2C^T B$.

$$\textit{Ответ: } D = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -14 \end{bmatrix}.$$

## 2. Вычисление определителей

Необходимо изучить пп. 1.2.1 - 1.2.6 из [5]. Особенно хорошо нужно усвоить понятия алгебраического дополнения и минора, теорему о разложении определителя по элементам строки или столбца, а также свойства определителя.

**2.1.** Вычислите определители

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \text{б) } = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Решение.*

а) Для того, чтобы вычислить определитель второго порядка, от произведения элементов главной диагонали отнимаем произведение элементов побочной диагонали:

$$D = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 10 + 12 = 22.$$

б) Для вычисления определителя применим правило "треугольников" [5. с. 15].

$$C = 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 =$$

$$= 2 - 8 + 18 - 8 + 3 - 12 = -5.$$

*Ответ:* $D = 22$, $C = -5$.

**2.2.** Дан определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & a_2^3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Найдите минор $M_2^3$ и алгебраическое дополнение $A_2^3$ элемента $a_2^3$.

*Решение.* Минор $M_2^3$ получим из определителя $D$, вычеркивая третью строку и второй столбец, на пересечении которых расположен элемент $a_2^3$.

$$M_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 6 - 0 - (-4) - 20 = -6.$$

Алгебраическое дополнение $A_i^j$ связано с минором $M_i^j$ формулой $A_i^j = (-1)^{j+i} M_i^j$. Поэтому

$$A_2^3 = (-1)^{3+2} M_2^3 = (-1)^5 \cdot (-6) = 6.$$

*Ответ:* $M_2^3 = -6$, $A_2^3 = 6$.

**2.3.** Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Пользуясь теоремой 2 [5, с. 18], вычисление определителя можно свести к вычислению четырех определителей третьего порядка. Число этих определителей можно снизить до одного, получив, пользуясь свойствами определителя, в каких-либо строке или столбце три нулевых элемента. Получим нули в первом столбце. Для этого прибавим к элементам первой строки определителя соответствующие элементы второй строки, умноженные на $(-2)$. Для того, чтобы кратко описать эту операцию говорят: "К первой строке определителя прибавим вторую строку, умноженную на $(-2)$".

$$\begin{vmatrix} 2+(-2)\cdot 1 & 1+(-2)\cdot 3 & -3+(-2)\cdot 5 & -2+(-2)\cdot(-2) \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

В результате получим

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -13 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Затем первую строку, умноженную на $(-5)$, прибавим к третьей и первую строку, умноженную на $(-3)$, прибавим к четвертой. В итоге

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -13 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -10 & -23 & 14 \\ 0 & -5 & -11 & 11 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца:

$$D = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ -10 & -23 & 14 \\ -5 & -11 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ -10 & -23 & 14 \\ -5 & -11 & 11 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников. Другой способ – свести его вычисление к вычислению определителя второго порядка. Для этого получим нули в первом столбце. Умножим первую строку на $(-2)$ и прибавим к второй, затем первую строку вычтем из третьей.

$$D = -\begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5(27-20) = 35.$$

*Ответ:* $D = 35$.

Решая эту задачу, мы применяли свойство определителя: определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить другую, умноженную на некоторое число. Иногда допускают ошибку, прибавляя к какой-либо строке, умноженной на некоторое число $\alpha$, другую строку. В результате определитель изменится и станет равным $\alpha D$. Обратите на это внимание и не допускайте подобной ошибки.

### Задачи для самостоятельного решения

**2.4.** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 13542 & 13642 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

*Ответ:* $D_1 = 18$, $D_2 = -24$, $D_3 = -1488100$.

**2.5.** Решите уравнения:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x^2-4 & 4 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x-1 & -x+6 \\ x-1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

*Ответ:* а) $-4; 0; 2$; б) $-3; 1; 2$.

**2.6.** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -2 & 9 & -2 \\ -13 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

*Ответ:* $D_1 = -12$, $D_2 = 60$.

**2.7.** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 14 & 10 & 27 \\ 21 & -25 & -18 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

*Ответ:* $D_1 = 5880$, $D_2 = -29400000$.

**2.8.** Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$. Вычислите $M_1^2$, $M_2^2$, $M_3^2$, $A_1^2$, $A_2^2$, $A_3^2$.

*Ответ:* $M_1^2 = -7$, $M_2^2 = 2$, $M_3^2 = -11$, $A_1^2 = 7$, $A_2^2 = 2$, $A_3^2 = 11$.

**2.9.** Дан определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{vmatrix}$. Вычислите $M_2^1$, $M_2^2$, $M_2^3$, $M_2^4$, $M_4^4$, $A_2^1$, $A_2^2$, $A_2^3$, $A_2^4$, $A_4^4$.

*Ответ:* $M_2^1 = 0$, $M_2^2 = 35$, $M_2^3 = 7$, $M_2^4 = -21$, $M_4^4 = -18$, $A_2^1 = 0$, $A_2^2 = 35$, $A_2^3 = -7$, $A_2^4 = -21$, $A_4^4 = -18$.

**2.10.** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Ответ:* $D_1 = 135$, $D_2 = 12$.

**2.11.** Вычислите определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2/3 & 3/8 & -3 & 4 \\ 2/3 & 1/8 & -1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 2/3 & 3/8 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8/3 & 7/5 & 2/5 & 0 \\ -8/3 & 2/5 & 7/5 & 10 \\ 4/3 & 4/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Ответ:* $D_1 = 2$, $D_2 = 24$.

**2.12.** Решите уравнения:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x+1 & 5 & -7 \\ 2x+2 & 2x+6 & -14 \\ 0 & 3 & x+3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x & 0 & 2x \\ 5 & x-4 & 20 \\ 7 & 0 & 2x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

*Ответ:* а) $-3; -1; 2;$ б) $0; 3; 4.$

**2.13.** Вычислите определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

*Ответ:* $D = 0$.

**2.14.** Докажите, что

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

**2.15.** Не вычисляя определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$, докажите, что он делится на 17, заметив, что числа 204, 527 и 255 делятся на 17.

**2.16.** Решите уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

*Ответ:* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $\ldots$, $x_{n-1} = n-2$.

## 3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Необходимо изучить п. 1.2.7 и п. 1.2.8 из пособия [5].

**3.1.** Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Докажите, что она имеет обратную матрицу $A^{-1}$ и найдите элемент $b_2^3$ матрицы $A^{-1}$, стоящий в третьей строке и втором столбце.

*Решение.* Вычисляем $\det A$. Для этого прибавляем к первой строке третью, умноженную на $(-2)$, ко второй строке третью, умноженную на $(-3)$, а затем выполняем разложение определителя по первому столбцу.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 - 18 = -3 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A$ невырождена, а поэтому имеет обратную. Элемент $b_2^3$ обратной матрицы находим по формуле (1.8) из [5]: $b_2^3 = \dfrac{A_3^2}{\det A}$, где $A_3^2$ – алгебраическое дополнение элемента $a_3^2$ матрицы $A$. Обратите внимание, что для отыскания элемента $b_2^3$, стоящего в третьей строке и втором столбце, нужно найти алгебраическое дополнение $A_3^2$ элемента $a_3^2$, стоящего во второй строке и третьем столбце матрицы $A$, и разделить его на определитель матрицы $A$.

$$A_3^2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 7) = -3; \qquad b_2^3 = \frac{-3}{-3} = 1.$$

*Ответ:* $b_2^3 = 1$.

**3.2.** Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. Докажите, что она имеет обратную матрицу $A^{-1}$ и найдите её.

*Решение.* Вычисляем $\det A$. Для этого прибавляем к первой строке третью, умноженную на 5, ко второй строке третью, умноженную на 2, а затем выполняем разложение определителя по третьему столбцу.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -29 & 0 \\ 10 & -16 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 10 & -16 \end{vmatrix} = -(-16 \cdot 18 + 10 \cdot 29) = -2 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A$ невырождена, а поэтому имеет обратную. Элементы $b_i^j$ обратной матрицы находим по формуле (1.8) из [5]: $b_i^j = \dfrac{A_j^i}{\det A}$, где $A_j^i$ – алгебраическое дополнение элемента $a_j^i$ матрицы $A$. Обратите внимание, что для отыскания элемента $b_i^j$, стоящего в $j$-ой строке и $i$-ом столбце, нужно найти алгебраическое дополнение $A_j^i$ элемента $a_j^i$, стоящего в $i$-ой строке и $j$-ом столбце матрицы $A$, и разделить его на определитель матрицы $A$. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A$:

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_1^2 = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_1^3 = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_2^3 = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; \quad A_3^2 = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; \quad A_3^3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем все определители второго порядка и записываем присоединённую матрицу $A^*$. Её элементы – алгебраические дополнения элементов строк матрицы $A$, мы записываем в столбцы матрицы $A^*$.

$$A^* = \begin{bmatrix} 16 & -29 & 22 \\ 10 & -18 & 14 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Поделив найденные элементы присоединенной матрицы на определитель $\det A = -2$, получим

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверить результаты можно, найдя произведение $A \cdot A^{-1}$ или $A^{-1} \cdot A$. В любом случае должна получиться единичная матрица $E$.

*Проверка:*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -24+20+5 & \dfrac{87}{2} - 36 - \dfrac{15}{2} & -33+28+5 \\ -32+30+2 & 58-54-3 & -44+42+2 \\ -24+25-1 & \dfrac{87}{2} - 45 + \dfrac{3}{2} & -33+35-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица найдена верно

*Ответ:* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$.

**3.3.** Найдите матрицу $X$, если $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$.

*Решение.* Обозначим $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $AX = B$. Так как

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, то матрица $A$ невырождена и имеет обратную. Поэтому $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, получим $X = A^{-1}B$. Находим матрицу $A^{-1}$.

$A_1^1 = 4, \quad A_1^2 = -2,$ Тогда $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

$A_2^1 = -3, \quad A_2^2 = 1.$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16+18 & -2-1 \\ 12-9 & 3/2+1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Проверка:* подставим матрицу X в данное уравнение.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -3+4 \\ 6+12 & -9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $X$ удовлетворяет данному уравнению, следовательно, найдена верно.

*Ответ:* $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

**3.4.** Найдите матрицу X, если $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$.

*Решение.* Обозначим $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$, как и в задаче 3.3. Тогда данное уравнение можно записать в виде $XA = B$. Матрицу $A^{-1}$ мы нашли в задаче 3.3. Вычисляем матрицу X: $XAA^{-1} = BA^{-1}$. Так как $AA^{-1} = E$ и $XE = X$, получим $X = BA^{-1}$.

$$X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16+1{,}5 & 8-0{,}5 \\ -36-1{,}5 & 18+0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -14{,}5 & 7{,}5 \\ -37{,}5 & 18{,}5 \end{bmatrix}.$$

*Проверка:* подставим матрицу X в данное уравнение.

$$\begin{bmatrix} -14{,}5 & 7{,}5 \\ -37{,}5 & 18{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14{,}5+22{,}5 & -29+30 \\ -37{,}5+55{,}5 & -75+74 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $X$ удовлетворяет данному уравнению, следовательно, найдена верно.

*Ответ:* $\begin{bmatrix} -14{,}5 & 7{,}5 \\ -37{,}5 & 18{,}5 \end{bmatrix}$.

Сравнивая решения задач 3.3 и 3.4, видим, что уравнения $AX = B$ и $XA = B$ имеют разные решения.

## Задачи для самостоятельного решения

**3.5.** Докажите, что данная матрица имеет обратную и найдите её. Выполните проверку. а) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* а) $\dfrac{1}{19}\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$; б) $\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

**3.6.** Дана матрица $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, причем $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Докажите, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

**3.7.** Докажите, что матрица $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы: $b_3^1$, $b_1^2$, $b_1^3$.

*Ответ:* $\det A = -27$, $b_3^1 = \dfrac{4}{9}$, $b_1^2 = -\dfrac{5}{9}$, $b_1^3 = -\dfrac{7}{9}$.

**3.8.** Докажите, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы $b_2^1$, $b_3^2$, $b_4^3$, $b_3^4$.

*Ответ:* $\det A = -132,\ b_2^1 = \dfrac{2}{33},\ b_3^2 = \dfrac{27}{22},\ b_4^3 = \dfrac{26}{33},\ b_3^4 = \dfrac{1}{22}$.

**3.9.** Докажите, что матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ имеет обратную $A^{-1}$ и найдите её. Выполните проверку.

*Ответ:* $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

**3.10.** Докажите, что матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ имеет обратную $A^{-1}$ и найдите её. Выполните проверку.

*Ответ:* $A^{-1} = \dfrac{1}{91}\begin{bmatrix} 17 & 36 & 20 \\ 21 & 7 & 14 \\ -15 & -5 & -23 \end{bmatrix}$.

**3.11.** Пусть $A$ – невырожденная квадратная матрица. Докажите, что $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

**3.12.** Найдите $(A^2)^{-1}$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* $(A^2)^{-1} = \dfrac{1}{64}\begin{bmatrix} 27 & 69 & 49 \\ 39 & 121 & 85 \\ -25 & -71 & -43 \end{bmatrix}$.

**3.13.** Предполагая, что матрица $AB$ имеет обратную матрицу, докажите справедливость равенства $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Решите в общем случае матричные уравнения $ABX = C$ и $XAB = C$, если $(AB)^{-1}$ существует.

**3.14.** Решите матричные уравнения $AX_1 = B$ и $X_2A = B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* $X_1 = \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -22 & 13 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$.

**3.15.** Решите матричные уравнения:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

б) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* а) $X = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -40 & 27 & 8 \end{bmatrix}$.

**3.16.** Решите матричные уравнения:

а) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 11 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 & -7 \\ 13 & 9 & -8 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* а) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

**3.17.** Найдите решения следующих систем линейных уравнений, записанных в матричной форме.

а) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* а) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

## 4. Линейные пространства. Ранг матрицы

Для решения задач на эту тему следует изучить из пособия [5] пп.1.3.1–1.3.4.

**4.1.** Найдите ранг матрицы $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 6 & 1 & 10 \\ 5 & 12 & 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним элементарные преобразования матрицы $A$, не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица $A$, в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на $(-2)$, прибавим ко второй строке; первую строку, умноженную на $(-4)$, прибавим к третьей строке; первую строку, умноженную на $(-5)$, прибавим к четвертой строке. В результате получим новую матрицу $A_1$ того же ранга, что и матрица $A$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & -10 & 4 \end{bmatrix}.$$

В матрице $A_1$ вторая и четвертая строки пропорциональны (с коэффициентом 2). Одну из них можно вычеркнуть, не меняя ранга матрицы. Вычеркнем, например, четвертую строку. Получим матрицу $A_2$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & -15 & 6 \end{bmatrix}.$$

В матрице $A_2$ три строки, следовательно, ее ранг не может быть больше трех. Можно ли в матрице $A_2$ выделить минор третьего порядка, не равный нулю? Сделать это легко, так как первый столбец содержит два нуля. Включим, например, в базисный минор элементы первого, второго и третьего столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 15 = -5 \neq 0.$$

Если бы нам не удалось выделить базисный минор в матрице $A_2$, то процесс получения нулей пришлось бы продолжить.

Так как выбранный минор третьего порядка отличен от нуля, то ранг матрицы $A_2$, а потому и $A$, равен трем.

*Ответ:* $\operatorname{rang} A = 3$.

**4.2.** Найдите те значения параметра $p$, если они существуют, при которых строки матрицы $A$ линейно зависимы.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & p \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Матрица $A$ квадратная. Поэтому линейная зависимость строк равносильна условию $\det A = 0$. Вычислим определитель матрицы $A$. Для этого вторую строку, умноженную на $(-3)$, прибавим к первой; вторую строку, умноженную на $(-5)$, прибавим к четвёртой:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 0 & 10 & -10 & p-5 \end{vmatrix}.$$

Уже сейчас можно заметить, что при $p = 7$ первая и четвёртая строки определителя совпадут, и он будет равен нулю. Одно значение параметра $p$ найдено. Но, возможно, $\det A = 0$ и при других значениях $p$. Продолжим вычисление определителя. Вычтем первую строку из четвёртой и выполним разложение определителя по четвёртой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 15 & -3 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & p-7 \end{vmatrix} = (p-7)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 1 & -3 & 4 \\ 15 & -3 & 14 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе третьего порядка вынесем множитель 10 из первой строки. Вторую строку, умноженную на $(-15)$, прибавим к третьей:

$$\det A = 10(p-7) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 42 & -46 \end{vmatrix}.$$

Выполним разложение по второй строке:

$$\det A = 10(p-7) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 42 & -46 \end{vmatrix} =$$

$$= -10(p-7)(-46+42) = 40(p-7).$$

Итак, $\det A = 40(p-7)$, а значит, $\det A = 0$ только при $p = 7$.

*Ответ:* строки матрицы $A$ линейно зависимы при $p = 7$.

**4.3.** Докажите, что третья строка матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

*Решение.* Ранг матрицы $A$ не меньше двух, так как минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$. Ранг матрицы А равен двум, если $\det A = 0$. Вычисляем определитель матрицы $A$. Для этого первую строку, умноженную на $(-3)$, прибавляем ко второй, а первую строку, умноженную на 5, прибавляем к третьей:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе вторая и третья строки пропорциональны (коэффициент пропорциональности $(-2)$). По свойствам определителей, определитель с пропорциональными строками равен нулю.

Следовательно, $\det A = 0$, ранг матрицы А равен двум, и минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ является базисным. Первые две строки, которые попали в базисный минор, являются базисными. Третья строка в состав базисных не попала. По теореме о базисном миноре, она является линейной комбинацией первых двух. Итак, мы доказали, что третья строка матрицы $A$ является линейной комбинацией первых двух.

Обозначим через $\lambda_1$ и $\lambda_2$ коэффициенты этой линейной комбинации. Тогда

$$\lambda_1 \cdot (1, -2, 4) + \lambda_2 \cdot (3, 1, 5) = (-5, -4, -6).$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -5 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = -6 \end{cases}$$

решая которую находим $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$. Обратите внимание, что найденные числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ обращают все три уравнения системы в тождества.

*Ответ:* 1; $-2$.

**4.4.** Найдите то значение параметра $p$, при котором ранг матрицы $A$ равен трем.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 18 & -12 & 7 & p \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним элементарные преобразования матрицы $A$, не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица $A$, в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на $(-3)$, прибавим ко второй строке и к четвертой строке; первую строку, умноженную на $(-2)$, прибавим к третьей строке. В результате получим новую матрицу $A_1$ того же ранга, что и матрица $A$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & -2 & p-12 \end{bmatrix}.$$

Базисный минор пока не виден, поэтому продолжаем преобразования. Получим нули во втором столбце, в третьей и четвертой строках. Для этого вторую строку, умноженную на 5, прибавим к третьей строке и вторую строку, умноженную на

$(-12)$, прибавим к четвертой строке. Получим матрицу $A_2$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -23 & -54 \\ 0 & 0 & -42 & 46 & p+108 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $A_2$ не менее трех, так как минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 21 = 21$$

отличен от нуля. Также можно заметить, что третья и четвертая строки могут быть пропорциональны с коэффициентом $(-2)$ при $p = 0$. Прибавим к четвертой строке третью строку, умноженную на 2. Получим матрицу $A_3$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -23 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы $A_3$ будет равен трем только в том случае, когда $p = 0$. Если $p \neq 0$ определитель четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 21 \cdot p = 21p \neq 0.$$

*Ответ:* $p = 0$.

**4.5.** Найдите те значения параметров $p$ и $q$, если они существуют, при которых ранг матрицы $A$ равен двум.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ p & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & q \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Выполним элементарные преобразования матрицы $A$, не меняющие ее ранга. В результате мы должны получить матрицу того же ранга, что и матрица $A$, в которой легко выделить базисный минор. Сначала получим нули в первом столбце матрицы. Первую строку, умноженную на $(-3)$, прибавим ко второй строке; первую строку, умноженную на $(-p)$, прибавим к третьей строке; первую строку, умноженную на $(-5)$, прибавим к четвертой строке. В результате получим новую матрицу $A_1$ того же ранга, что и матрица $A$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & -3+3p & 14-4p & 17-p \\ 0 & 10 & -10 & q-5 \end{bmatrix}.$$

Вторую строку матрицы $A_1$ вычтем из четвёртой:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & -3+3p & 14-4p & 17-p \\ 0 & 0 & 0 & q-7 \end{bmatrix}.$$

Так как минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$ не равен нулю, то ранг матрицы $A_2$ не меньше двух. Ранг будет равен двум, если ни третья, ни четвертая строки вместе с первыми двумя не попадут в состав базисного минора. Четвертая строка не войдёт в базисный минор только при $q - 7 = 0$ или $q = 7$. Третья строка, для того чтобы не войти в базисный минор, должна быть пропорциональна второй, то есть

$\dfrac{-3+3p}{10} = \dfrac{14-4p}{-10} = \dfrac{17-p}{2}$ или $-3+3p = -14+4p = 85-5p$.

Решая уравнение $-14 + 4p = 85 - 5p$, получаем $9p = 99$ и $p = 11$. При найденном значении $p$ все части пропорции дают число 3, то есть третья строка пропорциональна со второй с коэффициентом 3.

Таким образом, мы показали, ранг матрицы $A$ равен двум при $p = 11$ и $q = 7$.

*Ответ:* $p = 11$, $q = 7$.

**4.6.** В арифметическом линейном пространстве $R_5$ даны вектора $\mathbf{a_1} = (1; 2; 3; -1; 2)$, $\mathbf{a_2} = (2; 3; 5; 1; 1)$, $\mathbf{a_3} = (5; 8; 13; 1; 4)$ и $\mathbf{a_4} = (3; 4; 7; 3; 0)$. Найдите размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4})$ и какой-нибудь ее базис.

*Решение.* Размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4})$ совпадает с рангом матрицы $A$, составленной из координат векторов $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4})$. Записываем координаты векторов в столбцы матрицы, а затем выполняем преобразования, не меняющие ранга матрицы $A$. Первый столбец, умноженный на $(-2)$, прибавляем ко второму; первый столбец, умноженный на $(-5)$, прибавляем к третьему; первый столбец, умноженный на $(-3)$, прибавляем к четвёртому. В полученной матрице второй, третий и четвёртый столбцы пропорциональны. Любые два из них можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы. Вычеркнем третий и четвёртый столбцы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 13 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Видим, что минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, следовательно ранг матрицы А равен двум. Потому и размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4})$ также равна двум. Первые два столбца матрицы А вошли в базисный минор. Это означает, что векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ линейно независимы. Поэтому в качестве базиса в $\mathcal{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4})$ можно принять векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$.

*Ответ:* размерность линейной оболочки 2, базис $\{\mathbf{a_1}; \mathbf{a_2}\}$.

### Задачи для самостоятельного решения

**4.7.** Пусть дано множество $Q$ всех многочленов степени не выше $n$. Суммой двух многочленов
$A_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и

$B_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ называют многочлен

$C_n = (a_0+b_0)x^n + (a_1+b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1}+b_{n-1})x + (a_n+b_n)$,
а произведением многочлена $A_n$ на число $\lambda$ – многочлен

$Q_n = \lambda a_0x^n + \lambda a_1x^{n-1} + \ldots + \lambda a_{n-1}x + \lambda a_n$.

Докажите, что множество $Q$ с указанными операциями образует линейное пространство. Укажите его размерность и какой-нибудь базис.

**4.8.** Докажите, что множество всех многочленов степени ровно $n$ линейного пространства не образуют (операции сложения многочленов и умножения на число введены, как в задаче 4.7).

**4.9.** Докажите, что множество всех квадратных матриц второго порядка с известными операциями сложения и умножения на число образуют четырехмерное линейное пространство. Укажите какой-нибудь базис этого пространства.

**4.10.** На множестве $M$ всех упорядоченных пар $(u; v)$ положительных чисел операции сложения и умножения введены следующим образом:

$$(u_1; v_1) + (u_2; v_2) = (u_1 \cdot u_2; v_1 \cdot v_2); \quad \lambda(u; v) = (u^\lambda; v^\lambda),$$

где $\lambda$ – вещественное число. Докажите, что при этом множество $M$ становится линейным пространством. Выясните: а) какая пара играет роль нулевого элемента; б) какая пара является противоположной паре $(u; v)$; в) укажите размерность этого пространства и какой-нибудь его базис.

*Ответ:* а) $(1,1)$; б) $\left(\dfrac{1}{u}; \dfrac{1}{v}\right)$; в) 2; $(10,1)$; $(1,10)$.

**4.11.** На множестве $M$ всех упорядоченных пар $(u; v)$ вещественных чисел введены операции одним из следующих способов:

а) $(u_1; v_1) + (u_2; v_2) = (u_1 + 2u_2; v_1 + 2v_2); \quad \lambda(u; v) = (\lambda u; \lambda v);$

б) $(u_1; v_1) + (u_2; v_2) = \left(\dfrac{u_1 + v_1}{2}; \dfrac{u_2 + v_2}{2}\right); \quad \lambda(u; v) = (\lambda u; \lambda v);$

в) $(u_1; v_1) + (u_2; v_2) = (u_1 + u_2; v_1 + v_2); \quad \lambda(u; v) = (u; v).$

Будет ли при этом множество $M$ линейным пространством? В случае отрицательного ответа выясните, какие аксиомы не выполняются.

**4.12.** Докажите, что любая система векторов линейного пространства $R$, содержащая два одинаковых вектора, линейно зависима.

**4.13.** Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейного пространства $R$ линейно независимы. Исходя из определения, докажите, что векторы $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ также линейно независимы.

**4.14.** Докажите, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ линейного пространства $R$ линейно зависимы.

**4.15.** Докажите, что множество $L$ всех векторов $(x, y, z)$ арифметического линейного пространства $R_3$, удовлетворяющих условию $x + y + z = 0$, образует линейное подпространство пространства $R_3$. Укажите размерность $L$ и какой-нибудь базис.

*Ответ:* 2; например, $(-1, 0, 1)$ и $(-1, 1, 0)$.

**4.16.** Докажите, что множество $L$ всех векторов $(x, y, z)$ арифметического линейного пространства $R_3$, удовлетворяющих условию $x + y + z = 1$, не образует линейного подпространства.

**4.17.** Докажите, что ранг матрицы $A$ при любых значениях $a$, $b$, $c$, $d$ не меньше двух.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

**4.18.** Докажите, что столбцы матрицы $A$ линейно зависимы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**4.19.** Укажите те значения параметров $p$ и $q$, при которых ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{bmatrix}$ равен единице.

*Ответ:* $p = 9$; $q = 15$.

**4.20.** Найдите ранг матрицы

а) $\begin{bmatrix} 31 & -10 & -20 \\ -2 & 9 & -10 \\ -13 & 3 & 10 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

*Ответ:* а) 2; б) 3.

**4.21.** Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* 2.

**4.22.** Укажите значения параметра $p$, если они существуют, при которых матрица $A$ имеет наименьший ранг. Чему равен $\operatorname{rang} A$ при найденных значениях $p$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & p \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* при $p = 7$ $\operatorname{rang} A = 3$ .

**4.23.** Докажите, что третья строка матрицы $A$ является линейной комбинацией первых двух, и найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 13 & 17 & -9 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* $-2$; $3$.

**4.24.** Является ли система векторов $\mathbf{a_1} = (3; -3; 0; 7)$, $\mathbf{a_2} = (2; 2; 4; 7)$, $\mathbf{a_3} = (1; 2; 3; 4)$, $\mathbf{a_4} = (5; -4; 1; 3)$ линейно зависимой?

*Ответ:* система векторов является линейно зависимой.

**4.25.** Является ли система векторов $\mathbf{a_1} = (2; 2; -3; -4)$, $\mathbf{a_2} = (1; 2; 3; 5)$, $\mathbf{a_3} = (3; 4; -1; -4)$, $\mathbf{a_4} = (4; 7; 7; 3)$ линейно зависимой?

*Ответ:* система векторов является линейно независимой.

**4.26.** Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки векторов $\mathbf{a_1} = (1; 0; 0; -1)$, $\mathbf{a_2} = (2; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a_3} = (1; 1; 1; 1)$, $\mathbf{a_4} = (1; 2; 3; 4)$, $\mathbf{a_5} = (0; 1; 2; 3)$ арифметического линейного пространства $R_4$.

*Ответ:* размерность линейной оболочки 3; базис, например, $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}\}$.

**4.27.** Укажите значения параметров $p$ и $q$, если они существуют, при которых каждый из векторов $\mathbf{a_3} = (5; -p; 9; 26; 19)$, $\mathbf{a_4} = (-3; -1; p; 18; 4)$, $\mathbf{a_5} = (-11; q; 11; p; -11)$ является линейной комбинацией векторов

$$\mathbf{a_1} = (-2; 1; 3; 4; -1), \qquad \mathbf{a_2} = (3; -4; 1; 6; 7).$$

Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки векторов $\mathcal{L}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}, \mathbf{a_5})$

*Ответ:* $p = 10$, $q = 8$; размерность линейной оболочки 2, базис $\{\mathbf{a_1}; \mathbf{a_2}\}$.

## 5. Переход от одного базиса к другому

Требуется изучить из [5] п.1.3.11 и разобрать пример 6. Приводим еще одну задачу по теме преобразования координат векторов при переходе к новому базису.

**5.1.** Относительно канонического базиса в $R_3$ дано четыре вектора:
$\mathbf{f_1} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{f_2} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{f_3} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{x} = (-3, -2, 7)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса.

*Решение.* Составим матрицу $C$, записав в ее столбцах координаты векторов $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы:

$$\det C = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

Так как $\det C \neq 0$, то векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ линейно независимы, а потому могут быть приняты в качестве базиса в $R_3$. Матрица $C$ невырождена, а потому имеет обратную $C^{-1}$. Найдем ее (см. задачу 3.2). Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы $C$:

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_1^2 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_2^2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad A_2^3 = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad A_3^2 = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad A_3^3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Записываем присоединённую матрицу.

$$C^* = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 7 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Поделив найденные элементы присоединенной матрицы на определитель $\det C = -8$, получим

$$C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -1 \\ -7 & -11 & -5 \end{bmatrix}.$$

Новые координаты $\eta^1$, $\eta^2$, $\eta^3$ вектора $\mathbf{x}$ находим по формуле (1.28) в [5, с. 44].

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -1 \\ -7 & -11 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3-10+21 \\ 9+14-7 \\ 21+22-35 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Ответ:* $(1; 2; 1)$

### Задачи для самостоятельного решения

**5.2.** Относительно канонического базиса в $R_2$ даны три вектора $\mathbf{f_1} = (1;4)$, $\mathbf{f_2} = (3;2)$, $\mathbf{x} = (10;10)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

*Ответ:* $(1;3)$.

**5.3.** Относительно канонического базиса в $R_2$ даны три вектора $\mathbf{f_1} = (2;-5)$, $\mathbf{f_2} = (-1;3)$, $\mathbf{x} = (1;-4)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

*Ответ:* $(-1;-3)$.

**5.4.** Относительно канонического базиса в $R_3$ дано четыре вектора:
$\mathbf{f_1} = (1;3;2)$, $\mathbf{f_2} = (-3;-4;-5)$, $\mathbf{f_3} = (2;-1;3)$, $\mathbf{x} = (-2;4;6)$.
Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

*Ответ:* $(48;30;20)$.

**5.5.** Относительно канонического базиса в $R_3$ дано четыре вектора: $\mathbf{f_1} = (-1;0;1)$, $\mathbf{f_2} = \left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{f_3} = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{x} = (1;1;-2)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

*Ответ:* $(-2;-3;-3)$.

**5.6.** Относительно канонического базиса $\{\mathbf{e_i}\}$ линейного пространства $R_3$ даны две тройки векторов:

$\mathbf{f_1} = (a_1^1;a_1^2;a_1^3)$, $\mathbf{f_2} = (a_2^1;a_2^2;a_2^3)$, $\mathbf{f_3} = (a_3^1;a_3^2;a_3^3)$ и

$\mathbf{g_1} = (b_1^1;b_1^2;b_1^3)$, $\mathbf{g_2} = (b_2^1;b_2^2;b_2^3)$, $\mathbf{g_3} = (b_3^1;b_3^2;b_3^3)$,

таких, что матрицы $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{bmatrix}$

невырождены. Докажите, что векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ и $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_3}$ можно принять за новые базисы. Найдите матрицу $C$ перехода от базиса $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ к базису $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_3}$. Запишите формулы, связывающие координаты одного и того же вектора $\mathbf{x}$ относительно базисов $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ и $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_3}$.

*Ответ:* $C = A^{-1}B$; $\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = B^{-1}A \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix}$, где $[\eta^i]$ - координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{g_i}\}$, а $[\xi^j]$ – в базисе $\{\mathbf{f_j}\}$.

**5.7.** Относительно канонического базиса в пространстве $R_2$ даны две пары векторов $\mathbf{f_1} = (1; -2)$, $\mathbf{f_2} = (3; -5)$ и $\mathbf{g_1} = (2; -1)$, $\mathbf{g_2} = (-3; 1)$. Докажите, что эти пары векторов можно принять в качестве новых базисов в $R_2$. Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\{\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}\}$, если известно, что относительно базиса $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}\}$ он имеет координаты $(2; 4)$.

*Ответ:* $(58; 34)$.

**5.8.** Вектор $\mathbf{x}$ в $R_n$ имеет координаты $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ относительно базиса $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\ldots$ $\mathbf{e_n}$. Как построить новый базис в $R_n$, чтобы координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса стали равными $(1; 0; \ldots; 0)$?

**5.9.** Новая декартова система координат в двумерном точечно-векторном евклидовом пространстве получена путём поворота старой декартовой системы координат на угол а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) $90°$. Запишите формулы перехода от старой системы координат к новой. Найдите координаты точки $M(2; -2)$ в новой системе координат.

*Ответ:*

а) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y, \\ y_1 = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y; \end{cases}$ $\qquad M(\sqrt{3} - 1; -1 - \sqrt{3})$.

б) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y; \end{cases}$ $\quad M(0; -2\sqrt{2})$.

в) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y; \end{cases}$ $\quad M(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$.

г) $\begin{cases} x_1 = y, \\ y_1 = -x \end{cases}$ $\quad M(-2; -2)$.

**5.10.** Новая декартова система координат в двумерном точечно-векторном евклидовом пространстве получена путём параллельного переноса старой декартовой системы координат в новое начало $O_1(3; -5)$. Запишите формулы перехода от старой системы координат к новой. Найдите координаты точки $M(2; -2)$ в новой системе координат.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 = x - 3, \\ y_1 = y + 5 \end{cases}$ $\quad M(-1; 3)$.

**5.11.** Декартова система координат $O_1X_1Y_1$ в двумерном точечно-векторном евклидовом пространстве получена путём параллельного переноса старой декартовой системы координат $OXY$ в новое начало $O_1(-7; 5)$. Затем перешли к декартовой системе координат $O_2X_2Y_2$ путём параллельного переноса системы координат $O_1X_1Y_1$ в новое начало $O_2$. Известно, что в системе координат $O_1X_1Y_1$ точка $O_2$ имеет координаты $(1; 2)$. Запишите формулы перехода от системы координат $OXY$ к $O_2X_2Y_2$. Найдите координаты точки $M$ в системе координат $O_2X_2Y_2$, если в системе координат $OXY$ точка $M$ имеет координаты $(2; -2)$.

*Ответ:* $\begin{cases} x_2 = x + 6, \\ y_2 = y - 7 \end{cases}$ $\quad M(8; -9)$.

**5.12.** Новая декартова система координат в двумерном точечно-векторном евклидовом пространстве получена путём параллельного переноса старой системы координат в новое начало $O_1(-2;-6)$ и поворота осей на угол а) $30^\circ$; б) $45^\circ$; в) $60^\circ$; г) $90^\circ$. Запишите формулы перехода от старой системы координат к новой. Найдите координаты точки $M(2;-2)$ в новой системе координат.

*Ответ:*

а) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y + 3 + \sqrt{3}, \\ y_1 = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y - 1 + 3\sqrt{3}; \end{cases}$ $M(2{+}2\sqrt{3}; -2{+}2\sqrt{3})$.

б) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y + 4\sqrt{2}, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y + 2\sqrt{2}; \end{cases}$ $M(4\sqrt{2}; 0)$.

в) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y + 1 + 3\sqrt{3}, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y + 3 - \sqrt{3}; \end{cases}$ $M(2 + 2\sqrt{3}; 2 - 2\sqrt{3})$.

г) $\begin{cases} x_1 = y + 6, \\ y_1 = -x - 2 \end{cases}$ $M(4;-4)$.

## 6. Решение определённых систем линейных уравнений

Необходимо изучить п.1.4.3 [5, с. 57–60] и разобрать приведенные там примеры.

**6.1.** Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Неизвестное $x_4$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Решение.* Вычислим определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

На первом шаге преобразований из четвёртой строки вычли вторую, из третьей – первую, прибавили первую строку, умноженную на (-2) ко второй. Разложим определитель по первому столбцу:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

(Из третьей строки вычли вторую, прибавили первую строку, умноженную на $(-2)$ ко второй. Разложили определитель по первому столбцу.) Система имеет единственное решение, поскольку $D = -14 \neq 0$ .

Неизвестное $x_4$ найдём по формуле Крамера. Для этого записываем и вычисляем определитель $D_4$ (в определителе $D$ четвертый столбец заменен столбцом свободных членов). Преобразования проводим также, как при вычислении определителя $D$.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 0 & -9 & -19 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(9+19) = -28.$$

По формуле Крамера $x_4 = \dfrac{D_4}{D} = \dfrac{-28}{-14} = 2.$

Решим данную систему методом Гаусса. Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем ее к треугольному виду, действуя только со строками. Преобразования проводим также, как при вычислении определителя $D$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix}.$$

Элементы второй строки матрицы поделим на $(-1)$, элементы четвёртой строки поделим на $(-14)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, исходная система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ \quad x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 9, \\ \quad -x_3 + x_4 = 1, \\ \quad x_4 = 2 \end{cases}$$

из которой видно, что $x_4 = 2$. Из третьего уравнения, подставляя значение $x_4$, находим $x_3 = x_4 - 1 = 2 - 1 = 1$. Из второго уравнения $x_2 = -5x_3 - 3x_4 + 9 = -5 - 6 + 9 = -2$. Из первого уравнения $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4 = 4 - 3 - 4 + 4 = 1$. Мы получили решение: $(1, -2, 1, 2)$.

*Ответ:* $x_4 = 2$, $(1; -2; 1; 2)$.

### Задачи для самостоятельного решения

**6.2.** При каких значениях параметра $p$, если они существуют, данная система совместна?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = p. \end{cases}$$

*Ответ:* $p = 10$.

**6.3.** Найдите ранги основной и расширенной матриц. Охарактеризуйте систему.

а) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7, \\ 5x_1 - 11x_2 + 12x_3 = 14, \\ x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7, \\ 5x_1 - 11x_2 + 12x_3 = 14, \\ x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7, \\ 5x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 15, \\ - 4x_2 + 6x_3 = 10. \end{cases}$$

*Ответ:* а) система не имеет решений; б) система определённая; в) система неопределённая.

**6.4.** Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 17, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 22. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Неизвестное $x_1$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(3; 1; -2)$.

**6.5.** Дана система

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Неизвестное $x_2$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(2; 2; -1)$.

**6.6.** Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Неизвестное $x_2$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(0; -3; 3; 1)$.

**6.7.** Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Неизвестное $x_3$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(3; -2; 1; 0)$.

**6.8.** Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -8, \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 15, \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -6, \\ 4x_1 & + & 14x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -25. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Неизвестное $x_1$ найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(2; -3; 4; -1)$.

**6.9.** Дана система

$$\begin{cases} 7x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 3, \\ 6x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 6, \\ 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2, \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -18 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & - & 4x_4 & = & 39. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет единственное решение. Решите систему методом Гаусса.

*Ответ:* $(2; -1; 3; -4)$.

## 7. Решение неопределённых систем линейных уравнений

Необходимо изучить пп. 1.4.1, 1.4.2, 1.4.4, 1.4.5 пособия [5].

**7.1.** Дана система

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 7x_5 & = & 30, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7, \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 7x_5 & = & -11. \end{cases}$$

Докажите, что эта система совместна, найдите ее общее решение и частное решение, если $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$.

*Решение.* Применим к этой системе метод Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее, действуя только со строками. Вычитаем первую строку из второй; первую строку, умноженную на $(-5)$, прибавляем к третьей.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 & -46 \end{bmatrix} \to$$

Делим на $(-2)$ третью строку:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \end{bmatrix} \to$$

затем прибавляем вторую строку к третьей:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что ранг основной и расширенной матриц равен 2, следовательно, система совместна. Неизвестных в данной системе 5 (что больше ранга), поэтому система является неопределённой.

В преобразованной матрице системы выделяем базисный минор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Таким образом, неизвестные $x_1$, $x_2$ приняты в качестве зависимых, а $x_3$, $x_4$, $x_5$ – в качестве свободных.

Для неопределённой системы следует записать общее решение. В нём каждое зависимое неизвестное должно быть выражено через свободные. Во втором уравнении преобразованной системы неизвестного $x_1$ нет. Это позволяет исключить неизвестное $x_2$ из первого уравнения. Вторую строку полученной матрицы умножаем на 2 и прибавляем к первой:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -16, \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23, \end{cases}$$

эквивалентной исходной системе. Выражаем зависимые неизвестные $x_1$ и $x_2$ через свободные $x_3$, $x_4$, $x_5$:

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases} \quad \text{– общее решение системы.}$$

Полагая $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$ находим $x_1 = -16+1+1+15 = 1$, $x_2 = 23-2-2-18 = 1$. Мы получили частное решение системы $(1; 1; 1; 1; 3)$.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$ $(1; 1; 1; 1; 3)$.

**7.2.** Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальные решения. Запишите общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

*Решение.* Исследовать систему будем методом Гаусса. Записываем матрицу системы и, действуя только со строками, преобразуем ее, не меняя ранга. Первую строку, умноженную на $(-2)$, прибавляем ко второй; первую строку, умноженную на $(-7)$, прибавляем к третьей; вычитаем первую строку из четвёртой.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Видим, что три последние строки пропорциональны. Две из них, например две последних, можно вычеркнуть, не меняя ранга матрицы. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, следовательно, он меньше числа неизвестных. По теореме 2 из подраздела 1.4.5 пособия [5] система имеет нетривиальные решения. Впрочем, это можно было заметить сразу. Поскольку уравнений в системе четыре, ранг ее матрицы не может быть больше четырех. Следовательно, ранг матрицы системы заведомо меньше числа неизвестных (их в системе пять). Минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ можно принять в качестве базисного. При таком выборе базисного минора неизвестные $x_1$ и $x_2$ – зависимые, а $x_3$, $x_4$, $x_5$ – свободные. Во втором уравнении преобразованной системы неизвестного $x_1$ нет. Это позволяет исключить неизвестное $x_2$ из первого уравнения. Для этого вторую строку полученной матрицы делим на 3, а затем прибавляем к первой:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Выражаем зависимые неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5, \end{cases} \quad \text{– общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений содержит $5-2=3$ решения (разность между числом неизвестных и рангом). Получаем три частных линейно независимых решения, придавая поочередно свободным неизвестным значения $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$:

при $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ $\qquad x_1 = -1$ и $x_2 = 0$;

при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ $\quad x_1 = 0$ и $x_2 = 1$;
при $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ $\quad x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Решения $(-1; 0; 1; 0; 0)$, $(0; 1; 0; 1; 0)$, $(-1; 1; 0; 0; 1)$ образуют фундаментальную систему решений. Любое другое решение является их линейной комбинацией.

*Ответ:*
$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & -x_3 - x_5, \\ x_2 & = & x_4 + x_5, \end{array}\right. \quad (-1; 0; 1; 0; 0),\ (0; 1; 0; 1; 0),\ (-1; 1; 0; 0; 1).$$

**Задачи для самостоятельного решения**

**7.3.** Докажите, что существует единственное значение параметра $p$, при котором данная система совместна, и найдите его. Охарактеризуйте систему при найденном значении $p$.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 8, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & p. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $p = 27$; система неопределённая.

**7.4.** Дана система линейных уравнений
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5. \end{array}\right.$$
Докажите, что в этой системе только одно свободное неизвестное. Найдите общее решение системы, принимая в качестве свободного неизвестного $x_3$.

*Ответ:* $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -3, \\ x_2 & = & 4 - 2x_3. \end{array}\right.$

**7.5.** Дана система линейных уравнений
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ 4x_1 & + & p\,x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$
Найдите то значение параметра $p$, при котором неизвестные $x_1$ и $x_2$ одновременно не могут быть зависимыми. Докажите, что неизвестные $x_3$ и $x_4$ могут быть выбраны в качестве зависимых.

*Ответ:* $p = -8$

**7.6.** Докажите, что существует единственная пара значений параметров $p$ и $q$, при которых данная система имеет два свободных неизвестных. Найдите эти значения $p$ и $q$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = p, \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 11x_4 = q. \end{cases}$$

*Ответ:* $p = 16$, $q = 22$.

**7.7.** Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна, не определённа. Найдите её общее решение и частное решение при $x_4 = 1$.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4, \\ x_2 = -1 + 2x_4, \\ x_3 = x_4, \end{cases} \quad (1; 1; 1; 1).$

**7.8.** Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_4 + 2x_5 = -12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна, не определённа. Найдите её общее решение и частное решение при $x_1 = 3$.

*Ответ:* $\begin{cases} x_2 = 5 - 5x_1, \\ x_3 = -7 + 5x_1, \\ x_4 = (-17 + 11x_1)/3, \\ x_5 = (5 - 2x_1)/3, \end{cases} \quad (3; -10; 8; 16/3; -1/3).$

**7.9.** Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 & & - & x_3 & + & x_4 & = & -2, \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & + & 5x_4 & = & 11, \\ -4x_1 & + & 2x_2 & - & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна, не определённа. Найдите её общее решение и частное решение при $x_3 = 5$, $x_4 = 7$.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 = (2 - x_3 + x_4)/2, \\ x_2 = (4 + 7x_3 - 5x_4)/2, \end{cases}$ $(2; 2; 5; 7)$.

**7.10.** Докажите, что существует единственное значение параметра $p$, при котором данная система имеет нетривиальные решения, и найдите его.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + p\,x_3 = 0. \end{cases}$$

*Ответ:* $p = -8$

**7.11.** Докажите, что существует единственная пара чисел $p$ и $q$ таких, что данная система уравнений имеет фундаментальную систему из двух решений. Найдите эти числа $p$ и $q$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + p\,x_3 + q\,x_4 = 0. \end{cases}$$

*Ответ:* $p = -5$, $q = 7$.

**7.12.** Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальное решение. Запишите ее общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 &= -x_3 - x_5, \\ x_2 &= x_4 + x_5, \end{cases}$ $(1;1;2;0)$, $(3;1;0;2)$.

**7.13.** Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 - 11x_4 + 17x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 11x_5 = 0, \\ 5x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальное решение. Запишите ее общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 &= (2x_3 - 7x_4 - 3x_5)/5, \\ x_2 &= (-8x_3 + 13x_4 - 8x_5)/5, \end{cases}$
$(2;-8;5;0;0)$, $(-7;13;0;5;0)$, $(-3;-8;0;0;5)$.

**7.14.** Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 23x_5 = 0, \\ 13x_1 + 18x_2 - 7x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальное решение. Запишите ее общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

*Ответ:* $\begin{cases} x_1 &= -10x_2 + 8x_4 - 16x_5, \\ x_3 &= -16x_2 + 13x_4 - 29x_5, \end{cases}$
$(-10;1;-16;0;0)$, $(8;0;13;1;0)$, $(-16;0;-29;0;1)$.

**7.15.** В евклидовом пространстве $E_4$ относительно канонического базиса задан вектор $\mathbf{a} = (1,1,2,2)$. Докажите, что множество $\mathcal{L}$ всех векторов из $E_4$, ортогональных $\mathbf{a}$, образует линейное подпространство пространства $E_4$. Укажите его размерность и какой-нибудь базис.

**7.16.** В евклидовом линейном пространстве $E_5$ задано три вектора $\mathbf{a_1} = (1,1,1,1,1)$, $\mathbf{a_2} = (0,1,1,1,1)$ и $\mathbf{a_3} = (0,0,1,1,1)$. Докажите, что множество всех векторов из $E_5$, ортогональных каждому из векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, образует линейное подпространство $E_5$. Укажите его размерность и какой-нибудь базис.

## 8. Алгебра геометрических векторов

Для решения соответствующих задач необходимо изучить раздел 1.5 из пособия [5]. Приводим примеры подобных задач.

**8.1.** Найдите $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{r}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = \dfrac{2}{3}\pi$.

*Решение:* Подставляем вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражения из условия задачи: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}, 3\mathbf{p} - \mathbf{r})$. Используем свойства скалярного произведения: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 6(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 9(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - 2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - 3(\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Учтём, что $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2$, $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 6|\mathbf{p}|^2 + 7(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - 3|\mathbf{r}|^2 = 6|\mathbf{p}|^2 + 7|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) - 3|\mathbf{r}|^2 =$$

$$= 6 \cdot 16 + 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2}{3}\pi - 3 \cdot 4 = 96 - 28 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 12 = 56.$$

*Ответ:* 56.

**8.2.** Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 45^\circ$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 4$.

*Решение:* Известно, что $|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2} = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$. Находим $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, подставляя вместо $\mathbf{a}$ выражение из условия задачи: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (4\mathbf{p} + \mathbf{r}, 4\mathbf{p} + \mathbf{r})$. Используем свойства скалярного произведения: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 16(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 4(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + 4(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Учтём, что $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2$, $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$:

$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 16|\mathbf{p}|^2 + 8(\mathbf{p},\mathbf{r}) + |\mathbf{r}|^2 = 16|\mathbf{p}|^2 + 8|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) + |\mathbf{r}|^2 =$
$= 16\cdot 2 + 8\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\cos 45^\circ + 16 = 32 + 32\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 16 =$
$= 32+32+16 = 80$. Следовательно, $|\mathbf{a}|^2 = 80$ и $|\mathbf{a}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

*Ответ:* $4\sqrt{5}$.

**8.3.** При каком значении $\alpha$ векторы $\mathbf{p} = \mathbf{c}+\alpha\mathbf{d}$, $\mathbf{r} = 2\mathbf{c}+3\mathbf{d}$ перпендикулярны, если $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 120^\circ$.

*Решение:* Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ перпендикулярны, когда $(\mathbf{p},\mathbf{r}) = 0$. Находим $(\mathbf{p},\mathbf{r})$. Подставляем вместо $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ выражения из условия задачи и используем свойства скалярного произведения:
$(\mathbf{p},\mathbf{r}) = (\mathbf{c}+\alpha\mathbf{d}, 2\mathbf{c}+3\mathbf{d}) = 2(\mathbf{c},\mathbf{c})+2\alpha(\mathbf{d},\mathbf{c})+3(\mathbf{c},\mathbf{d})+3\alpha(\mathbf{d},\mathbf{d}) =$
$= 2|\mathbf{c}|^2 + (3+2\alpha)(\mathbf{c},\mathbf{d}) + 3\alpha|\mathbf{d}|^2 = 2\cdot 16 + (3+2\alpha)\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 120^\circ +$
$+3\alpha\cdot 16 = 32 - (3+2\alpha)\cdot 16\cdot\dfrac{1}{2} + 3\alpha\cdot 16 = 32 - 8(3+2\alpha) + 48\alpha =$
$= 8+32\alpha$. Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ перпендикулярны, когда $8+32\alpha = 0$, следовательно, $\alpha = -1/4$.

*Ответ:* $-1/4$.

**8.4.** Вычислите $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p}+3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p}-\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 135^\circ$.

*Решение:* Подставляем вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражения из условия задачи: $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |[2\mathbf{p}+3\mathbf{r}, 3\mathbf{p}-\mathbf{r}]|$. Используем свойства векторного произведения: $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |6[\mathbf{p},\mathbf{p}] + 9[\mathbf{r},\mathbf{p}] - 2[\mathbf{p},\mathbf{r}] - 3[\mathbf{r},\mathbf{r}]|$. Учтём, что $[\mathbf{r},\mathbf{p}] = -[\mathbf{p},\mathbf{r}]$, $[\mathbf{p},\mathbf{p}] = 0$, $[\mathbf{r},\mathbf{r}] = 0$:
$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |9[\mathbf{r},\mathbf{p}] + 2[\mathbf{r},\mathbf{p}]| = 11|[\mathbf{r},\mathbf{p}]| = 11|\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) =$
$= 11\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sin 135^\circ = 88\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 88.$

*Ответ:* 88.

**8.5.** Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $A(1;-2;1)$, $B(0;-3;2)$, $C(2;0;1)$. Найдите площадь треугольника $ABC$ и длину его высоты $AH$.

*Решение:* Известно, что величина $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому площадь $S$ треугольника $ABC$ равна $\dfrac{1}{2}|[\mathbf{AB},\mathbf{AC}]|$. Находим координаты векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$: $\mathbf{AB} = (-1;-1;1)$, $\mathbf{AC} = (1;2;0)$.

$$[\mathbf{AB},\mathbf{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$|[\mathbf{AB},\mathbf{AC}]| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad S = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Поскольку $S = \dfrac{1}{2}|\mathbf{AH}||\mathbf{BC}|$, то $|\mathbf{AH}| = \dfrac{2S}{|\mathbf{BC}|}$. Находим координаты вектора $\mathbf{BC} = (2;3;-1)$, тогда $|\mathbf{BC}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$. Подставляем полученные данные в формулу для вычисления $|\mathbf{AH}|$: $|\mathbf{AH}| = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

*Ответ:* $AH = \sqrt{\dfrac{3}{7}}, \quad S = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

**8.6.** Треугольная пирамида $ABCD$: задана координатами своих вершин:

$A(-5;1;1)$, $B(0;-2;-2)$, $C(1;-1;-3)$, $D = (-1;-4;-1)$.

Вычислите: а) объем $V$ этой пирамиды; б) длину ее высоты $CH$; в) косинус угла $\alpha$ между ребрами $AB$ и $AD$; г) $\text{Пр}_{\mathbf{AB}}\mathbf{AD}$.

*Решение.* а) Известно, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен $|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|$. Объем пирамиды, ребрами которой являются векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен $\dfrac{1}{6}|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|$. В нашей задаче $V = \dfrac{1}{6}|(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})|$. Находим координаты векторов и вычисляем смешанное произведение:

$\mathbf{AB} = (6; -3; -3)$, $\mathbf{AC} = (6; -2; -4)$, $\mathbf{AD} = (4; -5; -2)$.

$$(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6(-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18$$

и $V = \dfrac{18}{6} = 3$.

б) Объем пирамиды, как это известно из школьного курса, $V = \dfrac{1}{3}Sh$, тогда $h = \dfrac{3V}{S}$. Так как требуется найти высоту $CH$, то $S$ – площадь грани $ABD$, которую находим также, как в задаче 8.5: $S = \dfrac{1}{2}|[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}]|$.

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -3 & -3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 18\mathbf{k}.$$

$|[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}]| = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{1+4} = 9\sqrt{5}$, тогда $S = \dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

$|\mathbf{CH}| = h = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 2}{9\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

в) Косинус угла между векторами $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AD}$ находим по формуле [5, с. 73]

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AD}|} = \frac{6 \cdot 4 + (-3)(-5) + (-3)(-2)}{\sqrt{36+9+9} \cdot \sqrt{16+25+4}} =$$

$$= \frac{24+15+6}{\sqrt{54 \cdot 45}} = \frac{45}{9\sqrt{6 \cdot 5}} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

г) Проекцию вектора $\mathbf{AD}$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{AB}$, находим по формуле

$$\text{Пр}_{\mathbf{AB}}\mathbf{AD} = \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}|} = \frac{6 \cdot 4 + (-3)(-5) + (-3)(-2)}{\sqrt{36+9+9}} =$$

$$= \frac{24+15+6}{\sqrt{54}} = \frac{45}{3\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

*Ответ:* а) 3; б) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; в) $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$; г) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

### Задачи для самостоятельного решения

**8.7.** В треугольнике $ABC$: $\mathbf{AB} = 2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, $\mathbf{AC} = 8\mathbf{p} - 7\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ – произвольные неколлинеарные векторы. Выразите через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ вектор $\mathbf{BC}$.

*Ответ:* $\mathbf{AC} = 6\mathbf{p} - 12\mathbf{q}$.

**8.8.** В треугольнике $ABC$ сторона $BC$ разделена на четыре равные части точками $M_1$, $M_2$, $M_3$, таким образом что $\mathbf{BM_1} = \mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_2M_3} = \mathbf{M_3C}$. Дано, что $\mathbf{AM_1} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AM_2} = \mathbf{b}$. Выразите через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AC}$.

*Ответ:* $\mathbf{AB} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{BC} = 4(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\mathbf{AC} = 3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.

**8.9.** Известно, что

$$\mathbf{AB} = \alpha\mathbf{p} + 4\mathbf{q}, \quad \mathbf{BC} = 2\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}, \quad \mathbf{AC} = \beta\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q},$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ – неколлинеарные векторы. Найдите числа $\alpha$ и $\beta$.

*Ответ:* $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

**8.10.** Неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ отложены от одной точки $A$. Найдите какой-нибудь вектор $\mathbf{AD}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

*Ответ:* $\mathbf{AD} = \lambda\left(\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)$.

**8.11.** Векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ линейно независимы. Укажите значения величин $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, если $(\alpha - 4)\mathbf{p} + (\beta + 3)\mathbf{q} + (\gamma + 5)\mathbf{r} = 0$.

*Ответ:* $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = -5$.

**8.12.** Дано, что $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 8\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{r}$; где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – произвольные неколлинеарные векторы. Подберите числа $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны.

*Ответ:* $\alpha = 6$, $\beta = 8$.

**8.13.** Даны точки $A(7; -3; 1)$ и $B(4; -1; -3)$. Найдите координаты векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$.

*Ответ:* $\mathbf{AB} = (-3; 2; -4)$, $\mathbf{BA}(3; -2; 4)$.

**8.14.** Вектор $\mathbf{a} = (2; -4; 3)$ отложен от точки $A(3; -5; 2)$. Найдите координаты точки $B$ – его конца.

*Ответ:* $B(5; -9; 5)$.

**8.15.** Вектор $\mathbf{a} = (1; 3; -2)$ отложен от точки $A$. Конец его оказался в точке $B(3; -2; 1)$. Найдите координаты точки $A$.

*Ответ:* $(2; -5; 3)$.

**8.16.** Даны векторы $\mathbf{a} = (1; 2; -2)$, $\mathbf{b} = (0; -1; 3)$, $\mathbf{c} = (-2; 3; -4)$. Найдите координаты вектора $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$.

*Ответ:* $(8; -9; 20)$.

**8.17.** Относительно декартовой системы координат даны точки $A(1; 2; 7)$, $B(3; 6; 5)$. Найдите координаты точки, которая является серединой отрезка $AB$.

*Ответ:* $(2; 4; 6)$.

**8.18.** Относительно декартовой системы координат даны точки $A(2; 3; 10)$ и $B(-4; 6; 7)$. Отрезок $AB$ разделен на три равные части точками $M_1$, $M_2$, таким образом что $|\mathbf{AM_1}| = |\mathbf{M_1M_2}| = |\mathbf{M_2B}|$. Найдите координаты точек $M_1$ и $M_2$.

*Ответ:* $M_1(0; 4; 9)$, $M_2(-2; 5; 8)$.

**8.19.** Найдите скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:
$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

*Ответ:* $-8$.

**8.20.** Найдите скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

*Ответ:* 33.

**8.21.** Найдите квадрат длины вектора $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – единичные векторы, составляющие между собой углы, равные $\dfrac{2\pi}{3}$.

*Ответ:* 37.

**8.22.** Относительно декартовой системы координат даны три точки $A(1; 2; 4)$, $B(3; 6; 5)$, $C(-1; -4; z)$. Укажите все значения $z$, при которых треугольник $ABC$ прямоугольный.

*Ответ:* 53; 32.

**8.23.** Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{a} = (3; 3; 1)$ и $\mathbf{b} = (3; 1; -3)$.

*Ответ:* $9/19$.

**8.24.** Найдите координаты орта вектора $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

*Ответ:* $(6/7; -3/7; -2/7)$.

**8.25.** Найдите направляющие косинусы для векторов: а) $\mathbf{a} = (3; 4; 0)$ и б) $\mathbf{b} = (-1; 1; -2)$.

*Ответ:* а) $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{4}{5}$, 0; б) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

**8.26.** Какие углы образует с осями координат вектор а) $\mathbf{a} = (-3; 0; \sqrt{3})$, б) $\mathbf{b} = (-1; 1; \sqrt{2})$?

*Ответ:* а) $150^\circ$; $90^\circ$; $60^\circ$; б) $120^\circ$; $60^\circ$; $45^\circ$.

**8.27.** Найдите проекцию вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

*Ответ:* 2.

**8.28.** Найдите координаты векторного произведения векторов $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

*Ответ:* $(-13, -1, -8)$.

**8.29.** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

*Ответ:* 92.

**8.30.** Даны координаты вершин треугольника $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 2)$, $C(1; -4; -1)$. Найдите длину его высоты $CH$.

*Ответ:* $9/\sqrt{5}$.

**8.31.** Векторы $\mathbf{PA} = (3; 1; 4)$ и $\mathbf{PB} = (3; 1; 1)$ отложены из общего начала $P(-3; 1; 0)$. Найдите: а) длину отрезка $AB$; б) длину высоты $OH$ треугольника $OAB$ ($O$ - начало координат).

*Ответ:* а) 3; б) 2.

**8.32.** Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найдите $\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right)$.

*Ответ:* 8.

**8.33.** Подберите число $\alpha$ так, чтобы векторы $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$. были компланарны.

*Ответ:* $\alpha = 9$ или $\alpha = -40/11$.

**8.34.** Даны координаты точек $A(3; -4; 0)$, $B(0; -5; 0)$, $C(0; -4; 18)$, $D(1; -10; 18)$. Найдите объём пирамиды $ABCD$.

*Ответ:* 57.

**8.35.** Даны координаты точек $A(2; 3; 1)$, $B(6; 2; 0)$, $C(4; 2; 1)$, $D(4; 6; 0)$. Найдите высоту $DH$ пирамиды $ABCD$.

*Ответ:* 2.

## 9. Линейные операторы. Квадратичные формы

Для решения задач по данной теме следует изучить подразделы 1.6.1–1.6.8 из пособия [5].

**9.1.** Операторы $A$ и $B$ действуют в пространстве $V_3$ по законам $A\mathbf{x} = [\mathbf{c}, \mathbf{x}]$; $B\mathbf{x} = (-2x_3, -x_2, x_1)$, где $\mathbf{c} = (-1; 3; 2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. а) Докажите, что оператор $A$ линеен. б) Найдите координаты вектора $A\mathbf{c}$. в) Найдите координаты вектора $B\mathbf{c}$. г) Найдите матрицу оператора $BA$ в базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

*Решение.*

а) Чтобы доказать, что оператор $A$ линейный, надо проверить, что выполняется условие $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}$. В нашем случае, используя свойства векторного произведения, находим

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = [\mathbf{c}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha[\mathbf{c}, \mathbf{x}] + \beta[\mathbf{c}, \mathbf{y}] = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y},$$

т.е. оператор $A$ линейный.

б) Поскольку $A\mathbf{c} = [\mathbf{c}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$, то $A\mathbf{c} = (0; 0; 0)$.

в) Находим вектор $B\mathbf{c}$. В этом случае $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. Поэтому $B\mathbf{c} = (-2 \cdot 2; -3; -1) = (-4; -3; -1)$.

г) Матрицу оператора $BA$ можно найти двумя способами: первый способ – найти матрицы операторов $B$ и $A$, а затем найти их произведение; второй способ – найти координаты векторов $BA\mathbf{i}$, $BA\mathbf{j}$, $BA\mathbf{k}$ и записать их в столбцы.

*Первый способ.* Найдём матрицы операторов $A$ и $B$. Действуем оператором $A$ на базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$A\mathbf{i} = [\mathbf{c}, \mathbf{i}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k};$$

$$A\mathbf{j} = [\mathbf{c}, \mathbf{j}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - \mathbf{k};$$

$$A\mathbf{k} = [\mathbf{c}, \mathbf{k}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Записываем координаты полученных векторов в столбца матрицы. Это будет матрица оператора $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Действуем оператором $B$ на базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$B\mathbf{i} = (0; 0; 1)$ (в этом случае $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$);

$B\mathbf{j} = (0; -1; 0)$ (в этом случае $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$);

$B\mathbf{k} = (-2; 0; 0)$ (в этом случае $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$).

Записываем координаты полученных векторов в столбца матрицы. Это будет матрица оператора $B$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $BA$:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Второй способ.* Действуем на базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ сначала оператором $A$, затем оператором $B$:

$(BA)\mathbf{i} = B(A\mathbf{i}) = B(2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = (6; -2; 0)$;

$(BA)\mathbf{j} = B(A\mathbf{j}) = B(-2\mathbf{i} - \mathbf{k}) = (2; 0; -2)$;

$(BA)\mathbf{k} = B(A\mathbf{k}) = B(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (0; -1; 3)$;

(векторы $A\mathbf{i}$, $A\mathbf{j}$, $A\mathbf{k}$ уже найдены выше). Записываем координаты полученных векторов в столбца матрицы. Это будет матрица оператора $BA$:

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**9.2.** Линейный оператор $A$ действует в $R_3 \to R_3$ по закону $A\mathbf{x} = (5x_1 + 2x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 - 4x_3, 6x_1 + 4x_2 - 4x_3)$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольный вектор из $R_3$. а) Найдите матрицу оператора $A$ в каноническом базисе. б) Докажите, что вектор $\mathbf{x} = (1; 2; 2)$ является собственным для оператора $A$, и найдите собственное число $\lambda_0$, ему отвечающее. в) Найдите все другие собственные векторы оператора $A$ и сделайте проверку.

*Решение.*

а) Действуем на базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ оператором $A$: $A(1; 0; 0) = (5; 4; 6)$, $A(0; 1; 0) = (2; 5; 4)$, $A(0; 0; 1) = (-3; -4; -4)$. Найдём матрицу оператора $A$, записав в столбцы координаты полученных векторов: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

б) Проверим, что вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$ является собственным матрицы $A$. Находим

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4-6 \\ 4+10-8 \\ 6+8-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Так как $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, то отсюда следует, что вектор $\mathbf{x}(1, 2, 2)$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda_0 = 3$.

в) Чтобы найти все другие собственные числа, составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

В нашем случае $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Выполняем разложение определителя по первой строке:

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-4) - 2(-4\lambda+8) - 3(6\lambda-14) =$$

$$= -\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+5\lambda^2-5\lambda-20+8\lambda-16-18\lambda+42=$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = 0.$$

Нам уже известно, что число $\lambda_0 = 3$ — корень этого уравнения. Разделим многочлен $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$ на $(\lambda-3)$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 & \lambda-3 \\ \cline{2-2} -\;\underline{\lambda^3-3\lambda^2\phantom{+11\lambda-6}} & \lambda^2-3\lambda+2 \\ -3\lambda^2+11\lambda-6 & \\ -\;\underline{-3\lambda^2+\phantom{1}9\lambda\phantom{-6}} & \\ 2\lambda-6 & \\ -\;\underline{2\lambda-6} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+2)$. Другие собственные числа найдём, решая уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$. $\lambda_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3\pm 1}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Итак, собственными числами являются 1, 2, 3.

Находим собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

$\lambda = 1$. Собственные векторы, отвечающие этому собственному числу, образуют фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 4x_1+4x_2-4x_3=0, \\ 6x_1+4x_2-5x_3=0. \end{cases}$$

Определитель системы совпадает с определителем $|A-E|=0$, поэтому система имеет нетривиальные решения.

Запишем матрицу системы и преобразуем её. На первом шаге преобразований вычтем первую строку из второй и третьей.

На втором шаге третью строку, умноженную на $(-2)$, прибавляем к первой.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to$$

В полученной матрице первая и вторая строки пропорциональны, поэтому первую строку вычёркиваем. Вторую строку вычитаем из третьей.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы системы равен двум. Базисный минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Неизвестные $x_1$, $x_2$ – зависимые, $x_3$ – свободное. Таким образом, общее решение системы $\begin{cases} x_1 = x_3/2, \\ x_2 = x_3/2. \end{cases}$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Положив, например, $x_3 = 2$, найдём собственный вектор $\mathbf{x} = (1; 1; 2)$.

*Проверка:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2-6 \\ 4+5-8 \\ 6+4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

т.е. вектор (1;1;2) является собственным и отвечает собственному числу $\lambda = 1$.

$\lambda = 2$. Собственные векторы, отвечающие этому собственному числу, образуют фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы совпадает с определителем $|A-2E| = 0$, поэтому система имеет нетривиальные решения.

Запишем матрицу системы. В этой матрице первая и третья строки пропорциональны, поэтому третью строку вычёркиваем. Также вычтем первую строку из второй. На втором шаге преобразований вторую строку, умноженную на $(-3)$, прибавляем к первой.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум. Базисный минор $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Неизвестные $x_1$, $x_2$ – зависимые, $x_3$ – свободное. Таким образом, общее решение системы $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Положив, например, $x_3 = 1$, найдём собственный вектор $\mathbf{x} = (1; 0; 1)$.

*Проверка:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0-3 \\ 4+0-4 \\ 6+0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

т.е. вектор (1;0;1) является собственным и отвечает собственному числу $\lambda = 2$.

**9.3.** Следующие квадратичные формы приведите к главным осям. Найдите ортогональную матрицу $Q$, осуществляющую переход к каноническому виду.

а) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^2 - 6xy + 2xz + y^2 - 2yz + 5z^2$;

б) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x^2 - 4xy - 8xz + 2y^2 + 4yz + 5z^2$.

*Решение.* а) Записываем симметричную матрицу B данной квадратичной формы

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

и находим ее собственные числа, решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавляем первую строку определителя ко второй:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Выполняем разложение определителя по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2+\lambda+2+\lambda+(5-\lambda)(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2+\lambda)(2-(5-\lambda)(1-\lambda+3)) = (2+\lambda)(-\lambda^2+9\lambda-18) = 0.$$

Число $\lambda_1 = -2$ — корень этого уравнения. Другие собственные числа найдём, решая уравнение $-\lambda^2+9\lambda-18=0$.

$\lambda_{2,3} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-72}}{-2} = \dfrac{-9 \pm 3}{-2}$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Итак, собственными числами являются $-2$, $6$, $3$.

Так как найденные собственные числа являются коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы, то относительно главных осей квадратичная форма имеет вид $B = -2x_1^2 + 6y_1^2 + 3z_1^2$.

Обратите внимание, что нумеровать собственные числа можно в произвольном порядке. При записи квадратичной формы в каноническом виде коэффициент при $x_1$ равен $\lambda_1$, коэффициент при $y_1$ равен $\lambda_2$, коэффициент при $z_1$ равен $\lambda_3$.

Находим собственные векторы матрицы B. Подробное решение задачи отыскания собственных векторов изложено в задаче 9.2, здесь мы приводим только основные результаты.

При $\lambda_1 = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение можно записать в виде $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Полагая $x_2 = 1$, получим собственный вектор $\mathbf{f_1} = (1; 1; 0)$.

При $\lambda_2 = 6$ получаем систему

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение можно записать в виде $\begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = 2x_1. \end{cases}$

Полагая $x_1 = 1$, получим собственный вектор $\mathbf{f_2} = (1; -1; 2)$.

При $\lambda_3 = 3$ получаем систему

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение можно записать в виде $\begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$

Полагая $x_1 = 1$, получим собственный вектор $\mathbf{f_3} = (1; -1; -1)$.

Векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ образуют ортогональный базис, так как отвечают различным собственным числам. Новый базис выбран правым (векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ образуют правую тройку), поскольку их смешанное произведение – положительное число:

$$(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Если при решении задачи оказывается, что $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}) < 0$, следует сменить ориентацию одного из векторов на противоположную.

Для того, чтобы нормировать векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$, вычисляем их модули: $|\mathbf{f_1}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|\mathbf{f_2}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, $|\mathbf{f_3}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Находим орты векторов $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$: $\mathbf{f_{01}} = \dfrac{\mathbf{f_1}}{|\mathbf{f_1}|}$, $\mathbf{f_{02}} = \dfrac{\mathbf{f_2}}{|\mathbf{f_2}|}$, $\mathbf{f_{03}} = \dfrac{\mathbf{f_3}}{|\mathbf{f_3}|}$, и записываем полученные координаты в столбцы матрицы:

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Мы получили матрицу $Q$ перехода от старого ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к новому ортонормированному базису $\mathbf{f_{01}}$, $\mathbf{f_{02}}$, $\mathbf{f_{03}}$. Матрица $Q$ ортогональна, поэтому $Q^{-1} = Q^T$. Следовательно, новые координаты $x_1$, $y_1$, $z_1$ выражаются через старые $x$, $y$, $z$ соотношением

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

б) Записываем симметричную матрицу B данной квадратичной формы

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

и находим ее собственные числа, решая характеристическое уравнение
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
Прибавляем вторую строку определителя, умноженную на 2 к первой:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$
Выполняем разложение определителя по третьему столбцу:
$$-2\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -2(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (5-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(-20 + (5-\lambda)(6-\lambda)) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = 0.$$
Число $\lambda_1 = 1$ — корень этого уравнения. Другие собственные числа найдём, решая уравнение $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$.

$\lambda_{2,3} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \dfrac{11 \pm 9}{2}$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 1$. Итак, собственными числами являются 1, 10. Причём $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 2.

Так как найденные собственные числа являются коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы, то относительно главных осей квадратичная форма имеет вид $B = x_1^2 + 10y_1^2 + z_1^2$.

Обратите внимание, что нумеровать собственные числа можно в произвольном порядке. При записи квадратичной формы в каноническом виде коэффициент при $x_1$ равен $\lambda_1$, коэффициент при $y_1$ равен $\lambda_2$, коэффициент при $z_1$ равен $\lambda_3$.

Находим собственные векторы матрицы B. Подробное решение задачи отыскания собственных векторов изложено в задаче 9.2, здесь мы приводим только основные результаты.

При $\lambda_2 = 10$ получаем систему

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение можно записать в виде $\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3/2. \end{cases}$

Полагая $x_3 = -2$, получим собственный вектор $\mathbf{f_2} = (2; -1; -2)$.

При $\lambda_1 = 1$ получаем систему

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

эквивалентную одному уравнению $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, поскольку все три уравнения системы пропорциональны. Выберем в качестве свободных неизвестные $x_1$ и $x_3$. Общее решение имеет вид: $x_2 = 2x_1 - 2x_3$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Это означает, что собственному числу $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ кратности 2 соответствует линейно независимая система, состоящая из двух векторов. При $x_1 = 0$ и $x_3 = -1$ получим $x_2 = 2$ и $\mathbf{f_1} = (0; 2; -1)$. Другой вектор фундаментальной системы решений (обозначим его $\mathbf{f_3}$) найдём из следующих соображений. Новый базис должен быть ортогональным, а также правым. Векторы $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$ ортогональны, так как отвечают различным собственным числам. Вектор $\mathbf{f_3}$ найдём как векторное произведение $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$.

$$\mathbf{f_3} = [\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Мы получили вектор $\mathbf{f_3} = (5; 2; 4)$, который является частным решением системы, входит в её фундаментальную систему решений вместе с вектором $\mathbf{f_1}$ и отвечает собственному числу $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$. Также вектор $\mathbf{f_3}$ попарно ортогонален векторам $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ и образует с ними правую тройку.

Для того, чтобы нормировать векторы $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$, вычисляем их модули: $|\mathbf{f_1}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $|\mathbf{f_2}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\mathbf{f_3}| = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Находим орты векторов $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$: $\mathbf{f_{01}} = \dfrac{\mathbf{f_1}}{|\mathbf{f_1}|}$, $\mathbf{f_{02}} = \dfrac{\mathbf{f_2}}{|\mathbf{f_2}|}$, $\mathbf{f_{03}} = \dfrac{\mathbf{f_3}}{|\mathbf{f_3}|}$, и записываем полученные координаты в столбцы матрицы:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Мы получили матрицу $Q$ перехода от старого ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к новому ортонормированному базису $\mathbf{f_{01}}$, $\mathbf{f_{02}}$, $\mathbf{f_{03}}$. Матрица $Q$ ортогональна, поэтому $Q^{-1} = Q^T$. Следовательно, новые координаты $x_1$, $y_1$, $z_1$ выражаются через старые $x$, $y$, $z$ соотношением

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

*Ответ:*

а) $B = -2x_1^2 + 6y_1^2 + 3z_1^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

б) $B = x_1^2 + 10y_1^2 + z_1^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

### Задачи для самостоятельного решения

**9.4.** Определите, какие из следующих функций $A : V_3 \to V_3$ являются линейными операторами. Для линейных операторов найдите матрицу в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

а) $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ – фиксированный вектор);
б) $A\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{i}$;
в) $A\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
г) $A\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$;
д) $A\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3)$, где $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$;
е) $A\mathbf{x} = (\xi_1, (\xi_2)^2, \xi_3)$, где $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$;
ж) $A\mathbf{x} = (0; \cos\xi_2; \cos\xi_3)$ где $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

*Ответ:* в), д), $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**9.5.** Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольный вектор из $R_3$, $A$ и $B : R_3 \to R_3$ – линейные операторы, определенные соотношениями: $A\mathbf{x} = (x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2)$;
$B\mathbf{x} = (x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_1 - x_2)$.

Найдите: а) матрицы операторов $A$ и $B$ относительно канонического базиса $\mathbf{e_1} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e_2} = (0; 1; 0)$, $\mathbf{e_3} = (0; 0; 1)$; б) векторы $A\mathbf{c}$, $B\mathbf{c}$, $A(B\mathbf{c})$, $B(A\mathbf{c})$, где $\mathbf{c} = (2; 4; -3)$, двумя способами, используя и не используя понятие матрицы линейного оператора.

*Ответ:* $A(B\mathbf{c}) = (1; 12; 17)$; $B(A\mathbf{c}) = (-9; -12; -3)$.

**9.6.** Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Докажите, что вектор $\mathbf{x} = (0; 2; -1)$ является собственным этой матрицы и найдите отвечающее ему собственное число. Найдите все собственные числа и собственные векторы этой матрицы и сделайте проверку.

*Ответ:* собственные числа 1; 4; 16.

**9.7.** Линейный оператор $A$ действует в $R_3 \to R_3$ по закону

$$Ax = (-5x_1 - 2x_2 - 6x_3, 4x_1 + 7x_2 + 18x_3, -2x_2 - 5x_3).$$

Найдите матрицу $A$ этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(-2; -1; 1)$ является собственным для матрицы $A$. Найдите собственное число $\lambda_0$, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. Найдите другие собственные числа, отличные от $\lambda_0$. Найдите все собственные векторы матрицы $A$ и сделайте проверку.

*Ответ:* собственные числа $-3$; 1; $-1$.

**9.8.** Линейный оператор $A$ действует в $R_3 \to R_3$ по закону

$$Ax = (4x_1 - 3x_2, 30x_1 - 11x_2 - 6x_3, 6x_1 - 6x_2 + x_3).$$

Найдите матрицу $A$ этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1; 3; 2)$ является собственным для матрицы $A$. Найдите собственное число $\lambda_0$, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. Найдите другие собственные числа, отличные от $\lambda_0$. Найдите все собственные векторы матрицы $A$ и сделайте проверку.

*Ответ:* собственные числа $-5$; $-2$; 1.

**9.9.** Пусть матрица $A$ невырождена. Докажите, что если вектор $\mathbf{x}$ – собственный матрицы $A$ и отвечает собственному числу $\lambda$, то при этом $\lambda \neq 0$ и вектор $\mathbf{x}$ также собственный и для матрицы $A^{-1}$ и отвечает собственному числу $\dfrac{1}{\lambda}$.

**9.10.** Докажите, что если вектор $\mathbf{x}$ – собственный для матрицы $A$ и отвечает собственному числу $\lambda$, то этот вектор является собственным и для матрицы $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ и отвечает собственному числу $\lambda^n$.

**9.11.** Пусть оператор $A : V_3 \to V_3$ есть линейный оператор поворота на угол $180°$ вокруг оси $OZ$. Укажите собственные числа этого оператора. Укажите какую-нибудь линейно независимую тройку собственных векторов этого оператора.

**9.12.** Квадратичные формы

а) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$;

б) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 7z^2$;

в) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2$;

г) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 4xz + 8yz - 2z^2$;

д) $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2$

приведите к главным осям и найдите соответствующее преобразование системы координат.

*Ответ:*

а) $2y_1^2 + 3z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

б) $3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

в) $x_1^2+2y_1^2+4z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

г) $-7x_1^2+2y_1^2+2z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

д) $3x_1^2+y_1^2+z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Этот раздел содержит восемь типов задач: 1) прямая линия на плоскости; 2) плоскость; 3) прямая в пространстве; 4) окружность, сфера; 5) эллипс, гипербола, парабола; 6) цилиндры, конусы, поверхности вращения; 7) поверхности второго порядка; 8) полярная система координат. Для решения задач первых трёх типов широко применяется векторная алгебра. Следует повторить теоретический материал по скалярному, векторному и смешанному произведению [5], с.73–78.

## 10. Прямая линия на плоскости

Необходимо изучить подраздел 2.3 из [5]. Напомним, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициенты $A$ и $B$ определяют ненулевой вектор $\mathbf{N} = (A, B)$, $A^2 + B^2 \neq 0$, перпендикулярный данной прямой, называемый вектором нормали. Чтобы записать общее уравнение прямой, достаточно найти её вектор нормали $\mathbf{N} = (A, B)$ и координаты $(x_0, y_0)$ какой-либо точки $M_0$, лежащей на этой прямой. Рекомендуется использовать следующие правила.

1. Если прямая, проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$, следовательно, $C = -(Ax_0 + By_0)$.

2. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = (A, B)$, то её общее уравнение можно записать в виде $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$.

3. Если прямая параллельна вектору $\mathbf{l} = (p, q)$, то в качестве её вектора нормали можно принять либо вектор $\mathbf{N_1} = (q, -p)$, либо $\mathbf{N_2} = (-q, p)$.

4. Если прямые параллельны, то их векторы нормали также параллельны (их можно принять одинаковыми). Если прямые перпендикулярны, то их векторы нормали также перпендикулярны.

5. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Следующие простые задачи (10.1–10.6) встречаются при решении многих задач.

**10.1.** Найдите то значение параметра $C$, при котором прямая, заданная уравнением $2x - 3y + C = 0$, проходит через точку $M_0(2; 4)$.

*Решение.* В общем уравнении прямой $A = 2$, $B = -3$. По правилу 1 при $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ находим $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + C = 0$ (в уравнение прямой подставили координаты точки $M_0$), $C = -4 + 12$, $C = 8$.

*Ответ:* $C = 8$.

**10.2.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = (4; 5)$.

*Решение.* По правилу 2 находим искомое уравнение $4x + 5y - (4 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = 0$, $4x + 5y - 23 = 0$.

*Ответ:* $4x + 5y - 23 = 0$.

**10.3.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2; 3)$ параллельно прямой $x - 4y + 5 = 0$.

*Решение.* Вектор нормали заданной прямой $\mathbf{N} = (1; -4)$. Так как прямые параллельны, в качестве вектора нормали искомой прямой можно принять вектор $\mathbf{N} = (1; -4)$ (правило 4) и записать искомое уравнение $x - 4y - (1 \cdot (-2) - 4 \cdot 3) = 0$, или $x - 4y + 14 = 0$.

*Ответ:* $x - 4y + 14 = 0$.

**10.4.** Запишите общее уравнение прямой $L$, проходящей через точку $M_0(3; -2)$ перпендикулярно к прямой $4x - 5y + 2 = 0$.

*Решение.* Вектор нормали заданной прямой $\mathbf{N_1}(4;-5)$. В качестве вектора нормали прямой $L$ можно принять любой вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{N_1}(4;-5)$ (правило 4), например вектор $\mathbf{N_2}(5;4)$ (обратите внимание, что $(\mathbf{N_1},\mathbf{N_2})=0$). Записываем искомое уравнение $5x+4y-(5\cdot 3+4\cdot(-2))=0$ или $5x+4y-7=0$.

*Ответ:* $5x+4y-7=0$.

**10.5.** Запишите общее уравнение прямой $L$, проходящей через точки $M_0(3;4)$ и $M_1(5;-3)$.

*Решение.* Приведём три способа решения этой задачи.

*Первый способ.* Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки можно записать в виде ([5], стр.113):

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

В нашем случае $x_0=3,\ y_0=4,\ x_1=5,\ y_1=-3$. Подставляем координаты точек в уравнение:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-4}{-3-4}\quad\text{или}\quad\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-7}\quad -$$

каноническое уравнение прямой. Переходим к общему уравнению прямой, умножая обе часть канонического уравнения на $(-14)$: $-7(x-3)=2(y-4)$, или $7x+2y-29=0$.

*Второй способ.* Вектор $\mathbf{M_0M_1}$ является для прямой $L$ направляющим. Найдём координаты вектора $\mathbf{M_0M_1}=(2;-7)$. Прямая $L$ параллельна вектору $\mathbf{M_0M_1}=(2;-7)$, а потому перпендикулярна вектору $\mathbf{N}=(7;2)$, который можно принять в качестве вектора нормали прямой $L$ (правило 3). Обратите внимание, что $(\mathbf{N},\mathbf{M_0M_1})=0$. Записываем искомое уравнение: $7x+2y-(7\cdot 3+2\cdot 4)=0$, или $7x+2y-29=0$.

*Третий способ.* Уравнение прямой $L$ будем искать в виде $y=kx+b$ (уравнение прямой с угловым коэффициентом). Требуется найти значения $k$ и $b$. Так как эта прямая проходит через точки $M_0$ и $M_1$, то $\begin{cases} 4=3k+b,\\ -3=5k+b.\end{cases}$

Решая эту систему, находим $k = -\dfrac{7}{2}$, $b = \dfrac{29}{2}$. Уравнение прямой $L$ можно записать в виде $y = -\dfrac{7}{2}x + \dfrac{29}{2}$. Умножая обе части уравнения на 2 и перенося все слагаемые в левую часть уравнения, получим общее уравнение прямой: $7x + 2y - 29 = 0$.

*Ответ:* $7x + 2y - 29 = 0$.

**10.6.** Найдите расстояние $d$ от точки $M(2; 5)$ до прямой $8x + 6y - 7 = 0$.

*Решение.* По формуле (2.12), [5], с.114, в которой надо положить $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $A = 8$, $B = 6$, находим

$$d = \frac{|8 \cdot 2 + 6 \cdot 5 - 7|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{|16 + 30 - 7|}{10} = \frac{39}{10} = 3{,}9.$$

*Ответ:* $d = 3{,}9$.

**10.7.** Найдите расстояние между прямыми $8x + 6y - 7 = 0$ и $8x + 6y + 23 = 0$.

*Решение.* В общих уравнениях прямых совпадают коэффициенты: $A = 8$, $B = 6$, поэтому данные прямые параллельны. Расстояние между прямыми можно найти с помощью формулы (2.12), [5], с.114, для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости. Пусть точка $M(x_1, y_1)$ лежит на прямой $8x + 6y - 7 = 0$. Тогда $8x_1 + 6y_1 - 7 = 0$ или $8x_1 + 6y_1 = 7$. Расстояние $d$ от точки $M_1$ до прямой $8x + 6y + 23 = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|8 \cdot x_1 + 6 \cdot y_1 + 23|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{|7 + 23|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{|30|}{10} = 3.$$

*Ответ:* $d = 3$.

**10.8.** Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $A(1; -3)$, $B(-5; 7)$, $C(-3; -1)$. Запишите уравнения прямых, на которых расположены: а) медиана $AM$; б) высота $BH$ этого треугольника.

*Решение:* а) прямая $AM$ проходит через точку $A(1;-3)$ и точку $M$, являющуюся серединой отрезка $BC$. Находим координаты точки $M$: $x = \dfrac{-5-3}{2} = -4$, $y = \dfrac{7-1}{2} = 3$, т.е. $M(-4;3)$. Прямая $AM$ параллельна вектору $\mathbf{AM} = (-5;6)$. В качестве вектора нормали прямой $AM$ можно принять вектор $\mathbf{N} = (6;5)$. Записываем уравнение прямой $AM$ (см. правило 2), используя координаты вектора $\mathbf{N}$ и точки $A$: $6x + 5y - (6\cdot 1 + 5\cdot(-3)) = 0$, или $6x + 5y + 9 = 0$;

б) прямая $BH$ – высота треугольника $ABC$, проведённая из вершины $B$. Она перпендикулярна стороне $AC$ и вектору $\mathbf{AC} = (-4;2)\|(2;-1)$. В качестве вектора нормали прямой $BH$ можно принять вектор $\mathbf{N}(2;-1)$. Пользуясь правилом 2, записываем уравнение прямой $BH$: $2x - y - (2\cdot(-5) - 1\cdot 7) = 0$, или $2x - y + 17 = 0$.

*Ответ:* а) $6x + 5y + 9 = 0$; б) $2x - y + 17 = 0$.

**10.9.** Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;6)$ и отсекающей от второго координатного угла треугольник площадью $S = 0{,}5$.

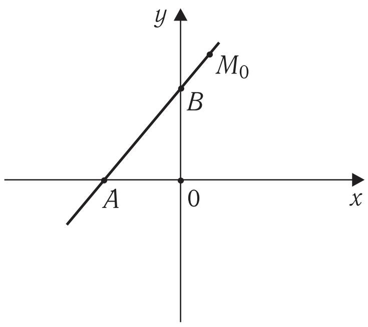

Рис. 10.1

*Решение.* Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$ (уравнение прямой с угловым коэффициентом). Прямая отсекает треугольник от второго координатного угла, поэтому $b > 0$, $k > 0$. Находим точки пересечения искомой прямой с осями координат: $B(0,b)$, $A\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$. Площадь треугольника $OAB$ (рис.10.1) равна $S = \dfrac{1}{2}|\mathbf{OA}||\mathbf{OB}|$ или $S = \dfrac{b^2}{2k}$. По условию задачи $S = \dfrac{1}{2}$, или $\dfrac{b^2}{2k} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $k = b^2$. Так как эта прямая проходит через точку $M_0(1;6)$, то $6 = k + b$. Составляем систему $\begin{cases} k = b^2, \\ 6 = k + b. \end{cases}$ Отсюда $b^2 + b - 6 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим $b_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$. Поскольку $b > 0$, то $b = 2$, а потому $k = 4$. Таким образом, уравнение прямой $y = 4x + 2$, или общее уравнение $4x - y + 2 = 0$.

*Ответ:* $4x - y + 2 = 0$.

**10.10.** Найдите проекцию точки $P(6;0)$ на прямую $L$, заданную уравнением $4x - 3y + 1 = 0$. Найдите точку $S$, симметричную точке $P(6;0)$ относительно этой прямой.

*Решение.* Точку $Q$, являющуюся проекцией точки $P$ на данную прямую, можно найти как точку пересечения прямой $L$ и прямой $PQ$ (рис.10.2), перпендикулярной к $L$ и проходящей через точку $P$. Прямая $PQ$ параллельна вектору $\mathbf{N_1}(4;-3)$ — нормали прямой $L$. В качестве вектора нормали прямой $PQ$ можно принять вектор $\mathbf{N_2}(3;4)$, а потому уравнение прямой $PQ$ имеет вид $3x + 4y - (18 - 0) = 0$, или $3x + 4y - 18 = 0$.

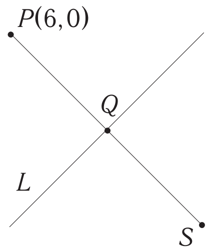


Рис. 10.2

Для отыскания координат точки $Q$ мы получили систему

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 18 = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x = 2$, $y = 3$, т.е. $Q(2;3)$. Обозначим координаты точки $S$ через $x$ и $y$. Точка $Q$ делит пополам отрезок $PS$, поэтому $\dfrac{6+x}{2} = 2$, $\dfrac{0+y}{2} = 3$. Отсюда $x = -2$, $y = 6$, т.е. $S(-2;6)$.

*Ответ:* $Q(2;3)$, $S(-2;6)$.

**10.11.** Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $P(6;10)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(2;8)$ и $M_2(4;-12)$.

*Решение.* Составим общие уравнения искомых прямых вида $Ax + By + C = 0$. Учтём, что прямые находятся на одинаковом расстоянии от точек $M_1(2;8)$ и $M_2(4;-12)$, то есть расстояние от точки $M_1$ до искомой прямой равно расстоянию от точки $M_2$ до искомой прямой (рис.10.3). Используя формулу (2.12), [5], с.114, получаем

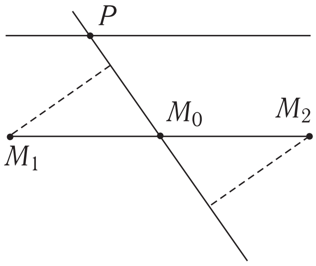


Рис. 10.3

$$\frac{|2A+8B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4A-12B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

или $|2A + 8B + C| = |4A - 12B + C|$.

Записываем соотношение без знака модуля: $2A + 8B + C = \pm(4A - 12B + C)$. Таким образом, мы получили два уравнения для неизвестных коэффициентов: $2A + 8B + C = 4A - 12B + C$ и $2A + 8B + C = -4A + 12B - C$. Также учтём, что искомые прямые проходят через точку $P$: $6A + 10B + C = 0$. В итоге, для неизвестных коэффициентов $A$, $B$, $C$ получаем две различные системы уравнений:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 2A - 20B = 0, \\ A^2 + B^2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 6A - 4B + 2C = 0, \\ A^2 + B^2 \neq 0. \end{cases}$$

Выберем неизвестное $B$ в качестве свободного. Записываем общее решение систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} A = 10B, \\ C = -70B, \\ B \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \begin{cases} A = -4B, \\ C = 14B, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Находим искомые уравнения прямых. Используя общее решение системы а), получим $10Bx + By - 70B = 0$. Так как $B \neq 0$, уравнение принимает вид $10x + y - 70 = 0$.

С помощью общего решения системы б) записываем уравнение второй прямой: $-4Bx + By + 14B = 0$, или $4x - y - 14 = 0$.

Эту задачу можно решить другим способом, если заметить, что одна из прямых проходит через точку $P$ параллельно прямой $M_1M_2$, а вторая проходит через точку $P$ и середину $M_0$ отрезка $M_1M_2$. При этом необходимо дважды применить правило 3.

*Ответ:* $4x - y - 14 = 0$, $10x + y - 70 = 0$.

**10.12.** В треугольнике $ABC$ из вершины $A$ проведены высота и медиана (рис. 10.4). Даны: вершина $B(3;7)$, уравнение высоты $2x - y + 1 = 0$ и уравнение медианы $3x - 4y + 9 = 0$. Найдите координаты вершины $C$.

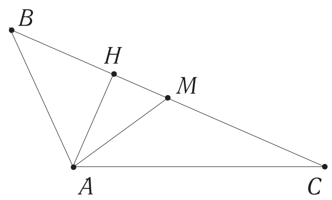

Рис. 10.4

*Решение.* Обозначим через $x_0$, $y_0$ координаты точки $C$. Запишем уравнение прямой $BC$. Она перпендикулярна высоте, поэтому в качестве вектора нормали можно взять любой вектор, перпендикулярный к вектору $(2;-1)$, например $\mathbf{N}(1;2)$. Уравнение $BC$ по правилу 2 можно записать в виде $x + 2y - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 7) = 0$, $x + 2y - 17 = 0$. Точка $C$ лежит на прямой $BC$, поэтому $x_0 + 2y_0 - 17 = 0$.

Точка $M$ – середина отрезка $BC$. Находим её координаты: $M\left(\dfrac{x_0+3}{2}, \dfrac{y_0+7}{2}\right)$. Поскольку точка $M$ лежит на медиане $3 \cdot \dfrac{x_0+3}{2} - 4 \cdot \dfrac{y_0+7}{2} + 9 = 0$ или $3x_0 - 4y_0 - 1 = 0$.

Для отыскания $x_0$ и $y_0$ из полученных уравнений составим систему

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 17 = 0, \\ 3x_0 - 4y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_0 = 7$, $y_0 = 5$.

*Ответ:* $C(7;5)$.

### Задачи для самостоятельного решения

**10.13.** Определите, какие из точек $M_1(1;4)$, $M_2(3;-4)$, $M_3(5;-1)$, $M_4(8;1)$ лежат на прямой $3x-2y-17=0$.

*Ответ:* точки $M_2$ и $M_3$ лежат на данной прямой.

**10.14.** Укажите координаты точек пересечения прямой $3x-4y+12=0$ с осями координат.

*Ответ:* $(-4;0)$, $(0;3)$.

**10.15.** Дана прямая $4x+3y+5=0$. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

*Ответ:* а) $4x+3y-11=0$; б) $3x-4y-2=0$.

**10.16.** Найдите проекцию точки $P(6;4)$ на прямую $4x+5y-3=0$.

*Ответ:* $(2;-1)$.

**10.17.** Найдите точку $Q$, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

*Ответ:* $(11;-11)$.

**10.18.** Составьте уравнение средней линии треугольника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$, параллельной стороне $AC$.

*Ответ:* $x+4y=0$.

**10.19.** Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$. Составьте уравнение его высоты $CH$ и уравнения всех его сторон.

*Ответ:* $3x+2y-13=0$, $2x-3y-1=0$, $3x-4y-1=0$, $x-y-1=0$.

**10.20.** Запишите уравнение биссектрисы внутреннего угла $A$ треугольника $ABC$, если $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$.

*Ответ:* $5x+y-3=0$.

**10.21.** Найдите площадь квадрата, две стороны которого расположены на прямых $2x - 3y - 6 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$.

*Ответ:* 13.

**10.22.** Даны вершины треугольника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 1)$. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на медиану $CM$.

*Ответ:* 4.

**10.23.** Выясните, пересекаются ли в одной точке прямые $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$.

*Ответ:* нет.

**10.24.** Определите, при каком значении величины $\alpha$ три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $\alpha x + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

*Ответ:* $\alpha = -7$.

**10.25.** Составьте уравнение сторон треугольника $ABC$, если даны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

*Ответ:* $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

**10.26.** Составьте уравнения сторон треугольника $ABC$, если даны одна из его вершин $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$.

*Ответ:* $8x - 3y + 17 = 0$, $3x - 5y - 13 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$.

**10.27.** Составьте уравнения сторон треугольника $ABC$, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

*Ответ:* $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$.

**10.28** Определите угол $\varphi$, образованный прямыми:

а) $3x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 7 = 0$;

б) $x\sqrt{3}+y\sqrt{2}-2=0$ и $x\sqrt{6}-3y+3=0$.

*Ответ:* а) $\varphi=45^\circ$, б) $\varphi=90^\circ$.

**10.29.** Пусть линейный оператор $A: R_2 \to R_2$ является:

а) оператором проектирования на прямую $y=2x$;

б) оператором зеркального отражения от прямой $y=2x$.

Найдите матрицы этих линейных операторов в базисе $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$. Укажите собственные числа и собственные векторы этих операторов.

*Ответ:* а) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$, 1;0, $\alpha(2;-1)$, $\alpha(1;2)$; $\alpha$ – любое число;

б) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, 1; $-1$, $\alpha(1;2)$, $\alpha(2;-1)$; $\alpha$ – любое число.

## 11. Плоскость

Для решения задач по данной теме необходимо изучить подраздел 2.4 пособия [5], а также повторить скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется заданием вектора $\mathbf{N}=(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости и называемого вектором нормали, и какой-нибудь точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на плоскости. В этом случае уравнение плоскости можно записать в виде $Ax+By+Cz+D=0$. Так как плоскость проходит через точку $M_0$, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, следовательно, $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Как видим, чтобы записать уравнение плоскости, нужно найти её вектор нормали $\mathbf{N}$ и точку $M_0$, лежащую на плоскости. Если найдены какие-нибудь два вектора $\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{l_2}$, параллельные плоскости, то, очевидно, $\mathbf{N}=[\mathbf{l_1},\mathbf{l_2}]$. Это замечание очень часто используется при решении задач. Отметим, что перпендикулярно данной плоскости через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно провести бесконечно много плоскостей. Все они параллельны вектору нормали данной плоскости.

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r_0}$ параллельно векторам $\mathbf{l_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mathbf{l_2} = (m_2, n_2, p_2)$, то в векторной форме уравнение плоскости можно записать в виде $(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**11.1.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(4; -3; 2)$.

*Решение.* Так как в данном случае вектор $\mathbf{N}(4; -3; 2)$ – нормаль плоскости, в её общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ можно положить $A = 4$; $B = -3$; $C = 2$, т.е.

$$4x - 3y + 2z + D = 0.$$

Поскольку точка $M_0(1; -2; 3)$ лежит в плоскости, то

$$4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + D = 0, \quad 4 + 6 + 6 + D = 0, \quad D = -16.$$

Мы нашли уравнение плоскости: $4x - 3y + 2z - 16 = 0$.

*Ответ:* $4x - 3y + 2z - 16 = 0$.

**11.2.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ параллельно векторам $\mathbf{l_1} = (0; 1; 4)$ и $\mathbf{l_2} = (2; 0; 3)$.

*Решение.*

*Первый способ.* Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам $\mathbf{l_1}$, $\mathbf{l_2}$ и точке $M_0$:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(x-1) + 8(y+2) - 2(z-1) = 3x + 8y - 2z + 15 = 0.$$

*Второй способ.* Вектор нормали $\mathbf{N}$ искомой плоскости находим из условия

$$\mathbf{N} = [\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \| (3; 8; -2).$$

Таким образом, искомые координаты вектора нормали плоскости $(3; 8; -2)$. Записываем общее уравнение плоскости в виде $3x + 8y - 2z + D = 0$. Так как плоскость проходит через точку $M_0(1; -2; 1)$, то $3 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + D = 0$. Отсюда $D = 15$ и искомое уравнение плоскости $3x + 8y - z + 15 = 0$.

*Ответ:* $3x + 8y - z + 15 = 0$.

**11.3.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(4; 5; -3)$.

*Решение.* Если плоскость проходит через три точки, можно найти два направляющих вектора плоскости, например, $\mathbf{l_1} = \mathbf{M_1M_2} = (2; -1; -1)$ и $\mathbf{l_2} = \mathbf{M_1M_3} = (3; 3; -2)$. Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам $\mathbf{M_1M_2}$, $\mathbf{M_1M_3}$ и точке $M_1$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(x-1) + (y-2) + 9(z+1) = 5x + y + 9z + 2 = 0.$$

*Ответ:* $5x + y + 9z + 2 = 0$.

**11.4.** Найдите координаты вектора нормали плоскости, проходящей через перпендикуляр к плоскости $4x - 3y + 2z - 3 = 0$, опущенный из точки $P(1; -5; 3)$, и точку $M_0(2; 7; -4)$.

*Решение.* Искомая плоскость параллельна вектору нормали данной плоскости, то есть $\mathbf{l_1} = (4; -3; 2)$ и вектору $\mathbf{l_2} = \mathbf{PM_0} = (1; 12; -7)$, поэтому вектор нормали $\mathbf{N}$ искомой плоскости находится из условия

$$\mathbf{N} = [\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 12 & -7 \end{vmatrix} = (-3\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 51\mathbf{k}) \| (1; -10; -17).$$

Таким образом, искомые координаты вектора нормали плоскости $(1; -10; -17)$.

*Ответ:* $(1; -10; -17)$.

**11.5.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -3; 5)$ и $M_2(4; 1; -1)$ параллельно оси $OY$.

*Решение.* Данная плоскость параллельна вектору $\mathbf{M_1M_2} = (2; 4; -6)$, а также оси $OY$, а значит и орту $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$. Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам $\mathbf{M_1M_2}$, $\mathbf{j}$ и точке $M_1$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по третьей строке:

$$(-1)^{3+2}(-6(x-2) - 2(z-5)) = 6x + 2z - 22 = 0.$$

Делим обе части уравнения на 2. Искомое уравнение имеет вид $3x + z - 11 = 0$.

*Ответ:* $3x + z - 11 = 0$.

**11.6.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 4; 3)$ перпендикулярно плоскостям $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и $x + 4y - z + 5 = 0$.

*Решение.* Так как искомая плоскость перпендикулярна к данным плоскостям, то она параллельна их нормальным векторам $\mathbf{l_1} = \mathbf{N_1} = (2; -3; 4)$ и $\mathbf{l_2} = \mathbf{N_2} = (1; 4; -1)$. Поэтому уравнение плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$-13(x-1) - (-6)(y-4) + 11(z-3) = 0,$$

или $-13x + 6y + 11z - 44 = 0$. Делим обе части уравнения на $(-1)$: $13x - 6y - 11z + 44 = 0$.

*Ответ:* $13x - 6y - 11z + 44 = 0$.

**11.7.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через ось $OZ$ и точку $M_1(2; -5; 6)$.

*Решение.* Поскольку плоскость проходит через ось $OZ$, все точки оси $OZ$ принадлежат плоскости, в частности точка $O(0; 0; 0)$ – начало координат. В качестве одного направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{OM_1} = (2; -5; 6)$. Кроме того, плоскость параллельна оси $OZ$, т.е. вектору $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$. Записываем уравнение плоскости по двум направляющим векторам $\mathbf{OM_1}$, $\mathbf{k}$ и точке $O$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по третьей строке: $-5x - 2y = 0$, или $5x + 2y = 0$.

*Ответ:* $5x + 2y = 0$.

**11.8.** Найдите расстояние $d$ от точки $P(1; 4; 5)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 3 = 0$.

*Решение.* Используя формулу подраздела 2.4 пособия [5], с.117 (задача 4), находим

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|1 - 8 - 10 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3}.$$

*Ответ:* $d = 14/3$.

**11.9.** Запишите уравнения плоскостей, удалённых от плоскости $2x + 6y + 3z - 6 = 0$ на расстояние $d = 5$.

*Решение.* Искомые плоскости параллельны данной, а потому их векторы нормали можно взять совпадающими с вектором нормали $\mathbf{N} = (2; 6; 3)$ данной плоскости. Таким образом, искомые уравнения имеют вид $2x + 6y + 3z + D = 0$. Осталось определить свободный член $D$. По условию любая точка на данной плоскости удалена от плоскости $2x + 6y + 3z + D = 0$ на расстояние $d = 5$. Пусть это точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Очевидно, $2x_1 + 6y_1 + 3z_1 - 6 = 0$ или $2x_1 + 6y_1 + 3z_1 = 6$. Используем формулу для вычисления расстояния от точки $M_1$ до плоскости $2x + 6y + 3z + D = 0$:

$$\frac{|2x_1 + 6y_1 + 3z_1 + D|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = 5 \text{ или } \frac{|6 + D|}{\sqrt{49}} = 5, \quad \frac{|6 + D|}{7} = 5,$$

Записываем уравнение без знака модуля: $6 + D = \pm 35$. Отсюда $D_1 = 29$, $D_2 = -41$. В результате, мы получили две плоскости $2x + 6y + 3z + 29 = 0$ и $2x + 6y + 3z - 41 = 0$, удалённые от данной точки на расстояние $d = 5$.

*Ответ:* $2x + 6y + 3z + 29 = 0$, $2x + 6y + 3z - 41 = 0$.

### Задачи для самостоятельного решения

**11.10.** Определите, какие из точек
$M_1(-2; 2; -6)$, $M_2(-1; 2; -3)$, $M_3(2; 3; -8)$, $M_4(2; -2; 6)$
принадлежат плоскости $3x - 2y + 5z + 40 = 0$.

*Ответ:* точки $M_1$, $M_3$ принадлежат плоскости.

**11.11.** Дана плоскость $x - 3y + 6z - 21 = 0$. Запишите координаты любых трёх точек, принадлежащих этой плоскости.

**11.12.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1; 2; -3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = (3; -2; 5)$.

*Ответ:* $3x - 2y + 5z + 22 = 0$.

**11.13.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;0;-4)$ параллельно плоскости $x-4y+2z+6=0$.

*Ответ:* $x-4y+2z+5=0$.

**11.14.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(0;-1;2)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(-3;4;0)$.

*Ответ:* $7x-y-13z+25=0$.

**11.15.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2;1;4)$ и $M_2(0;3;1)$ перпендикулярно плоскости $4x+3y-5z+4=0$.

*Ответ:* $x+2y+2z-8=0$.

**11.16.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-5;2;-1)$ параллельно плоскости $OXZ$.

*Ответ:* $y-2=0$.

**11.17.** Вычислите площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла $OXY$.

*Ответ:* 240.

**11.18.** Вычислите объём пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

*Ответ:* 8.

**11.19.** Запишите уравнение плоскости, равноудалённой от плоскостей $4x-y-2z-3=0$ и $4x-y-2z-5=0$.

*Ответ:* $4x-y-2z-4=0$.

**11.20.** На оси $OY$ найдите точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстояние $d=4$.

*Ответ:* $(0;7;0)$, $(0;-5;0)$.

**11.21.** Охарактеризуйте взаимное расположение плоскостей:
а) $x-2y+3z-5=0$, $x+3y-2z-2=0$, $5x+5y-16=0$;

б) $2x - y - z + 3 = 0, 3x + 4y - 2z = 0, 3x - 2y + 4z - 6 = 0$;

в)$2x - z - 1 = 0, x - 3y - 4z + 3 = 0, 5x - 9y - 13z + 10 = 0$.

*Ответ:* а) пересекаются по одной прямой; б) пересекаются в одной точке; в) три плоскости не имеют общих точек.

## 12. Прямая в пространстве

Необходимо изучить подраздел 2.5 пособия [5].

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{12.1}$$

общее уравнение прямой, где векторы нормали плоскостей $\mathbf{N_1} = (A_1, B_1, C_1) \nparallel \mathbf{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Заметим, что направляющий вектор $\mathbf{l}$ прямой параллелен вектору $[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$, поскольку $\mathbf{l} \perp \mathbf{N_1}$ и $\mathbf{l} \perp \mathbf{N_2}$.

Если известен направляющий вектор $\mathbf{l} = (m, n, p)$ прямой и какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ней, то прямую можно определить соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{l}, \tag{12.2}$$

где $\mathbf{r_0}$ – радиус-вектор точки $M_0$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор любой точки прямой, $t(-\infty < t < +\infty)$ – числовой параметр.

В координатной форме уравнение (12.2) можно записать в двух видах:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases} \tag{12.3}$$

$$\text{и} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{12.4}$$

Соотношения (12.3) называют параметрическими, а (12.4) – каноническими уравнениями прямой. Подчеркнём, что в параметрических уравнениях прямой коэффициенты при параметре $t$ определяют координаты направляющего вектора.

Параметрические и канонические уравнения прямой определяются неоднозначно, поскольку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно выбрать на прямой многими способами, направляющий вектор $\mathbf{l}$ определяется также с точностью до скалярного множителя, т.е. если $\mathbf{l}$ – направляющий, то вектор $\lambda\mathbf{l}$ $(\lambda \neq 0)$ также направляющий.

Итак, чтобы записать уравнение прямой, необходимо найти либо две плоскости, проходящие через эту прямую, либо её направляющий вектор и точку, лежащую на прямой.

Нужно уметь переходить от уравнения прямой в форме (12.1) к уравнениям прямой в формах (12.3) и (12.4). Сделать это можно различными способами.

*Первый способ.* Направляющий вектор прямой можно найти по формуле:

$$\mathbf{l} = [\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Любое частное решение $(x_0, y_0, z_0)$ системы (12.1) даёт координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. Поэтому можно задать одно из чисел $x_0$, $y_0$, $z_0$, подставить его в систему и найти две других координаты точки $M_0$.

*Второй способ.* Уравнения (12.1) можно рассматривать как систему относительно неизвестных $x$, $y$, $z$. Так как векторы $\mathbf{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ непараллельны, то один из определителей

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ или } D_3 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Следовательно, ранг основной матрицы системы, а потому и расширенной, равен двум. Поэтому в системе (12.1) одно неизвестное свободное, а два других – зависимые. Если, например, $D_1 = (A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0$, то в качестве свободного можно принять неизвестное $z$, а в качестве зависимых –

$x$ и $y$. Разрешая систему (12.1) относительно $x$ и $y$, получаем общее решение системы

$$\begin{cases} x = \alpha z + \gamma, \\ y = \beta z + \delta. \end{cases}$$

Положив $z = t$, находим параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = \alpha t + \gamma, \\ y = \beta t + \delta, \\ z = t \end{cases}$$

и канонические уравнения $\dfrac{x-\gamma}{\alpha} = \dfrac{y-\delta}{\beta} = \dfrac{z-0}{1}$ прямой.

*Третий способ.* Можно найти два частных решения системы (12.1), что даст координаты двух точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямой. Вектор $\mathbf{M_0M_1}$ является направляющим вектором прямой, поэтому можно записать каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Две прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} + t\mathbf{l_2}$ могут

быть параллельными, если $\mathbf{l_1} \| \mathbf{l_2}$;

совпадать, если $(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \| \mathbf{l_1} \| \mathbf{l_2}$;

пересекаться, если $(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) = 0$;

скрещиваться, если $(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) \neq 0$.

Напомним, что здесь $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ – радиусы-векторы каких-нибудь точек, лежащих на первой или второй прямой соответственно, а $\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{l_2}$ – направляющие векторы.

Следующие простые задачи (12.1–12.5) встречаются во многих более сложных.

**12.1.** Запишите параметрические и канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 16 = 0, \\ x + 2y - z + 6 = 0. \end{cases} \tag{12.5}$$

*Решение.*

*Первый способ.* Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей с нормалями $\mathbf{N_1} = (2; 3; 1)$ и $\mathbf{N_2} = (1; 2; -1)$. Находим направляющий вектор прямой:

$$\mathbf{l} = [\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Для того, чтобы найти координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой положим $x_0 = 0$. При этом

$$\begin{cases} 3y_0 + z_0 - 16 = 0, \\ 2y_0 - z_0 + 6 = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем $5y_0 - 10 = 0$ и $y_0 = 2$. Затем находим $z_0 = 10$. Итак, $M_0(0; 2; 10)$. Записываем параметрические

$$\begin{cases} x = -5t, \\ y = 3t + 2, \\ z = t + 10 \end{cases}$$

и канонические $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-10}{1}$ уравнения прямой.

*Второй способ.* Так как $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то неизвестное $z$ системы (12.5) можно принять в качестве свободного и записать

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 - z, \\ x + 2y = -6 + z. \end{cases}$$

Находим общее решение этой системы, выражая $x$ и $y$ через $z$:

$$\begin{cases} x = -5z + 50, \\ y = 3z - 28. \end{cases}$$

Полагая $z = t$, записываем параметрические

$$\begin{cases} x = -5t + 50, \\ y = 3t - 28, \\ z = t \end{cases}$$

и канонические $\dfrac{x-50}{-5}=\dfrac{y+28}{3}=\dfrac{z}{1}$ уравнения прямой. Точка $M_0(50;-28;0)$ получена из параметрических уравнений при $t=0$. В качестве точки $M_0$ можно взять и другую точку, например $(0;2;10)$, получающуюся при $t=10$.

*Ответ:* $\begin{cases} x=-5t, \\ y=3t+2, \\ z=t+10, \end{cases} \quad \dfrac{x}{-5}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-10}{1}.$

**12.2.** Запишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-3;4)$ и $M_2(-2;1;2)$.

*Решение.* В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}=(-3;4;-2)$, а в качестве точки $M_0$ – любую из точек $M_1$ или $M_2$. Поэтому $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$ – канонические уравнения прямой $M_1M_2$. Её параметрические уравнения $\begin{cases} x=-3t+1, \\ y=4t-3, \\ z=-2t+4 \end{cases}$

*Ответ:* $\begin{cases} x=-3t+1, \\ y=4t-3, \\ z=-2t+4, \end{cases} \quad \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-4}{-2}.$

**12.3.** Найдите точку $M_0$ пересечения прямой

$$\begin{cases} x=3t-2, \\ y=-2t+3, \\ z=4t-1 \end{cases}$$

и плоскости $x+2y+4z-30=0$.

*Решение.* Находим то значение параметра $t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости. Так как точка $M_0(3t_0-2,-2t_0+3,4t_0-1)$ лежит в данной плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению плоскости, следовательно, $3t_0-2+2(-2t_0+3)+4(4t_0-1)-30=0$,
$3t_0-2-4t_0+6+16t_0-4-30=15t_0-30=0$, $t_0=2$.

Полагая в параметрических уравнениях прямой $t = 2$, находим точку пересечения $M_0$: $x_0 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $y_0 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$, $z_0 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$. Итак, $M_0(4; -1; 7)$.

*Ответ:* $M_0(4; -1; 7)$.

**12.4.** Докажите, что прямые

$$\begin{cases} x = 3t - 4, \\ y = -2t + 1, \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = 4t - 4 \end{cases}$$

пересекаются. Найдите уравнение плоскости, в которой они расположены.

*Решение.* Равенство $(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) = 0$ является условием пересечения двух прямых. Все данные находим из параметрических уравнений прямых. В нашем случае $\mathbf{r_1} = (-4; 1; 3)$, $\mathbf{r_2} = (-5; 5; -4)$, $\mathbf{l_1} = (3; -2; 1)$, $\mathbf{l_2} = (2; -3; 4)$. Вычисляем смешанное произведение

$$(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. прямые пересекаются.

Плоскость, в которой они расположены, параллельна векторам $\mathbf{l_1}$, $\mathbf{l_2}$ и проходит через точку $M_1(-4; 1; 3)$. В качестве вектора нормали можно взять вектор $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \| (1; 2; 1).$$

Поэтому уравнение плоскости можно записать в виде

$$x + 2y + z + D = 0.$$

Поскольку плоскость проходит через точку $M_1(-4; 1; 3)$, то $-4 + 2 + 3 + D = 0$, $D = -1$. Уравнение $x + 2y + z - 1 = 0$ является искомым.

*Ответ:* $x + 2y + z - 1 = 0$.

**12.5.** Докажите, что прямые

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t + 4, \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 4, \\ y = 2t + 8, \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

пересекаются. Найдите координаты точки $M_0$ их пересечения.

*Решение.* Доказать, что прямые пересекаются можно так же, как и в задаче 12.4. Но мы рассмотрим другой способ решения. Если данные прямые пересекаются, например, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то существуют значения параметра $t = t_1$ для первой прямой и $t = t_2$ — для второй прямой, которые соответствуют одной и той же точке $M_0$. С одной стороны, координаты точки $M_0(2t_1 + 1, 3t_1 + 4, -2t_1 + 3)$, с другой стороны $M_0(t_2 + 4, 2t_2 + 8, 3t_2 - 4)$. Приравнивая выражения для соответствующих координат точки $M_0$, получаем систему

$$\begin{cases} 2t_1 + 1 = t_2 + 4, \\ 3t_1 + 4 = 2t_2 + 8, \\ -2t_1 + 3 = 3t_2 - 4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2t_1 - t_2 = 3, \\ 3t_1 - 2t_2 = 4, \\ 2t_1 + 3t_2 = 7. \end{cases}$$

Это система трёх уравнений с двумя неизвестными $t_1$ и $t_2$. Если система совместна, то прямые пересекаются, если несовместна, то не пересекаются. Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем её. Первую строку умножим на $(-3)$ и прибавим ко второй, умноженной на два. Затем первую строку вычтем из третьей. Вычёркиваем одну из двух пропорциональных строк.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Видим, что ранг основной и расширенной матриц равен двум, т.е. система совместна, и прямые пересекаются. Исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 = 3, \\ \quad -t_2 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $t_2 = 1,\ t_1 = 2$. Положив в уравнении первой прямой $t = 2$ (второй прямой $t = 1$), найдём точку пересечения $M_0(5; 10; -1)$.

*Ответ:* $M_0(5; 10; -1)$.

**12.6.** Найдите точку $Q$, являющуюся проекцией точки $P(-46; 2; -12)$ на прямую $L$

$$\begin{cases} x - 2y + z + 12 = 0, \\ 2x + 3y - z - 22 = 0. \end{cases} \tag{12.6}$$

Найдите точку $S$, симметричную точке $P$ относительно этой прямой.

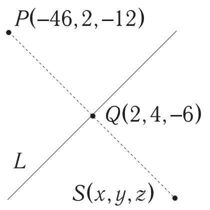


Рис. 12.1

*Решение.* Точку $Q$ найдём как точку пересечения прямой $L$ с плоскостью П, проходящей через точку $P$ перпендикулярно прямой $L$. Запишем параметрические уравнения прямой $L$. Так как $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, то неизвестное $x$ можно принять в качестве свободного системы (12.6). Положим $x = t$ и выразим из системы (12.6) неизвестные $y$ и $z$ через $t$. Получим параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -3t + 10, \\ z = -7t + 8 \end{cases} \tag{12.7}$$

Направляющий вектор прямой $\mathbf{l} = (1; -3; -7)$ можно принять в качестве вектора нормали плоскости П. Записываем общее уравнение плоскости П: $x - 3y - 7z + D = 0$. Точка $P$ лежит в плоскости П, поэтому $-46 - 6 + 84 + D = 0, \quad D = -32$. Уравнение плоскости П: $x - 3y - 7z - 32 = 0$. Находим точку пересечения прямой (12.7) с плоскостью П (см. задачу 12.3):
$t - 3(-3t + 10) - 7(-7t + 8) - 32 = 0,\ \ 59t - 118 = 0,\ \ t = 2.$
Из (12.7) при $t = 2$ находим координаты точки $Q(2; 4; -6)$.

Координаты точки $S$ обозначим $(x, y, z)$. Так как точка $Q$ – середина отрезка $PS$ (рис.12.1), то

$$\frac{-46+x}{2}=2,\ x=50;\quad \frac{2+y}{2}=4,\ y=6;\quad \frac{-12+z}{2}=-6,\quad z=0.$$

Итак, $S(50; 6; 0)$.

*Ответ:* $Q(2; 4; -6)$; $S(50; 6; 0)$.

**12.7.** Найдите координаты точки $Q$, являющейся проекцией точки $P(-2; 1; 4)$ на плоскость $x - 4y + 5z + 28 = 0$. Найдите координаты точки $S$, симметричной точке $P$ относительно данной плоскости.

*Решение.* Точку $Q$ находим как точку пересечения прямой $L$, проходящей через точку $P$ перпендикулярно данной плоскости. Прямая $L$ параллельна вектору нормали $\mathbf{N} = (1; -4; 5)$ плоскости, поэтому вектор $\mathbf{N}$ является направляющим для этой прямой. Записываем параметрические уравнения прямой $L$:

$$\begin{cases} x = t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 5t + 4 \end{cases}$$

и находим точку пересечения её с плоскостью:
$(t-2)-4(-4t+1)+5(5t+4)+28 = 0$, $42t + 42 = 0$; $t = -1$. В параметрических уравнениях прямой положим $t = -1$ и найдём координаты точки $Q(-3; 5; -1)$.

Координаты точки $S$ обозначим $(x, y, z)$. Так как точка $Q$ – середина отрезка $PS$, то

$$\frac{-2+x}{2}=-3,\ x=-4;\quad \frac{1+y}{2}=5,\ y=9;\quad \frac{4+z}{2}=-1,\quad z=-6.$$

Итак, $S(-4; 9; -6)$.

*Ответ:* $Q(-3; 5; -1)$, $S(-4; 9; -6)$.

**12.8.** Найдите расстояние $d$ от точки $P(1; -2; 3)$ до прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 4, \\ y = -t + 3, \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

*Решение.* На с.119 пособия [5] (задача 2) приведена формула вычисления расстояния $d$ от точки до прямой: $d = \dfrac{|[\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{l}]|}{\mathbf{l}}$, где $\mathbf{r_1}$ – радиус-вектор данной точки, $\mathbf{r_0}$ – радиус-вектор какой-нибудь точки прямой, $\mathbf{l}$ – направляющий вектор прямой. В нашем случае $\mathbf{r_1} = (1; -2; 3)$, $\mathbf{r_0} = (4; 3; -1)$, $\mathbf{l} = (2; -1; 2)$. Находим

$$[\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{l}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 13\mathbf{k},$$

$$|[\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{l}]| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 13^2} = \sqrt{401},$$

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3; \quad d = \frac{\sqrt{401}}{3}.$$

*Ответ:* $\dfrac{\sqrt{401}}{3}$.

**12.9.** Найдите расстояние $d$ между скрещивающимися прямыми $L_1$ и $L_2$, заданными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t + 1, \\ z = t + 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t + 4, \\ z = t + 2. \end{cases}$$

*Решение.* На с.119 пособия [5] (задача 3) приведена формула (2.17) вычисления величины $d$:

$$d = \frac{|(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2})|}{|[\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}]|},$$

где $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ – радиусы-векторы точек, лежащих на прямых $L_1$ и $L_2$, $\mathbf{l_1}$, $\mathbf{l_2}$ – направляющие векторы этих прямых. В нашем случае $\mathbf{r_1} = (2; 1; 3)$, $\mathbf{r_2} = (1; 4; 2)$, $\mathbf{l_1} = (1; 2; 1)$, $\mathbf{l_2} = (2; 2; 1)$.

Выполняем вычисления:

$$(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}, \mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$[\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}; \quad |[\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}]| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Следовательно, $d = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

*Ответ:* $\sqrt{5}$.

**12.10.** Дано, что прямая $L$ пересекает ось ординат в точке $(0; 4; 0)$, параллельна плоскости $x + 2y + 3z + 2 = 0$ и перпендикулярна оси $OZ$. Найдите координаты точки $Q$ пересечения этой прямой с плоскостью $y = 0$.

*Решение.* Неизвестен направляющий вектор $\mathbf{l}$ прямой $L$. Пусть $\mathbf{l} = (m, n, p)$. По условию задачи вектор $\mathbf{l}$ параллелен плоскости $x + 2y + 3z + 2 = 0$, следовательно, он перпендикулярен её вектору нормали $\mathbf{N} = (1; 2; 3)$. Поэтому $(\mathbf{l}, \mathbf{N}) = 0$. Вычисляем скалярное произведение: $m + 2n + 3p = 0$. Вектор $\mathbf{l}$ также перпендикулярен оси $OZ$, т.е. вектору $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$. $(\mathbf{l}, \mathbf{k}) = 0$, следовательно, $p = 0$. Таким образом, $m + 2n = 0$. Положим $n = 1$, тогда $m = -2$, т.е. $\mathbf{l} = (-2; 1; 0)$. Запишем параметрические уравнения прямой $L$:

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = t + 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

Обозначим координаты точки $Q(x_0, y_0, z_0)$. Из параметрических уравнений следует $z_0 = 0$. $y_0 = 0$, поскольку точка $Q$ принадлежит плоскости $y = 0$. Тогда $0 = t + 4$ и значение параметра $t = -4$ соответствует точке $Q$. Находим координату $x_0 = -2 \cdot (-4) = 8$. Итак, точка $Q$ имеет координаты $(8; 0; 0)$.

*Ответ:* $(8; 0; 0)$.

*Замечание.* Из условия перпендикулярности прямой $L$ оси $OZ$ не следует, что прямая $L$ пересекает ось $OZ$, следует лишь перпендикулярность вектора $\mathbf{l}$ оси $OZ$.

**12.11.** Две прямые, пересекающиеся в точке $P(2;3;1)$, параллельны плоскости $x+2y+2z-4=0$. Одна из них пересекает ось $OZ$, а вторая – ось $OY$. Найдите косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

*Решение.* Одна из прямых проходит через точку $P(2;3;1)$ и точку оси $OZ$, которую мы обозначим $M_1(0;0;z_0)$, а вторая – через точку $P(2;3;1)$ и точку оси $OY$, которую мы обозначим $M_2(0;y_0;0)$. Направляющими векторами $\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{l_2}$ прямых являются векторы $\mathbf{PM_1}$ и $\mathbf{PM_2}$. Вычисляем их координаты: $\mathbf{l_1}=(-2;-3;z_0-1)$, $\mathbf{l_2}=(-2;y_0-3;-1)$. По условию задачи векторы $\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{l_2}$ параллельны плоскости $x+2y+2z-4=0$, т.е. перпендикулярны вектору $\mathbf{N}=(1;2;2)$. Поэтому $(\mathbf{l_1},\mathbf{N})=0$ или $-2-6+2(z_0-1)=0$, $(\mathbf{l_2},\mathbf{N})=0$ или $-4+2(y_0-3)=0$. Из полученных уравнений находим $z_0=5$; $y_0=5$. Таким образом, $\mathbf{l_1}=(-2;-3;4)$, $\mathbf{l_2}=(-2;2;-1)$. Вычисляем косинус угла между векторами $\mathbf{l_1}$ и $\mathbf{l_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{l_1},\mathbf{l_2})}{|\mathbf{l_1}||\mathbf{l_2}|}=\frac{4-6-4}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{4+4+1}}=-\frac{2}{3\sqrt{29}}.$$

*Ответ:* $\cos\varphi=-\dfrac{2}{3\sqrt{29}}$.

**12.12.** Прямая $L$ пересекает прямую

$$\begin{cases} x=t+2,\\ y=3t-1,\\ z=4t+3,\end{cases}$$

проходит через точку $P(1;2;-4)$ и пересекает ось $OX$ в точке $Q(x_0;0;0)$. Найдите $x_0$.

*Решение.* Условием пересечения двух прямых является равенство $(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1},\mathbf{l_1},\mathbf{l_2})=0$. В нашем случае $\mathbf{r_1}=(2;-1;3)$, $\mathbf{l_1}=(1;3;4)$, $\mathbf{r_2}=(1;2;-4)$, $\mathbf{l_2}=\mathbf{PQ}=(x_0-1;-2;4)$. Находим

$$(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1},\mathbf{l_1},\mathbf{l_2})=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7\\ 1 & 3 & 4\\ x_0-1 & -2 & 4\end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по третьей строке

$$= (x_0-1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 33(x_0-1)+6-24=0,\;\; 33x_0-33+6-24=0,\;\; 33x_0=51;$
Следовательно, $x_0 = \dfrac{51}{33} = \dfrac{17}{11}$.

*Ответ:* $x_0 = \dfrac{17}{11}$.

**12.13.** Запишите уравнение плоскости П, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x+2y+3z-1=0, \\ x-3y+2z+4=0 \end{cases}$$

параллельно вектору $\mathbf{AB} = (3;-4;5)$.

*Решение.* Найдём направляющий вектор $\mathbf{l}$ прямой. Разрешив данную систему относительно $x$ и $z$ ($y$ – свободное неизвестное), получим

$$\begin{cases} x = 13y-14, \\ z = 5-5y. \end{cases}$$

Полагая $y=t$, запишем параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 13t-14, \\ y = t, \\ z = -5t+5. \end{cases}$$

Видим, что $\mathbf{l} = (13;1;-5)$ и что точка $M_0(-14;0;5)$ лежит на прямой.

Плоскость П параллельна направляющему вектору $\mathbf{l}$ прямой и вектору $\mathbf{AB}$, поэтому уравнение плоскости записываем по двум направляющим векторам и точке $M_0$.

$$\begin{vmatrix} x+14 & y & z-5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 13 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 15(x+14)+80y+55(z-5)=0.$$

Делим обе части уравнения плоскости на 5. Уравнение $3x+16y+11z-13=0$ – искомое.

*Ответ:* $3x+16y+11z-13=0$.

### Задачи для самостоятельного решения

**12.14.** Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $z = 0$ с плоскостью $5x - 7y + 2z - 3 = 0$.

*Ответ:* $\dfrac{x - 0{,}6}{7} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{0}$.

**12.15.** Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 4; -3)$ параллельно вектору $\mathbf{l} = (5; -2; 3)$.

*Ответ:* $\dfrac{x - 2}{5} = \dfrac{y - 4}{-2} = \dfrac{z + 3}{3}$; $\begin{cases} x = 5t + 2, \\ y = -2t + 4, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$

**12.16.** Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3; -2; 2)$ и $M_2(0; 1; -2)$, и найдите точку её пересечения с плоскостью $z = 0$.

*Ответ:* $\dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 2}{4}$; $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

**12.17.** Докажите, что прямая $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ пересекает ось $OY$. Укажите координаты точки пересечения.

*Ответ:* $(0; -2; 0)$.

**12.18.** Докажите, что прямая $\begin{cases} x - 2y + 4z - 8 = 0, \\ x + 3y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$ не пересекает ось $OZ$.

**12.19.** Запишите параметрические уравнения прямой
$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

*Ответ:* $\begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = 7t - 1, \\ z = 4t. \end{cases}$

**12.20.** Составьте канонические уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 6 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x - y + z - 3 = 0$.

*Ответ:* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$.

**12.21.** Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 3; 5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

*Ответ:* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-5}{-5}$.

**12.22.** Докажите, что прямые, заданные параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4 \end{cases}$$

пересекаются, и найдите их точку пересечения.

*Ответ:* $(3; 7; -6)$.

**12.23.** Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1; 2; -3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{a}(6; -2; -3)$ и пересекающей прямую $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

*Ответ:* $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$.

**12.24.** Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекающей две прямые: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$, $\quad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-5}$.

*Ответ:* $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

**12.25.** Запишите канонические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями
$$\begin{cases} x = 3t - 7, \\ y = -2t + 4, \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 8, \\ z = -t - 12. \end{cases}$$

*Ответ:* $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{-4}$.

**12.26.** Даны уравнения движения точки $x = 3 - 4t$, $y = 5 + 3t$, $z = 7 + 12t$. Определите её скорость.

*Ответ:* 13

**12.27.** Найдите точку пересечения прямой
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$
и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

*Ответ:* $(2; -3; 6)$.

**12.28.** Запишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $2x + 7y - 6z + 2 = 0$.

*Ответ:* $\begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = 7t - 3, \\ z = -6t - 5. \end{cases}$

**12.29.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -1; 3)$ перпендикулярно прямой
$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 4t + 1, \\ z = 5t - 1. \end{cases}$$

*Ответ:* $2x + 4y + 5z - 15 = 0$.

**12.30.** Найдите точку $Q$, симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.

*Ответ:* $(4; 1; -3)$.

**12.31.** Найдите точку $Q$, симметричную точке $P(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

*Ответ:* $(-5; 1; 0)$.

**12.32.** Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямые $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-5}{5}$; $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5}$.

*Ответ:* $35x + 10y + 22z = 0$.

**12.33.** Докажите, что прямые

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

пересекаются, и запишите уравнение плоскости, в которой они расположены.

*Ответ:* $22x - 8y - 17z + 61 = 0$.

**12.34.** Вычислите расстояние от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}$.

*Ответ:* 21.

**12.35.** Вычислите расстояние между прямыми

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}; \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

*Ответ:* 13.

**12.36.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = 4t \end{cases}$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

*Ответ.* $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

**12.37.** Запишите параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-17=0$ и пересекает прямую

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

*Ответ.* $\begin{cases} x=5t+3, \\ y=-6t-2, \\ z=9t-4. \end{cases}$

**12.38.** Пусть линейный оператор $A: R_3 \to R_3$ является:

а) оператором проектирования на плоскость $x+2y-2z=0$;

б) оператором зеркального отражения от плоскости $x+2y-2z=0$;

в) оператором проектирования на прямую $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$;

г) оператором зеркального отражения от прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Найдите матрицы этих линейных операторов в базисе $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. Укажите собственные числа и собственные векторы этих операторов.

*Ответ:* а) $\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$, 1; 0, $\alpha(2;-1;0)+\beta(0;1;1)$;

б) $\begin{bmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$, 1; $-1$, $\alpha(2;-1;0)+\beta(-2;1;0)$, $\alpha(1;2;-2)$;

в) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, 0; 1, $\alpha(0;1;-1)+\beta(1;-2;0)$, $\alpha(2;1;1)$;

г) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, 1; −1, $\alpha(2;1;1)$, $\alpha(0;1;-1)+\beta(1;-2;0)$.

Во всех четырёх случаях $\alpha$ и $\beta$ – любые числа.

## 13. Окружность. Сфера

Необходимо изучить подразделы 2.1, 2.6, 2.7 пособия [5].

Окружность с центром в точке $(x_0, y_0)$ радиусом $R$ на плоскости можно задать уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Уравнение вида $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+a_{01}x+a_{02}y+a_{00}=0$ определяет на плоскости окружность, если $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$. При этом кривая может выродиться в точку или быть мнимой.

Сферу с центром в точке $(x_0, y_0)$ радиуса $R$ можно задать уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+a_{00}=0$$

определяет сферу, если $a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. При этом поверхность может выродиться в точку или быть мнимой.

**13.1.** Докажите, что уравнение $x^2+y^2+6x-10y=11$ определяет окружность. Найдите её центр и радиус. Запишите уравнение касательной к этой окружности в точке $M_0(0;-1)$.

*Решение.* Выделяем полные квадраты:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 10y + 25 - 25 = 11,$$
$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 - 25 = 11,$$
$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 45.$$

Видим, что заданная кривая – окружность и центр её находится в точке $C(-3; 5)$, а радиус $R = \sqrt{45}$.

Как известно, касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Поэтому вектор $\mathbf{CM}_0 = (3; -6) \| (1; -2)$ можно принять в качестве вектора нормали касательной, следовательно, уравнение касательной можно записать в виде $x - 2y + C = 0$. Эта прямая проходит через точку $M_0(0; -1)$, т.е. $2 + C = 0$, $C = -2$. Итак, уравнение касательной $x - 2y - 2 = 0$.

*Ответ:* $C(-3; 5)$, $R = \sqrt{45}$, $x - 2y - 2 = 0$.

**13.2.** Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 8z + 2 = 0$$

определяет сферу, найдите её центр, радиус и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(2; 1; 5)$.

*Решение.* Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 2 = 0$$
$$(x + 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 + 2 = 0,$$
$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 19.$$

Следовательно, данное уравнение определяет сферу с центром в точке $C(-1; -2; 4)$ радиуса $R = \sqrt{19}$. Вектор $\mathbf{CM}_0 = (3; 3; 1)$ является вектором нормали касательной плоскости к сфере в точке $M_0$. Поэтому $3x + 3y + z + D = 0$ – уравнение касательной плоскости. Точка $M_0(2; 1; 5)$ лежит в плоскости. Поэтому $6 + 3 + 5 + D = 0$, $D = -14$. Уравнение $3x + 3y + z - 14 = 0$ – искомое.

*Ответ:* $C(-1; -2; 4)$, $R = \sqrt{19}$, $3x + 3y + z - 14 = 0$.

### Задачи для самостоятельного решения

**13.3.** Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(4; -6)$, радиус которой $R = 5$.

*Ответ:* $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 25$.

**13.4.** Запишите уравнение окружности, проходящей через точку $M(3; -2)$, с центром в точке $C(-5; 4)$.

*Ответ:* $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 100$.

**13.5.** Запишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки: $M_1(-1; 5)$; $M_2(-2; -2)$ и $M_3(5; 5)$.

*Указание.* Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

*Ответ:* $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

**13.6.** Запишите уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1; 0)$ и касаются двух параллельных прямых $2x + y + 2 = 0$, $2x + y - 18 = 0$.

*Ответ:* $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$, $(x-9/5)^2 + (y-22/5)^2 = 20$.

**13.7.** Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(1; -1)$, касающейся прямой $5x - 12y + 9 = 0$.

*Ответ:* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

**13.8.** Найдите центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

*Ответ:* $C(1; -2)$, $R = 5$.

**13.9.** Запишите уравнение касательной к окружности $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ в точке $A(-5; 7)$.

*Ответ:* $3x - 4y + 43 = 0$.

**13.10.** Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(5;-4;2)$ и радиусом $R=3$.

*Ответ:* $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9$.

**13.11.** Найдите центр и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0.$$

*Ответ:* $C(2;1;-1)$, $R=5$.

**13.12.** Найдите радиус сферы, касающейся плоскостей $3x+2y-6z-15=0$ и $3x+2y-6z+55=0$.

*Ответ:* 5.

**13.13.** Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(3;-5;-2)$, касающейся плоскости $2x-y-3z+11=0$.

*Ответ:* $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$.

**13.14.** Запишите уравнение касательной плоскости к сфере $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ в точке $M(-1;3;0)$.

*Ответ:* $2x-y-z+5=0$.

## 14. Эллипс. Гипербола. Парабола

В этом разделе рассмотрим решение задачи приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду. Задачи, связанные с выделением полных квадратов, трудностей не представляют (см. примеры в п. 2.6, 2.7 пособия [5]).

**14.1.** Дана кривая $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая – гипербола. Найдите её действительную, мнимую полуоси и центр симметрии. Запишите уравнение фокальной оси. Постройте данную гиперболу.

*Решение.* Квадратичную форму $B(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$ приводим к главным осям. Для этого записываем матрицу этой квадратичной формы $B=\begin{bmatrix}3&5\\5&3\end{bmatrix}$ и находим её собственные числа и собственные векторы. Записываем и решаем характеристическое уравнение матрицы $B$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5,\ \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -2.$

Так как собственные числа имеют разные знаки, то данное уравнение определяет кривую гиперболического типа. Находим собственные векторы матрицы $B$. Для собственного числа $\lambda_1 = 8$ получаем систему

$$\begin{cases} -5\xi_1 + 5\xi_2 = 0, \\ \ \ 5\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $\xi_1 = \xi_2$. Полагая $\xi_1 = 1$, найдём единичный собственный вектор $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. По свойству собственных векторов симметрического оператора второй собственный вектор $\mathbf{j_1}$ ортогонален вектору $\mathbf{i_1}$. Выберем вектор $\mathbf{j_1} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ таким образом, чтобы базис $(\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1})$ был правым (вектор $\mathbf{i_1}$ находится в первой четверти исходной системы координат, вектор $\mathbf{j_1}$ – во второй, поворот от вектора $\mathbf{i_1}$ к вектору $\mathbf{j_1}$ на меньший угол осуществляется против часовой стрелки). От старого базиса $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ перейдём к новому базису $(0, \mathbf{i_1}, \mathbf{j_1})$. Матрица перехода имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Старые координаты $(x, y)$ связаны с новыми $(x_1, y_1)$ соотношениями (см. формулы (1.29) в [5], с.45):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = (x_1 - y_1)/\sqrt{2}, \\ y = (x_1 + y_1)/\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (x + y)/\sqrt{2}, \\ y_1 = (-x + y)/\sqrt{2} \end{cases}$$

В новой системе координат квадратичная форма имеет канонический вид, поэтому уравнение данной кривой можно записать как

$$8x_1^2 - 2y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\,(x_1 - y_1) - \frac{14}{\sqrt{2}}\,(x_1 + y_1) - 13 = 0, \quad \text{или}$$

$$8x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\,x_1 - 2y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}\,y_1 - 13 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, получаем

$$8\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\,x_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) -$$

$$-2\left(y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}\,y_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - 13 = 0.$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 13 - 4 + 9 = 0,$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Делим обе части уравнения на 8:

$$\frac{\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$

Произведём преобразование параллельного переноса системы координат в новое начало $O_1$ по формулам

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = y_1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = y_2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Выражаем новые координаты $x_2$, $y_2$ через старые $x$, $y$:

$$\begin{cases} x_2 = (x + y - 1)/\sqrt{2}, \\ y_2 = (-x + y + 3)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

В системе координат $O_1X_2Y_2$ уравнение кривой имеет канонический вид: $\dfrac{x_2^2}{1} - \dfrac{y_2^2}{4} = 1$. Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением гиперболы, видим, что $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. Таким образом, действительная полуось $a = 1$, а мнимая $b = 2$.

Запишем уравнения новых осей $O_1X_2$, $O_1Y_2$. В системе координат $O_1X_2Y_2$ уравнения осей $O_1X_2$, $O_1Y_2$ имеют вид $y_2 = 0$, $x_2 = 0$. Выражаем новые координаты $(x_2, y_2)$ через старые $(x, y)$:

$y_2 = (-x + y + 3)/\sqrt{2} = 0$,

$x_2 = (x + y - 1)/\sqrt{2} = 0$.

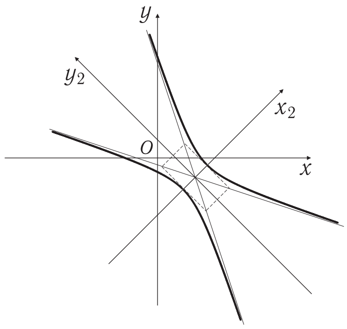

Рис. 14.1

Следовательно, оси $O_1X_2$, $O_1Y_2$ направлены по прямым $x + y - 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$.

Начало новой системы координат $O_1X_2Y_2$ – точка $O_1$, является центром симметрии гиперболы. Её координаты в системе $O_1X_2Y_2$ – $O_1(0; 0)$. Выражаем новые координаты $(x_2, y_2)$ через старые $(x, y)$:

$$\begin{cases} x_2 = (x + y - 1)/\sqrt{2} = 0, \\ y_2 = (-x + y + 3)/\sqrt{2} = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ -x + y = -3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = 2$, $y = -1$, $O_1(2; -1)$. Фокальной осью гиперболы является ось $O_1X_2$. Её уравнение в старой системе координат мы уже записали: $x - y - 3 = 0$. Для построения гиперболы строим в старой системе новую систему, в которой строим данную гиперболу (рис.14.1). Заметим, что прямые $y_2 = \pm 2x_2$ являются её асимптотами.

*Ответ:* $a = 1$, $b = 2$, $O_1(2; -1)$, $x - y - 3 = 0$.

**14.2.** Дана кривая $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая – парабола. Найдите значение её параметра $p$, координаты вершины и уравнение её оси симметрии.

*Решение.* Аналогично решению задачи 14.1.

Матрица квадратичной формы $B = 9x^2 - 24xy + 16y^2$:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Находим её собственные векторы и собственные числа

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0;\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25.$$

Так как одно из собственных чисел равно нулю, то кривая – параболического типа. Находим собственные векторы. Для числа $\lambda_1 = 0$ имеем систему

$$\begin{cases} 9\xi_1 - 12\xi_2 = 0, \\ -12\xi_1 + 16\xi_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad 3\xi_1 = 4\xi_2.$$

Если положим $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 3$, то единичный собственный вектор $\mathbf{i}_1$ имеет координаты $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

Другой собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = 25$, может быть задан в виде $\mathbf{j_1} = \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Базис $(\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1})$ принят правым (вектор $\mathbf{i_1}$ находится в первой четверти исходной системы координат, вектор $\mathbf{j_1}$ – во второй, поворот от вектора $\mathbf{i_1}$ к вектору $\mathbf{j_1}$ на меньший угол осуществляется против часовой стрелки). Переходим от базиса $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ к $(O_1, \mathbf{i_1}, \mathbf{j_1})$. Запишем матрицу перехода и обратную к ней

$$Q = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Новые координаты $(x_1, y_1)$ связаны со старыми $(x, y)$ соотношениями

$$\begin{cases} x = (4x_1 - 3y_1)/5, \\ y = (3x_1 + 4y_1)/5, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (4x + 3y)/5, \\ y_1 = (-3x + 4y)/5. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение параболы принимает вид

$$25y_1^2 - \frac{20}{5}(4x_1 - 3y_1) + \frac{110}{5}(3x_1 + 4y_1) - 50 = 0, \quad \text{или}$$
$$25y_1^2 + 100y_1 + 50x_1 - 50 = 0,$$
$$25(y_1^2 + 4y_1 + 4 - 4) + 50x_1 - 50 = 0,$$
$$25(y_1 + 2)^2 = -50x_1 + 150,$$
$$(y_1 + 2)^2 = -2(x_1 - 3).$$

Совершим параллельный перенос осей координат в новое начало $O_1$ по формулам

$$\begin{cases} x_2 = (x_1 - 3), \\ y_2 = y_1 + 2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 3 + x_2, \\ y_1 = -2 + y_2. \end{cases}$$

Выражаем новые координаты $(x_2, y_2)$ через старые $(x, y)$:

$$\begin{cases} x_2 = (4x + 3y - 15)/5, \\ y_2 = (-3x + 4y + 10)/5. \end{cases}$$

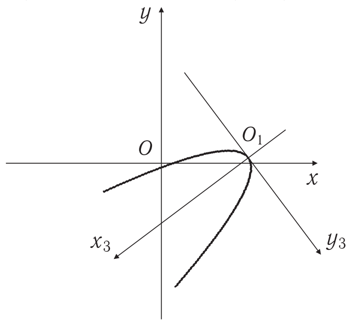

Рис. 14.2

Уравнение параболы в системе координат $O_1X_2Y_2$: $y_2^2 = -2x_2$. Это уравнение не является каноническим, поскольку у переменной $x_2$ есть знак "$-$". Приведёт к каноническому виду преобразование координат

$$\begin{cases} x_3 = -x_2, \\ y_3 = -y_2, \end{cases}$$

осуществляющее поворот осей координат на 180°. Новые координаты $(x_3, y_3)$ выражаем через старые $(x, y)$:

$$\begin{cases} x_3 = -(4x + 3y - 15)/5, \\ y_3 = (3x - 4y - 10)/5. \end{cases}$$

При этом уравнение параболы в системе координат $O_1X_3Y_3$ имеет вид $y_3^2 = 2x_3$. Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что параметр $p$ равен единице.

Запишем уравнения новых осей $O_1X_3$ $(y_3 = 0)$, $O_1Y_3$ $(x_3 = 0)$ в системе координат $OXY$. Выражаем в уравнениях

$y_3 = 0$, $x_3 = 0$ новые координаты $(x_3, y_3)$ через старые $(x, y)$:

$$\begin{cases} y_3 = (3x - 4y - 10)/5 = 0, \\ x_3 = -(4x + 3y - 15)/5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, оси $O_1X_3$, $O_1Y_3$ направлены по прямым

$$3x - 4y - 10 = 0, \;\; 4x + 3y - 15 = 0.$$

Осью симметрии параболы является прямая $y_3 = 0$, то есть $3x - 4y - 10 = 0$.

Вершина параболы в новой системе координат $O_1X_3Y_3$ находится в точке $O_1(0; 0)$. Выражаем новые координаты точки $O_1(x_3, y_3)$ через старые $(x, y)$:

$$\begin{cases} x_3 = 0 = -(4x + 3y - 15)/5, \\ y_3 = 0 = (3x - 4y - 10)/5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = \dfrac{18}{5}$, $y = \dfrac{1}{5}$, $O_1\left(\dfrac{18}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$. Теперь можно построить данную параболу. Для этого в старой системе строим новую систему координат, а затем строим параболу (рис. 14.2).

*Ответ:* $p = 1$, $O_1\left(\dfrac{18}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$, $3x - 4y - 10 = 0$.

### Задачи для самостоятельного решения

**14.3.** Запишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если известно, что:

а) его полуоси равны 7 и 2;

б) его большая полуось равна 5, а расстояние между фокусами $2c = 8$;

в) расстояние между фокусами $2c = 24$ и эксцентриситет $\epsilon = 12/13$;

г) малая полуось равна 8, а эксцентриситет $\epsilon = 3/5$;

д) расстояние между фокусами $2c = 6$ и расстояние между директрисами равно $50/3$;

е) расстояние между директрисами равно $32/3$, а эксцентриситет $\epsilon = 3/4$.

*Ответ:* а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{49} = 1$, б) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, в) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{169} = 1$,

г) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$, д) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, е) $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

**14.4.** Докажите, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс, и найдите: а) координаты его центра; б) полуоси; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис. Постройте данный эллипс.

*Ответ:* а) $(3; -1)$, 6) 3; $\sqrt{5}$, в) $2/3$; г) $3x = 22$, $3x = 28$.

**14.5.** Дано уравнение $x^2 + 4y^2 + 16y = 0$ кривой относительно декартовой системы координат. Выполните следующее: а) докажите, что эта кривая – эллипс; б) найдите координаты его центра симметрии; в) найдите его полуоси; г) найдите эксцентриситет этого эллипса; д) найдите расстояние между фокусами; е) постройте данный эллипс.

*Ответ:* б) $(0; 2)$, в) 4; 2, г) $\sqrt{3}/8$; д) $2\sqrt{3}$.

**14.6.** Запишите уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, если известно, что:

а) действительная полуось равна пяти, а мнимая – четырем;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$, а мнимая полуось $b = 4$;

в) расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\epsilon = 3/2$;

г) действительная полуось $a = 8$, а эксцентриситет $\epsilon = 5/4$;

д) уравнение асимптот $y = \pm(4/3)x$, а расстояние между фокусами $2c = 10$;

е) расстояние между директрисами равно $288/13$, а расстояние между фокусами равно $2c = 26$;

ж) расстояние между директрисами равно $32/3$, а мнимая полуось $b = 3$;

з) расстояние между директрисами равно $8/3$, а эксцентриситет $\epsilon = 3/2$;

и) уравнение асимптот $y = \pm(3/4)x$, а расстояние между директрисами равно $64/5$.

*Ответ:* а) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, б) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, в) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$,

г) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, д) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, е) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$,

ж) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, з) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, и) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

**14.7.** Докажите, что уравнение

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$$

определяет гиперболу, и найдите: а) координаты ее центра; б) полуоси; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис. Постройте данную гиперболу.

*Ответ:* а) $(2; -3)$, б) $3$; $4$, в) $5/3$,
г) $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$, д) $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$.

**14.8.** Запишите уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если известно, что:

а) парабола симметрична относительно оси $OX$ и проходит через точку $A(9; 6)$;

б) парабола симметрична относительно оси $OY$ и проходит через точку $B(4; -8)$.

Постройте эти параболы.

*Ответ:* а) $y^2 = 4x$; б) $x^2 = -2y$.

**14.9.** Запишите уравнение параболы, зная, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси $OX$ и ее параметр $p = 0{,}5$;

б) парабола расположена в нижней полуплоскости и ее параметр $\mathrm{p} = 3$.

Постройте эти параболы.

*Ответ:* а) $y^2 = -x$; б) $x^2 = -6y$.

**14.10.** Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

*Ответ:* $F(6;0)$, $x + 6 = 0$.

**14.11.** Докажите, что уравнение $y = 4x^2 - 8x + 7$ определяет параболу, и найдите координаты ее вершины $A$ и величину параметра $p$.

*Ответ:* $A(1;3)$, $p = 2$.

**14.12.** Каждое из уравнений

а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$,

б) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$,

в) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 229 = 0$

г) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$

приведите к каноническому виду; выясните, какие геометрические образы они определяют; укажите координаты новых базисных векторов; если кривая – эллипс или гипербола, укажите координаты центра симметрии, величины полуосей и уравнение фокальной оси; если кривая – парабола, укажите координаты вершины, величину параметра $p$, уравнение оси симметрии; постройте кривые в старой системе координат.

*Ответы:*

а) $\dfrac{x_2^2}{5} + \dfrac{y_2^2}{30} = 1$; эллипс; $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$, $\mathbf{j_1} = \left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$; $O_1(1;-1)$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{30}$; $4x - 8y - 7 = 0$;

б) $\dfrac{y_2^2}{5/9} - \dfrac{x_2^2}{5/16} = 1$; гипербола; $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\mathbf{j_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $O_1(0;-1)$; $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$; $2x - y - 1 = 0$;

в) $y_2^2 = 6x_2$; парабола; $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$; $\mathbf{j_1} = \left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$;

$O_1\left(-\dfrac{43}{25};-\dfrac{74}{25}\right)$; $p=3$; $3x+4y+17=0$.

г) $y_2^2=2\sqrt{2}x_2$; парабола; $\mathbf{i_1}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\mathbf{j_1}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $O_1(3;-2)$; $p=\sqrt{2}$; $x-y-5=0$.

## 15. Цилиндры. Конусы. Поверхности вращения

Рекомендуется изучить по [5] подраздел 2.1.

Пусть в пространстве даны некоторая кривая $\mathcal{L}$ и вектор $\mathbf{l}$. *Цилиндрической поверхностью* или *цилиндром* называется поверхность, состоящая из всех прямых, параллельных вектору $\mathbf{l}$ и пересекающих кривую $\mathcal{L}$. Цилиндр можно получить движением прямой, не изменяющей своего направления и всё время пересекающей определённую кривую. Прямые цилиндрической поверхности называются *образующими,* а кривая $\mathcal{L}$ – её *направляющей.*

**15.1.** Докажите, что уравнение $F(x,y)=0$ в декартовой системе координат $OXYZ$ определяет цилиндрическую поверхность $S$ с образующими, параллельными оси $OZ$ и направляющей $\mathcal{L}$, задаваемой системой $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

*Решение.* Пусть координаты точки $M_0(x_0,y_0)$ удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, т.е. $F(x_0,y_0)=0$. Но тогда этому уравнению удовлетворяют координаты точки $M_0(x_0,y_0,z)$ при любом $z$. Таким образом, прямая $M_0M$, параллельная оси $OZ$, целиком лежит на поверхности, определяемой уравнением $F(x,y)=0$ и пересекает кривую $\mathcal{L}$ в точке $M_0$. Поскольку это утверждение справедливо для любой прямой, параллельной оси $OZ$ и пересекающей кривую $\mathcal{L}$, то поверхность $S$ является цилиндрической с образующими, параллельными оси $OZ$, а одной из её направляющих является кривая $\mathcal{L}$.

Аналогично можно доказать, что уравнение $F(x,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность $S$ с образующими, параллельными оси $OY$ и направляющей

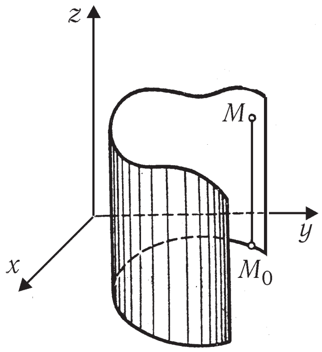


Рис. 15.1

$$\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0, \end{cases}$$

а уравнение $F(y,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность $S$ с образующими, параллельными оси $OX$ и направляющей

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

Если в качестве направляющей взять одну из кривых второго порядка: эллипс, гиперболу или параболу, то полученные цилиндрические поверхности называют соответственно эллиптическим, гиперболическим или параболическим цилиндром. Например, уравнение $2x^2+3y^2=1$ в декартовой системе координат определяет эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси $OZ$. Его направляющей является эллипс

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Чтобы получить уравнение цилиндрической поверхности, с образующей, параллельной вектору $\mathbf{l}(m,n,p)$ и направляющей

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0, \end{cases}$$

нужно исключить $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0, \\ F_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0, \\ \dfrac{x-\tilde{x}}{m}=\dfrac{y-\tilde{y}}{n}=\dfrac{z-\tilde{z}}{p}. \end{cases} \qquad (15.1)$$

**15.2.** Найдите уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой дана системой уравнений $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$ а образующие её перпендикулярны плоскости направляющей.

*Решение.* Направляющая цилиндрической поверхности задана как линия пересечения плоскости $x = 2z$ или $x - 2z = 0$ с поверхностью $x = y^2 + z^2$. Это означает, что направляющая лежит в плоскости $x - 2z = 0$ с вектором нормали $\mathbf{N}(1; 0; -2)$. По условию задачи образующая цилиндрической поверхности перпендикулярна плоскости направляющей. Следовательно, направляющий вектор $\mathbf{l}$ образующей совпадает с вектором $\mathbf{N}(1; 0; -2)$, и систему (15.1) в данном случае можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2, \\ \tilde{x} = 2\tilde{z}, \\ \dfrac{x - \tilde{x}}{1} = \dfrac{y - \tilde{y}}{0} = \dfrac{z - \tilde{z}}{-2}. \end{cases}$$

Из последнего соотношения системы находим $\tilde{y} = y$,

$$-2x + 2\tilde{x} = z - \tilde{z}.$$

Подставляя $2\tilde{z}$ вместо $\tilde{x}$ (из второго уравнения системы), получим

$$-2x + 4\tilde{z} = z - \tilde{z}.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{z} = \frac{z + 2x}{5}, \quad \tilde{x} = \frac{2(z + 2x)}{5}.$$

Найденные выражения $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ через $x$, $y$, $z$ вносим в первое уравнение системы. Получаем

$$\frac{2(z + 2x)}{5} = y^2 + \frac{(z + 2x)^2}{25}.$$

Умножаем обе части уравнения на 25 и переносим все слагаемые вправо. Уравнение $(z + 2x)^2 - 10(z + 2x) + 25y^2 = 0$ – искомое.

*Ответ:* $(z + 2x)^2 - 10(z + 2x) + 25y^2 = 0$.

*Конической поверхностью* называется поверхность, описываемая подвижной прямой (*образующей*), проходящей через данную точку (*вершину конуса*) и пересекающей данную кривую (*направляющую*).

Пусть дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Функция $F(x, y, z)$ называется однородной степени $m$ $(m > 0)$, если при любом $t$ выполняется условие $F(tx, ty, tz) = t^m F(x, y, z)$.

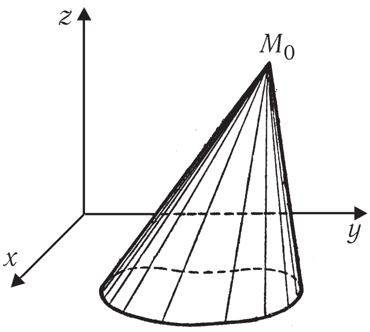


Рис. 15.2

Доказано, что если функция $F(x, y, z)$ однородна, уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат, а уравнение $F(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, однородное относительно переменных $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, определяет коническую поверхность с вершиной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для того, чтобы записать уравнение конической поверхности с вершиной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющей

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0, \end{cases}$$

нужно исключить $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ из системы

$$\begin{cases} F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0, \\ F_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{\tilde{x} - x_0} = \dfrac{y - y_0}{\tilde{y} - y_0} = \dfrac{z - z_0}{\tilde{z} - z_0}, \end{cases} \qquad (15.2)$$

состоящей из уравнений направляющей и образующей.

**15.3.** Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $M_0(-3; 0; 0)$, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

*Решение.* В условиях этой задачи система (15.2) принимает вид

$$\begin{cases} 3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 - \tilde{z} = 0, \\ \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 1, \\ \dfrac{x+3}{\tilde{x}+3} = \dfrac{y}{\tilde{y}} = \dfrac{z}{\tilde{z}}. \end{cases} \tag{15.3}$$

Решение задачи сводится к исключению переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ из этой системы. Находим выражения для $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ через $x$, $y$, $z$, используя два последних соотношения системы:

$$\tilde{x} = \frac{(x+3) - 3y - 3z}{(x+3) + y + z}, \tilde{y} = \frac{4y}{(x+3) + y + z}, \tilde{z} = \frac{4z}{(x+3) + y + z}.$$

Подставляем эти выражения в первое уравнение системы (15.3). Получаем

$$3[(x+3) - 3y - 3z]^2 + 96y^2 - 4z[(x+3) + y + z] = 0 \ -$$

искомое уравнение конической поверхности. Как видим, это уравнение однородно относительно $(x+3)$, $y$, $z$.

*Ответ:* $3[(x+3) - 3y - 3z]^2 + 96y^2 - 4z[(x+3) + y + z] = 0$.

**15.4.** Прямая $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{6}$ вращается вокруг оси $OX$. Найдите уравнение описанной ею поверхности.

*Решение.* Точка прямой $M_0(2;0;0)$ находится на оси $OX$. Поэтому все прямые, полученные при вращении данной прямой вокруг оси $OX$, проходят через точку $M_0(2;0;0)$. Следовательно, это коническая поверхность с вершиной в точке $M_0$. Косинус угла, который образует данная прямая с осью $OX$, равен $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \dfrac{3}{7}$. Так как все образующие $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{p}$ наклонены к оси $OX$ под этим же углом, то $\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = \dfrac{3}{7}$ или $49m^2 = 9(m^2+n^2+p^2)$, откуда следует, что $40m^2 - 9n^2 - 9p^2 = 0$. Поскольку $m = (x-2)t$,

$n = yt$, $p = zt$, где $t$ принимает любые значения, то уравнение $40(x-2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$ является искомым.

*Ответ:* $40(x-2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$.

Поверхность, описываемую вращением некоторой плоской кривой $\mathcal{L}$ вокруг оси $l$, расположенной в этой же плоскости, называют *поверхностью вращения.* Для записи уравнения поверхности вращения декартову систему координат выберем специальным образом. Одну из координатных плоскостей совместим с плоскостью, в которой расположена кривая $\mathcal{L}$, а одну из осей координат направим по оси вращения $l$. При таком выборе системы координат кривая $\mathcal{L}$ может быть задана тремя способами: либо $f(x,y) = 0$, либо $\varphi(x,z) = 0$, либо $\psi(y,z) = 0$ в соответствующей координатной плоскости.

Ось вращения в каждом из трёх случаев можно выбрать двумя способами. В книге [6] Каплана приведено простое правило записи уравнения поверхности вращения для всех шести возможных случаев: "Чтобы записать уравнение поверхности вращения, нужно в уравнении кривой $\mathcal{L}$, заданном в одной из координатных плоскостей, переменную, соответствующую оси вращения, оставить без изменения, а вторую переменную заменить на корень квадратный из суммы квадратов двух других координат, взятым со знаком $\pm$." Впрочем, это правило следует из вида уравнения поверхности вращения, полученного в [5] на стр. 110.

**15.5.** Запишите уравнение поверхности вращения, полученной вращением гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$: а) вокруг оси $OX$; б) вокруг оси $OY$.

*Решение:* а) согласно сформулированному правилу, переменную $x$ в уравнении $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ оставляем без изменения, а переменную $y$ заменяем на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. В результате получим искомое уравнение $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2+z^2}{9}=1$ или $\dfrac{y^2+z^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=-1$. Эта поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения. Он получается вращением гиперболы вокруг её действительной оси;

б) в этом случае переменную $y$ оставляем без изменения, а переменную $x$ заменяем на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Получаем искомое уравнение $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Эта поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения. Он получается вращением гиперболы вокруг её мнимой оси.

Двуполостной гиперболоид вращения и однополостной гиперболоид вращения – частные случаи поверхностей второго порядка.

*Ответ:* а) $\dfrac{y^2+z^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=-1$, б) $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

**15.6.** Запишите уравнение поверхности, полученной вращением параболы $z=y^2$ а) вокруг оси $OZ$; б) вокруг оси $OY$.

*Решение:* а) заменяя переменную $y$ на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получаем искомое уравнение $z=x^2+y^2$. Такая поверхность называется эллиптическим параболоидом вращения. Она также является частным случаем поверхностей второго порядка;

б) в этом случае переменную $z$ надо заменить на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Получаем $\pm\sqrt{x^2+z^2}=y^2$ или $x^2+z^2=y^4$. Поверхность, заданная этим уравнением, не является поверхностью второго порядка.

*Ответ:* а) $z=x^2+y^2$, б) $x^2+z^2=y^4$.

Нетрудно записать, пользуясь указанным правилом, уравнения поверхностей вращения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг его осей симметрии $OX$ и $OY$. В результате получим поверхность, называемую эллипсоидом вращения, также являющуюся частным случаем поверхностей второго порядка.

### Задачи для самостоятельного решения

**15.7.** Охарактеризовать поверхности, заданные в декартовой системе координат $OXYZ$ следующими уравнениями:

а) $y^2 + z^2 = 4$; б) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$;

в) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 6z$;

д) $y^2 - xy = 0$; е) $x^2 - z^2 = 0$;

ж) $x^2 + y^2 = 0$; з) $x^2 + 8y^2 + 16 = 0$;

и) $x^2 + z^2 - 4z = 0$; к) $y^2 + z^2 = -4z$.

Нарисуйте эти поверхности.

**15.8.** Найдите уравнение цилиндра, проектирующего окружность

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \end{cases}$$

на плоскость $OXY$.

*Ответ:* $x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0$.

**15.9.** Найдите уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которого служит окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0, \end{cases}$ а образующая параллельна вектору $\mathbf{l}(5; 3; 2)$.

*Ответ:* $(2x - 5z)^2 + (2y - 3z)^2 = 100$.

**15.10.** Найдите уравнение цилиндрической поверхности, зная что она проходит через кривую

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y - z = 2, \end{cases}$$

а её образующая параллельна оси $OY$.

*Ответ:* $(x-1)^2 + (z - x + 5)^2 + (z-2)^2 = 25$.

**15.11.** Найдите уравнение цилиндрической поверхности, зная что её образующие составляют равные углы с тремя осями координат и касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

*Ответ:* $(2x-y-z)^2+(2y-x-z)^2+(2z-x-y)^2=9$.

**15.12.** Запишите уравнение конической поверхности, вершина которой находится в начале координат, а направляющая дана системой уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9, \\ z=4. \end{cases}$

*Ответ:* $2x^2+2y^2+z^2=1$.

**15.13.** Найдите уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(4;0;-3)$, и направляющей $\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0. \end{cases}$

*Ответ:* $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{[3(x-4)+4(z+3)]^2}{9}=(x-4)^2$.

**15.14.** Запишите уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0;b;0)$, и направляющей $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$

*Ответ:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

**15.15.** Запишите уравнение круговой конической поверхности, проходящей через все три координатные оси.

*Указание.* В качестве направляющей можно взять, например, окружность $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

*Ответ:* $xy+xz+yz=0$.

**15.16.** Запишите уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой $y=e^x$ а) вокруг оси $OX$; б) вокруг оси $OY$.

*Ответ.* $y^2+z^2=e^{2x}$; $y=e^{\pm\sqrt{x^2+z^2}}$.

**15.17.** Найдите уравнение поверхности вращения, образованной вращением прямой $x+y=2$ а) вокруг оси $OX$; б) вокруг оси $OY$.

*Ответ:* $(x-2)^2 - y^2 - z^2 = 0$; $(y-2)^2 - x^2 - z^2 = 0$.

**15.18.** Запишите уравнение поверхности вращения, образованной вращением прямой $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$ вокруг оси $OZ$.

*Ответ:* $x^2 + y^2 = 1$.

## 16. Поверхности второго порядка

Предлагается изучить по пособию [5] подразделы 2.9, 1.3.11 и 1.6.6.

*Поверхностью второго порядка* называется поверхность, которая в декартовой системе координат может быть задана уравнением

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0. \end{aligned} \qquad (16.1)$$

Первая группа из шести слагаемых

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (16.2)$$

образует квадратичную форму, а следующие три слагаемых

$$2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z \ -$$

линейную форму.

Упрощение уравнения (16.1) проводится по той же схеме, что и для кривых второго порядка. Сначала приводим квадратичную форму к главным осям, для чего находим собственные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ её матрицы и ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этой матрицы. После перехода к новому базису уравнение (16.1) примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \tilde{a}_{01}x_1 + \tilde{a}_{02}y_1 + \tilde{a}_{03}z_1 + \tilde{a}_{00} = 0. \qquad (16.3)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (16.3) осуществляется путём преобразования параллельного переноса системы координат в новое начало. В результате уравнение (16.1) будет приведено к каноническому виду.

Всё сказанное проиллюстрируем примерами.

**16.1.** Относительно правой декартовой системы координат задана поверхность $S$ своим уравнением

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4zx + 8x - 4y - 8z + 1 = 0.$$

Охарактеризуйте поверхность $S$, приведя её уравнение к каноническому виду.

*Решение.* Полную характеристику поверхности можно дать, приведя её уравнение к каноническому виду. Для этого находим главные оси квадратичной формы

$$B = 6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4zx.$$

Записываем матрицу этой квадратичной формы

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 32) = 0.$$

Находим собственные числа: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = -2$. Далее находим единичные собственные векторы, отвечающие этим собственным числам. Для $\lambda_1 = 4$ получаем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ \qquad -6x_2 = 0. \end{cases}$$

Её фундаментальная система решений состоит из одного решения $(\alpha, 0, -\alpha)$, то есть вектор $(\alpha, 0, -\alpha)$ при любом $\alpha$ является собственным. Его орт можно принять в качестве нового базисного вектора $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Аналогично, полагая $\lambda = \lambda_2 = 8$, получаем систему

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ \qquad -10x_2 = 0 \end{cases}$$

для координат собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda_2 = 8$. Видим, что вектор $(\alpha, 0, \alpha)$ – собственный. В качестве второго базисного вектора можно принять вектор $\mathbf{j_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Поскольку матрица $B$ симметрична, а собственные числа различны, то её собственные векторы по свойству симметрического линейного оператора взаимно ортогональны.

Третий собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_3 = -2$, можно найти таким же способом, как и первые два. Но можно поступить проще, найдя орт вектора $[\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}]$.

$$[\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\mathbf{j}.$$

Мы получили $\mathbf{k_1} = (0; -1; 0)$. Переходим от ортонормированного базиса $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к новому ортонормированному базису $O, \mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}, \mathbf{k_1}$. Ортогональная матрица перехода $Q$ и её обратная матрица $Q^{-1} = Q^T$ имеют вид

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Новые координаты $x_1, y_1, z_1$ и старые $x, y, z$ связаны соотношениями

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

В подробной записи эти соотношения имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x-z}{\sqrt{2}}, \\[2mm] y_1 = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}}, \\[2mm] z_1 = -y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}, \\[2mm] y = -z_1, \\[2mm] z = \dfrac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

В декартовой системе $(O, x_1, y_1, z_1)$ уравнение данной поверхности принимает вид

$$4x_1^2 + 8y_1^2 - 2z_1^2 + 8 \cdot \frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}} + 4z_1 - 8 \cdot \frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}} + 1 = 0$$

или

$$4x_1^2 + 8y_1^2 - 2z_1^2 + \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot x_1 + 4z_1 + 1 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, находим

$$4\left(x_1 + \sqrt{2}\right)^2 + 8y_1^2 - 2(z_1-1)^2 = -1 + 4 \cdot 2 - 2 = 5.$$

Проведём преобразование параллельного переноса в новое начало $O_2$ по формулам

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{2}, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1 - 1. \end{cases}$$

В декартовой системе координат $(O_2, x_2, y_2, z_2)$ уравнение поверхности примет вид

$$4x_2^2 + 8y_2^2 - 2z_2^2 = 5,$$

где

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x-z+2}{\sqrt{2}}, \\[2mm] y_2 = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}}, \\[2mm] z_2 = -y - 1. \end{cases}$$

Уравнение поверхности легко записать в каноническом виде

$$\frac{x_2^2}{5/4} + \frac{y_2^2}{5/8} - \frac{z_2^2}{5/2} = 1.$$

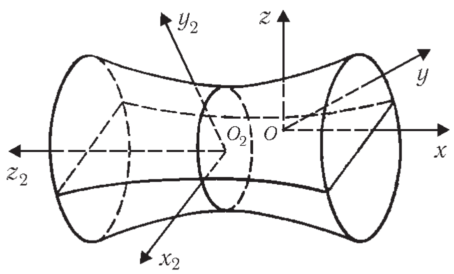


Рис. 16.1

Таким образом, поверхность является однополостным гиперболоидом. Плоскости $x_2 = x - z + 2 = 0$, $y_2 = x + z = 0$, $z_2 = -y - 1 = 0$ являются её плоскостями симметрии. Эти плоскости пересекаются в центре симметрии $O_2$ – в начале новой системы координат. Решая систему

$$\begin{cases} x - z - 2 = 0, \\ x + z = 0, \\ y + 1 = 0, \end{cases}$$

находим $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$, т.е. новое начало $O_2$ находится в точке $(-1; -1; 1)$.

Используя полученные данные, легко представить расположение гиперболоида относительно старой системы координат. Его ось симметрии параллельна вектору $\mathbf{j}$, а центр симметрии находится в точке $(-1; -1; 1)$.

**16.2.** Приведите к каноническому виду уравнение поверхности $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2zx + 2yz - 8x + 12y - 4z + 3 = 0$. Охарактеризуйте эту поверхность. Укажите соответствующие формулы преобразования координат.

*Решение.* Поступаем также, как и при решении задачи 16.1. Для квадратичной формы

$$B = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2zx + 2yz$$

записываем матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и находим её собственные числа и собственные векторы. Для этого решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 0.$

Находим единичные собственные векторы. Для $\lambda_1 = 2$ координаты собственного вектора $(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальная система решений которой состоит из одного решения $(\alpha, \alpha, -2\alpha)$ при любом $\alpha$. В качестве нового базисного вектора $\mathbf{i_1}$ можем взять вектор $\mathbf{i_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}; \dfrac{1}{\sqrt{6}}; -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, т.е. орт вектора $(\alpha, \alpha, -2\alpha)$.

Аналогично, при $\lambda_2 = 5$, получаем систему

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальная система решений которой также содержит одно решение вида $(\alpha, \alpha, \alpha)$. В качестве второго базисного вектора можно принять орт вектора $(\alpha, \alpha, \alpha)$, $\mathbf{j_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

В качестве третьего базисного вектора $\mathbf{k_1}$ примем орт вектора

$$[\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$$

т.е. вектор $\mathbf{k_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$. Новый ортонормированный базис $\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}, \mathbf{k_1}$ найден. Переходим от старого базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к новому. Матрицы перехода $Q$ и её обратная матрица $Q^{-1} = Q^T$ имеют вид

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя формулы

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

находим соотношения, выражающие новые координаты $x_1, y_1, z_1$ через старые $x, y, z$ и наоборот

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x + y - 2z}{\sqrt{6}}, \\ y_1 = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{3}}, \\ z_1 = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{3}z_1}{\sqrt{6}}, \\ y = \dfrac{x_1 + \sqrt{2}y_1 - \sqrt{3}z_1}{\sqrt{6}}, \\ z = \dfrac{-2x_1 + \sqrt{2}y_1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

В декартовой системе координат $(O, x_1, y_1, z_1)$ уравнение данной поверхности примет вид

$$2x_1^2 + 5y_1^2 - 8 \cdot \frac{x_1 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{3}z_1}{\sqrt{6}} + 12 \cdot \frac{x_1 + \sqrt{2}y_1 - \sqrt{3}z_1}{\sqrt{6}} -$$
$$-4 \cdot \frac{-2x_1 + \sqrt{2}y_1}{\sqrt{6}} + 3 = 0$$

или

$$2x_1^2 + 5y_1^2 + 2\sqrt{6}x_1 - 10\sqrt{2}z_1 + 3 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, находим

$$2\left(x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{2}z_1 - 3 + 3 = 0.$$

Проведём преобразование параллельного переноса в новое начало $O_2$ по формулам

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1. \end{cases}$$

Получим

$$2x_2^2 + 5y_2^2 = 10\sqrt{2}z_2$$

или

$$\frac{x_2^2}{5\sqrt{2}} + \frac{y_2^2}{2\sqrt{2}} = z_2.$$

Мы получили каноническое уравнение эллиптического параболоида.

Новые координаты $x_2$, $y_2$, $z_2$ выражаются через старые в виде

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x + y - 2z + 3}{\sqrt{6}}, \\ y_2 = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{3}}, \\ z_2 = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Координаты вершины этого параболоида можно найти, решая систему

$$\begin{cases} x_2 = x + y - 2z + 3 = 0, \\ y_2 = x + y + z = 0, \\ z_2 = x - y = 0, \end{cases}$$

Получаем точку $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. Таким образом, данная поверхность является эллиптическим параболоидом с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ и осью симметрии, параллельной вектору $\mathbf{l} = (1; -1; 0)$, что позволяет легко представить расположение этого параболоида.

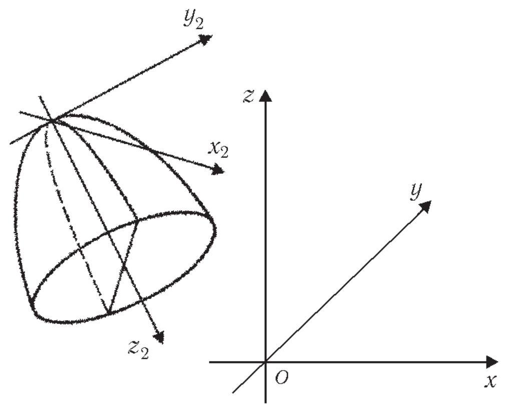


Рис. 16.2

*Замечание 1.* Если среди собственных чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ имеются два равных, то получим поверхность вращения. Фундаментальная система для отыскания собственных векторов, соответствующих этому числу, будет состоять из двух решений. Эти решения нужно выбрать так, чтобы они определяли пару единичных ортогональных векторов.

*Замечание 2.* По распределению знаков собственных чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ можно сделать предположение о характере поверхности. Если одно из этих чисел равно нулю, то поверхность либо параболоид (эллиптический или гиперболический), либо является цилиндром (эллиптическим или гиперболическим), либо распадается на пару пересекающихся плоскостей, либо вырождается в точку. Мы не останавливаемся на полной классификации поверхностей. Вид поверхности определяется однозначно после приведения её уравнения к каноническому виду.

### Задачи для самостоятельного решения

**16.3.** Определите, какие поверхности задают в декартовой системе координат следующие уравнения. Изобразите эти поверхности.
а) $5x^2 - 3y^2 - 10 = 0$;
б) $2x^2 - 8y^2 + z^2 = 0$;
в) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$;
г) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$;
д) $2x^2 - 3z^2 = 4y$;
е) $y^2 + 2z^2 = x$;
ж) $x^2 - 4z = 0$;
з) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 4$.

**16.4.** Докажите, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходит две прямые линии, целиком лежащие на поверхности.

**16.5.** Дан эллипсоид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9} = 1$. Найдите: а) координаты его вершин; б) длины его осей; в) сечения его плоскостями симметрии (главные сечения).

**16.6.** Охарактеризуйте линии пересечения гиперболоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{1} = 1$ плоскостями $z = 2$; $z = 3$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$; $y = 4$.

**16.7.** Охарактеризуйте сечения гиперболического параболоида $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=z$ плоскостями $z=0$; $z=1$; $x=0$; $x=2$; $y=1$; $y=3$.

**16.8.** Определить поверхность, которую описывает прямая, скользящая по трём прямым:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1},\quad \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\quad \frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1},$$

из которых никакие две не лежат в одной плоскости.

*Ответ:* однополостной гиперболоид $\dfrac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$.

**16.9.** Составить уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1},\quad \frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-1},$$

оставаясь всё время параллельной плоскости $2x+3y-5=0$.

*Ответ:* $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=z$ – гиперболический параболоид.

**16.10.** Привести к каноническому виду уравнения следующих поверхностей:

а) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0$;
б) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0$;
в) $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$;
г) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;
д) $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$.

Охарактеризуйте все эти поверхности и укажите их расположение относительно декартовой системы координат $OXYZ$.

*Ответы:*
а) $x^2+y^2-2z^2=0$;
б) $3x^2+6y^2-2z^2+6=0$;
в) $2x^2+5y^2+8z^2-32=0$;
г) $x^2+2y^2-2=0$;
д) $7x^2-2y^2-\dfrac{8z}{\sqrt{14}}=0$.

## 17. Полярная система координат

Рекомендуется изучить подраздел 2.2 в пособии [5].

Системой координат на плоскости или в пространстве называют некоторое множество геометрических фигур, с помощью которых можно определить положение любой точки на плоскости или в пространстве. Мы уже определили аффинную и декартову системы координат на плоскости и в пространстве. Применяются и другие системы координат. С одной из них мы и познакомимся в этом разделе.

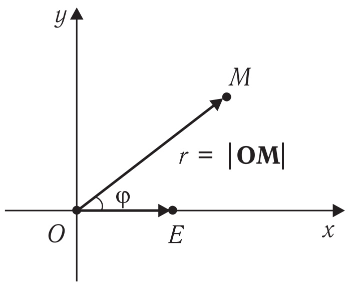

Рис. 17.1

Напомним, что числовой осью называют прямую с заданными на ней двумя точками: $O$ – начало отсчёта и $E$ – единичная точка. Вектор $\mathbf{OE}$ определяет положительное направление оси, а $|\mathbf{OE}|$ – единицу масштаба, полагая $|\mathbf{OE}| = 1$. Полярная система координат на плоскости состоит из одной числовой оси $\mathbf{l}$, называемой полярной осью. Точку $O$ оси называют полюсом. Положение любой точки $M$ на плоскости однозначно определяется двумя числами: $r = |\mathbf{OM}|$ и $\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\mathbf{OE}$ и $\mathbf{OM}$, отсчитанный по правилам тригонометрии от вектора $\mathbf{OE}$ до вектора $\mathbf{OM}$. Угол отсчитывают либо против часовой стрелки и тогда считают $\varphi > 0$, либо по часовой стрелке, и тогда считают $\varphi < 0$. Числа $(r, \varphi)$ называют полярными координатами точки $M$. Величина $r$ определяется однозначно, причём $0 \le r < \infty$, $r = 0$ только для полюса $O$. Угол же $\varphi$ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного $2\pi$. Чтобы избежать этой неоднозначности, договорились считать либо $0 \le \varphi < 2\pi$, либо $-\pi < \varphi \le \pi$, называя это значение угла главным.

Поместим начало декартовой системы координат в полюс $O$, а ось $OX$ направим по полярной оси. Тогда декартовы координаты точки $M$ $x$ и $y$ выражаются по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{17.1}$$

Формулы перехода от декартовой системы координат к полярной:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{17.2}$$

Если $0 \le \varphi < 2\pi$, то

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y \ge 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0; \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{17.3}$$

Если же $-\pi < \varphi \le \pi$, то

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{17.4}$$

Во всех задачах, в которых фигурируют одновременно полярная и декартова системы координат, будем считать, что ось $OX$ совпадает с полярной осью, а точка $O$ – с полюсом.

Формулы (17.1) позволяют однозначно найти декартовы координаты точки по её полярным координатам, а формулы (17.2) и (17.3), либо (17.2) и (17.4) позволяют однозначно найти полярные координаты точки, зная декартовы координаты. После этого нетрудно записать все остальные пары чисел, которые соответствуют этой же точке, если это потребуется.

Координатная сетка для полярных координат, состоящая из окружностей

$r = c_1$, ($c_1 = \mathrm{const}$)

и лучей

$\varphi = c_2$, ($c_2 = \mathrm{const}$),

для случая $0 \le \varphi < 2\pi$ изображена на рис. 17.2. Полярную сетку удобно использовать для построения точек и кривых в полярной системе координат, как и миллиметровку для декартовой системы.

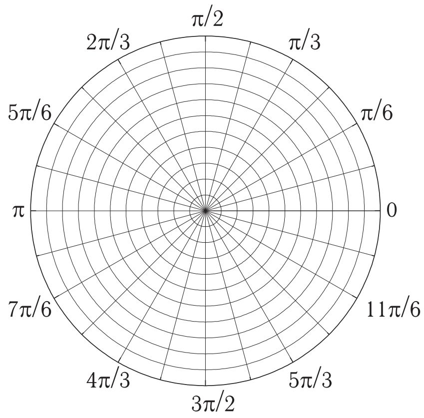


Рис. 17.2

Расстояние между двумя точками $A(r_1, \varphi_1)$ и $B(r_2, \varphi_2)$ можно вычислить по формуле

$$d = |\mathbf{AB}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{17.5}$$

*Замечание.* Часто рассматривают обобщённую полярную систему координат, в которой допускается $r < 0$. В обобщённой полярной системе координат любой паре чисел $(r, \varphi)$ сопоставляется точка $M$ следующим образом. Угол $\varphi$ представляют в виде $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$, где величина $\varphi_0$ расположена либо в $[0, 2\pi)$, либо в $(-\pi, \pi]$. Слагаемое $2\pi n$ отбрасывают и строят луч $OS$, наклонённый к полярной оси под углом $\varphi_0$, откладывая угол $\varphi_0$ против часовой стрелки, если $\varphi_0 > 0$ и по часовой стрелки, если $\varphi_0 < 0$. Если $r > 0$, то на луче $OS$ ставят точку $M$ так, чтобы $|\mathbf{OM}| = r$, если же $r < 0$, то точку $M$ располагают на луче, противоположном $OS$, при этом $|\mathbf{OM}| = r$.

**17.1.** Даны точки, декартовы координаты которых имеют следующие значения: $M_1(1;\sqrt{3})$, $M_2(-1;\sqrt{3})$, $M_3(-1;-\sqrt{3})$, $M_4(1;-\sqrt{3})$. Найдите их полярные координаты. Постройте эти точки в полярной системе координат.

*Решение.* Воспользуемся формулами (17.1), (17.2) и (17.3), полагая $0 \le \varphi < 2\pi$. Для всех четырёх точек находим

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Для точки $M_1$ имеем $x = 1 > 0$, $y = \sqrt{3} > 0$, поэтому

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

следовательно, $\left(2; \dfrac{\pi}{3}\right)$ – полярные координаты точки $M_1$.

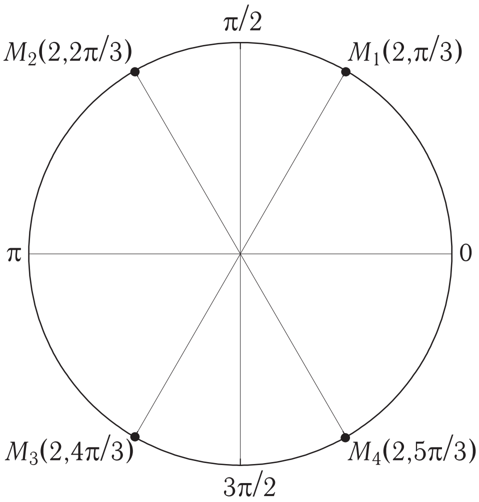


Рис. 17.3

Для точки $M_2$ имеем $x = -1 < 0$, поэтому

$$\varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

т.е. в полярных координатах $M_2\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Для точки $M_3$ также $x = -1 < 0$, следовательно,

$$\varphi_3 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

т.е. $M_3\left(2; \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Для точки $M_4$ имеем $x = 1 > 0$, $y = -\sqrt{3} < 0$, поэтому

$$\varphi_4 = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = 2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3},$$

то есть $M_4\left(2; \dfrac{5\pi}{3}\right)$. Все точки $M_1$, $M_2$ $M_3$, $M_4$ лежат на окружности с центром в точке $O$ радиуса 2 (рис. 17.3).

*Ответ:* $M_1\left(2; \dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $M_3\left(2; \dfrac{4\pi}{3}\right)$, $M_4\left(2; \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

**17.2.** В полярной системе координат даны точки $M_1\left(4; \dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(4; \dfrac{2}{3}\pi\right)$. Найдите декартовы координаты этих точек.

*Решение.* Применяем формулы (17.1). Для точки $M_1$ находим

$$x_1 = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad y_1 = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Таким образом, $(2\sqrt{3}; 3)$ – декартовы координаты точки $M_1$. Аналогично, для точки $M_2$ получаем

$$x_2 = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2, \quad y_2 = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Поэтому $M_2 = (-2; 2\sqrt{3})$.

*Ответ:* $M_1(2\sqrt{3}; 3)$, $M_2 = (-2; 2\sqrt{3})$.

**17.3.** Вычислите расстояние между двумя точками, заданными полярными координатами: а) $A\left(2; \dfrac{\pi}{12}\right)$ и $B\left(1; \dfrac{5\pi}{12}\right)$; б) $C\left(4; \dfrac{\pi}{5}\right)$ и $D\left(6; \dfrac{6\pi}{5}\right)$.

*Решение.* а) по формуле (17.5), в которой надо положить $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{12}$, $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{12}$, получаем

$$|\mathbf{AB}| = d = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)} =$$

$$= \sqrt{5 - 4\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

б) действуем аналогично а)

$$|\mathbf{CD}| = d = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$\sqrt{52 - 48\cos\pi} = \sqrt{52 + 48} = \sqrt{100} = 10.$$

*Ответ:* а) $\sqrt{3}$; б) 10.

Многие кривые удобно изучать в полярной системе координат, задавая их уравнением $F(r, \varphi) = 0$ или $r = r(\varphi)$. Например, окружность $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ с центром в точке $(R, 0)$ радиуса $R$ в полярной системе координат имеет уравнение $r = 2R\cos\varphi$. Легко показать, что уравнение $r = 2R\sin\varphi$ определяет в полярной системе координат окружность с центром $(0, R)$ радиуса $R$.

**17.4.** Запишите уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ $(C \neq 0)$ в полярной системе координат.

*Решение.* Полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим искомое уравнение

$$r = \frac{-C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi}. \tag{17.6}$$

Это уравнение недостаточно наглядно характеризует прямую. Преобразуем его следующим образом. Через $\alpha$ обозначим угол наклона вектора нормали $\mathbf{N}(A, B)$ прямой к полярной оси.

Тогда
$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$
Поделим числитель и знаменатель в (17.6) на $\sqrt{A^2+B^2}$, получим
$$r = \frac{-\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}.$$
Обозначим $p = -\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Тогда
$$r = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

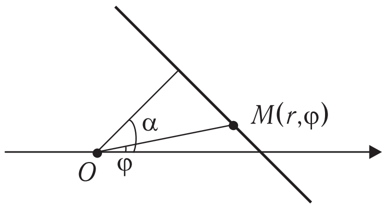

Рис. 17.4

Величина $|p|$ равна расстоянию от полюса до прямой, то есть длине перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую, а угол $\alpha$ – угол наклона этого перпендикуляра к полярной оси.

Прямую, проходящую через начало координат и не параллельную оси $OY$, можно задать уравнением $y = kx$. В полярной системе эту прямую можно задать как лучи $\varphi = \operatorname{arctg} k$ и $\varphi = \operatorname{arctg} k + \pi$. Уравнение $r = \dfrac{p}{\sin\varphi}$ описывает прямую $y = p$, параллельную оси $OX$, а уравнение $r = \dfrac{p}{\cos\varphi}$ – прямую $x = p$, параллельную оси $OY$.

**17.5.** Запишите уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в полярной системе координат, приняв его фокальную ось за полярную и поместив полюс в правом фокусе эллипса.

*Решение.* Выберем декартову систему координат следующим образом: ось $OX$ направим по фокальной оси эллипса, а начало координат поместим в правый фокус эллипса.

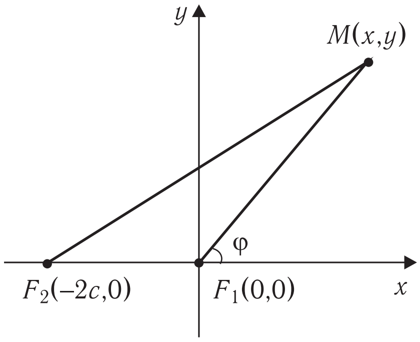


Рис. 17.5

Если расстояние между фокусами равно $2c$, то фокусы будут находиться в точках $F_2(-2c;0)$ и $F_1(0;0)$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$\mathbf{MF_2} + \mathbf{MF_1} = 2a, \quad (a = \text{const}).$$

Обозначим $r_2 = \mathbf{MF_2}$, $r_1 = \mathbf{MF_1}$. Находим

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+2c)^2 + y^2, \quad r_1^2 - r_2^2 = -4cx - 4c^2.$$

Так как $r_1 + r_2 = 2a$, то $(r_1 - r_2)2a = -4cx - 4c^2$. Для неизвестных $r_1$ и $r_2$ составляем систему уравнений

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = -2 \cdot \dfrac{c}{a} \cdot x - 2 \cdot \dfrac{c^2}{a}. \end{cases}$$

Поскольку $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ – эксцентриситет эллипса, то

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = -2\varepsilon x - 2c\varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда находим $r_1 = a - \varepsilon x - \varepsilon c$. При данном выборе полярной системы координат имеем $r_1 = r$, $x = r\cos\varphi$. Поэтому

$$r = a - \varepsilon r\cos\varphi - \varepsilon c.$$

Отсюда

$$r = \frac{a - \varepsilon c}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Преобразуем выражение в числителе дроби:

$$a - \varepsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Обозначим $p = \dfrac{b^2}{a}$. Тогда полярное уравнение эллипса примет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Напомним, что для эллипса $\varepsilon < 1$.

**17.6.** Построить кривую $r = 2\cos 3\varphi$ и найти её уравнение в декартовых координатах.

*Решение.* Придадим углу $\varphi$, начиная с нуля, значения с шагом $\dfrac{\pi}{12}$ и вычислим соответствующие значения $r$. Полученные точки наносим на плоскость с заданной полярной сеткой и соединяем их плавной линией.

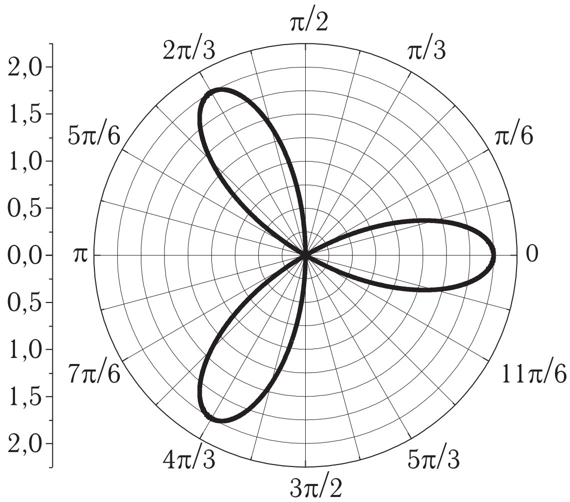


Рис. 17.6

Запишем уравнение $r = 2\cos 3\varphi$ в декартовой системе координат, выбранной ранее описанным способом. Используя формулы тригонометрии, можем записать, что

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 2\cos\varphi = \cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Следовательно, уравнение $r = 2\cos 3\varphi$ приводится к виду

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{3y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Находим искомое уравнение

$$(x^2+y^2)^2 = 2x(x^2-3y^2).$$

**17.7.** Построить кривую, заданную в декартовой системе координат уравнением $(x^2+y^2)^{3/2} = xy$, перейдя предварительно к полярной системе координат.

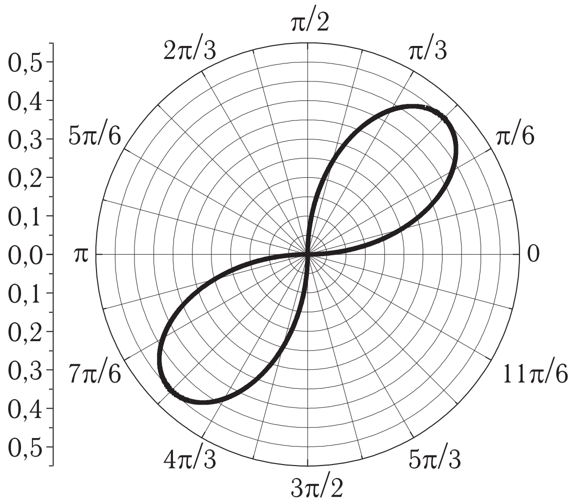


Рис. 17.7

*Решение.* Так как из уравнения кривой следует, что $xy \geq 0$, то все точки кривой расположены в первой и третьей четверти. Полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем $r^3 = r^2\cos\varphi\sin\varphi$

или $r = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$, причём $\varphi$ изменяется в промежутках $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, что соответствует первой и третьей четвертям.

Полученные точки наносим на плоскость с заданной полярной сеткой и соединяем их плавной линией (рис. 17.7).

### Задачи для самостоятельного решения

**17.8.** Постройте точки, заданные полярными координатами:

$$\left(3; \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(2; \frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(-2; \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(4; -\frac{\pi}{3}\right), \quad \left(1; \frac{3\pi}{2}\right).$$

**17.9.** Найдите декартовы координаты точек по известным полярным координатам: $M_1\left(8; \dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(4; -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

*Ответ:* $M_1\left(4; 4\sqrt{3}\right)$, $\quad M_2\left(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$.

**17.10.** Найдите расстояние между точками, заданными полярными координатами:

а) $M_1\left(3; \dfrac{11\pi}{18}\right)$ и $M_2\left(4; \dfrac{\pi}{9}\right)$; б) $P_1\left(5; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $P_2\left(8; \dfrac{5\pi}{6}\right)$;

в) $Q_1\left(9; \dfrac{\pi}{5}\right)$ и $Q_2\left(12; \dfrac{8\pi}{15}\right)$.

*Ответы:* а) 5, б) 3, в) $\sqrt{135}$.

**17.11.** Даны прямые своими уравнениями в декартовой системе координат:

а) $y = \sqrt{3}x$; б) $y = 4$; в) $x = 5$; г) $2x + 3y = 2$.

Запишите уравнения этих прямых в полярной системе координат.

*Ответы:* а) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$; б) $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$; в) $r = \dfrac{2}{2\cos\varphi + 3\sin\varphi}$; г) $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$.

**17.12.** Составьте в полярной системе координат уравнение гиперболы, приняв её фокальную ось за полярную и поместив полюс в правом фокусе гиперболы.

*Ответ:* $r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \ \ \varepsilon > 1.$

**17.13.** Составьте уравнение параболы в полярной системе координат, поместив полюс в её фокусе, и приняв её ось симметрии за полярную ось.

*Ответ:* $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}.$

**17.14.** Постройте кривые, заданные уравнениями в полярных координатах: а) $r = 2\cos 3\varphi$; б) $r = 3 + 2\cos\varphi$; в) $r = \sqrt[3]{\cos\varphi \sin^2\varphi}$; г) $r = 3\varphi$; д) $r = 2\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

**17.15.** Постройте кривые, уравнения которых заданы в декартовой системе координат, перейдя предварительно к полярной системе координат.

а) $(x^3 + y^3) = 3xy$; б) $x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2)$;
в) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$; г) $x^6 = 4(x^4 - y^4)$.

*Ответы:*

а) $r = \dfrac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$; б) $r^2 = \dfrac{2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$;

в) $r^2 = 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$; г) $r^2 = \dfrac{4\cos 2\varphi}{\cos^3\varphi}$.

## Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1971. – 328 с.

2. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980. – 176 с.

3. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. – М.: АЙРИС, 1996. – 288 с.

4. Головина М.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения / М.И. Головина. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

5. Горбанёв Н.Н. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия / Н.Н. Горбанёв, А.А. Ельцов, Л.И.Магазинников. – Томск: Томкий гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2001. – 164 с.

6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан. – Харьков: Харьковский государственный университет, 1965. – 575 с.

7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.

8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.

9. Магазинников Л.И., Горбанёв Н.Н. Линейная алгебра / Л.И. Магазинников, Н.Н. Горбанёв. – Томск: Томская академия систем управления и радиоэлектроники, 1993. – 182 с.

Учебное издание

**Магазинников** Леонид Иосифович,
**Магазинникова** Анна Леонидовна

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Корректор Л.И. Кирпиченко

Подписано в печать 22.09.2007.
Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX
с использованием кириллических шрифтов.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,82. Уч.-изд. л. 7,57. Тираж 100.

---

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. 8(3822)533018.