

ТУСУР



Томский государственный
Университет
Систем
Управления и
Радиоэлектроники



**В.А. Замотринский, Ж.М. Соколова,
Е.В. Падусова, Л.И. Шангина**

Электромагнитные поля и волны

**В.А. Замотринский, Ж.М. Соколова,
Е.В. Падусова, Л.И. Шангина**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным отделением учебно-методического объединения высших учебных заведений РФ по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 210300 «Радиотехника» и 210400 «Телекоммуникации»

ТОМСК

2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники

**В.А. Замотринский, Ж.М. Соколова,
Е.В. Падусова, Л.И. Шангина**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

по практическим занятиям по дисциплинам «Электромагнитные
поля и волны», Электродинамика и распространение радиоволн»
для направлений подготовки Радиотехника –210300 и
Телекоммуникации – 210400

ТОМСК

2012

УДК 537.811+621.371

ББК 22.336+34.206.34

Э45

Рецензенты:

д-р физ. мат. наук проф. Томск, гос. ун-та В.Л. Якубов,
д-р техн. наук проф. Ин-та мониторинга климатич.
и экологич. систем СОРАН А.А. Тихомиров,
зав каф. радиопроизводства Красноярского ГТУ
канд. техн. наук Ю.П. Саломатов

Электромагнитные поля и волны: учеб, пособие / Замотринский В.А.,
Соколова Ж.М., Падусова Е.В., Шангина Л.И. –Томск: Томск, гос.ун-т
систем упр.и радиоэлектроники, 2012. — 188 с.

ISBN 5-86889-318-2

Излагается кратко теория электромагнитных полей и волн: уравнения Максвелла, электростатические поля, электромагнитное поле постоянных токов, плоские электромагнитные волны, поведение векторов электромагнитного поля на границе раздела двух сред, элементарные излучатели волн в ближней и дальней зонах, поля и волны в волноводных передающих линиях. Представлены решения типовых задач статических зарядов, постоянных и переменных полей.

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по дисциплинам «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн», для студентов, обучающихся по направлениям подготовки Радиотехника – 210300, Телекоммуникации – 210400 и по специальностям Физика и техника оптической связи – 210401, Радиотехника – 210302, Бытовая радиоэлектронная аппаратура – 210303, Радиоэлектронные системы - 210304, Аудиовизуальная техника – 210312, Защищенные системы связи – 210403 очной, заочной, очно-заочной форм обучения.

ISBN 5-86889-318-2

© Замотринский В.А., Соколова Ж.М.,
Падусова Е.В., Шангина Л.И., 2012

© Томск, гос. ун-т систем упр
и радиоэлектроники, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Список условных обозначений.....	6
1. Уравнения Максвелла.....	8
1.1 Уравнения максвелла в интегральной и дифференциальной формах.....	8
1.2 Материальные уравнения, граничные условия и энергия ЭМП.....	9
1.3 Примеры решения типовых задач.....	11
1.4 Задачи для самостоятельного решения.....	29
2. Электростатические поля.....	37
2.1. Электростатический потенциал. Уравнения для потенциала. Поля, создаваемые заряженными телами.....	37
2.2 Энергия электростатического поля. Емкость. Силы в электростатическом поле.....	39
2.3.Примеры расчета электростатических полей.....	40
2.4. Задачи для самостоятельного решения.....	55
3. Электромагнитное поле постоянных токов.....	62
3.1. Электрическое поле постоянного тока.....	62
3.2 Магнитное поле постоянного тока.....	64
3.3 Энергия магнитного поля постоянного тока.....	66
3.4 Индуктивность и взаимная индуктивность.....	67
3.5 Примеры решения типовых задач.....	68
3.6. Задачи для самостоятельного решения.....	78
4. Плоские электромагнитные волны.....	82
4.1. Плоские волны в безграничных средах.....	82
4.1.1 Примеры решения типовых задач.....	88
4.2. Отражение и преломление плоских волн от плоской границы раздела двух сред.....	97

4.2.1. Примеры решения типовых задач.....	101
4.3 Задачи для самостоятельного решения.....	107
5. Излучение электромагнитных волн элементарными излучателями	110
5.1. Краткие теоретические сведения.....	110
5.2 Примеры решения типовых задач	115
5.3 Задачи для самостоятельного решения.....	126
6. Электромагнитные поля в волноводах	129
6.1 Краткие теоретические сведения.....	129
6.2 Примеры решения типовых задач	136
6.3. Задачи для самостоятельного решения.....	152
Приложение 1. Элементы векторного анализа	157
Приложение 2. Метод разделения переменных в электростатике	169
Литература	180

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающимся по образовательным направлениям «Радиотехника» и «Телекоммуникация», и содержит материал по шести основным разделам дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

В каждом разделе кратко изложены вопросы теории, необходимые для решения задач и приведены решения типовых задач. Предлагается также значительное количество задач для самостоятельного решения. Условия задач иллюстрируются рисунками, поясняющими выбор системы координат, размеров и прочей необходимой информации.

В приложении 1, в качестве справочного материала, приведены основные формулы и операции векторного анализа. Векторный анализ является «математическим языком» электродинамики и поэтому умение свободно им пользоваться является необходимым при изучении этой дисциплины.

В разделе «Приложение 2» приведена задача о нахождении потенциала между двумя изолированными электродами, заполненными неоднородной средой, решение которой выполняется методом разделения переменных, а результат представлен в виде бесконечных рядов. Она рассчитана на любознательных студентов и полезна ввиду своей информативности.

Задачи, приведенные в пособии, частично заимствованы из различных учебных пособий и монографий, а в основном разработаны преподавателями кафедры. Для усвоения материала требуются знания основ высшей математики и общей физики в объемах, читаемых в вузах.

Разделы: уравнения Максвелла и электромагнитное поле постоянных токов написаны к.т.н., доц. Шангиной Л.И., электростатика – к.т. н., доц. Падусовой Е.В., плоские электромагнитные волны, излучение электромагнитных волн элементарными излучателями написаны к.ф.м.н., доц. Замотринским В.А., поля в волноводах и приложение 2 – доц. Соколовой Ж.М., приложение 1 - к.ф.м.н., доц. Замотринским В.А., к.т.н., доц. Шангиной Л.И., в оформлении пособия активное участие принимал студент гр. 152, ТУСУР Ноздреватых Б.Ф.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- A - работа, Дж
 \vec{B} - магнитная индукция, Тл ($\text{Вб}/\text{м}^2$)
 C - емкость, Ф
 c - скорость света в вакууме, $c=3 \cdot 10^8$ м/с
 \vec{D} - электрическое смещение (электрическая индукция), Кл/м²
 \vec{E} - напряженность электрического поля, В/м
 e - заряд электрона, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
 \vec{F} - сила, Н
 $f, (\omega)$ - рабочая частота, Гц, (круговая частота, рад/с)
 \vec{H} - напряженность магнитного поля, А/м
 I - электрический ток, А
 J, j, j_s - плотность электрического тока, плотность поверхностного тока, А/м²
 k, \vec{k} - волновое число, волновой вектор, 1/м
 L, M - индуктивность и взаимная индуктивность, Гн
 m - масса электрона, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
 \vec{M} - вектор намагниченности среды, Тл ($\text{Вб}/\text{м}^2$)
 n - показатель преломления среды
 \vec{p} - импульс частицы, кг·м/с
 \vec{P}_e - дипольный момент, Кл·м
 P, P_T - мощность и мощность тепловых потерь, Вт
 \vec{P} - вектор поляризации среды, Кл/м²
 q - величина электрического заряда, Кл
 \vec{r} - радиус-вектор точки
 φ, U - электрические потенциал и напряжение, В
 ϑ, v_φ фазовая скорость распространения электромагнитной волны в среде, м/с
 $v_{гр}$ - групповая скорость, м/с

- W, W_E, W_M - энергия, электрическая энергия, магнитная энергия ЭМП, Дж
 w - объемная плотность энергии электромагнитной поля, Дж/м³
 Z_C - характеристическое (волновое) сопротивление среды, Ом
 W_0 - характеристическое (волновое) сопротивление вакуума, $W_0 = 120\pi$ Ом
 $\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0$ - орты декартовой системы координат
 $\bar{r}^0, \bar{\alpha}^0, \bar{z}^0$ - орты цилиндрической системы координат
 $\bar{r}^0, \bar{\theta}^0, \bar{\alpha}^0$ - орты сферической системы координат
 α - коэффициент затухания (потерь) в среде, 1/м
 β - фазовая постоянная распространения волны, 1/м
 γ - постоянная распространения волны, 1/м ($\gamma = \beta + i\alpha$)
 Δ - угол потерь
 δ - глубина проникновения электромагнитного поля, м
 ϵ - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м
 ϵ_r - относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$
 ϵ_0 диэлектрическая проницаемость вакуума, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8,85 \cdot 10^{-12}$
 Ф/м
 $\hat{\epsilon}$ тензор абсолютной диэлектрической проницаемости среды, Ф/м
 σ - удельная проводимость среды, См/м
 μ_0 - магнитная проницаемость вакуума, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
 μ, μ_r - абсолютная, Гн/м, и относительная, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$, магнитная проницаемость
 χ_m, χ_e - магнитная и- электрическая восприимчивости среды
 ρ, ξ, τ - объемная, поверхностная, линейная плотности электрического заряда, соответственно Кл/м³, Кл/м², Кл/м
 Φ, Ψ_{IK} - магнитный поток и потокосцепление, Вб
 $\lambda, (\lambda_0)$ длина волны в среде (вакууме), м

\vec{P} - вектор Пойнтинга, Вт/м²
ЭДС, Э - электродвижущая сила, В

1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В данном разделе рассматриваются темы:

1. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.
Материальные уравнения
2. Граничные условия. Основные следствия из уравнений Максвелла.
3. Связь между векторами электромагнитного поля.
4. Определение ЭДС в контуре. Расчет электромагнитной энергии.

1.1. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Закон полного тока (первое уравнение Максвелла)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (1.1)$$

где $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ - полный ток, пронизывающий площадку, опирающуюся на контур

L. Закон электромагнитной индукции

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.2)$$

где $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ - поток вектора магнитной индукции, пронизывающий площадку S. Тогда, второе уравнение Максвелла запишется в виде:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.3)$$

Постулат Максвелла (третье уравнение Максвелла)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (1.4)$$

где q - заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности S.

Закон непрерывности линий магнитной индукции (четвертое уравнение)

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.5)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (1.6a)$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.6b)$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.6б)$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.6г)$

Плотность полного тока представляет сумму плотностей четырех токов

$$\vec{j} = \vec{j}_{см} + \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{пер} + \vec{j}_{ст} \quad (1.7)$$

Выражения каждого из токов приведены в таблице ниже

В каждой конкретной задаче присутствует один или несколько токов, соответствующих условиям задачи.

1.2. Материальные уравнения, граничные условия и энергия ЭМП

Связь векторов поля в некоторой материальной среде представляется материальными уравнениями:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (1.8)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.9)$$

Здесь \vec{M} - вектор намагниченности, $\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$, Тл, (1.10)

\vec{P} - вектор поляризации среды, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_э \vec{E}$, Кл/м², (1.11)

где $\chi_m = \mu_r - 1$ магнитная восприимчивость и $\chi_э = \epsilon_r - 1$ – электрическая восприим-

$\vec{j}_{см}$	$\vec{j}_{пр}$	$\vec{j}_{пер}$	$\vec{j}_{ст}$
плотность тока смещения	плотность тока проводимости	плотность тока переноса	плотность сто- ронного тока
$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E}$	$\vec{j}_{пер} = \rho \vec{v}$	первичный ис- точник поля

чивость.

Вектор плотности тока проводимости связан с вектором напряженности электрического поля законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E}. \quad (1.12)$$

Каждая среда характеризуется относительными проницаемостями – магнитной (μ_r) и электрической (ϵ_r) и абсолютной удельной проводимостью σ .

Материальные среды по своим свойствам делятся на однородные и неоднородные, линейные и нелинейные, изотропные и анизотропные.

Неоднородными являются среды, в которых параметры μ , ϵ , и σ являются функциями координат. Нелинейными являются среды, в которых параметры μ , ϵ , и σ являются функциями самих полей. Анизотропные среды отличаются от изотропных тем, что они в разных направлениях обнаруживают различные свойства. Для таких сред μ , ϵ , и σ могут быть представлены в виде тензора. Тензор представляет матрицу, состоящую из 9 независимых элементов. Материальные уравнения в этом случае приобретают вид:

$$\vec{D} = \|\epsilon\| \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \|\mu\| \cdot \vec{H}, \quad \vec{J}_{\text{пр}} = \|\sigma\| \cdot \vec{E}. \quad (1.13)$$

Переход от уравнений Максвелла в интегральной форме к уравнениям в дифференциальной форме осуществляется с помощью теорем

Остроградского - Гаусса (П1.19)

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (1.14)$$

и Стокса (П1.26)

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}, \quad (1.15)$$

где вектором \vec{A} может быть любой из 4 векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} .

Уравнения Максвелла имеют единственное решение, соответствующее поставленной задаче, только в том случае, когда они подчинены граничным и начальным условиям. Граница может проходить между двумя диэлектриками: граница диэлектрик – диэлектрик (Д-Д) и между диэлектриком и металлом граница диэлектрик – металл (Д-М). Граничные условия непосредственно следуют из уравнений Максвелла и определяют поведение векторов поля на границе раздела двух сред.

В таблице приведены граничные условия в векторной форме и для нормальных и тангенциальных к границам составляющих полей.

Векторная форма граничных условий	Д-Д (1.16)	Д-М (1.17)
$\vec{n}^0(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \xi_s;$ $[\vec{n}^0(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = 0;$ $\vec{n}^0(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0;$ $[\vec{n}^0(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = \vec{J}_s$	$D_{1n} - D_{2n} = \xi_s;$ $E_{1\tau} = E_{2\tau};$ $B_{1n} = B_{2n};$ $H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_s$	$D_n = 0;$ $E_\tau = 0;$ $B_{1n} = 0;$ $H_\tau = j_s;$

Примечание. Векторы электромагнитного поля могут быть выражены друг через друга только в том случае, если каждое из них в отдельности удовлетворяет системе уравнений Максвелла.

Удельная энергия электрического или магнитного поля определяются соотношениями

$$w_H = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu \mu_0}, \quad w_E = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \cdot \epsilon_0}.$$

Интегрирование по объему дает полную энергию электрического или магнитного поля

$$W_E = \int_V w_E dV, \quad W_H = \int_V w_H dV.$$

1.3 Примеры решения типовых задач

Задача №1

По прямолинейному круглому проводнику радиуса R протекает ток силой I . Найти выражения, определяющие напряженность магнитного поля внутри проводника (область 1, $0 \leq r \leq R$) и вне проводника (область 2: $-R \leq r \leq \infty$).

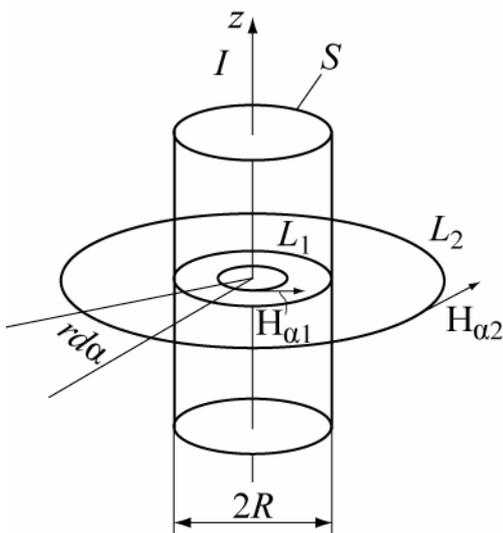


Рис.1.1

По построению графика зависимости $H(r)$. Определить значения H при следующих данных: радиус проводника $R=1$ см, величина тока $I = 1$ А, $r_1 = 0,5$ см и $r_2 = 1$ м.

Построить график зависимости $H(r)$. Определить значения H при следующих данных: радиус проводника $R=1$ см, величина тока $I = 1$ А, $r_1 = 0,5$ см и $r_2 = 1$ м.

Решение. Для решения этой задачи используется первое уравнение Максвелла в интегральной форме, т.е. закон полного тока (1.1).

Формулировка этого закона утверждает, что циркуляции вектора \vec{H} по контуру L определяется величиной полного тока, охватываемого этим замкнутым контуром, как показано на рис. 1.1. Так как элемент длины контура в цилиндрической системе координат равен $d\vec{\ell}_a = \vec{\alpha}^0 r d\alpha$, то

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} H_\alpha r d\alpha = H_\alpha \cdot 2\pi r = I,$$

В области 2 контур L_2 охватывает полный ток I , поэтому

$$H_{\alpha 2} = \frac{I}{2\pi r}; \quad (1.18)$$

Определим величину тока в области 1 (внутри проводника), охватываемой контуром L_1 , исходя из постоянства плотности тока по сечению. Приравнявая значение плотности полного тока в пределах всей площади πR^2 , равное

$j = \frac{I}{\pi R^2}$, и плотности тока на любом сечении с радиусом проводника r

($j = \frac{I_1}{\pi r^2}$), получим значение тока в любой точке для первой области $I_1 = \frac{I r^2}{R^2}$.

Напряженность магнитного поля в первой области будет равна

$$H_{\alpha 1} = \frac{I r}{2\pi R^2}. \quad (1.19)$$

График зависимости $H(r)$ представлен на рис. 1.2.

Результат численного расчёта дает: $H_1 = 8$ А/м, $H_2 = 0,16$ А/м.

Решение этой задачи позволяет получить решения для следующих вариантов:

1. Если направление тока в проводе заменить на противоположное, чему равна напряженность магнитного поля?

2. Как изменится величина напряженности магнитного поля во внешней области, если провод заменить

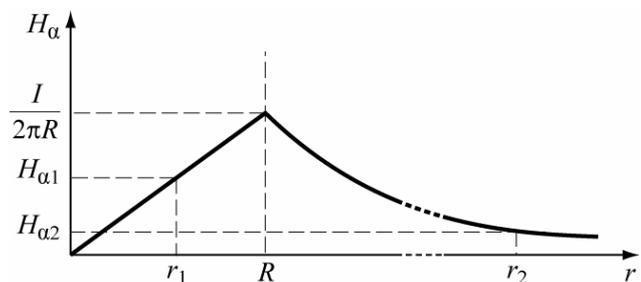


Рис.1.2

полым цилиндром с внутренним радиусом равным $R/2$, а ток оставить неизменным? Чему будет в этом случае напряженность магнитного поля в области $0 \div R/2$?

Задача №2

Между полюсами электромагнита, создающего в зазоре индукцию

$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t$, помещена круглая рамка, площадь которой S_1 ($S_1 = \pi \cdot a^2$, где a – радиус рамки) много меньше площади полюсов электромагнита S и L – периметр рамки (рис. 1.3). Определить напряженность электрического поля, циркулирующую вдоль рамки и электродвижущую силу \mathcal{E} , наведённую в контуре, если частота генератора $f = 400$ Гц, амплитуда напряженности переменного магнитного поля $B_0 = 1$ Тл, $a = 0,5$ см? Справка: $\mathcal{E} = E_\ell L$.

Как изменятся \vec{E} и \mathcal{E} , если рамку повернуть на угол $\alpha = 60^\circ$ относительно первоначального положения? Диэлектрик – воздух.

Решение. Для решения этой задачи используется закон электромагнитной индукции. (второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1.3)).

По условиям задачи, поток вектора индукции, пронизывающий рамку, можно считать однородным и определяемым в виде $\Phi = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} = B_n S_1 \cos \alpha$.

Здесь B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к поверхности S_1 . Согласно закону электромагнитной индукции, циркуляция вектора \vec{E} по замкнутому контуру равна скорости изменения этого потока $\partial\Phi/\partial t$, пронизывающего площадку S_1 . Запишем эти утверждения

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = E_\ell \cdot L = E_\ell 2\pi a = -\frac{\partial(B_0 \pi a^2 \cos \omega t)}{\partial t} = B_0 \pi a^2 \omega \cdot \sin \omega t. \quad (1.20)$$

При перпендикулярной ориентации рамки по отношению к вектору \vec{B} , т.е. когда угол $\alpha = 0$, наведённая \mathcal{E} в контуре определяется выражением

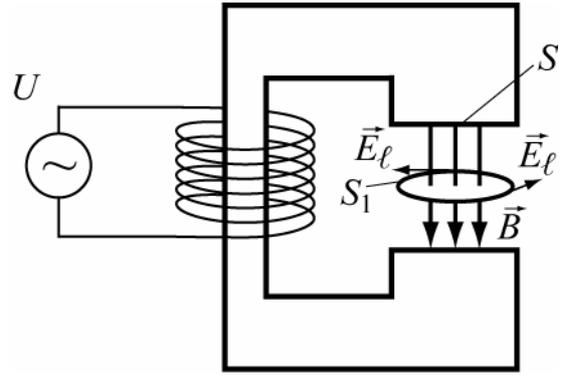


Рис.1.3

$$\mathcal{E} = \pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t).$$

Подставив заданные величины, получим

$$\mathcal{E} = 1 \cdot (3,14) \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 400 \sin(2\pi \cdot 400 t) = 0,0314 \sin(2\pi \cdot 400 t) \text{ В}.$$

Откуда максимальная (амплитудная) величина \mathcal{E} равна $\mathcal{E}_{\text{макс}} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ В}$

Напряженность электрического поля, циркулирующая вдоль рамки E_e , равна отношению \mathcal{E} к периметру рамки L

$$E_e = \mathcal{E} / L = \mathcal{E} / 2\pi a = 1 \cdot (3,14) \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 400 \sin(2\pi \cdot 400 t) / (2\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}) = 0,25 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t), \text{ В/м}$$

При повороте плоскости рамки на угол α относительно магнитного поля, \vec{E} и \mathcal{E} уменьшаются в $\cos\alpha$ раз.

Ответ: 1) Максимальная \mathcal{E} , наводимая в контуре при перпендикулярной ориентации рамки к вектору \vec{B}_0 и напряженность электрического поля соответственно равны $\mathcal{E}_{\text{макс}1} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ В}$ и $E_{\text{макс}e} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}$.

2) при повороте рамки на угол α максимальная \mathcal{E} и напряженность электрического поля $\mathcal{E}_{\text{макс}2} = 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ В}$, $E_{\text{макс}e} = 1,25 \text{ мВ/м}$.

Задача №3

Положительный заряд с объёмной плотностью $\rho = 10^{-3} \text{ Кл/м}^3$ равномерно распределён в сферическом объёме радиуса $R = 1 \text{ см}$. (Рис. 1.4) Найти вектор электрического смещения \vec{D} и вектор напряженности электрического поля \vec{E} в областях: 1. ($0 \leq r \leq R$) и 2. ($R \leq r \leq \infty$). Диэлектрик-воздух. Построить график зависимости $\vec{D}(r)$. Дать численный результат при: $r_1 = 0,2 \text{ см}$, $r_2 = 1 \text{ м}$.

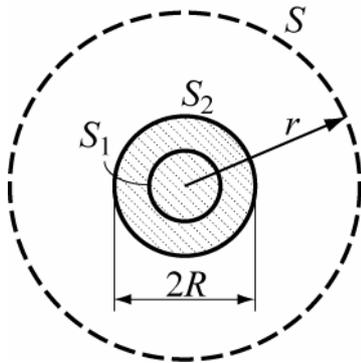


Рис.1.4

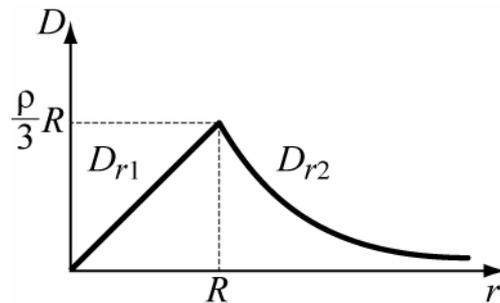


Рис.1.5

Решение. Исходной формулой для решения этой задачи является третье уравнение Максвелла (1.4). Так как вектор \vec{D} распределен по поверхности равномерно, то $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_r S = q$. Следовательно:

1. Для первой области ($0 \leq r \leq R$) при $S = 4\pi r^2$ получим $q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$,

$$D_{r1} = \frac{\rho}{3} r = 2/3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2, \quad E_{r1} = \frac{D_{r1}}{\epsilon_0}. \quad (1.21)$$

2. Для второй области ($R \leq r \leq \infty$) $q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$.

$$D_{r2} = \frac{\rho R^3}{3 r^2} = 1/3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2, \quad E_{r2} = \frac{D_{r2}}{\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

Меняя r в пределах $0 \leq r \leq \infty$, построим график зависимости $\vec{D}(r)$, показанный на рис. 1.5.

Самостоятельно можно ответить на вопросы :

1. Что произойдет с векторами \vec{E}_2 и \vec{D}_2 , если в объёме, вместо распределённого заряда будет находиться сосредоточенный заряд q , причём в произвольной точке?

2. Чему будут равны вектора \vec{E}_1 , \vec{D}_1 в точке $r=0$, если объёмный заряд распределён в слое $0,5R \leq r \leq R$?

Задача №4

Доказать, что вектор магнитной индукции

$\vec{B} = \alpha^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ удовлетворяет 4-му уравнению Максвелла в интегральной форме (1.5), т.е. линии вектора \vec{B} непрерывны (рис 1.6).

Решение. Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ по поверхности симметричной (относительно оси z) объёмной фигуры, построенной вокруг проводника с током и замкну-

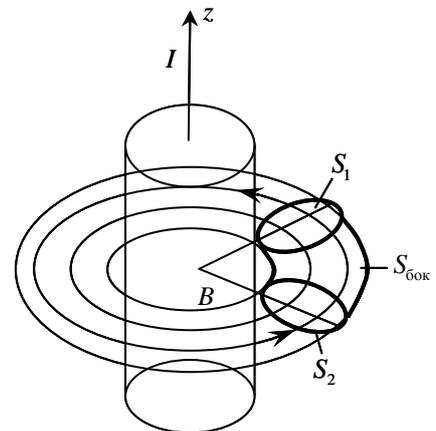


Рис.1.6

той по координате α . Часть этой фигуры, в виде искривленного цилиндра, показана на рисунке 1.6. Полный поток вектора магнитной индукции через этот выделенный объём можно представить в виде трех потоков: через одно S_2 и другое S_1 сечение и боковую поверхность $S_{бок}$. Запишем вектор $d\vec{S}$ в виде суммы трех слагаемых: $\vec{\alpha}^0 ds_1 - \vec{\alpha}^0 ds_2 + \vec{r}^0 ds_{бок}$. Подставим в под интегральное выражение векторы \vec{B} и $d\vec{S}$, получим:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S \vec{\alpha}^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} d\vec{S} = \oint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\vec{\alpha}^0 \vec{\alpha}^0 ds_1 - \vec{\alpha}^0 \vec{\alpha}^0 ds_2 + \vec{\alpha}^0 \vec{r}^0 ds_{бок}) = 0.$$

Здесь $\vec{\alpha}^0 \vec{\alpha}^0 s_1 - \vec{\alpha}^0 \vec{\alpha}^0 s_2 = 0$, так как $s_1 = s_2$, а нормали к площадкам противоположно направлены, и скалярное произведение двух ортогональных векторов равно нулю ($\vec{\alpha}^0 \vec{r}^0 = 0$). Поэтому для замкнутой фигуры получаем $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Задача №5

Определить $\text{rot} \vec{H}$ для магнитных полей, полученных в первой задаче в виде формул (1.18) и (1.19). $H_{\alpha 2} = \frac{I}{2\pi r}$ и $H_{\alpha 1} = \frac{I r}{2\pi R^2}$. Решать в цилиндрической системе координат.

Решение. Так как заданные магнитные поля имеют только составляющие по координате α , то в третьей строке определителя (П1.24) будет отличен от нуля только один член rH_{α} . Подставим в определитель $\text{rot} H_1$ задан-

ное значение $H_{\alpha 1}$:

$$\text{rot} \vec{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \vec{r}^0 & \vec{\alpha}^0 & \frac{1}{z} \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rH_{\alpha} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \vec{r}^0 & \vec{\alpha}^0 & \frac{1}{z} \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot r & 0 \end{bmatrix} \cdot (I/2\pi R^2).$$

Раскрывая определитель, получаем (для области внутри проводника) только z - составляющую плотности тока, т.е.

$$\text{rot} \vec{H}_1 = \frac{1}{r} \vec{z}^0 \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2 I}{2\pi R^2} \right)}{\partial r} \right) = \vec{z}^0 \frac{I}{\pi R^2} = \vec{z}^0 j, \frac{A}{M^2}.$$

Аналогично найдем $\text{rot} H_2$,

подставляя известное значение $H_{\alpha 2}$ для области вне проводника

$$\operatorname{rot} \vec{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \bar{r}^\circ & \bar{\alpha}^\circ & \frac{1}{r} \bar{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r H_\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \bar{r}^\circ & \bar{\alpha}^\circ & \frac{1}{r} \bar{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \cdot \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \cdot (I/2\pi).$$

Раскрывая этот определитель, получим все составляющие равными нулю, т.е. $\operatorname{rot} \vec{H}_2 = 0$.

Вывод: Хотя магнитное поле существует как внутри проводника, так и вне его, но внутри проводника $\operatorname{rot} \vec{H}_1 \neq 0$, а вне - $\operatorname{rot} \vec{H}_2 = 0$. Почему? Попробуйте объяснить сами.

Задача №6

Определить дивергенцию векторов \vec{D} (в сферической системе координат), полученных в задаче №3 в виде формул (1.21) и (1.22).

Решение. Вектор электрической индукции \vec{D} (задача №3) задан только составляющей вдоль радиуса сферической системы координат:

- для первой области ($0 \leq r \leq R$), $D_{r1} = \frac{\rho}{3} r$,
- для второй области ($R \leq r \leq \infty$) $D_{r2} = \frac{\rho R^3}{3 r^2}$.

Используем выражение дивергенции в сферической системе координат (П1.17) и учитывая, что вектор \vec{D} зависит только от координаты r , получим :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(D_r r^2)}{\partial r}.$$

Подставляя известные выражения D_r и D_2 , будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{D}_1 = \frac{1}{r^2} \frac{d(\frac{\rho r}{3} r^2)}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d(\frac{\rho r^3}{3})}{dr} = \rho \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{D}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d(\frac{\rho R^3}{3 r^2} r^2)}{dr} = 0.$$

Вывод: $\operatorname{div} \vec{D}_1 = \rho$, $\operatorname{div} \vec{D}_2 = 0$.

Постарайтесь ответить на вопрос почему же дивергенция вектора \vec{D}_2 равна нулю, а дивергенция вектора \vec{D}_1 не равна 0?

Задача №7

Может ли вектор $\vec{B} = B_0(\vec{x}^0 5x + \vec{y}^0 y)$ быть вектором магнитной индукции?

Решение. Заданный вектор может быть вектором магнитной индукции только в случае, если он будет удовлетворять уравнению непрерывности (1.5)

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = 6$, то заданный вектор не может быть вектором магнитной индукции.

Задача №8

Относительная диэлектрическая проницаемость среды изотропного диэлектрика равна $\epsilon_r = 4$. Чему равна электрическая восприимчивость?

Решение. Электрическая восприимчивость (1.11) определяется из равенства $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$, следовательно $\chi_e = 4 - 1 = 3$.

Задача №9

Напряженность магнитного поля в среде, обладающей $\mu_r = 102$, $H = 0,1$ А/м. Чему равен вектор намагниченности среды \vec{M} ?

Решение. Согласно (1.10), магнитная восприимчивость среды определяется как $\chi_m = \mu_r - 1 = 102 - 1 = 101$, а намагниченность среды \vec{M} равна

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 101 \cdot 0,1 = 126,8 \cdot 10^{-7} \text{ Тл.}$$

Вспомните, в каких средах вектор намагниченности больше нуля, меньше нуля и равен нулю?

Задача №10

Анизотропный диэлектрик имеет диэлектрическую проницаемость

$$\|\epsilon\| = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

К нему приложено электрическое поле $\vec{E} = \vec{x}^0 E_x + \vec{z}^0 E_z$.

Найдите выражение для вектора электрического смещения \vec{D} . Определите угол между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Решение. Так как диэлектрик имеет анизотропную диэлектрическую проницаемость, то вектор электрического смещения \vec{D} будет определен следующим выражением.

$$\vec{D} = \|\epsilon\| \vec{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}$$

Перемножая строку на столбец, получим проекции вектора смещения: $D_x = \epsilon_1 E_x$, $D_y = \alpha E_x$, $D_z = \epsilon_0 E_z$.

Из них составим вектор смещения \vec{D}

$$\vec{D} = \bar{x}^0 \epsilon_1 E_x + \bar{y}^0 \alpha E_x + \bar{z}^0 \epsilon_0 E_z.$$

Для определения угла между векторами \vec{D} и \vec{E} запишем скалярное произведение векторов

$$(\vec{D} \vec{E}) = D_x E_x + D_z E_z = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \cos(\vec{D} \vec{E}), \text{ откуда}$$

$$\angle(\vec{D} \vec{E}) = \arccos \left(\frac{D_x E_x + D_z E_z}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \cdot \sqrt{E_x^2 + E_z^2}} \right).$$

Задача №11

Два диэлектрика, обладающие относительными диэлектрическими проницаемостями ϵ_{r1} и ϵ_{r2} имеют плоскую границу раздела (рис. 1.7).

Вектор \vec{E} электрического поля в первой среде образует угол θ_1 с осью z . Найти вектора \vec{E} и \vec{D} во второй среде и угол преломления θ_2 . Численный ответ привести для $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=4$, $E_1=1$ В/м, $\theta_1=30^\circ$.

Решение. 1. Найдем вектора \vec{E} и \vec{D} во второй среде. Запишем для первой среды общее выражение напряженности электрического поля $\vec{E}_1 = \sqrt{E_{t1}^2 + E_{n1}^2}$ и вектора электрической индукции $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$, где $E_{t1} = E_1 \sin \theta_1$, $E_{n1} = E_1 \cos \theta_1$.

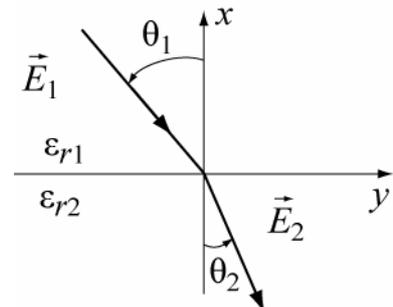


Рис.1.7

Для второй среды - $\vec{E}_2 = \sqrt{E_{\tau 2}^2 + E_{n 2}^2}$, $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$.

Воспользуемся граничными условиями (1.16): $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, $D_{n 1} = D_{n 2}$.

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля второй среды легко определяется первым выражением, нормальная составляющая определяется из второго выражения и материального уравнения (1.9), т.е. $\epsilon_{r 1} E_{n 1} = \epsilon_{r 2} E_{n 2}$, откуда $E_{n 2} = (\epsilon_{r 1} / \epsilon_{r 2}) E_{n 1}$.

Подставляя заданные величины, получим

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} = E_1 \sin \theta_1 = 0,5 \text{ В/м}, \quad E_{n 1} = E_1 \cdot \cos \theta_1 = 0,87 \text{ В/м}.$$

$$E_{n 2} = (\epsilon_{r 1} / \epsilon_{r 2}) E_{n 1} = (\epsilon_{r 1} / \epsilon_{r 2}) E_1 \cdot \cos \theta_1, \quad E_{n 2} = 0,2275 \text{ В/м}.$$

Величина напряженности электрического поля во второй среде равна $E_2 = \sqrt{0,5^2 + 0,22^2} = 0,546 \text{ В/м}$, тогда $D_2 = \epsilon_2 E_2 = 4 \cdot 0,546 = 2,184 \text{ Кл/м}^2$.

2. Найдем угол преломления θ_2 . Для этого [2], используя (1.16) составим систему уравнений

$$\begin{aligned} E_1 \sin \theta_1 &= E_2 \sin \theta_2, \\ \epsilon_{r 1} E_1 \cos \theta_1 &= \epsilon_{r 2} E_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $\epsilon_{r 2} \operatorname{tg} \theta_1 = \epsilon_{r 1} \operatorname{tg} \theta_2$, которое позволяет определить угол преломления θ_2

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\epsilon_{r 1}}{\epsilon_{r 2}} \operatorname{tg} \theta_1 = 66,6^\circ.$$

$$\text{Ответ: } E_2 = 0,546 \text{ В/м}, \quad D_2 = 2,184 \text{ Кл/м}^2, \quad \theta_2 = 66,6^\circ.$$

Посмотрите, что изменится в решении, если вторую среду заменить плоской металлической поверхностью?

Задача №12

Две полубесконечные магнитные среды, 1-ая изотропная и 2-ая анизотропная, имеют плоскую границу раздела, которая проходит через $y=0$, координатная поверхность zx (рис. 1.8). Проводимости сред равны нулю. В первой

среде существует магнитное поле $\vec{H} = \vec{x}^0 H_{x1} + \vec{y}^0 H_{y1}$.

Определить магнитное поле во второй среде.

Параметры сред:

$$\mu_1 = \mu_0; \|\mu_2\| = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$$

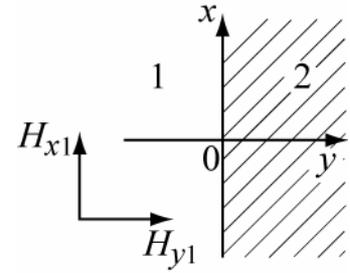


Рис.1.8

Решение. Согласно рис. 1.8 и граничным условиям (1.16), записываем связь между векторами первой и второй сред.

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \rightarrow H_{x1} = H_{x2}, \quad H_{z1} = H_{z2} = 0, \quad (1.23)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_0 H_{1y} = B_{2n} \quad (1.24)$$

Запишем вектора \vec{H} и \vec{B} для первой среды:

$$\vec{H}_1 = \vec{x}^0 H_{x1} + \vec{y}^0 H_{y1}, \quad \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = \vec{x}^0 \mu_0 H_{x1} + \vec{y}^0 \mu_0 H_{y1}.$$

Запишем выражение для вектора H_2 , составляющие которого надо определить из граничных условий: $\vec{H}_2 = \vec{x}^0 H_{x2} + \vec{y}^0 H_{y2} + \vec{z}^0 H_{z2}$. (1.25)

Так как во второй среде магнитная проницаемость представлена тензором, то вектор магнитной индукции для второй среды через материальное уравнение

(1.8) запишем в виде произведения двух матриц и перемножим их:

$$\vec{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \\ B_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2} \\ \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\vec{B}_2 = \vec{x}^0 (\mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2}) + \vec{y}^0 (\alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2}) = \vec{x}^0 (\mu_0 H_{x1} - \alpha H_{y2}) + \vec{y}^0 (\alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2}).$$

Вектор \vec{B}_2 будет полностью определен, если будут определены H_{x2} и H_{y2} . Но $H_{x2} = H_{x1}$ (равенство тангенциальных составляющих) и составляющая $B_{y2} = \alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2}$.

Приравняем составляющие (равенство нормальных компонент) $B_{y2} = B_{y1}$,

$$B_{y_2} = \alpha H_{x_1} + \mu_0 H_{y_2} = B_{1y} = \mu_0 H_{1y}. \quad (1.26)$$

Из (1.26) определим $H_{y_2} = H_{y_1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x_1}$.

Зная составляющие магнитного поля второй среды, запишем конечное выражение векторов \vec{H}_2 и \vec{B}_2 :

$$\vec{H}_2 = \vec{x}^0 H_{x_1} + \vec{y}^0 \left(H_{y_1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x_1} \right), \quad \vec{B}_2 = \vec{x}^0 \left(\frac{\mu_0^2 + \alpha^2}{\mu_0} H_{x_1} - \alpha H_{y_1} \right) + \vec{y}^0 \mu_0 H_{y_1}.$$

Подумайте, почему вектора \vec{H}_2 и \vec{B}_2 имеют только две проекции?

Задача №13

Доказать, что уравнение непрерывности плотности полного тока $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{полн}} = 0$ является следствием уравнения Максвелла.

Решение. Для доказательства достаточно провести операцию div над уравнением (1.6а): $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j}$. Так как операция $\operatorname{div} \operatorname{rot}$ есть тождественный нуль, то, $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, что и требовалось доказать.

Задача №14

Плотность полного тока в проводящей среде задана $\vec{j} = \vec{x}^0 x + \vec{y}^0 4y$.

Удовлетворяет ли данный ток уравнениям Максвелла?

Решение. Удовлетворяет, если $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Расчёт, однако, показывает, что $\operatorname{div} \vec{j} = 5$. Это означает, что заданное выражение плотности тока не удовлетворяет требованию непрерывности тока. Рассмотрите вариант, когда вектор $\vec{j} = \vec{x}^0 + \vec{y}^0 4$ не зависит от координат?

Задача №15

Докажите, что закон сохранения заряда является следствием закона непрерывности полного тока.

Решение. Закон сохранения заряда утверждает, что всякому изменению заряда в некотором объёме соответствует электрический ток, вытекающий в объём или вытекающий из него. Он является следствием закона непрерывности полного тока: $\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \vec{j}_{np} + \operatorname{div} (d\vec{D}/dt) = 0$. После подстановки постулата Мак-

свелла, интегрирования по объёму $\int \operatorname{div} j_{np} dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ и применения теоремы Остроградского-Гаусса (П1.19), это уравнение записывается в виде $\oint_S \vec{j}_{np} d\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = I_{np}$. То есть $I_{np} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$. Что и требовалось доказать.

Задача №16

Доказать, что в однородной проводящей среде не может существовать объемное распределение заряда, не зависящее от времени и найти эту зависимость.

Решение. В рассматриваемой среде существуют токи проводимости и смещения. Уравнение $\operatorname{div} \sigma \vec{E} + \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t} = 0$ является следствием первого уравнения Максвелла и с учетом (1.6) для однородной среды может быть записано $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$. Это дифференциальное уравнение после разделения переменных

и интегрирования имеет решение: $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$,
(1.27)

где ρ_0 – начальная величина заряда при $t=0$.

Из (1.27) следует, что плотность заряда в проводящей среде, независимо от напряженности поля \vec{E} убывает по экспоненциальному закону. Время, в течение которого заряд уменьшается в $e=2,78$ раз, называется временем релаксации. По формуле (1.27) можно определять время релаксации для разных сред.

Задача №17

Показать, что из дифференциальных уравнений Максвелла для диэлектрика в отсутствии свободных зарядов и сторонних источников получаются волновые уравнения для векторов электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} .

Решение. Используем систему уравнений Максвелла (1.6). Применим операцию rot к первому уравнению системы

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Используем соотношение (П1.37)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}. \quad (1.29)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, то $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H}$ тоже будет равно нулю.

Заменив в (1.28) $\operatorname{rot} \vec{E}$, уравнением (1.6) получим волновое уравнение для вектора магнитного поля \vec{H}

$$\nabla^2 \vec{H} = \Delta \vec{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.30)$$

Для вектора электрического поля волновое уравнение выводят аналогичным образом, полагая $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Получаем $\nabla^2 \vec{E} = \Delta \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. (1.31)

Задача №18

Докажите, что вектор \vec{E} , представленный выражением $\vec{E} = \vec{y}^0 E_{y_0} \cos(\omega t - kz)$ является решением волнового уравнения (1.31).

Решение. Так как вектор \vec{E} является функцией одной координаты z , оператор $\nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2}$ и волновое уравнение примет вид $\frac{d^2 E_y}{dz^2} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$

Взяв производные от вектора \vec{E} , убедитесь, что равенство левой и правой частей волнового уравнения выполняется при равенстве $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$.

Задача №19

В идеальной диэлектрике существует электромагнитное поле, заданное вектором электрического поля: $\vec{E} = \vec{z}_0 E_z(r) \cos \omega t$, явная зависимость которого от r неизвестна. Найти напряженность магнитного поля $H(r)$, соответствующего заданному вектору. Система координат цилиндрическая.

Решение. Векторы электромагнитного поля могут быть выражены друг через друга только в том случае, если каждое из них в отдельности удовлетворяет уравнениям Максвелла. Используем 2-е уравнение Максвелла

$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$. Раскроем определитель $\text{rot}\vec{E}$ для заданного вектора,

приравняем соответствующие проекции и выразим $H(r)$ через $E_z(r)$

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\bar{r}^0 & \bar{\alpha}^0 & \frac{1}{r}\bar{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z(r)\cos\omega t \end{bmatrix} = -\bar{\alpha}^0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \cos\omega t = -\mu \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Из выражения (1.32) видно, что магнитный вектор имеет только одну проекцию H_α $\vec{H} = \bar{\alpha}^\circ H_\alpha$.

Проинтегрировав по времени, получим

$$H_\alpha = \frac{1}{\mu\omega} \frac{\partial E_z(r)}{\partial r} \sin\omega t. \quad (1.33)$$

Составим уравнение для определения выражения $E_z(r)$, воспользовавшись

уравнением Максвелла (1.6) $\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial(E_z(r)\cos\omega t)}{\partial t} = -\bar{z}^\circ \epsilon \omega E_z(r)\sin\omega t$.

$$\text{В то же время } \text{rot}\vec{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\bar{r}^0 & \bar{\alpha}^0 & \frac{1}{r}\bar{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rH_\alpha & 0 \end{bmatrix} = \bar{z}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\alpha)}{\partial r}$$

$$\text{Откуда } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) = -\omega\epsilon E_z(r)\sin\omega t.$$

Исключим из этого уравнения H_α , подставив (1.33),

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{1}{\mu\omega} \frac{\partial E_z(r)}{\partial r} \right] \sin\omega t = \omega\epsilon E_z(r)\sin\omega t \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial^2 E_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r)}{\partial r} + k^2 E_z(r) = 0,$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$.

В результате мы получили уравнение Бесселя нулевого порядка, решением которого являются функции Бесселя нулевого порядка 1-го и 2-го рода:

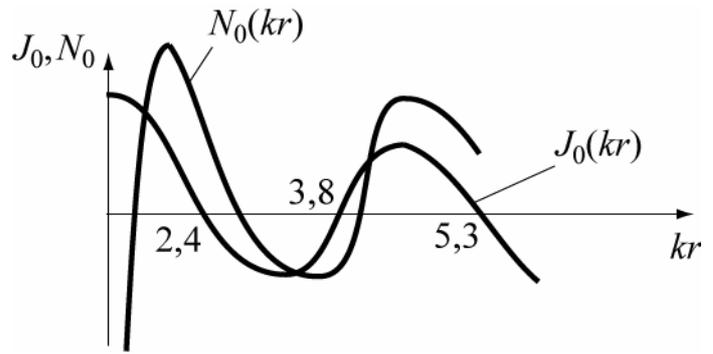


Рис.1.9

$$E_z(r) = A \cdot J_0(kr) + B \cdot N_0(kr)$$

(1.34)

графики этих функций приведены на рис. 1.9.

Исключаем из (1.34) второе слагаемое, положив $B=0$, как не удовлетворяющее требованиям теоремы единственности, т.к. при $r=0$ $N(kr)=-\infty$, и получаем окончательное выражение для вектора $\vec{E} = \vec{z}^0 A_0 J_0(kr) \cos \omega t$.

Из (1.33), с учетом $\frac{dJ_0(kr)}{dr} = -kJ_1(kr)$, решение для вектора \vec{H} будет вида

$$\vec{H} = -\vec{\alpha}^0 A \frac{k}{\mu\omega} J_1(kr) \sin \omega t = -\vec{\alpha}^0 A \frac{1}{Z_c} J_1(kr) \sin \omega t,$$

где

$$\frac{k}{\mu\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 \epsilon \mu}}{\sqrt{\mu^2 \omega^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} = \frac{1}{Z_c}.$$

Задача №20

Задано в свободном пространстве выражение электрического поля $\vec{E} = E_0 (\vec{x}^0 y - \vec{y}^0 x) \cos \omega t$. Определить магнитное поле \vec{H} .

Решение: Для решения задачи используем 2-е уравнение Максвелла.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} E_0 \cos \omega t = -\vec{z}^0 2E_0 \cos \omega t.$$

Интегрируя затем $\text{rot} \vec{E}$ по времени, определим вектор \vec{B} .

$$\vec{B} = \int \vec{z}^0 2E_0 \cos \omega t \cdot dt = \vec{z}^0 \frac{2E_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Используя материальное уравнение (1.8), находим вектор \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \Rightarrow \vec{H} = \vec{z}^0 \frac{2E_0}{\mu\omega} \sin \omega t.$$

Проверим, существует ли в природе такое поле. Для этого подчиним полученное магнитное поле первому уравнению Максвелла: $\text{rot } \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t$.

Так как \vec{H} не зависит от координат, то $\text{rot } \vec{H} = 0$. Следовательно, $\varepsilon \cdot \partial \vec{E} / \partial t = 0$. Откуда $\vec{E} = 0$. Поэтому, заданного в таком виде переменного электромагнитного поля в природе не существует.

Задача №21

Определить электродвижущую силу (ЭДС) в замкнутом контуре, образованном равнобедренным треугольником, если известен вектор $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin \omega t$. Направление вектора \vec{H} показано на рис. 1.10 и $\theta = 60^\circ$.

Решение. Запишем выражение для потока Φ вектора $\vec{B} = \mu \vec{H}_0 \sin \omega t$

$$\Phi = \mu_0 \sin \omega t \int_S \vec{H} d\vec{S}.$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{H} d\vec{S} = H_0 \cos \theta \cdot S. \quad (1.35)$$

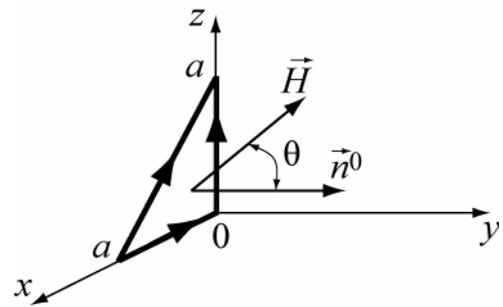


Рис.1.10

Учитывая (1.35), получим выражение для потока, пронизывающего треугольную площадку,

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} H_0 \sin \omega t \cdot \frac{a^2}{2}. \quad (1.36)$$

Электродвижущая сила определяется соотношением

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega a^2}{4} H_0 \cos \omega t \quad (1.37)$$

Задача №22

Плоский воздушный конденсатор, пластины которого имеют форму дисков радиуса a , подключен к источнику переменного гармонического напряжения частоты ω . Диэлектрик внутри – воздух. Расстояние между дисками d . Найти энергию электрического и магнитного полей внутри конденсатора. В

каких фазовых соотношениях находятся $W_{\text{Э}}$ и $W_{\text{М}}$? Исходя из равенства

$$\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2, \text{ доказать, что } W_{\text{Э}} = W_{\text{М}} \text{ при длине волны } \lambda = 1,41\pi \cdot a.$$

Решение. Напряжение между пластинами меняется по гармоническому закону $U = U_0 \cos \omega t$. Напряженность электрического поля определим через напряжение $E = \frac{U}{d} \cos \omega t$. Электрическая энергия равна:

$$W_{\text{Э}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2} \pi a^2 d \cdot \cos^2 \omega t = \frac{\varepsilon_0 \pi \cdot a^2}{2d} U_0^2 \cos^2 \omega t, \text{ Дж.} \quad (1.38)$$

Магнитную энергию определим по формуле:

$$W_{\text{М}} = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV. \quad (1.39)$$

Напряжённость магнитного поля определим из закона полного тока (1.1)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad H = -\varepsilon_0 \frac{r \omega U}{2d} \sin \omega t.$$

Подставив значение напряжённости магнитного поля в (1.39), получим:

$$\begin{aligned} W_{\text{М}} &= \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{2d} \right)^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 dr \cdot d\alpha \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{2d} \right)^2 \frac{a^4 2\pi \cdot d}{4} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 \pi}{4d} \left(\frac{U_0 a^2}{2} \right)^2 \sin^2 \omega t, \text{ Дж.} \quad (1.40) \end{aligned}$$

Предлагается самостоятельно разобраться во втором и третьем вопросах.

Задача № 23

Ток в среде распределен с плотностью \vec{j}_0 (рис.

1.11) и опыт показывает, что с приложением постоянного магнитного поля $\vec{H}_=$, появляется дополнительная составляющая плотности тока, определяемая ра-

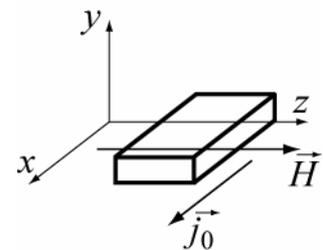


Рис.1.11

венством. $\vec{j}' = k \cdot [\vec{E} \vec{H}_=]$,

(1.41)

где k - постоянная Холла. Это явление называют эффектом Холла.

Найти связь между током $\vec{j} = \vec{j}' + \vec{j}_0$ и напряженностью \vec{E} в случае наличия эффекта Холла.

Решение. Известна формула $\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}$. Примем \vec{H} направленным вдоль оси z .

Напряженность электрического поля запишем по составляющим

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{x}^0 + E_y \cdot \vec{y}^0 + E_z \cdot \vec{z}^0$$

Плотность тока в произвольной точке образца будет равна

$$\vec{j} = \vec{j}' + \vec{j}_0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} + k[\vec{E} \vec{H}] = \sigma \vec{E} + kH_z [\vec{E}, \vec{z}^0].$$

Это эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$j_x = \sigma E_x + kH_z E_y; \quad j_y = \sigma E_y + (-kH_z E_x); \quad j_z = \sigma E_z. \quad \text{Откуда удельная}$$

проводимость среды, при эффекте Холла, выражается тензором:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & kH_z & 0 \\ -kH_z & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

Плотность тока и напряженность поля не параллельны, т.е. $\vec{j}_{np} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

1.1. Может ли вектор $\vec{B} = B_0(\vec{x}^0 \sin x + \vec{y}^0 y)$ быть вектором магнитной индукции? Почему вектор магнитной индукции непрерывен всегда?

Ответ: В таком виде поля \vec{B} в природе нет.

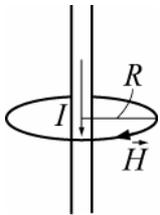


Рис.1.12

1.2. Какова напряженность магнитного поля на расстоянии 10 см от центра прямолинейного круглого провода радиуса 0,5 см, по которому протекает постоянный ток $I = 2 \text{ A}$ (см. рис 1.12).

$$\text{Ответ: } H_\alpha = 3,3 \frac{\text{A}}{\text{M}}.$$

1.3. Электронный поток в электроннолучевой трубке имеет радиус $a = 2,5 \text{ мм}$ ($a \ll L$ -длины трубки), объемную плотность заряда $\rho = 27 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^3$, движется со скоростью $V = 1,76 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. Чему равен ток переноса в трубке?

Ответ: $I=93,26$ мкА.

1.4. Какова величина напряжённости магнитного поля в середине между

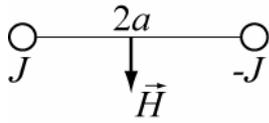


Рис.1.13

двумя параллельными, бесконечно протяженными проводниками, по которым текут одинаковые по величине, но противоположные по направлению постоянные токи? Расстояние между проводниками $2a$. (рис.1.13)?

Ответ: $H = \frac{I}{\pi a}$.

1.5. Вектор электрического смещения задан в пространстве в виде

$$\vec{D} = \frac{x^2}{2} \vec{x}^0$$

Чему равен заряд в кубе с ребром a , если начало координат совмещено с вершиной куба, а оси x, y, z совпадают с его ребрами?

Ответ: $q = \frac{a^4}{2}$ Кл

1.6. При каких условиях выполняется равенство $\text{div}[\vec{r} \times \vec{H}] = 0$, где \vec{r} - радиус вектор, \vec{H} вектор напряженности магнитного поля?

Ответ: когда $j_{\text{пол}} = 0$.

1.7. Вектор напряженности электрического поля задан $\vec{E} = E_0(\vec{x}^0 y - \vec{y}^0 x) \cos \omega t$. Является ли заданный вектор \vec{E} вектором электромагнитного поля? Определить вектор магнитной индукции.

Ответ: $\vec{B} = 0$

1.8. В сферическом объёме радиуса R равномерно распределён гармонически изменяющийся заряд с объёмной плотностью $\rho = 1 \cos \omega t$. Чему будет равен ток проводимости, связанный с этим зарядом?

Ответ: $I_{\text{пр}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \omega \sin \omega t$.

1.9. Чему будет равно время релаксации объёмного заряда $\rho = 0,0003$ Кл/м³, помещённого в среду с $\epsilon_r = 4$ и $\sigma = 10$ См/м и как изменится время релаксации, если проводимость среды будет равна бесконечности?

Ответ: $t = \frac{10^{-10}}{9\pi}$ с

1.10. Имеются две полубесконечные среды (рис. 1.14) с параметрами:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0; \quad \|\epsilon_2\| = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}; \text{ поверхностных зарядов на}$$

границе нет. Задано $\vec{E}_1 = \vec{y}^0 E_{y1} + \vec{z}^0 E_{z1}$. Определить

вектор \vec{D}_2 во второй среде.

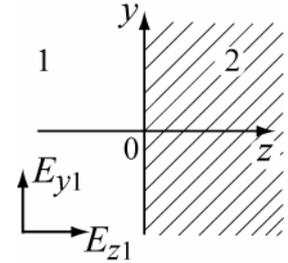


Рис.1.14

Справка: Задача решается с использованием граничных условий и материальных уравнений.

Ответ: Вектор $\vec{D}_2 = \vec{x}^0 \frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\epsilon_z} E_{1z} + \vec{y}^0 \epsilon E_{1y} + \vec{z}^0 \epsilon_0 E_{1z}$.

1.11. Вектор \vec{D} направлен под углом 45° к границе раздела двух сред, диэлектрические проницаемости которых относятся как $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Определить угол между D_2 и границей раздела (рис 1.15)

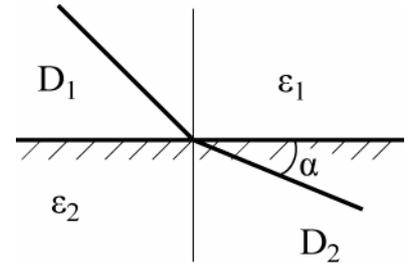


Рис.1.15

Ответ: $\alpha = 30^\circ$

1.12. В полном металлическом объеме, заполненном воздухом (рис. 1.16), существует электромагнитное поле, представленное векторами $\vec{E} = \vec{z}^0 \vec{E}$ и $\vec{H} = \vec{x}^0 H_x + \vec{y}^0 H_y$, где проекции векторов имеют вид:

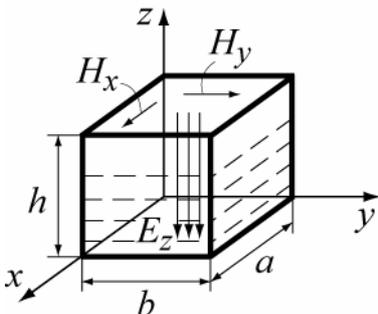


Рис.1.16

$$E_z = -E_{y0} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \cos \omega t,$$

$$H_x = -H_{x0} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \sin \omega t,$$

$$H_y = H_{y0} \cos \frac{\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{a} x \sin \omega t.$$

Найти поверхностный заряд на внутренних металлических стенках объема и токи, протекающие по его боковым стенкам. При каких значениях координат

нат x и y компоненты напряженности магнитного поля H_x и H_y максимальны?

Ответ: $\xi = D_z = \epsilon_0 E_z$, $j_z = H_x$ при $y = 0$, и в, $j_z = H_y$ при $x = 0$, и а.

1.13. В некотором объеме свободного пространства имеются: электрическое поле $\vec{E} = 10\vec{y}^0$ (В/м) и магнитное поле $\vec{H} = 15\vec{x}^0$ (А/м). Заряд $q = 10^{-9}$ (Кл) влетает в этот объем со скоростью $\vec{V} = \vec{z}^0 10^6$ (м/с). Определить силу, действующую на заряд, и её направление.

Ответ: $\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_M = 28,84 \cdot 10^{-9} \vec{y}^0$ (Н).

1.14. Задан вектор электрического поля $\vec{E} = \vec{z}^0 E_0 \cos t \sin x$. Определить векторы \vec{B} и \vec{H} .

Ответ: $\vec{B} = \vec{y}_0 E_0 \cos x \sin t$; $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_a} \Rightarrow \vec{H} = \vec{y}_0 \frac{E_0}{\mu_a} \cos x \sin t$.

1.15. Определить ЭДС, возбуждаемую в рамке потоком вектора $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_0 \cos \omega t$. Направление вектора \vec{H} показано на рис. 1.17. Среда-воздух.

Ответ: $\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_0 H_0 \sin \omega t \cdot a^2$.

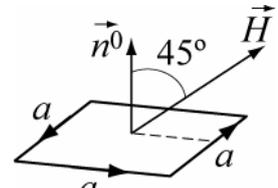


Рис.1.17

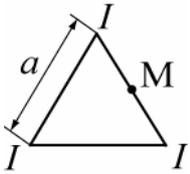
1.16. Внутри полого металлического шара радиуса $a = 20$ см распределен заряд с объёмной плотностью $\rho = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м³. Определить поверхностную плотность заряда на внутренней поверхности шара.

Ответ: $2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м².

1.17. В соленоиде без сердечника, содержащем $N = 1000$ витков, при увеличении силы тока магнитный поток увеличился на 2 мВб. Определить среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую в соленоиде, если изменение силы тока произошло за 1 с.

Ответ: 2 В.

1.18. Три параллельных проводника с одинаковыми токами проходят через вершины равностороннего треугольника, плоскость которого перпендику-



лярна проводам. Сторона треугольника равна a . Чему равно магнитное поле в середине одной из сторон (например, точка M)?

Рис. 1.18

Ответ: $\frac{2I}{\pi a \sqrt{3}}$

1.19. В любой точке пространства, где существуют только токи проводимости и токи смещения $\vec{H} = \text{grad}\psi(\vec{r}, t)$, где ψ -произвольная функция \vec{r} и t . Что можно сказать о векторе E ?

Ответ: E - экспоненциально убывает во времени

1.20. Вычислить $\text{div}[\vec{r}, \vec{E}]$, где $\vec{E} = \frac{\tau \cdot \vec{r}^0}{2\pi\epsilon \cdot r}$ -вектор напряженности электрического поля, не зависит от времени, а r -радиус-вектор точки.

Ответ: 0

1.21. Какой вид имеет система уравнений электромагнитного поля, не зависящего от времени в проводящей среде без сторонних токов и зарядов?

Ответ: $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}_{np}; \text{rot}\vec{E} = 0; \text{div}\vec{D} = 0; \text{div}\vec{B} = 0;$

1.22. На границе (плоскость XZ) раздела двух сред векторы \vec{D}_1 и \vec{D}_{11} имеют вид $\vec{D}_1 = (2\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0 + 4\vec{z}_0) \cdot \epsilon$; $\vec{D}_{11} = (4\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0 + 8\vec{z}_0) \cdot \epsilon_0$. Определить напряженности электрического поля в этих средах. С какими средами, с точки зрения материальных уравнений, мы имеем здесь дело?

Ответ: $\vec{E}_1 = (2\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0 + 4\vec{z}_0)$ $\vec{E}_2 = (4\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0 + 8\vec{z}_0)$. Обе среды анизотропные.

1.23. Какое физическое толкование может быть дано уравнению

$$\text{rot}\vec{H} = 10\vec{z}^0 ?$$

Ответ: Вихревое магнитное поле \vec{H} возбуждено током, плотность которого 10А/м^2 и направление вдоль оси z ;

1.24. Определить плотность поверхностного заряда на границе раздела двух сред, при следующих условиях: $\epsilon_1 = \epsilon_0$; $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$; $E_{n2} = 2E_{n1} = 36\pi \text{ В/м}$; $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$.

Ответ: $\xi = -2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$

1.25. Пучок электронов, излучаемый катодом в приборе СВЧ, имеет вид цилиндра с радиусом a , обладает скоростью V_0 и плотностью объёмного заряда ρ_0 . Чему равна напряженность магнитного поля внутри и вне пучка?

Ответ: $H_{\text{внутри}} = \rho_0 V_0^2 r / 2$; $H_{\text{вне}} = \rho_0 V_0 a^2 / 2r$

1.26. В идеальном диэлектрике ($\sigma=0$) задано распределение вектора $\vec{H} = \vec{x}_0 \sin y \cos t$. Определить вектор \vec{E} этого поля.

Ответ: $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{z}_0 \cos y \cdot \sin t$

1.27. К неоднородному диэлектрику с параметром $\epsilon = \epsilon_0(1+x)^2$ приложено электрическое поле $\vec{E} = E_x \vec{x}^0 + E_z \vec{z}^0$. Какое выражение будет у вектора электрического смещения?

Ответ: $(\vec{E} = E_x \vec{x}^0 + E_z \vec{z}^0) \cdot \epsilon_0 \cdot (1+x)^2 = \vec{D}$.

1.28. Определить циркуляцию вектора \vec{B} по контуру с координатами $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 1)$; $(1, 0)$, если плотность тока проводимости $\vec{j}_{np} = \vec{j}_0 xy$,

$\vec{j}_0 \perp \text{пл} XOY$; плотность тока смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$; $\mu = 3\mu_0$.

Ответ: $0.75\mu_0$

1.29. Определить циркуляцию векторов \vec{H} по контуру $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 1)$; $(1, 0)$, если объёмная плотность тока проводимости $\vec{j}_{np} = 0$, а вектор электрической индукции $\vec{D} = \vec{D}_0 \frac{y \sin xt}{x}$.

Ответ: $0,5 \cdot \cos t$

1.30. Квадратная рамка со стороной $a = 1$ находится в поле $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin \omega t$. Магнитная проницаемость среды $\mu = \mu_0$. Плоскость рамки $\perp \vec{H}$. Определить э.д.с., наведенную в рамке.

Ответ: $\mathcal{E} = -\mu_0 H_0 \omega \cdot \cos \omega t$

1.31. Дано $\vec{E} = \bar{x}_0 E_x$. Доказать, что для переменных во времени полей в однородной изотропной среде без свободных токов и зарядов векторы взаимно ортогональны, т.е. $\vec{E} \perp \vec{H}$. Считая $\vec{j} = \bar{z}_0 j_z$, показать, что $\vec{H} = \vec{j}$.

1.32. Сфера радиуса a имеет заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \frac{r^2}{a^2} \cdot \sin \theta$. Найти полный заряд сферы Q . Ответ: $Q = \frac{\rho \pi^2 a^3}{5}$

1.33. В однородном магнитном поле с напряженностью \vec{H} вращается прямоугольная плоская рамка со скоростью $\omega = 2\pi f$. Стороны рамки a и b , число витков N , магнитная проницаемость среды $\mu_a = \mu_0$, f - число оборотов в секунду. Вычислить э.д.с. в рамке.

Ответ: $\mathcal{E} = -2\pi n N \mu_0 H a b \sin 2\pi n t$.

1.34. Напряженность поля в некоторой области меняется по закону $E_x = E_a \frac{a}{x}$; $E_y = 0$; $E_z = 0$; $x \in [a, b]$. Найти объемную плотность заряда в данной области, если $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Ответ: 4.9. $\rho = -\frac{a}{x^2} \varepsilon_0 E_0$.

1.35. Задано поле вектора \vec{D} :

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\kappa \bar{r}}{a^3} & \text{при } a \leq r \leq a, \\ \kappa \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \bar{r} & \text{при } a \leq r \leq \infty, \end{cases} \quad \text{где } \bar{r} - \text{ радиус-вектор.}$$

Найти распределение зарядов, образовавших такое поле.

Ответ $\rho = 3\kappa$ при $0 \leq r \leq a$; $\rho = 0$ при $a \leq r \leq \infty$.

1.36. В некоторой области с диэлектрической проницаемостью ε задано поле $\vec{E} = \kappa(\bar{x}_0 x^2 + \bar{y}_0 y^2)$. Вычислить плотность объемного заряда.

Ответ: $\rho = 2\kappa(x + y)$

1.37. По рамке с размерами $a \times b$, расположенной на расстоянии r от прямолинейного бесконечного проводника, протекает ток $I = I_0 \cos \omega t$. Вычислить величину электродвижущей силы в проводе.

Ответ: $\mathcal{E} = \frac{\omega \mu_0 \varepsilon}{2\pi} I_0 \cdot \ln \frac{r+a}{r} \cdot \sin \omega t$.

1.38. По границе раздела сред протекает поверхностный ток $\vec{\eta}_s$. В первой среде $\vec{H} = 0$. Определить магнитное поле во второй среде вблизи поверхности.

Ответ: $\vec{\eta}_s / 2$

1.39. Среды разделены заряженной поверхностью, и в одной из них поле отсутствует. Каково электрическое поле в другой среде, если поверхностная плотность заряда ξ_s , а диэлектрическая проницаемость второй среды ϵ_2 .

Ответ: $E = \xi_s / (2\epsilon_2)$

1.40. Какие из представленных магнитных полей при $\mu = \text{const}$ удовлетворяют уравнению Максвелла, т.е. могут быть реализованы?

$$\vec{H}_1 = \vec{x}^0 3x \cos \omega t - \vec{y}^0 3 \cos \omega t ;$$

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^0 \cos x \cos \omega t - \vec{x}^0 \sin y \cos \omega t ;$$

$$\vec{H}_3 = \vec{x}^0 6x \cos \omega t - \vec{y}^0 3y^2 \cos \omega t .$$

Ответ: Второе поле

1.41. Чему равен и как направлен вектор плотности тока проводимости

$$\vec{j}_{np}, \text{ если } \vec{E} = \vec{x}^0 E, \text{ а } \sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_2 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\vec{j} = E(\sigma_1 \vec{y}^0 + \sigma_2 \vec{z}^0)$, в плоскости ортогональной плоскости $x = \text{const}$.

1.42. Под каким углом расположены векторы \vec{E} и \vec{D} , если $\vec{E} = \vec{z}^0 E_0$,

а относительная диэлектрическая проницаемость среды $\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$?

Ответ: Под углом 90°

1.43. Электрон, летящий вдоль оси Z со скоростью $V = 10^6$ м/с, попадает в зону, где одновременно существуют стационарное электрическое и магнитное поля, имеющие вид: $\vec{E} = \vec{x}_a E_x$ и $\vec{B} = \vec{y}_0 B_y$, где $E_x = 1 \cdot 10^3$ В/м;

$B_y = 4$ мТл. Определить величину силы, действующей на электрон.

Ответ: $F = e \cdot 3 \cdot 10^3$, Н.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В данном разделе рассматриваются темы

1. Электростатические поля, создаваемые заряженными телами.
2. Краевые задачи электростатики.
3. Силы, действующие в электростатических полях.

Электростатическое поле описывается системой дифференциальных и интегральных уравнений, которые являются частным случаем общих уравнений Максвелла (1.1)÷(1.6) в предположении, что создающие его заряды не зависят от времени и не перемещаются в пространстве.

Интегральные уравнения:	Дифференциальные уравнения:
$\oint_e \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad (2.1)$	$\text{rot}\vec{E} = 0; \quad (2.1a)$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV = q; \quad (2.2)$	$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (2.2a)$
материальное уравнение	$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.3)$

2.1. Электростатический потенциал. Уравнения для потенциала.

Поля, создаваемые заряженными телами

Непосредственно из уравнений Максвелла ($\text{rot}\vec{E} = 0$) следует, что электростатическое поле является потенциальным, следовательно, его силовые линии начинаются и оканчиваются на зарядах и вектор напряженности электрического поля является градиентом потенциала.

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \varphi_i - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} d\vec{l}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2a) с учетом (2.3) принимает вид $\text{div}\epsilon \vec{E} = \rho$.

Подстановка \vec{E} в форме градиента потенциала в уравнение (2.2a) приводит к уравнению Пуассона, которое является основным уравнением для нахождения потенциала

$$\text{div}(\epsilon \text{grad}\varphi) = -\rho. \quad (2.5)$$

Для однородной среды уравнение Пуассона принимает вид

$$\operatorname{divgrad} \varphi = \nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon . \quad (2.6)$$

Для неоднородной среды, при равенстве нулю объёмного заряда уравнение Пуассона преобразуется в уравнение Лапласа.

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (2.7)$$

Для однородной среды уравнение Лапласа имеет вид $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$

Уравнения Пуассона и Лапласа дополняются граничными условиями с разными типами границ:

Диэлектрик- Диэлектрик (Д-Д):

$$1. \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (2.8)$$

$$2. \quad -\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dn} + \varepsilon_2 \frac{d\varphi_{21}}{dn} = \xi \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = \varepsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dn} , \text{ при } \xi = 0 \quad (2.9a)$$

Диэлектрик-Металл (Д-М):

$$1. \quad \varphi = \operatorname{const} \quad (2.8a)$$

$$2. \quad -\varepsilon_1 \frac{d\varphi}{dn} = \xi \quad (2.9b)$$

В этих соотношениях нормаль направлена в первую среду.

Уравнения Пуассона и Лапласа применяются для решения краевых задач, в которых на электродах, расположенных в диэлектрике, заданы потенциалы или заряды и требуется определить распределение потенциала или распределение электрического поля в этом диэлектрике.

Существует широкий класс задач, в которых требуется определить поле по известному распределению зарядов. При решении таких задач большое значение имеют понятия: точечный заряд и заряженная нить.

Точечным зарядом можно считать заряд q , расположенный на теле, линейными размерами которого можно пренебречь.

Под заряженной нитью понимают бесконечно длинный и тонкий проводник, имеющий линейную плотность заряда τ .

Если заряды распределены в пространстве дискретно или непрерывно, то в некоторой точке суммарному заряду соответствует суммарный потенциал. На этом основан принцип суперпозиции, согласно которому решение уравнения Пуассона для заданного распределения заряда имеет вид:

для распределенного объемного
заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dv}{r} \quad (2.10)$$

для заряженной нити

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau dl}{r} \quad (2.11)$$

для поверхностных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\xi dS}{r} \quad (2.12)$$

для n точечных дискретных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (2.13)$$

Напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые точечным зарядом, равны

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}^0 \cdot q}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}, \quad (2.14)$$

где r – расстояние от заряда до точки наблюдения.

Напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые заряженной нитью определяются из формул

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}^0 \cdot \tau}{2\pi\epsilon r} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + C. \quad (2.15)$$

здесь r – расстояние от нити до точки наблюдения.

2.2. Энергия электростатического поля. Емкость.

Силы в электростатическом поле

Энергия электростатического поля может быть определена интегрированием объемной плотности энергии электрического поля $w_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ по объёму

$$W_E = \int_V w_E dV. \quad (2.16)$$

Формулы для расчета энергии электрического поля, соответствующие случаям (2.10)÷(2.13), приведены ниже:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i, \quad W_E = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad W_E = \frac{1}{2} \int_S \xi \varphi ds, \quad W_E = \frac{1}{2} \int_l \tau \varphi dl. \quad (2.17)$$

Емкость системы, состоящей из двух разноименно заряженных проводников, определяется как отношение заряда на одном из проводников к разности потенциалов между ними

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (2.18)$$

Сила, действующая на точечный заряд q , помещённый в электростатическое поле, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.19)$$

Сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , отстоящих на расстоянии r_{12} друг от друга, определяется с помощью **закона Кулона**

$$\vec{F} = \vec{r}^0 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} . \quad (2.20)$$

Сила, действующая на заряженную поверхность при равномерно распределённом заряде со стороны внешнего поля \vec{E} , определяется с помощью соотношения

$$\vec{F} = \xi \cdot S \cdot \vec{E} , \quad (2.21)$$

где S -площадь заряженной поверхности.

2.3 Примеры расчета электростатических полей

Однородные задачи электростатики это такие задачи, в которых потенциал зависит только от одной координаты. Примерами могут служить: плоский конденсатор, краевыми эффектами в котором можно пренебречь, цилиндрический конденсатор, длина которого значительно превосходит его диаметр, сферический конденсатор.

Задача №1

Две плоские металлические пластины разделены тонким слоем однородного диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ϵ . На верхнюю пластину подан потенциал U , нижняя пластина заземлена (конденсатор) (рис. 2.1). Найти распределение потенциала между пластинами, напряженность поля

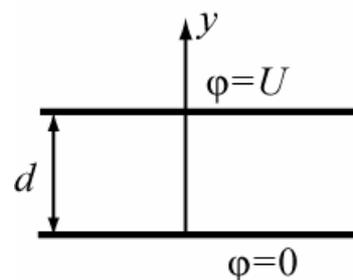


Рис.2.1

\vec{E} , вектор электрического смещения \vec{D} , заряд на одной из пластин конденсатора q , емкость C . Линейные размеры пластин много больше размера d .

Решение

Выбираем прямоугольную систему координат, в которой ось y перпендикулярна поверхности пластин. В этом случае, можно считать потенциал φ зависящим только от координаты y . Решение проводим с помощью уравнения Лапласа (2.7) с применением граничных условий для потенциала на границе Д-М (2.9).

Уравнение Лапласа для данной задачи будет иметь вид $\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$, а его решение $\varphi = Ay + B$, где A и B неизвестные постоянные подлежащие определению. Для их определения используем два граничных условия:

$$a) \text{ при } y=0 \quad \varphi=0; \quad б) \text{ при } y=d \quad \varphi=U.$$

В результате получим $B=0$, $A=\frac{U}{d}$ и выражение потенциала $\varphi = \frac{U}{d}y$.

Как следует из решения, потенциал линейно возрастает от 0 до U при изменении координаты y от 0 до d .

Напряженность и индукция электрического поля определяются формулами
$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{y}^0 \frac{d\varphi}{dy} = -\vec{y}^0 \frac{U}{d}, \quad \vec{D} = -\vec{y}^0 \varepsilon \frac{U}{d}. \quad (2.22)$$

Поверхностная плотность заряда определяется из граничных условий: на верхней (нормаль направлена против оси y)

$$\text{пластине при } y=d \quad \xi = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dn} = \varepsilon \frac{d\varphi}{dy} = \varepsilon \frac{U}{d},$$

на нижней пластине (нормаль и орт \vec{y}^0 одинаково направлены) при $y=0$ полу-

$$\text{чим } \xi = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dy} = -D_n = -\varepsilon \frac{U}{d}.$$

Заряд на верхней пластине конденсатора $q = \xi S$,

$$\text{емкость конденсатора } C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

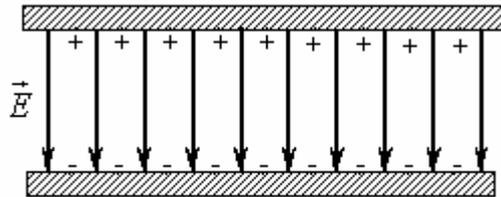


Рис. 2.2.

На рисунке 2.2 изображено: распределение электрических зарядов на поверхностях электродов и однородное электрическое поле между пластинами.

Задача №2

Сохраним условие задачи №1, но диэлектрическая среда пусть будет неоднородной, т. е. $\epsilon = \epsilon_0 e^{\alpha y}$.

Решение:

Для решения данной задачи следует воспользоваться уравнением Лапласа $\text{div} \epsilon \text{grad} \varphi = 0$, записав его в виде $\frac{d}{dy} (\epsilon_0 e^{\alpha y} \frac{d\varphi}{dy}) = 0$. Интегрируя первый

раз, получаем $\epsilon_0 \cdot e^{\alpha y} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = A$. Разделяя переменные и интегрируя второй

раз, получаем потенциал $\varphi = \int \frac{A}{\epsilon_0} e^{-\alpha y} dy = -\frac{A}{\epsilon_0 \alpha} e^{-\alpha y} + B$. Неизвестные по-

стоянные A и B могут быть определены из граничных условий

$$1. \text{ при } y=0 \quad \varphi=0, \text{ откуда } B = +\frac{A}{\epsilon_0 \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{A}{\epsilon_0 \alpha} (1 - e^{-\alpha y}).$$

$$2. \text{ при } y=d \quad \varphi=U \text{ откуда } U = \frac{A}{\epsilon_0 \alpha} (1 - e^{-\alpha d}) \Rightarrow A = \frac{U \epsilon_0 \alpha}{(1 - e^{-\alpha d})}.$$

Окончательно,
$$\varphi = \frac{U (1 - e^{-\alpha y})}{1 - e^{-\alpha d}}.$$

Напряженность электрического поля (2.22) в конденсаторе $E_y = -\frac{d\varphi}{dy} = \frac{U \alpha e^{-\alpha y}}{1 - e^{-\alpha d}}$,

вектор электрического смещения между пластинами $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon_0 U \alpha}{1 - e^{-\alpha d}} e^{-\alpha y}$.

Ёмкость конденсатора определяется с помощью формулы - $C = \frac{q}{U}$.

Заряд пластины при $y=0$ равен $q = \xi S = D_{y=0} S = \frac{\epsilon_0 U S \alpha}{1 - e^{-\alpha d}}$, следовательно,

$$C = \frac{\epsilon_0 \alpha S}{1 - e^{-\alpha d}}.$$

Задача №3

К условиям задачи №1 добавим, что между пластинами в диэлектрике находится заряд с объемной плотностью ρ .

Решение

В этом случае необходимо использовать уравнение Пуассона (2.6), из которого путём интегрирования определяется

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\int \frac{\rho}{\varepsilon} dy = -\frac{\rho}{\varepsilon} y + A,$$

а затем потенциал

$$\varphi = \int \left(-\frac{\rho}{\varepsilon} y + A\right) dy = -\frac{\rho y^2}{2\varepsilon} + Ay + B.$$

Удовлетворяя граничным условиям, которые остаются прежними, получим

$$B=0, \quad A = \frac{U + \frac{\rho}{2\varepsilon} d^2}{d}.$$

Окончательное выражение для потенциала имеет вид $\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon} (d \cdot y - y^2) + \frac{U}{d} y$.

Подставляя потенциалы на плоскостях, получаем, что граничные условия удовлетворяются. Напряженность электрического поля из (2.4) имеет вид

$$E_y = -\left[\frac{\rho}{2\varepsilon} (d - 2y) + \frac{U}{d}\right].$$

Легко построить (при необходимости) графики зависимостей $\varphi(y)$ и $E(y)$ при заданном отрицательном и положительном объемном заряде.

Задача №4

Между пластинами плоского конденсатора расположены два слоя диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Размеры слоев показаны на рисунке 2.3. Определить потенциал, напряженность поля и емкость конденсатора.

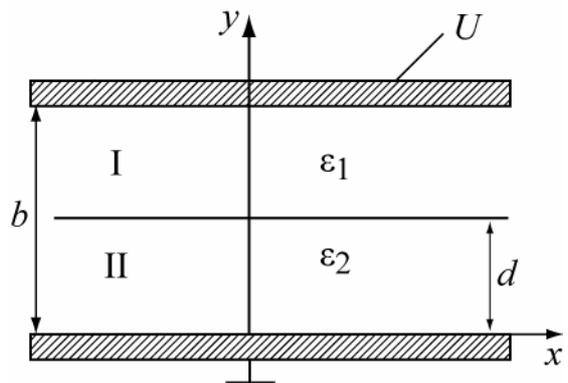


Рис. 2.3

Решение

Пространство между пластинами разбиваем на две области: область I с диэлектриком, имеющую диэлектрическую проницаемость ε_1 и область II,

имеющую диэлектрическую проницаемость ε_2 . Для каждой из областей запишем уравнение Лапласа, т.к. $\rho=0$ и его решение.

$$\text{Для первой области } \frac{d^2 \varphi_1}{dy^2} = 0, \quad \varphi_1 = Ay + B.$$

$$\text{Для второй области } \frac{d^2 \varphi_2}{dy^2} = 0, \quad \varphi_2 = Cy + D.$$

Для определения четырех неизвестных констант A, B, C, D нужно использовать четыре граничных условия:

При $y=0$	При $y=b$	При $y=d$	При $y=d$
$\varphi_1 = 0$	$\varphi_2 = U$	$\varphi_1 = \varphi_2$	$\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dy} = \varepsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dy}$

В результате для нахождения постоянных A, B, C, D получена система:

$$1) \begin{cases} 0 = A \cdot 0 + B \\ U = C \cdot b + D \\ \varepsilon_1 A = \varepsilon_2 C \\ A \cdot d + B = C \cdot d + D \end{cases}$$

Решение системы уравнений позволяет определить константы A, B, C, D
 $B = 0, \quad A = (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \{U / d (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\}, \quad C = U / \{d (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\},$

$$D = (U(\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1)d) / \{d (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\}.$$

Потенциалы в областях имеют вид и удовлетворяют граничным условиям:

Для первой области: $\varphi_1 = (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \cdot U \cdot y / \{d \cdot (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\}$ при $y=0 \quad \varphi_1=0$.

Для второй области: $\varphi_2 = U \cdot (d \cdot (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + y) / \{d(\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\}$ при $y=b \quad \varphi_2=U$.

Напряженность электрического поля в первой и второй областях соответственно

$$\text{венно } E_{y1} = -\frac{d\varphi_1}{dy} = -(\varepsilon_2 / \varepsilon_1)U / \{d(\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\};$$

$$E_{y2} = -\frac{d\varphi_2}{dy} = -U \cdot / \{d \cdot (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1) + b\}.$$

Отношение $\frac{E_{y1}}{E_{y2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ или $D_{y1} = D_{y2}$, что говорит о выполнении граничных

условий при $y=d$.

Емкость двухслойного конденсатора является последовательным соединением емкостей плоских конденсаторов

$$C_1 = \varepsilon_1 S / d, \quad C_2 = \varepsilon_2 S / (b - d), \quad C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2).$$

Задача №5

Определить потенциал φ , напряженность электрического поля \vec{E} и вектор электрического смещения \vec{D} , двухслойного коаксиального конденсатора длиной L . Параметры диэлектриков и размеры конденсатора приведены на рис. 2.4. Заряд на поверхности внутреннего проводника конденсатора равен q , внешний проводник конденсатора заземлен.

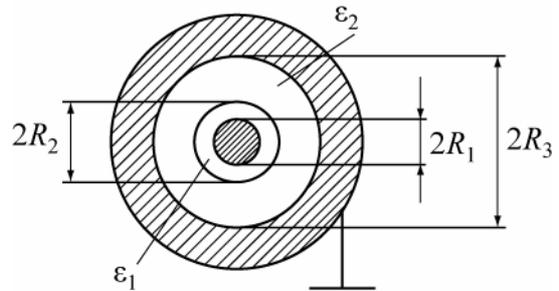


Рис. 2.4

Решение

Для данной задачи, потенциал конденсатора описывается уравнением Лапласа в цилиндрической системе координат (П1), в котором из условий симметрии по координатам α и z , остается только одно слагаемое

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид (2/15) $\varphi = A \ln r + B$, а для областей 1 и 2 запишется в виде:

$\varphi_1 = A_1 \ln r + B_1; R_1 \leq r \leq R_2$ (2.23а)	$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2; R_2 \leq r \leq R_3$ (2.23б)
--	--

Напряженность электрического поля находим через градиент потенциала

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{r}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Так как φ зависит только от r , то вектор \vec{E} будет иметь одну составляющую E_r :

$$E_{1r} = -\frac{A_1}{r}, \quad R_1 \leq r < R_2, \quad (2.24) \quad E_{2r} = -\frac{A_2}{r}, \quad R_2 < r \leq R_3. \quad (2.25)$$

Для определения потенциала в данной, конкретной задаче необходимо определить неизвестные постоянные: A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

Для этого воспользуемся четырьмя граничными условиями.

при $r=R_3$

$$1) \varphi_2 = 0$$

при $r=R_1$

$$2) D_{r1} = \xi = q/(2\pi R_1 L)$$

при $r=R_2$

$$3) D_{n1} = D_{n2}, \quad 4) \varphi_1 = \varphi_2$$

Здесь ξ -поверхностная плотность заряда на внутренней поверхности проводника конденсатора длиной L .

Используем первое граничное условие:

$$\varphi_2 = A_2 \ln R_3 + B_2 = 0, \text{ откуда получим } -A_2 \ln R_3 = B_2 \text{ и, следова-}$$

$$\text{тельно, } \varphi_2 = -A_2 \ln \frac{r}{R_3}$$

Из второго граничного условия

$$\text{При } r = R_1, \quad D_{r1} = \varepsilon_1 E_{r1} = -\varepsilon_1 \frac{A_1}{R_1} = \frac{q}{2\pi R_1 L}, \quad \text{откуда } A_1 = -\frac{q}{2\pi \varepsilon_1 L} = -\xi.$$

Выражение (2.23а) для потенциала φ_1 будет иметь вид

$$\varphi_1 = -\frac{q}{2\pi \varepsilon_1 L} \ln r + B_1$$

Используем третье граничное условие $D_{r1} = D_{r2}$ при $r=R_2$ (2.24) и (2.25)

$$-\frac{A_1}{R_2} \varepsilon_1 = -\frac{A_2}{R_2} \varepsilon_2, \quad \text{откуда зная } A_1 \text{ получим } A_2 = A_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{q}{2\pi \varepsilon_2 L}$$

Теперь можно полностью записать потенциал второй области

$$\varphi_2 = -\frac{q}{2\pi \varepsilon_2 L} \ln \frac{r}{R_3}.$$

Для нахождения постоянной B_1 и получения выражения потенциала φ_1 ,

используем четвёртое граничное условие $\varphi_1 = \varphi_2$ при $r=R_2$

$$-\frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_2}{R_3} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L} \ln R_2 + B_1, \text{ откуда } B_1 = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln R_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right).$$

$$\text{Откуда потенциал } \varphi_1 = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right).$$

Таким образом, основная часть задачи решена - потенциалы φ_1 и φ_2 определены полностью

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right), \quad \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_3}{r}.$$

Из их сравнения следует, что потенциал непрерывен (одинаковые значения) на границе раздела Д-Д при $r=R_2$

Далее запишем выражения для E_{r1} , E_{r2} , D_{r1} , D_{r2} .

$$E_{r1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L r}, \quad D_{r1} = \frac{q}{2\pi L r}.$$

$$E_{r2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L r}, \quad D_{r2} = \frac{q}{2\pi L r}.$$

Перейдём от двухслойного конденсатора к однослойному, для чего по-

$$\text{ложим } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \text{ тогда } \varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon L} \ln \frac{r}{R_1}, \quad \vec{E} = \vec{r}^0 \frac{q}{2\pi\varepsilon L r}.$$

Задача №6

В сферическом конденсаторе с радиусами оболочек R_1 и R_2 , заполненном воздухом, на внешнюю оболочку подан потенциал U , внутренняя оболочка заземлена. Определить потенциал φ , напряженность электрического поля \vec{E} , вектор электрического смещения \vec{D} , заряд q , ёмкость C .

Решение

В уравнении Лапласа (2.6) $\nabla^2 \varphi = 0$ для сферического конденсатора, обладающего угловой симметрией производные $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$, поэтому оно запи-

сывается $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$. Откуда $r^2 \frac{d\varphi}{dr} = A$. Интегрируя, получим выражение

$$\text{для потенциала} \quad \varphi = \int \frac{A}{r^2} dr = -A/r + B.$$

Для определения констант A и B используем граничные условия

$$\text{При } r = R_1 \quad \varphi = 0, \text{ откуда} \quad B = \frac{A}{R_1}$$

$$\text{При } r = R_2 \quad \varphi = U \Rightarrow A = UR_1R_2 / (R_2 - R_1)$$

$$\text{Следовательно:} \quad \varphi = \frac{UR_1R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{r - R_1}{R_1r}.$$

Легко убедиться, что граничные условия удовлетворены. $\varphi = U$ при $r = R_2$ и $\varphi = 0$ при $r = R_1$.

$$\text{Напряженность электрического поля внутри конденсатора } E_r = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{UR_1R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r^2},$$

$$\text{а вектор электрического смещения} \quad D_r = \varepsilon_0 E_r = -\varepsilon_0 \frac{UR_1R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r^2}.$$

$$\text{Поверхностная плотность заряда на внутренней оболочке} \quad \xi = D_r = -\varepsilon_0 \frac{UR_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{R_1}.$$

$$\text{Заряд конденсатора } q = \xi 4\pi R_1^2, \text{ ёмкость } C = \frac{q}{U} = \varepsilon_0 \frac{4\pi R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Задача №7

В цилиндрическом объёме задан потенциал $\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$. Определить объёмную плотность заряда, создающего это поле.

Решение

Чтобы по заданному в пространстве закону распределения потенциала

$\varphi(r, \alpha, z)$ найти объёмный заряд, создающий это поле, необходимо использовать уравнение Пуассона (2.6).

В нашем случае поле зависит только от r , поэтому в уравнении Пуассона записанного в цилиндрической системе координат оставляем слагаемое, зависящее только от координаты r .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.26)$$

Последовательно дифференцируя выражение потенциала, найдем объемную плотность заряда

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 r) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{8r}{r} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho = -8\epsilon_0.$$

Примером применения уравнения Пуассона является хорошо известная в электронике задача о нахождении распределения объемного заряда между катодом и анодом электронно - лучевой трубки.

Задача №8

Из плоского катода К вылетают электроны в направлении плоского анода А. Расстояние между электродами d много меньше их размеров. Катод заземлён, на анод подан потенциал U . Потенциал электрического поля между электродами меняется по закону $\varphi = kx^{4/3}$, здесь $k = \text{const}$ (рис. 2.5).

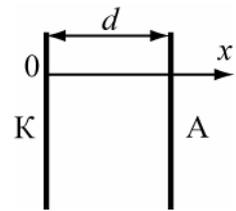


Рис. 2.5

Определить распределение объемного заряда между электродами и поверхностный заряд на электродах.

Решение

Для определения объемной плотности зарядов ρ в области между электродами следует использовать уравнение Пуассона.

Потенциал зависит только от координаты x . (краевыми эффектами пренебрегаем). Поэтому получим

$$\rho(x) = -\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4}{9} k \cdot \epsilon \cdot x^{-2/3}.$$

Плотность поверхностных зарядов на катоде и на аноде определяется граничными условиями (2.9) В нашем случае нормалью к катоду будет ось x . Поэтому поверхностная плотность заряда на катоде будет

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\xi}{\epsilon}; \quad \xi_{\kappa} = -\epsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{4}{3} k \cdot \epsilon \cdot x^{1/3} \Big|_{x=0} = 0.$$

Аналогично нормаль к аноду противоположна направлению оси x . Поэтому для анода

$$\xi_a = \varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=d} = \frac{4}{3} k \cdot \varepsilon \cdot d^{1/3}. \quad (2.27)$$

Попробуем разобраться, почему при $x \rightarrow 0$ объемная плотность заряда $\rho(x) \rightarrow \infty$?

Движение электронов от катода к аноду приводит к появлению тока переноса $\vec{j}_{\text{пер}}$, величина которого в любом сечении, параллельном плоскостям катода и анода, должна быть постоянной, и равной

$$\vec{j}_{\text{пер}} = \rho \vec{V} = \text{const}, \quad (2.28)$$

где \vec{V} – скорость движения заряда. Отсюда $\rho \sim 1/V$.

Вылетевший из катода электрон имеет скорость \vec{V} , близкую к нулевой. Поэтому вблизи катода $\rho \rightarrow \infty$. По мере удаления от катода электрон разгоняется, \vec{V} растет и ρ непрерывно падает. Так как энергия движущейся частицы $W = \frac{m\vec{V}^2}{2} = e\varphi$, то $\vec{V} \sim \sqrt{\varphi}$ и $\rho \sim \varphi^{-1/2}$, где φ – потенциал в точке нахождения электрона с учетом влияния пространственного заряда.

Проследим, как из решения данной задачи следует закон степени 3/2, связывающий ток и напряжение в плоском диоде.

- $\frac{m\vec{V}^2}{2} = e\varphi, \quad V = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}};$
- $j = \rho V, \quad \rho = -\frac{4}{9} k \varepsilon x^{-2/3} = -\frac{4}{9} \varepsilon x^{-2} \varphi;$
- $I = \rho V S = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} \cdot \left(-\frac{4}{9} \varepsilon x^{-2} \varphi \right) S.$

Так как при $x = d$, $\varphi = U$ и с ростом потенциала, ρ уменьшается, а ток растет, выражение для тока должна быть положительным.

$$I = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon}{d^2} S \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot U^{3/2} = G \cdot U^{3/2},$$

где $\frac{4}{9} \frac{\varepsilon}{d^2} S \sqrt{\frac{2e}{m}} = G - \text{const.}$ G – называется первеансом.

Задача №9

Определить потенциал и напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом $q=1\text{Кл}$ в точке, удаленной от него на расстояние $r=1\text{м}$.

Относительная диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon_r=4$.

Решение

Для точечного заряда (2.10).

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{1 \cdot 36\pi \cdot 10^{-9}}{4\pi 4} = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4} = 2,25 \cdot 10^{-9} \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} = 2,25 \cdot 10^{-9} \text{В}.$$

Определите, как изменятся потенциал и напряженность поля, если этот заряд будет находиться в воздухе?

Задача №10

Получите выражение в точке М для потенциала φ , создаваемого точечным зарядом q , расположенным над идеально проводящей плоскостью на высоте h (рис. 2.6).

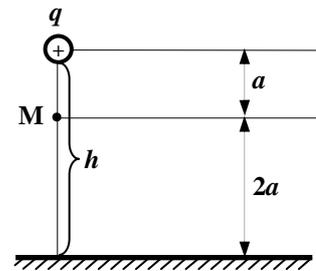


Рис. 2.6

Решение:

Используем метод зеркального отображения и принцип суперпозиции. Метод зеркального отображения заключается в том, что металлическая поверхность заменяется зеркально отображенным зарядом $(-q)$.

Согласно принципа суперпозиции, записываем выражение для потенциала в точке М от двух зарядов:

$$\varphi = \varphi_{(q)} + \varphi_{(-q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon a} - \frac{q}{4\pi\epsilon 5a} = \frac{4q}{20\pi\epsilon a} = \frac{q}{5\pi\epsilon a}$$

Задача №11

Определить напряженность электрического поля и потенциал в точке М, расположенной в свободном пространстве, создаваемые тонкой нитью, на которой находится заряд с линейной плотностью $\tau=0,01\text{Кл/м}$. Расстояние от нити до точки М равно 1м.

Решение

Электрическое поле и потенциал в точках, удаленных на расстояние r от заряженной нити, определяются (см. задачу 5) формулами

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}^0 \tau}{2\pi\epsilon r} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + K.$$

Подставляя численные значения, получим $\vec{E} = \frac{36\pi}{2\pi l} 10^7 = 18 \cdot 10^7 \text{ В/м}$;

Потенциал можно однозначно определить, если задать координаты точки, в которой он равен нулю, например, при $r = r_1$, $\varphi = 0$, тогда

$$K = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_1 \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r}{r_1} = 18 \cdot 10^7 \ln \frac{r}{r_1}, \text{ В.}$$

Задача №12

Над проводящей плоскостью, имеющей положительный заряд ξ , на высоте h , параллельно ей подвешен заряженный провод с погонной плотностью заряда $+\tau$ (рис. 2.7). На какой высоте должен быть расположен провод, чтобы сила, действующая на него со стороны плоскости, равнялась нулю?

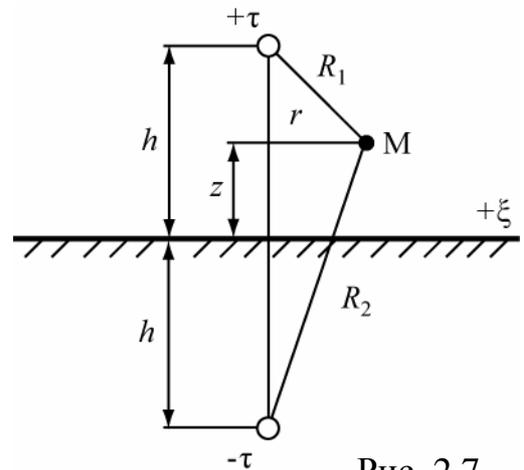


Рис. 2.7

Решение

При решении используем метод зеркального отображения для нити без учета заряда на плоскости и принцип суперпозиции потенциалов, полученных от 2-х зарядов и от плоскости.

Для зарядов $+\tau$ и $-\tau$ потенциал в точке М на высоте h определяется выражением

$$\varphi_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln R_1 - \ln R_2), \quad \text{где} \quad R_1 = \sqrt{(h-z)^2 + r^2} \quad \text{а} \quad R_2 = \sqrt{(h+z)^2 + r^2},$$

который при $r=0$ принимает вид $\varphi_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln(h-z) - \ln(h+z))$.

Поверхностный заряд, наводимый заряженной нитью на проводящей поверхности при $z=0$ $\xi_{z=0} = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z_{z=0}} = -\frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{(h-z) + (h+z)}{h^2 + z^2} = -\frac{\tau}{\pi h}$.

Чтобы сила, действующая на провод была равна нулю, необходимо вы-

полнить равенство $\xi = |\xi_{z=0}| = \frac{\tau}{\pi h}$ откуда высота подвеса должна быть

$$\text{равна } h = \frac{\tau}{\pi \xi}.$$

На основании этого закона, в следующей задаче находится сила, с которой проводящие плоскости действуют на точечный заряд.

Задача №13

Найти силу, действующую на точечный заряд q , помещенный на расстояниях $a = 4$ см и $b = 3$ см от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол (рис. 2.8).

Решение:

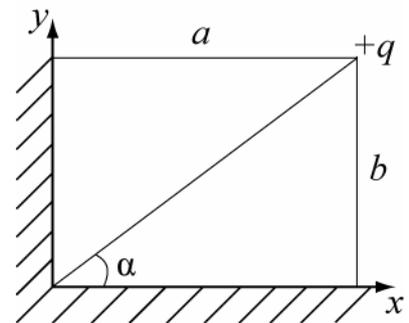


Рис. 2.8

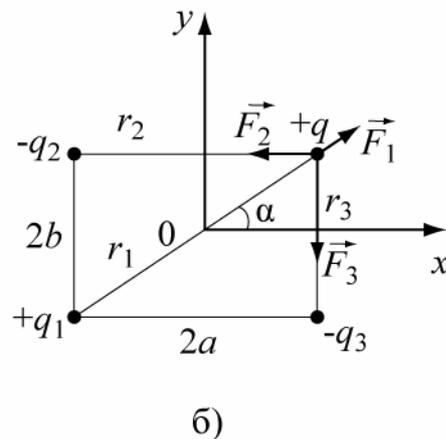
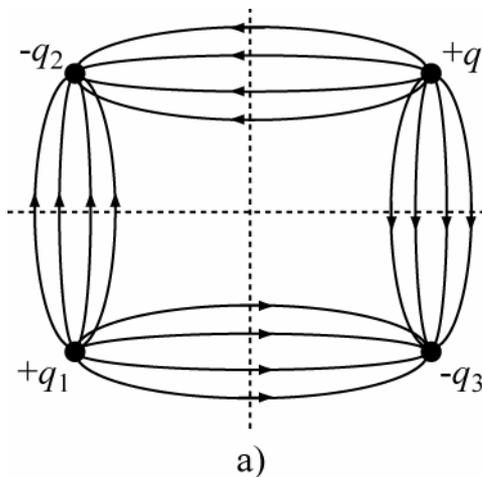


Рис. 2.9

Применяем метод зеркальных изображений. Отобразим зеркально заряд $+q$ в проводящих плоскостях. Получим дополнительные заряды $(+q_1)$, $(-q_2)$, $(-q_3)$, как показано на рис. 2.9а, там же нарисованы электрические поля системы. Определяем силу, действующую на заряд q со стороны трех зарядов $q_1, q_2,$

q_3 (направление силы от положительного заряда к отрицательному, рис. 2.9,б). Согласно принципу суперпозиции на заданный заряд действуют 3 силы, результирующая сила - векторная сумма трех составляющих:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

где F_1 - сила взаимодействия между зарядами $+q_1$ и q ;

F_2 сила взаимодействия между зарядами $-q_2$ и q ;

F_3 - сила взаимодействия между зарядами $-q_3$ и q .

Находим расстояния r_1, r_2, r_3 между зарядами

$$r_2 (-q_2 - +q) = 2a = 8 \text{ см}, \quad r_{1(+q_1 - +q)} = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 10 \text{ см}, \quad r_3 (-q_3 - +q) = 2b = 6 \text{ см}$$

Представим силу \vec{F}_1 в виде проекций на оси x и y

$$\vec{F}_1 = (\vec{x}^0 \cos\alpha + \vec{y}^0 \sin\alpha) \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_1 r_1^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_1 r_1^2} (0.8\vec{x}^0 + 0.6\vec{y}^0)$$

Поскольку сила \vec{F}_2 направлена против оси x , то проекция результирующей силы на ось x будет равна

$$F_{x=} = F_{1x} - F_2 = \frac{q^2 \cdot 0.8}{4\pi\epsilon r_1^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon r_2^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} 0.0076$$

Аналогично, определится проекция результирующего поля на ось y

$$F_{y=} = F_{1y} - F_3 = \frac{q^2 \cdot 0.6}{4\pi\epsilon\epsilon_1 r_1^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_3 r_3^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} 0.0218$$

Величина результирующей силы составит

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} 0.0231$$

Задача № 14

Определите энергию электрического поля, запасенную в объеме цилиндра радиуса $R=1\text{М}$ и длиной $l=1\text{м}$. Ось цилиндра совпадает с осью OZ (см. рис.

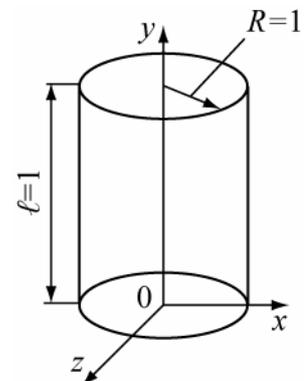


Рис. 2.10

2.10). Потенциал внутри цилиндра известен $\varphi = x^2 + y^2, [\text{В/м}^2]$.

Решение

Определим энергию электрического поля, запасенную в объеме цилиндра по формуле (2.17) $W_{\text{Э}} = \frac{\varepsilon}{2} \int_V |E|^2 dV$. Запишем заданный потенциал в цилиндрической системе координат $\varphi = x^2 + y^2 = r^2$ и элемент объема цилиндра $dV = r dr d\alpha dz$. Определим напряженность электрического поля как $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2r$ Тогда

$$W_{\text{Э}} = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^l 4r^2 r dz d\alpha dr = \frac{\varepsilon}{2} l \cdot 2\pi \cdot \frac{4R^4}{4} = \pi \varepsilon R^4 l$$

Ответ: Для числовых значений задачи $W_{\text{Э}} = \pi \cdot \varepsilon$.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

2.1. Две плоские металлические пластины разделены слоем однородного диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ε . На верхнюю пластину подан потенциал $-U_0$, нижняя пластина заземлена. Найти потенциал φ между пластинами, напряженность поля \vec{E} , вектор электрического смещения \vec{D} , заряд на одной из пластин q и емкость системы C . Линейные размеры пластин a и b много больше размера d

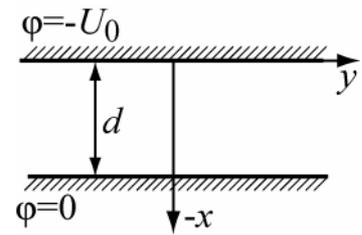


Рис. 2.11

Получить выражение для потенциала между пластинами плоского конденсатора, изображенного на рис. 2.11.

Ответ: $\varphi = -\frac{U_0}{d} \cdot x - U_0$.

2.2. Два бесконечно длинных металлических коаксиальных цилиндра с радиусами $R_1 = 1$ см, $R_2 = 2$ см, образуют конденсатор. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Определите ёмкость конденсатора на единицу длины.

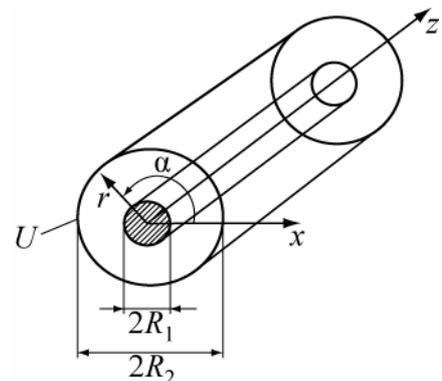


Рис. 2.12

Ответ: $0,08 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м} = 0,08 \text{ пФ/м}$.

2.3. Два коаксиальных металлических цилиндра радиуса R_1 и R_2 разделены слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . На внешний цилиндр подан потенциал U , внутренняя пластина заземлена (рис. 2.12). Найти распределение потенциала φ между цилиндрами, а также E, D, ξ, C . Краевыми эффектами пренебречь.

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{U \cdot \ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad D_r = \epsilon E_r, \quad E_r = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{U}{r \cdot \ln(R_2/R_1)},$$

$$\xi_1 = -\epsilon U \frac{1}{R_1} / (\ln(R_2/R_1)) \quad \text{при } r = R_1, \quad \xi_2 = -\epsilon U \frac{1}{R_2} / (\ln(R_2/R_1)) \quad \text{при } r = R_2$$

$$q = \xi \cdot 2\pi R_1 L = \xi_2 \cdot 2\pi R_2 L, \quad C = \epsilon \cdot 2\pi L / (\ln(R_2/R_1)).$$

2.4. Определить емкость двухслойного (ϵ_1, ϵ_2) сферического конденсатора C , размеры которого R_1, R_2, R_3 , причем $R_1 < R_2 < R_3$.

$$\text{Ответ: } C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_1 = \epsilon_0 \frac{4\pi R_2 R_1}{R_2 - R_1}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{4\pi R_2 R_3}{R_3 - R_2}.$$

2.5. Внутренняя поверхность полусферы имеет положительный заряд q . Чему равен потенциал в центре полусферы?

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\xi}{R} ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R}$$

2.6. Заряженный металлический шар, радиусом 3 см находится в воздухе. Известно, что при напряжённости поля 30 кВ/см в воздухе происходит пробой. Определите предельно допустимый заряд шара, обеспечивающий отсутствие пробоя.

Ответ: $6,857 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$.

2.7. Бесконечная металлическая плоскость [2] несёт поверхностный заряд $\xi = 6,6 \cdot 10^{12} \text{ Кл/м}^2$. Найти величину полей E и D в пространстве вблизи поверхности, если диэлектрическая проницаемость $\epsilon_a = \epsilon_0$

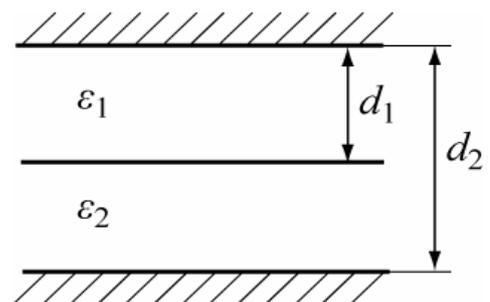


Рис. 2.13

Ответ: $E=0,373 \text{ В/м}$; $D=6,6 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$.

2.8. Определить емкость плоского двухслойного конденсатора, размеры которого показаны на рис. 2.13. Определить, во сколько раз увеличится емкость этого конденсатора, если толщину первого слоя сделать равной нулю, а $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$.

$$\text{Ответ: } C = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 (d_2 - d_1)}, \text{ в } 1/3 \text{ раз.}$$

2.9. Цилиндрический электронный поток радиуса R создаёт ток переноса I_0 , с объёмной плотностью движущегося заряда ρ , и скоростью движения заряда V_0 и площадью поперечного сечения пучка S .

Прямым интегрированием уравнения Пуассона найти с точностью до постоянных C потенциал и напряженность электрического поля E_r на границе пучка, которая способствует его расфокусировке.

$$\text{Ответ: } \varphi = -\frac{I_0}{4\pi\varepsilon v_0} + C \ln R + B, \quad E_r = \frac{I_0}{2\pi\varepsilon v_0 R} - \frac{C}{R}.$$

2.10. Определить напряженность электрического поля на оси z , являющейся осью симметрии равномерно заряженного кольца радиуса r , пренебрежимо малой толщины и расположенного в воздухе (рис. 2.14). Полный заряд кольца равен q .

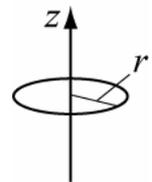


Рис. 2.14

$$\text{Ответ: } E_z = \frac{q \cdot z}{4\pi \varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

2.11. Найти выражение для электрической энергии, запасаемой сферическим конденсатором, внешний и внутренний радиусы которого R_2 и R_1 соответственно, заряд на одном из электродов q , параметр среды ε .

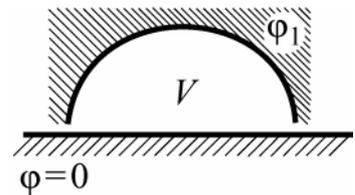


Рис. 2.15

$$\text{Ответ: } W^{\text{э}} = \frac{q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon R_1 \cdot R_2}.$$

2.12. Используя требования теоремы единственности (однозначности потенциала и его конечности в любой точке пространства), проведите выбор по-

стоянных в выражении $\varphi = (C_\lambda \cdot \frac{1}{r^\lambda} + D_\lambda \cdot r^\lambda) \cdot (A_\lambda \cdot \cos \lambda \cdot \alpha + B_\lambda \cdot \sin \lambda \cdot \alpha)$, определяющего потенциал в области V , ограниченной двумя бесконечными по оси z и изолированными друг от друга электродами (см. рис. 2.15). Полуцилиндрический электрод имеет потенциал φ_1 , плоский - $\varphi=0$.

Ответ: $C_\lambda = A_\lambda = 0, \lambda = n$.

2.13. Найти распределение потенциала φ и напряженность поля между электродами, изображенными на рис. 2.16. Пластины при $r=0$ изолированы друг от друга и бесконечны в направлении осей r и z . При решении учесть, что φ зависит только от цилиндрической координаты α .

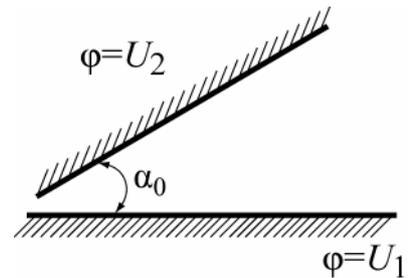


Рис. 2.16

Ответ: $\varphi = \frac{U_2 - U_1}{\alpha_0} \cdot \alpha + U_1, \quad E_\alpha = -\frac{U_2 - U_1}{r \cdot \alpha_0}$.

2.14. При проведении испытаний на электрический пробой коаксиальной линии передачи, образованной двумя цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) было получено, что пробой наступает при разности потенциалов U_0 . Затем радиус внутреннего цилиндра был уменьшен вдвое.

Определите для новой системы пробивную разность потенциалов.

Ответ: $U = U_0 [1 + \ln 2 / \ln (R_2 / R_1)]$.

2.15. Определить радиус уединенной сферы емкостью 10 пФ . Среда вакуум.

Ответ: $r = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

2.16. Металлический шар радиуса $0,2 \text{ м}$ несет на себе заряд $q = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon = 3\epsilon_0$. Подсчитать энергию электрического поля.

Ответ: $W_\ominus = 27 \text{ Дж}$.

2.17. Вывести выражения, определяющие электрическое поле электростатического диполя (см. рис. 2.17) и уравнение его силовых линий.

Ответ: $\vec{r} = \vec{r}^0 \sin^2 \theta$;

$$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\epsilon r^3}(\vec{r}^0 2\cos\theta + \vec{\theta}^0 \sin\theta)$$

2.18. Нить длиной ℓ имеет на единицу длины заряд $\tau = \tau_0 \sin \frac{\pi}{a} \ell$. Вычислить

полный заряд нити при $\ell = \frac{a}{4}$; $\frac{a}{2}$.

$$\text{Ответ: } q_{/\ell=\frac{a}{4}} = \frac{\tau_0 a \sqrt{2}}{2\pi}; \quad q_{/\ell=\frac{a}{2}} = 0.$$

2.19. Бесконечная металлическая плоскость имеет поверхностную плотность заряда $6,6 \cdot 10^{-12}$ Кл/м². Найдите величину полей \vec{E} и \vec{D} в пространстве вблизи поверхности, предполагая проницаемость $\epsilon = \epsilon_0$

$$\text{Ответ: } E=0,373 \text{ В/м; } D=\pm 3,3 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3.$$

2.20. Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $R_1=1$ см, $R_2=2$ см, выполненные из металла образуют конденсатор. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Определите ёмкость конденсатора на единицу длины.

$$\text{Ответ: } 0,08 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м} = 0,08 \text{ пФ/м}.$$

2.21. Задан потенциал $\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$, где r - цилиндрическая координата. Определить объёмную плотность заряда, создающее это поле, считать $\epsilon = \epsilon_0$.

$$\text{Ответ: } \rho = -8\epsilon_0.$$

2.22. Над положительно заряженной, металлической плоскостью с поверхностной плотностью заряда ξ помещен точечный заряд $+q$. На какой высоте h сила, действующая на заряд равна нулю?

$$\text{Ответ: } h = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{q}{\pi \cdot \xi}}$$

2.24. Диэлектрическая проницаемость среды равна $\epsilon = x \cdot \epsilon_0$. Найти выражение для напряженности поля E , полагая, что объёмные заряды отсутствуют.

Ответ: $E_x = A / (x \cdot \epsilon_0)$

2.25. Заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$ распределен в объеме сферы радиусом a . Определить закон изменения напряженности и индукции электрического поля внутри и вне сферы. Описать поведение векторов \vec{E} и \vec{D} при переходе границы сфера-воздух. Вычислить энергию электрического поля, создаваемую заряженной сферой. Диэлектрическая проницаемость материала сферы ϵ , среды - ϵ_0 .

Ответ: $E_{\text{внеш}} = \frac{\rho_0 a^3}{4r^2 \epsilon_0}$; $E_{\text{внутр}} = \frac{r^2 \rho_0}{4a\epsilon}$; $W_{\text{э}} = \frac{\rho_0^2 a^5 \pi}{42\epsilon}$

2.26. Чему равна полная электрическая сила, действующая на единицу положительного заряда, помещенного в центре квадрата со стороной b , если по углам заряда расположены заряды $q, 2q, -4q, 2q$.

Ответ: $F = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 b^2}$.

2.27. Начало прямоугольных декартовых координат помещено в геометрическом центре заряженного проводящего шара. Найти заряд шара, если разность потенциалов точек $A(-14, 4, 8)$ и $B(-12, 16, 0)$ (в сантиметрах) равна 30 В, а радиус шара $r = 2$ мм.

Ответ: $q = 3,3 \cdot 10^{-9}$ Кл.

2.28. Найти объемное распределение зарядов, создающих в вакууме потенциал $\varphi = \frac{q \cdot \ell \cdot \frac{r}{a}}{r}$.

Ответ: $\rho = -\frac{\epsilon_0 q \cdot \ell \cdot \frac{r}{a}}{ra^2}$

2.29. Установлено, что вертикальная составляющая напряженности электрического поля вблизи земной поверхности $E_n = 300$ В/м. Найти поверхностную плотность заряда земли.

Ответ: $\xi_3 = 2,65 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

2.30. Вычислить энергию равномерно заряженного шара радиусом a , расположенного в воздухе. Диэлектрическая проницаемость шара ϵ , заряд q . Ответ:

$$W_{\text{э}} = \frac{q^2}{8\pi a} \left(\frac{1}{5\epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_0} \right).$$

2.31. Для коаксиального кабеля с размерами радиусов $R_1 = 1\text{мм}$, $R_2=4\text{мм}$ найти наибольшее допустимое напряжение, которое можно приложить к проводникам, чтобы запас электрической прочности был равен 5. Чему будет равна энергия электростатического поля кабеля при этом напряжении?

Ответ: 6930 В ; $24 \cdot 10^{-4}\text{ Дж/м}$.

2.32. Для сферического конденсатора с размерами радиусов обкладок R_1 , R_2 , к которым приложена разность потенциалов U , получить формулу для расчета запасенной в нём энергии.

Ответ: $W = 2\pi\epsilon_0 U^2 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} /$

2.33. При каком напряжении произойдет пробой в коаксиальном кабеле, имеющем размеры радиусов $R_1 = 2\text{мм}$, $R_2=4\text{мм}$, если пространство между проводниками заполнено полистиролом ($\epsilon_r = 2,5$), пробивная напряженность поля в котором $E_{\text{проб}} = 2,5 \cdot 10^7\text{ В/м}$?

Ответ: $3,15 \cdot 10^4\text{ В}$.

2.34. Вычислить силу притяжения между параллельными проводниками равных радиусов $R=1\text{см}$, с расстояниями между их осями $D \gg 2R$ и заряженных равными по величине и противоположенными по знаку зарядами. Длина проводников много больше расстояния $D=40\text{см}$. Между проводами приложено напряжение $U = 400\text{ В}$.

Ответ: $F = -\frac{\pi\epsilon_0 U^2}{2D(\ln D/R)^2} = 4,1 \cdot 10^{-7}\text{ Н}$.

3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В данном разделе рассматриваются темы:

1. Электрическое поле постоянного тока.
2. Магнитное поле постоянного тока.
3. Индуктивность и взаимная индуктивность.
4. Энергия магнитного поля.

3.1 Электрическое поле постоянного тока

Для случая постоянного тока ($\vec{j} \neq 0, \partial/\partial t = 0$) система уравнений для электрического поля имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E} \quad (3.1)$$

Первое уравнение (3.1) показывает, что электрическое поле постоянного тока подобно электростатическому полю потенциально. Но в отличие от электростатического, оно существует и в проводящей среде, где $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$. Если по проводнику протекает ток, то на его поверхности появляется отличная от нуля тангенциальная (касательная) составляющая напряженности электрического поля \vec{E} (см. рис. 3.1). Отношение нормальной составляющей E_n к тангенциальной E_τ для хороших проводников имеет порядок 10^5 , и E_τ пренебрежимо мало по сравнению с E_n .

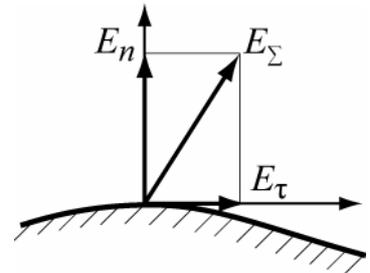


Рис. 3.1

При вычислении электрического поля в *идеальном диэлектрике*, окружающем проводник с постоянным током, можно пренебречь касательной составляющей напряженности электрического поля и считать, что электрическое поле в нем почти не отличается от электростатического.

Иное наблюдается *внутри проводника*. При наличии постоянного тока в проводящей среде существует электрическое поле, которое описывается

следующей системой дифференциальных и интегральных уравнений :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j}_{\text{ПП}} = \sigma \vec{E}. \quad (3.2)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \quad \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (3.3)$$

Сопоставим систему уравнений (3.2) и (3.3) с уравнениями электростатического поля в среде, не содержащей зарядов,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (3.4)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0, \quad (3.5)$$

Видим, что они совершенно одинаковы по форме. Уравнения электростатики (3.4) и (3.5) становятся справедливыми для электрического поля в проводящей среде, если электрическую индукцию \vec{D} заменить в них плотностью тока \vec{j} , а диэлектрическую проницаемость ϵ – удельной проводимостью σ .

$$\vec{D} \rightarrow \vec{j} \quad \text{и} \quad \epsilon \rightarrow \sigma. \quad (3.6)$$

Однако, тождественность уравнений еще не гарантирует тождественности их решений. Для этого необходимо также совпадение граничных условий .

Это совпадение имеет место только в слабо проводящих средах на границах с хорошими проводниками. Действительно, как следует из второго уравнения

(3.3), нормальная составляющая \vec{j} на границе двух сред непрерывна

$$j_{1n} = j_{2n}. \quad (3.7)$$

Касательные составляющие в силу непрерывности E_τ ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$)

связаны соотношением

$$j_{1\tau}/\sigma_1 = (j_{2\tau}/\sigma_2). \quad (3.8)$$

При достаточном различии проводимостей σ_1 и σ_2 составляющей $j_{1\tau}$ можно пренебречь и считать вектор \vec{j}_1 нормальным к границе. Таким образом, совпадение граничных условий для векторов \vec{D} в электростатике и \vec{j} в проводящих средах имеет место только на границах хороших проводников (металлов)

и слабо проводящих сред. В этих случаях решение соответствующей электростатической задачи может быть использовано для определения поля в слабо проводящей среде. В литературе этот метод называется *методом электростатической аналогии*.

Применительно к системе двух проводников (конденсатору) этот метод приводят к следующему соотношению между емкостью идеального (без потерь) конденсатора и проводимостью того же конденсатора но с потерями

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (3.9)$$

Это соотношение обычно используется для вычисления сопротивления изоляции между хорошими проводниками.

3.2. Магнитное поле постоянного тока

Для случая постоянного тока ($\mathbf{j} \neq 0, \partial / \partial t = 0$) система уравнений для магнитного поля имеет вид:

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	Уравнения Максвелла в интегральной форме
$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ $\text{div} \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$ $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

Если в области нет токов (магнитостатика), то в уравнениях (3.10) и (3.11) нужно положить $\vec{j} = 0$ и $I = 0$. В этом случае магнитное поле оказывается потенциальным и напряженность магнитного поля можно представить в виде

$$\vec{H} = -\text{grad} \varphi^M, \quad (3.12)$$

где φ^M - магнитостатический потенциал, который подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (3.13)$$

В тех случаях, когда в рассматриваемой области имеется ток ($\vec{j} \neq 0$) магнитостатический потенциал φ^M становится неоднозначной функцией. Разность значений между точками K_1 и K_2 зависит от контура, по которому выполняется интегрирование в формуле

$$\varphi_1^M - \varphi_2^M = \int_{K_1}^{K_2} \vec{H} d\vec{l}, \quad (3.14)$$

а именно, при каждом обходе контура вокруг тока I в положительном направлении (так, чтобы контур образовывал с направлением, в котором течет ток, правовинтовую систему) значение интеграла в (3.14) возрастает на величину I .

Таким образом, магнитостатический потенциал φ^M не позволяет установить однозначно связь между стационарным магнитным полем и создающим его постоянным током. Для определения магнитного поля обычно вводят векторный потенциал \vec{A} , связанный с вектором \vec{B} соотношением

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (3.15)$$

Векторный потенциал стационарного поля удовлетворяет векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}. \quad (3.16)$$

Если токи сосредоточены в ограниченной области V , на поверхности S или протекают по контуру L , то решение уравнения (3.16) можно получить из соответствующей формулы для:

объемных токов	поверхностных токов	линейных токов
$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dv \quad (3.17)$	$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}_S}{R} dS$ (3.18)	$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{\ell}}{R}$ (3.19)

где R - расстояние от элементов dv , dS или $d\vec{\ell}$ до точки, в которой вычисляется потенциал.

Переход от векторного потенциала \vec{A} к напряженности магнитного поля \vec{H} производится по формуле (3.15). Предположение, что пространство запол-

нено однородной изотропной средой приводит к следующим вариантам закона Био – Савара в интегральной форме

Для объемных токов	Для поверхностных токов	Для линейных токов
$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}_0]}{R^2} dV \quad 3.20)$	$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{[\vec{j}_s, \vec{r}_0]}{R^2} dS \quad 3.21)$	$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}_0]}{R^2} \quad 3.22)$

Дифференциальная форма закона Био – Савара для линейных токов представляется в виде

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\vec{\ell}, \vec{r}_0]. \quad (3.23)$$

В таком виде закон Био-Савара определяет магнитное поле $d\vec{H}$ в точке М, создаваемое элементом тока $I d\ell$ (см. рис. 3.2).

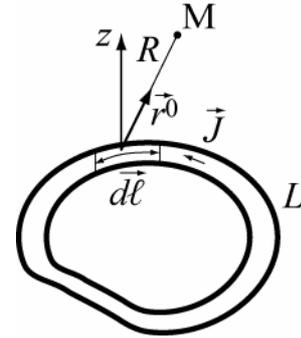


Рис. 3.2

3.3. Энергия магнитного поля постоянного тока

Известно, что с магнитным полем в объеме V связана магнитная энергия

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \vec{H}^2 dV, \quad (3.24)$$

с плотностью энергии

$$w^M = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} = \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \quad (3.25)$$

С учетом (3.15) и (3.16) выражение (3.24) приводится к виду

$$W^M = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV, \quad (3.26)$$

где магнитная энергия представлена через объемные токи и векторный потенциал. В случае линейных токов выражение для энергии магнитного поля упрощается. Например, формула (3.26) с учетом (3.19) для уединенного контура L с током I примет вид

$$W^M = \frac{1}{2} \oint_L \vec{A} d\vec{\ell}. \quad (3.27)$$

Применим к интегралу в (3.27) теорему Стокса (П1.26), получим

$$\oint_L \vec{A} d\vec{\ell} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi, \quad (3.28)$$

где Φ – магнитный поток через поверхность S , опирающуюся на контур L .

Подставив (3.28) в (3.27), получим $W^M = I \cdot \Phi / 2$. (3.29)

В случае N контуров выражение для W^M записывается:

$$W^M = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N I_n \Phi_n, \quad (3.30)$$

где Φ_n – поток магнитной индукции, пронизывающий контур L_n ,

I_n -ток в контуре L_n .

3.4. Индуктивность и взаимная индуктивность

Так как поток магнитной индукции

$$\Phi = L \cdot I \quad (3.31)$$

пропорционален L – индуктивности контура, то

$$W^M = I \cdot \Phi / 2 = LI^2 / 2 \quad (3.32)$$

В случае N контуров поток Φ_{nk} пропорционален току I_k :

$$\Phi_{nk} = M_{nk} I_k \quad (3.33)$$

Коэффициент пропорциональности M_{nk} при $k \neq n$ называют *взаимной индуктивностью* контуров L_k и L_n , а коэффициент M_{kk} – *собственной индуктивностью* контура L_k . Взаимная индуктивность определяется следующим выражением

$$M_{nk} = \frac{\mu}{4\pi L_n L_k} \oint_{L_n} \oint_{L_k} \frac{d\vec{l}_n d\vec{l}_k}{r} \quad (3.34)$$

Формула симметрична относительно индексов n и k . Это значит, что совершенно такое же выражение будет получено и для взаимной индуктивности M_{kn} , определяемой равенством

$$\Phi_{kn} = M_{kn} I_n, \quad (3.35)$$

где Φ_{kn} – магнитный поток (потокосцепление), обусловленный током контура L_n и проходящий через поверхность, ограниченную контуром L_k .

Формула (3.34) дает возможность вычислять в конкретных случаях взаимные индуктивности по одному лишь взаимному расположению контуров.

Как видно, взаимная индуктивность контуров L_k и L_n зависит только от параметров среды, взаимного расположения и не изменяется при перестановке индексов (свойство взаимности):

$$M_{nk} = M_{kn}. \quad (3.36)$$

3.5 Примеры решения типовых задач

Задача № 1 (проводимость изоляции)

Определить проводимость плоского конденсатора, если заданы: S – площадь пластин, d – расстояние между ними, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика в конденсаторе, σ – удельная проводимость диэлектрика. Определить мощность, выделяющуюся в конденсаторе в виде тепла, если к нему приложено напряжение U . Поле в конденсаторе считать однородным. Дать численный ответ задачи, если $S=10 \text{ см}^2$, $d=0.5 \text{ см}$, $\epsilon_r=4$, $\sigma=10^{-6} \text{ См/м}$, $U=100 \text{ В}$.

Решение.

Задачу можно решить двумя способами. В первом - получим формулу для проводимости путем следующих рассуждений. В диэлектрике конденсатора под действием напряженности поля E возникает ток утечки, подчиняющийся закону Ома $j_{np} = \sigma E$. Поскольку поле в конденсаторе предполагается однородным, то $E = U/d$ и $I = j_{np} S$. Проводимость конденсатора определится как

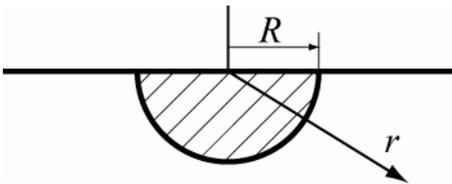
$$G = I/U = \frac{\sigma \cdot S}{d}.$$

Второй способ состоит в использовании соотношения между емкостью и проводимостью (3.9). Емкость плоского конденсатора равна $C = \frac{\epsilon S}{d}$, так что

полученная выше формула для проводимости получается заменой ϵ на σ в формуле для емкости.

Проведем численные расчеты. Определим вначале емкость конденсатора. $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = 0,707$ пФ, $G = 2 \cdot 10^{-8}$ См, $P = U^2 \cdot G = 2 \cdot 10^{-4}$ Вт.

Задача № 2 (шаговое напряжение)



Заземление представляет собой металлическую полусферу, погруженную в землю, как показано на рисунке. R – радиус заземления, r – расстояние от его центра до произвольной точки

внутри земли. σ – удельная проводимость земли. К заземлению подводится ток I , который растекается в толще земли к другому заземлению, которое находится достаточно далеко. Определить сопротивление заземления, пренебрегая собственным сопротивлением металла, и шаговое напряжение на расстоянии 2 м от заземления. Принять $R = 20$ см, $\sigma = 10^{-2}$ См/м, $I = 1000$ А (ток короткого замыкания на линии передачи)

Решение.

Поскольку расстояние до второго заземления предполагается большим, то поле в земле можно считать зависящим только от расстояния r и не зависящим от угловых координат точки наблюдения. Плотность тока в земле на расстоянии r будет равна $j_{np} = \frac{I}{2\pi r^2}$. Из закона Ома $j_{np} = \sigma E$ получим

$E(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$. Определим напряжение на заземлении по отношению к бесконечно удаленной точке $U = \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma R}$.

Проводимость заземления будет равна $2\pi\sigma R$, а сопротивление – обратной величины.

Конечно, формулу для проводимости заземления можно было получить проще, воспользовавшись методом электростатической аналогии, т.е. формулой (3.9). При этом нужно принять емкость полусферы равной половине

емкости сферы, т.е. $C = 2\pi\epsilon R$. Определим шаговое напряжение, т.е. напряжение между точками на поверхности земли на расстоянии одного шага $-l$

$$U_{ш} = \int_r^{r+l} E(r) dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_r^{r+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{l}{r(r+l)} \right)$$

Проведем численные расчеты.

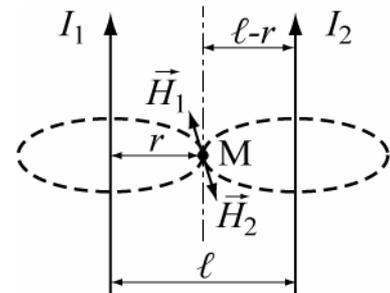
Сопротивление заземления $R_3 = \frac{U}{I} = (2\pi\sigma R)^{-1} = 79,6$ Ом. Шаговое напряжение

на расстоянии $r=2$ м длине шага $l=0,8$ м $U_{ш} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{l}{r(r+l)} \right) = 2,27$ кВ

Таким образом, нахождение человека вблизи заземления при аварии на линии может быть опасным для жизни.

Задача № 3 (закон полного тока)

По двум параллельным, прямолинейным проводникам текут токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 1$ А. Расстояние между проводниками l (рис. 3.3). Определите расположение линии, которой магнитное поле равно нулю.



на

Рис. 3.3

Решение

Магнитное поле вне бесконечного проводника с током I было определено в разделе 1 (формула 1.18). $H = I / 2\pi r$.

(3.37)

Следовательно, для первого и второго проводов магнитные поля соответственно равны

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}, \quad H_2 = \frac{I_2}{2\pi(l-r)},$$

Согласно правилу буравчика убеждаемся, что на линии l направление векторов \vec{H}_1 и \vec{H}_2 будут противоположными. Следовательно, в некоторой точке M суммарная напряженность магнит-

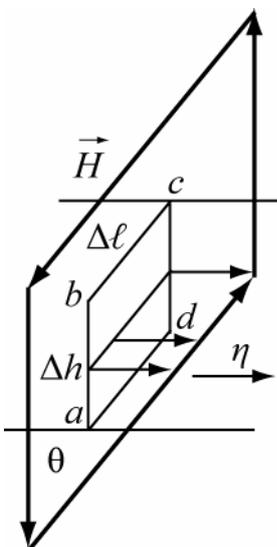


Рис. 3.5

ного поля будет равна нулю. Приравняв H_1 и H_2 , получим

$$\frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_2}{2\pi(\ell-r)}; \quad \text{Отсюда } r = 2\ell/3$$

Задача № 4 (поверхностный ток)

При изготовлении пластмассовой пленки полоса шириной $\Delta\ell$ и толщиной Δh ($\Delta h \ll \Delta\ell$) протягивается со скоростью v через два последовательно расположенных ролика

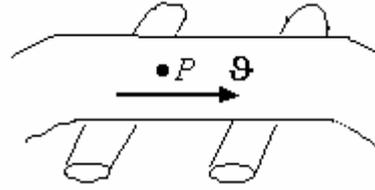


Рис. 3.4

(рис. 3.4). В процессе протягивания пленка электризуется и приобретает поверхностную

плотность заряда ξ . Определить напряженность магнитного поля в точке P , находящейся вблизи поверхности листа.

Решение

В процессе протягивания заряженной тонкой пленки со скоростью v создается поверхностная плотность тока $\bar{\eta}$ ($\bar{\eta} = \xi\bar{v}$) (*). Силовые линии магнитного поля \vec{H} замыкаются вокруг пленки (рис. 3.5)

Определим величину магнитного поля \vec{H} , создаваемого током $I = \eta \cdot \Delta\ell$. Для этого перпендикулярно поверхности пленки расположим плоскость θ и рассмотрим циркуляцию вектора \vec{H} по прямоугольному контуру a-b-c-d с размерами $\Delta\ell \cdot \Delta h$, лежащему в плоскости θ ($\Delta\ell \gg \Delta h$).

Воспользуемся законом полного тока $\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = I$.

Совместим направление тока с поступательным движением буравчика, тогда направление его вращения определит направление вектора \vec{H} . Циркуляцию вектора \vec{H} можно представить в виде

$$H\Delta\ell + H\Delta\ell = I = \eta\Delta\ell.$$

Отсюда получаем $H = \frac{3}{2} \eta$ или учетом (*) $\vec{H} = \xi\bar{v}/2$.

Задача №5 (поле отрезка проводника с током)

Определить напряженность магнитного поля в точке M , создаваемую отрезком линейного провода с током I . (рис.3.6а). Точка M удалена от провода на расстояние b . Проводник на рисунке выделен более жирной линией.

Решение

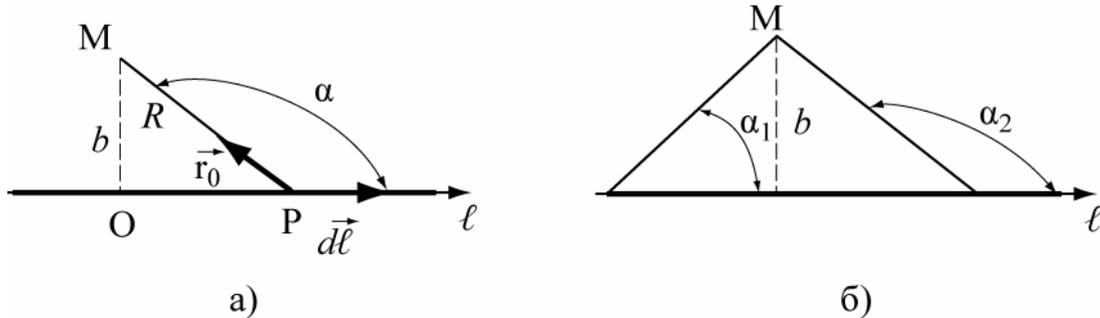


Рис. 3.6

Поскольку проводник с током является линейным, то воспользуемся законом Био-Савара для линейных токов (формула 3.22).

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}_0]}{R^2}$$

Нанесем на рисунок векторы $d\vec{\ell}$ и \vec{r}_0 в текущей точке интегрирования P .

Вектор $d\vec{\ell}$ направим по направлению тока, показанному стрелкой. Координату l будем отсчитывать от т. O – проекции т. M на проводник. Векторное произведение $[d\vec{\ell}, \vec{r}_0]$ направлено к нам и равно $dl \cdot \sin \alpha$. Из

$\triangle OMP$ найдем $OP = l = b \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -b \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Дифференцируя это соотношение, получим

$$dl = -\frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \text{ Учтем также, что } R = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$$

В результате поле dH в точке M от элемента тока dl будет равно

$$dH = \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{b}. \text{ Проинтегрируем это выражение от угла } \alpha_1 \text{ до угла } \alpha_2, \text{ под}$$

которыми концы отрезка видны из т. M рис.3.6б). В результате получим

$$H(M) = \frac{I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (3.38)$$

Поскольку углы α_1 и α_2 не зависят от положения т.О, то полученное соотношение является не зависящим от выбора системы координат. Если применить эту формулу к бесконечно длинному проводу, то $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$. В результате $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2$ и формула (3.38) переходит в формулу (3.37).

Задача № 6 (поле катушки Гельмгольца)

Для создания магнитного поля в некотором объеме используются катушки Гельмгольца, которые представляют собой два параллельных витка провода радиуса « a », находящиеся на расстоянии « b » друг от друга (рис. 3.7). По проводам течет ток I в одном направлении. Определить напряженность поля на оси витков в точке P , расположенной на расстоянии z от центральной точки O системы.

Решение

Для нахождения поля в точках на оси витка (в точке P), используем принцип суперпозиции. Напряженность поля H определяется суммой полей H_1 и H_2 , созданных каждым витком в отдельности. Поле отдельного витка можно найти, используя закон Био-Савара в дифференциальной форме (3.23).

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\vec{l}, \vec{r}_0]$$

Вектор $d\vec{H}$, создаваемый элементом $d\vec{l}$ перпендикулярен векторам $d\vec{l}$, и \vec{r}_0 (рис. 3.8,а) и имеет две компоненты – радиальную и продольную $d\vec{H} = d\vec{H}_r + d\vec{H}_z$. Для вычисления полного поля H надо выражение $d\vec{H}$ проинтегрировать по длине витка. При интегрировании радиальная часть поля окажется равной нулю, поэтому определим только dH_z .

$$\vec{H} = \int_L (d\vec{H}_r + d\vec{H}_z) = \int_L d\vec{H}_z.$$

Для этого найдем вначале величину поля $d\vec{H}$.

Поскольку $d\vec{l} \perp \vec{r}_0$, и $|\vec{r}_0| = 1$, то $dH = \frac{I}{4\pi R^2} dl$. Из ри-

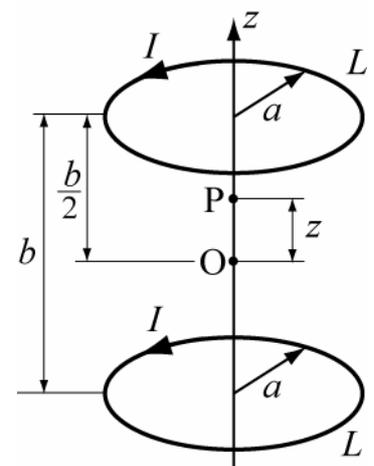


Рис. 3.7

сунка 3.8б видно, что $dH_z = dH \cdot \sin\theta$. Поскольку $\sin\theta = a/R$, то $dH_z = \frac{Ia}{4\pi R^3} dl$

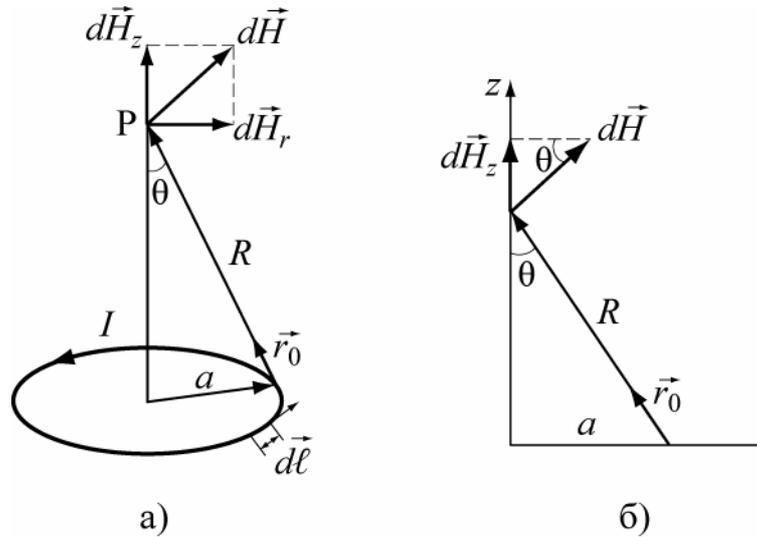


Рис. 3.8

Интегрирование по длине витка сводится к замене dl на длину витка $2\pi a$.

Поле от одного витка в точке P будет равно $H(P) = \frac{Ia^2}{2R^3}$.

В обозначениях условия задачи (рис.3.7)

$$R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2} + z\right)^2} \text{ - для нижнего витка и } R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2} - z\right)^2} \text{ - для верх-$$

него. Таким образом, полное поле в точке P будет равно

$$H = \frac{I}{2} a^2 \left\{ \left[a^2 + \left(\frac{b}{2} - z\right)^2 \right]^{-3/2} + \left[a^2 + \left(\frac{b}{2} + z\right)^2 \right]^{-3/2} \right\}.$$

Задача № 7 (внутренняя индуктивность проводников)

Вдоль проводника в виде металлической трубы внутренним радиусом R_1 и внешним - R_2 (рис. 3.9) протекает постоянный ток с плотностью \vec{j} . Определить внутреннюю индуктивность отрезка трубы длиной ℓ и сплошного проводника с радиусом R_2 .

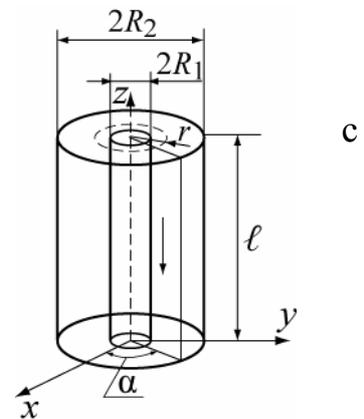


Рис. 3.9

Решение

В данной задаче индуктивность проще определить через магнитную энергию.

$$W^M = \frac{\mu}{2} \int |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{2} I^2 L \quad (3.39)$$

Поскольку магнитное поле существует внутри и снаружи проводника, то магнитную энергию и индуктивность можно разделить на внутреннюю и внешнюю. Определим в этой задаче только внутреннюю индуктивность, поскольку для решения внешней задачи не хватает данных – не задан внешний контур с током.

Определим $I(r)$ и $H(r)$ в разных точках поперечного сечения рисунка 3.9. Для этого воспользуемся законом полного тока. $\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = I$, в котором I есть ток, пронизывающий контур L . Согласно этому закону, магнитное поле внутри трубы ($r < R_1$) будет равно нулю, поскольку нет тока, пронизывающего контур в этой области. Внутри проводника ($R_1 \leq r \leq R_2$) контур радиуса r будет пронизываться частью полного тока.

$$I(r) = \pi(r^2 - R_1^2) j$$

Очевидно, что величина $I(R_2)$ дает полный ток в трубе. Магнитное поле внутри проводника определится как

$$H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r} = \frac{j(r^2 - R_1^2)}{2r}, \quad (3.40)$$

Подставим полученное выражение в формулу для магнитной энергии (3.39) и будем интегрировать по объему проводника длиной l . Поскольку подынтегральная функция $H(r)$ зависит только от r , то элемент объема удобно представить в виде $dV = l \cdot 2\pi r dr$.

Определим магнитную энергию поля внутри проводника трубы

$$W^M = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{j^2 \cdot l \cdot 2\pi}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{r^2} (r^2 - R_1^2)^2 dr =$$

$$\frac{\mu \pi j^2 \cdot l}{4} \left\{ \frac{1}{4} R_2^4 - \frac{1}{4} R_1^4 - R_1^2 R_2^2 + R_1^4 + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right\} = \frac{1}{2} I^2 L.$$

Откуда получаем L в виде следующего соотношения:

$$L = \frac{\mu \cdot l}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)^2} \left\{ \frac{1}{4} R_2^4 + \frac{3}{4} R_1^4 - R_1^2 R_2^2 + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right\}.$$

Из этой формулы при $R_1=0$ находится внутренняя индуктивность проводника длиной ℓ

$$L = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \ell. \quad (3.41)$$

Задача № 8 (индуктивность тора)

Определить индуктивность катушки, состоящей из N витков, намотанных на тороидальный сердечник из магнитного материала с $\mu_r \gg 1$. В поперечном сечении сердечник тора имеет форму квадрата со сторонами, равными a , внутренний радиус тора - b , (рис. 3.10).

Определить также взаимную индуктивность тора и длинного прямолинейного провода, вытянутого вдоль оси симметрии тора.

Решение

Предположим, что по катушке течет ток I . Так как магнитная проницаемость сердечника велика, то потоком рассеяния магнитного поля можно пренебречь и считать, что магнитное поле отлично от нуля только внутри сердечника. Очевидно, что магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности с центрами на оси системы. Каждая силовая линия пронизывается N витками катушки с током I в каждом витке.

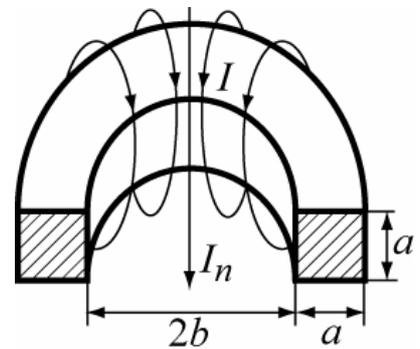


Рис. 3.10

Таким образом, ток ,пронизывающий каждую силовую линию равен NI , и закон полного тока для контура в виде силовой линии имеет вид

$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = 2\pi \cdot rH = NI$, где r - радиус силовой линии.. Отсюда напряженность маг-

нитного поля внутри тора будет равна $H_\alpha = NI / 2\pi r$

Индуктивность катушки может быть вычислена либо через магнитный поток (формула (3.31)), либо через магнитную энергию (формула (3.32)) Определим ее в данной задаче через магнитный поток. Контур, который пронизывается магнитным полем является сложным, состоящим из N витков провода.

Пусть Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий один виток. Тогда

$\Phi_1 = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS$, где S – площадь поперечного сечения сердечника. т.к.

\vec{B} параллелен $d\vec{S}$, а $dS = dz \cdot dr$, то

$$\Phi_1 = \mu \int_b^{b+a} \int_0^a \frac{I \cdot N}{2\pi r} dz dr = \frac{\mu I \cdot N \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{b+a}{b}$$

Поток, пронизывающий все витки катушки будет равен $N\Phi_1$

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{\mu I \cdot N^2 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{b+a}{b}$$

В результате индуктивность катушки определится выражением

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \cdot \frac{N^2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

Рекомендуется получить эту формулу путем вычисления магнитной энергии в сердечнике.

Определим далее взаимную индуктивность катушки и провода, лежащего на оси тороида. В данном случае лучше задаться током в проводе $-I_2$, поскольку поле от него выражается наиболее просто – формулой (3.37).

Магнитный поток, созданный проводом, через один виток равен

$$\Phi_1 = \mu \int_b^{b+a} \frac{I_2 a}{2\pi r} dr = \frac{\mu I_2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}.$$

Полный поток через N витков $-\Phi_{12}$ будет равен $N\Phi_1$ и в итоге взаимная индуктивность катушки и провода будет равна

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu a N}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} = \frac{L}{N}$$

3.6 Задачи для самостоятельного решения

3.1. Вычислить магнитную энергию, сосредоточенную внутри цилиндрического проводника единичной длины, с протекающим по нему током I_0 .

Ответ:
$$W_M = \frac{\mu_a \cdot I_0^2}{16\pi}.$$

3.2. Чему равен магнитный векторный потенциал \vec{A}_m в точке наблюдения, расположенной на оси кольцевого проводника радиуса a и током $I=1A$ на расстоянии 1 м от плоскости кольца?

Ответ: $|\vec{A}_m| = 0.$

.....3.3. По квадратной рамке со стороной a протекает ток I . Определить напряженность магнитного поля в центре рамки.

Ответ:
$$H = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a}$$

3.4. Определить взаимную индуктивность между прямоугольной рамкой и прямолинейным проводом с током I_2 , протекающим по нему (рис 3.11).

Ответ:
$$M_{1,2} = \frac{\mu_a \cdot b}{2\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell}.$$

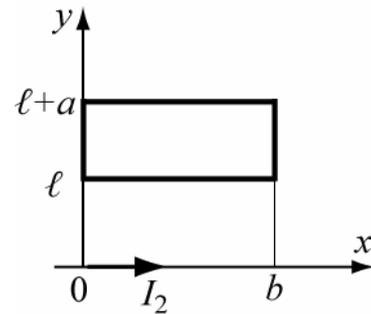


Рис. 3.11

3.5. Прямоугольный контур из тонкого проводника с размерами a и b расположен на удалении ℓ от бесконечного прямолинейного провода и наклонен относительно него на угол θ (рис. 3. 12). Определить взаимную индук-

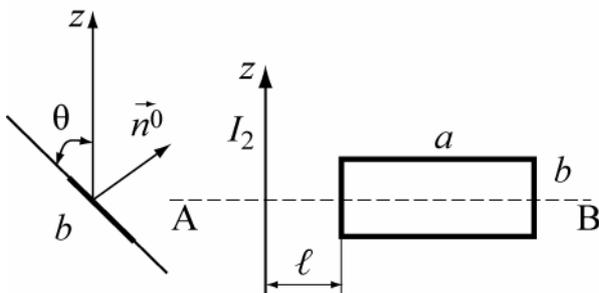


Рис. 3.12

тивность и провести расчет для $\theta=60^\circ$.

Ответ:
$$M_{1,2} = \frac{\mu_a \cdot b}{4\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell}.$$

3.6. Два кольцевых проводника с радиусами $R_1 \ll R_2$ лежат в одной плоскости. Считая, что поле в центре

большого кольца, где расположено малое кольцо, однородно и равно $B \cong \mu \cdot I_2 / (2 \cdot R_2)$, определить взаимную индуктивность. Как изменится взаимная индуктивность колец, если радиус R_1 уменьшить вдвое, а R_2 - вчетверо.

Ответ: Останется неизменным.

3.7. Металлический шар радиуса R закопан на большую глубину в землю, проводимость которой σ . Ток, вытекающий из поверхности шара, I . Получить выражение для разности потенциалов между шаром и любой точкой в почве, удаленной на расстояние r .

Ответ:
$$U = \frac{I}{4 \cdot \rho \cdot y} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

3.8. Вычислить сопротивление изоляции на единицу длины коаксиального кабеля, заполненного диэлектриком с проводимостью σ и заданным значением ϵ . Размеры кабеля заданы: радиус центральной жилы a_1 , радиус оплетки a_2 (рис. 3.14).

Ответ:
$$R = \frac{\ln \frac{a_2}{a_1}}{2\pi l \sigma}.$$

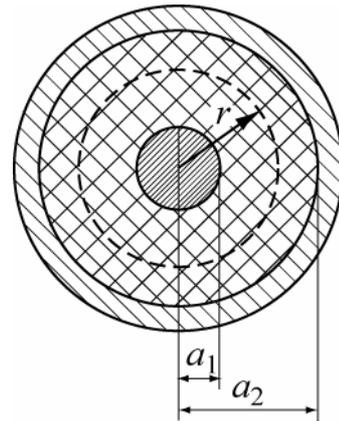


Рис. 3.14

3.9. Вдоль тонкостенной бесконечной трубы радиуса a и тонкого провода, расположенного вдоль оси трубы (рис. 3.15), протекают постоянные токи I_1 и $(-I_2)$.

Определить магнитное поле в точках, отстоящих от оси на расстояниях $a/2$ и $2 \cdot a$ в цилиндрической системе координат (r, z, α) ?

Ответ:
$$H_\alpha = \frac{-I_2}{\pi \cdot a}; H_\alpha = \frac{I_1 - I_2}{4 \cdot \pi \cdot a}.$$

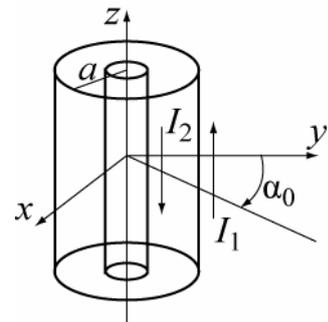


Рис. 3.15

3.10. Диэлектрик коаксиального кабеля имеет диэлектрическую прони-

цаемость ϵ и удельную проводимость σ .

Определить напряженность электрического поля внутри кабеля, если ток утечки на единицу длины задан I .

Ответ: $\vec{E} = \vec{r}^0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r}$.

3.11. Вычислить сопротивление заземлителя, выполненного в виде шара радиуса a . Шар закопан на глубину h на краю обрыва на расстоянии h от его края рис. 3.16. Проводимость почвы равна σ . Принять, что $a \ll h$.

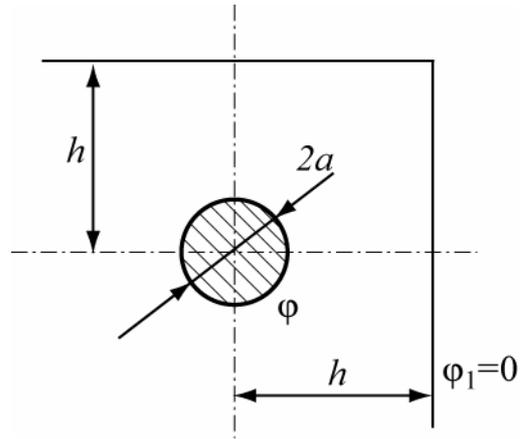


Рис. 3.16

Указание: Воспользоваться методом электростатической аналогии. При расчете емкости подобрать соответствующие зеркальные изображения шара и их заряды.

Ответ: $R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{h} \right]$.

3.12. В условии задачи №8 сердечник имеет воздушный зазор, которому соответствует центральный угол θ (рис. 3.17).

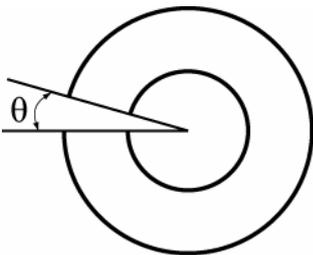


Рис. 3.17

Определить магнитную энергию в сердечнике и зазоре и соответствующие им индуктивности L_1 и L_2 . Провести численные расчеты для значений: $a=0.5$ см, $b=1$ см, $\mu_r = 100$, $\theta=5^\circ$, $I=1$ А.

На сколько процентов изменилась индуктивность катушки, по сравнению с целым сердечником?

Ответ: $L_1=2.72 \cdot 10^{-4}$ Гн, $L_2=6.03 \cdot 10^{-5}$ Гн, уменьшилась на 18 процентов.

Указание: Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.

4 ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В данном разделе рассматриваются темы:

- плоские волны в безграничных средах;
- отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела двух сред;

4.1 Плоские волны в безграничных средах

- Электромагнитная волна называется плоской, если ее фазовый фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью.
- Предположим, что в идеальном диэлектрике с параметрами ϵ , μ и $\sigma = 0$ в направлении оси z распространяется плоская монохроматическая волна с линейной поляризацией, причем вектор \vec{E} направлен вдоль оси x .

Мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \vec{x}^0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi), \\ \vec{H}(z,t) &= \vec{y}^0 H_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \end{aligned}, \quad (4.1)$$

где \vec{x}^0, \vec{y}^0 - единичные вектора (орты) по осям x и y , $\omega = 2\pi f$ - круговая частота, φ - начальная фаза, $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ - волновое число (или постоянная распространения) в данной среде, определяет фазовую скорость v_ϕ и длину волны λ в данной среде

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.2)$$

Из формулы (4.1) видно, что поля \vec{E} и \vec{H} в данном случае синфазные, отношение их амплитуд называется волновым (характеристическим) сопротивлением среды. В идеальном диэлектрике

$$Z_c = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}, \quad (4.3)$$

где $W_0 = 120\pi \approx 377$ Ом - волновое сопротивление вакуума.

С помощью волнового сопротивления можно записать общее соотношение между векторами \vec{E} и \vec{H} в плоской волне

$$\vec{E} = Z_c [\vec{H} \cdot \vec{z}^0], \quad (4.3a)$$

где \vec{z}^0 - орт в направлении распространения волны.

Для описания монохроматических полей удобно использовать метод комплексных амплитуд, согласно которому комплексные амплитуды полей (4.1) имеют вид (зависимость от времени принята в виде $e^{i\omega t}$)

$$\dot{\vec{E}}(z) = \vec{x}^0 \dot{E}_0 e^{-ikz}, \quad \dot{\vec{H}}(z) = \vec{y}^0 \dot{H}_0 e^{-ikz}, \quad (4.4)$$

где $\dot{E}_0 = E_0 e^{i\varphi}$, $\dot{H}_0 = H_0 e^{i\varphi}$

Если волна распространяется против оси z , то перед выражением kz в формулах (4.1) и (4.4) знак изменяется на «+».

• Если среда обладает тепловыми потерями энергии, определяемыми удельной проводимостью $\sigma \neq 0$, то в методе комплексных амплитуд это учитывается заменой ϵ на комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$ в выражениях для k и Z_c . Это приводит к тому, что волновое число k и волновое сопротивление Z_c также становятся комплексными

$$\dot{k} = k' - ik'' = \omega \sqrt{\mu \epsilon (1 - itg\Delta)}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu \cdot \cos \Delta}{\epsilon}} \cdot e^{i\frac{\Delta}{2}}, \quad (4.5)$$

где Δ - угол потерь, который определяется из соотношения $tg\Delta = \frac{y}{\omega \epsilon}$.

Наличие мнимой части волнового сопротивления в средах с потерями означает, что векторы \vec{E} и \vec{H} сдвинуты по фазе по отношению друг к другу на угол $\Delta/2$. С учетом соотношений (4.5) комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} (4.4) могут быть представлены в виде:

$$\dot{\vec{E}}(z) = \vec{x}^0 \dot{E}_0 e^{-k''z} e^{-ik'z}, \quad \dot{\vec{H}}(z) = \vec{y}^0 \dot{H}_0 e^{-k''z} e^{-ik'z}, \quad (4.6)$$

из которого видно, что k' является постоянной распространения и по-прежнему определяет фазовую скорость и длину волны в данной среде по формулам (4.2),

а k'' характеризует убывание амплитуд поля вдоль направления распространения z и называется коэффициентом затухания. Из формулы (4.5) для них получаются следующие выражения:

$$k' = k_0 \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + tg^2 \Delta})}, \quad k'' = k_0 \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + tg^2 \Delta})}, \quad (4.7)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ - постоянная распространения в данной среде, если бы потери в ней отсутствовали. Расстояние, на котором амплитуда волны уменьшится в $e \approx 2.71$ раз, называется глубиной проникновения и обозначается δ . Очевидно, что

$$\delta = 1/k''. \quad (4.8)$$

Затухание амплитуды векторов E или H на расстоянии l

$$L = \left| \frac{\dot{E}(0)}{\dot{E}(l)} \right| = e^{k''l}$$

может быть выражено в неперах (Нп) $L[Hn] = \ln L = k''l$ или в децибелах

$$L[\delta B] = 20 \lg e^{k''l} = k''l \cdot 20 \lg e = 8,68 k''l = 8,69 L[неп]. \quad (4.9)$$

при этом $1 Hn = 8.68 \delta B$.

• Среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга определяется через комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} соотношением

$$\vec{P}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^* \right] \quad (4.10)$$

и определяет среднюю по времени плотность потока мощности, т.е. среднюю за период колебаний энергию, переносимую волной за одну секунду через поверхность площадью 1 м^2 , перпендикулярную направлению распространения волны.

Если использовать связь векторов \vec{E} и \vec{H} через волновое сопротивление (4.3), то формуле (4.10) можно придать вид:

$$P_{cp} = \frac{|\dot{\vec{E}}|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\dot{Z}_c} \right) = \frac{1}{2} |\dot{\vec{H}}|^2 \operatorname{Re}(\dot{Z}_c). \quad (4.11)$$

В металлах $\text{tg}\Delta \gg 1$ и поэтому формулы (4.7) упрощаются так, что

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (4.12)$$

Волновое сопротивление металлов выражается формулой

$$\dot{Z}_c = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \quad (4.13)$$

• В общем случае векторы \vec{E} и \vec{H} могут иметь две ортогональные составляющие по осям x и y , оставаясь при этом ортогональными друг другу.

$$\dot{\vec{E}}(z) = (\bar{x}^0 \dot{E}_x^0 + \bar{y}^0 \dot{E}_y^0) e^{-ikz}. \quad (4.14)$$

В зависимости от соотношения амплитуд и фаз \dot{E}_x^0 и \dot{E}_y^0 выделяют три типа поляризации волны: линейную, круговую и эллиптическую. Линейной поляризации соответствуют случаи, когда либо одна из составляющих равна нулю, либо когда сдвиг фаз между ними равен 0 или 180° . Круговая поляризация наблюдается при одновременном выполнении двух условий: равенстве амплитуд E_x и E_y и сдвиге фаз между ними равным $\pm 90^\circ$. В остальных случаях поляризация волны будет эллиптической. Учитывая, что сдвиг по фазе $\pm 90^\circ$ соответствует значению фазового множителя

$$e^{\pm i90^\circ} = \pm i,$$

представим вектор \vec{E} для волны с круговой поляризацией в виде:

$$\dot{\vec{E}}(z) = \dot{E}_0 (\bar{x}^0 \pm i\bar{y}^0) e^{-ikz}. \quad (4.15)$$

При этом знак "–" соответствует правой круговой поляризации, при которой вектор \vec{E} вращается с течением времени по часовой стрелке, если смотреть в направлении распространения волны.

• Для аналитического представления полей \vec{E} и \vec{H} в плоских волнах, распространяющихся в произвольном направлении, составляющем углы α, β, γ с осями x, y, z используют понятие волнового вектора \vec{k} , который по величине равен волновому числу k и направлен в сторону распространения волны. Выражение для вектора E в этом случае представляется в виде

$$\dot{\vec{E}}(x, y, z) = \dot{\vec{E}}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (4.16)$$

где k_x, k_y, k_z - проекции вектора \vec{k} на оси x, y, z .

• В анизотропных средах некоторые из электромагнитных параметров среды представляются в виде тензоров (1.13). Рассмотрим особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах на примере ионизированного газа – плазмы и феррита, находящихся в постоянном магнитном поле H_0 . При оси z направленной вдоль H_0 , тензоры относительной диэлектрической (для плазмы) и относительной магнитной (для феррита) проницаемостей имеют вид

$$\|\varepsilon_r\| = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - ib & 0 & 0 \\ ib & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad \|\mu_r\| = \begin{pmatrix} \mu_x - i\alpha & 0 & 0 \\ i\alpha & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Среды, у которых анизотропия их свойств выражается тензорами такого вида называются гиротропными, т.е. способными вращать плоскость поляризации электромагнитной волны. Компоненты тензоров зависят в общем случае от частоты электромагнитной волны, величины H_0 , а также от собственных параметров среды. Например для плазмы, если не учитывать соударения электронов с молекулами, компоненты тензора определяются соотношениями

$$\varepsilon_x = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_m^2}, \quad b = \frac{\omega_0^2 \omega_m}{\omega(\omega^2 - \omega_m^2)}, \quad \varepsilon_z = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (4.18)$$

где $\omega_0 = |e| \sqrt{N_e / \varepsilon_0 m} = 56,38 \sqrt{N_e}$ - плазменная частота, ω – круговая частота волны, $\omega_m = \gamma \mu_0 H_0 = 2,21 \cdot 10^5 \cdot H_0$ - гиромангнитная частота электрона (частота свободного вращения электрона вокруг поля H_0), e и m – заряд и масса электрона, $\gamma = e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/Кг}$ - гиромангнитное отношение электрона,

N_e электронная концентрация эл/м³.

Для намагниченного феррита, также без учета потерь, компоненты тензора представляются в виде

$$\mu_x = 1 - \frac{\omega_s \omega_p}{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad \alpha = \frac{\omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad \mu_z \approx 1, \quad (4.19)$$

где $\omega_s = \mu_0 \gamma M_S$ – вспомогательный параметр, M_S – намагниченность насыщения феррита, $\omega_p = \mu_0 \gamma H_0$ – частота ферромагнитного резонанса (частота свободного вращения спина электрона в поле H_0).

В зависимости от ориентации направления распространения волны относительно H_0 выделяют два случая: продольного и поперечного распространения. При распространении волны вдоль H_0 (продольное распространение) наблюдается вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны = эффект Фарадея. Угол поворота на единицу длины пути волны определяется по-

стоянной Фарадея $R = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu_0}}{2} (\sqrt{\mu_x + \alpha} - \sqrt{\mu_x - \alpha})$ для феррита и

$$R = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{2} (\sqrt{\epsilon_x + b} - \sqrt{\epsilon_x - b}) - \text{для плазмы.} \quad (4.20)$$

При поперечном распространении волны в гиротропной среде возможно существование типов двух волн – обыкновенной и необыкновенной. Волна, у которой вектор \vec{E} направлен перпендикулярно оси z называется обыкновенной. Если же вектор \vec{E} параллелен оси z – то необыкновенной. Постоянные распространения этих волн выражаются через параметры тензора $\|\epsilon_r\|$ следующим образом

$$k_{об} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_z}, \quad k_{но} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(\epsilon_x^2 - b^2)}{\epsilon_x}}, \quad (4.21)$$

где c – скорость света.

Обыкновенная волна является плоской волной, распространяющейся в плазме при отсутствии магнитного поля. Необыкновенная волна имеет особенности: электрическое поле в ней имеет продольную составляющую

Для намагниченного феррита формулы для $k_{об}$ и $k_{но}$ получаются из (4.21) заменой компонент тензора $\|\epsilon_r\|$ на соответствующие компоненты тензора $\|\mu_r\|$.

4.1.1 Примеры решения типовых задач

Задача №1 (волны в идеальном диэлектрике)

Плоская электромагнитная волна распространяется в свободном пространстве (вакууме). Задана комплексная амплитуда магнитного поля

$$\vec{H}(y) = -\vec{z}_0 H_0 e^{-i(ky + \pi/3)}.$$

Определить: 1) Комплексную амплитуду электрического поля,

2) Мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} ,

3) Амплитуды полей E_0 и H_0 , если при $t=0$ в точке $y=0$ величина вектора \vec{E} равна 1 В/м,

4) Величину векторов \vec{E} и \vec{H} в момент времени $t=10^{-6}$ с в точке с координатой $y=100$ м, если частота волны $f=1$ МГц.

Решение:

1) Сравним заданное выражение для вектора \vec{H} с выражением (4.4). Очевидно, что в данном случае волна распространяется в положительном направлении оси «у», в эту же сторону направлен вектор Пойнтинга. Изобразим

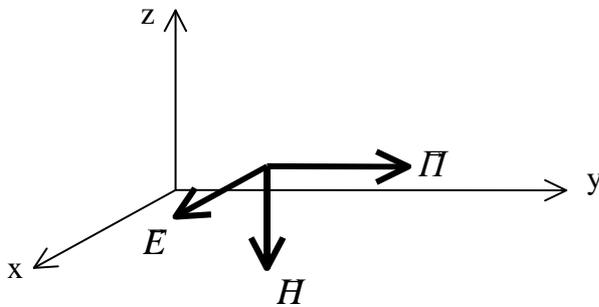


Рис.4

систему координат (правовинтовую) и векторы \vec{H} и \vec{P} в некоторой точке пространства.

Подберем такое направление вектора \vec{E} , чтобы векторное произведение $[\vec{E} \cdot \vec{H}]$ было направлено вдоль оси «у». Направление векторного произведения определяется по правилу правого винта, т.е. направлением движения винта при его вращении от первого вектора ко второму по меньшему углу. Очевидно, что вектор \vec{E} будет направлен по оси x (рис. 4.1).

Так как в идеальном диэлектрике векторы \vec{E} и \vec{H} синфазные, то комплексная амплитуда вектора \vec{E} будет иметь вид

$$\vec{E}(y) = \vec{x}_0 E_0 e^{-i(ky + \pi/3)}.$$

Амплитуда E_0 определится через H_0 и волновое сопротивление среды

$$(4.3) \quad E_0 = H_0 \cdot W_0.$$

2) Мгновенные значения напряженностей E и H определяются через комплексные амплитуды как

$$\vec{E}(y,t) = \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}(y) \cdot e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\vec{x}_0 E_0 \cdot e^{i(\omega t - ky - \pi/3)} \right] = \vec{x}_0 E_0 \cos(\omega t - ky - \pi/3).$$

Аналогично $\vec{H}(y,t) = -\vec{z}_0 H_0 \cos(\omega t - ky - \pi/3)$.

3) Определим E_0 из условия задачи

$$E(y=0, t=0) = E_0 \cos(-\pi/3) = 1 \text{ В/м.}$$

Отсюда

$$E_0 = 2 \text{ В/м} \quad \text{и} \quad H_0 = \frac{E_0}{W_0} = \frac{2}{120\pi} = 5.305 \cdot 10^{-3} \text{ А/м.}$$

4) Чтобы определить мгновенное значение векторов \vec{E} и \vec{H} в заданной точке ($y=100\text{м}$) в момент времени $t=10^{-6}$ с подсчитаем значение фазы волны в этой точке для данного момента времени. Для этого найдем значение волнового числа k . Поскольку фазовая скорость в вакууме равна c - скорости света, то

$$k = \omega/c = \frac{2\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}$$

Фаза волны в данной точке пути в заданный момент времени определится как

$$\varphi = \omega t - ky - \pi/3 = 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} - \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{-2} \cdot 100 - \pi/3 = \pi.$$

Мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} при $y=100\text{м}$ и $t=10^{-6}$ с будут равны

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 \cos \pi = -\vec{x}_0 2 \text{ В/м}, \quad \vec{H} = -\vec{z}_0 H_0 \cos \pi = \vec{z}_0 5.305 \cdot 10^{-3} \text{ А/м.}$$

Задача №2 (волны в средах с потерями)

Плоская электромагнитная волна с частотой $f=1$ МГц распространяется в морской воде с параметрами $\varepsilon_r = 81$, $\sigma = 1 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент затухания и волновое сопротивление среды.

Решение:

Вначале определим $tg\Delta$, при этом учтем, что по условию задачи известна относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r , а в формулы для параметров волны входит полная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, где

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{м}$. Кроме того, не задана магнитная проницаемость воды, но известно, что вода не является ферромагнитным веществом и, поэтому

$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$. Согласно (4.5)

$$tg\Delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{36\pi \cdot 10^9}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 81} = \frac{2 \cdot 10^3}{9} \approx 2.22 \cdot 10^2.$$

Так как $tg\Delta \gg 1$, то на этой частоте морская вода ведет себя как проводник, т.е. амплитуда плотности тока проводимости много больше амплитуды плотности тока смещения. Определим k' и k'' по формулам (4.11).

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2}} = 1.987 \frac{1}{м}.$$

Совершаемая при этом ошибка по отношению к точным формулам (4.7) не превышает $4 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, коэффициент затухания равен $k'' = 1.987 \frac{1}{м}$. Определим фазовую скорость и длину волны

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{2\pi \cdot 10^6}{1.987} = 3.162 \cdot 10^6 \frac{м}{с} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{1.987} = 3.162 м.$$

Сравним эти значения с фазовой скоростью в пустоте (а) и в дистиллированной воде с параметрами $\epsilon_r = 81$, $\sigma = 0$ (б).

$$а) \quad v_\phi = c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}; \quad \lambda_0 = \frac{c}{f} = 300 м;$$

$$б) \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{81}} = 3.333 \cdot 10^7 \frac{м}{с}; \quad \lambda = \frac{v_\phi}{f} = 33.33 м.$$

Видно, что увеличение диэлектрической проницаемости и проводимости вещества приводит к уменьшению фазовой скорости и соответственно уменьшению длины волны в данном веществе.

Определим волновое сопротивление среды.

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu \cdot \cos \Delta}{\varepsilon}} \cdot e^{i\frac{\Delta}{2}}.$$

Поскольку $\operatorname{tg} \Delta \approx 222 \gg 1$, то $\cos \Delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}} \approx \frac{1}{\operatorname{tg} \Delta}$ и $\Delta \approx 90^\circ$.

$$\dot{Z}_c \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{tg} \Delta}} \cdot e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{81 \cdot 222}} e^{i\pi/4} \approx 2.811 \cdot e^{i\pi/4} \text{ Ом}.$$

Полученное значение волнового сопротивления означает, что отношение амплитуд полей E и H составляет 2.811 Ом и электрическое поле опережает по фазе магнитное на 45° .

Задача №3 (вектор Пойнтинга в поглощающей среде)

Плоская электромагнитная волна с частотой $f=10^8$ Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon_r = 2.25$, $\operatorname{tg} \Delta = 0.4$, $\mu_r = 1$ в направлении оси «z». Амплитуда электрического поля в плоскости $z=0$ равна 100 В/м. Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости $z=1$ м и ослабление волны на этом расстоянии.

Решение:

Найдем угол потерь $\Delta = \operatorname{arctg} 0.4 \approx 0.38$ рад = 21.77° .

Определим волновое сопротивление среды

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu \cdot \cos \Delta}{\varepsilon}} e^{i\frac{\Delta}{2}} = 120\pi \sqrt{\frac{\cos 0.38}{2.25}} e^{i0.19} = 242.2 e^{i0.19} \text{ Ом}.$$

Определим среднюю величину вектора Пойнтинга в плоскости $z=0$ по формуле (4.11)

$$P_{cp}(0) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\dot{Z}_c} \right) = \frac{10^4}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{242.2} e^{-i0.19} \right) = \frac{10^4}{2 \cdot 242.2} \cos(0.19) = 20.27 \text{ Вт/м}^2$$

Определим коэффициент затухания по формуле (4.7)

$$k'' = k_0 \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + tg^2 \Delta})} = \frac{2\pi 10^8}{3 \cdot 10^8} \sqrt{2.25} \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 0.4^2})} = 6.1656 \cdot 10^{-1} \text{ 1/м}.$$

На расстоянии 1 м затухание вектора Пойнтинга составит

$$e^{2k'' \cdot 1} = 3.432 \quad \text{или } L = 10 \lg(e^{2k'' \cdot 1}) = 5.355 \text{ дБ}.$$

Задача №4 (произвольное направление распространения волны)

Плоская волна распространяется в вакууме. Магнитное поле описывается выражением:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \pi x - \pi y + \pi \sqrt{2} z).$$

1. Записать комплексную амплитуду напряженности магнитного поля.
2. Определить частоту и направление распространения волны.
3. Установить связь волнового вектора с векторами \vec{E} и \vec{H} .

Решение:

1. Заменяем в выражении для \vec{H} функцию \cos на экспоненту от мнимого аргумента. Полученное выражение называется комплексом вектора \vec{H} .

$$\dot{\vec{H}}(x, y, z, t) = \vec{H}_0 \cdot e^{i(\omega t - \pi x - \pi y + \pi \sqrt{2} z)} = \dot{\vec{H}}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}, \text{ где}$$

$$\dot{\vec{H}}(x, y, z) = \vec{H}_0 \cdot e^{-i(\pi x + \pi y - \pi \sqrt{2} z)} - \text{комплексная амплитуда магнитного}$$

поля. Аналогично запишется комплексная амплитуда вектора \vec{E}

$$\dot{\vec{E}}(x, y, z) = \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\pi x + \pi y - \pi \sqrt{2} z)}.$$

2. Сравнивая выражение фазового множителя в этих выражениях с формулой (4.16) приходим к заключению, что проекции волнового вектора равны

$$k_x = k_y = \pi; \quad k_z = -\pi \sqrt{2}.$$

Величина волнового вектора определится как

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\pi^2 + \pi^2 + 2\pi^2} = 2\pi.$$

Поскольку в вакууме $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$, то $f = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$.

Направление распространения волны определяется углами α , β , γ между волновым вектором \vec{k} и осями x , y , z ,

$$\cos \alpha = k_x/k = 1/2; \quad \cos \beta = k_y/k = 1/2; \quad \cos \gamma = k_z/k = -\sqrt{2}/2;$$

Отсюда $\alpha = \beta = 60^\circ$; $\gamma = 135^\circ$. Изобразим вектор \vec{k} в системе координат (рис.4.2)

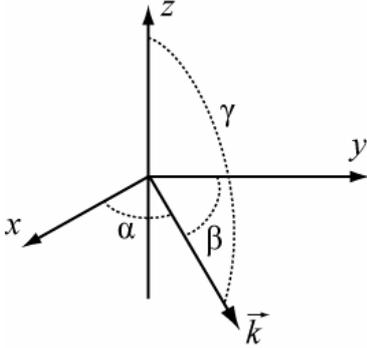


Рис.4.2

3. Получим формулу, связывающую волновой вектор и векторы поля при отсутствии токов проводимости. Для общности рассмотрим случай магнитоэлектрика, в том числе и анизотропного, не уточняя конкретной зависимости между векторами \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} . Все эти векторы имеют зависимость от координат вида (4.16). Воспользуемся первым уравнением Максвелла в комплексной форме.

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \dot{\vec{D}}$$

Представим $\text{rot} \dot{\vec{H}}$ в виде определителя и учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -ik_x \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}}; \quad \frac{\partial}{\partial y} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -ik_y \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}}; \quad \frac{\partial}{\partial z} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -ik_z \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}},$$

Тогда

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x, H_y, H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \\ -ik_x, -ik_y, -ik_z \\ H_x, H_y, H_z \end{vmatrix} = -i[\vec{k} \cdot \dot{\vec{H}}] = i\omega \dot{\vec{D}}.$$

Отсюда получаем соотношение между векторами \vec{k} , $\dot{\vec{H}}$ и $\dot{\vec{D}}$

$$i\omega \dot{\vec{D}} = -[\vec{k} \cdot \dot{\vec{H}}]. \quad (4.22)$$

Если вместо первого уравнения Максвелла использовать второе

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \dot{\vec{B}},$$

то это приведет к формуле $\omega \vec{B} = [\vec{k} \cdot \dot{\vec{E}}]$. (4.23)

Соотношения (4.22) и (4.23) являются формулировкой первых двух уравнений Максвелла для плоских волн в непроводящих средах. Из них следует, что для плоских волн в идеальных диэлектриках вектор \vec{D} всегда ортогонален векторам \vec{k} и \vec{H} , а вектор \vec{B} - векторам \vec{k} и \vec{E} . Соотношения (4.22) и (4.23) не несут дополнительной информации о полях E и H , кроме содержащейся в уравнениях Максвелла, но облегчают анализ полей в анизотропных средах, например, в оптических кристаллах [1].

В качестве примера применения формул (4.22) и (4.23), построим картину векторов поля в анизотропном диэлектрике с параметрами $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$, где $\|\varepsilon\|$ - тензор диэлектрической проницаемости. В общем случае произвольного направления распространения волны, векторы \vec{D} и \vec{E} не будут параллельны. Пусть они лежат в плоскости xoz , как показано на рисунке 4.3, и α - угол между ними.

Из уравнений (4.22) и (4.23) следует, что а) $\vec{D} \perp \vec{k}$ и $\vec{D} \perp \vec{H}$

б) $\vec{B} \perp \vec{k}$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$.

Векторы \vec{H} и \vec{B} (на рисунке не показан) в данном случае ($\mu = \mu_0$) параллельны. Поскольку вектор \vec{H} , согласно условиям а) и б), должен быть перпендикулярен векторам \vec{D} и \vec{E} , то он может быть направлен только по оси «y».

Вектор \vec{k} , согласно тех же условий, должен быть перпендикулярным векторам \vec{D} и \vec{B} (или \vec{H}) и поэтому он направлен вдоль оси «z». Вектор Пойнтинга

$\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$ лежит в плоскости xoz и составляет угол α с вектором \vec{k} .

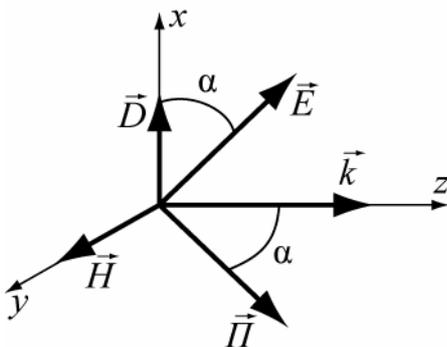


Рис. 4.3

Это означает, что направления фазовой скорости (в направлении вектора \vec{k}) и групповой (в направлении вектора \vec{P}) в анизотропном диэлектрике отличаются на угол α .

Если среда является изотропной, т.е. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$, то взаимно ортогональными будут векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} .

Задача №5 (среднее значение плотности энергии)

Среднее по времени значение вектора Пойнтинга в воздухе и идеальном диэлектрике с параметрами $\epsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$ равно $\Pi_{cp} = 1 \text{ Вт/м}^2$. Определить:

- 1) средние по времени значения плотности энергии в этих средах,
- 2) амплитуды полей E и H .

Решение:

1) Вектор Пойнтинга связан с плотностью энергии и скоростью движения энергии соотношением $\vec{v}_g = \frac{\vec{\Pi}}{w}$. При этом $w = w_E + w_H$, т.е. энергия электромагнитного поля состоит из энергии электрического и магнитного полей.

Скорость движения энергии монохроматических волн в идеальных диэлектриках совпадает с фазовой скоростью v_ϕ . Будем обозначать величины, относящиеся к воздуху цифрой «1», а к диэлектрику – цифрой «2». Электрические и магнитные параметры воздуха можно считать такими же, как у вакуума. Таким образом, скорости энергии будут равны

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = 10^8 \text{ м/с}.$$

Плотность энергии в воздухе и в диэлектрике соответственно будет

$$\text{равна} \quad w_1 = \frac{\Pi_1}{v_1} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \text{ Дж/м}^3; \quad w_2 = \frac{\Pi_2}{v_2} = 10^{-8} \text{ Дж/м}^3.$$

2) Определим соотношение между плотностями электрической и магнитной энергии в идеальных диэлектриках.

Известно, что средние по времени плотности этих энергий выражаются формулами

$$w_{Ecp} = \frac{e|E|^2}{4}; \quad w_{Hcp} = \frac{m|H|^2}{4} \quad (4.24)$$

и их отношение равно 1, поскольку $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Таким образом, в любом идеальном диэлектрике плотности энергии электрического и магнитного полей плоских волн всегда равны. В условиях данной задачи они будут равны

$$w_{1E} = w_{1H} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}; \quad w_{2E} = w_{2H} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

Из формул (4.24) получим

$$|E_1| = \sqrt{\frac{4w_{E1}}{\epsilon_0}} = \sqrt{240\pi} \text{ В/м}; \quad |E_2| = \sqrt{80\pi} \text{ В/м};$$

$$|H_1| = \frac{|E_1|}{Z_{w1}} = \frac{1}{\sqrt{60\pi}} \text{ А/м}; \quad |H_2| = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} \text{ А/м}.$$

Конечно, эти же результаты могут быть получены так же из формулы (4.11). Изобразим в относительных единицах соотношение между полями E и H , а также плотностями энергии и скоростями.

На рисунке 4.4 размер кубика пропорционален плотности энергии волны, а длины стрелок – величине соответствующих векторов. Таким образом, из решения данной задачи можно сделать следующие выводы:

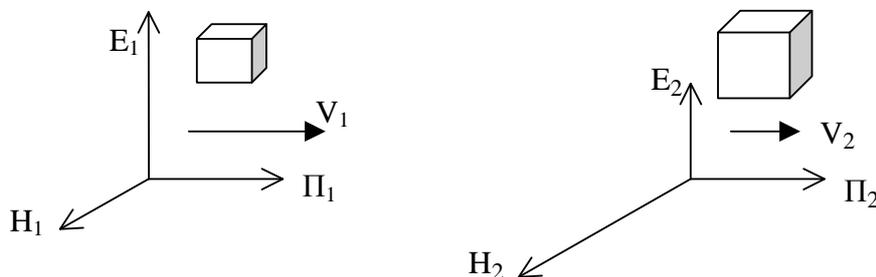


Рис. 4.4

- 1) В идеальном диэлектрике плотности электрической и магнитной энергий одинаковы.
- 2) При одинаковых векторах Пойнтинга в диэлектрике и вакууме скорость волны в диэлектрике уменьшается, а плотность энергии увеличивается по сравнению с вакуумом.

4.2. Отражение и преломление плоских волн от плоской границы раздела двух сред

- Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на плоскую

границу раздела двух сред. Плоскостью падения называется плоскость, проходящая через нормаль к поверхности раздела и направление распространения падающей волны. На рис. 4.5 плоскость падения – это плоскость рисунка. По отношению к плоскости падения различают волны с горизонтальной и вертикальной поляризацией. При вертикальной поляризации вектор E лежит в плоскости падения волны, при горизонтальной – перпендикулярен ей.

При падении электромагнитных волн на границу раздела двух сред возникают отраженные и преломленные волны. Направления распространения для них определяются законами Снеллиуса

$$\varphi' = \varphi, \quad k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \psi. \quad (4.25)$$

Амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} отраженной и преломленной волн по отношению к амплитудам падающей волны определяются коэффициентами отражения R и прохождения T (формулы Френеля)

$$\begin{aligned} \dot{R}_E &= \frac{\dot{E}_{omp}}{\dot{E}_{nad}} = \frac{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi - \dot{Z}_{c1} \cos \psi}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \psi}; & \dot{T}_E &= \frac{\dot{E}_{np}}{\dot{E}_{nad}}; \\ \dot{R}_H &= \frac{\dot{H}_{omp}}{\dot{H}_{nad}} = \frac{\dot{Z}_{c1} \cos \varphi - \dot{Z}_{c2} \cos \psi}{\dot{Z}_{c1} \cos \varphi + \dot{Z}_{c2} \cos \psi}; & \dot{T}_H &= \frac{\dot{H}_{np}}{\dot{H}_{nad}}; \end{aligned} \quad (4.26)$$

При этом для обеих поляризаций справедливо соотношение

$$1 + \dot{R} = \dot{T}. \quad (4.27)$$

Следует обратить внимание на то, что коэффициенты R и T определены формулой (4.26) по разному для горизонтальной и вертикальной поляризации:

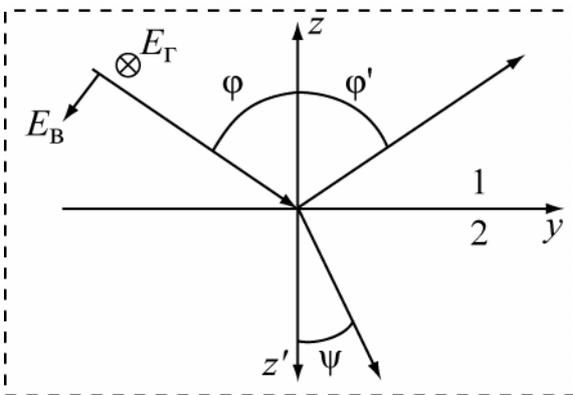


Рис. 4.5

как отношение напряженностей полей E или H . Для коэффициента отражения это не имеет значения, поскольку падающие и отраженные волны распространяются в одной и той же среде и поэтому

$$\frac{E_{omp}}{E_{nad}} = \frac{H_{omp}}{H_{nad}}.$$

- При падении волны на границу

раздела двух идеальных диэлектриков могут наблюдаться два характерных явления: полное преломление и полное отражение. **Полное преломление** существует только при вертикальной поляризации, соответствующий угол падения называется углом Брюстера и определяется из соотношения

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}}. \quad (4.28)$$

При падении волны из более «плотного» диэлектрика на границу с менее «плотным» ($\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$) при углах падения $\varphi \geq \varphi_0$ наблюдается полное отражение для обеих поляризаций. Угол φ_0 называется критическим углом и определяется выражением

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}. \quad (4.29)$$

Модули коэффициентов отражения при углах падения $\varphi \geq \varphi_0$ равны 1. Поле во второй (менее плотной) среде представляет собой неоднородную плоскую, поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела с фазовой скоростью

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \sin \varphi} \quad (4.30)$$

и убывающую по амплитуде при удалении от границы по закону $e^{-\beta \cdot z}$,

$$\text{где} \quad \beta = k_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sin^2 \varphi - 1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{r2}}. \quad (4.31)$$

Неоднородной эта волна называется потому, что у нее поверхности равных амплитуд и равных фаз не совпадают. В данном случае это плоскости $z = \text{Const}$ и $y = \text{Const}$ соответственно.

- При падении волны из идеального диэлектрика на границу поглощающей среды закон Снеллиуса $k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \psi$ безусловно выполняется, но величина k_2 является комплексной, а k_1 - вещественной. Следовательно, угол ψ должен быть комплексным. Что в этом случае представляет собой преломленная волна? Анализ показывает, что она является неоднородной плоской

волной, как и рассмотренная выше, но распространяющуюся под некоторым «истинным» углом преломления. Зависимость комплексной амплитуды преломленной волны от координат y и z представляется в виде

$$\dot{E}(y, z) = E_{np}^0 \cdot e^{-\beta \cdot z'} \cdot e^{-i(\alpha_y y + \alpha_z z')}, \quad (4.32)$$

где для наглядности координата z заменена на z' (рис.4.5) и обозначены

$$\alpha_y = k_1 \sin \varphi, \quad \alpha_z = \operatorname{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}, \quad \beta = -\operatorname{Im} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \quad (4.33)$$

Истинный угол преломления определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \psi_u = \frac{\alpha_y}{\alpha_z} \quad (4.34)$$

- При отражении от «оптически плотной» среды, т.е. при выполнении

$$\text{условия} \quad \left| \dot{k}_2 \right| \gg \left| k_1 \right|, \quad (4.35)$$

угол преломления ψ согласно закону Снеллиуса (4.25) стремится к нулю и преломленная волна распространяется практически перпендикулярно границе раздела, а вектора \vec{E}_{np} и \vec{H}_{np} становятся почти ей параллельными. При этом, на поверхности такой «плотной» среды выполняются приближенные **граничные условия Леонтовича**, которые могут быть записаны в векторной и скалярной формах

$$\dot{E}_{t1} \approx \dot{Z}_{c2} \left[\dot{H}_{t1} \cdot \vec{n}'_0 \right] \quad \text{или} \quad \frac{\dot{E}_{t1}}{\dot{H}_{t1}} \approx \dot{Z}_{c2}, \quad (4.36)$$

где $\dot{E}_{t1}, \dot{H}_{t1}$ - тангенциальные составляющие полей E и H в первой среде, \vec{n}'_0 - нормаль к поверхности, направленная во вторую среду.

Значение приближенных граничных условий Леонтовича состоит в том, что они связывают тангенциальные составляющие полей E и H в первой среде непосредственно с волновым сопротивлением второй среды. Конечно, “строгие” граничные условия при этом также остаются справедливыми и, в частности, выполняется

$$E_{t1} = E_{t2} \approx E_2 \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2} \approx H_2 .$$

Граничные условия Леонтовича широко применяются для определения потерь мощности на нагрев проводников. При этом удобно использовать понятие поверхностного сопротивления проводника

$$\dot{Z}_S = \frac{\dot{E}_t}{\dot{j}_s}, \quad (4.37)$$

где \dot{E}_t - тангенциальная составляющая вектора \vec{E} на поверхности проводника, \dot{j}_s - плотность поверхностного тока. Можно показать, что поверхностное сопротивление металлов равно их волновому сопротивлению

$$\dot{Z}_S = \dot{Z}_{c2} = R_S + iX_S,$$

где
$$R_S = X_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}. \quad (4.38)$$

Если глубина проникновения много меньше поперечных размеров проводника, то R_S - активная часть поверхностного сопротивления оказывается равной активному сопротивлению проводника на постоянном токе, но имеющем толщину, равную глубине проникновения δ . Этим часто пользуются для определения сопротивления проводников на высоких частотах например в теории линий передачи энергии.

4.2.1 Примеры решения типовых задач

Задача №6 (отражение от границы двух диэлектриков)

Плоская электромагнитная волна падает под углом $\varphi=30^\circ$ из воздуха на поверхность идеального диэлектрика с параметрами $\epsilon_r=4$, $\mu_r=1$, $\sigma=0$. Амплитуда вектора \vec{E} падающей волны равна 1 в/м, поляризация – горизонтальная. Определить

- 1) амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} отраженной и преломленной волн,
- 2) мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} в точке падения,
- 3) среднюю по времени плотность потока мощности, переносимую каждой волной.

Решение:

1) Обозначим все величины, относящиеся к первой среде – воздуху цифрой «1», а ко второй среде – диэлектрику – цифрой «2».

Определим угол преломления из закона Снеллиуса (4.25)

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \psi, \quad \text{где } k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r};$$

$$\sin \psi = \frac{k_1}{k_2} \cdot \sin \varphi = \frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}; \quad \psi = 14^\circ 30'; \quad \cos \psi = 0.968.$$

Определим коэффициент прохождения для волны с горизонтальной поляризацией по формулам (4.26) и (4.27).

$$T_\Gamma = \frac{2\dot{Z}_{c2} \cos \varphi}{\dot{Z}_{c2} \cos \varphi + \dot{Z}_{c1} \cos \psi}; \quad \dot{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi; \quad \dot{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = 60\pi;$$

В результате получим $T_\Gamma = 0.618$ и $R_\Gamma = T_\Gamma - 1 = -0.382$.

Амплитуды векторов \vec{E} отраженной и преломленной волн определяются как

$$E_{np} = T_\Gamma E_{nad} = 0.618 \cdot 1 \text{ В/м} = 0.618 \text{ В/м} \quad \text{и} \quad E_{omp} = R_\Gamma E_{nad} = -0.382 \text{ В/м}.$$

Знак «-» у амплитуды отраженной волны означает противоположное направление электрического вектора отраженной волны по отношению к вектору \vec{E} падающей волны. Амплитуды векторов \vec{H} можно найти через векторы \vec{E} и волновые сопротивления.

$$H_{nad} = \frac{E_{nad}}{Z_{c1}} = 2.652 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}, \quad H_{omp} = \frac{E_{omp}}{Z_{c1}} = -1.013 \cdot 10^{-3} \text{ А/м};$$

$$H_{np} = \frac{E_{np}}{Z_{c2}} = 3.278 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$$

В полученных результатах следует обратить внимание на то, что $H_{np} > H_{nad}$. Это можно объяснить тем, что вторая среда – электрически более плотная ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), что приводит к уменьшению напряженности электрического и увеличению напряженности магнитного полей (см. задачу 4.5).

2) Построим поля E и H в падающей, отраженной и преломленной волнах. Точки на рисунке 4.6 изображают векторы \vec{E} , направленные к нам (видно ост-

рие стрелы), кружок с крестиком – вектор \vec{E} , направленный от нас (видно оперение стрелы). Изменение направления векторов \vec{E} и \vec{H} в отраженной волне

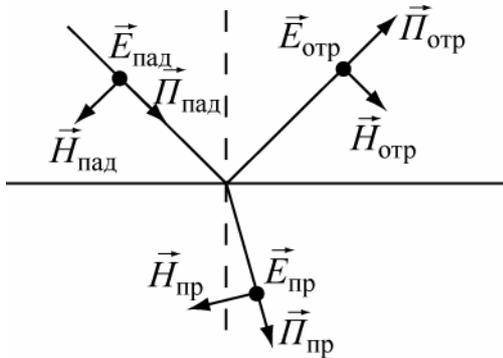


Рис. 4.6

связано с отрицательным значением коэффициента отражения R .

3) Определим средние значения векторов Пойнтинга во всех волнах. Поскольку векторы \vec{E} и \vec{H} в идеальном диэлектрике синфазные, то формула (4.10) упрощается

$$P_{cp} = \frac{1}{2} |E||H| = \frac{|E|^2}{2Z_c} = \frac{1}{2} |H|^2 Z_c.$$

$$P_{пад,cp} = \frac{1}{2} E_{пад} H_{пад} = 1.326 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2;$$

$$P_{отр,cp} = \frac{1}{2} E_{отр} H_{отр} = 0.193 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2;$$

$$P_{пр,cp} = \frac{1}{2} E_{пр} H_{пр} = 1.013 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2.$$

Сравнение значений векторов Пойнтинга показывает, что

$$P_{пад,cp} > P_{отр,cp} + P_{пр,cp}$$

и может показаться, что это противоречит закону сохранения энергии. Однако, это не так. Чтобы убедиться в этом, выделим вокруг вектора Пойнтинга в падающей волне энергетическую трубку – область пространства, ограниченную векторами Пойнтинга. Пусть S – площадь поперечного сечения этой трубки. Тогда, мощность падающей волны в этой трубке будет равна

$P_{пад,cp} \cdot S$. Площадь энергетической трубки отраженной волны останется такой же, а в преломленной волне – увеличится из-за увеличения размера трубки в плоскости падения волны в $\frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$ раз. Размер трубки в поперечном направлении не изменится. Таким образом, закон сохранения энергии требует чтобы мощность в энергетической трубке падающей волны была равна сумме мощно-

стей в трубках отраженной и преломленной волн. Это приводит к равенству

$$P_{\text{над,ср}} = P_{\text{отр,ср}} + P_{\text{пр,ср}} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi},$$

которое, как нетрудно убедиться, выполняется.

Задача №7 (поле при полном отражении)

Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны, возникающей при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\epsilon_{r1}=3.4$, $\mu_{r1}=1$, $\sigma=0$ на границу с воздухом - среда 2. Угол падения 45° , частота поля 35 ГГц.

Решение:

Электрические параметры воздуха можно принять такими же, как у вакуума, т.е. $\epsilon_{r2}=1$, $\mu_{r2}=1$, $\sigma_2=0$. Определим угол полного отражения (4.29)

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3.4}}\right) = 32,8^\circ.$$

Поскольку $\varphi > \varphi_0$, то в среде 2 будет существовать неоднородная плоская волна, называемая также поверхностной. Согласно формул (4.30) и (4.31), ее фазовая скорость и коэффициент убывания в среде 2 определяются выражениями

$$v_\phi = \frac{v_{\phi 1}}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \varphi} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3.4} \sin 45^\circ} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$\beta_2 = k_2 \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right)^2 - 1} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_{r2}}}{c} \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right)^2 - 1} = 6.12 \cdot 10^2 \text{ 1/м}.$$

Глубина проникновения поля во вторую среду δ определится как расстояние, на котором амплитуда поля уменьшится в $e \approx 2.71$ раз.

$$\delta = \frac{1}{\beta_2} = 1.64 \text{ мм}.$$

Таким образом, поле в воздухе на границе с диэлектриком распространяется вдоль границы со скоростью меньшей скорости света и "прижато" к границе с диэлектриком.

Задача №8 (граничные условия Леонтовича)

Плоская волна с частотой $f=1$ МГц падает под углом 60° на поверхность металла с параметрами $\mu_r=100$, $\sigma = 10^7$ См/м. Амплитуда электрического поля падающей волны 10 В/м. Определить среднее значение мощности, поглощаемой 1см^2 поверхности металла. Как результат зависит от поляризации падающей волны? Какая доля мощности падающей волны тратится на нагрев металла?

Решение:

Определим амплитуду вектора \vec{H} падающей волны

$$H_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{пад}}}{W_0}, \text{ где } W_0 = 120\pi \text{ Ом} -$$

$$H_{\text{пад}} = \frac{10}{120\pi} = 2.65 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}.$$

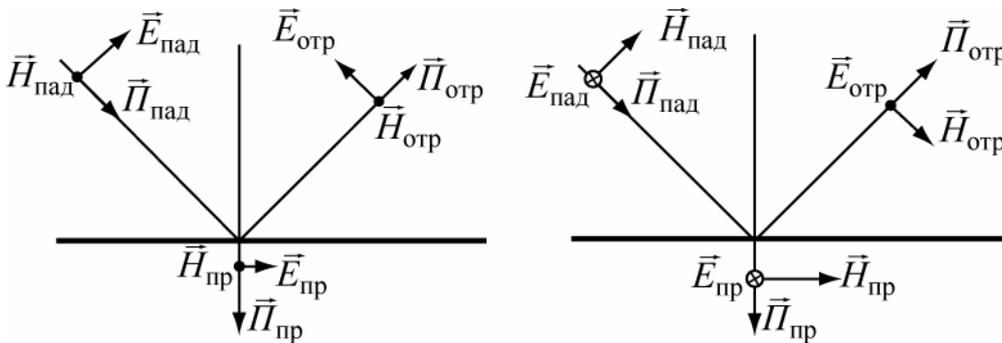
Среднее по времени значение вектора Пойнтинга падающей волны равно

$$P_{\text{пад, ср}} = \frac{1}{2} E_{\text{пад}} H_{\text{пад}} = 0.1325 \text{ Вт/м}^2.$$

Определим волновое сопротивление металла (4.13) $\dot{Z}_{c2} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$.

$$\dot{Z}_{c2} = (1+i) \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^7}} = (1+i) \cdot 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ Ом}.$$

Рассмотрим далее отдельно случаи вертикальной и горизонтальной поляризации (рис.4.7). В соответствии с формулами (4.26), коэффициент отражения для металлов равен $R_B \approx 1$; $R_\Gamma \approx -1$.



а) вертикальная
поляризация

б) горизонтальная
поляризация

Рис. 4.7

На границе раздела должны выполняться “строгие” граничные условия для тангенциальных составляющих полей E и H в первой и второй средах

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2},$$

где $E_{t1} = E_{nad} + E_{ompt}$ и $H_{t1} = H_{nad} + H_{ompt}$.

Из рис.4.7 видно, что при любой поляризации на поверхности металла почти полностью взаимно уничтожаются тангенциальные составляющие электрических и нормальные составляющие магнитных полей. В то же время нормальные составляющие электрического поля и тангенциальные составляющие магнитного поля фактически удваиваются по отношению к падающей волне.

а) Вертикальная поляризация.

При вертикальной поляризации

$$H_{np} = H_{nad} + H_{ompt} \approx 2H_{nad} = 5.3 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}.$$

Среднее значение вектора Пойнтинга в преломленной волне на границе раздела определится согласно формуле (4.11) как

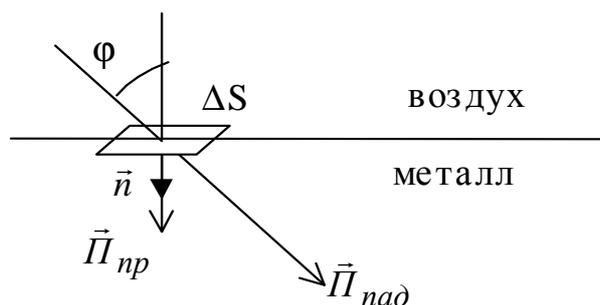
$$\Pi_{np,cp} = \frac{1}{2} |H_{np}|^2 \operatorname{Re}(Z_{c2}) = \frac{2.65^2 \cdot 10^{-4}}{2} 2\pi \cdot 10^{-3} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2.$$

Поток вектора Π_{cp} через поверхность S определяет среднюю мощность, переносимую волной через эту поверхность,

$$P_{cp} = \int_S \vec{\Pi}_{cp} \cdot \vec{n} ds, .$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности S .

Выберем в качестве поверхности S участок поверхности металла площадью $\Delta S = 1 \text{ см}^2$ и направим нормаль внутрь металла. (Соотношение между величинами векторов Пойнтинга для падающей и преломленной волн на рисунке 4.8 сильно не выдержано).



Мощность, поглощаемая площадкой ΔS металла, определится как

$$P_{погл} = \Pi_{np,cp} \cdot \Delta S \cdot \cos 0^0 = 2.2 \cdot 10^{-10} \text{ Вт}$$

Рис.4.8

Мощность падающей волны, приходящаяся на эту же площадку, будет

$$P_{\text{пад}} = \Pi_{\text{пад,ср}} \cdot \Delta S \cdot \cos 60^\circ = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}.$$

Таким образом, при вертикальной поляризации отношение поглощенной и падающей мощностей составит $\frac{P_{\text{погл}}}{P_{\text{пад}}} = 0.33 \cdot 10^{-4}$.

б) Горизонтальная поляризация.

При горизонтальной поляризации, как следует из рис. 4.7

$$H_{\text{пр}} = H_{\text{пад}t} + H_{\text{омпт}} \approx 2H_{\text{пад}} \cdot \cos \varphi = 2.65 \cdot 10^{-2} \text{ А/м},$$

то есть амплитуда магнитного поля преломленной волны уменьшилась в 2 раза по сравнению с вертикальной поляризацией. Очевидно, это приведет к уменьшению преломленной мощности в 4 раза и к уменьшению доли поглощенной мощности также в 4 раза, поскольку падающая мощность при этом не изменилась.

Этот результат можно также объяснить, используя понятие поверхностного тока (см. раздел 1, формула (1.17)). $\vec{\eta} = [\vec{n} \cdot \vec{H}_t]$ При вертикальной поляризации для данного угла падения поверхностные токи в два раза больше, чем при горизонтальной.

4.3 Задачи для самостоятельного решения

4.1. Морская вода имеет параметры $\epsilon_r = 60, \mu_r = 1, \sigma = 4 \text{ См/м}$. Определить относительную комплексную диэлектрическую проницаемость и тангенс угла потерь для частоты $f = 120 \text{ кГц}$.

$$\text{Ответ: } \epsilon_r = 60 - i6 \cdot 10^5 ; \text{ tg}\Delta = 10^4.$$

4.2. В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды полей

$$\vec{E} = 5\vec{x}_0 - 8i\vec{y}_0 + 12e^{i30^\circ} \vec{z}_0 \text{ В/м}; \quad \vec{H} = 0.4e^{i45^\circ} \vec{x}_0 + 1.6e^{-i45^\circ} \vec{y}_0 - 0.75e^{-i60^\circ} \vec{z}_0 \text{ А/м}.$$

Определить средний по времени вектор Пойнтинга.

$$\text{Ответ: } \vec{\Pi}_{\text{ср}} = -5.083\vec{x}_0 + 3.306i\vec{y}_0 + 3.960 \vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

4.3. Электромагнитная волна распространяется вдоль оси z . В плоскости $z=0$ амплитуда вектора $\vec{E}=700$ В/м. Погонное затухание волны 0.2 дБ/м. Определить амплитуду вектора \vec{E} в плоскости $z=400$ м.

Ответ: $E=0.07$ В/м.

4.4. Плоская электромагнитная волна с частотой $f = 800$ МГц распространяется в вакууме. Волновой вектор образует угол 30° с вектором \vec{x}_0 и угол 80° с вектором \vec{y}_0 . Вычислите вектор \vec{k} .

Ответ: $\vec{k} = (14.51\vec{x}_0 + 2.91\vec{y}_0 \pm 7.856\vec{z}_0) 1/\text{м}$.

4.5. Электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 250 В/м падает по направлению нормали на поверхность идеального диэлектрика с $\epsilon_r = 3.2$. Найти модули средних по времени векторов Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн.

Ответ: $P_{пад} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$, $P_{отр} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$, $P_{пр} = 76.3 \text{ Вт/м}^2$,

4.6. Плоская электромагнитная волна с горизонтальной поляризацией падает из воздуха под углом падения 60° на границу с диэлектриком, имеющим параметры $\epsilon_r = 3.2$, $\mu_r = 1$. Амплитуда вектора \vec{E} падающей волны равна 0.4 В/м. Определить амплитуды векторов \vec{H} отраженной и преломленной волн.

Ответ: $H_{отр} = 5.5 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$, $H_{пр} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$,

Ответ: $v_\phi = 2.301 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, глубина проникновения $\delta = 1.68 \text{ мм}$.

4.7. Плоская электромагнитная волна падает нормально на пластину диэлектрика без потерь толщиной d . Определить условие при котором пластина будет прозрачной, т.е. отраженная волна будет отсутствовать.

Ответ: $d = 0,5\lambda \cdot p$, λ - длина волны в пластине, p - целое число

4.8. На одну сторону диэлектрической пластины из воздуха падает плоская электромагнитная волна под углом падения 30° , не создавая отражения. Определить поляризацию волны и относительную диэлектрическую прони-

цаемость диэлектрика, Доказать, что отражения от другой стороны пластины также не будет. Ответ: поляризация вертикальная, $\varepsilon_r = 3$

4.9. Среднее значение вектора Пойнтинга при распространении плоской электромагнитной волны уменьшается на 15 процентов на пути 2м. Определить коэффициент затухания в неперах на метр и в децибелах на метр и глубину проникновения поля в данную среду.

Ответ: 0.0406 Нп/м, 0.352 дБ/м, 24.6 м

4.10. Ионосфера, расположенная над Землей на высоте более 80 км, является ионизированным разреженным воздухом т.е. плазмой. В присутствии постоянного магнитного поля Земли – H_0 она является гиротропной средой. Определить компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости ионосферы, считая ее однородной плазмой, если среднее значение электронной концентрации (на высоте 300 км) составляет $N_e = 4 \cdot 10^{11}$ эл/м³, $H_0 = 40$ А/м, частота волны $f = 7$ МГц.

Ответ: $\varepsilon_x = 0.315$, $\varepsilon_z = 0.343$, $\alpha = 0.138$,

4.11. В условиях задачи 4.3.13 определить постоянную Фарадея и расстояние на котором поворот плоскости поляризации составит 90° .

Ответ: $R = 0.0176$ 1/м, $L = 89,25$ м

4.12. Ферритовый образец с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 10$ и намагниченностью насыщения $M_s = 4 \cdot 10^4$ А/м помещен в постоянное магнитное поле с напряженностью $H_0 = 10^5$ А/м. Определить частоту ферромагнитного резонанса и компоненты тензора $\|\mu_r\|$ на частотах $f_1 = 1,2$ ГГц и $f_2 = 12$ ГГц. Ответ: $\omega_p = 2,21 \cdot 10^{10}$ 1/с, 1) на f_1 $\mu_x = 1.453$, $\alpha = -0.154$,

2) на f_2 $\mu_x = 0.962$, $\alpha = 0.128$

4.13. Для преобразования поляризации волны из линейной в эллиптическую или круговую можно использовать ферритовую пластину, намагниченную в направлении, перпендикулярном распространению волны – эффект Коттона – Муттона. Определить толщину пластины, при которой разность фаз обыкновенной и необыкновенной волн на выходе из пластины составит $\pm 90^\circ$. Чем отли-

чается поляризация волны на выходе пластины для частот f_1 и f_2 ? Параметры феррита и значения частот приведены в задаче 4.3.16.

Ответ: На частоте 1,2 ГГц толщина пластины равна 9,96 см, на частоте 12 ГГц 7,12 см, отличаются направлением вращения вектора \vec{E} .

5 ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

В данном разделе рассматриваются темы

Элементарные излучатели в свободном пространстве;

Диаграммы направленности элементарных излучателей над идеально проводящей землей;

5.1 Краткие теоретические сведения

В курсе электродинамики рассматриваются три элементарных излучателя: электрический и магнитный диполи Герца и элемент Гюйгенса. Для определения электрических и магнитных полей, создаваемых излучателями, используются вспомогательные функции - электрический и магнитный векторные запаздывающие потенциалы \vec{A} и \vec{A}_M . Более распространен электрический потенциал, который в дальнейшем будем называть просто векторным потенциалом. При известных токах возбуждения векторный потенциал определяется формулой

$$\dot{\vec{A}}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_{cm} e^{-ikr}}{r} dv, \quad (5.1)$$

где M -точка наблюдения, \vec{j}_{cm} - плотность сторонних токов, являющихся источником электрических и магнитных полей, r – расстояние от точки объема V , где находятся токи \vec{j}_{cm} и точкой наблюдения M , k – волновое число.

Диполем Герца называется отрезок проводника, длиной l , по которому протекает переменный электрический ток I_{cm} , причем ток предполагается постоянным по длине диполя и $l \ll \lambda$. Для диполя Герца векторный потенциал определяется наиболее просто, как

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu l \vec{I}_{cm} e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad (5.2)$$

где r – расстояние от середины диполя до точки наблюдения.

Поместим диполь в центре сферической системы координат, расположив его вдоль оси « z » (рис. 5.1).

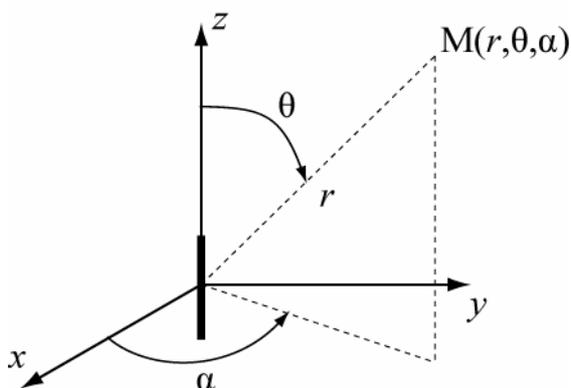


Рис. 5.1

Поля E и H в точке M , определяемые через векторный потенциал (5.2), представляют в общем виде достаточно сложные функции сферических координат (r, θ, α) . Для двух крайних случаев – ближней и дальней зон эти выражения существенно упрощаются.

Ближняя зона определяется условием $kr \ll 1$, или $r \ll \lambda/2\pi$.

Комплексные амплитуды полей E и H в ближней зоне определяются выражениями:

$$\dot{H}_\alpha = \frac{I_{cm}}{4\pi \cdot r^2} \sin \theta; \quad \dot{E}_r = i \frac{I_{cm}}{2\pi\omega\epsilon \cdot r^3} \cos \theta; \quad \dot{E}_\theta = i \frac{I_{cm}}{4\pi\omega\epsilon \cdot r^3} \sin \theta; \quad (5.3)$$

Отметим характерные особенности полей в ближней зоне:

- Поля не имеют волнового характера, так как фазы полей не зависят от координат,

- Зависимость амплитуд полей в ближней зоне от координат такая же, как у электростатического диполя и отрезка проводника с постоянным током. Поэтому поля в ближней зоне называются квазистатическими. В частности, для них характерно быстрое убывание амплитуд полей с увеличением расстояния, как $1/r^2$ или $1/r^3$.

- Поля E и H сдвинуты по фазе на 90° , поэтому среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю. Это означает, что движение энергии вблизи диполя Герца носит колебательный характер.

Дальняя зона определяется условием $kr \gg 1$, или $r \gg \lambda/2\pi$.

Комплексные амплитуды полей E и H в дальней зоне определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{H}_\alpha &= i \frac{k l I_{cm}}{4\pi r} \sin \theta \cdot e^{-ikr}; & \dot{E}_r &\approx 0; \\ \dot{E}_\theta &= i \frac{k l I_{cm}}{4\pi r} Z_c \sin \theta \cdot e^{-ikr};\end{aligned}\quad (5.4)$$

Характерные особенности полей в дальней зоне:

- Формулы (5.4) представляют поля в сферической волне, поскольку фаза полей постоянна на сфере с радиусом r . Вектора \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

- Амплитуды полей убывают с расстоянием как $1/r$, то есть гораздо медленнее, чем в ближней зоне.

- Поля E и H синфазные и их отношение равно волновому сопротивлению данной среды для плоских волн $-Z_c$. Среду будем считать идеальным диэлектриком ($\sigma=0$). Среднее значение вектора Пойнтинга (4.11) не равно нулю

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{Z_c} = \frac{1}{2} |H|^2 Z_c = \frac{(k l I_{cm})^2}{32(\pi r)^2} Z_c \sin^2 \theta. \quad (5.5)$$

Мощность, излучаемая диполем, может быть вычислена как интеграл по сфере в дальней зоне от P_{cp} . Она может быть представлена в виде

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} |I_{cm}|^2 R_\Sigma, \quad (5.6)$$

где R_Σ - сопротивление излучения диполя

$$R_\Sigma = \frac{2\pi Z_c}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad (5.6a)$$

λ - длина волны в данной среде.

Зависимость амплитуд полей E или H в точке наблюдения от угловых координат при постоянном r называется амплитудной диаграммой направленности. Для диполя Герца диаграмма направленности описывается функция $F(\theta) = |\sin \theta|$. В полярной системе координат диаграмма направленности имеет вид тела вращения вокруг оси диполя (рис.5.2).

Магнитный диполь Герца – воображаемый диполь Герца, в котором

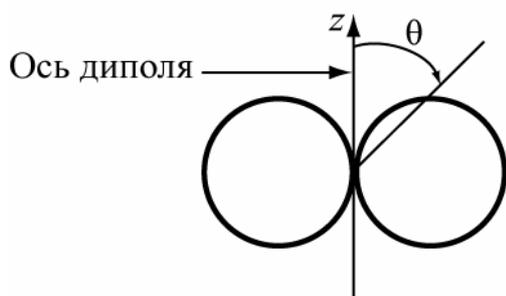


Рис. 5.2

вместо электрического тока протекает фиктивный магнитный ток I_{cm}^M . Переход от формул (5.3) и (5.4), определяющих поля диполя Герца, к соответствующим формулам для магнитного диполя Герца производится на основе принципа перестановочной двойственности

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \quad I_{cm} \leftrightarrow -I_{cm}^M, \quad \varepsilon \leftrightarrow -\mu. \quad (5.7)$$

Магнитный диполь Герца может быть реализован в виде рамки с током или щелевого излучателя малых размеров по сравнению с длиной волны.

Рамка с током эквивалентна магнитному диполю Герца, перпендикулярному плоскости рамки при выполнении условия

$$I_{cm}^M l = -i\omega\mu \cdot I_p S, \quad (5.8)$$

где I_{cm}^M и l магнитный ток и длина диполя, I_p и S - электрический ток и площадь рамки.

Расположим рамку в начале координат так, чтобы ее ось была направлена вдоль оси z . В дальней зоне поле рамки с током определяется формулами (5.4) с учетом (5.7) и (5.8).

$$E_\alpha = \frac{I_p k^2 S Z_c}{4\pi r} \sin \theta \cdot e^{-kr}; \quad H_\theta = -\frac{E_\alpha}{Z_c}. \quad (5.9)$$

Сопротивление излучения рамки определяется формулой

$$R_\Sigma^P = \frac{8\pi^3}{3} Z_c \frac{S^2}{\lambda^4}. \quad (5.10)$$

Щелевой излучатель эквивалентен магнитному диполю Герца при условии, что длина щели много меньше длины волны, распределение вектора \vec{E} по длине щели постоянно, магнитный ток диполя и напряжение на щели связаны

соотношением $2U_{щ} = I_{cm}^M$. При этом магнитный диполь располагается на поверхности щели, вдоль ее длины.

Элемент Гюйгенса – участок фронта плоской волны с размерами много меньшими длины волны. Элемент Гюйгенса эквивалентен взаимно ортогональным электрическим и магнитным диполям Герца, расположенным в плоскости фронта волны. (Рис.5.3)

Поле элемента Гюйгенса в дальней зоне, в сферической системе координат, представляется в виде

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -i \frac{\dot{E}_S \cdot S}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) (\vec{\theta}_0 \cos\alpha - \vec{\alpha}_0 \sin\alpha) e^{-ikr}, \\ \vec{H} &= -i \frac{\dot{E}_S \cdot S}{2\lambda r Z_c} (1 + \cos\theta) (\vec{\theta}_0 \sin\alpha + \vec{\alpha}_0 \cos\alpha) e^{-ikr},\end{aligned}\quad (5.11)$$

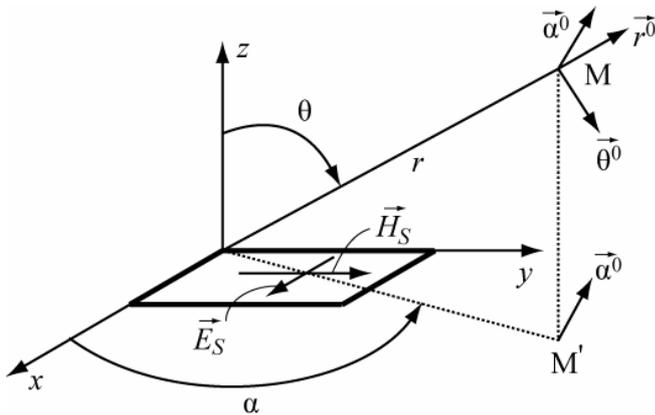


Рис.5.3

ляется выражением

$$F(\theta, 0) = F(\theta, \pi/2) = \frac{1 + \cos\theta}{2}. \quad (5.12)$$

В полярной системе координат диаграмма направленности имеет вид кардиоиды (рис.5.4), причем максимум излучения направлен вдоль оси z ($\theta=0$).

где \dot{E}_S - комплексная амплитуда напряженности электрического поля на поверхности элемента Гюйгенса.

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в главных плоскостях ($\alpha=0$, $\alpha=\pi/2$) опреде-

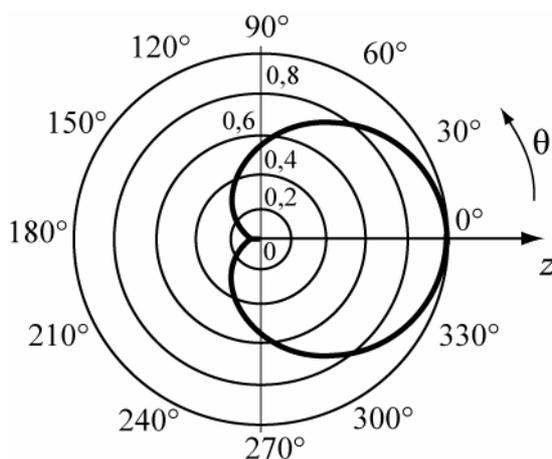


Рис. 5.4

5.2 Примеры решения типовых задач

Задача №1 (поле диполя Герца)

Найти амплитуду тока в диполе Герца и излучаемую им мощность, если его длина 5 см и в точке с координатами $r = 1\text{ км}$, $\theta = \pi/2$ амплитуда напряженности электрического поля $E_\theta = 10^{-4}\text{ В/м}$. Частота колебаний 150 МГц.

Решение:

Определим излучаемую длину волны. Поскольку параметры среды не заданы, то будем полагать, что это – воздух (или вакуум)

$$\lambda = c/f = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{150 \cdot 10^6 \text{ 1/с}} = 2\text{ м}.$$

Определим величину kr для оценки. $kr = \frac{2\pi}{\lambda} r = \pi \cdot 10^3$.

Поскольку $kr \gg 1$, то точка наблюдения находится в дальней зоне и поле определяется формулой (5.4). Запишем ее для амплитуды E_θ , опуская фазовые множители i и e^{-ikr}

$$E_\theta = \frac{kI_{cm}lW_0}{4\pi r} \sin \theta. \quad \text{Отсюда} \quad I_{cm} = \frac{4\pi r E_\theta}{klW_0 \sin \theta}.$$

Подставляя значения r , θ и $W_0 = 120\pi$ Ом, получим амплитуду тока в ди-

$$\text{поле } I_{cm} = \frac{1}{15\pi} A \approx 2.12 \cdot 10^{-2} A.$$

Сопротивление излучения диполя определяется формулой (5.6а)

$$R_{\Sigma} = \frac{2\pi W_0}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 5\pi^2 \cdot 10^{-2} \approx 0.5 \text{ Ом}.$$

Средняя по времени мощность излучения определится как

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} I_{cm}^2 R_{\Sigma} = 1.11 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}.$$

Задача №2 (поле диполя Герца)

Диполь Герца длиной 1м питается током частотой 1 МГц и амплитудой 2А. Определить напряженности электрического и магнитного полей на расстоянии 10м и 10 км и построить зависимости их амплитуд от углов θ и α при этих расстояниях.

Решение:

Аналогично решению предыдущей задачи, определим величины kr для двух значений $r_1=10\text{м}$ и $r_2=10\text{км}$.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300 \text{ м}, \quad kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \approx 0.209, \quad kr_2 \approx 209,$$

Таким образом, расстояние r_1 соответствует ближней зоне, а r_2 – дальней.

Поля в ближней зоне описываются формулами (5.3). При выполнении расчетов учтем, что для воздуха $\frac{1}{\omega\epsilon} = \frac{W_0}{k}$.

$$H_{\alpha} = \frac{I_{cm}}{4\pi r^2} \sin \theta = \frac{1 \cdot 2}{4\pi 10^2} \sin \theta \approx 1.59 \cdot 10^{-3} \sin \theta \text{ А/м},$$

$$\dot{E}_{\theta} = i \frac{I_{cm}}{4\pi\omega\epsilon r^3} \sin \theta = i \frac{I_{cm} W_0}{4\pi k r^3} \sin \theta = i \frac{9}{\pi} \sin \theta \approx i 2.86 \sin \theta \text{ В/м},$$

$$E_r = i \frac{I_{cm}}{2\pi\omega\epsilon r^3} \cos \theta = i \frac{I_{cm} W_0}{2\pi k r^3} \cos \theta = i \frac{18}{\pi} \cos \theta \approx i 5.73 \cos \theta \text{ В/м}.$$

Таким образом, на расстоянии 10 м от диполя будут присутствовать две компоненты вектора \vec{E} и одна – вектора \vec{H} . Их диаграммы направленности в ближней зоне в полярной системе координат имеют вид

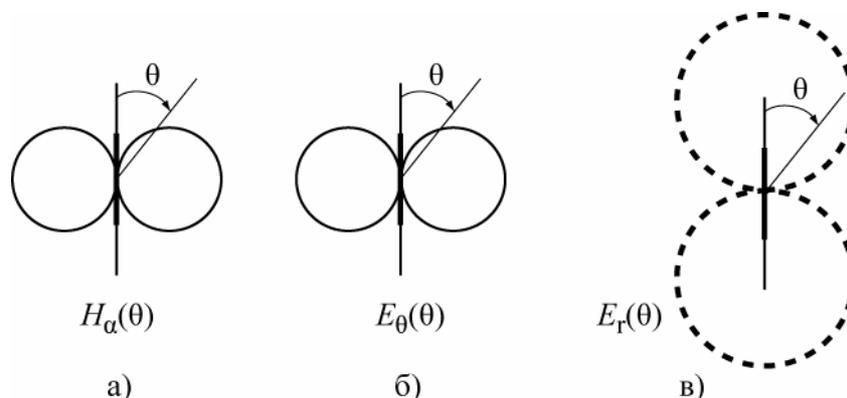


Рис. 5.5

На рисунке диполь выделен жирной линией. Следует обратить внимание на то, что в ближней зоне существует значительное продольное электрическое поле E_r и на сдвиг по фазе между полями E и H .

Поля в **дальней зоне** определяются формулами (5.4). Определим амплитуду H_α

$$H_\alpha = \frac{kI_{cm}l}{4\pi r} \sin \theta = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{300 \cdot 4\pi \cdot 10^4} \sin \theta = 3.33 \cdot 10^{-7} \cdot \sin \theta \text{ А/м}.$$

Электрическое поле имеет одну составляющую E_θ , которую можно определить согласно (5.9) через H_α и волновое сопротивление

$$E_\theta = W_0 \cdot H_\alpha = 120\pi \cdot 3.33 \cdot 10^{-7} \cdot \sin \theta = 1.256 \cdot 10^{-4} \cdot \sin \theta \text{ В/м}.$$

Диаграмма направленности в дальней зоне описывается функцией $\sin \theta$ и имеет вид изображенный на рис. 5.5а для H_α или рис. 5.5б для E_θ .

Задача №3 (диаграмма направленности диполя над землей)

Определить диаграммы направленности в вертикальной и горизонтальной плоскостях диполя Герца, находящегося над идеально проводящей землей на высоте h . Рассмотреть случаи вертикального и горизонтального диполей для высоты $h = \lambda/2$.

Решение:

Выберем прямоугольную систему координат для обозначения

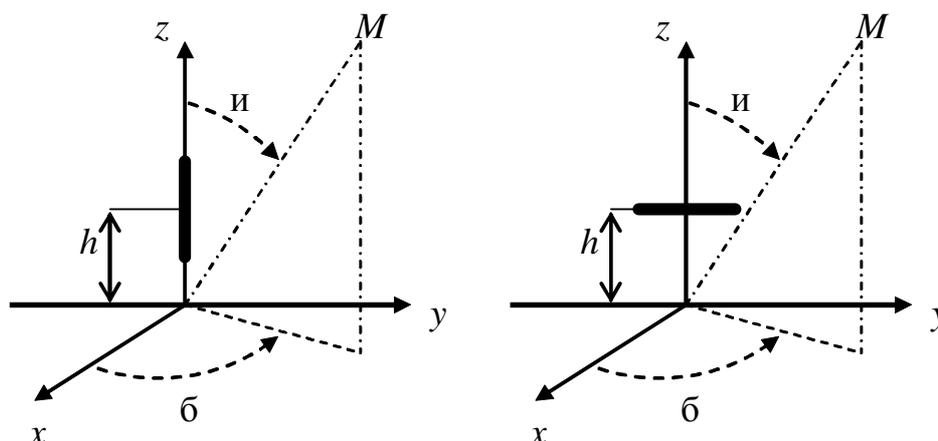


Рис.5.6

координат диполей и сферическую - для координат точки наблюдения

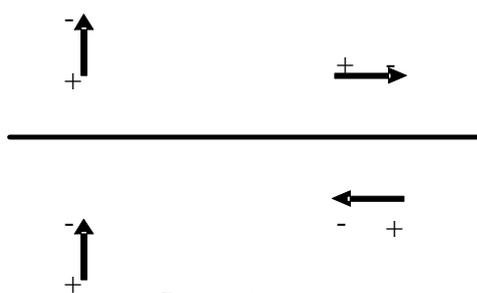


Рис. 5.7

(рис. 5.6) Учет влияния идеально проводящей земли на излучение антенн можно провести методом зеркальных изображений. Рассмотрим вертикальный и горизонтальные диполи, расположенные над поверхностью идеально проводящей земли (рис.5.7) Отметим для фиксированного момента времени на диполях

положительные и отрицательные заряды и

соответствующие им заряды на зеркальных изображениях диполей. Покажем направление токов в диполях и их зеркальных изображениях от положительного заряда к отрицательному. Видно, что **токи в вертикальном диполе и его зеркальном изображении имеют одинаковое направление, а в горизонтальном – противоположное.**

Перейдем к определению диаграмм направленности. Изобразим на рисунке 5.8 условие задачи для **вертикального диполя**. В точке А расположен вертикальный диполь, в точке В – его зеркальное изображение с таким же направлением тока.

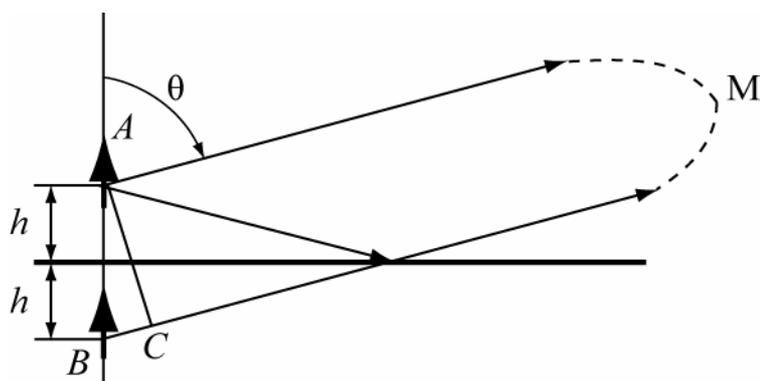


Рис. 5.8

Точка наблюдения M находится в дальней зоне, поэтому направления распространения волн от диполя и его зеркального изображения (волны, отраженной от земли) параллельны и пересекаются в бесконечно удаленной точке. Расстояния AM и BM отличаются на длину отрезка $BC = 2h \cos \theta$, это приводит к разности фаз полей в точке наблюдения

$\Delta\varphi = k \cdot 2h \cos \theta = \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \theta$. Амплитуды полей в прямой и отраженной волнах в

бесконечно удаленной точке можно считать одинаковыми. Таким образом, сумма полей в точке M прямой волны и отраженной от земли будет пропорциональна выражению

$$1 + e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i\Delta\varphi/2} (e^{+i\Delta\varphi/2} + e^{-i\Delta\varphi/2}) = 2e^{-i\Delta\varphi/2} \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Модуль этого выражения пропорционален функции

$$F_3^g(\theta) = \left| \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = \left| \cos \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \cos \theta \right) \right|, \quad (5.13)$$

которая может быть названа множителем земли.

Амплитудная диаграмма направленности будет определяться также собственной диаграммой направленности диполя в вертикальной плоскости $F_0(\theta) = |\sin \theta|$. Таким образом, полная диаграмма направленности будет являться произведением диаграммы направленности вибратора в свободном пространстве на множитель земли.

$$F^g(\theta) = F_0(\theta) \cdot F_3^g(\theta) = |\sin \theta \cdot \cos(kh \cos \theta)|. \quad (5.14)$$

Видно, что диаграмма направленности в вертикальной плоскости не зависит от угла α и в пространстве представляет тело вращения вокруг оси z .

В горизонтальной плоскости ($\theta = \pi/2$) диаграмма направленности останется такой же, как у вертикального диполя в свободном пространстве, т.е. окружностью, поскольку множитель земли не зависит от азимутального угла α . $F^6(\alpha)\Big|_{\theta=90^0} = 1$

Для горизонтального диполя множитель земли будет другим, поскольку ток в зеркальном изображении противоположен по направлению току в диполе

$$F_3^z(\theta) = \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \cos \theta \right) \right|. \quad (5.15)$$

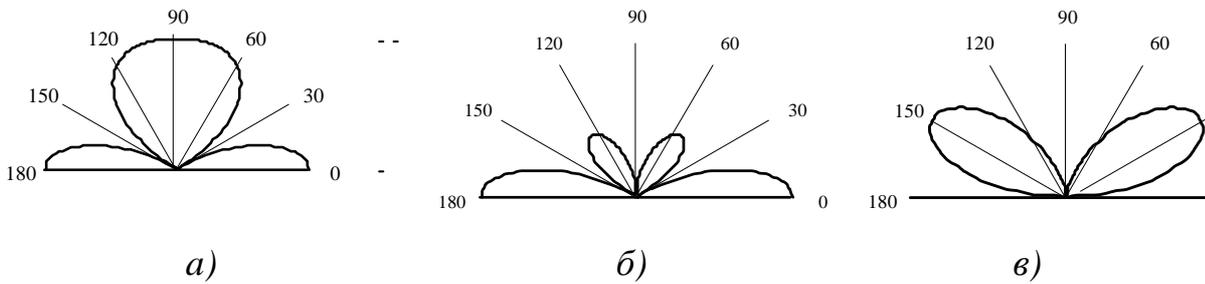
Собственная диаграмма направленности горизонтального диполя в вертикальной плоскости зависит от ориентации диполя относительно этой плоскости. На рисунке 5.6 диполь ось диполя направлена вдоль оси y . Собственная диаграмма направленности в плоскости xoz является окружностью $F_0^z(\theta)\Big|_{\alpha=0} = 1$, а в плоскости yoz «восьмеркой» $F_0^z(\theta)\Big|_{\alpha=90^0} = |\cos \theta|$.

Таким образом, полные диаграммы направленности в вертикальной плоскости - плоскости xoz (иногда ее называют экваториальной) и в плоскости yoz (соответственно – меридиональной) представляются выражениями

$$F^z(\theta, \alpha = 0) = \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \cos \theta \right) \right| \text{ в экваториальной плоскости,} \quad (5.16)$$

$$F^z(\theta, \alpha = \pi/2) = \cos(\theta) \cdot \left| \sin \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \cos \theta \right) \right| \text{ в меридиональной плоскости} \quad (5.17)$$

На рис. 5.9 изображены множитель земли и диаграммы направленности в вертикальной плоскости для вертикального и горизонтального диполей для случая $h = \lambda/2$. Для удобства построения вместо угла θ использовался угол возвышения $\gamma = 90^0 - \theta$, отсчитываемый от поверхности земли.



а - множитель земли для вертикального диполя $F_3^6(\gamma, \alpha\text{-любое})$

б - диаграмма направленности вертикального диполя, $F^6(\gamma, \alpha\text{-любое})$

в - диаграмма направленности горизонтального диполя. $F^2(\gamma, \alpha=\pi/2)$

Рис. 5.9

Диаграммы направленности обоих диполей в горизонтальной плоскости будут такими же, как при отсутствии земли, т.е. для вертикального диполя – окружность, для горизонтального – «восьмерка», такая же как на рис. 5.5б для $E_\theta(\theta)$. Это следует из того, что множитель земли не зависит от угла α .

Задача №4 (Качественное определение диаграмм направленности)

Во многих случаях можно определить вид диаграммы направленности излучателей, поднятых над землей, из достаточно простых физических соображений. При этом можно исходить из следующих положений:

1) Диаграмма направленности в вертикальной плоскости есть произведение диаграммы одного элемента на множитель земли

2). Множитель земли представляет собой диаграмму направленности изотропного излучателя, находящегося на той же высоте и с такой же поляризацией поля излучения, что и реальный излучатель. Изотропный излучатель имеет диаграмму направленности в свободном пространстве в виде сферы, т.е. излучает равномерно по всем направлениям.

3) Множитель земли не зависит от азимутального угла α и в пространстве представляет собой тело вращения относительно вертикали, проходящей через антенну.

4) Максимумы множителя земли $F_3(\theta)$ соответствуют направлениям, в которых поля излучателя и его зеркального изображения складываются в фазе или со сдвигом фаз 2π , 4π и т.д. Нули диаграммы множителя земли соот-

ветствуют направлениям, в которых разность фаз полей в точке наблюдения равна нечетному числу π

4) Разность фаз полей в точке наблюдения определяется разностью хода лучей от излучателя и его зеркального изображения до точки наблюдения (отрезок BC на рис. 5.7), а также разностью фаз токов в излучателе и зеркальном изображении. При этом необходимо помнить, что разность хода величиной $\lambda/2, 3\lambda/2$ и т.д. (нечетное число полуволн) соответствует сдвигу фаз равному нечетному числу π ($\pi, 3\pi$ и т.д.), а разности хода величиной $\lambda, 2\lambda$ и т.д. – сдвигу фаз $2\pi, 4\pi$ и т.д.

Покажем применение этих положений на примере диполя, находящегося над идеально проводящей землей на высоте $h=\lambda$. Будем, как и в предыдущем примере, использовать угол γ , отсчитываемый от поверхности земли.

Для случая вертикального диполя токи в нем и зеркальном изображении синфазные, поэтому вид множителя земли будет определяться только разностью хода лучей от диполя и зеркального изображения. Направления максимумов определяются из условия

$$\Delta r = 2h \sin \gamma_{\max} = p\lambda, \text{ где } p=0, 1, 2..$$

В нашем случае ($h=\lambda$) это соответствует значениям $\sin \gamma_{\max} = 0, 1/2, 1$ или углам $\gamma_{\max} = 0^0, 30^0, 90^0$.

Положения минимумов множителя земли определяются из условия

$$\Delta r = 2h \sin \gamma_{\min} = p\lambda/2, \text{ где } p=1, 3..$$

Это соответствует углам $\gamma_{\min} = 14^0 30'$ и $48^0 30'$

Построенный по этим значениям углов множитель земли изображен на рисунке 5.10а сплошной линией. Пунктирной линией показана диаграмма направленности диполя в свободном пространстве в пределах изменения угла γ от 0^0 до 180^0 . Полная диаграмма диполя над землей определится как произведение этих диаграмм. Приблизненно это соответствует «вписыванию» множителя земли в диаграмму вибратора в свободном пространстве. Результат представлен на рис. 5.10б.

Для горизонтального диполя токи диполя и его зеркального изображения противофазные. Это приводит к тому, что максимумы множителя земли будут располагаться там, где были минимумы множителя земли для вертикального вибратора и наоборот. Полная диаграмма направленности горизонтального диполя совпадает с множителем земли и представлена на рис. 5.10в.

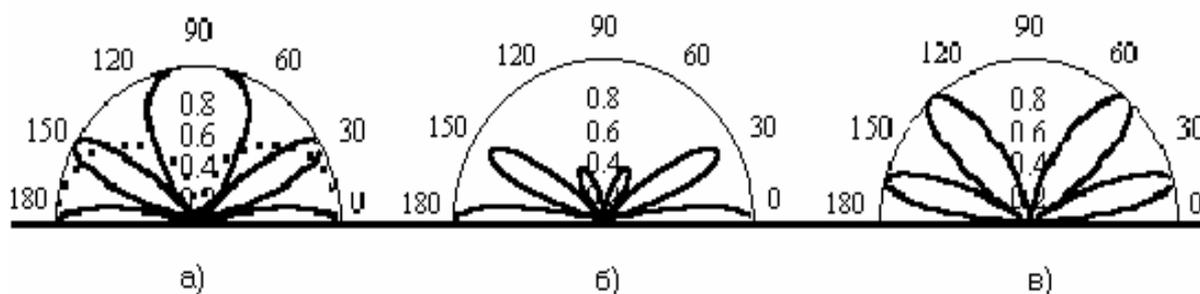


Рис. 5.10

Учет влияния земли на диаграмму направленности излучателей, подобный приведенному выше, пригоден для любых антенн над идеально проводящей землей. Над реальными почвами он также применяется, но только если излучатель поднят на высоту $h > \lambda$.

Таким образом, определяя направления максимумов и нулей множителя земли и учитывая собственную диаграмму направленности излучателя, можно определить диаграмму направленности излучателя с учетом влияния земли.

Задача №5 (электрический и магнитный диполи Герца)

Для радиоловительского вида спорта «охота на лис» применяются направленные антенны в виде диполя Герца и рамочной антенны, расположенные в одной плоскости, как показано на рисунке 5.11а.

Определить соотношение между амплитудами тока в диполе и рамке, при котором диаграмма направленности будет иметь направление нулевого излучения, если l - длина диполя, S - площадь рамки, f - частота токов в диполе и рамке.

Решение:

Известно, что рамка с током при ее малых размерах (по сравнению с длиной волны) по своим свойствам аналогична магнитному диполю Герца, перпендикулярному ее плоскости (рис.5.11б)

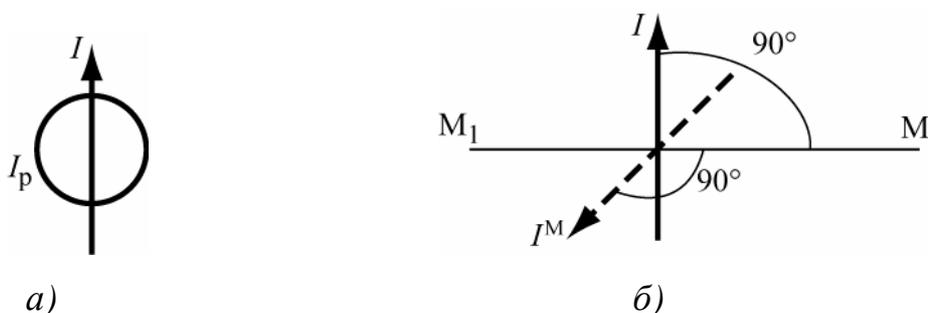


Рис. 5.11

Таким образом, данная конструкция представляет собой взаимно ортогональные электрический и магнитный диполи Герца и при определенных соотношения между токами диполя и рамки может иметь направление нулевого излучения, как элемент Гюйгенса.

Рассмотрим поля E и H от диполя (рис. 5.12а) и рамки (рис. 5.12б) в симметричных относительно начала координат точках M и M_1

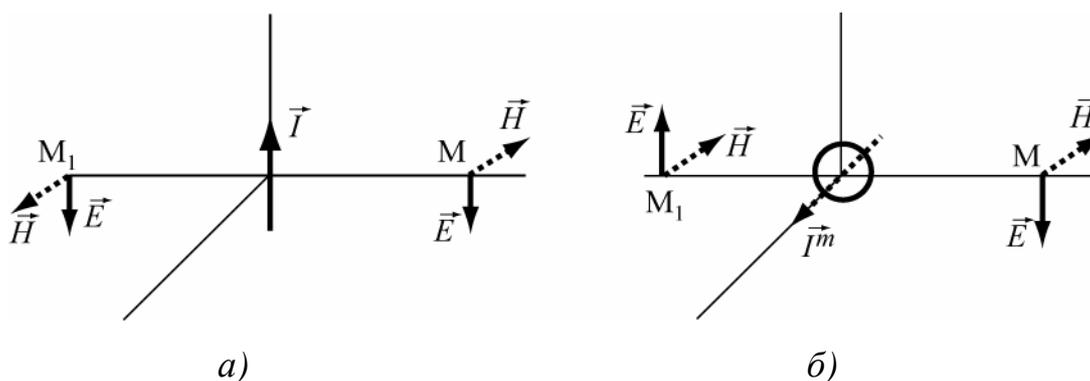


Рис 5.12

Векторы \vec{H} от диполя (рис. 5.12а) направлены в противоположные стороны, поскольку ориентированы по касательной к силовой линии магнитного поля в виде окружности с центром в начале координат. Направления векторов \vec{E} определяется через векторы Пойнтинга в этих точках, которые направлены от диполя. Для рамки в противоположные стороны направлены векторы \vec{E} , как касательные к силовой линии электрического поля в виде окружности, а направления векторов \vec{H} определяются через векторы Пойнтинга. Для выбранных направлений токов I и I^M поля от диполя и рамки в точке M складываются, а в точке M_1 вычитаются.

Приравняем комплексные амплитуды полей, созданных диполем (5.4) и рамкой (5.9) в точках M и M_1 в дальней зоне. При этом нужно учесть, что формулы (5.4) и (5.9) определяют поля в разных системах координат, связанных с направлениями осей диполя и рамки. Направление на точки M и M_1 соответствует значению $\theta=90^\circ$ для обоих диполей.

Подставляя в обе формулы $\theta=90^\circ$ и приравнивая комплексные амплитуды векторов E , получим

$$i \frac{kIIZ_c}{4\pi r} e^{-ikr} = \frac{I_p k^2 SZ_c}{4\pi r} e^{-ikr} \text{ или } iI = I_p kS.$$

При выполнении этого условия поля в точке M будут складываться, а в точке M_1 - взаимно компенсироваться, так что диаграмма направленности будет иметь форму кардиоиды (рис.5.4). Мнимая единица « i », присутствующая в этом условии, означает необходимый сдвиг фаз токов на 90° .

5.3 Задачи для самостоятельного решения

5.1. Диполь Герца длиной 1 м возбуждается на частоте 10 МГц током с амплитудой 1 А . Определить амплитуды напряженности электрического и магнитного полей в экваториальной плоскости вибратора на расстоянии 1000 м от него. Ответ: $H=1,67 \cdot 10^{-5}\text{ А/м}$, $E=6,28 \cdot 10^{-3}\text{ В/м}$.

5.2. Как изменится результат предыдущей задачи для частоты 10 кГц ? Ответ: $H=7,94 \cdot 10^{-5}\text{ А/м}$, $E=1,43 \cdot 10^{-4}\text{ В/м}$.

5.3. При расчете экранов для электромагнитного поля широко используется понятие волнового сопротивления среды для ближней зоны электрического и магнитного диполей Герца, которое определяется как отношение поперечных к направлению распространения составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} . Получите формулы для этих сопротивлений. О чем свидетельствует мнимый характер и зависимость от расстояния этих сопротивлений? Ответ:

$$W_E = \frac{i}{kr}; W_H = ikr.$$

5.4. Найти составляющие поля диполя Герца длиной 10 см в экваториальной плоскости на расстоянии а) 2м, б) 2км, если частота колебаний составляет

30 МГц. Ответ: $a) H_{\alpha} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}, E_{\theta} = 0.597 \text{ В/м}$
 $b) H_{\alpha} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ А/м}, E_{\theta} = 9.425 \cdot 10^{-4} \text{ В/м}$

5.5. Определить мощность излучаемую на отрезке длиной 1 м двухпроводной линии электропередачи, если по ней протекает ток с амплитудой 10 А. Расстояние между проводами 0.3м.

Указание: рассматривать отрезок линии как рамку с током.

Ответ: $P_{\Sigma} = 1.1 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}$

5.6. Рамочный излучатель диаметром 0.5м возбуждается током 0.3 А на частоте 25 МГц. Найти амплитуду напряженности магнитного поля в плоскости рамки на расстоянии 10 км и излучаемую мощность.

Ответ: $P = 2.61 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}, H = 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ А/м}$

5.7. Определить направления максимумов и построить качественно диаграмму направленности в вертикальной плоскости горизонтального диполя Герца расположенного на высоте 1.5λ над идеально проводящей землей. Ответ: $\theta = 33.55^{\circ}, 60^{\circ}, 80.4^{\circ}$.

5.8. Площадь некоторой плоской цепи переменного тока составляет $0.2 \lambda^2$. Определить ее сопротивление излучения. Ответ: $R_{\Sigma} = 12.47 \text{ Ом}$

5.9. Излучатель в виде открытого конца прямоугольного волновода приближенно можно рассматривать как элемент Гюйгенса. Определить напряженность электрического поля на расстоянии 100м в направлении максимального излучения. Амплитуда напряженности поля на раскрыве волновода $E_S = 10^3 \text{ В/м}$, площадь раскрыва $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. частота 3 ГГц.

Ответ: $E = 2 \cdot 10^{-7} \text{ В/м}$.

5.10. В отличие от задачи №5 раздела 5.2 диполь расположен в центре рамки перпендикулярно ее плоскости. Определить диаграмму направленности такой антенны и соотношение между токами диполя и рамки при котором поляризация поля в плоскости рамки будет круговая.

Ответ: Диаграмма направленности такая же как у диполя. $I \cdot l = I_p \cdot kS$.

5.11. Построить диаграммы направленности горизонтального диполя Герца над идеально проводящей землей в вертикальной плоскости при $h=2\lambda$. Сколько лепестков имеет эта диаграмма направленности в диапазоне углов θ от 0 до 90 градусов? Ответ: четыре лепестка.

5.12. Амплитуда напряженности магнитного поля на расстоянии 100м от рамки с током в направлении ее максимального излучения составляет 3,6 мкА/м. Определить диаметр рамки, если частота равна 12 МГц, амплитуда тока 9А. Ответ: 10 см.

5.13. Как изменится амплитуда магнитного поля диполя Герца в направлении максимального излучения, если расстояние до точки наблюдения увеличится с 10 м до 1000 м? Частота волны а) 3 МГц, б) 3 кГц.

Ответ: а) уменьшится примерно в 159 раз, б) Уменьшится в 10^4 раз.

5.14 Получить выражение для множителя земли, если излучатель расположен на высоте $h \gg \lambda$ и землю нельзя считать идеально проводящей. Электрические параметры земли (ϵ, μ, σ), высоту расположения излучателя $-h$, длину волны λ и поляризацию излучателя считать заданными.

Указание: В точке отражения падающую волну считать плоской, угол γ отсчитывать от поверхности земли.

Ответ: $F_z(\gamma) = 1 + |R(\gamma)|e^{i\Phi(\gamma)}$, где $\dot{R}(\gamma) = |\dot{R}(\gamma)|e^{i\psi(\gamma)}$ - комплексный коэффициент отражения, определяемый по формулам Френеля (4.26),

$$\Phi(\gamma) = \psi(\gamma) - 2kh \sin(\gamma), \quad k = 2\pi / \lambda.$$

5.15 Получить выражение для диаграммы направленности вибратора длиной L , считая распределение тока в нем равномерным по длине. Угол γ отсчитывать от поверхности земли. Определить ширину главного лепестка диаграммы направленности.

Указание: разделить вибратор на малые отрезки – диполи Герца и определить поле в дальней зоне по принципу суперпозиции.

Ответ: $F(\gamma) = \frac{2}{kL} \cos(\gamma) \frac{\sin(\frac{kL}{2} \sin(\gamma))}{\sin(\gamma)}$, $2\gamma_0 = 2 \arcsin(\lambda/L)$

6 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДАХ

В данном разделе рассматриваются темы:

1. Условия распространения волн основного (низшего) и высших типов;
2. Параметры распространяющейся волны;
3. Структура электромагнитного поля;
4. Особенности поляризации магнитного поля основной волны;
5. Передаваемая мощность и плотность потока мощности в волноводе;
6. Тепловые потери и затухание волны в волноводе;

6.1 Краткие теоретические сведения

Полая металлическая труба произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны, называется волноводом.

В однородных волноводах (форма поперечного сечения и параметры заполняющей среды постоянны вдоль координаты распространения волны) с идеально проводящими стенками могут распространяться волны электрического типа (E), у которых $H_z = 0$, а $E_z \neq 0$ и волны магнитного типа (H), у которых $E_z = 0$, а $H_z \neq 0$.

Из уравнений Максвелла получают инвариантные (справедливые для любой системы координат) соотношения, позволяющие определять поперечные составляющие полей через продольные для любого типа волны и волновода:

$$\gamma_{\perp}^2 \vec{E}_{\perp} = -i\beta \cdot \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z + i\omega\mu \cdot [\vec{z}^0 \cdot \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z], \quad (6.1)$$

$$\gamma_{\perp}^2 \vec{H}_{\perp} = -i\beta \cdot \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z - i\omega\epsilon [\vec{z}^0 \cdot \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z], \quad (6.2)$$

где $\vec{E}_{\perp} = \vec{x}^0 E_x + \vec{y}^0 E_y$, $\vec{H}_{\perp} = \vec{x}^0 H_x + \vec{y}^0 H_y$ и $\text{grad}_{\perp} = \vec{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}^0 \frac{\partial}{\partial y}$ - для прямоугольного волновода,

ного волновода,

$\vec{E}_{\perp} = \vec{r}^0 E_r + \vec{\alpha}^0 E_{\alpha}$, $\vec{H}_{\perp} = \vec{r}^0 H_r + \vec{\alpha}^0 H_{\alpha}$ и $\text{grad}_{\perp} = \vec{r}^0 \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\alpha}^0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}$ - для случая круглого волновода.

го волновода.

Основные параметры волн в волноводах

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{k}{K_d} - \text{постоянная распространения волны;} \quad (6.3)$$

$$k = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{\lambda_0} - \text{волновое число в среде, заполняющей волновод;} \quad (6.4)$$

$$K_d = \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2} - \text{коэффициент дисперсии;} \quad (6.5)$$

$$\gamma_{\perp} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} - \text{поперечное волновое число.} \quad (6.6)$$

Конкретный тип волны в волноводе может распространяться только в том случае, если $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < \lambda_{кр}$, (6.7)

Критическая длина волны определяется размерами и формой поперечного сечения волновода, а так же типом волны E_{mn} , H_{mn} . Основным (низшим) типом волны считается тот, у которого $\lambda_{кр}$ наибольшая.

К параметрам волны, распространяющейся в волноведущих линиях, относятся

Длина волны в волноводе	Фазовая скорость	Групповая скорость	Характеристическое сопротивление
$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r} K_d} \quad (6.8)$	$V_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} K_d} \quad (6.9)$	$V_{gp} = \frac{c \cdot K_d}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.10)$	$Z_H = \frac{W_0}{K_d} \quad (6.11)$
	где c - скорость света		$Z_E = W_0 \cdot K_d \quad (6.12)$
			$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad (6.13)$

Средняя мощность, переносимая волной любого типа в любом волноводе, определяется интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \vec{z}^0 \cdot [\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}^*] \} dS. \quad (6.14)$$

Коэффициент ослабления волны α равен сумме коэффициентов ослабления в металлических стенках α_m и диэлектрике α_o , т.е. $\alpha = \alpha_m + \alpha_o$. Потери в ме-

талле

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_s \cdot \int_l |H_\tau|^2 dl}{\int_s \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] d\vec{S}}, \quad (6.15)$$

где $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}}$ - поверхностное сопротивление металла, H_τ - составляющая магнитного поля, тангенциальная к поверхности стенок волновода.

Потери в диэлектрике определяются с помощью выражения

$$\alpha_o = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \Delta_\varepsilon}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (6.16)$$

Для конкретного типа волны подстановкой решения для продольных компонент (ниже) в уравнения (6.1) и (6.2), получают выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей.

Волноводы прямоугольного сечения

Волны типа E_{mn}

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -i \frac{\beta \pi m}{\gamma_\perp^2 a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\ \dot{E}_y &= -i \frac{\beta \pi n}{\gamma_\perp^2 b} \cdot E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\ \dot{E}_z &= E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_x &= i\omega\varepsilon \frac{\pi m}{\gamma_\perp^2 b} \cdot E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_y &= -i\omega\varepsilon \frac{\pi m}{\gamma_\perp^2 a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Волны типа H_{mn}

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x &= i\omega\mu \frac{\pi m}{\gamma_{\perp}^2 b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\
\dot{E}_y &= -i\omega\mu \frac{\pi m}{\gamma_{\perp}^2 a} \cdot H_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\
\dot{E}_z &= 0 \\
\dot{H}_x &= i \frac{\beta \pi m}{\gamma_{\perp}^2 a} \cdot H_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\
\dot{H}_y &= i \frac{\beta \pi m}{\gamma_{\perp}^2 b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} \\
\dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z} ,
\end{aligned} \tag{6.18}$$

где $\gamma_{\perp}^2 = \left(\frac{\pi \cdot m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b}\right)^2$ - поперечное волновое число; m, n – целые положительные числа; a, b – поперечные размеры широкой и узкой стенок волновода соответственно; E_0, H_0 - амплитуды волны, зависящие от передаваемой мощности;

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} - \text{критическая длина волны} . \tag{6.19}$$

Основной волной в прямоугольном волноводе при $a > b$ является волна H_{10} , ее критическая длина волны будет максимальной и, согласно (6.19), равна

$$\lambda_{крH_{10}} = 2a \tag{6.20}$$

Передача энергии осуществляется на основном типе волны, пока выполняется условие (6.7), другие типы волн в волноводе не возбуждаются.

Средняя мощность (6.14), переносимая волной H_{10} в прямоугольном волноводе определяется соотношением

$$P_{срH_{10}} = \frac{abE_0^2}{4Z_H} , \tag{6.21}$$

Для волны H_{10} коэффициент затухания в прямоугольном медном волноводе рассчитывается по формуле

$$\alpha_m = \frac{R_s \left[\varepsilon_r + \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{W_0 \cdot b \cdot \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \cdot \left[\frac{H_n}{M} \right]; \text{ или } \alpha_m = \frac{0,104 \cdot \left[\varepsilon_r + \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{b \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \cdot \left[\frac{\delta b}{M} \right]. \quad (6.22)$$

Волноводы круглого сечения

Для волноводов круглого сечения, работающих на волнах типа H_{mn} , критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}, \quad (6.23)$$

где μ_{mn} - n -й корень производной функции Бесселя $J'_m(z) = 0$, a - радиус волновода. Для волн типа E_{mn} критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}, \quad (6.24) \text{ где } \nu_{mn} - n -$$

й корень функции Бесселя $J_m(z) = 0$. Значение корней μ_{mn} и ν_{mn} приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Значения корней ν_{mn} функции Бесселя $J_m(z)$

m	n			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Значения корней μ_{mn} производных функции Бесселя $J'_m(x)$

m	n		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	1,403

Максимальная $\lambda_{кр}$ в круглом волноводе у волны типа H_{11}

$$\lambda_{крH_{11}} = 3.41a, \quad (6.25)$$

а ближайшим к ней типом волны является E_{01} , для которой

$$\lambda_{крE_{01}} = 2.61a. \quad (6.26)$$

Выражения для составляющих векторов поля в круглом волноводе имеют вид
волны типа H_{mn}

$$\dot{E}_r = i \frac{\omega\mu}{\gamma_{\perp}^2 r} m \cdot H_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \sin(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_{\varphi} = i \frac{\omega\mu}{\gamma_{\perp}} \cdot H_0 \cdot J'_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_z = 0 \quad (6.27)$$

$$\dot{H}_r = -i \frac{\beta}{\gamma_{\perp}} \cdot H_0 \cdot J'_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_{\varphi} = i \frac{\beta m}{\gamma_{\perp}^2 r} \cdot H_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \sin(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

Волны типа E_{mn}

$$\dot{E}_r = -i \frac{\beta}{\gamma_{\perp}} \cdot E_0 \cdot J'_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_{\varphi} = i \frac{\beta m}{\gamma_{\perp}^2 r} \cdot E_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \sin(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_z = E_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z} \quad (6.28)$$

$$\dot{H}_r = -i \frac{\omega\epsilon}{\gamma_{\perp}^2 r} \cdot m \cdot E_0 \cdot J_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \sin(m\varphi) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_{\varphi} = -i \frac{\omega\epsilon}{\gamma_{\perp}} \cdot E_0 \cdot J'_m(\gamma_{\perp} r) \cdot \cos(m\varphi) e^{-i\beta z}.$$

$$H_z = 0$$

Средняя мощность (6.14), переносимая волной H_{11} в круглом волноводе

$$P_{срH_{11}} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 \cdot Z_H}, \quad (6.29)$$

в (6.29) величина E_0 - максимальная амплитуда напряженности электрического поля для волны H_{11} .

Мощность, переносимая волной E_{01} в круглом волноводе, определяется [2]

$$P_{cpE_{01}} = \frac{\pi \cdot E_0^2 \cdot \beta_{01}^2 \cdot a^4 \cdot J_1(\nu_{01})^2}{2 \cdot Z_E \cdot \nu_{01}^2} \quad \text{или} \quad P_{cpE_{01}} = \frac{0,778 \cdot E_0^2 \pi \omega \epsilon \beta}{q_{\perp}} \quad (6.30)$$

Из соотношений (6.29), (6.30) находится амплитуда E_0 электрического поля соответствующего типа волны. Например, для волны E_{01} она равна

$$E_{0E_{01}} = \sqrt{\frac{2P_{cp} \cdot Z_E \cdot \nu_{01}^2}{\pi \cdot \beta_{01}^2 \cdot a^4 \cdot J_1(\nu_{01})^2}} \quad (6.31)$$

Средняя мощность, переносимая волной H_{01} определяется соотношением

$$P_{cpH_{01}} = \frac{H_0^2 \pi a^2 Z_H}{4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2 \quad (6.32)$$

Постоянные затухания $\left(\frac{m\pi}{m} \right)$ для волн в круглом волноводе [2] имеют вид

$$\alpha_m^{E_{01}} = \frac{R_s}{a} \frac{1}{W_0} \frac{\lambda_g}{\lambda}, \quad (6.33a)$$

$$\alpha_m^{H_{11}} = \frac{R_s}{a} \frac{1}{W_0} \frac{\lambda_g}{\lambda} \left[\frac{1}{1.841^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2 \right], \quad (6.33б)$$

$$\alpha_m^{H_{mn}} = \frac{R_s}{a} \frac{1}{W_0} \frac{\lambda_g}{\lambda} \left[\frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2 \right]. \quad (6.33в)$$

Электрические поля любого типа волн в волноводах можно использовать для нагрева, сушки или сублимации диэлектриков, имеющих конечную удельную проводимость σ . Для этого следует поместить тонкий слой диэлектрика, чтобы не изменилось первоначальное поле, в электрическое поле волны волновода и определить мощность тепловых потерь P_T в нем.

$$P_T = \int_{V_0} \sigma \cdot |E|^2 dV \quad [Вт] \quad \text{или} \quad P_T = \omega \epsilon_0 \cdot tg \Delta \cdot \int_{V_0} |E|^2 dV, \quad (6.34)$$

где, например, для цилиндрического волновода $|E| = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2 + E_z^2}$,

а для прямоугольного $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$.

Мощность тепловых потерь расходуется на нагрев диэлектрика. Процесс сопровождается повышением температуры диэлектрика и возгонкой влаги.

Чтобы нагреть образец весом m кг на ΔT градусов (от T_n - начальной до T_k - конечной температуры, т.е. $\Delta T = T_k - T_n$) при его удельной теплоемкости

$\gamma \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$, необходимо затратить [6] энергии

$$W = 4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T \quad [\text{Дж}] , \quad (6.35)$$

которая связана с СВЧ мощностью и временем $\Delta t = t_k - t_n$ нагрева выражением

$$P_T = \frac{W}{\Delta t} \quad [\text{Вт}] \quad (6.36,а)$$

Подставляя (6.36) в (6.36а), получаем соотношение, связывающее параметры диэлектрика с величиной мощности, требующейся для его нагрева

$$P_T = \frac{4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T}{\Delta t} \quad [\text{Вт}] \quad (6.36,б)$$

Можно определить из (5.36,б) температуру или время разогрева, если что-то одно будет известно.

$$\Delta T = \frac{P_T}{4.1868 \cdot m \cdot \gamma} \Delta t \quad [^\circ\text{C}], \dots \text{или} \dots t = \frac{4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T}{P_T} \quad [с]. \quad (6.37)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

Задача №1 (Построение структуры поля)

В прямоугольном волноводе возбуждена волна типа H_{11} . Размеры поперечного сечения a и b (рис. 6.1).

Требуется получить уравнение силовых линий электрического поля.

Решение

Электромагнитное поле является векторным полем и графически представляется

линиями векторов \vec{E} и \vec{H} . Выражение векторной линии \vec{E} в прямоугольной системе координат имеет вид

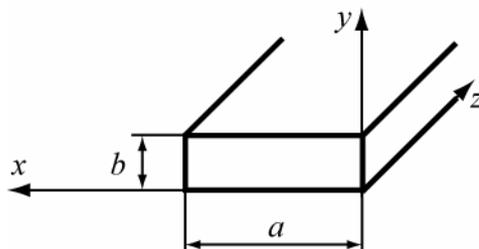


Рис. 6.1

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (6.38)$$

Для решаемой задачи проекции векторов электрического поля из (6.1)

равны

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad E_z = 0. \quad (6.39)$$

Из (6.38), согласно (6.39), уравнение векторной линии электрического поля волны H_{11} записывается в виде

$$E_y dx - E_x dy = 0. \quad (6.40)$$

Подставляя в (6.40) компоненты из (6.39), получим

$$\left\{ \frac{\partial H_z}{\partial x} dx + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right\} = 0. \quad (6.41)$$

Уравнение (6.41) представляет полный дифференциал, т.е. $dH_z = 0$, решение которого с учетом (6.18) для волны H_{11} должно иметь вид

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) = \text{const} = C \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) = \text{const} = C \quad (6.42a)$$

$$\text{или} \quad x = \frac{a}{\pi} \arccos \frac{C}{\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)} \quad (6.42b)$$

Уравнение (6.42б) является уравнением линии вектора \vec{E} волны H_{11} , лежащей в плоскости $z = \text{const}$, т.к. оно получается из уравнения силовых линий.

Как должно производиться построение силовых линий вектора \vec{E} ?

Силовая линия соответствует любому определенному значению постоянной C , которое может принимать, согласно (6.42а), величину в пределах $-1 \leq C \leq 1$.

Каждому значению C , взятому в этих пределах, соответствует одна силовая линия электрического поля волны H_{11} .

Найдем линии вектора \vec{E} при некоторых значениях C .

I. Пусть $C=0$. Что представляет собой силовая линия вектора \vec{E} при $C = 0$?

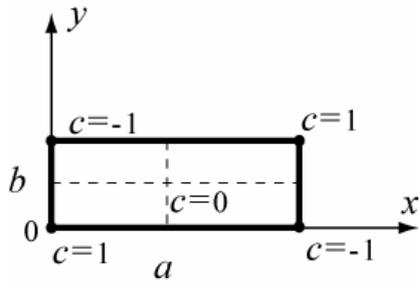


Рис. 6.2

Физически – отсутствие поля E на этой линии, а местоположение точек этого случая находится из

(6.42a). Если $C = 0$, то $\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) = 0$,

что имеет место только при

а). $\cos\frac{\pi x}{a} = 0$, т.е. при $x = \frac{a}{2}$; а $y \rightarrow$ любое зна-

чение в интервале от $0-b$,

б). $\cos\frac{\pi y}{b} = 0$, т.е. $y = \frac{b}{2}$; а $x \rightarrow$ любое

значение в интер-

вале от $0-a$.

Вывод: Если $C=0$, то векторными линиями будут две взаимно ортогональные линии, проходящие через координаты $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$ (рис. 6.2).

II. Пусть $C = \pm 1$. Что представляет собой силовая линия поля при $C = \pm 1$?

Как следует из (6.42a) при

$C = 1$: $x = 0, y = 0$ и $x=a, y=b$;

$C = -1$: $x = 0, y = b$ и $x=a, y=0$.

Таким образом, при $C = \pm 1$ силовые линии поля вырождаются в точки (рис.6.2).

III. Пусть значение C будет любым. Например, $C = \pm 0,2$.

Тогда из (6.42б) имеем $x = \frac{a}{\pi} \arccos \frac{\pm 0,2}{\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)}$

Изменяя координату y в пределах $0 \leq y \leq b$, получим координаты точек

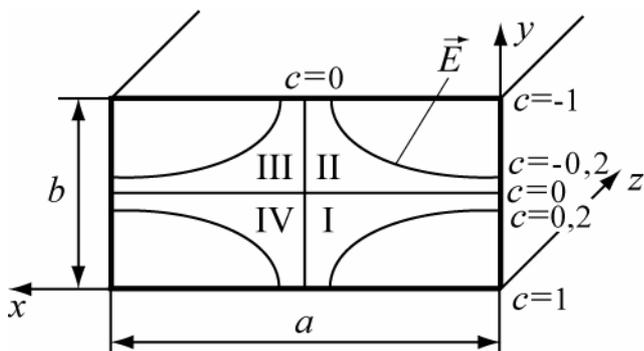


Рис. 6.3

x , соответствующие заданной константе C .

Семейство силовых линий поля E волны H_{11} на поперечном сечении прямоугольного волновода для этого случая изображено на рис. 6.3.

Следует заметить, что, в силу граничного условия $E_{\tau} = 0$, силовые линии вектора \vec{E} в точке соприкосновения со стенками волновода всегда ортогональны к стенкам.

Найдите сами силовые линии вектора \vec{E} , пользуясь (6.42б), для значений $C = \pm 0,5; \pm 0,7; \pm 0,9$. Результаты расчета внесите в таблицу 6.2 (для примера приведен расчет при $C = 0,6$) и изобразите их на рисунке поперечного сечения волновода.

Таблица 6.2

C	0,6					
$\cos \frac{\pi y}{b} = \cos \alpha_0$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$\alpha^0 = \frac{\pi}{b} y$				44^0	53^0	
Координата $y = \frac{\alpha^0 b}{180}$				0,24b	0,29b	
$C / \cos(\frac{\pi}{b} y)$				0,85	1	
$\arccos(C / \cos(\frac{\pi}{b} y)) = \psi$				30^0	0^0	
Координата $x = (a \cdot \psi) / \pi$				$1/6 \cdot a$	0	

В области I константа C (рис.6.3) имеет положительное значение, например $C = 0,2$, но значение y не превышает $b/2$.

В области II константа C имеет отрицательное значение, например,

$C = -0,2$, но $0,5 \cdot b < y < b$, и $\cos \frac{\pi y}{b} = \cos \alpha_0$ имеет отрицательные значения, а от-

ношение $\frac{C}{\cos(\pi y/b)}$ остается положительным. Угол $\alpha^0 > 90^0$, поэтому $\cos(\pi y/b)$

удобно в этих случаях представлять в виде $\cos(180^0 - \alpha)$.

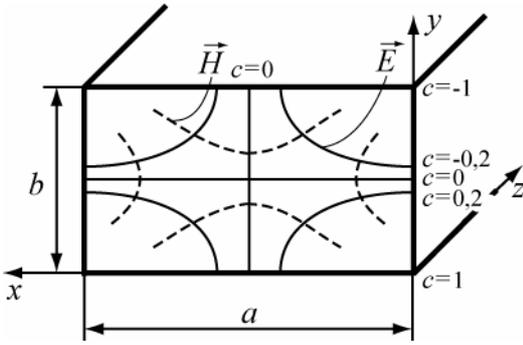


Рис. 6.4

Если известно расположение силовых линий электрического поля волны, то можно изобразить линии магнитного поля на поперечном сечении волновода. Следует учесть, что линии полей \vec{E} и \vec{H} взаимно ортогональны. Поэтому, зная расположение силовых линий \vec{E} (или \vec{H}), легко начертить се-

мейство силовых линий \vec{H} (или наоборот), сохраняя их ортогональность в каждой точке. На рис. 6.4 представлены поля \vec{E} и \vec{H} волны типа H_{11} .

Задача №2 (Поляризация вектора \vec{H} волны типа H_{10})

В волноводе прямоугольного сечения (рис.6.1) распространяется простейшая волна H_{10} . Требуется определить для этого типа волны:

- вид поляризации магнитного поля;
- области правой и левой поляризации магнитного поля;
- наличие областей линейной и круговой поляризации магнитного поля.

Решение Определение вида поляризации

Пользуясь уравнением (6.18) и полагая $m=1, n=0$ для волны типа H_{10} , запишем выражения для мгновенных составляющих магнитного поля H_x и H_z бегущей волны

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right] \sin(\omega t - \beta z) = H_{x0} \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= \left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] \cos(\omega t - \beta z) = H_{z0} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right\}, \quad (6.43)$$

где $H_{x0} = H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a}$ - амплитудное значение составляющей H_x ,

$H_{z0} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}$ - амплитудное значение составляющей H_z .

Из (6.43) видно, что вектор \vec{H} лежит в плоскости xoz , амплитуды составляющих магнитного вектора не равны: $H_{x0} \neq H_{z0}$, и между составляющими H_x и

H_z , существует сдвиг фазы $\pi/2$, так как фазовые члены имеют вид $\sin(\omega t - \beta z)$; $\cos(\omega t - \beta z)$.

Если амплитуды составляющих вектора не равны между собой, а сдвиг фаз составляет любую величину, не равную нулю, то поляризация поля эллиптическая. Итак, в нашем случае поляризация магнитного поля волны H_{10} эллиптическая. Можно определить большую и малую полуоси эллипса поляризации вектора магнитного поля в произвольной точке внутри волновода. Для этого выражения (6.43) представим в виде

$$\frac{H_x}{\left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right]} = \sin(\omega t - \beta z), \quad \frac{H_z}{\left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right]} = \cos(\omega t - \beta z) \quad (6.44)$$

Если оба эти уравнения возвести в квадрат и сложить, то получится каноническое уравнение эллипса

$$\frac{H_x^2}{\left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right]^2} + \frac{H_z^2}{\left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right]^2} = 1,$$

оси которого совпадают с осями координат x и z , и в котором большая и малая полуоси эллипса имеют вид

$$\left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right] = H_{x0} - x\text{-овая полуось}, \quad (6.44,а)$$

$$\left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] = H_{z0} - z\text{-овая полуось}. \quad (6.44,б)$$

Из (6.44,а) следует, что эллиптичность поляризации в каждой точке плоскости $x = \text{const}$ зависит от длины волны в волноводе $\left(\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)$ и ширины волновода a .

Отметим, что вращение вектора магнитного поля, равного $\vec{H} = \vec{x}^0 H_x + \vec{z}^0 H_z$, происходит в плоскости XOZ .

Определение направления вращения эллиптической поляризации вектора \mathbf{H} при $x = \text{const}$.

Для этого, исследуем знаки H_{x0} и H_{z0} в (6.44а), (6.44б) при изменении x

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a/2 \\ a/2 &\leq x \leq a \end{aligned}$$

$$H_{x0} = \left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right] > 0 \text{ при } 0 \leq x \leq a; H_{z0} = \left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ при}$$

Таким образом, можно отметить, что существует в волноводе две области

Область I: $0 \leq x \leq a/2$,	Область II: $a/2 \leq x \leq a$,
$H_{x0} > 0$ и $H_{z0} > 0$	$H_{x0} > 0$, а $H_{z0} < 0$

В каждой из этих областей (рис. 6.5) определим

направление вращения вектора \vec{H}

(6.44), при $z = const$, но при изменении времени, т.к. поляризация временная характеристика.

ристика.

Область I: ($0 \leq x \leq a/2$), $z = const$

Сл.1. Пусть время $t = t_1$;

фаза $(\omega t_1 - \beta z) = 0$, тогда $H_{x1} = 0$; $H_{z1} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} > 0$. (рис.6.6)

Сл.2. При $t = t_2 > t_1$; пусть фаза $(\omega t_2 - \beta z) = \pi/4$, т.е. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$,

тогда $H_{x2} = H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; $H_{z2} = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} < H_{z1}$ (см. рис.6.6)

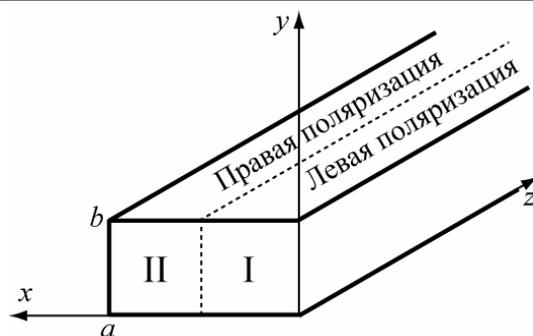
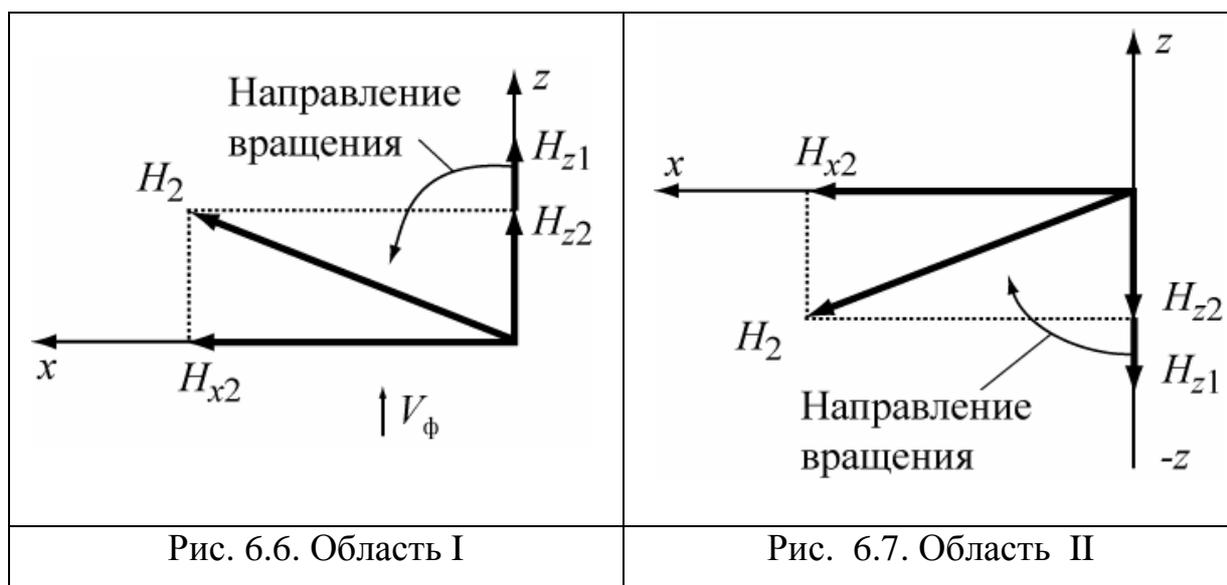


Рис. 6.5



Суммарный вектор \vec{H}_2 повернулся относительно H_{z1} при изменении времени от t_1 до t_2 . Если смотреть со стороны оси y , то вращение вектора

\vec{H} происходит против хода часовой стрелки, что определяет левую поляризацию (рис. 6.6).

Область II: $(a/2 \leq x \leq a)$.

Сл.1. При $t = t_1$; фаза $(\omega t_1 - \beta z) = 0$, $H_{x1} = 0$; $H_{z1} = -\left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] < 0$.

Сл.2. При $t = t_2 > t_1$; $(\omega t_2 - \beta z) = \pi/4$, $H_{x2} = H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$H_{z2} = -\left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Суммируя компоненты, получаем вектор \vec{H}_2 .

Суммарный вектор \vec{H}_2 при изменении времени от t_1 до t_2 повернулся относительно H_{z1} , имеющего вначале отрицательное значение, по часовой стрелке. Направление вращения поляризации по часовой стрелке говорит о том, что это правая поляризация (рис. 6.7).

Нахождение областей линейной и круговой поляризации

Когда эллипс поляризации может вырождаться в прямую линию?

Только если одна из его полуосей обращается в ноль.

Согласно (6.44б), H_{z0} - z-овая полуось эллипса обращается в ноль при

$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{2}$, т.е. при $x = \frac{a}{2}$. Вектор \vec{H} при $x = \frac{a}{2}$ оказывается направленным вдоль координаты x (линейная поляризация). Если потребовать, чтобы H_{x0} - x-вая полуось (6.44а) обращалась в ноль, то это будет возможно при $x = 0$ и $x = a$. Плоскость поляризации, в которой лежит вектор \vec{H} , тогда направлена вдоль координаты z (рис. 6.8).

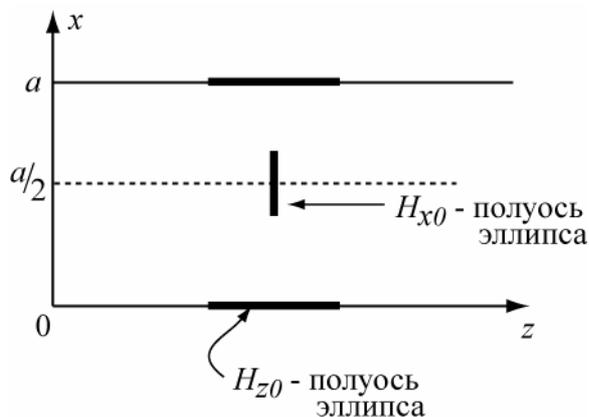


Рис.6.8

Найдем, где расположены точки, на которых эллиптическая поляризация превращается в круговую поляризацию.

Условием круговой поляризации является равенство полуосей эллипса:

$$H_{x0} = H_{z0}, \text{ т.е. } \left[H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \right] = \left[H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right].$$

Значения $\sin \frac{\pi x}{a}$ на всем участке $0 \leq x \leq a$ остаются положительными,

поэтому следует поставить модуль $\left| \cos \frac{\pi x}{a} \right| = \frac{\beta a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a}$. Это означает, что левой

части этого уравнения соответствуют два значения x :

$$0 \leq x_1 \leq a/2; \quad \cos \frac{\pi x_1}{a} > 0, \quad \text{и} \quad a/2 \leq x_2 \leq a; \quad \cos \frac{\pi x_2}{a} < 0.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\beta a}{\pi} = \text{ctg} \frac{\pi x_1}{a}; \quad \frac{\beta a}{\pi} = -\text{ctg} \frac{\pi x_2}{a} = \text{ctg} \left(\pi - \frac{\pi x_2}{a} \right).$$

Отсюда следует, что существует две плоскости, где наблюдается на волне типа H_{10} круговая поляризация, и координаты их определяются как

$$x_1 = \frac{a}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{2a}{\lambda_g} \right); \quad x_2 = a - \frac{a}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{2a}{\lambda_g} \right) \quad (6.45)$$

Направление вращения круговой поляризации (правая – левая) определяется аналогично рассмотренному направлению эллиптической поляризации.

На рис. 6.9 показан процесс преобразования поляризации при $z = \text{const}$ вдоль линии $0 \leq x \leq a$ при изменении времени.

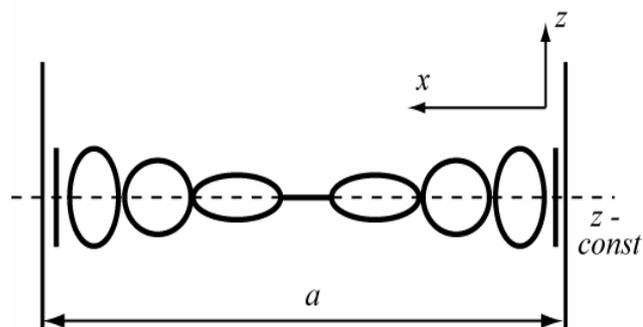


Рис.6.9

Можно качественно показать

тип поляризации и направление вращения вектора магнитного поля, воспользовавшись только его структурой магнитного поля, перемещающейся вдоль оси волновода с фазовой скоростью.

Пусть в момент времени t_1 наблюдатели находятся в точках A и B (плоскость 1-1 на рис. 6.10), задана структура поля, которое с фазовой скоростью V_ϕ распространяется по оси z . Через время $t_2 - t_1$ плоскость 2-2 переместится к плоскости 1-1. В точках A и B направление вектора \vec{H} окажется таким, каким оно было в плоскости 2-2 (при $x = \text{const}$) в момент времени t_2 .

Направление вектора магнитного поля в точках наблюдения по мере перемещения волны будет меняться так, что в точке A он поворачивается против, а в точке B - по движению часовой стрелки.

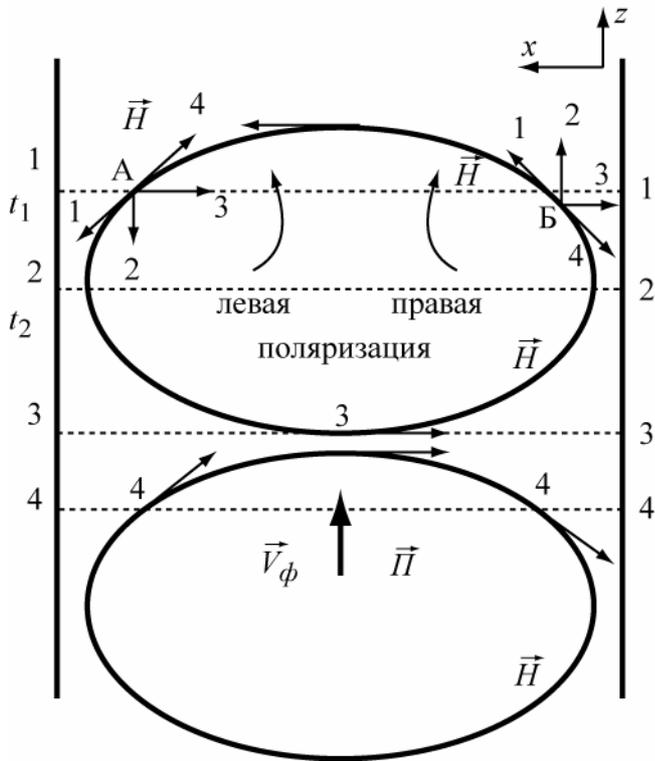


Рис.6.10

При $x = 0$ или $x = a$ вектор \vec{H} направлен только вдоль оси z (линейная поляризация); при $x=a/2$ вектор $\vec{H} = \vec{x}^0 H$, т.е. направлен только по оси x (линейная поляризация). В зависимости от длины компонент вектора \vec{H} , может быть получена круговая и эллиптическая поляризации.

Задача №3 (Параметры волны)

В прямоугольном волноводе сечением $a \times b = 23 \times 10 \text{ мм}^2$, с воздушным заполнением возбуждаются колебания с частотой $f = 15 \text{ ГГц}$.

Определить, какие типы волн могут распространяться в волноводе, их длины волн, фазовые и групповые скорости и волновое сопротивление?

Решение

Условие распространения волн (6.7) имеет, в нашем случае,

$$\text{вид } \lambda_0 < \lambda_{кр},$$

Согласно (6.19), для прямоугольного волновода

$$\lambda_{кр}^{H_{mn}, E_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

$m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ – для волн типа H_{mn} ;

и $m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$ – для волн типа E_{mn} .

Определяя критические длины волн для разных типов волн и проверяя выполнение неравенства, мы выясним какие типы волн будут распространяться в волноводе.

Для заданной частоты f , найдем λ_0 .

$$\lambda_0 = c/f = 3 \cdot 10^{10} / 15 \cdot 10^9 = 2 \text{ см.}$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{2,3}\right)^2 + \left(\frac{n}{1,0}\right)^2}} = \frac{4,6}{\sqrt{m^2 + (2,3n)^2}} \quad (6.46)$$

Изменять в (6.46) следует индексы m и n , от малых значений до тех пор пока неравенство $\lambda_0 < \lambda_{кр}$ перестает иметь место. Заметим, чем меньше индексы m и n , тем больше длины критических волн при неизменных a и b . Данные расчета заносим в таблицу 6.3.

Таблица 6.3

m	n	$\lambda_{кр}$ [см]	Условие распространения $2 \text{ см} < \lambda_{крmn}$ выполняются ?	Для какого типа волны
1	0	4,6	Да	H ₁₀
2	0	2,3	Да	H ₂₀
3	0	1,53	Нет	H ₃₀
0	1	2,0	Нет	H ₀₁
1	1	1,84	Нет	H ₁₁ , E ₁₁
2	1	1,016	Далее все типы волн не распространяются	Диаграмма типов волн приведена ниже

Вывод: в волноводе, заданного сечения, на частоте 15 ГГц могут распространяться только два типа волны H₁₀ и H₂₀.

Определим для распространяющихся типов волн основные параметры: длину волны в волноводе (λ_B), фазовую (v_ϕ) и групповую ($v_{гр}$) скорости и волновое сопротивление (Z_B), используя формулы (6.8 – 6.13). но сначала найдем коэффициенты дисперсии $K_{дHmn}$ (6.5), которым определяются основные параметры волны. Для распространяющихся волн коэффициенты дисперсии равны

$$K_{dH10} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{4,6}\right)^2} = 0,90,$$

$$K_{dH20} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2,3}\right)^2} = 0,49.$$

Результаты расчетов параметров внесем в таблицу 6.4.

Таблица 6.4

Тип волны	K_d	λ_B (см)	V_ϕ , м/с	V_{gp} , м/с	Z_B , Ом	$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_B}$, $\frac{\text{рад}}{\text{см}}$
H_{10}	0,9	2,22	$3,3 \cdot 10^8$	$2,7 \cdot 10^8$	419	2,823
H_{20}	0,49	4,08	$6,12 \cdot 10^8$	$1,47 \cdot 10^8$	769,4	1,539

Что происходит с параметрами волн в случае $\lambda > \lambda_{кр}$?

Коэффициент дисперсии оказывается – мнимым:

$$K_d = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = i \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1} = i\xi. \text{ Так как здесь } \xi = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1} \text{ - чисто вещест-}$$

венная величина, длина волны в волноводе $\lambda_g = \frac{\lambda}{i\xi}$ - величина мнимая, фазовая

постоянная распространения приобретает вид $\beta = \frac{2\pi i\xi}{\lambda}$; и влияет на фазовый

член $e^{i\beta z} = e^{i\left(\frac{2\pi i\xi}{\lambda}\right)z} = e^{-\frac{2\pi z\xi}{\lambda}}$, который становится действительной величиной.

Вывод: в случае $\lambda > \lambda_{кр}$ понятие длина волны, фазовая и групповая скорости теряют смысл, волновой процесс отсутствует, идет затухание поля по экспоненте.

Задача №4 (Применение волноводов для определения ϵ)

Прямоугольный волновод заполнен диэлектриком. На частоте колебаний 10 ГГц и типе волны H_{10} фазовая скорость оказалась равной 0,5 от скорости света в свободном пространстве. Определить относительную диэлектрическую проницаемость наполнителя ϵ_r , если сечение волновода $23 \times 10 \text{ мм}^2$.

Решение

Воспользуемся соотношением, связывающим продольное волновое число (β) с волновым числом в среде (k_ϵ) и поперечным волновым числом (γ_\perp).

$$\beta = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r - \gamma_\perp^2}; \quad (6.47)$$

где
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_B} = \frac{\omega}{V_\phi}; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \gamma_\perp = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}.$$

Из (6.47) получаем выражение фазовой скорости в волноводе, заполненном диэлектриком $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = 0,5 \cdot c$. Откуда
$$\epsilon_r = \frac{\lambda^2 + 4 \cdot \lambda_{кр}^2}{\lambda_{кр}^2}. \quad (6.48)$$

Величины $\lambda_{крH10} = 2a = 4,6 \text{ см.} \quad \lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ см.}$

Подставляя в (6.48) найденные величины длин волн, получим

$$\epsilon_r = \frac{9 + 4 \cdot 21,16}{21,16} = 4,425.$$

Задача № 5 (Затухание волны)

Определить затухание волны типа H_{10} в отрезке прямоугольного медного волновода сечением $23 \times 10 \text{ мм}^2$, длиной 2 м на частоте 8 ГГц.

Решение

Потери (L) в линии (в дБ) длиной l определяются соотношением

$$L = 10 \lg \frac{P_{вх}}{P_{вых}} = 20 \lg \frac{|E_{вх}|}{|E_{вых}|}, \quad \text{дБ} \quad (6.49)$$

где $|E_{вх}|$ - величина напряженности поля вначале отрезка ($l=0$),

$|E_{вых}|$ - величина напряженности поля на выходе отрезка ($l=2\text{м}$).

Так как
$$|E_{вых}| = |E_{вх}| e^{-\alpha l}. \quad (6.50)$$

Из (6.49) с учетом (6.50) получим

$$L = 20 \lg(e^{\alpha l}) = 8,68 \cdot \alpha l, \quad (6.51)$$

согласно (6.22), коэффициент потерь (Hn/m) в стенках волновода равен

$$\alpha_{H_{10}} = \frac{R_s \cdot \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{W_0 \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}},$$

параметры медных стенок $\mu_{сГ} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\sigma_{Cu} = 5,8 \cdot 10^7$ См/м.

Определяем величины R_s и $\alpha_m^{H_{10}}$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_{сГ}}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5,8 \cdot 10^7}} = 2,33 \cdot 10^{-2}, \text{ Ом.}$$

$$\alpha_m^{H_{10}} = \frac{2,33 \cdot 10^{-2} \left[1 + \frac{20}{23} \left(\frac{3,75}{4,6} \right)^2 \right]}{377 \cdot 0,01 \sqrt{1 - \left(\frac{3,75}{4,6} \right)^2}} = 0,017 \text{ Hn/m.}$$

Ответ: Потери мощности в волноводе длиной 2 м, согласно (6.51), составят $L = 8,68 \cdot 0,017 \cdot 2 = 0,3$ дБ.

Задача № 6 (Плотность потока мощности)

По прямоугольному волноводу сечением $a \times b = 23 \times 10 \text{ мм}^2$ на волне типа H_{10} передается мощность 15 Вт на частоте 10 ГГц. Определить среднюю плотность потока мощности в точке $x = a/2, y = b/2$.

Решение

Средняя мощность, переносимая волной по волноводу (6.21) с учетом (6.5) и (6.11), определяется выражением

$$P = \frac{ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2} \cdot E_0^2}{4W_0}, \quad (6.52)$$

Из (6.52) находится величина E_0 , затем определяется амплитуда поля E_y

для любой точки сечения $E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a}$.

Среднюю по времени плотность потока мощности p_{cp} найдем из

$$\text{соотношения} \quad p_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} E_y \cdot H_x^* = \frac{1}{2} \frac{E_y^2}{Z_H} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_H} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2,$$

$$\text{где} \quad H_x^* = \frac{E_y^*}{Z_H} = \frac{E_y^*}{W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2}.$$

Окончательно средняя по времени плотность потока мощности в заданной точке сечения волновода определяется

$$p_{cp} = \frac{\left(\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 4 \cdot W_0 \cdot P \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2}}{2 \cdot W_0 ab \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2}} = \frac{2P}{ab} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2.$$

$$\text{Откуда для точки } x = a/2, y = b/2 \quad p_{cp} = \frac{2 \cdot 15}{0,01 \cdot 0,023} = 13,0 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$$

Вывод. Средняя плотность потока мощности в каждой точке x, y поперечного сечения волновода будет различная величина.

Задача № 7 (Параметры волн при разных средах)

В прямоугольном медном волноводе с воздушным заполнением ($\epsilon_r = 1$) и сечением $a \times b = 2.85 \times 1.26 \text{ см}^2$ распространяется волна типа H_{10} .

Определить волновое сопротивление и коэффициент затухания волны в волноводе на частоте $f = 7500 \text{ МГц}$. Во сколько раз увеличится коэффициент затухания при заполнении волновода ситаллом ($\epsilon_r = 5,5$)?

Решение

По формулам (6.11) и (6.22) с учетом (6.5) находим волновое сопротивление и коэффициент затухания волны в волноводе на заданном типе волны

$$Z_H = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2fa} \right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 7500 \cdot 10^6 \cdot 2.85} \right)^2}} = 529, [\text{Ом}];$$

$$\alpha_{\epsilon_r=1} = \frac{0,104 \cdot \left[\epsilon_r + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{b \sqrt{\lambda} \sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} = \frac{0,104 \cdot \left[\epsilon_r + \frac{2b}{a} \left(\frac{c}{2fa} \right)^2 \right]}{b \sqrt{\frac{c}{f}} \sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{c}{2fa} \right)^2}} =$$

$$= \frac{0.104 \left[1 + \frac{2 \cdot 1.26}{2.85} \left(\frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 7500 \cdot 10^6 \cdot 2.85} \right)^2 \right]}{1.26 \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{10}}{7500 \cdot 10^6}} \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 7500 \cdot 10^6 \cdot 2.85} \right)^2}} \approx 0,8, [\text{дб}/\text{м}]$$

При заполнении волновода ситаллом коэффициент затухания

$$\alpha_{\varepsilon_r=5,5} = \frac{0.104 \left[\varepsilon_r + \frac{2b}{a} \left(\frac{c}{2fa} \right)^2 \right]}{b \sqrt{\frac{c}{f}} \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{c}{2fa} \right)^2}} = \frac{0.104 \left[5,5 + \frac{2 \cdot 1.26}{2.85} \left(\frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 7500 \cdot 10^6 \cdot 2.85} \right)^2 \right]}{1.26 \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{10}}{7500 \cdot 10^6}} \sqrt{5,5 - \left(\frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 7500 \cdot 10^6 \cdot 2.85} \right)^2}} \approx 1.1 \text{ дб}/\text{м},$$

т.е. почти в 1,4 раза коэффициент затухания возрастает.

Задача № 8 (Определение геометрии волноводов)

Определить размеры волновода, по которому на частоте $f = 2450 \text{ МГц}$ должна поступать мощность от генератора к камере СВЧ печи на основном типе волны. Определить максимальную величину поля E в волноводе, если генератор СВЧ печи выдает мощность 1 кВт .

Решение

Размеры волновода $a \times b$ следует определить для распространения основной волны H_{10} . Условия распространения этой волны запишутся в виде

$$\lambda_{\text{кр}H_{20}} < \lambda_0 < \lambda_{\text{кр}H_{10}} \quad \text{и} \quad \lambda_{\text{кр}H_{10}} < \lambda_0 \quad (6.53)$$

Учитывая (6.20), определим $\lambda_{\text{кр}H_{10}} = 2a$, $\lambda_{\text{кр}H_{20}} = a$, $\lambda_{\text{кр}H_{01}} = 2b$.

Тогда условия (6.53) будут выполняться, если размеры удовлетворить неравенствам $\frac{\lambda_0}{2} < a < \lambda_0$; $a < b < \frac{\lambda_0}{2}$.

Возьмем, например, $a = 0,7\lambda$; $b = 0,4\lambda$. А так как длина волны генератора

$\lambda = \frac{c}{f} = 12,245 \text{ см}$, то получаются размеры волновода $a = 8,57 \text{ см}$; $b = 4,9 \text{ см}$.

Амплитуда поля E в волноводе на волне типа H_{10} определяется из (6.52)

$$E_m = 2 \frac{\sqrt{\frac{P}{ab}} \cdot (120\pi)^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]^{1/4}} = 2 \frac{\sqrt{\frac{1000}{8,57 \cdot 4,9 \cdot 10^{-4}}} \cdot 19,42}{\left[1 - \left(\frac{12,245}{2 \cdot 8,57}\right)^2\right]^{1/4}} = 11281,9 \frac{B}{м}$$

Замечание: величина поля E не превышает пробивного напряжения 30кВ/см, при необходимости высота волновода в может быть уменьшена.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

6.1. Определить мощность, переносимую волной типа H_{10} , в стандартном прямоугольном волноводе, имеющем поперечное сечение $2,286 \times 1,016 \text{ см}^2$ если амплитудное значение напряженности электрического поля $E_{max} = 10^5 \text{ В/м}$. Во всем ли диапазоне допустимых для распространения частот можно сохранить эту мощность без пробоя?

Ответ: В зависимости от частоты переносимая мощность меняется от 1 кВт (при λ_{min}) до 0,5 кВт (при λ_{max}).

6.2. При изготовлении направленного фазовращателя в прямоугольный волновод ставится тонкая ферритовая пластина параллельно боковой стенке в том месте, где магнитное поле волны H_{10} имеет круговую поляризацию. На каком расстоянии от боковой стенки волновода следует установить ферритовую пластинку в волноводе с размерами поперечного сечения $28,5 \times 12,6 \text{ см}^2$ при рабочей частоте 9,1 ГГц?

Ответ: на расстоянии 8,67 мм от боковой стенки.

6.3. Определите с какой частоты начинается запределный режим (прекращается распространение волны) в волноводе прямоугольного сечения $72 \times 34 \text{ мм}^2$ для основного типа волны.

Ответ: при $f < 2,083 \text{ ГГц}$.

6.4. В прямоугольном волноводе максимальное значение поперечной составляющей тока проводимости для волны H_{10} равно $j_{0x} = 1 \text{ А/м}$.

Чему будет равняться напряженность продольной составляющей магнитного поля в точках $x = a/4$; $y = b/2$ и $x = 3a/4$; $y = b/2$?

Ответ: $H_z = 0,705 \text{ А/м}$.

6.5. Отношение волновых сопротивлений волны H_{11} и E_{11} равно 2. На какой длине волны, выраженной в критических длинах волн, это возможно?

Ответ: $\lambda = \sqrt{0,5} \lambda_{кр}$.

6.6. Величина напряженности электрического поля волны H_{10} в точке $x = a/2$; $y = b/2$ равна $E_y = 20 \text{ В/м}$. Определить максимальное значение плотности тока смещения в волноводе, если рабочая частота колебаний $f = 9 \text{ ГГц}$, волновод заполнен воздухом.

Ответ: $j_{\max} = 14,145 \text{ А/м}$.

6.7. В волноводе сечением $23 \times 10 \text{ мм}^2$ распространяется волна типа H_{10} , на частоте 10 ГГц . Как изменится волновое сопротивление волновода, если длину волны увеличить на 25% .

Ответ: $\frac{z_{w2}}{z_{w1}} = 1,31$.

6.8. На частоте $f = 10 \text{ ГГц}$ затухание волны в волноводе, поперечное сечение которого $23 \times 10 \text{ мм}^2$ по справочнику равно $0,25 \text{ дБ/м}$. На каком расстоянии вдоль направления распространения волны величина поля E уменьшится на 20% ?

Ответ: $l = 19,2 \text{ см}$.

6.9. Напряженность электрического поля волны H_{10} в точке $x = a/3$, $y = 0$ равна $E_y = 18 \text{ В/м}$. Чему равна плотность поверхностного заряда в середине (при $a/2$) широкой стенки волновода, заполненного воздухом?

Ответ: $\xi = 0,184 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$.

6.10. Чему равна относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод, если длина волны λ_B в волноводе на основном типе волны равна длине волны в свободном пространстве?

Ответ: $\epsilon_r = 1 + (\lambda / \lambda_{кр})^2$.

6.11. Средняя плотность потока мощности в точке $x = a/3, y = b/2$ для волны H_{10} равна $p_{cp} = 500 \text{ Вт/м}^2$. Волновое сопротивление волновода $Z_H = 500 \text{ Ом}$. Найти максимальную напряженность магнитного поля поперечной составляющей.

Ответ: $H_{xm} = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ А/м}$.

6.12. Изобразите для прямоугольного волновода структуру поля волн типа H_{20}, H_{11}, E_{11} и ответьте, в каких точках поперечного сечения напряженность электрического поля всегда равна нулю?

Ответ: при волне типа H_{20} на боковых стенках и на линии раздела стенки a пополам; при волне типа H_{11} - в углах и центральном сечении; при волне типа E_{11} - в углах волновода.

6.13. В прямоугольном волноводе распространяется волна типа H_{10} . Найти ширину волновода, если известно, что длина волны в волноводе при $\lambda_0 = 10 \text{ см}$ в четыре раза короче длины волны в волноводе при $\lambda_0 = 20 \text{ см}$.

Ответ: 11,18 см.

6.14. Амплитудное значение напряженности электрического поля при волне типа H_{10} в прямоугольном волноводе сечением $50 \times 25 \text{ мм}^2$ составляет 10^5 В/м на частоте $7,5 \cdot 10^9 \text{ ГГц}$. Определить величину амплитуды тока смещения.

Ответ: 9,22 А.

6.15. В каком отношении находятся волновые сопротивления волн E_{11} и H_{11} прямоугольного волновода при длине волны генератора, равной половине критической длины волны ($\lambda_0 = \frac{\lambda_{кр}}{2}$)?

Ответ: $W_{E_{11}} = \frac{3}{4} W_{H_{11}}$

6.16. В круглом волноводе диаметром 5 см, заполненном диэлектриком, распространяется волна основного типа H_{11} . Частота колебаний 3 ГГц. Определить диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод, если фазовая скорость волны в волноводе равна скорости света в свободном пространстве.

Ответ: $\varepsilon_r = 2.37$

6.17. В прямоугольном волноводе сечением $86 \times 43 \text{ мм}^2$ распространяется волна типа H_{10} с частотой $2,45 \text{ ГГц}$ и мощностью $1,5 \text{ кВт}$. В максимум поля E поместили листовый диэлектрик – стекло, размеры которого $a \cdot b \cdot c = 5 \cdot 43 \cdot 500, \text{ мм}^3$, вес 500 г и электродинамические параметры $\varepsilon_r = 5,2$; $\text{tg } \delta = 0,01$; $\gamma = 0,84 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$. На сколько градусов нагреется стекло за 10 минут пребывания в волноводе?

Ответ: $\Delta T = 0,2^\circ \text{C}$

6.18. (Задача повышенной сложности). В круглом секционированном волноводе, выполненном из меди и заполненном воздухом, распространяется волна H_{01} на частоте 10 ГГц . Определить: радиус волновода; основные параметры волны $\lambda_g, \vartheta_\phi, \vartheta_{zp}, Z_w, P_{пр}, P_{дон}, \alpha_{H_{01}}$; максимальную величину продольного магнитного поля; амплитудное значение поверхностной плотности тока, искажение передаваемого по волноводу импульса $\tau = 10 \text{ нс}$ на одном метре длины волновода; Получить уравнения векторных линий и изобразить структуру поля.

Ответ: $a = 2,2 \text{ см}$; $\Lambda_B = 5 \text{ см}$; $Z_w = 200\pi [\text{Ом}]$; $Z_w = 200\pi [\text{Ом}]$; $H_{0z} = 4,23 \text{ А/м}$;

$$j_s = 4,23 \text{ А/м}; \alpha_{H_{01}} = 0,03 \text{ дБ/м}; \Delta t = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{K_{01}} - \frac{1}{K_{02}} \right) = \frac{0,05}{3 \cdot 10^8} = 0,166 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

6.19. Определить диапазон частот, в пределах которого в круглом волноводе радиуса 2 мм может распространяться только основной тип волны.

Ответ: $2,2 \div 2,85 \text{ ГГц}$.

6.20. В круглом волноводе радиуса $a = b \text{ см}$, предназначенном для СВЧ разогрева диэлектриков, распространяется волна типа E_{01} . Частота колебаний $2,45 \text{ ГГц}$, передаваемая по волноводу мощность 2 кВт .

Определить максимальное значение продольной напряженности электрического поля.

Ответ: $E_{Zmax} = 136 \text{ В/м}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

• **Определение поля.** Полем называется область пространства, в каждой точке которого определена некоторая величина. Если это скалярная величина – то поле называется скалярным, если векторная – то векторным. Примеры скалярных полей : поля температуры в пределах комнаты, давления в околоземном пространстве, потенциала в заряженном конденсаторе. Примеры векторных полей : поле скоростей движения воды в некотором участке реки, поле напряженности электрического поля в конденсаторе и т.п. Векторный анализ – используется при исследовании векторных и скалярных полей методами дифференциального и интегрального исчисления.

• **Системы координат.** Каждая точка векторного или скалярного поля определяется в пространстве своими координатами. Помимо прямоугольных (декартовых) координат в электродинамике широко используются криволинейные

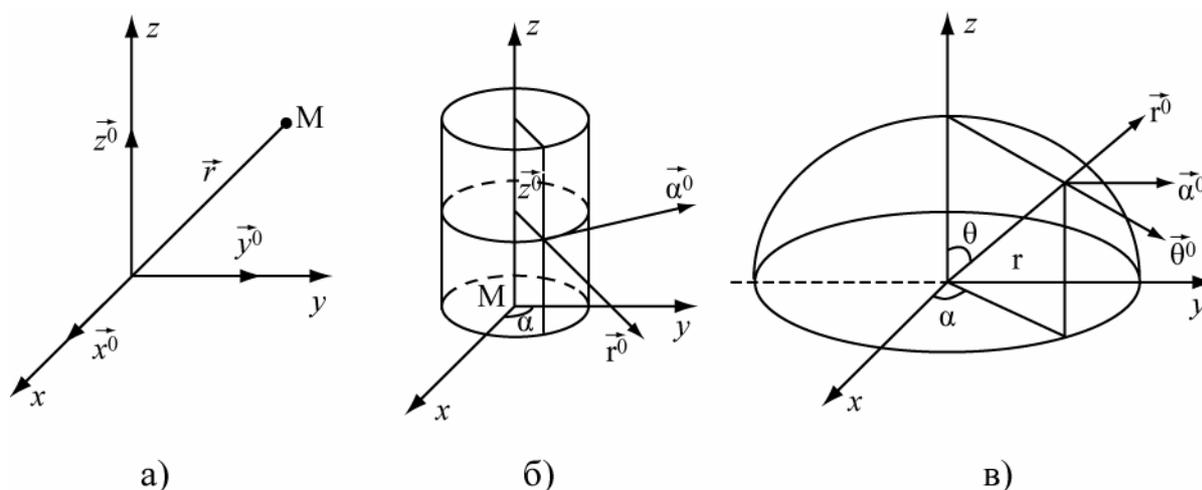


Рис. П1.1

координаты : цилиндрические и сферические (рис. П1.1). Положение точки определяется координатами x, y, z - в прямоугольной, r, α, z – в цилиндрической, r, θ, α – в сферической системах. Угол θ в сферической системе отсчитывается от оси z , а угол α в цилиндрической и сферической системах - от оси x до проекции точки наблюдения на плоскость xoy . Координата r в цилиндрической системе равна расстоянию от точки наблюдения до оси z , а в сферической – до начала координат. Координата r в сферической системе координат называется также радиусом – вектором точки наблюдения. На рисунке П.1 показаны также еди-

ничные вектора (орты) в каждой системе координат. Их направление соответствует направлению возрастания соответствующей координаты при неизменных других. Это орты $(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0)$ - в прямоугольной системе, $(\bar{r}^0, \bar{\alpha}^0, \bar{z}^0)$ - в цилиндрической и $(\bar{r}^0, \bar{\theta}^0, \bar{\alpha}^0)$ - в сферической. Порядок перечисления ортов не является случайным, а соответствует правовинтовой системе координат. В ней направления ортов соответствуют направлению большого, указательного и среднего пальцев правой руки, если им придать взаимно ортогональное направление. В правовинтовой системе каждый орт может быть выражен через векторное произведение двух других. Например $\bar{x}^0 = [\bar{y}^0 \bar{z}^0]$, $\bar{y}^0 = [\bar{z}^0 \bar{x}^0]$ и т.д. При этом не должен нарушаться порядок следования координат при их циклической перестановке.

Связь между координатами в прямоугольной и цилиндрической системах определяется формулами

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z, \quad (\text{П1.1})$$

между прямоугольными и сферическими координатами - формулами

$$x = r \cos \alpha \sin \theta, \quad y = r \sin \alpha \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{П1.2})$$

Элемент длины $d\vec{l}$ в рассмотренных системах координат имеет вид

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= \bar{x}^0 dx + \bar{y}^0 dy + \bar{z}^0 dz \quad \text{- в прямоугольной,} \\ d\vec{l} &= \bar{r}^0 dr + \bar{\alpha}^0 r d\alpha + \bar{z}^0 dz \quad \text{- в цилиндрической} \\ d\vec{l} &= \bar{r}^0 dr + \bar{\theta}^0 r d\theta + \bar{\alpha}^0 r \sin(\theta) d\alpha \quad \text{- в сферической} \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

В этих выражениях коэффициенты при ортах определяют длины отрезков, соответствующие приращению данной координаты. Так, в сферической системе при изменении координаты точки наблюдения θ на $\theta + d\theta$, точка смещается по дуге с радиусом r на расстояние $r d\theta$. Коэффициенты, связывающие приращение длины и соответствующей координаты называются коэффициентами Ламэ. В прямоугольной системе они равны $(1, 1, 1)$, в цилиндрической – $(1, r, 1)$, в сферической – $(1, r, r \cdot \sin \theta)$. С помощью коэффициентов Ламэ можно

определить элементы поверхности и объема в нужной системе координат. Например, дифференциал (элемент) поверхности сферы равен

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\alpha = r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\alpha = r^2 \cdot \sin(\theta) d\theta d\alpha \quad (\text{П1.4})$$

Элемент объема в сферической системе координат

$$dV = dl_r \cdot dl_\theta \cdot dl_\alpha = r^2 \cdot \sin(\theta) dr d\theta d\alpha.$$

• **Сведения из векторной алгебры.** Напомним некоторые формулы, используемые при работе с векторами. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некоторые векторы, заданные своими проекциями на оси x, y, z . **Скалярное произведение** векторов есть скаляр, который вычисляется по следующим правилам

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (\text{П1.5})$$

где α угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

• Векторное произведение двух векторов есть вектор перпендикулярный исходным, направленный в сторону движения правого винта, если вращать от первого вектора ко второму по наименьшему углу. Величина векторного произведения определяется так $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \cdot \sin(\alpha)$.

Проекции векторного произведения выражаются через проекции векторов \vec{a} и \vec{b} следующим образом

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{x}^0 (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{y}^0 (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{z}^0 (a_x b_y - a_y b_x) \quad (\text{П1.6})$$

Двойное векторное произведение может быть вычислено как

$$[\vec{a} \cdot [\vec{b} \cdot \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{П1.7})$$

Для смешанного произведения существует правило перестановки

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \cdot \vec{c}] = -\vec{c} [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{b} [\vec{c} \cdot \vec{a}] \quad (\text{П1.8})$$

• **Скалярное поле. Градиент.** Характеристикой скалярного поля являются поверхности уровня, на которых значение поля остается постоянным. Например, это поверхности в комнате, на которых температура воздуха одина-

кова, сферические поверхности вокруг точечного заряда, на которых постоянен электростатический потенциал. Градиентом скалярной функции φ в точке M называется вектор, направление которого соответствует наибольшему возрастанию функции φ , а величина градиента равна скорости изменения φ в этом направлении

$$\text{grad}\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}^0, \quad (\text{П1.9})$$

где \vec{n}^0 - единичный вектор нормали к поверхности уровня в данной точке, направленный в сторону возрастания функции.

Выражения градиента в различных системах координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi(x, y, z) &= \vec{x}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \text{grad}\varphi(r, \alpha, z) &= \vec{r}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{\alpha}_0}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha} + \vec{z}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \text{grad}\varphi(r, \theta, \alpha) &= \vec{r}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{\theta}_0}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} + \frac{\vec{\alpha}_0}{r \sin(\theta)} \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (\text{П1.10})$$

Как видно, в эти выражения входят соответствующие коэффициенты Ла-мэ. Зная градиент функции можно определить производную по любому направлению как проекцию градиента на это направление.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \text{grad}\varphi \cdot \vec{l}_0 \quad (\text{П1.11})$$

Перечислим некоторые свойства градиента

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi + \psi) &= \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi; \\ \text{grad}(\varphi\psi) &= \psi \text{grad}\varphi + \varphi \text{grad}\psi; \\ \text{grad}(F(u)) &= F(u) \text{gradu} \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

- **Векторное поле. Силовые линии.** Векторной или силовой линией векторного поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора в этой точке. Например, радиальные силовые линии, исходящие из точечного заряда, или силовые линии магнитного поля проводника с током в виде концентрических окружностей. Необходимо помнить, что силовая линия характеризует не величину вектора, а только его направление в

данной точке. Величина вектора (интенсивность векторного поля) обычно характеризуют плотностью силовых линий.

Согласно определению силовой линии, элемент касательной к ней параллелен вектору \vec{a} в каждой точке, У параллельных векторов проекции пропорциональны. Это приводит к следующим уравнениям для силовых линий

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}, \quad \frac{dr}{a_r} = \frac{rd\alpha}{a_\alpha} = \frac{dz}{a_z}, \quad \frac{dr}{a_r} = \frac{rd\theta}{a_\theta} = \frac{r \sin(\theta) d\alpha}{a_\alpha} \quad (\text{П1.13})$$

Каждое из этих уравнений распадается на систему из двух дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводит к уравнению силовой линии.

Пример П1. 1. Найти векторную линию магнитного поля проводника с

током $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{\alpha}_0$, здесь r - расстояние от оси провода до точки М, I – ток в

проводе. Выразим в цилиндрической системе координат орт $\vec{\alpha}_0$ через орты по

осям z и r $\vec{\alpha}_0 = [\vec{z}_0, \vec{r}_0] = \frac{[\vec{z}_0, \vec{r}]}{r}$. Вектор $\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y$, x и y - координаты точки

наблюдения.

Раскрывая векторное произведение, получим $[\vec{z}_0, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y\vec{x}^0 + x\vec{y}^0$.

Следовательно, $\vec{H} = -\frac{I}{2\pi r} y\vec{x}^0 + \frac{I}{2\pi r} x\vec{y}^0$.

Дифференциальное уравнение векторных линий запишется как: $-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$,

$$\text{откуда} \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad \text{и} \quad z = c.$$

Т.е. векторные линии в данном случае являются окружностями с центром на оси z . Конечно, эту задачу можно решить и в цилиндрической системе координат. Предлагается это сделать самостоятельно.

• **Поток векторного поля.** Поток векторного поля \vec{a} через поверхность S называется поверхностный интеграл по поверхности S от скалярно-

го произведения вектора \vec{a} на вектор - площадку $d\vec{S} = \vec{n}^0 dS$. Здесь \vec{n}^0 нормаль к площадке dS . Направление нормали задается по условию задачи.

$$\phi = \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S a_n dS. \quad (\text{П1.14})$$

В случае замкнутой поверхности нормаль всегда должна быть внешней.

Свойства потока:

- 1) Поток меняет свой знак с изменением направления нормали
- 2) Поток векторного поля через несколько гладких частей поверхности равен сумме потоков вектора \vec{a} через каждую поверхность

$$\phi = \sum_{i=1}^m \int_S \vec{a} d\vec{S}. \quad (\text{П1.15})$$

Пример П1.2. Определить поток вектора $\vec{a} = \vec{x}_0$ через площадку перпендикулярную оси x , имеющую форму прямоугольника со сторонами равными 1 и 2. (рис. П1.2).

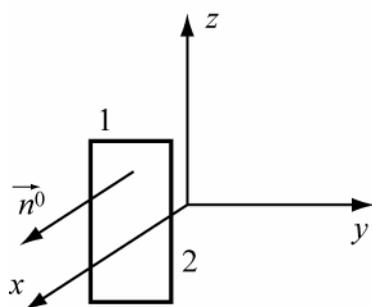


Рис. П1.2

Решение. Согласно формуле (П1.14)

$$\phi = \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S (\vec{a} \vec{n}_0) dS = \int_S \vec{x}_0 \vec{x}_0 dS = 2.$$

При изменении направления, нормали на противоположное поток меняет знак $\phi = -2$.

Пример П1.3. Вычислить поток радиус-вектора через замкнутую поверхность цилиндра радиуса R и высотой h (см. рис. П1.3).

Решение. Искомый поток

$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$, где ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - потоки через поверхности S_1, S_2, S_3 . Оценим поток через боковую поверхность S_1 . На ней радиус-вектор равен

$\vec{r} = \vec{r}^0 R + \vec{z}^0 z$. Элемент $d\vec{S} = \vec{r}^0 dS$. Следова-

тельно:

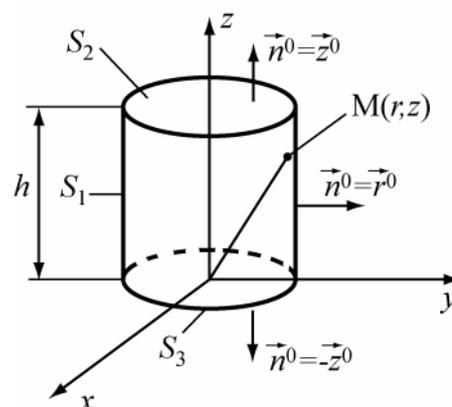


Рис. П1.3

$$\phi_1 = \int_{S_1} \vec{r} d\vec{s} = \int_{S_1} (\vec{r}^0 R + \vec{z}^0 z) \vec{r}^0 dS = R 2\pi R h = 2\pi R^2 h,$$

$$\phi_3 = - \int_{S_2} \vec{r}^0 r \vec{z}^0 dS = 0, \quad \text{т.к.} \quad \vec{r}^0 \vec{z}^0 = 0,$$

$$\phi_2 = \int_{S_3} (\vec{r}^0 r + \vec{z}^0 h) \vec{z}^0 dS = h\pi R^2$$

Искомый поток $\phi = \phi_1 + \phi_3 = 3\pi R^2 h$.

- **Дивергенция векторного поля.** Под дивергенцией вектора \vec{a} в точке М понимают предел отношения потока вектора \vec{a} через замкнутую поверхность вокруг т. М к объему, находящемуся внутри этой поверхности при стремлении объема к нулю

$$\text{div}\vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{s}}{\Delta V}. \quad (\text{П1.16})$$

Это определение поясняет физический смысл дивергенции, как объемной плотности потока вектора \vec{a} в точке М.

Точка М, в которой $\text{div}\vec{a} > 0$ называется источником. Если $\text{div}\vec{a} < 0$ точка М является стоком. Формула (П1.16) дает инвариантное определение дивергенции и, как из неё следует, дивергенция есть скалярная функция точек пространства.

Выражения дивергенции в трех системах координат имеют вид

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \text{div}\vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \text{div}\vec{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(a_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (\text{П1.17})$$

Свойства дивергенции:

$$\text{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{div}\vec{a}_1 + \text{div}\vec{a}_2 \quad \text{div}C\vec{a} = C\text{div}\vec{a}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \vec{a}) &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{div}[ab] &= b \cdot \operatorname{rota} - a \cdot \operatorname{rot} b \end{aligned} \quad (\text{П1.17})$$

Пример П1.3. Вычислить $\operatorname{div} \vec{r}$ в прямоугольной и сферической системах координат, где \vec{r} - радиус вектор, определяемый по формуле

$$\vec{r} = \vec{x}^0 x + \vec{y}^0 y + \vec{z}^0 z. \quad (\text{П1.18})$$

Тогда, согласно (П1.17) $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$

Представим радиус вектор как $\vec{r} = \vec{r}^0 r$. Тогда в формуле П1.17 для сферических координат проекция $a_r = r$ и $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot r)}{\partial r} = 3$

Из данных примеров следует, что вычисление дивергенции не зависит от выбора системы координат.

Пример П1.4. Вычислить div от произведения $2xyz\vec{r}$, где \vec{r} - радиус вектор.

Используя третье выражение (П1.17), получим для заданного условия $\operatorname{div}(2xyz\vec{r}) = 2xyz \cdot \operatorname{div} r + \vec{r} \cdot \operatorname{grad}(2xyz)$. И далее, решая каждое слагаемое, получим, что $\operatorname{div}(2xyz\vec{r}) = 12xyz$.

• **Теорема Остроградского – Гаусса.** Поток вектора \vec{a} через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого вектора, взятого по объему V , ограниченному этой поверхностью

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dv. \quad (\text{П1.19})$$

Пример П1.5 Решить задачу примера П1.3 с помощью теоремы Остроградского – Гаусса.

Решение. Как следует из предыдущих примеров дивергенция радиуса – вектора равна 3. Поэтому интеграл в правой части (П1.19) будет равен $3V = 3 \cdot \pi R^2 h$, где V – объем цилиндра. Как видно, вычисление потока с помощью теоремы Остроградского – Гаусса значительно упростило решение задачи. Этот вывод спра-

ведлив для большинства встречающихся задач вычисления потока, но, конечно, только для замкнутых поверхностей.

• **Циркуляция вектора.** Циркуляцией вектора \vec{a} по замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} d\vec{l} \quad (\text{П1.23})$$

Элемент $d\vec{l}$ направлен по касательной в каждой точке контура L . Направление элемента $d\vec{l}$ указывает направление обхода контура при интегрировании.

Пример П1.6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = R \cdot \vec{\alpha}^o + 5 \sin \alpha \cdot \vec{\theta}^o$ по контуру L - окружности с радиусом $R=1$ (рис. П1.4). Направление обхода контура - в положительном направлении сферической координаты α .

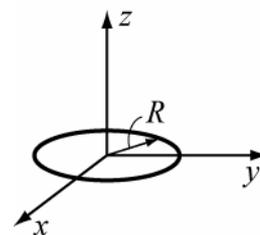


Рис. П1.4

Решение. Определим $\vec{a} \cdot d\vec{l} = (R\vec{\alpha}^o + 5 \sin \alpha \cdot \vec{\theta}^o) \cdot R\vec{\alpha}^o d\alpha = R^2 d\alpha$

При интегрировании по окружности угол α изменяется от 0 до 2π . В результате получим $\Gamma = 2\pi R^2$.

• **Ротор векторного поля. Теорема Стокса.**

Ротором вектора \vec{a} в точке M называется вектор равный пределу отношения следующего вида

$$\text{rot} \vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint [\vec{a} \cdot d\vec{S}]}{\Delta V} \quad (\text{П1.21})$$

На практике чаще определяют ротор как предел отношения циркуляции по контуру в окрестности точки M к площади контура, при стремлении площади к нулю. При этом определяется не сам ротор как вектор, а его проекция на нормаль к контуру.

$$\text{rot} \vec{a}(M) \Big|_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (\text{П1.22})$$

Нормаль к контуру связана с направлением обхода контура правилом правого винта, когда нормаль направлена в сторону движения винта, если сам винт вращается в направлении обхода контура.

Выражения для ротора в различных системах координат обычно представляют в виде определителей

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \text{ в прямоугольной системе координат,} \quad (\text{П1.23})$$

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \bar{r}^0 & \bar{\alpha}^0 & \bar{z}^0 \\ \frac{r}{\partial} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{r}{\partial z} \\ a_r & r a_\alpha & a_z \end{vmatrix} \text{ - в цилиндрической системе координат,} \quad (\text{П1.24})$$

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \bar{r}^0 & \bar{\theta}^0 & \bar{\alpha}^0 \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta \cdot a_\alpha \end{vmatrix} \text{ в сферической системе координат} \quad (\text{П1.25})$$

Раскрываются эти определители по первой строке, как показано в формуле П1.6.

Теорема Стокса утверждает, что циркуляция вектора по замкнутому контуру L равна потоку ротора от этого вектора через поверхность S опирающуюся на этот контур.

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S rot \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (\text{П1.26})$$

Как следует из теоремы Стокса модуль вектора $rot \vec{a}$ является плотностью циркуляции.

Свойства ротора:

$$1. rot(\vec{a} \pm \vec{b}) = rot \vec{a} \pm rot \vec{b} \quad 2. rot C\vec{a} = C rot \vec{a}$$

$$2. \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}].$$

$$3. \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

Пример П1.7. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = -y^2 \vec{x}^0 + x^2 \vec{y}^0$ по контуру L – прямоугольному треугольнику, лежащему в плоскости xy . Длины катетов равны 1. (рис. П1.5).

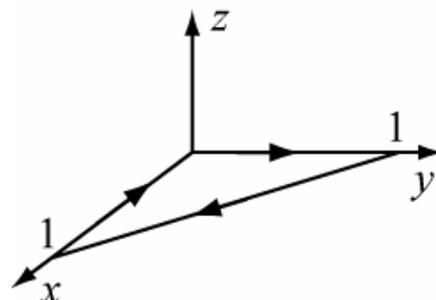


Рис. П1.5

Решение. Воспользуемся теоремой Стокса и определим ротор вектора

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{z}^0 (2x + 2y)$$

Вычислим далее интеграл по площади треугольника

$$2 \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y) dx dy = 2 \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} + y(1-y) \right) dy = \int_0^1 (1-y^2) dy = 2/3.$$

Ответ: циркуляция равна 2/3.

Пример П1.8. Найти ротор вектора $\vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} (-\vec{x}_0 y + \vec{y}_0 x)$.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{2I}{2\pi R^2} \vec{z}^0 = \vec{z}^0 \frac{I}{\pi R}.$$

• Оператор Гамильтона (набла)

В прямоугольной системе координат все введенные выше операторы (градиента, дивергенции и ротора) могут быть выражены через один символический векторный оператор Гамильтона ∇ (читается «набла»)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x}^0 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}^0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^0. \quad (\text{П1.28})$$

С формальной точки зрения это – вектор, компонентами которого являются символы производных. Применяя этот оператор к скалярной функции $\varphi(x,y,z)$, по правилу умножения скаляра на вектор получим выражение $\text{grad}\varphi(x,y,z)$.

$$\nabla\varphi = \vec{x}^0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{y}^0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{z}^0 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad}\varphi$$

Легко также показать, что скалярное произведение наблы на вектор дает дивергенцию вектора, а их векторное произведение – ротор вектора.

$$(\nabla\vec{a}) = \text{div}\vec{a}, \quad |\nabla\vec{a}| = \text{rot}\vec{a} \quad (\text{П1.29})$$

Оператор ∇ , обладая формально свойствами вектора и одновременно свойствами дифференциального оператора, позволяет вычислять некоторые сложные выражения векторного анализа. Например,

$$\text{rotrot}\vec{a} = [\nabla[\nabla\vec{a}]] = \nabla \cdot (\nabla\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\nabla) = \text{grad}(\text{div}\vec{a}) - \nabla^2\vec{a} \quad (\text{П130}).$$

Здесь использовано правило раскрытия двойного векторного произведения (П1.7). Появившийся при этом преобразовании оператор ∇^2 называется **оператором Лапласа** и играет важную роль в электродинамике и вообще физике. Применительно к скалярной функции координат он выражается следующим образом

$$\nabla^2\varphi(x,y,z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (\text{П1.31})$$

Применительно к вектору, заданному в прямоугольной системе координат он применяется к каждой проекции вектора, как к скаляру

$$\nabla^2\vec{a}(x,y,z) = \vec{x}^0\nabla^2 a_x(x,y,z) + \vec{y}^0\nabla^2 a_y(x,y,z) + \vec{z}^0\nabla^2 a_z(x,y,z) \quad (\text{П1.32})$$

При использовании оператора набла необходимо иметь в виду:

1) Оператор аналогичный оператору ∇ не может быть введен в цилиндрической или сферической системах координат. в этом нетрудно убедиться, если ввести его так, чтобы $\nabla\varphi = \text{grad}\varphi$. Но тогда $(\nabla\vec{a}) \neq \text{div}\vec{a}$ и $[\nabla\vec{a}] \neq \text{rot}\vec{a}$.

2) Как отмечалось выше такие характеристики скалярных и векторных полей, как градиент, дивергенция и ротор являются инвариантными к выбору системы координат и поэтому соотношения, полученные с помощью оператора

∇ в прямоугольной системе остаются справедливыми и в другой, но записанные через ротор, дивергенцию и градиент, т. е. без оператора ∇ .

3) Оператор Лапласа (иногда он обозначается символом Δ) в криволинейных координатах применительно к скалярным функциям определяется как

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad} \varphi), \quad (\text{П1.33})$$

а к векторным - из соотношение (П1.30)

$$\nabla^2 \vec{a} = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \text{rot} \text{rot} \vec{a} \quad (\text{П1.34})$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат представляется в виде

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \cdot \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{П1.35})$$

в сферической -

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \quad (\text{П1.36})$$

• **Некоторые тождества векторного анализа.** Приведем основные тождества векторного анализа. В их справедливости можно убедиться либо непосредственным вычислением, либо с помощью оператора набла.

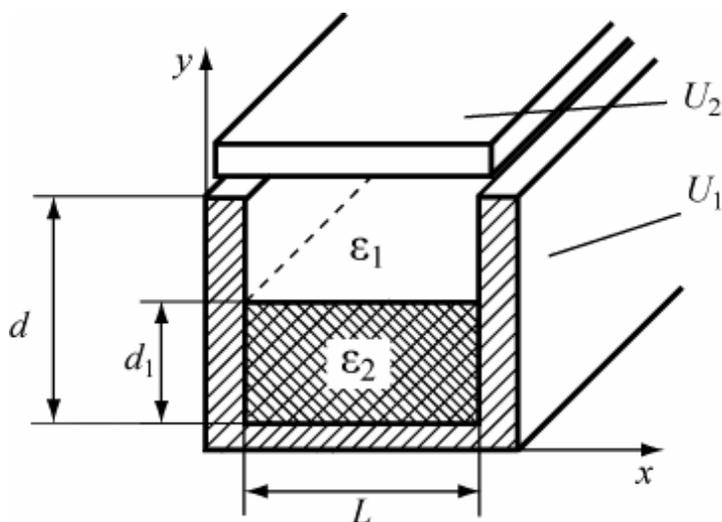
$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot} \vec{a}) &\equiv 0, & \text{rot}(\text{grad} \varphi) &\equiv 0, & \text{div}(\text{grad} \varphi) &\equiv \nabla^2 \varphi \\ \text{rot}(\varphi \vec{a}) &\equiv [\text{grad} \varphi \cdot \vec{a}] + \varphi \cdot \text{rot} \vec{a}, & \text{div}(\varphi \vec{a}) &\equiv \vec{a} \cdot \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{a} \\ \text{rot} \text{rot} \vec{a} &= \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}, & \text{div}[\vec{a} \vec{b}] &\equiv \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{П1.37})$$

Векторные поля, в которых $\text{rot} \vec{a} = 0$ называются **потенциальными**.

Если выполняется условие $\text{div} \vec{a} = 0$ во всех точках внутри некоторой области, то поле в ней называется **соленоидальным**. Скалярные поля, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются **гармоническими**.

Метод разделения переменных в ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Два очень длинных электрода, изолированных друг от друга тонким слоем диэлектрика, находятся под потенциалами U_1 и U_2 . Пространство между



электродами частично заполнено средой – диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 область II); для остальной среды (область I) диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon_1 = \epsilon_0$. Геометрия электродов показана на рисунке. Определить потенциал в любой точке внутри

области, охватываемой электродами.

Решение В задаче в пространстве между электродами заряды отсутствуют ($\rho = 0$), поэтому для определения потенциала в любой точке используется уравнение Лапласа $\Delta\phi = 0$. (П2.1)

- Так как по условию электроды бесконечны вдоль оси z , то отыскиваемое поле не зависит от координаты z , т.е. $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

- Так как пространство внутри электродов заполнено двумя средами - ϵ_2 и ϵ_0 , то для решения уравнения (П2.1), разбиваем его на I и II области, в которых параметр среды $\epsilon_i = \text{const}$.

- Геометрия электродов определяет выбор прямоугольной системы координат для уравнения Лапласа, для нашего случая

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{П2.2})$$

Уравнение (П2.2) дифференциальное второго порядка в частных производных решается методом разделения переменных, основные этапы которого следующие:

1. Ищем решения в виде $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$. (П2.3)

2. Подставляем (П2.3) в (П2.2) и полученное выражение делим на (П2.3), тогда
$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

Каждое из слагаемых зависит от одной переменной - x или y , и при любых x и y сумма всегда равна 0. Это возможно в случае, когда каждое из слагаемых равно $const$. Пусть

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \lambda^2. \quad (\text{П2.4})$$

3. В выражениях (П2.4) можно перейти от частных производных к полным

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0. \quad (\text{П2.5})$$

Характеристическое уравнение для X в (П2.5) $p^2 + \lambda^2 = 0$, откуда $p = \pm i\lambda$;

а решение можно записать в виде

$$X = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} \quad \text{или} \quad X = A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x. \quad (\text{П2.6})$$

Если $\lambda=0$, то $\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ и решение $X_0 = A_0 x + B_0$. (П2.7)

Аналогично решается для Y в (П2.5). Характеристическое уравнение $p^2 - \lambda^2 = 0$, $p = \pm \lambda$,

Тогда $Y = C_\lambda e^{\lambda y} + D_\lambda e^{-\lambda y}$ для всех λ кроме 0. (П2.8)

Для $\lambda=0$, $\frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$, откуда $Y_0 = C_0 y + D_0$. (П2.9)

4. Запишем решение уравнения (П2.2), подставив (П2.6÷П2.9),

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + (A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)(C_\lambda e^{\lambda y} + D_\lambda e^{-\lambda y}) \quad (\text{П2.10})$$

5. В уравнение Лапласа не входят в явном виде диэлектрические постоянные ε_0 и ε_2 , поэтому решения по форме в обеих областях должны быть идентичными. Однако постоянные A_λ , B_λ , C_λ и D_λ для каждой области должны быть свои. В самом деле, граничные условия для обеих областей разные, а постоянные как раз должны определяться, исходя из этих условий. Чтобы различать выражение для φ в различных областях, наделим индексом I потенциал и постоянные первой области, и индексом II – величины, относящиеся ко второй области. Тогда

$$\varphi_I = (A_0^I x + B_0^I)(C_0^I y + D_0^I) + (A_\lambda^I \cos \lambda x + B_\lambda^I \sin \lambda x) \times (C_\lambda^I e^{\lambda y} + D_\lambda^I e^{-\lambda y}); \quad (\text{П2.11})$$

$$\varphi_{II} = (A_0^{II} x + B_0^{II})(C_0^{II} y + D_0^{II}) + (A_\lambda^{II} \cos \lambda x + B_\lambda^{II} \sin \lambda x) \times (C_\lambda^{II} e^{\lambda y} + D_\lambda^{II} e^{-\lambda y}). \quad (\text{П2.12})$$

6. Для того чтобы потенциал был полностью определен, необходимо выполнить все условия теоремы единственности:

- $\Delta\varphi = 0$ во всякой точке, не принадлежащей границе и не содержащей сосредоточенных зарядов. Это условие выполнено;
- потенциал φ должен быть конечен, однозначен, непрерывен в любой межэлектродной точке;
- на поверхности металлических тел должно быть $\varphi = \text{const}$;
- должны быть заданы либо потенциалы тел проводящих φ_1 , φ_2 , φ_3 , либо заряды q_1 , q_2 , $q_3 \dots$

Из перечисленных условий мы, кроме первого, полагаем заданными, но не использованными, называемыми граничными условиями.

Область II	Область I
а) $\varphi_{II} = U_1$ при $x=0$, $0 < y < d_1$; (П2.13)	а) $\varphi_I = U_1$ при $x=0$, $d_1 < y < d$; (П2.16)
б) $\varphi_{II} = U_1$ при $y=0$, $0 < x < L$; (П2.14)	б) $\varphi_I = U_1$ при $x=L$, $d_1 < y < d$; (П2.17)
в) $\varphi_{II} = U_1$ при $x=L$, $0 < y < d_1$. (П2.15)	в) $\varphi_I = U_1$ при $y=d$, $0 < x < L$. (П2.18)

Подставим в решение (П2.12) граничные условия (П2.13÷ П2.15).

Сначала на решение (П2.12) налагаем граничное условие (П2.13), получим

$$U_1 = B_0'' (C_0'' y + D_0'') + A_\lambda'' (C_\lambda'' e^{\lambda y} + D_\lambda'' e^{-\lambda y}).$$

В этом уравнении правая часть есть функция от y , тогда как левая часть постоянная. Удовлетворить этому равенству можно, если положить:

$$U_1 = B_0'' D_0'' \quad (*)$$

$$0 = B_0'' C_0'' y + A_\lambda'' (C_\lambda'' e^{\lambda y} + D_\lambda'' e^{-\lambda y}) \quad (**)$$

Чтобы уравнение (**) выполнялось, достаточно потребовать, чтобы каждое слагаемое равнялось 0. Если в дальнейшем окажется, что затребовано очень много и задача не решается, мы пересмотрим это требование. Поэтому

$$B_0'' C_0'' y = 0, \quad (***)$$

$$A_\lambda'' (C_\lambda'' e^{\lambda y} + D_\lambda'' e^{-\lambda y}) = 0. \quad (***)$$

Из уравнения (*) и (***) следует, что

$$C_0'' = 0. \quad (\text{П2.19})$$

Из уравнения (****) имеем 2 выражения:

$$\text{либо} \quad A_\lambda'' = 0, \quad (\text{П2.20a})$$

$$\text{либо} \quad C_\lambda'' e^{\lambda y} + D_\lambda'' e^{-\lambda y} = 0. \quad (\text{П2.20б})$$

В (П2.20б) обе константы одновременно не могут быть равны 0, так как тогда обращается в 0 второе слагаемое в (П2.12). Остается принять, что

$$A_\lambda'' = 0. \quad (\text{П2.21})$$

Найденные A_λ'', C_0'' подставим в (П2.12),

$$\varphi_{II} = U_1 + A_0'' D_0'' x + B_\lambda'' \sin \lambda x (C_\lambda'' e^{\lambda y} + D_\lambda'' e^{-\lambda y}). \quad (\text{П2.22})$$

Определим, какие ограничения налагает на потенциал граничное условие

$$(П2.14): \quad \text{при } y = 0, \text{ } x - \text{любом} \quad \varphi_{II} = U_1.$$

Используя это равенство, получим

$$U_1 = U_1 + A_0'' D_0'' x + B_\lambda'' \sin \lambda x (C_\lambda'' + D_\lambda'')$$

или

$$A_0'' D_0'' x + B_\lambda'' \sin \lambda x (C_\lambda'' + D_\lambda'') = 0.$$

Для выполнения полученного соотношения достаточно потребовать

$$A_0'' D_0'' = 0, \text{ и } C_\lambda'' + D_\lambda'' = 0.$$

$$\text{Откуда следует, что } D_0'' = 0, \text{ и } D_\lambda'' = -C_\lambda''. \quad (П2.23)$$

Потенциал (П2.22) с учетом (П2.23) примет вид

$$\varphi_{II} = U_1 + b_\lambda'' \sin \lambda x \cdot sh \lambda y, \quad (П2.24)$$

$$\text{где } b_\lambda'' = 2B_\lambda'' C_\lambda''.$$

Удовлетворим потенциал (П2.24) граничному условию (П2.15)

$$U_1 = U_1 + b_\lambda \sin \lambda L \cdot sh \lambda y,$$

$$\text{откуда } b_\lambda \sin \lambda L \cdot sh \lambda y = 0.$$

Это равенство выполняется если $b_\lambda = 0$, но это невозможно, так как при этом $\varphi_{II} \equiv U_1$, что противоречит другим условиям, либо при $\sin \lambda L = 0$. От-

$$\text{сюда } \lambda L = \pi n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots; \text{ или } \lambda = \frac{\pi n}{L}.$$

Постоянная величина λ имеет много значений, а это означает, что потенциал должен иметь сумму частных решений от 1 до ∞ . Выражение для φ_{II} принимает теперь вид

$$\varphi_{II} = U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n'' \sin \frac{\pi n}{L} x \cdot sh \frac{n\pi}{L} y. \quad (П2.25)$$

Здесь нельзя сказать, что выражение для потенциала φ_I будет аналогичным уравнению (П2.25), так как, хотя общая форма решения для φ (П2.11) будет подобна (П2.12), но граничные условия в этой области другие. Поэтому

(П2.11) следует удовлетворить граничным условиям (П2.16÷ П2.18). Прделаем соответствующие подстановки. Условие (П2.16) подставлено в (П2.11)

$$\varphi_I = B_0^I (C_0^I y + D_0^I) + A_\lambda^I (C_\lambda^I e^{\lambda y} + D_\lambda^I e^{-\lambda y}).$$

$$\text{Откуда } B_0^I D_0^I = U_1; \quad B_0^I C_0^I y + A_\lambda^I (C_\lambda^I e^{\lambda y} + D_\lambda^I e^{-\lambda y}) = 0.$$

Рассуждения аналогичные, вышеприведенным дают

$$C_0^I = 0, \quad A_\lambda^I = 0. \quad (\text{П2.26})$$

Подставим (П2.26) в (П2.11), получим

$$\varphi_I = U_1 + A_0^I D_0^I x + B_\lambda^I \sin \lambda x (C_\lambda^I e^{\lambda y} + D_\lambda^I e^{-\lambda y}).$$

Обозначая $A_0^I D_0^I = a_0^I$; $B_\lambda^I D_\lambda^I = b_\lambda^I$; $D_\lambda^I C_\lambda^I = d_\lambda^I$, получим решение

$$\varphi_I = U_1 + a_0^I x + \sin \lambda x \cdot [b_\lambda^I e^{\lambda y} + d_\lambda^I e^{-\lambda y}]. \quad (\text{П2.27})$$

Условие (П2.17) подставим в (П2.27)

$$U_1 = U_1 + a_0^I L + \sin \lambda L [b_\lambda^I e^{\lambda y} + d_\lambda^I e^{-\lambda y}]$$

$$\text{Откуда следует } a_0^I = 0 \quad \text{и} \quad \sin \lambda L [b_\lambda^I e^{\lambda y} + d_\lambda^I e^{-\lambda y}] = 0.$$

Это возможно только когда $\sin \lambda L = 0$, а $\lambda L = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

С учетом полученных соотношений

$$\varphi_I = U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} y} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} y} \right]. \quad (\text{П2.28})$$

Условие (П2.18) дает

$$U_2 - U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d} \right]. \quad (\text{П2.29})$$

Как видно, ни одна из констант b_n^I , d_n^I из этого выражения не определяется сразу. Оставим пока (П2.29) в запасе.

Хотя граничные условия на металлических поверхностях использованы полностью, часть констант осталась не определенной. Но осталось еще не использованным требование теоремы единственности о том, что потенциал дол-

жен быть непрерывной функцией координат. Используем условия, налагаемые на потенциал на границе 2-х диэлектриков.

$$\varphi_I = \varphi_{II} \text{ при } y=d_1; \quad 0 < x < L, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial n} \text{ при } y=d_1, \quad 0 < x < L, \quad (\text{П2.30})$$

причем в данном случае $\vec{n}_0 = \vec{y}_0$ - производная по нормали к границе эквивалентна производной по y . Потенциалы (П2.25) и (П2.28) подчиняем условиям (П2.30).

$$U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{II} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi}{L} d_1 = U_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d_1} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d_1} \right]; \quad (\text{П2.31a})$$

$$\varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d_1} - d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d_1} \right] = \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{II} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} d_1. \quad (\text{П2.31б})$$

Каждая из сумм равенств (П2.30) и (П2.31) представляет собой ряд Фурье по функциям $\sin \frac{n\pi}{L} x$. Равенства утверждают, что соответствующие ряды равны. Это возможно, когда равны коэффициенты при одинаковых функциях $\sin \frac{n\pi}{L} x$. Приравнивая эти коэффициенты, получаем систему алгебраических уравнений для величин b_n^I, b_n^{II}, d_n^I .

$$b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d_1} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d_1} = b_n^{II} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{L} d_1; \quad (\text{П2.32})$$

$$\varepsilon_1 \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d_1} - d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d_1} \right] = \varepsilon_2 b_n^{II} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} d_1. \quad (\text{П2.33})$$

Если в (П2.32), (П2.33) зафиксировать какое-либо n , то получим систему двух уравнений с тремя неизвестными b_n^I, b_n^{II}, d_n^I . Одного уравнения не хватает. Для получения этого уравнения следует использовать (П2.29), удовлетворив условиям на границе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left[b_n^I e^{\frac{n\pi}{L} d} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L} d} \right] = U_2 - U_1, \text{ при } 0 < x < L; \quad y=d. \quad (\text{П2.29a})$$

Для определения констант, стоящих под знаком суммы, следует воспользоваться свойством ортогональности функций $\sin \frac{n\pi}{L} x$.

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx = \begin{cases} 0, \dots n \neq k \\ \frac{L}{2}, \dots n = k \end{cases}$$

Помножим (П2.29а) на $\sin \frac{k\pi}{L} x$ и проинтегрируем по x . Тогда для правой части уравнения получим интеграл

$$\int_0^L (U_2 - U_1) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} (U_2 - U_1) \frac{2L}{k\pi} & \text{при } k \text{ нечетн} \\ 0 & \text{при } k \text{ четн} \end{cases}$$

Слева получается сумма интегралов, однако все слагаемые этой суммы равны нулю при $n \neq k$ в силу ортогональности функций. Отлично от нуля лишь слагаемое, когда $n = k$, равное $\left[b_k^I e^{\frac{k\pi}{L}d} + d_k^I e^{-\frac{k\pi}{L}d} \right] \cdot \frac{L}{2}$.

В результате, из уравнения (ПБ.29а) получаем соотношения

$$b_n^I e^{\frac{n\pi}{L}d} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L}d} = \frac{4}{n\pi} (U_2 - U_1) \quad \text{при } n = 1,3,5... \quad (\text{П2.34})$$

и
$$b_n^I e^{\frac{n\pi}{L}d} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L}d} = 0, \quad \text{при } n = 2,4,6.$$

Уравнения (П2.32), (П2.33) и (П2.34) – есть системы трех уравнений для определения трех неизвестных.

$$b_n^I e^{\frac{n\pi}{L}d_1} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} - b_n^{II} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{L} d_1 = 0;$$

$$\varepsilon_1 b_n^I e^{\frac{n\pi}{L}d_1} - \varepsilon_1 d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} - \varepsilon_2 b_n^{II} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} d_1 = 0;$$

$$b_n^I e^{\frac{n\pi}{L}d_1} + d_n^I e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} = \frac{4}{n\pi} (U_2 - U_1).$$

Составляем определитель и решаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi n}{L}d_1} & e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} & -sh\frac{n\pi}{L}d_1 \\ \varepsilon_1 e^{\frac{\pi n}{L}d_1} & -\varepsilon_1 e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} & -\varepsilon_2 \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 \\ e^{\frac{\pi n}{L}d_1} & e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} & 0 \end{vmatrix} = \quad (\text{П2.35})$$

$$= -2 \left[\varepsilon_2 \cdot sh\frac{n\pi}{L}(d-d_1) \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 ch\frac{nd}{L}(d-d_1) \right];$$

$$\Delta_1 = -\frac{4}{n\pi} (U_2 - U_1) e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} \left[\varepsilon_2 \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 \right];$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{n\pi} (U_2 - U_1) e^{\frac{n\pi}{L}d_1} \left[\varepsilon_2 \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 - \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 \right];$$

$$\Delta_3 = -\frac{8\varepsilon_1}{n\pi} (U_2 - U_1), \quad \text{откуда}$$

$$b_n^I = \frac{2(U_2 - U_1) e^{-\frac{n\pi}{L}d_1} \left[\varepsilon_2 \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 \right]}{n\pi \varepsilon_2 sh\frac{n\pi}{L}(d-d_1) ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 ch\frac{n\pi}{L}(d-d_1)}; \quad (\text{П2.36})$$

$$d_n^I = \frac{-2(U_2 - U_1) e^{\frac{n\pi}{L}d_1} \left[\varepsilon_2 \cdot ch\frac{n\pi}{L}d_1 - \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 \right]}{n\pi \varepsilon_2 sh\frac{n\pi}{L}(d-d_1) ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 sh\frac{n\pi}{L}d_1 ch\frac{n\pi}{L}(d-d_1)}; \quad (\text{П2.37})$$

$$b_n^{II} = \frac{4\varepsilon_1 (U_2 - U_1)}{n\pi \varepsilon_2 sh\frac{n\pi}{L}(d-d_1) ch\frac{n\pi}{L}d_1 + \varepsilon_1 \frac{n\pi}{L} d_1 ch\frac{n\pi}{L}(d-d_1)}. \quad (\text{П2.38})$$

Выражение для потенциала в каждой из сред с учетом (П2.36), (П2.37), (П2.38) можно записать в виде:

а) для (П2.28)

$$\varphi_I = U_1 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4 \left(U_2 - U_1 \right) \varepsilon_2 \cdot ch\left(\frac{n\pi}{L}d\right) sh\frac{n\pi}{L}(y-d_1) + \varepsilon_1 sh\left(\frac{n\pi}{L}d\right) ch\frac{n\pi}{L}(y-d_1)}{n\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot ch\left(\frac{n\pi}{L}d\right) sh\frac{n\pi}{L}(d-d_1) + \varepsilon_1 sh\left(\frac{n\pi}{L}d\right) ch\frac{n\pi}{L}(d-d_1)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{П2.39})$$

в области $d_1 < y < d$

$$\varphi_{II} = U_1 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4(U_2 - U_1) \varepsilon_1 \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L} y\right)}{n\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L} d_1\right) \operatorname{sh}\frac{n\pi}{L}(d-d_1) + \varepsilon_1 \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L} d_1\right) \operatorname{ch}\frac{n\pi}{L}(d-d_1)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (\text{П2.40})$$

в области $0 < y < d_1$

Можно проверить правильность решения, приравняв $\varphi_1 = \varphi_{11}$ при $y=d_1$. Как видим равенство имеет место, граничное условие выполнено.

Частным случаем этого решения является решение для однородного диэлектрика ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) и $d = d_1$. Для этого случая получаем

$$\varphi_{II} = U_1 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4(U_2 - U_1) \operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} y}{n\pi \cdot \operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} d} \sin\frac{n\pi}{L} x. \quad (\text{П2.41})$$

Используя выражение (П2.41), можно найти распределение потенциала в плоском конденсаторе. Для этого представим, что $L \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} y \approx \frac{n\pi}{L} y, \quad \operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} d_1 \rightarrow \frac{n\pi}{L} d_1, \quad \text{а} \quad \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{L} d_1} \approx \frac{y}{d_1}$$

и, следовательно, $\varphi_{II} = U_1 + \frac{y}{d_1} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4(U_2 - U_1)}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1,3,5,\dots,$

Граничные условия, очевидно, выполняются:

$$\text{при } y=0 \quad \varphi_{11} = U_1; \quad \text{при } y=d_1 \quad \varphi_{II} = U_1 + (U_2 - U_1) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{L} x_1,$$

а так как сумма при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1, то $\varphi_{II} = U_2$.

В результате получается формула, позволяющая построить распределение потенциала в плоском конденсаторе при заданных потенциалах U_1, U_2 на электродах:

$$\varphi_{II} = U_1 + \frac{y}{d_1} (U_2 - U_1). \quad (\text{П2.42})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боков Л.А. Электромагнитные поля и волны: Учеб. пособие.- Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003.-214с.
2. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн»/ Под ред. С.И. Баскакова.- М.: Высшая школа, 1981, 208с.
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн.- М.: Наука, 1989, 476с.
4. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн.- М.: Высшая школа, 1992, 416с
- 5 Петров Н.Б.Электродинамика и распространение радиоволн. Учебник.- М.: Высшая школа, 2002.-497с.
- 6 Пюшнер Г. "Нагрев энергией сверхвысоких частот". Пер. с англ. - М., "Энергия", 1968, 312 с.

Учебное издание

**В.А. Замотринский, Ж.М. Соколова,
Е.В. Падусова, Л.И. Шангина**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л..

Тираж экз. Заказ

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.

634050, Томск, пр. Ленина, 40.

Тел. (3822) 533018.

.