

Министерство образования Российской Федерации  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

**В.И. Тисленко**

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным отделением  
учебно-методического объединения высших учебных  
заведений РФ по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации  
для межвузовского использования в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по специальности 200700 «Радиотехника»  
направления 654200 «Радиотехника»

Томск 2003

УДК 621.37:519.2(075.8)  
ББК 32.84я73  
Т 44

Рецензенты:

**Н.П. Красненко,**

вед. науч. сотр. ИОМ СО РАН, д-р физ.-мат. наук,

**Г.Я. Шайдунов,**

зав. кафедрой радиосистем Красноярского гос. техн. ун-та,  
д-р техн. наук, заслуженный деятель науки и техники РФ

**Тисленко В.И.**

Т 44 Статистическая теория радиотехнических систем: Учеб. пособие.  
— Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники,  
2003. — 153 с.  
ISBN 5-86889-169-4

Изложены основы теории статистического синтеза оптимальных систем обнаружения, различения, оценки параметров и разрешения полезных сигналов при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. Показаны свойства радиосигнала как переносчика полезной информации в радиотехнических системах. Достаточно подробно рассмотрены классические методы оценки параметров сигналов и их взаимосвязь.

Содержание соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по специальной дисциплине «Статистическая теория радиотехнических систем», входящей в учебные планы подготовки инженеров радиотехнических специальностей.

УДК 621.37:519.2(075.8)  
ББК 32.84я73

ISBN 5-86889-169-4

© Тисленко В.И., 2003  
© Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники, 2003

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
Введение .....	6
1. Сигналы и помехи в радиотехнических системах .....	9
1.1. Общее описание сигналов и помех .....	9
1.2. Классификация сообщений и сигналов .....	13
1.3. Свойства радиосигнала как переносчика сообщения .....	22
1.3.1. Функция различия сигналов .....	22
1.3.2. Частотно-временная корреляционная функция сигнала .....	27
1.3.3. Ширина функции неопределенности вдоль осей время—частота .....	30
1.3.4. Примеры функций неопределенности импульсных сигналов .....	34
1.4. Стационарная случайная помеха с гауссовым распределением вероятностей. Белый шум .....	43
2. Статистические модели сигналов в РТС .....	48
2.1. Радиоканал и его свойства .....	48
2.2. Полезный сигнал на выходе радиоканала .....	52
2.2.1. Модель сигнала в однолучевом канале .....	53
2.2.2. Модель сигнала в многолучевом канале .....	55
2.3. Нормальная (гауссова) модель сигнала .....	57
2.3.1. Статистические свойства огибающей .....	58
2.3.2. Статистические свойства фазы .....	60
2.4. Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы сигнала .....	61
3. Основы статистической теории обнаружения и различения сигналов при наличии помех .....	64
3.1. Краткая характеристика задач статистической теории РТС .....	64
3.2. Согласованный линейный фильтр .....	69
3.3. Примеры построения согласованных фильтров .....	77
3.3.1. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса .....	77
3.3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ .....	78
3.3.3. Согласованный фильтр для пачки $M$ когерентных радиоимпульсов гауссовой формы .....	79

3.4. Обнаружение и различение сигналов при наличии помех (байесов метод) .....	83
3.5. Другие критерии оптимальности обнаружения и различения .....	87
3.6. Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссова шума. Структура оптимальных устройств .....	89
3.6.1. Статистические характеристики качества различения .....	93
3.6.2. Статистические характеристики качества обнаружения .....	95
3.6.3. Общие черты задач сыщика и оптимального обнаружителя ..	99
4. Основы статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала. Разрешение сигналов по параметрам .....	100
4.1. Оценки параметров сигналов и их свойства .....	100
4.2. Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех .....	103
4.2.1. Байесовские оценки параметров .....	103
4.2.2. Оценки максимального правдоподобия .....	107
4.2.3. Оценки неизвестных параметров методом наименьших квадратов (МНК) .....	110
4.3. Статистические свойства оценок МНК .....	113
4.4. Пример оценки неизвестного скалярного параметра .....	114
4.5. Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы .....	120
4.6. Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссова шума .....	123
4.7. Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия .....	125
4.8. Оптимальная оценка начальной фазы радиосигнала .....	130
4.9. Информация по Фишеру. Неравенство Крамера-Рао .....	132
4.10. Разрешение сигналов .....	136
4.10.1. Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы .....	138
4.10.2. Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте. Тело неопределенности .....	142
Заключение .....	147
Литература .....	149
Приложение. Основные обозначения и сокращения .....	150

## Предисловие

Широкое и бурное внедрение цифровой техники и методов обработки сигналов в радиотехнических системах связи, навигации, локации и управления, начавшееся в последние десятилетия прошлого века и продолжающееся в настоящее время, значительно изменило традиционные представления о содержании и требованиях к профессиональной подготовке радиоинженера. Квалифицированному инженеру, желающему успешно работать в области проектирования радиоэлектронных систем и устройств, необходимы прочные знания по теории цепей и сигналов, статистической радиотехнике, устройствам усиления, формирования и обработки сигналов, технике СВЧ. Однако теперь радиоинженер, наряду с глубоким пониманием физической стороны преобразований, происходящих в устройствах, все чаще сталкивается с необходимостью хорошо разбираться в особенностях математического представления этих преобразований. И это понятно, поскольку микропроцессорная техника предполагает представление способа обработки в виде формально-логических — математических действий. Другими словами, инженер должен уметь мыслить алгоритмически, с тем чтобы потом воплотить предложенный им алгоритм обработки в виде программы для вычислительного устройства.

Цифровая техника уверенно работает на частотах до 100 МГц и выше. Она все ближе подбирается к выходу приемных антенн в системах радиолокации и связи. Специалисты заняты разработкой аналого-цифровых преобразователей с быстродействием 1000 МГц, и это не фантазия. Приемное устройство в ряде случаев по существу представляет малошумящий усилитель, АЦП и вычислитель, в котором реализуются операции оптимальной обработки высокочастотных сигналов и последующие низкочастотные преобразования.

Учебное пособие, написанное Тисленко В.И., которого я знаю много лет, адресовано студентам радиотехнических специальностей. В нем достаточно полно и доходчиво изложены азы теории разрешения, обнаружения и измерения параметров сигналов в радиотехнических системах при наличии помех; показано влияние радиоканала на характеристики сигналов на выходе приемных антенн. Значительное внимание уделяется математической стороне построения алгоритмов обработки сигналов. Я не сомневаюсь, что освоение студентами представленного в книге материала откроет им путь для дальнейшего глубокого изучения и понимания принципов оптимальной обработки радиосигналов в современных радиотехнических системах. Научно-производственная фирма «Микран» с большим почтением относится к выпускникам радиотехнического факультета Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, обладающим знаниями в этой области.

Директор НПФ «Микран»



В. Гюнтер

## Введение

Сферы применения радиотехнических систем (РТС) в жизни современного общества весьма обширны: радиовещание, телевидение, стационарная и мобильная радиосвязь, системы управления самолетами, ракетами, космическими объектами, системы космического мониторинга состояния земной поверхности. Это некоторые основные области их использования, без которых прогрессивное развитие промышленности, транспорта, медицины и других отраслей трудно себе представить. Основой наиболее эффективных средств организации и ведения военных действий в современной армии также являются РТС. Известно, например, что стоимость радиоэлектронного оборудования современного самолета составляет около половины стоимости самолета в целом.

Содержание задач, которые решают РТС в процессе выполнения возложенных на них функций, связано, как правило, с передачей, приемом и преобразованием информации, переносчиком которой является радиосигнал. По информационному назначению, независимо от области применения, РТС разделяют на три основных класса: передачи информации; извлечения информации; противодействия (передаче или извлечению информации). К первому классу относят РТС, предназначенные для передачи информации (сообщений) из одних пунктов пространства в другие. Это прежде всего системы радиосвязи, телевидения, а также радиотелеметрии.

Второй класс составляют РТС, основная функция которых состоит лишь в приеме (извлечении) полезной информации. Такая ситуация характерна для радиолокационных (РЛ) и радионавигационных (РН) систем, а также для РТС, используемых в радиоастрономии, радиометеорологии. В данном случае в отличие от систем, относящихся к первому классу, полезное сообщение появляется не в самой РТС, а как бы вне ее. Характер сообщения в РТС извлечения информации по существу обусловлен физическими закономерностями распространения радиоволн в среде (запаздывание, рефракция, рассеяние, отражение, эффект Доплера и др.). Последний класс образуют системы радиопротиводействия. Это несколько особый и важный класс систем. Особый, потому что используется обычно в РТС военного назначения, а важный, поскольку применение этих средств дает возможность парализовать работу других РТС, выполняющих функции передачи и извлечения информации.

Совершенствование радиолокационных и радионавигационных систем, систем радиосвязи и управления связано с повышением их дальности действия, точности и оперативности измерения параметров объектов, достоверности и скорости передачи информации, надежности. Среди множества проблем, возникающих на пути создания РТС, обладающих (при прочих равных условиях) максимально возможными дальностью, точностью, быстродействием, скоростью и достоверностью передачи информации, существует одна, связанная непосредственно с предметом изучения в курсе «Статистическая теория радиотехнических систем».

Сущность этой проблемы состоит в том, что основным реально действующим и принципиально неустранимым фактором, препятствующим реализации желаемых (неограниченно высоких) значений указанных выше показателей РТС, является случайный характер сигналов на входе приемных устройств. Случайность (стохастичность) амплитуды, фазы и частоты входного сигнала обусловлена многими причинами. Это прежде всего тепловые флуктуации или хаотические движения носителей электрических зарядов в проводниках, шумы пространства (неба), окружающего антенну приемника, а также шумы, обусловленные дробовым эффектом в усилительных устройствах. При распространении радиоволн в реальных каналах также возникают случайные изменения амплитуды фазы и частоты радиосигнала, обусловленные пространственно-временными вариациями электрических параметров среды.

Проектирование РТС без анализа и грамотного учета влияния указанных факторов не позволяет оценить и при необходимости реализовать предельные возможности радиосистем по основным показателям, определяющим их эффективность.

В курсе «Статистическая теория РТС» изучаются основные методы и способы оптимального обнаружения, различения, оценки параметров и разрешения радиосигналов при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. По существу, это классика, знание которой минимально необходимо радиоинженеру для понимания принципов построения современных систем радиолокации, радиосвязи, радионавигации и др. Эти результаты составляют лишь малую часть того, чем располагает современная статистическая теория обработки сигналов. Ограниченный объем книги не позволил, в частности, представить в ней материал по марковской теории фильтрации сообщений.

Содержание книги соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по данному курсу. Для его освоения необходимы знания теории вероятностей, теории цепей и сигналов, высшей математики и общей физики в объеме вузовских курсов для студентов радиотехнических специальностей.

## 1. СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

### 1.1. Общее описание сигналов и помех

Радиотехнические системы относятся к классу информационных систем, и поэтому все процессы в них целесообразно рассматривать с информационной точки зрения. Любые возмущения в РТС разделяют на три группы: *сообщения, сигналы и помехи*. К сообщениям относятся процессы  $\lambda(t)$  (функции времени) или поля  $\lambda(t, x, y, z)$  — функции пространственных координат и времени, содержащие полезную для потребителя информацию, которая подлежит воспроизведению в системах передачи информации или извлечению в системах извлечения информации. Например, в системах связи это речь, музыка (функции времени); при передаче TV-изображения — распределение яркости отраженного от объекта света (функция пространственных координат и времени). В РЛ- и РН-системах сообщениями обычно являются функции, определяющие изменение во времени дальности и угловых координат подвижного объекта в заданной системе координат. В общем случае сообщение может иметь векторный характер, т.е.  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$ .

*Сигналом* называется процесс  $s(t, \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\beta})$  или поле  $e(t, x, y, z, \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\beta})$ , которые выполняют функцию *переносчика сообщения*  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ . Важно отметить, что термин «сигнал» предполагает существование временного процесса, а термин «поле» определяет пространственно-временной процесс, т.е.  $x, y, z$  — пространственные координаты.

Наряду с полезным сообщением сигнал в ряде случаев содержит совокупность неинформативных параметров  $\boldsymbol{\beta}$ . Эти параметры называют мешающими, иногда часть из них могут быть известны. В общем случае они также изменяются во времени и в пространстве. Сигналы (иногда используют термин *радиосигналы*) существуют в цепях приемника и передатчика РТС в виде высокочастотных токов и напряжений, например, на выходе приемной антенны. Когда используют термин *поле*, то имеют в виду электромагнитную волну, распространяющуюся в пространстве. Волна характеризуется векторами электрического и магнитного полей. Таким образом, скалярная функция  $e(\cdot)$  соответствует одной из проекций вектора электрической напряженности поля. Приемная антенна осуществляет преобразование

электромагнитной волны в радиосигнал  $s(t, \lambda(t), \beta)$ . С информационной точки зрения волна и радиосигнал выполняют функцию переносчика информации. В большинстве своем тактико-технические характеристики (ТТХ) РТС зависят как от способа модуляции радиосигнала  $s(t, \lambda(t), \beta)$  сообщением  $\lambda(t)$ , так и от характера самого сообщения  $\lambda(t)$ .

Следует отметить, что в системах передачи информации модуляция высокочастотного сигнала сообщением  $\lambda(t)$  реализуется в передатчике РТС. Поэтому эти системы называют также системами с *внутренней модуляцией*. В радиолокационных, радионавигационных, а также других РТС, относящихся к классу систем извлечения информации, полезное сообщение  $\lambda(t)$  не содержится в сигнале, который излучает передатчик. Этот сигнал принято называть *зондирующим*.

В РЛ- и РН-системах электромагнитная волна (переносчик информации) *приобретает сообщение в процессе распространения на трассе «излучатель-объект» и при отражении волны от объекта*. Действительно, сообщение о дальности до объекта в РЛ-системах формируется вследствие задержки по времени сигнала на входе приемника по отношению к зондирующему. Сообщение о направлении на объект «вводится» в переносчик информации при приеме волны на пространственно протяженную антенную систему и, таким образом, зависит от способа построения самой антенны. В связи с отмеченными особенностями РТС извлечения информации называют также системами с *внешней модуляцией* [1].

Помехами называют процессы или поля, мешающие достоверному воспроизведению (извлечению) сообщения  $\lambda(t)$ . Характер взаимодействия сигнала  $s(t, \lambda(t), \beta)$  и помехи  $n(t)$  может быть различным. Он зависит от физической природы помехи. В общем виде результат их взаимодействия можно представить в виде сигнала  $y(t, \lambda(t), \beta) = F[s(t, \lambda(t), \beta); n(t)]$ , где  $F[\cdot; \cdot]$  — оператор, определяющий способ комбинирования сигнала и помехи. Например, собственный шум приемно-усилительных устройств аддитивно взаимодействует с сигналом, т.е. суммируется с ним. Такая помеха называется *аддитивной* (от английского слова *addition* — сложение). Например, если сигналом является прямоугольный радиоимпульс, который находится на интервале  $[0, T]$ , то с учетом собственного шума колебание на входе приемника:

$$y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t),$$

$$\text{где } s(t, \lambda, \beta) = \begin{cases} A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi], & 0 \leq \tau \leq t \leq \tau + \tau_n \leq T, \\ 0, & \tau > t > \tau + \tau_n. \end{cases}$$

В данном примере полезный сигнал зависит от пяти параметров: амплитуды  $A$ , частоты  $\omega$ , начальной фазы  $\varphi$ , длительности импульса  $\tau_n$  и момента его появления  $\tau$ . В практических задачах часто информативными и неизвестными заранее могут быть:  $\lambda_1 = \omega$ ;  $\lambda_2 = \tau$ ;  $\lambda_3 = \tau_n$ , а мешающими  $\beta_1 = A$  и  $\beta_2 = \varphi$ .

При радиолокационном наблюдении объекта, находящегося в пространстве, содержащем случайные неоднородности, например самолет и дождевые облака, на трассе распространения радиоволн или корабль и взволнованная поверхность моря, также возникает помеха в виде радиосигналов, отраженных от капель дождя или от случайно ориентированных участков поверхности моря. Однако в этом случае помеха не суммируется с сигналом от объекта, она *модулирует полезный сигнал, т.е. влияет на него нелинейно*. Такие помехи называют *мультипликативными* (от английского слова *multiply* — умножать). Действительно, простое увеличение мощности излученного сигнала приведет к ослаблению влияния собственного шума, и оно не приведет к желаемому результату во втором случае, так как наряду с увеличением уровня сигнала, отраженного от объекта, возрастет и уровень помехи в виде отражений от облаков или моря.

Математическое описание помехи предполагает задание ее в виде случайной функции времени. В противном случае (при детерминированном описании) она оказывается полностью известной, и ее влияние можно было бы полностью исключить. Вопрос о том, является ли отдельно взятый процесс сигналом или помехой, решается в зависимости от того, что требуется получателю. В этом плане математические способы описания сообщений, сигналов или помех одинаковы. Поэтому далее везде, где это удобно, будет использоваться единый термин «сигнал».

Важно отметить, что на вход приемника поступает результирующий сигнал  $y(t, \lambda(t), \beta)$  и по своей физической природе в подавляющем большинстве практических задач это — случайный процесс. Таким образом, амплитуда, фаза и частота высокочастотного (ВЧ) сигнала  $y(t, \lambda(t), \beta)$  в любой момент времени являются случайными величинами. Напомним, что определение случайной величины или случайного

процесса, как совокупности случайных величин, предполагает задание некоторого множества возможных значений (выборочного пространства), из которого производится случайный выбор конкретных (наблюдаемых) *реализаций*. На этом множестве должны быть определены вероятностные характеристики, которые показывают, как часто наблюдаются те или иные элементы выборочного пространства (реализации).

Важным положением теории информации и теории связи является утверждение о том, что адекватная (полноценная или соответствующая природе явлений) постановка задачи анализа и синтеза РТС передачи или извлечения информации предполагает задание полезного сообщения  $\lambda(t)$  как случайной функции или величины, если  $\lambda(t) = \text{const}$ . Действительно, предположение о том, что сообщение  $\lambda(t)$  является детерминированной функцией, т.е. известной получателю заранее, делает абсурдной передачу этого сообщения по каналу связи. Теряет смысл и задача измерения координат в РЛ- и РН-системах, если они заранее известны, т.е. являются детерминированными функциями, определяющими изменение самих координат.

Таким образом, общий подход к математическому описанию воздействий в РТС различного назначения, а следовательно, и к решению задач анализа и синтеза систем и устройств обработки сигналов связан с использованием аппарата статистической радиотехники. Тем не менее, отсюда не следует, что теряет смысл изучение свойств переносчика информации — сигнала  $s(t, \lambda(t), \beta)$  при отсутствии помех. В частности, особый интерес представляет изучение влияния способа модуляции сигнала на возможность раздельного наблюдения двух сигналов, имеющих различные значения сообщений  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ . Уверенность в целесообразности подобного рассмотрения основана на том, что свойства сигналов, справедливые при отсутствии помех, сохраняются на приемлемом уровне при достаточном превышении сигнала над помехой. Далее покажем, что это имеет место в задачах, где помехой является собственный шум приемника.

## 1.2. Классификация сообщений и сигналов

Рассматривая классификацию сообщений и сигналов, будем полагать, что они не являются функциями пространственных координат и в качестве аргумента могут иметь переменную  $t$  (время).

Напомним, что по своей сути сообщение должно рассматриваться как категория заранее неизвестная получателю. В этом смысле сообщение не может быть детерминированным, т.е. заведомо известным потребителю. Роль последнего в РТС передачи информации выполняет, например, абонент на приемном конце линии связи. В РТС извлечения информации это может быть оператор РЛС, получающий информацию о координатах целей в зоне обзора.

Классификация сообщений представлена на рис.1.1. В зависимости от характера изменения функции  $\lambda(t)$  во времени сообщения бывают *случайные* и *квазидетерминированные*.



Рис. 1.1. Классификация типов сообщений  $\lambda(t)$

Сообщение является *случайной функцией*, если оно представляет собой последовательность случайных величин, т.е. в любой произвольный момент времени, где оно существует, его можно рассматривать

как случайную величину. Согласно [1] это такой процесс, в котором «случайность рождается в каждый момент времени». Статистическое описание случайной функции в общем случае предполагает задание многомерной плотности распределения вероятностей (ПРВ) значений сообщения  $\lambda(t)$  в  $n$  моментов времени  $t_1, \dots, t_n$ . Если ввести в рассмотрение  $n$ -мерный вектор  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  с координатами  $\lambda_i = \lambda(t_i)$ , то следует задать функцию  $W(\lambda; t_1, t_2, \dots, t_n) = W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ , здесь множество моментов времени  $t_i$  играет роль параметров функции. Если моменты времени  $t_1, \dots, t_n$  расположены равномерно через промежуток  $\Delta t$  в интервале  $[0, T]$ , на котором задан случайный процесс, то ПРВ  $W(\lambda)$  при большом  $n$  можно приблизительно рассматривать как плотность вероятности для реализации случайного процесса. При  $\Delta t \rightarrow 0$  число отсчетов  $n \rightarrow \infty$  и  $n$ -мерная ПРВ в пределе (если он определен) переходит в функционал распределения вероятностей  $W\{\lambda(t)\}$  случайного процесса  $\lambda(t)$ .

Во многих практических задачах оказывается достаточным знание одно- или двумерной ПРВ. Это позволяет задать математическое ожидание (среднее по ансамблю реализаций значение)

$$\mathbf{M}[\lambda(t)] = \overline{\lambda(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda; t) d\lambda$$

и ковариационную функцию

$$K_{\lambda}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\lambda_1 \cdot \lambda_2] - \overline{\lambda_1} \cdot \overline{\lambda_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 W(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

В тех случаях, когда необходимо знание  $n$ -мерной плотности вероятности, часто в качестве моделей для описания случайных сигналов и помех используются процессы, у которых многомерная плотность может быть определена через одно- или двумерную плотность вероятности. В частности, если моменты времени  $t_i$  выбраны так, что соответствующие им значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  оказываются статистически независимыми, то  $n$ -мерная плотность выражается через произведение одномерных, т.е.

$$W_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = W_1(\lambda_1, t_1) \cdot W_1(\lambda_2, t_2) \cdots W_1(\lambda_n, t_n).$$

В силу известной в теории вероятностей центральной предельной теоремы, во многих задачах, связанных с анализом и синтезом ус-

ройств обработки сигналов, применяется вероятностная модель, соответствующая нормальному (гауссовскому) случайному процессу. Она удобна тем, что  $n$ -мерная ПРВ полностью определяется через двумерную плотность распределения вероятностей значений процесса  $\lambda(t_1), \lambda(t_2)$  для произвольных  $t_1$  и  $t_2$ .

Широкое применение в теории РТС находят удобные и простые модели случайных сигналов, которые строятся на основе так называемых случайных процессов без последствия, или процессов Маркова. Случайный процесс  $\lambda(t)$  называется марковским (первого порядка), если условная плотность вероятности процесса  $\lambda_n$  в момент времени  $t_n$  по всем предыдущим значениям  $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$  зависит только от  $\lambda_{n-1}$ , т.е.  $W(\lambda_n / \lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1) = W(\lambda_n / \lambda_{n-1})$ . Для марковского процесса  $n$ -мерная плотность вероятности может быть записана в виде

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = W(\lambda_1) \cdot W(\lambda_2 / \lambda_1) \cdot W(\lambda_3 / \lambda_2) \cdots W(\lambda_n / \lambda_{n-1}),$$

т.е. она определена, если известна ПРВ начального значения процесса  $\lambda_1 = \lambda(t_1)$  и условная ПРВ  $W(\lambda_i / \lambda_{i-1})$ , называемая плотностью вероятности перехода.

Сообщение является квазидетерминированным, если его задание представляет известную функцию времени  $t$ , содержащую один или несколько случайных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Например, математическую модель изменения координаты цели, допустим дальности  $D(t)$ , на интервале времени  $(0; T)$  определяют в виде полинома

$$D(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

т.е. здесь  $\lambda = \{a_0, a_1, a_2\}$ . Очевидно, это допустимо, если возможно пренебречь случайными во времени вариациями дальности и считать ускорение постоянным на интервале наблюдения  $[0; T]$ . Ясно, что исчерпывающее описание ансамбля сообщений  $\lambda(t)$  возможно теперь при задании многомерной плотности вероятности  $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ . Частным случаем квазидетерминированного сообщения является константа — случайная величина, которая постоянна на интервале наблюдения. Такая модель сообщения определена заданием ПРВ  $W(\lambda)$ , она достаточно проста и удобна для описания реальных сообщений, которые «мало» и «медленно» изменяются на интервале наблюдения.

Достаточно часто в практических задачах рассматривают сообщение как неизвестную постоянную и неслучайную величину или систему неслучайных величин. В задачах этого типа нет необходимости

вводить в рассмотрение плотность распределения вероятностей  $W(\lambda)$ . Данный подход оправдан, когда есть уверенность в том, что априорное знание функции  $W(\lambda)$ , т.е. ее знание до получения сигнала  $y(t; \lambda_0)$ , содержащего информацию о конкретном истинном значении сообщения  $\lambda_0$ , практически ничего не может дать потребителю. Он также оправдан и в том случае, когда сообщение по своей физической природе не может рассматриваться как случайное. Например, в качестве сообщения в измерительной РТС может выступать неизвестная физическая константа — скорость света. Ее предстоит измерить и она не случайна. В качестве второго признака классификации будем использовать характер множества значений функции  $\lambda(t)$  и ее аргумента  $t$ . В зависимости от того, непрерывно или дискретно множество значений функции  $\lambda(t)$ , различают *аналоговые* и *цифровые* сообщения. В каждом из этих вариантов множество значений переменной  $t$  может быть дискретным или непрерывным. В итоге получаем четыре основных типа сообщений.

1. *Непрерывный случайный процесс* — процесс (сигнал), область значений и область определения которого непрерывные множества. Реализация такого типа сообщения показана на рис. 1.2,а.

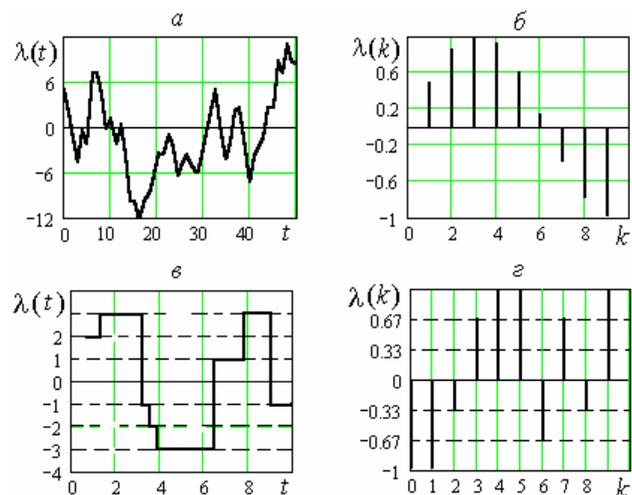


Рис. 1.2. Одиночные реализации различных типов сообщений

2. *Случайная последовательность с непрерывной областью значений* — случайная функция, у которой область значений непрерывное множество, а область определения — дискретное. Сообщения такого типа образуются в результате формирования временных выборок (дискретных отсчетов) из непрерывного случайного процесса (рис. 1.2,б).

3. *Случайный процесс с дискретной областью значений* — случайная функция, у которой область значений дискретное множество, а область значений аргумента  $t$  — непрерывное множество. Этот процесс образуется в результате квантования непрерывного процесса только по уровню (рис. 1.2,в).

4. *Случайная дискретная последовательность* (дискретный процесс с дискретным временем) — случайная функция, у которой область значений и область определения — дискретные множества (рис. 1.2,г). Сигналы подобного вида широко используются в современных РТС различного назначения, реализующих цифровые методы обработки информации.

Рассмотрим классификацию сигналов — переносчиков сообщений в РТС. Она показана на рис. 1.3. Высокочастотный (ВЧ) сигнал, не содержащий сообщение  $\lambda(t)$  — немодулированное гармоническое колебание (несущая без модуляции), имеет вид

$$s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

где  $S_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  — амплитуда, частота и начальная фаза колебания.

Сигнал, содержащий сообщение, в общем случае можно записать в виде

$$s(t) = S(t, \lambda(t)) \cos(\omega_0 t + \Phi(t, \lambda(t)) + \varphi_0), \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

где  $S(t, \lambda(t))$  и  $\Phi(t, \lambda(t))$  — функции, определяющие амплитудную и фазовую модуляцию ВЧ-сигнала сообщением  $\lambda(t)$ ;  $T$  — длительность сигнала (время наблюдения), которая в реальной задаче конечна.

Конкретный вид этих функций зависит от назначения РТС и способа ее построения.

При проектировании устройств обработки сигналов во всех типах РТС существенное значение имеет характер *высокочастотной структуры* сигнала  $s(t, \lambda(t))$ . По этому признаку все сигналы можно разделить на два типа: *когерентные* и *частично когерентные*, включая в них и полностью *некогерентные*. У когерентных сигналов изменение во времени их фазы полностью известно, т.е. описывается

детерминированной функцией. Это позволяет, например, производить компенсацию нежелательных фазовых сдвигов и осуществлять, в частности, синфазное сложение нескольких ВЧ-сигналов. В итоге можно увеличить мощность суммарного сигнала. Когерентное суммирование (накопление) часто используется в устройствах оптимального приема сигналов при наличии помех. В случае частично когерентных сигналов, их ВЧ-структура в определенной степени случайна. Таким образом, их сложение не приведет к аналогичному результату.

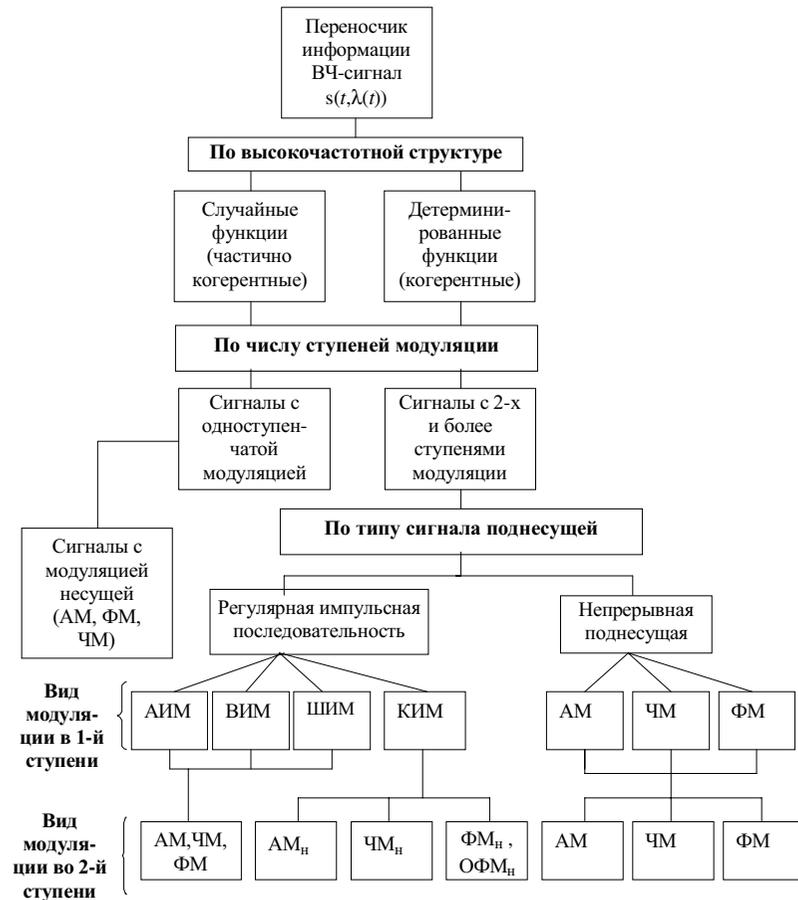


Рис. 1.3. Классификация сигналов — переносчиков сообщений

В зависимости от количества ступеней модуляции модулированные колебания  $s(t, \lambda(t))$  могут быть 2-х типов: с одной ступенью модуляции и с двумя и более. На рис. 1.4 показана структурная модель формирования переносчика сообщения  $s(t, \lambda(t))$  для этих 2-х способов.

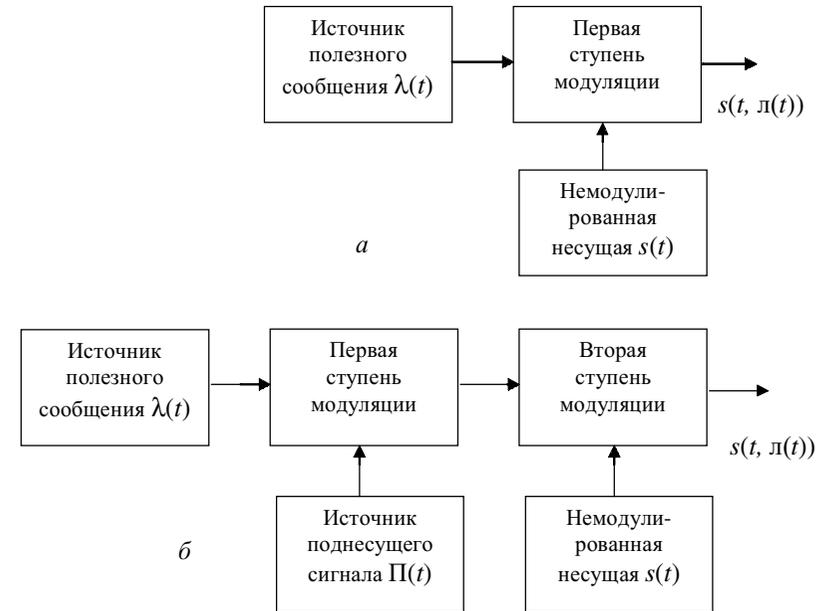


Рис. 1.4. Структурная модель формирования сигнала — переносчика информации: а — одна ступень модуляции; б — две ступени модуляции

В случае одной ступени модуляции несущего колебания (1.1) сообщение  $\lambda(t)$  непосредственно изменяет его амплитуду при амплитудной модуляции (АМ), частоту при частотной модуляции (ЧМ) или фазу при фазовой модуляции (ФМ) (рис. 1.4,а). Например, сигнал в системах радиовещания с ЧМ можно представить в виде

$$s(t, \lambda(t)) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(\lambda(t)) + \varphi_0),$$

где скорость изменения полной фазы, т.е. мгновенная частота, должна быть равной  $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(\lambda(t)) = \omega_0 + k \cdot \lambda(t)$  при  $k = \text{const}$ . Образец подобного сигнала показан на рис. 1.5,а. В РН-системах наземный маяк с непрерывным излучением создает на входе подвижного бортового

приемника сигнал  $s(t, \lambda(t)) = k \cdot \cos[\omega_0(t - \lambda(t)/c) + \varphi_0]$ , где  $k$  — коэффициент, учитывающий ослабление волны на трассе распространения;  $c$  — скорость света;  $\lambda(t)$  — сообщение, совпадающее с изменением дальности  $D(t)$  от передатчика (маяка) до подвижного объекта.

Сигналы с несколькими ступенями модуляции широко применяются в современных системах связи, радиолокации и радионавигации. Они имеют более сложную структуру. В частности, при 2-ступенчатой модуляции существуют два модулятора. В первой ступени происходит модуляция поднесущего сигнала  $P(t)$ , во второй — модуляция несущего сигнала  $s(t)$  (рис. 1.4, б).

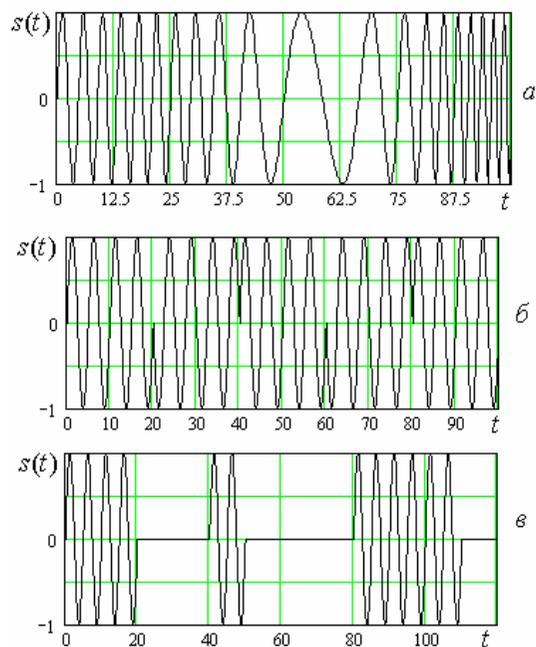


Рис. 1.5. Виды модуляции

ВЧ-сигнал  $s(t, \lambda(t))$  может иметь поднесущую  $P(t)$  2-х типов: регулярную последовательность импульсов; непрерывную функцию.

При использовании в качестве  $P(t)$  регулярной (периодической) последовательности импульсов определенной формы возможны

четыре основных вида импульсной модуляции в первой ступени: амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) — сообщение  $\lambda(t)$  изменяет амплитуду импульсов; времяимпульсная модуляция (ВИМ) — сообщение  $\lambda(t)$  изменяет временное положение импульсов относительно опорной (немодулированной) последовательности; широтно-импульсная модуляция (ШИМ), при которой сообщение управляет шириной (длительностью) импульсов, образующих поднесущую  $P(t)$  и кодово-импульсная модуляция (КИМ), при которой по существу не происходит (в привычном смысле) модуляции какого-либо параметра импульсной последовательности  $P(t)$ . Поясним подробнее этот вид модуляции.

Применение сигнала с КИМ в системах передачи информации предполагает дискретизацию полезного сообщения  $\lambda(t)$  как по времени так и по уровню (см. рис. 1.2, з). Изменение характера сообщения выполняется в аналого-цифровом преобразователе. В итоге возможные значения сообщения образуют конечный набор (множество) величин.

В каждом периоде импульсной поднесущей  $P(t)$ , в заданные моменты времени формируется импульсный код, соответствующий значению сообщения в этот момент времени. В простейшем случае кодовые комбинации образуются в виде систематического двоичного кода. В современных цифровых системах передачи информации широко применяются псевдослучайные последовательности (ПСП) импульсов. Состояние ПСП (конкретная реализация) на некотором текущем интервале времени зависит от значения сообщения. Количество различных состояний ПСП, т.е. число отличающихся друг от друга реализаций, счетно и конечно и должно обеспечить кодирование всех возможных значений сообщения  $\lambda(t)$ . Существуют различные типы ПСП. Широкое применение получили ПСП в виде  $M$ -последовательностей, что обусловлено простотой их формирования [2].

В случае, когда поднесущая  $P(t)$  является непрерывной функцией, в первой ступени обычно применяют один из трех основных видов модуляции: амплитудную, частотную или фазовую.

Рассмотрим теперь виды модуляции во второй ступени — при образовании непосредственно ВЧ-сигнала  $s(t, \lambda(t))$ .

Во второй ступени модуляции при формировании ВЧ-сигнала  $s(t, \lambda(t))$  с использованием импульсной поднесущей  $P(t)$ , имеющей любую из трех типов модуляции (АИМ, ВИМ, ШИМ), обычно применяют АМ, ЧМ или ФМ. В радиосистемах передачи информации

(РСПИ), например, находят применение сигналы АИМ – ЧМ, ВИМ – АМ, ШИМ – ЧМ.

Формирование переносчика информации  $s(t, \lambda(t))$  на основе поднесущей с КИМ осуществляется путем манипуляции (скачкообразного изменения) амплитуды, частоты или фазы несущего сигнала (1.1). При этом возможны сигналы с амплитудной манипуляцией ( $АМ_n$ ), с частотной манипуляцией ( $ЧМ_n$ ) или с фазовой манипуляцией ( $ФМ_n$ ). Сигналы с  $ФМ_n$  называют обычно сигналами с ФКМ (фазокодовой модуляцией). На рис. 1.5,б показан ВЧ-сигнал с КИМ и двухуровневой (0 или  $\pi$ )  $ФМ_n$  несущей во второй ступени модуляции (сигнал с ФКМ); на рис. 1.5,в показан ВЧ-сигнал с двумя ступенями модуляции типа ШИМ – АМ.

Во второй ступени модуляции в случае применения сигналов с непрерывной поднесущей  $\Pi(t)$  также, как правило, реализуют один из трех типов модуляции — АМ, ЧМ или ФМ. В частности, в РТС применяются комбинации ЧМ – ФМ, АМ – ЧМ и др.

При проектировании РТС передачи информации возникает задача выбора наиболее подходящего метода модуляции. В РТС извлечения информации, где процесс модуляции ВЧ-сигнала сообщением происходит вне системы, данная задача сводится к выбору целесообразной формы излучаемого (*зондирующего*) сигнала. Ряд важнейших ТТХ РТС зависит от свойств сигнала  $s(t, \lambda(t))$ . Рассмотрим эти свойства.

### 1.3. Свойства радиосигнала как переносчика сообщения

#### 1.3.1. Функция различия сигналов

При любых способах формирования ВЧ-радиосигнала  $s(t, \lambda)$ , используемых в РТС различного назначения, предполагается, что сообщение  $\lambda(t)$  содержится в каком-либо параметре сигнала  $x(t)$ . Характер взаимосвязи  $x(t) = f[\lambda(t)]$  зависит от типа РТС и способа ее построения. В системах связи вид этой функции определен способом модуляции и модуляционной характеристикой передатчика.

На приемной стороне канала распространения радиоволн (РРВ) принятый радиосигнал подлежит обработке — происходит измерение параметра  $x(t)$  — и в итоге определяется переданное сообщение  $\lambda(t)$ . В простейшем случае информативным является один параметр сигнала — амплитуда, частота, фаза, временное положение и т.д. Суще-

ствуют и другие типы РТС, в которых информативными могут быть одновременно несколько параметров ВЧ-сигнала.

Поскольку в канале РРВ или непосредственно в РТС возникают различного рода помехи, результат измерений всегда содержит ошибку, которая определяет величину искажения сообщения. Степень искажения сообщения помехой зависит от уровня помехи и, что более важно, от способа модуляции ВЧ-сигнала.

Рассмотрим с математической точки зрения вопрос сравнения двух радиосигналов по устойчивости передаваемых ими сообщений к искажению из-за помех. Пусть на вход приемного устройства РТС поступает искаженный помехой сигнал  $y(t, x_0)$ , где  $x_0$  — постоянный во времени параметр, соответствующий сообщению  $\lambda_0$ . Напомним, что в случае аддитивной помехи  $y(t, \lambda_0) = s(t, \lambda_0) + n(t)$ .

Очевидно, что возможность получить на выходе приемника значение сообщения, отличающееся (вследствие влияния помех) от  $\lambda_0$ , будет тем меньше, чем сильнее отличаются образцы сигнала  $s(t, x)$  друг от друга при двух различных значениях сообщения —  $\lambda_0$  и произвольного  $\lambda$ . Таким образом, качество сигнала, как переносчика информации, определяется степенью различия функций  $s(t, x_0)$  и  $s(t, x)$ . По существу, необходимо ввести величину, которая зависит от «расстояния» между двумя функциями. Напомним, что в линейном  $n$ -мерном пространстве векторов в качестве меры различия векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  часто используют длину  $d$  разностного вектора  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Введем координатное представление векторов:  $\mathbf{a} = \{a_i\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_i\}$ ,  $\mathbf{d} = \{d_i\}$ , где нежирные буквы с индексами являются координатами соответствующего вектора. Длина вектора  $\mathbf{a}$  в  $n$ -мерном векторном пространстве определяется соотношением

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.3)$$

Тогда мера различия  $d$ , равная длине вектора  $\mathbf{d}$ , имеет вид

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}. \quad (1.4)$$

Введем аналогичное по содержанию понятие для сигналов. Будем рассматривать функции на конечном интервале времени  $(0; T)$ . Последовательность отсчетов функции  $s(t_i, x) = s_i$ , взятых в моменты времени  $t_i$ , с интервалом дискретизации  $\Delta t = T/n$ , где  $n$  — число

отсчетов, можно рассматривать как  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{s} = \{s_i\}$ . Таким образом, при дискретном представлении функций  $s(t, x_0)$  и  $s(t, x)$  в качестве меры их различия целесообразно использовать величину, равную

$$\sum_{i=1}^n [s(t_i, x_0) - s(t_i, x)]^2. \quad (1.5)$$

Очевидно, что величина (1.5) изменяется не только при различии форм сигналов, но и в том случае, когда изменяется масштаб представления самих функций. Для исключения влияния масштаба на меру различия форм сигналов, пронормируем величину (1.5) на квадрат модуля одного из векторов. В результате получим отношение следующего вида:

$$\frac{\sum_{i=1}^n [s(t_i, x_0) - s(t_i, x)]^2}{\sum_{i=1}^n s^2(t_i, x_0)}. \quad (1.6)$$

Запишем выражение (1.6) в непрерывной форме. Будем считать, что количество точек отсчета неограниченно растет, т.е. они сближаются. При этом соответствующие суммы переходят в интегралы. В итоге в качестве меры различия сигналов  $s(t, x_0)$  и  $s(t, x)$  получим величину

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T [s(t, x_0) - s(t, x)]^2 dt, \quad (1.7)$$

где  $E_s$  — энергия сигнала при фиксированном значении информативного параметра  $x_0$ , соответствующего сообщению  $\lambda_0$ :

$$E_s(x_0) = \int_0^T s^2(t, x_0) dt. \quad (1.8)$$

Сравнивая выражения (1.3) и (1.8), видно, что длина вектора, изображающего сигнал, равна квадратному корню из его энергии. В практических задачах мера различия, определенная по (1.7), обычно является функцией разности  $\Delta x = (x_0 - x)$ .

Функция различия [1]  $\varepsilon(\Delta x)$  принимает только положительные значения, проходит при  $\Delta x = 0$  через нуль и возрастает (иногда немонотонно) с увеличением абсолютного значения аргумента  $\Delta x$ . Быстрое возрастание  $\varepsilon(\Delta x)$  от нуля с увеличением  $\Delta x$  показывает, что даже

малое изменение параметра  $x$  в образце сигнала приводит к резкому увеличению меры различия  $\varepsilon$ . Следовательно, это различие легко обнаружить и труднее исказить помехой. Сигналы с быстро нарастающей функцией различия  $\varepsilon(\Delta x)$  могут обеспечить передачу сообщений с меньшими искажениями. Таким образом, по виду этой функции можно судить о качестве используемого сигнала  $s(t, x)$ , как переносчика сообщения.

По характеру влияния параметра  $x$  на величину энергии сигнала  $E_s$  все методы модуляции, используемые в РТС, можно отнести к двум группам. К первой (*неэнергетической*) относятся те методы, при которых энергия сигнала не зависит от величины модулируемого параметра  $x$ . В эту группу входит большая часть практически используемых радиосигналов, при формировании которых в последней ступени модуляции не используется АМ, а также ряд сигналов с АМ в последней ступени, например: ВИМ – АМ. Ко второй группе (*энергетической*) относятся методы модуляции, при которых энергия сигнала  $E_s$  зависит от информативного параметра  $x$ . К таковым относятся сигналы АМ, АИМ – АМ, ШИМ – АМ и др.

Поскольку при использовании неэнергетических методов модуляции энергия сигнала  $E_s$  и соответственно длина вектора сигнала в (1.8), не зависят от параметра  $x$ , то, очевидно, его изменение влечет только поворот вектора сигнала. Таким образом, в случае неэнергетических методов модуляции концы сигнальных векторов, соответствующих разным значениям параметра  $x$ , лежат на поверхности  $n$ -мерной сферы радиуса  $\sqrt{E_s}$ . В цифровых РСПИ дискретному множеству значений параметра  $x$  и связанному с ним сообщению  $\lambda$  соответствует конечное множество изолированных точек на сфере (сигнальных векторов).

Для неэнергетической модуляции выражение функции различия  $\varepsilon(\Delta x)$  запишем в иной форме. Раскрывая квадрат в выражении (1.7), с учетом (1.8) получим

$$\varepsilon(\Delta x) = 2[1 - q(\Delta x)], \quad (1.9)$$

$$\text{где} \quad q(\Delta x) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0) \cdot s(t, x) dt. \quad (1.10)$$

Зависимость  $q(\Delta x)$  в теории РТС носит название *сигнальной функции* [1]. Из (1.10) следует, что модуль сигнальной функции не превышает единицы, т.е.  $|q(\Delta x)| \leq 1$ . Быстрое спадание функции  $q(\Delta x)$

с увеличением  $\Delta x = x_0 - x$  обусловлено таким поворотом сигнального вектора  $\mathbf{s} = \{s_i\}$  при изменении параметра от значения  $x_0$  к  $x$ , при котором резко увеличивается расстояние между сигналами. В этом случае приращение вектора сигнала вследствие добавления к нему вектора помехи приведет к меньшей ошибке при измерении параметра  $x$ .

Существуют сигналы, для которых функция  $q(\Delta x)$  уменьшается немонотонно и имеет выбросы, сравнимые с единицей. Это означает, что при некоторых значениях параметра  $x$  и соответственно сообщения  $\lambda$  концы сигнальных векторов, находящиеся на  $n$ -мерной сфере, сближаются в пространстве. Применение ВЧ-сигналов, сигнальная функция которых обладает подобным свойством, связано с опасностью появления больших (аномальных) ошибок при действии даже сравнительно малых помех.

В некоторых типах РТС радиосигнал содержит одновременно  $m$  различных сообщений, т.е. сообщение является векторной функцией  $\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$ . В этом случае возникает задача совместного измерения нескольких параметров радиосигнала. Очевидно, что при  $m = 2$  сигнальная функция для неэнергетического способа модуляции принимает следующий вид:

$$q(x_0, v_0, x, v) = (1/E_s) \int_0^T s(t, x_0, v_0) s(t, x, v) dt, \quad (1.11)$$

где  $x_0, v_0, x, v$  — значения двух модулируемых параметров радиосигнала, соответствующие двум значениям векторного сообщения  $\boldsymbol{\lambda}_0$  и  $\boldsymbol{\lambda}$ . Часто в практических задачах число переменных уменьшается до двух:  $\Delta x = x_0 - x$  и  $\Delta v = v_0 - v$ , т.е. функция (1.11) зависит фактически от разности аргументов.

Для РТС передачи и извлечения информации важным является частный случай, когда полезное сообщение, являясь двумерным, содержится во временном положении сигнала и в сдвиге его частотного спектра. В РЛ- и РН-системах это соответствует режиму одновременного определения дальности и скорости объекта путем совместного измерения времени задержки и доплеровского смещения частоты радиосигнала в месте приема. В системах мобильной радиосвязи подобная задача связана с необходимостью временной синхронизации приемника с одновременным слежением

за изменением несущей частоты радиосигнала, которое возникает при взаимном перемещении пунктов передачи и приема. Рассмотрим свойства сигнальной функции (1.10) в этом важном частном случае.

### 1.3.2. Частотно-временная корреляционная функция сигнала

Допустим, что немодулированный сообщением радиосигнал имеет вид (1.2)  $s(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi_0)$  и является узкополосным. Напомним, что в этом случае функции амплитудной  $S(t)$  и фазовой  $\Phi(t)$  модуляции изменяются во времени значительно медленнее, чем  $\cos(\omega_0 t)$ . Для сигнала такого типа отношение  $(\Delta\omega/\omega_0) \ll 1$ , где  $\Delta\omega$  — ширина спектра сигнала. Обращаясь к выражению (1.11), будем считать, что параметр  $x_0 = t_0$  и соответствует временному положению сигнала  $t_0$ ; параметр  $v_0 = \omega_0$ , т.е. соответствует несущей частоте. Запишем измененные значения параметров  $x = t_0 + \tau$  и  $v = \omega_0 - \Omega$ . Величина  $t_0$  зависит от начала отсчета времени. Не теряя общности дальнейших выводов, положим  $t_0 = 0$ . Отметим, что временное положение и частота узкополосного радиосигнала практически не влияют на его энергию. Получим в развернутой форме выражение функции (1.11).

Воспользуемся комплексным представлением сигнала в виде  $s(t) = \text{Re}[\dot{S}(t)e^{i\omega_0 t}]$ , где  $\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$  — комплексная огибающая сигнала. Для записи сигнальной функции в комплексном виде используем соотношение:

$$\text{Re}(i\dot{u})\text{Re}(i\dot{v}) = 0,5[\text{Re}(i\dot{u}\dot{v}) + \text{Re}(i\dot{v}\dot{u})],$$

где  $\hat{v}$  — комплексно-сопряженная величина. В справедливости приведенного соотношения для любых комплексных величин можно убедиться непосредственной проверкой.

В рассматриваемом частном случае обозначим сигнальную функцию символом  $k$ . Используя формулу (1.11), представим выражение сигнальной функции в виде

$$\begin{aligned}
k(\tau, \Omega) &= \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t - \tau); (\omega_0 - \Omega)] dt = \\
&= \frac{1}{2E_s} \int_0^T \operatorname{Re} \left[ S(t) e^{i\Phi(t)} e^{i\omega_0 t} S(t - \tau) e^{i\Phi(t-\tau)} e^{i(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)} \right] dt + \\
&+ \frac{1}{2E_s} \int_0^T \operatorname{Re} \left[ S(t) e^{i\Phi(t)} e^{i\omega_0 t} S(t - \tau) e^{-i\Phi(t-\tau)} e^{-i(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)} \right] dt. \quad (1.12)
\end{aligned}$$

При объединении показателей степени в подынтегральном выражении первого слагаемого получим сумму вида:

$$i[\Phi(t) + \Phi(t - \tau) + 2\omega_0 t - \Omega t - (\omega_0 - \Omega)\tau].$$

Интегрирование по переменной  $t$  с учетом свойства узкополосности сигнала и быстроосциллирующих сомножителей  $\cos(2\omega_0 t)$  и  $\sin(2\omega_0 t)$  дает результат для первого слагаемого близкий к нулю. Объединяя показатели степени во втором слагаемом, получим сумму:

$$i[\Phi(t) - \Phi(t - \tau) + \Omega t + (\omega_0 - \Omega)\tau].$$

Видно, что подынтегральная функция второго слагаемого не содержит высокочастотных знакопеременных сомножителей. Можно полагать, что результат интегрирования в (1.12) фактически определяет второе слагаемое и сигнальная функция имеет вид:

$$k(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{i\Omega t} dt \right] \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}. \quad (1.13)$$

В координатах  $(\tau, \Omega)$  сигнальная функция (1.13) представляет некоторую поверхность, которая вдоль оси  $\tau$  (при  $\Omega = 0$ ) имеет характер частых затухающих колебаний с периодом  $2\pi/\omega_0$ .

Вычисление интеграла в (1.13) дает функцию двух переменных —  $\tau$  и  $\Omega$ , причем она достаточно медленно изменяется по  $\tau$  в сравнении с  $\cos(\omega_0 t)$ . Фактически, выражение в квадратных скобках формулы (1.13) выполняет роль комплексной огибающей, и можно записать

$$k(\tau, \Omega) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{K}(\tau, \Omega) \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}, \quad (1.14)$$

где комплексная огибающая

$$\dot{K}(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{i\Omega t} dt = |\dot{K}(\tau, \Omega)| e^{i\Psi(\tau, \Omega)}. \quad (1.15)$$

Модуль  $|\dot{K}(\tau, \Omega)| = K(\tau, \Omega)$ , по существу, есть *огибающая сигнальной функции* (1.14),  $\Psi(\tau, \Omega)$  — *фаза сигнальной функции*.

Следует отметить, что в рассмотренном здесь частном случае *сигнальная функция*  $k(\tau, \Omega)$  является *частотно-временной корреляционной функцией* узкополосного сигнала (1.2). Сечение функции  $k(\tau, \Omega = 0) = k(\tau)$  является *временной автокорреляционной функцией* (АКФ) узкополосного ВЧ-сигнала.

Из (1.12) для временной АКФ получаем выражение

$$k(\tau) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt \quad (1.15a)$$

или в комплексной форме с учетом (1.13)–(1.15)

$$k(\tau) = \frac{1}{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right] \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right\} = \operatorname{Re} \left[ \dot{K}(\tau) \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right], \quad (1.16)$$

где  $\dot{K}(\tau) = \frac{1}{2E_s} \left[ \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right]$  — *комплексная огибающая автокорреляционной функции сигнала*.

Огибающую  $K(\tau, \Omega)$  функции (1.15) в литературе называют *функцией неопределенности* (ФН). Это название объясняется одним замечательным свойством данной функции, которое состоит в выполнении следующих равенств:

$$K(\tau = 0, \Omega = 0) = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau, \Omega) d\tau d\Omega = 1. \quad (1.16a)$$

Первое равенство есть следствие нормировки ФН (1.10), (1.11). Второе обусловлено тем, что переменные  $\tau$  и  $\Omega$  являются при преобразовании Фурье взаимосвязанными (сопряженными) переменными (доказательство данного свойства приведено, например, в [6]).

Напомним (п. 1.3.1), что *возможность* ВЧ-сигнала обеспечить высокую точность измерения параметров (в данном случае это время задержки  $\tau$  и частотный сдвиг  $\Omega$ ) при наличии помехи зависит от *крутизны спада сигнальной функции* (1.10) *вблизи точек*  $\tau = 0$  и  $\Omega = 0$ . Однако условие (1.16,а) означает, что объем, ограниченный поверхностью  $K^2(\tau, \Omega)$ , равен  $2\pi$ . Следовательно, произвольно сжимать функцию  $K(\tau, \Omega)$  нельзя. Другими словами, уменьшение

ширины ФН по переменной  $\tau$ , с целью увеличения точности измерения времени задержки сигнала, повлечет за собой ее расширение по переменной  $\Omega$  и, как следствие, — снижение точности измерения частоты сигнала. В этом состоит сущность известного *принципа неопределенности в радиолокации* [2, 6, 12].

Важно отметить, что аппаратная реализация возможности точного измерения параметров сигнала должна быть понята как *потенциальная возможность*. Ее достижение связано с применением особых (оптимальных) способов обработки сигналов, которые мы изучим в последующих разделах. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие параметры радиосигнала определяют характер функции  $K(\tau, \Omega)$  в окрестности ее главного максимума.

### 1.3.3. Ширина функции неопределенности вдоль осей время—частота

В инженерной практике важными являются следующие параметры сигнала: *энергия, длительность и ширина частотного спектра*. В соответствии с выражениями (1.2) и (1.8) запишем выражение энергии узкополосного ВЧ-сигнала конечной длительности

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \Phi(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos[2(\omega_0 t + \Phi(t))] dt.$$

Второй интеграл для реальных сигналов оказывается близким к нулю, так как подынтегральное выражение содержит быстроосциллирующий (знакопеременный) множитель. Учтем, что действительная огибающая  $S(t) = |\dot{S}(t)|$  и согласно равенству Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega,$$

где  $\dot{G}(\omega)$  — спектральная функция (преобразование Фурье) комплексной огибающей  $\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$  сигнала  $s(t)$ . Таким образом, энергия сигнала

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.17)$$

т.е. она зависит от вида функций  $|\dot{S}(t)|^2$  и  $|\dot{G}(\omega)|^2$ . Физический смысл соотношений (1.17) состоит в том, что полная энергия  $E_s$  непрерывно распределена по времени или по частоте (в спектральной области). В бесконечно малом интервале  $dt$  в момент времени  $t$  ее величина  $dE(t) = 0,5 S^2(t) dt$ ; в бесконечно малой полосе частот  $df = (1/2\pi)d\omega$  ее величина  $dE(f) = 0,5 |\dot{G}(f)|^2 df$ . Умножение на 0,5 обусловлено использованием комплексного представления сигналов: мнимая и действительная составляющие комплексной амплитуды сигнала имеют равные энергии и соответственно равноправны положительные и отрицательные частоты при спектральном представлении действительного сигнала.

Введем два параметра, которые характеризуют функции  $|\dot{S}(t)|^2$  и  $|\dot{G}(\omega)|^2$ : длительность сигнала  $\Delta T$  и ширину полосы частотного спектра сигнала  $\Delta\Omega$ . Математические выкладки выполняются наиболее просто, если начало отсчета времени и частоты поместить в точки, соответствующие «центрам масс» фигур, образуемых нормированными функциями

$$\frac{|\dot{S}(t)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt}, \quad \frac{|\dot{G}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.18)$$

В этом случае величины  $\Delta T^2$  и  $\Delta\Omega^2$  могут быть определены как меры рассеяния (дисперсии) соответствующих функций (1.18). В итоге получаем

$$\Delta T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt}, \quad \Delta\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.19)$$

Параметры  $\Delta T$  и  $\Delta\Omega = 2\pi \cdot \Delta F$  характеризуют рассеяние ВЧ-сигнала во времени и по частоте (относительно несущей  $\omega_0$ ).

По аналогии с соответствующей величиной в теории вероятностей, их называют *среднеквадратическими длительностью и полосой частот сигнала*. Эти параметры определяют помехоустойчивость и точность РТС различных типов при наличии помех. Заметим, что в энергетических расчетах чаще используют понятие эффективной длительности сигнала  $\Delta T_3$ , которое более наглядно. Величина  $\Delta T_3$  определяет энергию  $E_s = P\Delta T_3$ , где  $P$  — средняя мощность сигнала. Физически реальные сигналы имеют конечную энергию, поэтому для функций  $s(t)$  с конечной длительностью и соответственно с неограниченным по полосе частотным спектром,  $\Delta T_3$  равно фактической длительности сигнала  $T_s$ .

Если функция  $s(t)$  неограничена во времени и имеет конечную среднюю мощность, ее эффективную длительность определим иначе. Нормируем функцию  $s(t)$  и представим огибающую  $S(t) = \sqrt{2P} \cdot S_0(t)$ , где  $S_0(t)$  — нормированная огибающая, причем

$$\Delta T_3 = \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2(t) dt \text{ и, очевидно, } E_s = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = P \cdot \Delta T_3. \text{ Величину}$$

$\Delta T_3$ , измеряемую в единицах времени, иногда называют *интегральной длительностью сигнала*. Смысл этой величины для импульса гауссовой формы поясняет рис. 1.6, из которого следует, что  $\Delta T_3 = 2$  и равно основанию прямоугольника, площадь которого также равна двум. Конечно, величины  $\Delta T_3$  и  $\Delta T$  взаимосвязаны. Например, для радиоимпульса с прямоугольной огибающей, имеющей длительность  $\Delta T_3 = T_s$ , среднеквадратическая длительность  $\Delta T = \Delta T_3 / 2\sqrt{3}$ ; для радиоимпульса с гауссовой огибающей

$\Delta T = \Delta T_3 / \sqrt{2\pi}$  [8].

К числу основных характеристик сигнала относится величина  $B$  — *база сигнала*, равная произведению его среднеквадратичной длительности на

$$B = \Delta T \cdot \Delta F = \Delta T \cdot \Delta\Omega / 2\pi.$$

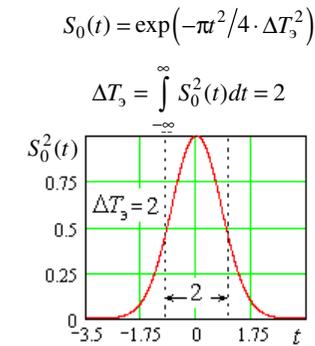


Рис. 1.6. Эффективная длительность  $\Delta T_3$  сигнала с нормированной огибающей  $S_0(t)$

среднеквадратичную ширину спектра

В теории сигналов показано [6], что для любых сигналов значение базы  $B \geq (1/4\pi)$ . Неравенство  $B \geq (1/4\pi)$  известно как «соотношение неопределенностей».

В зависимости от величины базы сигналы бывают *простые* и *сложные*. Для реальных сигналов с простой модуляцией  $B$  имеет порядок единицы и практически не зависит от способа определения их длительности и ширины спектра, у сложных — база  $B \gg 1$ . В отличие от минимального значения базы, ее максимальное значение теоретически не ограничено. Практические ограничения при использовании сигналов с большой базой связаны с аппаратной реализацией устройств формирования сложных сигналов. В настоящее время в РТС используются ЧМ- и ФМ-сигналы с величиной базы до десятков тысяч.

Рассмотрим параметрическое описание ФН, радиосигнала, содержащего сообщение в виде задержки  $\tau$  и частотного сдвига  $\Omega$ , т.е. найдем ее представление через параметры сигнала  $\Delta T$  и  $\Delta F$ . Если функцию  $|\dot{K}(\tau, F)|^2$  в окрестности точки  $(\tau = 0, F = 0)$  разложить в двойной ряд Тейлора и ограничиться членами не выше второго порядка (квадратичное приближение), то можно получить следующее соотношение [6, 8]:

$$|\dot{K}(\tau, F)|^2 \cong 1 - \Delta F^2 \cdot \tau^2 - 2\rho \cdot \tau F - \Delta T^2 \cdot F^2, \quad (1.20)$$

где  $F = \Omega/2\pi$ ;  $\rho$  — коэффициент частотно-временной связи:

$$\rho = \frac{2\pi}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} t\Phi'(t) |\dot{S}(t)|^2 dt. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует:  $\rho = 0$ , если сигнал не имеет фазовой модуляции, т.е.  $\Phi'(t) = 0$ . Для определения параметров, характеризующих ширину пика ФН, приравняем левую часть (1.20) уровню  $c^2$ . В итоге получим уравнение линии уровня. По форме оно совпадает с уравнением эллипса. Анализ показывает, что ширина эллипса вдоль оси временной задержки  $\tau$  и соответственно ширина центрального пика функции неопределенности вдоль оси  $\tau$  равна

$$\delta_\tau = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F}, \text{ при } c^2 = 0,75 \quad \delta_\tau = \frac{1}{\Delta F}. \quad (1.22)$$

Ширина эллипса (и значит ширина пика ФН) вдоль оси частот  $F$  составляет

$$\delta_F = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta T}, \quad \text{при } c^2 = 0,75 \quad \delta_F = \frac{1}{\Delta T}. \quad (1.23)$$

Величины  $\delta_\tau$  и  $\delta_F$ , определяя ширину главных сечений ФН, равны соответственно ширине огибающей временной и частотной АКФ сигнала по уровню  $c = \sqrt{0,75}$ . Эти два параметра играют важную роль при расчете потенциальных характеристик РТС.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. Уменьшение ширины главного пика ФН вдоль оси времени эквивалентно сужению огибающей временной автокорреляционной функции  $K(\tau)$  и возможно при расширении частотного спектра ВЧ-сигнала  $s(t)$ .

2. Для простых ВЧ-сигналов, имеющих базу  $B = \Delta T \cdot \Delta F \approx 1$ , расширение частотного спектра связано с уменьшением их длительности, что ведет (при постоянной мощности  $P$ ) к уменьшению энергии сигнала  $E_S \approx P\Delta T$  и возрастанию (в соответствии с принципом неопределенности) ширины главного пика ФН по оси частот.

3. Применение сложных сигналов ( $B \gg 1$ ) позволяет расширить частотный спектр сигнала при одновременном увеличении его длительности, что дает возможность повысить энергию сигнала без увеличения его мощности и уменьшить ширину пика ФН по оси частот.

### 1.3.4. Примеры функций неопределенности импульсных сигналов

Рассмотрим ФН типичных импульсных радиосигналов.

**Радиоимпульс с прямоугольной огибающей и простой модуляцией.** Представим сигнал, имеющий амплитуду  $S_0$ , начальную фазу  $\varphi_0$  и длительность  $T_S = \tau_n$ , в виде

$$s(t) = \text{Re} \left[ \dot{S}(t) e^{i\varphi_0 t} \right],$$

где  $\dot{S}(t) = S_0 e^{i\varphi_0} \text{rect} \left( \frac{t}{\tau_n} \right)$  и прямоугольная функция

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 0,5 \\ 0 & \text{при } |x| \geq 0,5 \end{cases}.$$

Введем нормировку  $S_0 = \sqrt{2}/\tau_n$ , что обеспечивает величину энергии

$$E_s = 0,5 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 dt = 1.$$

Радиоимпульс  $s(t)$  при  $\varphi_0 = \pi$ ,  $\tau_n = 1$  показан на рис. 1.7. Подставляя в (1.15) выражение его комплексной огибающей и выполняя интегрирование, получим ФН прямоугольного радиоимпульса в виде [2, 6]:

$$K(\tau, F) = \left| \dot{K}(\tau, F) \right| = \left| \left( \frac{\tau_n - |\tau|}{\tau_n} \right) \cdot \frac{\sin[\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n)]}{\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n)} \right| \quad \text{при } |\tau| < \tau_n. \quad (1.24)$$

На рис.1.8,а показана поверхность, соответствующая ФН (1.24). Вдоль оси временной задержки  $\tau$  ФН имеет конечную протяженность, что следует из способа образования корреляционной функции. Действительно, в (1.15) в подынтегральном выражении огибающая  $S(t)$  умножается на свою копию  $S(t-\tau)$ , сдвинутую по оси времени на  $\tau$ , и при  $|\tau| \geq \tau_n$  результат интегрирования равен нулю. На рис.1.8,б показаны проекции сечений  $K(\tau, F) = \text{const}$  на плоскость  $(F\tau)$  — линии уровня. Видно, что в области высокой корреляции (0,6–0,7 и выше) линии уровня близки к окружностям.

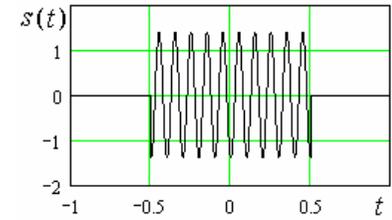


Рис. 1.7. Прямоугольный радиоимпульс  $s(t)$

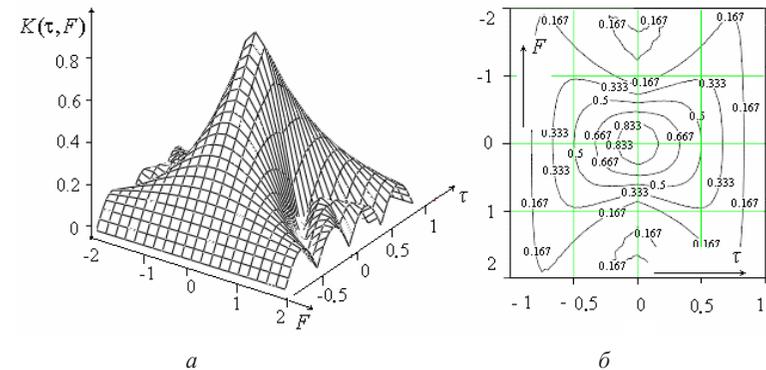


Рис. 1.8. Функция неопределенности прямоугольного радиоимпульса: а — поверхность ФН (огибающая частотно-временной корреляционной функции); б — линии уровня функции неопределенности

На рис. 1.9,а показаны сечения ФН:  $K(\tau) = K(\tau, F = \text{const})$  — огибающая временной корреляционной функции при различных значениях доплеровского сдвига. При  $F = 0$  получаем огибающую временной АКФ прямоугольного радиоимпульса, которая согласно (1.24) имеет вид

$$K(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \text{ при } \tau \in (-\tau_n, \tau_n). \quad (1.25)$$

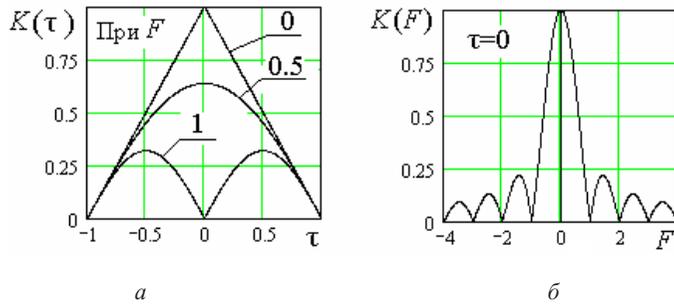


Рис. 1.9. Сечения огибающей частотно-временной корреляционной функции радиоимпульса ( $\tau_n = 1$ )

На рис. 1.9,б показано главное сечение ФН  $K(\tau = 0, F) = K(F)$  — огибающая частотной автокорреляционной функции прямоугольного радиоимпульса с простой модуляцией. Выражение для нее следует из (1.15) и имеет согласно (1.24) вид

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 e^{i2\pi Ft} dt \right| = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_n)}{\pi F \tau_n} \right|, \quad F \in (-\infty, \infty). \quad (1.26)$$

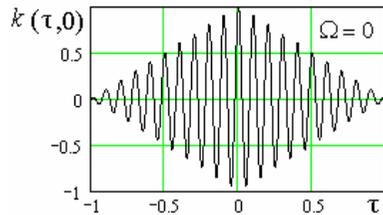


Рис. 1.10. Корреляционная функция прямоугольного радиоимпульса  $\tau_n = 1$

Соотношение (1.26) — преобразование Фурье от квадрата огибающей сигнала. Таким образом, частотная АКФ сигнала не зависит от его фазовой структуры и определяется только формой огибающей радиоимпульса.

На рис. 1.10 показана временная АКФ радиоимпульса, соответствующая выражениям (1.15а),

(1.16). Она является четной осциллирующей функцией с частотой сигнала  $\omega_0$  и имеет конечную длительность, вдвое превышающую длительность сигнала  $s(t)$ . Следует обратить внимание, что вблизи главного максимума функции  $k(\tau)$  расположены близкие по величине локальные максимумы, следующие через интервалы, равные периоду ВЧ-сигнала.

**Гауссов радиоимпульс с внутримпульсной линейной ЧМ.** Представим радиоимпульс с гауссовой огибающей и ЛЧМ в виде

$$s(t) = S_m \cdot e^{-k^2 t^2} \cos(\omega_0 t + bt^2 + \phi_0), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.27)$$

где  $S(t) = S_m \cdot \exp(-k^2 t^2)$  — огибающая радиоимпульса;  $S_m$  — значение огибающей в максимуме;  $k$  — параметр, определяющий длительность сигнала;  $b$  — параметр частотной модуляции.

Мгновенная частота сигнала (1.27) изменяется по линейному закону  $\omega(t) = \omega_0 + 2bt$ , где  $2b$  — скорость изменения частоты. При длительности импульса  $\Delta T$  и девиации частоты  $\Delta\omega_M$  скорость изменения частоты  $2b = \Delta\omega_M/\Delta T$ . Обычно ширина спектра сигнала с ЛЧМ равна девиации частоты, т.е.  $\Delta\Omega = \Delta\omega_M$ . Таким образом, база сигнала  $B = \Delta F \cdot \Delta T = 2b \cdot \Delta T^2/2\pi$ .

На рис. 1.11 показан сигнал с ЛЧМ для значений  $S_m = 1,3$ ,  $\phi_0 = 0$ ,  $k = 2 \text{ мкс}^{-1}$ ,  $b = 20 \text{ рад/мкс}$ . Расчет длительности сигнала по формуле (1.19) дает величину  $\Delta T = 1/2k = 0,25 \text{ мкс}$ , т.е.  $B \approx 0,4$ . Конкретные величины параметров заданы исключительно для удобства восприятия рисунков.

Подстановка в (1.15) комплексной амплитуды сигнала (1.27) дает выражение ФН в виде

$$K(\tau, F) = \exp \left\{ -0,5 \left[ k^2 \tau^2 + \frac{\pi^2}{k^2} \left( F + \frac{b\tau}{\pi} \right)^2 \right] \right\}, \quad \tau, F \in (-\infty, \infty). \quad (1.28)$$

Уравнению (1.28) соответствует гауссова поверхность, которая показана на рис. 1.12,а. На рис. 1.12,б показаны линии равного уровня. В данном случае их форма эллиптическая и это характерно для

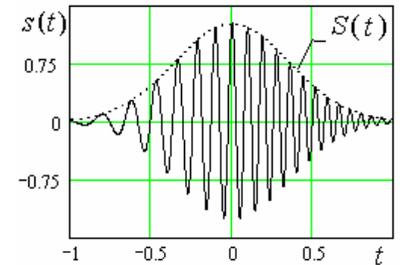


Рис. 1.11. Радиоимпульс гауссовой формы с ЛЧМ

сигналов с ЛЧМ. Рассмотрим главные сечения ФН, поскольку они определяют ширину эллипсов вдоль главных осей  $\tau$  и  $F$ . Из (1.28) при  $F = 0$  получаем огибающую временной АКФ гауссова радиоимпульса

$$K(\tau) = \exp\left[-0,5\left(k^2 + \frac{b^2}{k^2}\right)\tau^2\right]. \quad (1.29)$$

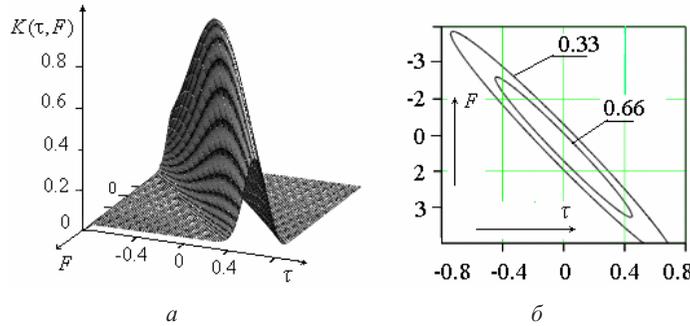


Рис. 1.12. Функция неопределенности радиоимпульса с гауссовой огибающей: а — поверхность неопределенности (огибающая частотно-временной корреляционной функции); б — линии уровня функции неопределенности

На рис. 1.13 функция  $K(\tau)$  показана в виде огибающей для АКФ  $k(\tau)$  радиосигнала, которая, как и сам сигнал, является высокочастотной (1.16). Необходимо отметить, что функция  $k(\tau)$  в отличие от сигнала  $s(t)$  не имеет фазовой модуляции.

Принципиально важным для построения оптимальных систем обработки сигналов является факт, состоящий в том, что огибающая  $K(\tau)$  оказывается более узкой, чем огибающая  $S(t)$  исходного радиоимпульса. Это видно визуально из сравнения рис. 1.11 и 1.13. Определим величину сжатия по времени функции  $K(\tau)$  по сравнению с  $S(t)$  в виде отношения  $k_{сж} = \Delta T / \Delta_\tau$ , где  $\Delta T$  и  $\Delta_\tau$  соответственно среднеквадратические длительности функций  $S(t)$  и  $K(\tau)$ . Как было указано выше,  $\Delta T = 1/2k$ . Вычисление длительности огибающей АКФ согласно (1.19) дает результат

$$\Delta_\tau = \frac{1}{k\sqrt{2\left(1 + \frac{b^2}{k^4}\right)}} = \frac{1}{k\sqrt{2(1 + 16\pi^2 B^2)}}. \quad (1.30)$$

В итоге коэффициент сжатия функции  $K(\tau)$ , равен

$$k_{сж} = \sqrt{0,5 + 8\pi^2 B^2}, \quad \text{при } B \gg 1 \quad k_{сж} \approx 2\pi B\sqrt{2}, \quad (1.31)$$

т.е. он фактически зависит только от базы сигнала. Для гауссова радиоимпульса с простой модуляцией база  $B = \Delta T \cdot \Delta F = 1/4\pi$  [6]. Согласно (1.31) в этом случае  $k_{сж} = 1$  (сжатие отсутствует). В примере  $B \approx 0,4$  и  $k_{сж} \approx 3,6$ . В РТС применяются сигналы с базой до десятков тысяч.

Второе главное сечение ФН, соответствующее огибающей частотной АКФ, получаем из (1.28). При  $\tau = 0$  имеем:

$$K(F) = |\dot{K}(\tau = 0, F)| = \exp\left[-0,5\frac{\pi^2 F^2}{k^2}\right]. \quad (1.32)$$

Как и должно быть, ширина этой функции зависит только от длительности радиоимпульса (параметр  $k$ ); наличие любой ЧМ не изменяет ее вид, поскольку  $K(F)$  связана взаимным Фурье-преобразованием с функцией  $|\dot{S}(t)|^2$  (1.26), которая не учитывает фазовый множитель комплексной огибающей. Функция (1.32) имеет также гауссову форму и показана на рис. 1.14. Среднеквадратичная ширина функции  $K(F)$ , вычисленная по (1.19), дает результат

$$\Delta_F = k\sqrt{2}. \quad (1.33)$$

Из (1.33) следует, что чем протяженнее радиосигнал, тем уже главный пик ФН по оси доплеровского сдвига частоты.

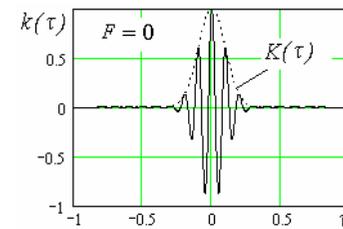


Рис. 1.13. Временная АКФ сигнала  $s(t)$  с ЛЧМ.  $K(\tau)$  — огибающая АКФ

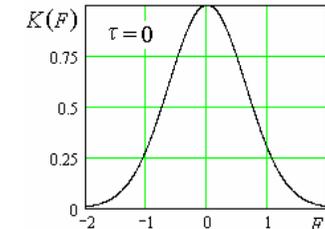


Рис. 1.14. Огибающая частотной АКФ сигнала  $s(t)$  с ЛЧМ

**Прямоугольный радиоимпульс с фазокодовой модуляцией.** Расширение частотного спектра радиоимпульса при заданной длительности возможно как с помощью внутриимпульсной ЧМ, так и ФКМ.

Относительная простота фазового кодирования сигналов и преимущества, связанные с постоянством амплитуды при генерации и усилении сигналов, обеспечили ФМ-импульсам широкое применение. Радиопульс прямоугольной формы с ФКМ можно задать в виде

$$s(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad 0 \leq t \leq n\Delta, \quad (1.34)$$

где  $n\Delta = \tau_n$  — длительность импульса, составленного из  $n$  парциальных импульсов, имеющих ширину  $\Delta$  и начальную фазу  $\varphi_i$ ; функция

$$P_i(t) = \begin{cases} P[t - (i-1)\Delta] = 1, & (i-1)\Delta \leq t \leq i\Delta, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (1.35)$$

Наибольшее применение получили ФКМ-сигналы, фазы которых могут принимать только два значения: 0 или  $\pi$  (бинарные коды). Если в сигнале используется большее число значений фаз  $\varphi_i$  в пределах  $(0; 2\pi)$ , то такие сигналы называются *многофазными*. Учитывая, что изменение фазы на  $\pi$  приводит к перемене знака ВЧ-заполнения на противоположный, сигнал (1.34) с бинарным фазовым кодом имеет вид

$$s(t) = \Pi(t) \sin(\omega_0 t), \quad (1.36)$$

где  $\Pi(t)$  — последовательность (импульсно-временной код), состоящая из  $n$  единичных положительных и отрицательных импульсов. На рис. 1.15,а показан радиопульс с бинарным фазовым кодом Баркера ( $n = 7$ ) и соответствующая ему модулирующая последовательность  $\Pi(t)$ . Кодовую последовательность символов можно условно записать в виде: +1+1+1-1-1+1-1 (рис. 1.16).

Определим главное сечение ФН при  $\Omega = 0$ , т.е. функцию  $K(\tau)$ . Если согласно формуле (1.15а) перемножить две сдвинутые по времени на величину  $\tau$  функции вида (1.36) и выполнить интегрирование (рис 1.16,а), то получим, как и в случае одиночного прямоугольного радиопульса (см. рис. 1.9,а), огибающую АКФ треугольного вида. Существенное отличие будет в том, что для сигнала с ФКМ функция  $K(\tau)$  будет иметь 7 (по числу парциальных импульсов) максимумов (лепестков). Максимум главного лепестка ( $\tau = 0$ ) при отсутствии в (1.15а) нормировки, равен  $nE_1 = 7E_1$ , где  $E_1$  — энергия парциального импульса длительностью  $\Delta$ . Максимумы шести боковых лепестков одинаковы и равны  $E_1$ . Эти лепестки получатся при сдвиге  $\tau$ , кратном  $2\Delta$ , когда число совпадающих по фазе  $\varphi_i$  парциальных им-

пульсов равно 1. В нормированном виде АКФ показана на рис. 1.16,б. Ее протяженность в силу конечной длительности сигнала равна  $2\tau_n$ .

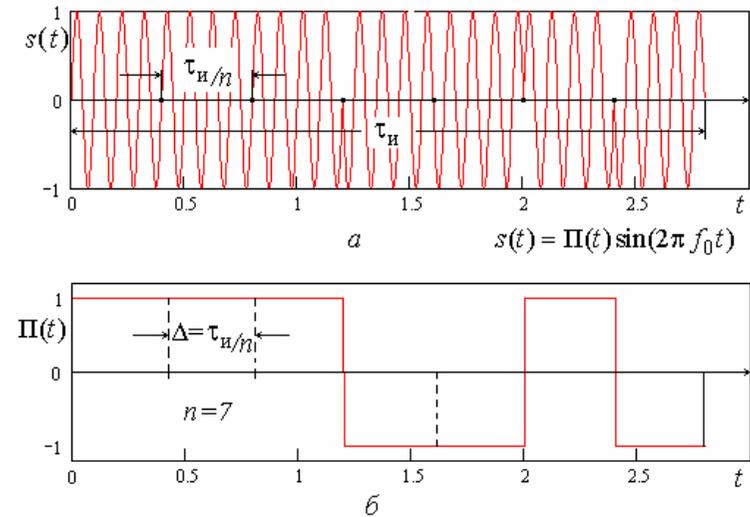


Рис. 1.15. Радиопульс с ФКМ (а);  $\Pi(t)$  — функция модуляции (манипуляции) фазы (б)

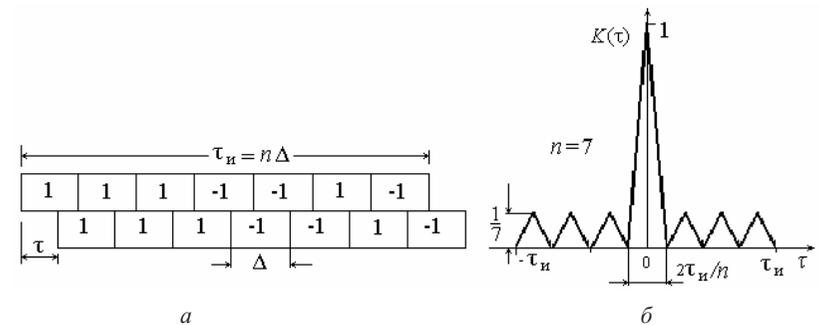


Рис. 1.16. Главное сечение  $K(t, \omega = 0) = K(\tau)$  ФН радиопульса с ФКМ: а — условное изображение двух копий сигнала; б — огибающая временной АКФ-сигнала

Сравним АКФ  $K(\tau)$  (см. рис. 1.9,а) сигнала с простой модуляцией и прямоугольной огибающей с АКФ аналогичного по длительности, но сложного сигнала с ФКМ (см. рис. 1.16,б). Видно, что ширина

(по первым нулям) второй из них равна  $2\tau_n/n$ , а первой —  $2\tau_n$ . Таким образом, АКФ  $K(\tau)$  сигнала с ФКМ сжимается в  $n = 7$  раз по сравнению с длительностью сигнала. Если учесть, что ширина спектра сложного сигнала с ФКМ  $\Delta F \approx 1/\Delta$  и его длительность  $\Delta T \approx n \cdot \Delta$ , то база сигнала  $B = \Delta F \cdot \Delta T \approx n$ , т.е. равна коэффициенту сжатия.

При практическом применении ФКМ-сигналов важно обеспечить требуемый уровень боковых лепестков ФН. Как показано выше, он зависит от числа парциальных импульсов и равен  $1/n$ . Таким свойством обладают и другие коды Баркера [6]. Они могут быть построены только для  $n \leq 13$ . Для получения больших  $n$  применяют другие коды (в частности,  $M$ -последовательности), у которых ФН (главное сечение при  $\Omega = 0$ ) в промежуточных точках не превышает  $1/\sqrt{n}$ . Известны  $M$ -последовательности, у которых число элементов несколько десятков тысяч.

При больших  $n = \tau_n/\Delta$  ФКМ-сигнал имеет высокую информативность и вместе с этим высокую надежность — малый уровень боковых лепестков, что позволяет однозначно различать сигналы, отличающиеся друг от друга большими сдвигами по времени.

Второе главное сечение ФН  $K(F)$  — огибающая частотной АКФ сигнала, как было показано выше, не зависит от фазовой структуры ВЧ-сигнала и определяется как Фурье-преобразование от квадрата модуля комплексной огибающей радиосигнала (1.26). Таким образом, для сигнала с ФКМ и огибающей прямоугольной формы, получаем

$$K(F) = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_n)}{\pi F \tau_n} \right|, \text{ при } F \in (-\infty, \infty).$$

Ширина этой функции по первым нулям равна  $2/\tau_n$  (см. рис. 1.9,б). Например, при  $\tau_n = 10$  мс имеем  $2/\tau_n = 200$  Гц и, если  $n = 10^4$ , то  $\Delta = \tau_n/n = 2$  мкс; автокорреляционная функция  $K(\tau)$  такого сигнала в  $10^4$  раз уже, чем АКФ, равного по длительности сигнала без ФКМ.

Рассмотрим статистические свойства типовой случайной помехи, такой как собственный шум приемно-усилительных устройств.

#### 1.4. Стационарная случайная помеха с гауссовым распределением вероятностей. Белый шум

Увеличению достоверности и скорости передачи информации в системах связи и точности измерения координат объектов в РЛ-и РН-системах препятствуют три фактора: 1) неизбежное наличие внешних и внутренних помех; 2) искажения сигналов при распространении радиоволн; 3) техническое несовершенство устройств.

Улучшение параметров радиоэлементов и применение цифровой техники существенно снизили влияние последнего фактора. Внешние помехи поступают на вход приемника вместе с полезным сигналом. Они возникают как следствие естественных электромагнитных процессов, происходящих в атмосфере, ионосфере и космосе, а также в результате преднамеренных действий противника по созданию помех (пассивные отражатели и генераторы помех).

Наряду с внешними помехами имеются другие, внутренние, которые возникают в различных элементах передающих и приемных устройств. К ним относятся флуктуационные шумы ламп, полупроводниковых приборов и сопротивлений потерь, нестабильности напряжений питания, микрофонный эффект и др. Конкретный вид помех зависит от условий, в которых работает РТС. Однако общим и характерным является наличие собственного флуктуационного шума приемника и теплового шума пространства, окружающего приемную антенну. Эти шумы аддитивно смешиваются с полезным сигналом на входе приемника.

Полное статистическое описание случайной помехи  $x(t)$  предполагает задание  $n$ -мерной совместной плотности распределения вероятностей (ПРВ)  $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ , где  $x(t_i) = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — значение помехи в момент времени  $t_i$ . Во многих практически важных случаях помеха может рассматриваться как *случайный стационарный процесс (ССП) с гауссовым распределением вероятностей*. Напомним кратко вероятностный смысл этих понятий.

Свойство стационарности случайного процесса состоит в том, что вид функции ПРВ  $W(\cdot)$  не изменяется при произвольном переносе начала отсчета времени. Другими словами ПРВ не изменится, если все моменты времени сместить на произвольную величину  $\Delta t$ . Это означает, что одномерная ПРВ  $W(x_i; t_i) = W(x)$  не зависит от времени, т.е. в любой (один) момент времени случайный процесс  $x(t)$  имеет одинаковые вероятностные свойства. Средние по множеству

реализаций значение помехи (математическое ожидание), и ее мощность равны соответственно

$$\mathbf{M}[x(t)] = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \text{const},$$

$$\mathbf{M}[x^2(t)] = \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2W(x)dx = \text{const},$$

т.е. они не изменяются во времени. Помеха, действующая на вход приемных устройств РТС, в большинстве случаев не имеет постоянной составляющей, т.е. ее среднее значение  $\overline{x(t)} = 0$ . Далее это условие будем считать выполненным.

Одномерная ПРВ не позволяет описать характер развития процесса во времени (скорость его изменения и соответственно спектральные свойства). Для этого необходимо привлечь хотя бы двумерную ПРВ, которая для ССП зависит не от двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , а от их разности  $t_1 - t_2 = \tau$ , причем знак  $\tau$  не имеет значения. Таким образом, автокорреляционная функция (АКФ) стационарной помехи со средним значением, равным нулю, есть

$$K_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1) \cdot x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = K_x(\tau). \quad (1.37)$$

Случайный процесс называют *гауссовым* или *нормальным*, если ПРВ произвольного порядка имеет вид квадратичной экспоненты. Одномерная ПРВ в этом случае равна

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.38)$$

где  $\sigma$  — среднеквадратическое значение помехи (эффективное значение переменной составляющей процесса). Двумерная ПРВ представляет собой гауссову поверхность

$$W(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - k_x^2(\tau)}} \exp[-0,5Q(x_1, x_2; \tau)], \quad (1.39)$$

где  $k_x(\tau) = K_x(\tau)/\sigma^2$  — нормированная автокорреляционная функция помехи; квадратичная форма в показателе экспоненты имеет вид

$$Q(x_1, x_2; \tau) = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2k_x(\tau) + x_2^2}{\sigma^2[1 - k_x^2(\tau)]}. \quad (1.40)$$

В  $n$ -мерном случае форма (1.40) имеет аналогичную структуру: содержит в числителе вторые степени всех переменных  $x_i$ , а также перекрестные слагаемые вида  $2a_{ij}x_i x_j$ , где  $a_{ij}$  — коэффициенты, определяемые видом АКФ; знаменатель равен некоторой постоянной величине, определяемой конкретным выбором  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Таким образом, для задания  $n$ -мерной ПРВ гауссовской помехи достаточно знания АКФ помехи  $K_x(\tau)$ .

Нормальный стационарный случайный процесс имеет несколько примечательных свойств.

1. Статистические свойства процесса полностью и однозначно определены заданием его АКФ, так как знание  $K_x(\tau)$  позволяет записать  $n$ -мерную ПРВ.

2. Статистическая независимость совокупности отсчетов  $x_i$  гауссовского процесса в  $n$ -моментах времени следует из соотношения  $k_{ij} = k(t_j - t_i) = \overline{x_i x_j} = 0$  для  $i, j = 1, \dots, n$ . Для  $n = 2$  этот вывод следует из сопоставления (1.38) и (1.39). Действительно, если при некотором  $\tau$  функция  $k_x(\tau) = 0$ , то  $W(x_1, x_2) = W(x_1) \cdot W(x_2)$ , а это есть условие статистической независимости случайных величин  $x_1$  и  $x_2$ . Таким образом, совместная ПРВ системы  $n$  взаимно некоррелированных гауссовских случайных величин равна

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1) \cdot W(x_2) \cdots W(x_n) = \prod_{i=1}^n W(x_i). \quad (1.41)$$

Подставляя в (1.41) выражение одномерной ПРВ из (1.38), получим

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right]. \quad (1.42)$$

3. При линейном преобразовании гауссовского процесса свойство гауссовости сохраняется, изменяется только вид АКФ  $K_x(\tau)$ .

Особое место нормальных процессов в задачах синтеза и анализа РТС обусловлено тем, что реальные радиопомехи и, в частности, собственный шум приемно-усилительных устройств, образуются в результате суперпозиции большого числа случайных элементарных колебаний. В итоге вероятностные свойства суммарного процесса в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей удовлетворительно согласуются со свойствами гауссовского процесса. Напомним, что смысл упомянутой теоремы сводится к утверждению

асимптотической нормальности суммы случайных слагаемых с произвольными ПРВ по мере увеличения их числа [5].

Спектральные методы анализа воздействия помех на характеристики РТС основаны на известной теореме Винера-Хинчина, в соответствии с которой для АКФ стационарного случайного процесса справедлива пара преобразований Фурье

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \text{и} \quad G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (1.43)$$

где  $G_x(\omega)$  — спектральная плотность мощности помехи. Физическую единицу измерения этой функции можно установить, записав соотношение для средней мощности помехи  $K_x(0) = \sigma^2$  в ваттах.

Из (1.43) получаем  $K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega$ , т.е. подынтегральное выражение  $(1/2\pi)G(\omega)d\omega$  имеет смысл средней бесконечно малой мощности в полосе  $df$  вблизи частоты  $f$ . Следовательно, функцию  $G_x(f)$  измеряется в ваттах на герц или джоулях, поэтому функцию  $G_x(\omega)$  называют также *энергетическим спектром помехи* или коротко — *спектром помехи*. Физический смысл этого понятия следует из того, что ССП  $x(t)$  состоит из непрерывного множества гармонических составляющих со случайными амплитудами и фазами, их средняя мощность в полосе  $df$  вблизи частоты  $f$  равна  $G_x(f)df$ .

Рассмотрим стационарную помеху, спектр которой можно считать почти постоянным вплоть до некоторой верхней частоты  $\omega_b = 2\pi f_b$ , вблизи которой спектр падает до нуля. Зададим такой спектр соотношениями

$$G_x(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad |\omega| \leq \omega_b; \quad G_x(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_b, \quad (1.44)$$

где  $N_0$  — спектральная плотность помехи. С помощью (1.43) найдем АКФ

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 \omega_b}{2\pi} \left[ \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau} \right]; \quad K_x(0) = \sigma^2 = \frac{N_0 \omega_b}{2\pi}. \quad (1.45)$$

На рис. 1.17, 1.18 представлены спектр и АКФ помехи для следующих значений параметров:  $N_0 = 10^{-8}$  Дж;  $f_b = 100$  МГц.

Корреляционная функция при  $\tau = 0$  имеет пик, величина которого равна средней мощности помехи. Функция  $K_x(\tau)$ , осциллируя, уменьшается по величине примерно как  $1/\tau$ . Из формулы (1.45), и это под-

тверждает рис. 1.18, следует, что случайные отсчеты помехи  $x(t_i) = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), соответствующие моментам времени  $t_i$ , которые разделены промежутками, кратными  $\Delta t = \pi/\omega_b$ , строго не коррелированы. В приведенном примере  $\Delta t = 1/(2f_b) = 0,005$  мкс.

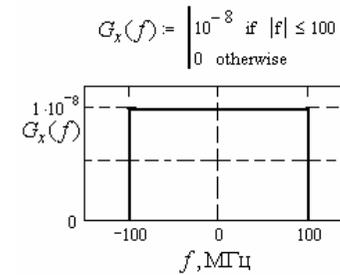


Рис. 1.17. Энергетический спектр шума с ограниченной полосой частот

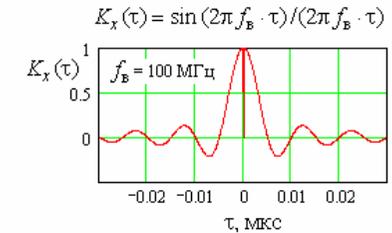


Рис. 1.18. Автокорреляционная функция шума с ограниченной полосой частот

В инженерных расчетах особое значение имеет предельный случай, когда  $f_b \rightarrow \infty$ . Практически эта ситуация возникает, когда верхняя частота помехи  $f_b$  много больше частот сигналов, на которые рассчитана РТС. Для предельного случая АКФ помехи

$$K_x(\tau) = \lim_{\omega_b \rightarrow \infty} \left[ \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{i\omega\tau} d\omega \right] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (1.46)$$

где  $\delta(\tau)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Помеха, имеющая АКФ вида (1.46), называется «белым шумом». Таким образом, у белого гауссова шума любые два сколь угодно близких по времени значения не коррелированы и, следовательно, статистически независимы.

В приемных устройствах на частотах выше 30–50 МГц собственный шум превышает уровень внешних естественных помех. Его мощность

$$P_{ш} = \sigma^2 = kT \cdot \Delta F_3 k_{ш},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $T$  — температура в градусах Кельвина;  $k_{ш}$  — коэффициент шума приемника;  $\Delta F_3$  — эффективная полоса пропускания приемника. Допустим, в РЛС используется импульсный сигнал со сложной модуляцией: база  $B = 10^4$ ;  $\tau_{и} = 1$  мс;  $k_{ш} = 3$ . Тогда полоса  $\Delta F_3 \approx 10$  МГц и мощность шума на входе приемника

$$P_{ш} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7 \cdot 300 \cdot 3 \approx 12,5 \cdot 10^{-14} \text{ Вт.}$$

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ В РТС

### 2.1. Радиоканал и его свойства

Условия функционирования любой РТС предполагают наличие радиоканала или среды распространения радиоволн (РРВ). Средой распространения радиоволн могут быть атмосфера, моря и океаны, а также недра Земли. Характер и условия РРВ в канале существенно зависят от частотного диапазона и физических свойств среды. Например, радиосвязь на больших расстояниях между объектами, находящимися под водой, осуществляется в сверхдлинном диапазоне волн ( $\lambda \geq 10$  км), что связано с их малым затуханием в канале. Это приводит к ряду ограничений на возможность достижения требуемых тактико-технических характеристик радиосистем в этом диапазоне. В частности, снижается скорость передачи информации. Невозможно применение остронаправленных антенн и, следовательно, определение координат объектов из одного пункта.

Широкий класс РТС используют радиоканал «Земля — Космос». Это системы передачи данных на борт космических аппаратов, РЛС измерения параметров орбиты, спутниковые системы, обеспечивающие навигацию объектов на Земле, системы обзора (мониторинга) земной поверхности, работающие в оптическом, тепловом и радиодиапазоне волн. Среда РРВ для этого класса РТС включает тропосферу, стратосферу, ионосферу и часть космического пространства.

Электрофизические свойства среды РРВ не остаются постоянными, они изменяются в пространстве и во времени. Известно, что диэлектрическая и магнитная проницаемости тропосферы и ионосферы зависят от активности Солнца и погодных условий. В итоге параметры радиоволны на выходе радиоканала, ее амплитуда, фаза, частота, состояние поляризации испытывают случайные пространственно-временные изменения (вариации). Причем эти изменения вычислить заранее и полностью исключить невозможно, поскольку они имеют случайный характер.

В тропосферных радиоканалах типа «Земля — Земля» или «Земля — Воздух» свойства волны в месте приема зависят от подстилающей поверхности (суши или моря), профиль и параметры которой также случайны. Отражения от поверхности существенно осложняют работу корабельных и самолетных РТС связи и локации, использующих

УКВ ( $1 \text{ см} \leq \lambda \leq 1 \text{ м}$ ). Проблема обнаружения и измерения координат объектов с малой отражательной способностью на фоне мешающих отражений от земли, моря или облаков является актуальной задачей теории и практики разработки бортовых РЛС. Свойства подстилающей поверхности оказывают также влияние на точность и дальность действия РТС связи и навигации, использующих длинные, средние и короткие волны.

На рис. 2.1 в качестве примера схематически показаны два типа радиоканалов — канал, характерный для РТС передачи информации, и — для измерительных РЛ- и РН-систем (РТС извлечения информации), когда передатчик и приемник совмещены в одном пункте. В последнем случае сам объект РЛ-наблюдения также входит в состав канала. Данный пример не исчерпывает всего разнообразия типов радиоканалов.



Рис. 2.1. Структура типичных радиоканалов: для РТС передачи информации (а); для измерительных РТС (б). ПРД — передатчик; ПРМ — приемник

Характер и степень искажения радиоволн при распространении в каналах зависят как от свойств сигнала (частоты, длительности, ширины спектра), так и от типа канала РРВ. При всем многообразии типов радиоканалов и физических явлений, происходящих в них при РРВ, следует обратить особое внимание на возможную зависимость (в некоторых средах) показателя преломления от частоты. В канале, обладающем таким свойством, возникает *дисперсия волн*. Ее суть в том, что скорость распространения фазового фронта *монохроматической волны* (фазовая скорость) оказывается зависящей от частоты. В итоге различные спектральные составляющие волнового пакета

(импульса) при распространении в пространстве получают фазовые сдвиги, которые нелинейно зависят от их частоты. В этом случае скорость переноса энергии — *групповая скорость* не равна фазовой и происходит искажение огибающей пакета — закона модуляции сигнала. Степень искажений возрастает при увеличении ширины спектра сигнала и длины трассы РРВ. Ионосфера, водная среда, различные виды грунтов являются *диспергирующими каналами*.

С точки зрения достижения наилучшей помехоустойчивости и достоверности передачи информации в системах связи, а также точности измерения координат объектов РЛ- и РН-системами важно знать статистические свойства сигнала на входе приемника и правильно их учесть при построении РТС. Рассмотрим в самом общем виде подход к обоснованию вероятностной модели радиоканала [10].

В рассуждениях будем иметь в виду каналы РРВ, в которых явление дисперсии практически отсутствует. К таковым относятся, в частности, тропосферный канал, который используется различными по назначению типами РТС.

Реальная тропосфера представляет собой радиоканал со случайными неоднородностями, в качестве которых выступают неоднородности индекса коэффициента преломления воздуха. При обосновании математических моделей сигналов на выходе каналов часто применяется феноменологический подход к задаче распространения волн, базирующийся на лучевых представлениях. Наличие неоднородностей в среде вызывает рассеяние волн. Каждый отдельный луч соответствует пути, по которому волна распространяется и достигает приемной антенны. Если каждый луч прежде, чем попасть в область приема, испытывает более чем одно взаимодействие с неоднородностью, то происходит *многократное рассеяние*.

Вероятностные характеристики параметров волны на входе приемной антенны и сигнала на ее выходе можно получить, если представить модель канала в виде конечного набора пространственно-временных фильтров со случайными комплексными коэффициентами передачи  $\dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r})$ , где  $i$  — номер парциального фильтра;  $t$  — время, и это означает зависимость коэффициента передачи от времени;  $\omega$  — частота, что означает неравномерность частотной характеристики фильтра, т.е. в общем случае его импульсная реакция не является  $\delta$ -функцией;  $\mathbf{r}$  — вектор пространственных координат, т.е. коэффициент передачи «вдоль  $i$ -го луча» зависит от ориентации луча в простран-

стве и положения точки приема. В некоторых случаях можно не учитывать эффекты многократного рассеяния. *Однократному рассеянию соответствует модель параллельного распространения волн*. Структура модели радиоканала для этого случая показана на рис. 2.2. При многократном рассеянии волн механизм образования поля в месте приема более сложный.

Структура модели канала показана на рис. 2.3. В общем случае существует последовательно-параллельный механизм формирования поля в месте приема. В частном случае, например, в оптических каналах связи и локации можно допустить, что атмосфера проявляет себя как последовательность линз со случайно меняющимися свойствами. Очевидно, и это подтверждают эксперименты, что модель с последовательным механизмом (рис. 2.3,а) в этом случае более оправдана.

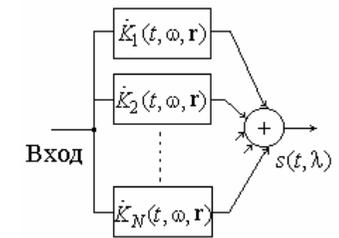


Рис. 2.2. Структура многолучевого радиоканала с однократным рассеянием

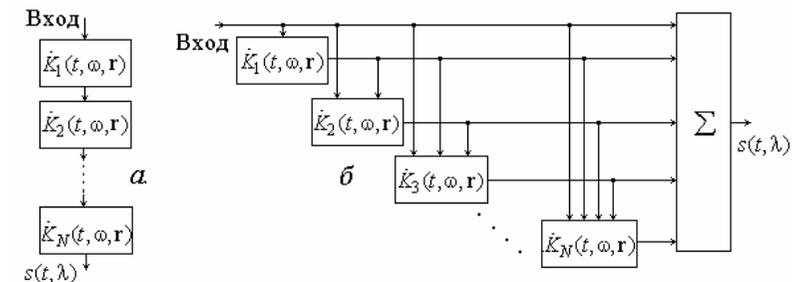


Рис. 2.3. Модель многолучевого радиоканала с многократным рассеянием: канал с последовательным механизмом распространения передаваемых сигналов (а); с последовательно-параллельным механизмом (б)

В инженерных задачах обычно ограничиваются заданием вероятностной модели канала в виде одномерных распределений вероятностей и корреляционных свойств сигнала  $s(t, \lambda)$  на входе приемника. При обосновании вероятностной модели [10] полагают, что число рассеивателей  $N$ , формирующих суммарный сигнал, велико. Для модели с однократным рассеянием (см. рис. 2.2) общий коэффициент передачи канала

$$\dot{K}_\Sigma(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N K_{x_i}(t, \omega, \mathbf{r}) + i \sum_{i=1}^N K_{y_i}(t, \omega, \mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где два слагаемых являются действительной и мнимой составляющими (квадратурами) комплексного коэффициента передачи канала. При однократном рассеянии лучи на приеме могут рассматриваться как независимые и примерно равные по своему вкладу в общий сигнал. Тогда при достаточно большом  $N$  выполняются условия центральной предельной теоремы, согласно которой *совместное распределение квадратурных составляющих комплексного коэффициента передачи является гауссовым*.

При многократном рассеянии и структуре модели канала, соответствующей рис. 2.3,а, представим коэффициент передачи  $l$ -го парциального фильтра в виде  $\dot{K}_l = \gamma_l \cdot e^{i\theta_l} = e^{\mu_l} \cdot e^{i\theta_l}$ , т.е.  $\mu_l = \ln(\gamma_l)$ , где  $\gamma_l$  — коэффициент передачи парциального фильтра по амплитуде;  $\theta_l$  — сдвиг фазы в  $l$ -м фильтре. Тогда общий коэффициент передачи канала

$$\dot{K}_\Sigma(t, \omega, \mathbf{r}) = \prod_{l=1}^N \dot{K}_l(t, \omega, \mathbf{r}) = e^{\sum_{l=1}^N \mu_l} \cdot e^{i \sum_{l=1}^N \theta_l} = \gamma e^{i\theta}, \quad (2.2)$$

где  $\ln(\gamma) = \sum_{l=1}^N \mu_l$  — логарифм модуля коэффициента передачи канала;

$\theta = \sum_{l=1}^N \theta_l$  — общий сдвиг фазы в канале. Как и ранее, при  $N \rightarrow \infty$

можно ожидать выполнения условий центральной предельной теоремы. Таким образом, случайные величины  $\ln(\gamma)$  и  $\theta$  должны иметь гауссово распределение вероятностей. Экспериментальные исследования в ряде случаев достаточно хорошо подтверждают эти предположения.

## 2.2. Полезный сигнал на выходе радиоканала

Комплексный коэффициент передачи канала  $\dot{K}(\omega, t, \mathbf{r})$ , являясь случайной функцией частоты, времени и пространства, определяет характер и степень искажений электромагнитного поля в месте приема и соответственно радиосигнала на выходе приемной антенны. Боль-

шое значение для определения искажений временной и частотной структуры сигнала имеют корреляционные свойства радиоканала. Их удобно характеризовать интервалами корреляции канала по частоте  $\Delta F_{\text{корр}}$ , по времени  $\Delta \tau_{\text{корр}}$  и по пространству  $\Delta \rho_{\text{корр}}$ .

В общем случае в многолучевом канале искажения сигнала бывают двух типов. Во-первых, происходит *рассеяние импульсного сигнала во времени* — длительность импульса увеличивается. Причина этого явления связана с конечной полосой частот  $\Delta F_{\text{корр}}$  и нелинейностью фазочастотной характеристики. Память канала, как и обычного линейного фильтра, равна примерно  $\Delta T_{\text{кан}} \approx 1/\Delta F_{\text{корр}}$ . Таким образом, при длительности сигнала на входе канала  $\Delta T$  его длительность на

выходе составит  $\Delta T_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta T^2 + \Delta T_{\text{кан}}^2}$ . Во-вторых, вследствие перемещения неоднородностей во времени происходит модуляция сигнала и, значит, расширение его спектра (*рассеяние сигнала по частоте*). Величина расширения спектра  $\Delta f_{\text{кан}} \approx 1/\Delta \tau_{\text{корр}}$ , т.е. чем больше интервал временной корреляции, тем медленнее вариации амплитуды и фазы и тем менее выражено расширение частотного спектра. Таким образом, при ширине спектра сигнала на входе канала  $\Delta F$  его шири-

на на выходе составит  $\Delta F_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta F^2 + \Delta f_{\text{кан}}^2}$ . Рассмотрим несколько типичных моделей сигнала на входе приемника РТС.

### 2.2.1. Модель сигнала в однолучевом канале

Рассмотрим условия, при которых радиоканал можно рассматривать как однолучевой [10].

1. При выполнении условий  $\Delta T \gg \Delta T_{\text{кан}}$ , т.е.  $\Delta T \cdot \Delta F_{\text{корр}} \gg 1$ , а  $\Delta F \gg \Delta f_{\text{кан}}$ , что равносильно  $\Delta F \Delta \tau_{\text{корр}} \gg 1$ , частотная и временная структура сигнала остаются неизменными. Модель канала при этом учитывает только один «путь распространения», что соответствует *однолучевой модели канала*. Таким образом, полезный сигнал на входе приемника  $s(t, \lambda)$  отличается от излученного тем, что получает ослабление при распространении и временную задержку, т.е.

$$s(t) = \gamma S(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)], \quad (2.3)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания;  $\tau$  — задержка. Искажения формы сигнала при этом отсутствуют. Модель сигнала (2.3) соответствует

неискажающему (идеальному) каналу, который характерен для РТС, работающих в условиях, близких к свободному пространству (трассы прямой видимости, космос).

2. При достаточно продолжительном наблюдении необходимо учитывать вариации затухания  $\gamma(t)$  и времени задержки  $\tau(t)$ . В этом случае

$$s(t) = \gamma(t) S[t - \tau(t)] \cos\{\omega_0(t - \tau(t)) + \Phi[t - \tau(t)]\}. \quad (2.4)$$

Отметим существенную особенность, связанную с изменением задержки  $\tau(t)$ . Этот процесс относительно медленный. Поэтому его можно приближенно представить в виде  $\tau(t) \approx \tau_n + \beta t$ , где  $\tau_n$  — начальная задержка и  $\beta$  — скорость изменения задержки. Изменение задержки за счет слагаемого  $\beta t$  на интервале наблюдения, равном длительности сигнала, как правило, мало и не оказывает существенного влияния на комплексную огибающую сигнала. Поэтому можно положить  $\dot{S}(t - \tau_n - \beta t) \approx \dot{S}(t - \tau_n)$ .

Введем некоторое номинальное или среднее время задержки  $\tau_0$  и представим  $\tau_n = \tau_0 + \theta/\omega_0$ , где  $\theta$  — изменение фазы ВЧ-сигнала в интервале  $(-\pi; \pi)$ ; малые изменения задержки, соответствующие вариациям фазы в интервале  $\pm\pi$ , оказывают существенное влияние в (2.4) только на аргумент  $\omega_0(t - \tau(t))$ . Искажения комплексной огибающей по-прежнему малы, т.е.  $\dot{S}(t - \tau_n) \approx \dot{S}(t - \tau_0)$ . Действительно, допустим на несущей частоте  $f_0 = 1000$  МГц изменению фазы ВЧ-сигнала на  $\pm\pi$  соответствуют вариации задержки, равные половине периода колебаний, т.е. 0,0005 мкс. При распространении волны в пространстве такое изменение фазы происходит на пути, равном половине длины волны (в данном примере это 15 см).

С учетом указанных выше допущений принимаемый сигнал (2.4) имеет вид

$$s(t, \lambda) = \text{Re}\{\gamma(t) \dot{S}(t - \tau_0) \exp[i((\omega_0 - \Omega)t - \omega_0\tau_0 - \theta)]\}, \quad (2.5)$$

где  $\Omega = \beta \cdot \omega_0$  — доплеровское смещение частоты.

В радиоканалах, типичных для РЛ- и РН-систем, изменение задержки  $\tau(t) = 2D(t)/c$ , где  $D(t) = D_0 + V_r \cdot t + \Delta D(t)$  — расстояние до подвижного объекта;  $V_r$  — радиальная скорость движения цели;  $\Delta D(t)$  — случайные изменения длины трассы, обусловленные блужданием эффективного центра отражения по дальности (дальномерный шум),

и изменения длины трассы за счет рефракции радиоволн в неоднородной тропосфере. Очевидно, что  $\Omega = 2\pi \cdot 2V_r \cdot f_0/c$ .

Отметим два частных случая модели (2.5), которые встречаются в практических задачах.

1. Пусть параметры  $\Omega$ ,  $\tau_0$  и  $\gamma(t) = \gamma$  постоянны, причем  $\gamma$  и  $\theta$  заранее неизвестны и являются случайными неинформативными величинами. В этом случае принятый сигнал имеет вид

$$s(t) = \gamma S(t - \tau_0) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0\tau_0 - \theta]. \quad (2.6)$$

Модель сигнала (2.6), в которой *амплитуда и фаза* — случайные величины, используется при рассмотрении некогерентных линий радиосвязи на трассах прямой видимости, а также в РЛ- и РН-системах при анализе их работы в условиях прямой видимости цели на достаточно коротких интервалах времени, не превышающих, как правило, нескольких десятков миллисекунд.

2. Пусть множители  $\gamma(t)$  и  $\theta(t)$  являются случайными функциями времени. Тогда получаем сигнал

$$s(t) = \gamma(t) S(t - \tau_0) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0\tau_0 - \theta(t)]. \quad (2.7)$$

Случайная функция  $\gamma(t)$  является мультипликативной помехой. Ее статистические свойства обычно определяют заданием одномерной ПРВ и корреляционной функцией. В РЛ- и РН-системах модель вида (2.7) со случайной амплитудой и фазой удовлетворительно описывает свойства отраженного от цели сигнала на интервалах времени до десятков секунд. Необходимо, чтобы объект находился в дальней зоне антенны. Это позволяет считать его «точечным» и не учитывать многолучевой характер отражений от различных участков поверхности объекта. При этом модель учитывает вариации уровня и фазы сигнала, которые реально существуют вследствие случайных смещений объекта в пространстве.

## 2.2.2. Модель сигнала в многолучевом канале

В соответствии с представлением сигнала (2.7) в однолучевом канале представим случайный сигнал на выходе приемной антенны при многолучевом РРВ в виде суммы

$$s_{\text{сл}}(t, \lambda) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N \gamma_l(t) \cdot \dot{S}(t - \tau_{0l}) \exp[i((\omega_0 - \Omega_l)t - \omega_0 \tau_{0l} - \theta_l(t))] \right\} =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N v_l(t) \cdot \exp[\omega_0 t + \theta_l(t)] \right\} = \operatorname{Re} \left\{ V(t) e^{i\varphi(t)} \cdot e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad (2.8)$$

где  $v_l(t)$  и  $\theta_l(t)$  — случайные амплитуда и полная фаза  $l$ -го парциального сигнала на выходе приемной антенны;  $\dot{S}(t)$  — комплексная ам-

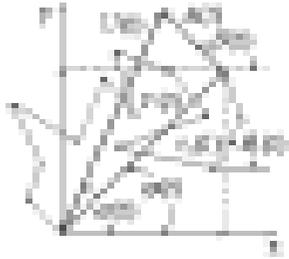


Рис. 2.4. Формирование огибающей и фазы сигнала в многолучевом канале

плитуда излученного полезного сигнала;  $\dot{V}(t) = V(t) e^{i\varphi(t)}$  — комплексная амплитуда ( $V(t)$  — огибающая и  $\varphi(t)$  — фаза) сигнала на входе приемника при многолучевом механизме РРВ в канале. Формирование огибающей и фазы в многолучевом канале показано на рис. 2.4.

Для изучения статистических свойств случайного сигнала (2.8) представим его в виде

$$s_{\text{сл}}(t, \lambda) = \operatorname{Re} \left\{ [V_x(t) + iV_y(t)] e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad (2.9)$$

где  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$  — квадратурные составляющие (компоненты) ВЧ-сигнала на входе приемника:

$$V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t) = \sum_{l=1}^N v_l(t) \cos[\theta_l(t)], \quad (2.10)$$

$$V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t) = \sum_{l=1}^N v_l(t) \sin[\theta_l(t)]. \quad (2.11)$$

Обычно полагают, что случайные величины  $v_l(t)$  и  $\theta_l(t)$  статистически независимы, причем фаза  $\theta_l(t)$  имеет равномерную ПРВ в интервале  $(-\pi; \pi)$ . Таким образом, каждое слагаемое в (2.10) и (2.11) имеет среднее, равное нулю. В итоге и квадратурные составляющие  $V_x(t)$  и  $V_y(t)$  являются случайными процессами с нулевым средним.

Для многих реальных каналов с многолучевым механизмом РРВ можно допустить, что случайные парциальные сигналы  $s_l(t, \lambda)$ , соответствующие различным лучам, имеют примерно равную интенсив-

ность, статистически независимы и их число велико (в среднем  $N \gg 10^3$ ). В этих условиях согласно центральной предельной теореме теории вероятностей случайные процессы (2.10) и (2.11), определяющие свойства сигнала (2.9), являются совместно гауссовыми.

Поскольку сигнал на входе канала РРВ является узкополосным (п. 1.3.2), то  $V_x(t)$  и  $V_y(t)$  — медленные в сравнении с  $\cos(\omega_0 t)$  функции. Сигнал вида (2.9) называют *гауссовским узкополосным случайным процессом*.

В РТС применяются сигналы с различными видами модуляции (АМ, ЧМ, ФМ и др.). В приемных устройствах систем осуществляются линейные и нелинейные преобразования амплитуды, частоты и фазы сигнала. В связи с этим при проектировании РТС необходимо знать ПРВ огибающей, фазы или частоты сигнала на входе приемника, а также их корреляционные свойства. Рассмотрим некоторые из этих характеристик.

### 2.3. Нормальная (гауссова) модель сигнала

Полезный сигнал на входе приемника, рассматриваемый на некотором интервале времени  $(0; T)$ , наряду со случайной компонентой (2.9), содержит (в общем случае) также регулярный ВЧ-сигнал, параметры которого *не являются случайными на интервале наблюдения*. Физические причины этого различны, они связаны с характером канала РРВ. В частности, для тропосферных каналов в диапазоне УКВ с длиной трассы, превышающей дальность радиогоризонта, характерно наличие в месте приема сигнала, обусловленного явлением дифракции при РРВ над сферической поверхностью Земли, и (или) сигнала, который появился в результате отражения волны от крупномасштабных и слоистых неоднородностей диэлектрической проницаемости среды.

В итоге принятый сигнал (см. рис. 2.4) можно представить в виде

$$s(t, \lambda) = A(t) \cos[\omega_0 t + \beta(t)] + V(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] =$$

$$= [A_x(t) + V_x(t)] \cos \omega_0 t + [A_y(t) + V_y(t)] \sin \omega_0 t, \quad (2.12)$$

$$\text{или } s(t) = U_x(t) \cos \omega_0 t + U_y(t) \sin \omega_0 t = U(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)], \quad (2.13)$$

где  $A(t)$  и  $\beta(t)$  — огибающая и фаза регулярного сигнала;  $A_x(t)$  и  $A_y(t)$

— его квадратурные составляющие;  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$  — квадратурные компоненты суммарного сигнала на входе приемника;  $U(t)$  и  $\alpha(t)$  — огибающая и фаза этого сигнала.

Для удобства записи выражений введем следующие обозначения:  $U_x(t) \triangleq x$  и  $U_y(t) \triangleq y$ , где знак  $\triangleq$  означает равенство по определению. Из (2.12) видно, что регулярный сигнал определяет величины математических ожиданий процессов  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$ . Обозначим  $\mathbf{M}[U_x(t)] = A(t) \cos \beta(t) \triangleq m_x(t)$  и  $\mathbf{M}[U_y(t)] = A_y(t) \sin \beta(t) \triangleq m_y(t)$ .

Рассмотрим совместную (2-мерную) ПРВ гауссовых процессов  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$  в один момент времени. Она отличается от (1.39), (1.40) наличием не нулевых средних значений и имеет вид

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-k^2)} \left[ \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2k(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}, \quad (2.14)$$

где  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$  — дисперсии (средние мощности) процессов  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$ ;  $k = [1/\sigma_x\sigma_y] \cdot \mathbf{M}[(x-m_x)(y-m_y)]$  — нормированный ковариационный момент процессов  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$  в совпадающий момент времени. Заметим, что в целях упрощения записи зависимость средних  $m_x$  и  $m_y$  от времени и  $\lambda$ , а также величин  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $k$  от  $\lambda$  в (2.14) не указана. Перейдем к рассмотрению ПРВ огибающей и фазы суммы регулярного и случайного ВЧ-сигналов.

### 2.3.1. Статистические свойства огибающей

Известно несколько вариантов гауссовой модели (2.14). Рассмотрим наиболее простой из них (в плане математических преобразований). Положим  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  и  $k = 0$  и определим совместную ПРВ огибающей  $U$  и фазы  $\alpha$ . С этой целью перейдем в полярную систему координат, т.е. подставим в (2.14)  $x = U \cos \alpha$ ;  $m_x = A \cos \beta$  и  $y = U \sin \alpha$ ;  $m_y = A \sin \beta$ . Далее раскроем квадраты выражений в пока-

зателях экспонент и проведем группирование членов. Учтем, что якобиан преобразования декартовых координат в полярные равен  $U$ . Перепишем (2.14) в виде

$$W(U, \alpha) = \frac{U}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{U^2 + A^2 - 2UA \cos(\alpha - \beta)}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.15)$$

В этом выражении  $U \in (0; \infty)$  и  $\alpha \in (-\pi; \pi)$ . Выполнив интегрирование в (2.15) по  $\alpha$ , получим ПРВ огибающей

$$W(U) = \int_{-\pi}^{\pi} W(U, \alpha) d\alpha = \frac{U}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{U^2 + A^2}{2\sigma^2} \right] \cdot I_0 \left( \frac{UA}{\sigma^2} \right), \quad (2.16)$$

где  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, которая получается здесь в результате вычисления интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{UA}{\sigma^2} \cos(\alpha - \beta)} d\alpha = 2\pi \cdot I_0 \left( \frac{UA}{\sigma^2} \right). \quad (2.17)$$

В предельном случае  $(A/\sigma) \ll 1$  (сильные вариации случайной составляющей сигнала по сравнению с уровнем регулярной) можно считать, что  $I_0(UA/\sigma^2) \approx 1$ , при этом (2.16) переходит в распределение

$$W(U) = \frac{U}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}; \quad U \geq 0. \quad (2.18)$$

Распределение огибающей (2.18) называется *распределением Рэлея*, а распределение (2.16) — *обобщенным распределением Рэлея* или *распределением Райса*.

Определим математическое ожидание  $\mathbf{M}[U] = m_U$  и дисперсию  $\mathbf{M}[(U - m_U)^2] = \sigma_U^2$  огибающей. В соответствии с правилами теории вероятностей имеем

$$m_U = \int_0^{\infty} U W(U) dU, \quad \sigma_U^2 = \int_0^{\infty} (U - m_U)^2 W(U) dU. \quad (2.19)$$

Подстановка в (2.19) ПРВ (2.16) и вычисление интегралов приводят к следующему результату [11]:

$$m_U \approx \sigma(1 + a^2/4)\sqrt{\pi/2}, \quad \sigma_U \approx \sqrt{2 - \pi/2}(1 + a^2/4) \text{ при } a < 1,$$

$$m_U \approx A\sqrt{1 + 1/2a^2} \approx A; \quad \sigma_U \approx \sigma \text{ при } a > 3. \quad (2.20)$$

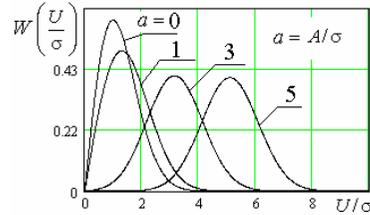


Рис. 2.5. Плотность распределения вероятностей нормированной огибающей сигнала

Видно, что при  $a \geq 3$  ширина кривой плотности практически неизменна и близка по форме к гауссовой кривой.

### 2.3.2. Статистические свойства фазы

Определим ПРВ фазы путем интегрирования совместного распределения (2.15) по переменной  $U$ . Опуская подробности, приведем конечный результат [11]

$$W(\alpha) = (1/2\pi)e^{-a^2/2} \times \left[ 1 + e^{a^2 \cos(\alpha-\beta)/2} \Phi[a \cos(\alpha-\beta)] \sqrt{2\pi} a \cos(\alpha-\beta) \right], \quad (2.21)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности:  $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ .

Видно, что аргументом функции  $W(\cdot)$  фактически является разность  $(\alpha-\beta)$ , по отношению к ней это четная функция и ее вид определяется параметром когерентности. На рис. 2.6 показаны кривые ПРВ фазы для разных величин  $a$ . Видно, что по мере увеличения уровня регулярного сигнала (его фаза равна  $\beta$ ), фаза  $\alpha$  суммарного сигнала в меньшей степени изменяется относительно величины  $\beta$ . Распределение вероятностей при этом сужается, поскольку происходит уменьшение дисперсии вариаций фазы  $\alpha$ . При отсутствии регулярно-

го сигнала ( $a = 0$ ) из (2.21) следует, что ПРВ фазы является равномерной. Таким образом, любые значения фазы  $\alpha$  в интервале  $\pm\pi$  равновероятны. Можно показать, что при больших уровнях регулярного сигнала ( $a \geq 3$ ) ПРВ фазы приближается к гауссовой с параметрами  $m_\alpha = \beta$  и  $\sigma_\alpha = 1/a$ . Например, при  $a = 5$  среднее квадратическое отклонение (СКО) фазы  $\sigma_\alpha = 0,2$  рад  $\approx 11,5^\circ$ .

На рис. 2.5 показаны кривые ПРВ нормированной на  $\sigma$  огибающей при разных величинах параметра когерентности.

Видно, что при  $a \geq 3$  ширина кривой плотности практически неизменна и близка по форме к гауссовой кривой.

го сигнала ( $a = 0$ ) из (2.21) следует, что ПРВ фазы является равномерной. Таким образом, любые значения фазы  $\alpha$  в интервале  $\pm\pi$  равновероятны. Можно показать, что при больших уровнях регулярного сигнала ( $a \geq 3$ ) ПРВ фазы приближается к гауссовой с параметрами  $m_\alpha = \beta$  и  $\sigma_\alpha = 1/a$ . Например, при  $a = 5$  среднее квадратическое отклонение (СКО) фазы  $\sigma_\alpha = 0,2$  рад  $\approx 11,5^\circ$ .

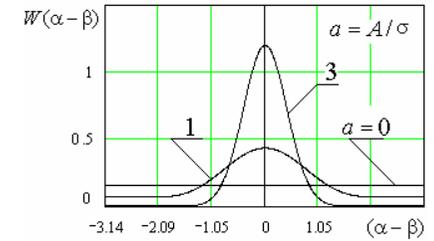


Рис. 2.6. Плотность распределения вероятностей фазы сигнала

### 2.4. Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы сигнала

Из соотношений (2.12), (2.13) следует, что статистические свойства гауссова сигнала  $s(t, \lambda)$  определяются свойствами его квадратурных составляющих  $U_x(t)$  и  $U_y(t)$ , для которых функции  $A_x(t)$ ,  $A_y(t)$  (квадратуры регулярного сигнала) в любой момент времени  $t$  выполняют роль средних значений. Таким образом, корреляционные свойства сигнала  $s(t, \lambda)$  зависят от корреляционных свойств случайной компоненты (2.9). Эти свойства определены, если заданы автокорреляционные и взаимно корреляционные функции (АКФ и ВКФ) квадратурных составляющих  $V_x(t)$  и  $V_y(t)$ .

Можно показать [11], что случайная компонента (2.9) является стационарным процессом в том случае, если квадратурные процессы  $V_x(t)$  и  $V_y(t)$  стационарны и их АКФ и ВКФ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \overline{V_x(t) \cdot V_x(t+\tau)} = \overline{V_y(t) \cdot V_y(t+\tau)} &= \sigma^2(\lambda) p(\tau; \lambda); \\ \overline{V_x(t) \cdot V_y(t+\tau)} = -\overline{V_x(t+\tau) \cdot V_y(t)} &= \sigma^2(\lambda) q(\tau; \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где  $p(\tau; \lambda)$  — нормированная АКФ квадратурных процессов;  $q(\tau; \lambda)$  — нормированная ВКФ квадратурных процессов. Высокочастотный сигнал  $s_{\text{сн}}(t, \lambda)$  имеет при этом ненормированную АКФ вида

$$k_{\text{сн}}(\tau; \lambda) = \sigma^2(\lambda) K(\tau; \lambda) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau; \lambda)], \quad (2.23)$$

где  $K(\tau; \lambda) = \sqrt{p^2(\tau; \lambda) + q^2(\tau; \lambda)}$  — модуль (огibaющая) нормированной АКФ;  $\psi(\tau; \lambda) = \arctg[q(\tau; \lambda)/p(\tau; \lambda)]$  — фаза АКФ. Отметим, что в (2.22) и (2.23) показана зависимость от сообщения  $\lambda$ . Это обусловлено тем, что случайный сигнал на входе приемника появился в результате преобразования в канале РРВ полезного сигнала, содержащего сообщение  $\lambda(t)$ .

Вычисление АКФ огibaющей  $K_U(\tau; \lambda)$  и фазы  $K_\alpha(\tau; \lambda)$  сигнала (2.12), (2.13) связано с выполнением довольно трудоемких преобразований. Эти результаты составляют основу теории случайных узкополосных гауссовых сигналов. В систематическом виде они приводятся, например, в [11]. Изложим в общем виде порядок получения функций  $K_U(\tau; \lambda)$  и  $K_\alpha(\tau; \lambda)$ .

1. Необходимо записать в явном виде 2-мерную (для двух моментов времени) совместную гауссову ПРВ значений квадратурных составляющих  $U_x(t_1), U_x(t_2), U_y(t_1), U_y(t_2)$ ; обозначим ее  $W[U_{x1}, U_{x2}, U_{y1}, U_{y2}; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$ , где  $\tau = t_2 - t_1$ .

2. Преобразовать указанную выше ПРВ в 2-мерную совместную ПРВ огibaющей и фазы, т.е. выполнить переход от декартовой системы координат к полярной. В итоге получим плотность  $W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$ .

3. Вычислить 2-мерные ПРВ огibaющей и фазы, выполнив интегрирование по соответствующим переменным:

$$\begin{aligned} W[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2, \\ W[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2. \end{aligned}$$

4. Вычислить АКФ огibaющей

$$K_U(\tau; \lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty U_1 U_2 W[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2$$

и АКФ фазы

$$K_\alpha(\tau; \lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_1 \alpha_2 W[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Энергетические спектры огibaющей  $G_U(\omega)$  и фазы  $G_\alpha(\omega)$  вычисляются согласно (1.43) как преобразования Фурье от соответствующих АКФ.

### 3. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

#### 3.1. Краткая характеристика задач статистической теории РТС

Современные РТС решают достаточно сложные задачи, связанные с передачей, извлечением и разрешением полезной информации при наличии помех. Основой разработки перспективных РТС являются методы теории статистического синтеза, которые позволяют найти оптимальную систему обработки сигналов. Можно выделить несколько специфических этапов разработки РТС: структурный, логический, схмотехнический, конструкторский и технологический. Наиболее важным из них является этап структурного синтеза РТС. Его результат состоит в разработке структурной схемы РТС, определяющей облик будущей системы и требования к основным параметрам подсистем и устройств. Особенность этапа в том, что многие задачи, которые должны быть решены, трудно поддаются формализации, в отличие от таковых на прочих этапах, где успешно используются системы автоматизации проектирования.

Задача синтеза РТС, в общем случае, предусматривает *выбор типа сигналов  $s(t, \lambda(t))$  и оптимизацию способа их обработки*. Для пассивных РТС тип сигнала определен объектом наблюдения. Для активных РТС (РЛС, РНС, РСПИ и др.) выбор типа сигнала имеет принципиальное значение, так как от способа модуляции ВЧ-сигнала зависят его свойства и соответственно многие показатели качества РТС. В частности, изменяются параметры функции неопределенности радиосигнала (разд. 1), определяющие возможность различения сигналов по времени задержки и частоте. Следует отметить особенность РТС извлечения информации, в которых, как отмечалось ранее, модуляция электромагнитного поля в месте приема полезным сообщением  $\lambda(t)$  определяется в процессе взаимодействия волны с объектом и далее с антенной системой приемника.

В частности, если  $\lambda(t)$  — угловая координата объекта, то способ модуляции этим сообщением сигнала в месте приема  $s(t; \lambda(t))$  зависит от пространственной структуры антенной системы приемника. Таким образом, оптимальный выбор типа сигнала в РЛ- и РН-системах

в определенной мере связан с выбором пространственной структуры РТС — количества пунктов приема и типа антенн. Задачи данного типа являются предметом теории пространственно-временного синтеза РТС.

Аналитические методы синтеза формы сигнала, учитывающие реальные ограничения на систему, разработаны недостаточно полно. Тем не менее, возможен, например, синтез сигнала с оптимальной (в смысле минимума боковых лепестков) автокорреляционной функцией. В сложных случаях на практике часто используется обычный метод перебора.

Оптимизация обработки (приема) сигнала предполагает определение *алгоритма и структуры* устройства, обеспечивающих, при заданных условиях работы РТС, наилучший (в смысле заданного критерия) результат решения некоторой функциональной задачи. Математическая формулировка задачи статистического синтеза оптимальной системы обработки включает следующее:

1) *разработку и обоснование статистической модели полезных сигналов и помех, воздействующих на систему в выбранном «сечении»*. Это могут быть воздействия на выходе антенной системы заданного типа или на выходе каких-либо устройств НЧ-тракта РТС. В общем случае необходимо определить статистическую модель электромагнитного поля в месте расположения РТС. Конкретная форма соотношений, определяющих модель, зависит от условий работы РТС (характер канала РРВ, диапазон радиоволн, тип помех и др.), степени априорной информации о свойствах сигнала и помех и их функциональном взаимодействии;

2) *формулировку критерия оптимальности системы обработки*. Критерий оптимальности должен соответствовать той цели, ради которой создается конкретная РТС;

3) *математическую формулировку задачи оптимизации*. Это предполагает аналитическую запись выражений, определяющих величину критерия и формулировку ограничений, если таковые имеются.

Следует отметить, что все РТС в процессе нормальной работы выполняют ряд функциональных задач. Успешное выполнение каждой из них, как правило, безусловно необходимо для нормальной работы системы. Например, для РЛ- и РН-систем характерны такие функциональные задачи:

- поиск, обнаружение и различение объектов в зоне обзора;
- захват и сопровождение объекта по дальности, скорости, угловым координатам;

— передача данных о текущих параметрах объектов в пункт обработки данных для принятия решения.

Очевидно, что критерий оптимальности (эффективности), определяющий качество работы РТС, должен учитывать результат выполнения каждой из перечисленных задач. В этом смысле критерий должен быть *обобщенным (комплексным)*. В действительности положение сложнее, так как следует учитывать также стоимость производства РТС, ее надежность, сложность эксплуатации и ремонта, массогабаритные параметры и др. Задача анализа (сравнения) известных систем по совокупности показателей качества может быть решена, а вот математической теории синтеза оптимальных (в смысле обобщенного критерия) систем не существует.

Рассмотрим кратко содержание основных задач. Для определенности будем полагать, что сигнал на входе приемника (наблюдаемый сигнал)  $y(t) = s(t, \lambda) + n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

**Задача обнаружения.** Пусть неизвестным является сам факт наличия или отсутствия сигнала  $s(t, \lambda)$  в наблюдаемом сигнале  $y(t, \lambda)$ . В этом случае представим  $y(t, \lambda)$  в виде

$$y(t) = \theta s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

где  $\theta$  — параметр обнаружения — случайная величина, которая принимает одно из двух значений:  $\theta = 0$  (сигнал отсутствует);  $\theta = 1$  (сигнал присутствует). Необходимо по принятой реализации  $y(t)$  на интервале  $[0; T]$  наилучшим способом принять решение о наличии или отсутствии сигнала  $s(t, \lambda)$  в смеси (3.1). В результате решения задачи должны быть определены: оптимальный алгоритм принятия решения о величине параметра  $\theta$ ; структурная схема обнаружителя и его качественные характеристики. Подобные задачи типичны для РЛ и РН-систем.

**Задача различения сигналов.** В простейшей задаче различения наблюдаемый процесс  $y(t)$  на входе приемника имеет вид

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda_2) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

где  $\theta$  — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения одно из двух значений:  $\theta = 0$  ( $y(t)$  содержит сигнал  $s_2(t, \lambda_2)$ ) и  $\theta = 1$  ( $y(t)$  содержит сигнал  $s_1(t, \lambda_1)$ ). Результатом решения задачи является *наилучшее* правило (алгоритм) обработки сигнала (3.2) и структура устройства, которые обеспечивают принятие решения о том, какой из двух сигналов присутствует на входе. В частном слу-

чае, при  $s_2(t, \lambda_2) = 0$  задача различения сводится к задаче обнаружения. Задача различения 2-х сигналов характерна для цифровых двоичных систем связи, в которых сигналы  $s_1(t, \lambda_1)$  и  $s_2(t, \lambda_2)$  соответствуют передаче 0 и 1. В общем случае наблюдаемый сигнал  $y(t)$  может содержать один из  $m$  возможных сигналов:  $s_1(t, \lambda_1)$ ,  $s_2(t, \lambda_2)$ , ...,  $s_m(t, \lambda_m)$ .

**Задача оценки параметров сигнала.** Предположим, что параметр  $\lambda$  сигнала  $s(t, \lambda)$  является случайной величиной с априорной ПРВ  $W(\lambda)$ . Конкретное значение этого параметра на интервале наблюдения постоянно и неизвестно. Задача оценки состоит в том, чтобы определить *наилучший* способ (алгоритм) обработки наблюдаемого сигнала  $y(t)$  и в итоге получить оценку  $\lambda^*$  неизвестного параметра  $\lambda$ . Мера близости оценки к истинному значению параметра определяется выбором критерия оптимальности. Необходимо также определить структуру устройства обработки (измерителя) и предельную точность оценки  $\lambda^*$ . Данная задача типична для измерительных РТС — локационных, навигационных и др.

В общем случае полезный сигнал зависит от нескольких неизвестных параметров  $\lambda$  и задача сводится к их совместной оценке. Например, в РЛ-системах сигнал, отраженный от объекта содержит информацию о дальности (время задержки), скорости (доплеровский сдвиг частоты) и угловых координатах. Задачей измерителя является получение наилучших оценок этих величин.

**Задача фильтрации сообщений.** Термин «фильтрация» означает здесь — выделение. В задачах данного типа информативный параметр  $\lambda(t)$  полезного сигнала  $s(t, \lambda(t))$  является случайной функцией времени с известными статистическими характеристиками. Решение задачи состоит в определении алгоритма и устройства обработки сигнала  $y(t)$ , которые обеспечивают получение *наилучшей* оценки  $\lambda^*(t)$ . Задача сводится к оценке параметра, если за время наблюдения  $T$  сообщение изменяется пренебрежимо мало. Фильтрация сообщений реализуется в системах радиосвязи и телеметрии (выделение речевого сигнала или сигналов о состоянии физических объектов), а также в РЛ- и РН-системах, где необходимо непрерывно получать информацию об изменяющихся во времени координатах кораблей самолетов, космических объектов.

**Задача разрешения сигналов.** В данном случае наблюдаемый сигнал на входе приемника  $y(t)$  представляет собой сумму помехи

и минимум двух возможно налагающихся сигналов  $s_1(t, \lambda_1)$  и  $s_2(t, \lambda_2)$ . По смыслу параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  идентичны. Допустим,  $\lambda_1 = \{\tau_1, \Omega_1\}$ ,  $\lambda_2 = \{\tau_2, \Omega_2\}$  и сигналы отличаются друг от друга только информативными параметрами (одним или более). Наблюдаемый сигнал  $y(t) = \theta_1 s_1(t, \lambda_1) + \theta_2 s_2(t, \lambda_2) + n(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , где случайные величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  независимы и могут принимать значения 0 и 1.

Допустим,  $y(t)$  содержит оба сигнала, тогда возникает задача оценки параметров сигнала  $s_1(t, \lambda_1)$  в присутствии  $s_2(t, \lambda_2)$ . Если качество оценок  $\lambda_1^*$  остается при этом выше допустимого, то первый сигнал разрешается в смысле оценки параметра (одного или двух). При необходимости раздельного обнаружения сигналов говорят о задаче взаимного разрешения сигналов в смысле обнаружения.

**Задача распознавания образов.** Этот класс задач связан с разработкой алгоритмов и устройств, позволяющих по наблюдаемому сигналу  $y(t)$  после обнаружения полезных сигналов (одного или нескольких) определить их принадлежность к соответствующим объектам — источникам полезных сигналов. В зависимости от характера сигналов и априорной информации об объектах, задачи распознавания весьма разнообразны. В частности, это распознавание речи, где 32 различных объекта (буквы русского алфавита) или в РЛ-системах задачи распознавания типа самолетов, кораблей, головных частей баллистических ракет и др.

В заключение отметим два обстоятельства.

1. В силу наличия помех в наблюдаемом сигнале  $y(t)$ , исчерпывающий подход для решения всех функциональных задач, которые возникают в РТС, состоит в использовании методов статистической теории решений при наличии помех.

2. Качество РТС при решении задачи можно обнаружить только в длинном ряду испытаний, выполнив статистическое усреднение по ансамблю случайных возмущений (помех и др.), т.е. критерий эффективности РТС должен иметь также статистический смысл.

### 3.2. Согласованный линейный фильтр

Рассмотрим задачу оптимизации характеристик линейного фильтра по критерию отношения мощностей сигнала и шума на его выходе при подаче на вход аддитивной смеси полезного сигнала и шума.

Пусть на вход линейного фильтра поступает сигнал  $y(t) = s(t) + n(t)$  в виде суммы полезного сигнала  $s(t)$  и стационарного белого шума  $n(t)$ , двухсторонняя спектральная плотность которого  $G_n(\omega) = N_0/2$  для  $\omega(-\infty, \infty)$ . Введем следующие обозначения:  $\dot{k}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$  — комплексный коэффициент передачи фильтра, где  $K(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра и  $\varphi(\omega)$  — фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра;  $\dot{g}(\omega) = g(\omega)e^{i\gamma(\omega)}$  — комплексный частотный спектр полезного сигнала, где  $g(\omega)$  — амплитудно-частотный спектр и  $\gamma(\omega)$  — фазочастотный спектр. Временные и спектральные функции связаны взаимными преобразованиями Фурье

$$\dot{k}(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} h(\tau); s(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{g}(\omega), \quad (3.3)$$

где  $h(\tau)$  — импульсная реакция фильтра; символ  $\underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}}$  обозначает прямое и обратное Фурье-преобразование между функциями. Полезный

сигнал на выходе фильтра  $s_{\text{вых}}(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} [\dot{k}(\omega) \cdot \dot{g}(\omega)]$ , его величина в момент времени  $t_0$

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega) \cdot \dot{g}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega. \quad (3.4)$$

Средняя мощность шума на выходе фильтра на частоте  $f$  в полосе  $df$  равна  $dP_{n_{\text{вых}}}(f) = (N_0/2) \cdot |\dot{k}(\omega)|^2 \cdot d(\omega/2\pi)$ . Соответственно полная мощность шума на выходе фильтра

$$\sigma_{n_{\text{вых}}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dP_{n_{\text{вых}}}(f) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5)$$

Определим величину  $q^2$  — отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе фильтра в момент  $t_0$

$$q^2(t_0) = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{\sigma_{\text{н ВЫХ}}^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega) \dot{g}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right|^2}{\pi N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию  $\dot{k}_{\text{opt}}(\omega)$ , при которой отношение (3.6) достигает максимума. Эту задачу можно решить, используя неравенство Шварца-Буняковского.

Неравенство Шварца-Буняковского утверждает, что если имеются две в общем случае комплексные функции  $\dot{u}(x)$  и  $\dot{v}(x)$ , то выполняется соотношение [13]

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(x) \dot{v}(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(x)|^2 dx, \quad (3.7)$$

причем знак равенства достигается только тогда, когда

$$\dot{v}(x) = c \cdot \dot{u}(x), \quad (3.8)$$

где  $c$  — некоторая постоянная;  $\dot{u}^*(x)$  — функция, комплексно-сопряженная  $\dot{u}(x)$ . Для данного случая перепишем неравенство (3.7) в следующем виде:

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(\omega) \cdot \dot{v}(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.9)$$

Сопоставляя выражения (3.6) и (3.9), с учетом (3.8), получаем, что максимальное значение  $q_{\text{max}}(t_0)$  достигается на выходе оптимального фильтра с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{k}_{\text{opt}}(\omega) = c \cdot \dot{g}^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = c \cdot g(\omega) e^{-i\gamma(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (3.10)$$

Вычислим величину  $q_{\text{max}}(t_0)$ . Для этого подставим (3.10) в (3.6) и в итоге получим

$$q_{\text{max}}^2(t_0) = q_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что комплексная частотная характеристика оптимального линейного фильтра полностью определяется комплексным частотным спектром полезного сигнала. Причем АЧХ этого фильтра  $K_{\text{opt}}(\omega) = |\dot{k}_{\text{opt}}(\omega)| = c \cdot g(\omega)$ , т.е. она пропорциональна амплитудно-частотному спектру полезного сигнала. ФЧХ фильтра имеет вид:  $\varphi_{\text{opt}}(\omega) = -\gamma(\omega) - \omega t_0$ . Оптимальный фильтр, имеющий эти характеристики, называют *согласованным линейным фильтром*.

Совпадение формы АЧХ фильтра с амплитудно-частотным спектром сигнала обеспечивает наилучшее выделение тех участков спектра сигнала, на которых отношение уровней сигнала к шуму выше. *Форма сигнала на выходе фильтра при этом искажается*. Однако это не имеет значения, поскольку критерий оптимальности состоит не в точном воспроизведении формы сигнала, а в формировании наибольшего пика выходного сигнала на фоне шума. Важную роль в связи с этим играет ФЧХ фильтра  $\varphi_{\text{opt}}(\omega)$ . Поясним эту роль.

Подставим в (3.4) коэффициент передачи (3.10) и запишем выражение сигнала на выходе согласованного фильтра (СФ)

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\omega) \cos[\omega(t-t_0)] d\omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Второе равенство в (3.12) получается из первого, так как  $|\dot{g}(\omega)|^2$  есть коэффициент передачи фильтра по мощности, т.е. это четная функция аргумента  $\omega$  и в преобразовании Фурье остается только действительная часть. Из (3.12) следует, что *форма сигнала на выходе согласованного фильтра является четной функцией аргумента  $(t-t_0)$ , зависит только от амплитудно-частотного спектра входного сигнала и не зависит от его фазочастотного спектра*.

Эта любопытная ситуация объясняется тем, что взаимные фазовые сдвиги спектральных составляющих входного сигнала, определяемые функцией  $\gamma(\omega)$ , компенсируются ФЧХ СФ. Поэтому все гармонические составляющие выходного сигнала в момент времени  $t_0$  одновременно достигают амплитудных значений и, суммируясь (фильтр линейный), дают пик выходного сигнала, равный согласно (3.12)

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 d\omega = c \cdot E_s. \quad (3.13)$$

Если бы ФЧХ фильтра не компенсировала фазовых сдвигов спектральных составляющих входного сигнала, то максимумы различных гармоник сигнала на выходе не совпали бы во времени. В этом случае пик выходного сигнала оказался бы меньше и, возможно, был бы не один.

Определим импульсную реакцию согласованного фильтра (3.10)

$$\begin{aligned} h_{opt}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}_{opt}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(\omega) e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(-\omega) e^{i\omega(t_0-t)} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{i\omega(t_0-t)} d\omega. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая, что входной сигнал

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

получим

$$h_{opt}(t) = c \cdot s(t_0 - t). \quad (3.15)$$

Таким образом, импульсная характеристика согласованного фильтра полностью определяется формой сигнала (она «согласована» с сигналом).

Чтобы представить себе функцию  $h_{opt}(t)$ , обратимся к рис. 3.1. На нем изображены импульсный сигнал  $s(t)$ , возникший в момент времени  $\tau_0 = 2$ , а также сигнал  $s(t + t_0)$  (при  $t_0 = 8$  он появляется раньше) и его зеркальное отображение  $s(t_0 - t) = h_{opt}(t)$ , т.е. константа  $c = 1$ .

Рассмотрим структуру отклика согласованного фильтра (СФ), когда на его вход воздействует колебание

$$y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.16)$$

где  $\lambda_0$  — значение информативного параметра в полезном сигнале на входе фильтра. В общем случае  $\lambda_0$  не является временной задержкой.

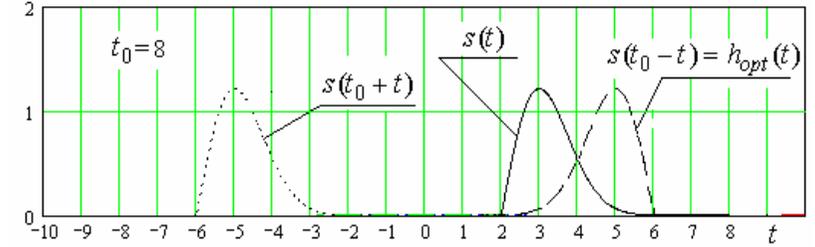


Рис. 3.1. Формирование импульсной реакции СФ

Допустим, что импульсная характеристика СФ согласована с полезным сигналом с точностью до информативного параметра, т.е. его значение для функции  $h_{opt}(t)$  отлично от  $\lambda_0$  и равно  $\lambda$ .

Сигнал  $z(t)$  на выходе СФ с учетом (3.15), (3.16) представим в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(t - \tau) y(\tau) d\tau = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) y(\tau) d\tau = \\ &= \frac{cN_0}{2} q_{\text{вых}}(t, \lambda) = \frac{c \cdot N_0}{2} [z_s(t, \lambda) + z_n(t, \lambda)], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $z_s(t, \lambda)$  и  $z_n(t, \lambda)$  — сигнальная и шумовая функции

$$\left. \begin{aligned} z_s(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) \cdot s(\tau, \lambda_0) d\tau, \\ z_n(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) \cdot n(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Сравнение выражения (1.15а) для временной АКФ сигнала с (3.17) и (3.18) позволяет сделать важный вывод. Выходной сигнал СФ с точностью до константы  $c$  соответствует взаимной

корреляционной функции между принятым колебанием  $y(t)$  и полезным сигналом  $s(t, \lambda)$ . Сигнальная же функция  $z_s(t, \lambda)$  с точностью до константы совпадает (при условии  $\lambda = \lambda_0$ ) с временной автокорреляционной функцией полезного сигнала.

Максимальное значение сигнальная функция имеет в точке  $t = t_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ . В соответствии с (3.18) оно равно

$$z_s(t_0, \lambda_0) = z_{s \max} = \frac{2}{N_0} \cdot E_s. \quad (3.19)$$

В важном для практики случае, когда информативный параметр  $\lambda$  является временным положением сигнала, выражение для сигнальной функции имеет вид

$$z_s(t; \tau_0, \tau_\phi) = \frac{2}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t - \tau_\phi) \cdot s(\tau - \tau_0) d\tau, \quad (3.20)$$

где  $\tau_0$  и  $\tau_\phi$  — соответственно, временной сдвиг входного сигнала и значение сдвига, на который «настроен» СФ. Определим момент времени, когда (3.20) имеет максимум. Поскольку функция  $z_s(t; \tau_0, \tau_\phi) \sim k(t)$ , т.е. пропорциональна временной АКФ сигнала, то положение ее максимума совпадает с тем временем, при котором разность аргументов у двух копий сигналов в (3.20) равна нулю. Видно, что разность аргументов равна  $[t_0 + (\tau_0 - \tau_\phi) - t]$  и обращается в ноль, когда  $t = t_0 + (\tau_0 + \tau_\phi)$ . Таким образом, положение максимума просто сдвинется во времени на  $\tau_0 + \tau_\phi$ , величина же его останется неизменной, равной (3.19). Отметим, что если бы параметр  $\lambda$  имел смысл частотного сдвига  $\Omega$  или какой-либо другой, то уровень максимума сигнала на выходе СФ оказался бы зависящим от  $(\lambda_0 - \lambda_\phi)$ .

Поскольку форма сигнала на выходе СФ повторяет АКФ  $k(\tau)$ , то при подаче на его вход прямоугольного радиоимпульса выходной сигнал соответствует рис. 1.10. При подаче на вход радиоимпульса с ЛЧМ и гауссовой огибающей сигнал на выходе СФ «теряет» ЧМ и сжимается в  $B$  раз (см. рис. 1.13). Огибающая сигнала на выходе СФ, которая может быть выделена с помощью линейного детектора, очевидно, повторяет функцию  $K(\tau)$ , т.е. имеет треугольную форму для прямоугольного радиоимпульса (см. рис. 1.9) и сжатую в  $B$  раз по длительности гауссоиду для гауссова радиоимпульса (см. рис. 1.13).

Определим дисперсию (мощность) шума на выходе СФ. Из (3.18) следует, что  $\overline{z_n(t, \lambda)} = 0$ , так как  $\overline{n(t)} = 0$ . Для дисперсии имеем выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[z_n(t, \lambda)] &= \overline{z_n^2(t, \lambda)} = \\ &= \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) \overline{n(\tau)n(\tau_1)} d\tau d\tau_1 = \\ &= \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) \cdot s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) K_n(\tau_1 - \tau) d\tau d\tau_1. \end{aligned}$$

Подставляя в него АКФ белого шума (1.46) и выполняя интегрирование с учетом свойств  $\delta$ -функции, получим

$$D_{z_n}(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t_0 + \tau - t, \lambda) d\tau.$$

Отсюда следует, что мощность шумовой функции при неэнергетическом параметре  $\lambda$  равна

$$D_{z_n} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.21)$$

Для задач в инженерной практике важно знать отношение максимального значения сигнала к среднеквадратическому значению шума. Это отношение на выходе СФ определим на основе (3.19) и (3.21). В итоге получим

$$\frac{z_{s \max}}{\sqrt{D_{z_n}}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = q_0. \quad (3.22)$$

Как и следовало ожидать, полученный результат совпадает с (3.11) для  $q_{\max}(t_0)$ .

Обсудим вопрос о том, какое значение может принимать момент отсчета  $t_0$ . Если сигнал  $s(t)$ , на который «настроен» СФ, возникает в момент времени  $\tau_0$  и заканчивается при  $t = \tau_0 + \tau_n$  (см. рис. 3.1:  $\tau_0 = 2$  и  $\tau_n \approx 3,5$ ), то с учетом условия физической реализуемости фильтра ( $h(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ) момент достижения максимального отношения сигнала к шуму может быть при  $t_0 \geq \tau_0 + \tau_n$ . Физически это означает, что только в этом случае для формирования максимального пика сигнала на выходе может быть использована вся энергия

входного сигнала  $s(t)$  — фильтр как бы «накапливает сигнал». Увеличение  $t_0$  свыше  $(\tau_0 + \tau_n)$  не изменяет величину пика. Он лишь позже появится на выходе; это, как правило, нежелательно.

При проектировании РТС удобно использовать отношение сигнала к шуму, пересчитанное ко входу системы. Выполним это для СФ. Пусть  $\Delta F_3$  — эффективная полоса пропускания СФ, равная эффективной ширине спектра сигнала  $s(t)$ . Мощность шума на входе в эффективной полосе пропускания СФ равна  $P_n = N_0 \Delta F_3$ , а мощность сигнала на входе СФ равна  $P_s = E_s / \Delta T_3$ , где  $\Delta T_3$  — эффективная длительность сигнала. Подставляя эти величины в формулу (3.22), получим

$$q_0 = \frac{z_{s \max}}{\sqrt{D_{z_n}}} = \sqrt{2 \Delta F_3 \cdot \Delta T_3 (P_s / P_n)}$$

или в другой форме

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{q_0^2}{2B}, \quad (3.23)$$

где  $B \approx \Delta F_3 \cdot \Delta T_3$  — база сигнала;  $\frac{P_s}{P_n}$  и  $q_0^2$  — отношение мощностей сигнала к шуму соответственно на входе и выходе СФ. Из соотношения (3.23) следует, что при заданной энергии сигнала  $E_s$  и равномерной спектральной плотности мощности шума, равной  $N_0$ , увеличение  $\Delta F_3$  и  $\Delta T_3$  порознь не изменяет отношение сигнала к шуму на выходе СФ. Это отношение можно увеличить за счет увеличения базы сигнала. Таким образом, использование сложных сигналов в РТС и применение СФ обеспечивает работоспособность систем при отношении сигнала к шуму на входе в  $2B$  раз меньше, чем требуемое на выходе системы. Эти выводы справедливы, если помеха (шум) является аддитивной «белой», а форма полезного сигнала полностью известна.

В заключение отметим одно важное обстоятельство. Сравнение выражения (1.10) для сигнальной функции  $q(\Delta x)$ , определяющей функцию различия  $\varepsilon(\Delta x)$  сигналов по параметру  $x$  или по сообщению  $\lambda$ , связанному с ним, с сигнальной функцией  $z_s(t, \lambda)$ , формируемой на выходе СФ, показывает:

1) среднее напряжение на выходе СФ в момент отсчета  $t = t_0$  пропорционально величине сигнальной функции  $q(\Delta \lambda)$ , определяющей степень различия 2-х сигналов  $s(t, \lambda)$  и  $s(t, \lambda_0)$ , где  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ ;

2) формирование сигнальной функции  $q(\Delta \lambda)$  с использованием СФ предполагает «развертывание» напряжения на выходе фильтра по  $\lambda$ , что, в общем случае, связано с применением совокупности СФ, настроенных на различные значения сообщения  $\lambda$ ;

3) сигнальная составляющая напряжения на выходе СФ повторяет по форме временную АКФ сигнала  $s(t)$ ;

4) величина максимального отношения сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра не зависит от формы полезного сигнала и определяется только его энергией и спектральной плотностью «белого» шума на входе.

### 3.3. Примеры построения согласованных фильтров

#### 3.3.1. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

На рис. 3.2 показана структурная схема устройства, реализующего функции СФ, когда на его входе воздействует сигнал вида  $s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t)$  при  $t \in [0, \tau_n]$ . Оно состоит из усилителя, линии задержки на время  $\tau_n$ , вычитающего устройства и колебательного контура с достаточно малым затуханием. Предполагается, что  $\tau_n$  равно целому числу периодов ВЧ-сигнала.

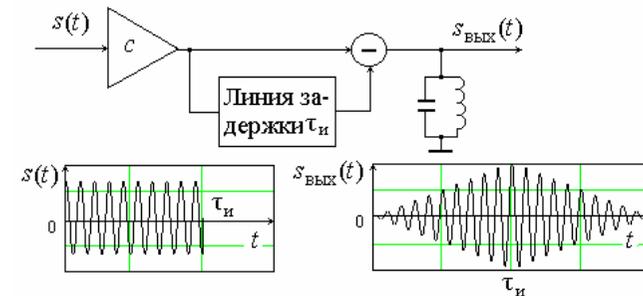


Рис. 3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного импульса

При воздействии на вход прямоугольного радиоимпульса на контуре высокой добротности происходит линейное нарастание амплитуды напряжения в течение длительности импульса сигнала и весьма медленное затухание колебаний после его окончания. В результате

вычитания двух переходных процессов на выходе получается треугольный импульс (см. рис. 3.2), повторяющий по форме АКФ сигнала. При этом максимальное значение импульса в момент  $t \geq \tau_n$  равно энергии  $E_s = c^2 (S_0^2/2) \cdot \tau_n$ .

В инженерной практике часто используют приближенно оптимальные фильтры (квазиоптимальные); их реализация оказывается проще. В частности, для прямоугольного радиоимпульса можно использовать полосовой фильтр с АЧХ, близкой к прямоугольной форме, и линейной ФЧХ в полосе пропускания. Полосовой фильтр близок к СФ, если его полоса  $\Delta F_{\text{пф}} = 1,37/\tau_n$ . Проигрыш в отношении сигнала к шуму по мощности для такого фильтра составляет около 1,2 раза [12].

### 3.3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ

Определим структурную схему СФ для ФКМ-импульса с семипозиционным кодом Баркера (см. рис. 1.15,а). На рис. 3.3,а показано условное обозначение этого сигнала. Используя его и выражение (3.15), получаем импульсную реакцию СФ (рис. 3.3,б).

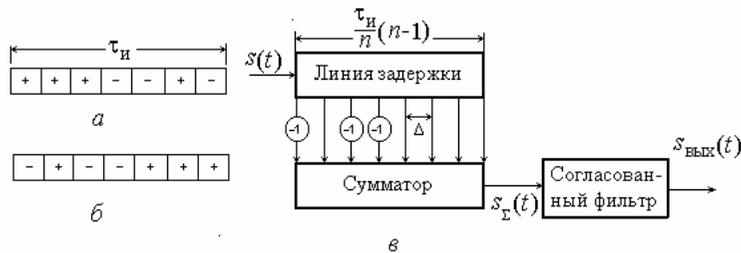


Рис. 3.3. Обработка ФКМ-радиоимпульса в согласованном фильтре: а — модулирующая функция ФКМ-сигнала; б — модулирующая функция импульсной реакции СФ; в — СФ для радиоимпульса с ФКМ

Устройство оптимальной обработки ФКМ-сигнала представлено на рис. 3.3,в. Оно состоит из широкополосной линии задержки с семью равноотстоящими отводами (с интервалом задержки  $\Delta$ ), общего сумматора, к которому часть отводов подключена через инверсные

каскады, а остальные — непосредственно, и линейного фильтра, согласованного с парциальным радиоимпульсом длительностью  $\Delta = \tau_n/7$ .

Работу СФ поясняет рис. 3.4, на котором показаны этапы формирования радиоимпульса  $s_{\text{ВЫХ}}(t)$ . На рис. 3.4,а схематически показаны (с учетом инверсных каскадов) радиоимпульсы с ФКМ на входе сумматора. Результат их суммирования представлен на рис. 3.4,б, а огибающая выходного сигнала СФ — на рис. 3.4,в. Максимум сигнала  $s_{\text{ВЫХ}}(t)$  равен  $7E_1$ , где  $E_1$  — энергия парциального импульса.

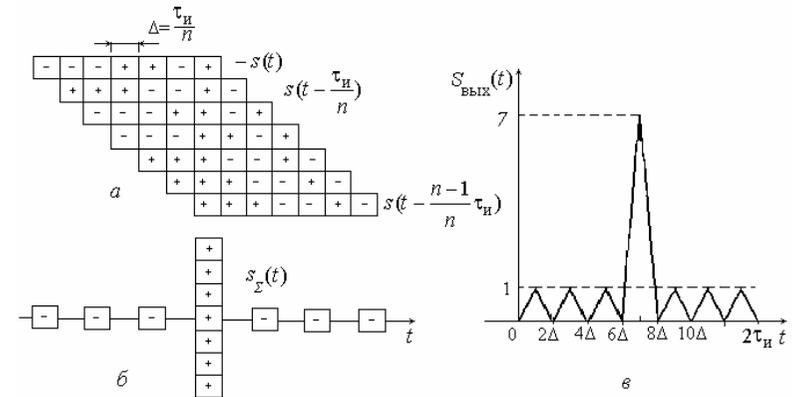


Рис. 3.4. Формирование сигнала на выходе СФ: а — копии ФКМ-импульса на выходах линии задержки; б — ФКМ-сигнал на выходе сумматора; в — огибающая ФКМ-радиосигнала на выходе СФ

### 3.3.3. Согласованный фильтр для пачки M когерентных радиоимпульсов гауссовой формы

Представим входной сигнал, состоящий из M периодически следующих когерентных радиоимпульсов (рис. 3.5,а) в виде

$$s(t) = \sum_{n=0}^{M-1} s_1(t - nT), \quad 0 \leq t \leq MT, \quad (3.24)$$

где  $s_1(t)$  — одиночный радиоимпульс заданной формы с энергией  $E_1$  и длительностью  $\tau_n$ ; T — период следования импульсов. Спектр сигнала (3.24) равен

$$\begin{aligned} \dot{g}(\omega) &= \int_0^{MT} s(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=0}^{M-1} \int_{nT}^{(n+1)T} s_1(t-nT) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_0^T s_1(x) e^{-i\omega(x+nT)} dx = \dot{g}_1(\omega) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} e^{-i\omega nT}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $\dot{g}_1(\omega) \Leftrightarrow s_1(t)$  — спектр одиночного импульса. Подставим в (3.10) общую длительность пачки  $t_0 = \tau_n + (M-1)T$  и с учетом спектра пачки (3.25) найдем коэффициент передачи оптимального фильтра в виде [9]

$$\dot{k}_{opt}(\omega) = c \dot{k}_1(\omega) \cdot \dot{k}_2(\omega), \quad (3.26)$$

$$\dot{k}_1(\omega) = \dot{g}_1^*(\omega) e^{-i\omega \tau_n}, \quad \dot{k}_2(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-i\omega mT} = \frac{1 - \exp(-i\omega MT)}{1 - \exp(-i\omega T)}. \quad (3.27)$$

Первый множитель в (3.26)  $\dot{k}_1(\omega)$  есть коэффициент передачи СФ для одиночного радиоимпульса. Каждое слагаемое второго множителя соответствует коэффициенту передачи звена, обеспечивающего задержку сигнала на время  $mT$ . Суммирование слагаемых по формуле суммы конечного числа элементов геометрической прогрессии дает выражение (3.27). Таким образом,  $\dot{k}_2(\omega)$  есть коэффициент передачи многоотводной линии задержки с суммированием задержанных сигналов. Общее время задержки в линии  $(M-1)T$ . Структурная схема СФ для пачки радиоимпульсов, соответствующая формуле (3.26), показана на рис. 3.5,б. При подаче на вход СФ  $\delta$ -импульса на выходе сумматора получается последовательность  $M$  (по числу отводов) радиоимпульсов, каждый из которых по форме повторяет импульсную реакцию фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. На рис. 3.5,в условно показан процесс оптимальной фильтрации пачки из  $M=4$  импульсов с симметричной огибающей гауссовой формы. Огибающая пачки радиоимпульсов на выходе сумматора  $S_{вых,opt}(t)$  имеет треугольную форму, длительность по нулям  $2MT$  и число импульсов  $(2M-1)$ .

Рассмотрим частотную интерпретацию работы СФ-пачки.

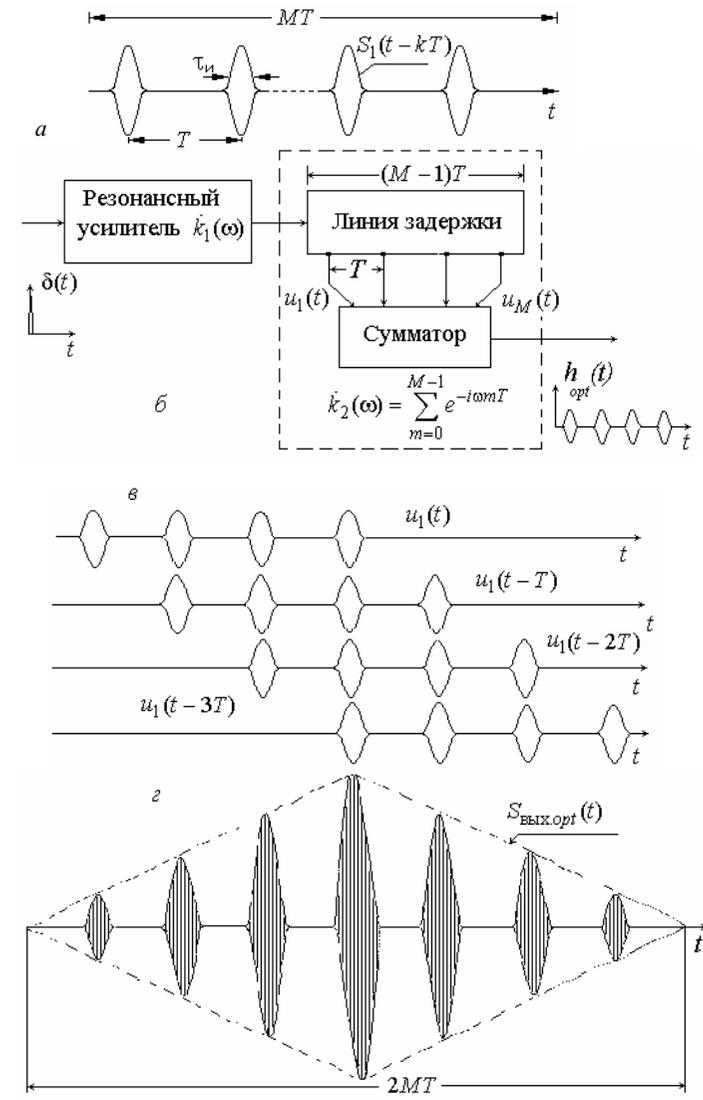


Рис. 3.5. Согласованная фильтрация пачки когерентных радиоимпульсов гауссовой формы: а — пачка импульсов; б — структура СФ для пачки; в — последовательности импульсов на выходах линии задержки и сумматора ( $M=4$ ); г — радиоимпульсы на выходе сумматора

Определив из (3.27) модуль  $|\dot{k}_2(\omega)|$ , найдем АЧХ второго звена СФ в виде [12]

$$K_2(f) = \left| \frac{\sin(\pi f MT)}{\sin(\pi f T)} \right|. \quad (3.28)$$

Частотная характеристика (3.28) является гребенчатой (рис. 3.6,а) с периодически повторяющимися через интервал  $1/T$  зубцами, ширина которых по нулям  $2/(MT)$ . В случае идеальной линии задержки АЧХ (3.28) существует на всей оси частот. Результирующая АЧХ  $K(f) = K_1(f) \cdot K_2(f)$  практически ограничена по спектру колокольной (гауссовой) характеристикой  $K_1(f)$  фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. Очевидно, что отношение сигнала к шуму по мощности в момент максимума сигнала на выходе СФ равно

$$\frac{2E_1 M}{N_0} = \frac{2E_{\text{пачки}}}{N_0}, \quad (3.29)$$

что соответствует результатам подраздела 3.2.

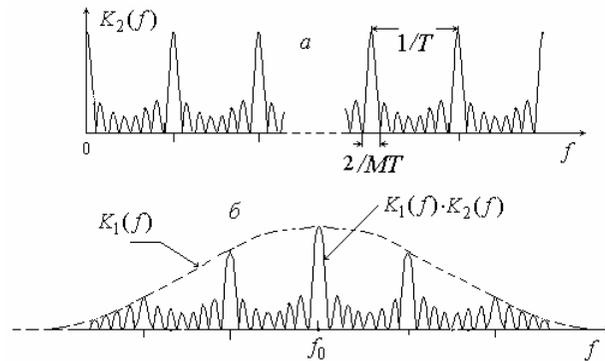


Рис. 3.6. Гребенчатая АЧХ схемы оптимального суммирования (а) и результирующая АЧХ (б) для когерентной пачки радиоимпульсов

Напомним, что выигрыш в отношении сигнала к шуму получается за счет синфазного суммирования импульсных колебаний сигнала в определенный момент времени. Спектральные составляющие шума суммируются со случайными фазами. *Гребенчатая структура АЧХ СФ, совпадающая со структурой амплитудно-частотного спек-*

*ра когерентной пачки импульсов, обеспечивает прохождение через СФ только части спектральных составляющих помехи.* Наименьшее усиление СФ имеет на тех участках спектра, где уровень сигнальных составляющих мал.

### 3.4. Обнаружение и различение сигналов при наличии помех (байесов метод)

Статистическая теория принятия решений при наличии помех включает два основных раздела: *первый — статистическая теория проверки гипотез* и *второй — статистическая теория оценок неизвестных параметров*. Для решения задач оптимального обнаружения, различения и классификации сигналов применяют аппарат статистической теории проверки гипотез. В 30-х годах прошлого века американский математик Джон Нейман и английский математик Карл Пирсон заложили основы теории проверки гипотез.

Рассмотрим две наиболее простые задачи, связанные с бинарным различением и обнаружением сигналов. В этом случае в приемнике реализуется алгоритм принятия решения в пользу одной из двух возможных гипотез:  $H_0$  или  $H_1$ . В цифровых РСПИ эти гипотезы соответствуют передаче по каналу связи на интервале  $[0; T]$  одного из двух полезных сигналов  $s_0(t, \lambda_0)$  или  $s_1(t, \lambda_1)$ . В РЛ- и РН-системах при решении задачи обнаружения гипотеза  $H_0$  означает отсутствие полезного сигнала, т.е.  $s_0(t, \lambda) = 0$ . Таким образом, задача различения является более общей. Рассмотрим эту задачу и применим для ее решения байесов метод [13], основоположником которого является американский математик Вальд А.

*Постановка задачи.* Наблюдаемый сигнал на входе приемника представим в виде

$$y(t) = \theta \cdot F[s_1(t, \lambda_1); n(t)] + (1 - \theta) \cdot F[s_0(t, \lambda_0); n(t)]; \quad t \in [0; T], \quad (3.30)$$

где  $\theta$  — случайная величина с двумя значениями 0 и 1;  $F[s_i(t, \lambda_i; n(t))]$  — оператор, определяющий способ взаимодействия полезного сигнала  $s(\cdot)$  и помехи  $n(t)$ .

Априорные вероятности значений случайной величины  $\theta$  известны:  $P(\theta = 0) = p_0$  и  $P(\theta = 1) = p_1$ . Статистические свойства помехи и сигналов предполагаются также заданными. Таким

образом, при дискретном отборе данных на интервале  $[0; T]$  могут быть определены  $n$ -мерные условные ПРВ (подраздел 1.4)

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, \dots, y_n / H_0) &= W(\mathbf{y} / H_0), \\ W(y_1, y_2, \dots, y_n / H_1) &= W(\mathbf{y} / H_1), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $H_0$  и  $H_1$  — две случайные гипотезы (события), соответствующие двум возможным состояниям наблюдаемого сигнала. Оптимальный различитель на основе обработки сигнала  $y(t)$  должен *лучшим способом принять решение* о том, какая из двух гипотез реализовалась в конкретном наблюдении. Фактические данные наблюдений в статистике называют *выборкой*; в данном случае это  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , где  $y_i = y(t_i), i = 1, \dots, n$ .

*Решение задачи.* Очевидно, система различения из-за влияния помех может случайно оказаться в одной из четырех ситуаций.

1. Состояние на входе — верна гипотеза  $H_1$ .  
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза  $\hat{H}_1$ .
2. Состояние на входе — верна гипотеза  $H_1$ .  
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза  $\hat{H}_0$ .
3. Состояние на входе — верна гипотеза  $H_0$ .  
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза  $\hat{H}_0$ .
4. Состояние на входе — верна гипотеза  $H_0$ .  
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза  $\hat{H}_1$ .

Видно, что ситуации 1 и 3 соответствуют правильному различению сигналов, а 2 и 4 — ошибочному.

Для определения *количественного критерия эффективности различения* назначим плату за результат работы системы. Очевидно, плата зависит от состояния на входе и выходе и определяется потерями, которые несет «лицо», использующее результаты различения сигналов.

Выход	Вход	
	$H_0$	$H_1$
$\hat{H}_0$	$C_{00}$	$C_{01}$
$\hat{H}_1$	$C_{10}$	$C_{11}$

Введем платежную матрицу  $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$ ; где  $i, j = 0, 1$ ; первый индекс определяет принятую гипотезу на выходе (решение), второй — гипотезу на входе. Без потери общности рассуждений будем полагать плату за ошибки положительной, т.е.  $C_{10}, C_{01} > 0$ , и за верные решения  $C_{00}, C_{11} \leq 0$ . Элементы  $C_{ij}$  записаны в таблицу.

*Критерий оптимальности различителя.* В качестве критерия используем величину средней платы, т.е. ее математическое ожидание потерь. В теории принятия решений эту величину называют *средним байесовым риском*  $R$ . По правилу вычисления среднего дискретной случайной величины  $C$  получим

$$\begin{aligned} R = \mathbf{M}[C] &= C_{00}P(H_0 \cdot \hat{H}_0) + C_{11}P(H_1 \cdot \hat{H}_1) + \\ &+ C_{01}P(H_1 \cdot \hat{H}_0) + C_{10}P(H_0 \cdot \hat{H}_1), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где  $P(H_i \cdot \hat{H}_j) = P(H_i) \cdot P(\hat{H}_j / H_i)$  — вероятность совместного появления событий  $H_i$  и  $\hat{H}_j$ ;  $P(\hat{H}_j / H_i)$  — условная вероятность принять решение  $\hat{H}_j$  в предположении, что на входе верна гипотеза  $H_i$ .

Для наглядности дальнейших рассуждений используем геометрическую интерпретацию задачи. На рис. 3.7 условно показано  $n$ -мерное евклидово пространство

с осями координат  $ov_i (i = 1 \div n)$ . Множество возможных выборочных значений  $\mathbf{y}$  обозначим  $\mathbf{Y}$  (иногда его называют *пространством наблюдений*). Любому выборочному вектору  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$  соответствует точка с координатами  $(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$ . Одна из них  $y_i$  показана на рисунке.

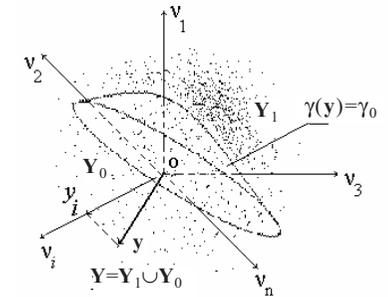


Рис. 3.7. Пространство наблюдений

Очевидно, что решающее правило в бинарном случае сводится к тому, чтобы найти способ разбиения множества  $\mathbf{Y}$  на сумму двух непересекающихся подмножеств  $\mathbf{Y}_0$  и  $\mathbf{Y}_1$ , т.е.  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{Y}_1$ . И далее, если  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$ , то принимается решение  $\hat{H}_0$ ; если  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_1$ , то принимается решение  $\hat{H}_1$ . Конкретное разбиение в  $n$ -мерном пространстве определено заданием уравнения поверхности, которое, в общем случае, имеет вид  $\gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = \gamma_0$ , где  $\gamma_0 = \text{const}$ . Таким образом, для всех  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$  выполняется неравенство  $\gamma(\mathbf{y}) < \gamma_0$  и для  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_1$  соответственно  $\gamma(\mathbf{y}) > \gamma_0$ . Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное решающее правило: функцию  $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$  и ее пороговое значение —

величину  $\gamma_0$ . Заметим, что любое преобразование наблюдаемых данных в статистических задачах называют *статистикой*.

Важно отметить, что статистика  $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$  осуществляет *редукцию исходных данных*: на входе «наблюдатель» располагает  $n$ -мерным вектором  $\mathbf{y}$ , который содержит информацию о переданном сигнале; на выходе после обработки получена скалярная величина  $\gamma$ . Очевидно, что при таком взаимно неоднозначном преобразовании первичная информация, в общем случае, может быть частично утрачена. Удивительно, однако, то, что существуют такие *статистики* (их называют *достаточными*), которые, *несмотря на редукцию первичных данных*, не ведут к потере полезной информации, содержащейся в них. Интуитивно понятно, что оптимальное решающее правило должно бы обладать этим замечательным свойством.

Оптимальное решающее правило найдем из условия *минимума среднего риска* (МСР) (3.32). Запишем выражения для условных вероятностей в виде интегралов от соответствующих  $n$ -мерных условных ПРВ по области  $\mathbf{Y}_0$ :

$$\left. \begin{aligned} P(\hat{H}_0/H_0) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} W(y_1, \dots, y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\hat{H}_1/H_0) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} W(y_1, \dots, y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\hat{H}_0/H_1) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} W(y_1, \dots, y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\hat{H}_1/H_1) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} W(y_1, \dots, y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \right\} (3.33)$$

Подставив выражения (3.33) в формулу (3.32), после группирования слагаемых с учетом того, что  $P(H_0) = p_0$  и  $P(H_1) = p_1$ , получим

$$R = p_0 C_{10} + p_1 C_{11} + \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} [p_1(C_{01} - C_{11})W(\mathbf{y}/H_1) - p_0(C_{10} - C_{00})W(\mathbf{y}/H_0)] d\mathbf{y}. \quad (3.34)$$

Первые два слагаемых в (3.34) постоянны и от выборки  $\mathbf{y}$  не зависят. Подынтегральное выражение при любых  $\mathbf{y}$  есть разность положительных величин, поскольку  $C_{01} > C_{11}$ ,  $C_{10} > C_{00}$  и условные функ-

ции ПРВ  $W(\mathbf{y}/H_i) \geq 0$ . Таким образом, минимум среднего риска (3.34) можно обеспечить, если для всех  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$  выполняется условие

$$[p_1(C_{01} - C_{11})W(\mathbf{y}/H_1) - p_0(C_{10} - C_{00})W(\mathbf{y}/H_0)] < 0. \quad (3.35)$$

Преобразуя неравенство (3.35) так, чтобы в правой части оказались постоянные величины, получим правило принятия решения  $\hat{H}_0$

$$\gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \frac{p_0(C_{10} - C_{00})}{p_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (3.36)$$

Таким образом, оптимальный различитель 2-х сигналов обрабатывает наблюдаемый сигнал  $\mathbf{y}$  и формирует на выходе решение:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_1, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) &= \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} > \gamma_0; \\ \hat{H}_0, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) &= \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \gamma_0, \end{aligned} \right\} (3.37)$$

где оптимальный порог  $\gamma_0 = p_0(C_{10} - C_{00})/p_1(C_{01} - C_{11})$ .

Смысл отношения условных ПРВ в (3.37) состоит в том, что оно пропорционально отношению соответствующих вероятностей. Вычислив его для конкретной выборки  $\mathbf{y}$ , различитель «может судить» о том, какая из 2-х гипотез более правдоподобна. По этой причине функцию  $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$  в специальной литературе называют *отношением правдоподобия* и обозначают, как правило,  $L(\mathbf{y})$ , что связано с английским словом *likelihood* — правдоподобие.

Структура устройства, которое реализует оптимальный алгоритм различения сигналов, определяется конкретным видом условных ПРВ.

### 3.5. Другие критерии оптимальности обнаружения и различения

Можно предположить, что в зависимости от критерия оптимальности может измениться правило принятия решения, т.е. способ обработки входного сигнала. Во всяком случае, повседневный опыт это подтверждает. Например, от критерия оценки работы сотрудника зависит стратегия его поведения. Покажем, что байесов критерий (МСР)

является вполне общим, т.е. к нему сводятся другие не менее целесообразные критерии. Предварительно представим (3.32) для величины  $R$  в виде

$$R = C_{00}p_0 P(\hat{H}_0/H_0) + C_{11}p_1 P(\hat{H}_1/H_1) + C_{01}p_1 P(\hat{H}_0/H_1) + C_{10}p_0 P(\hat{H}_1/H_0). \quad (3.38)$$

**Критерий минимума взвешенной вероятности ошибки.** Выше отмечалось, что в бинарной задаче проверки гипотез возможны 4 исхода, из которых два ошибочных и два верных. В теории проверки гипотез *ошибкой 1-го рода* называют случайное событие, состоящее в том, что система принимает решение  $\hat{H}_1$  в пользу гипотезы  $H_1$ , в то время как верна гипотеза  $H_0$ . Вероятность этой ошибки  $P(\hat{H}_1/H_0)$ . *Ошибка 2-го рода* состоит в появлении события  $\hat{H}_0$  при условии, что верна гипотеза  $H_1$ . Вероятность этой ошибки  $P(\hat{H}_0/H_1)$ . Очевидно, что вполне разумной является стратегия минимизации взвешенной вероятности ошибочных решений. Критерий тогда определяется величиной

$$K_{\text{ош}} = k_1 \cdot P(\hat{H}_1/H_0) + k_2 \cdot P(\hat{H}_0/H_1), \quad (3.39)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — весовые коэффициенты, зависящие от потерь, которые возникают вследствие допущенных ошибок. Сравнивая (3.38) и (3.39), видно, что величина  $K_{\text{ош}} = R$ , если  $C_{11} = C_{00} = 0$  и  $k_1 = p_0 C_{10}$ ,  $k_2 = p_1 C_{01}$ . Следовательно, данный критерий есть частный случай критерия МСР.

**Критерий идеального наблюдателя.** Критерий состоит в том, что в системе принятия решений необходимо обеспечить минимум полной вероятности ошибочных ситуаций. В соответствии с формулой полной вероятности имеем

$$P_{\text{ош}} = p_0 \cdot P(\hat{H}_1/H_0) + p_1 \cdot P(\hat{H}_0/H_1). \quad (3.40)$$

Идеальный наблюдатель полагает  $p_0 = p_1 = 0,5$ . По существу, это весовой критерий, когда  $k_1 + k_2 = 1$  и обе ошибки одинаково опасны. Подобная ситуация характерна для различения сигналов в цифровых системах связи, где  $s_0(t)$  и  $s_1(t)$  используются для передачи нуля и единицы. Таким образом, этот критерий также следует из критерия МСР.

**Критерий Неймана — Пирсона.** Для РЛ-систем характерна ситуация, когда сигнал  $s_0(t) = 0$ , т.е. необходимо различать две гипотезы:  $H_0$  — на входе только шум (в зоне обзора цели нет) и  $H_1$  — на входе РЛ-приемника есть сигнал  $s_1(t)$ . Как правило, вероятности  $p_0$  и  $p_1$  (отсутствия и наличия цели) неизвестны. Вероятность же ошибки 1-го рода  $P(\hat{H}_1/H_0) = F$  (fals), называемая *вероятностью ложной тревоги*, не должна превосходить заранее заданного значения.

Оптимальный РЛ-приемник обнаружения должен обеспечить максимальную величину  $P(\hat{H}_1/H_1) = 1 - P(\hat{H}_0/H_1) = D$  (detection) — *вероятности правильного обнаружения* при заданной величине  $F$ . Это условие носит название *критерия Неймана — Пирсона*. Данный критерий также следует из критерия МСР как частный случай [1].

Таким образом, для всех перечисленных выше критериев способ обработки остается неизменным, т.е. оптимальный различитель (обнаружитель) формирует величину  $L(y)$  — *отношение правдоподобия*. *Отличие устройств обработки состоит в выборе стоимостей за принятые решения, которые влияют только на порог  $\gamma_0$* .

### 3.6. Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссова шума. Структура оптимальных устройств

Пусть наблюдаемый сигнал  $y(t)$  содержит в качестве помехи аддитивный собственный шум приемника. Тогда выражение (3.30) принимает следующий конкретный вид:

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_0(t, \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.41)$$

Будем считать, что полезные сигналы  $s_0(t)$  и  $s_1(t)$  являются детерминированными. Важное условие, при котором решаем задачу, состоит в том, что *предполагаются точно известными моменты начала и окончания временного интервала, в котором находится полезный сигнал  $s(t)$* . Неизвестно лишь то, какой это сигнал:  $s_0(t)$  или  $s_1(t)$ .

Гауссов белый стационарный шум  $n(t)$  имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию  $K_n(\tau) = (N_0/2) \delta(\tau)$ .

Определим в явном виде отношение правдоподобия (3.37) для дискретной выборки из наблюдаемого сигнала (3.41). Для двух гипотез на входе приемника имеем

$$\begin{aligned} H_0 \Rightarrow \theta = 0: & \quad y_i = s_{0i} + n_i; \quad i = 1, \dots, m; \\ H_1 \Rightarrow \theta = 1: & \quad y_i = s_{1i} + n_i, \quad \text{где } s_{0i} = s_0(t_i), \quad n_i = n(t_i). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Будем считать, что энергетический спектр шума сосредоточен в полосе  $\pm f_b$ . Тогда при интервале дискретизации  $\Delta t = 1/2f_b$  согласно рис. 1.18 отсчеты гауссова шума статистически независимы. Дисперсия шума  $\sigma_n^2 = N_0 f_b = N_0 / (2\Delta t)$ . Регулярный сигнал выполняет роль среднего значения:  $H_0: \bar{y}_i = s_{0i}; H_1: \bar{y}_i = s_{1i}$ . С учетом (1.42)  $m$ -мерные условные ПРВ выборочного вектора  $\mathbf{y}$  для двух гипотез имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} H_0: \quad W(\mathbf{y}/H_0) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{0i})^2 \right]; \\ H_1: \quad W(\mathbf{y}/H_1) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{1i})^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где  $m = T/\Delta t$  — число отсчетов на интервале наблюдения. Подставляя (3.43) в (3.37), после выполнения простых алгебраических преобразований получим

$$L(\mathbf{y}) = \exp \left[ -\frac{\Delta t}{N_0} \left( \sum_{i=1}^m s_{1i}^2 - \sum_{i=1}^m s_{0i}^2 \right) \right] \cdot \exp \left[ \frac{2\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^m y_i (s_{1i} - s_{0i}) \right]. \quad (3.44)$$

Выражение (3.44) определяет искомое отношение правдоподобия для задачи различения 2-х сигналов с полностью известными параметрами на фоне помехи в виде квазизелого шума. Оно допускает простой предельный переход к случаю белого шума, когда  $f_b \rightarrow \infty$ , а  $\Delta t \rightarrow 0$ . При этом суммы в показателе степени первого сомножителя перейдут в интегралы, численно равные энергии различаемых сигналов:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^m s_{1i}^2 \cdot \Delta t \right) &= \int_0^T s_1^2(t, \lambda_1) dt = E_{s1}(\lambda_1), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^m s_{0i}^2 \cdot \Delta t \right) &= \int_0^T s_0^2(t, \lambda_0) dt = E_{s0}(\lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Сумма в показателе второго сомножителя перейдет в интеграл

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^m (y_i s_{1i} - y_i s_{0i}) \cdot \Delta t \right] = \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt. \quad (3.46)$$

Полагая, что энергия сигналов  $E_{s1}$  и  $E_{s0}$  не зависит от параметра  $\lambda$ , отношение правдоподобия окончательно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} L[y(t)] &= \exp \left( -\frac{E_{s1} - E_{s0}}{N_0} \right) \times \\ &\times \exp \left( \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) [s_1(t, \lambda_1) - s_0(t, \lambda_0)] dt \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Предельная форма (3.47) отношения правдоподобия (3.44) называется *функционалом отношения правдоподобия*. Процедура различения сигналов, состоящая в сравнении  $L[y(t)]$  с порогом  $\gamma_0$ , может быть заменена испытанием любой монотонной функции от этого отношения на соответствующий порог. Упрощение алгоритма оптимального различения достигается после логарифмирования (3.47). Выполнив его, оставим в левой части решающего правила (3.37) слагаемые, зависящие от наблюдаемой реализации  $y(t)$ . В итоге оптимальное правило различения принимает следующий вид:

$$z = \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \right] \left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 \\ > z_{\Pi} \\ \hat{H}_0 \\ < z_{\Pi} \end{array} \right\}, \quad (3.48)$$

$$z_{\Pi} = \ln \gamma_0 + (E_{s1} - E_{s0})/N_0, \quad (3.49)$$

где  $z_{\Pi}$  — модифицированный порог.

Структура каждого из интегралов в (3.48) совпадает со структурой выражения (1.15а), определяющего корреляционную функцию. По этой причине приемное устройство, реализующее для различения двух полностью известных сигналов алгоритм вида (3.48), называют *корреляционным приемником*.

Из (3.48) следует, что для вынесения решения о наличии на входе приемника сигнала  $s_1(t, \lambda_1)$  или  $s_0(t, \lambda_0)$  необходимо реализацию  $y(t)$  перемножить с копией каждого из ожидаемых сигналов, проинтегрировать произведение, вычесть выходные сигналы интеграторов

в момент  $t = T$  и результат сравнить с порогом. Если пороговый уровень превышен, то принимается решение о наличии на входе  $s_1(t)$ ; в противном случае — решение о наличии  $s_0(t)$ . Для критерия идеального наблюдателя и при величинах энергии  $E_{s1} = E_{s0}$ , что имеет место, например, при ЛЧМ и ФКМ, порог  $z_{\Pi} = 0$ . Таким образом, оптимальный приемник фактически принимает решение по знаку разности выходных сигналов интеграторов. На рис. 3.8,а показана структурная схема оптимального различителя, соответствующая алгоритму (3.48). Генераторы опорного сигнала (ГОС) формируют копии ожидаемых сигналов; устройство синхронизации (УС) обеспечивает тактирование работы различителя — запуск ГОС и считывание уровней сигналов

$$z_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt, \quad z_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \quad (3.50)$$

с выхода интеграторов в момент  $t = T$ .

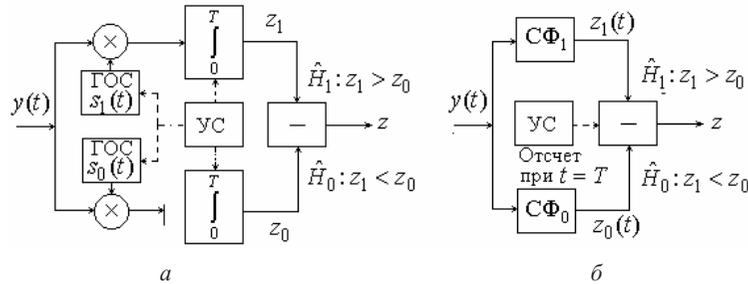


Рис. 3.8. Структурные схемы оптимальных различителей:  
вариант с корреляционной обработкой (а);  
вариант с применением согласованных фильтров (б)

Сравнивая (3.50) и (3.17), видно, что величины  $z_1$  и  $z_0$  можно получить как выходной сигнал  $z(t)$  СФ в момент времени  $t = t_0$ . Структурная схема различителя с использованием СФ приведена на рис. 3.8,б; синхронизатор обеспечивает сравнение выходных напряжений СФ в момент времени  $t = T$ . Задача, рассмотренная выше, типична для цифровых систем передачи информации.

Напомним, что в РЛ- и РН-системах гипотезе  $H_0$  соответствует ситуация, когда  $y(t) = n(t)$ , т.е. объекта в зоне обзора нет и на входе приемника присутствует только собственный шум. Очевидно, что структура оптимального РЛ-обнаружителя является частным случаем различителя. Алгоритм обработки в этом случае содержит один канал.

### 3.6.1. Статистические характеристики качества различения

Критерий качества решения задачи различения определен выражением (3.40). Вероятности двух ошибочных решений для критерия идеального наблюдателя (порог  $z_{\Pi} = 0$ ) согласно (3.48) равны

$$P(\hat{H}_1/H_0) = \int_0^{\infty} W(z/H_0) dz, \quad P(\hat{H}_0/H_1) = \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz, \quad (3.51)$$

где  $W(z/H_1)$  и  $W(z/H_0)$  — условные ПРВ сигнала  $z = z_1 - z_0$  на выходе разностного блока (3.48), (3.50). Если на входе верна гипотеза  $H_1$ , то случайная величина сигнала на выходе различителя

$$z = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] \cdot [s_1(t) - s_0(t)] dt. \quad (3.52)$$

Являясь линейным преобразованием гауссова шума, величина  $z$  также будет гауссовой. Расчет условного среднего значения и условной дисперсии величины  $z$  выполним по способу, который использовался при выводе (3.21). В итоге получим:

$$\mathbf{M}[z/H_1] = \frac{2E_s}{N_0} (1 - k_s), \quad D_{z/H_1} = \frac{4E_s}{N_0} (1 - k_s), \quad (3.53)$$

где величина

$$k_s = \frac{1}{E_s} \int_0^T s_1(t) s_0(t) dt \quad (3.54)$$

является по смыслу коэффициентом взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_0(t)$ .

Если на входе верна гипотеза  $H_0$ , то случайная величина

$$z = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] \cdot [s_1(t) - s_0(t)] dt. \quad (3.55)$$

Она имеет гауссову ПРВ с параметрами

$$\mathbf{M}[z/H_0] = -\frac{2E_s}{N_0} (1 - k_s) \quad \text{и} \quad D_{z/H_0} = \frac{4E_s}{N_0} (1 - k_s). \quad (3.56)$$

Условные ПРВ  $W(z/H_1)$  и  $W(z/H_0)$  показаны на рис. 3.9. Полная вероятность ошибочного различения сигналов для «идеального наблюдателя» равна

$$P_{\text{ош}} = 0,5 \left[ \int_0^{\infty} W(z/H_0) dz + \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz \right]. \quad (3.57)$$

Вероятности двух ошибок различения (3.51) численно равны площадям областей, которые на рис. 3.9 заштрихованы. Интегрирование в (3.57) гауссовых ПРВ сводится, как известно, к интегралу вероятности  $\Phi(x)$ . В итоге после вычислений получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{(E_s/N_0) \cdot (1 - k_s)}\right). \quad (3.58)$$

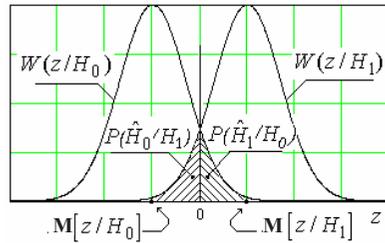


Рис. 3.9. Гауссова плотность распределения вероятностей сигнала  $z$  для двух гипотез:  $H_1$  — наличие сигнала  $s_1(t)$ ;  $H_0$  — наличие  $s_0(t)$

В случае, когда  $k_s = 0$ , говорят, что сигналы ортогональны. Одинаковые сигналы ( $k_s = 1$ ), очевидно, невозможно различить по форме и поэтому  $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(0) = 0,5$ . Наиболее эффективно различимы сигналы, одинаковые по форме и противоположные по знаку, т.е. для них  $k_s = -1$ . На рис. 3.10,а показаны результаты расчета по формуле (3.58). Зависимость  $P_{\text{ош}} = f[2E_s/N_0]$  при оптимальных методах приема сигналов называют кривыми потенциальной помехоустойчивости.

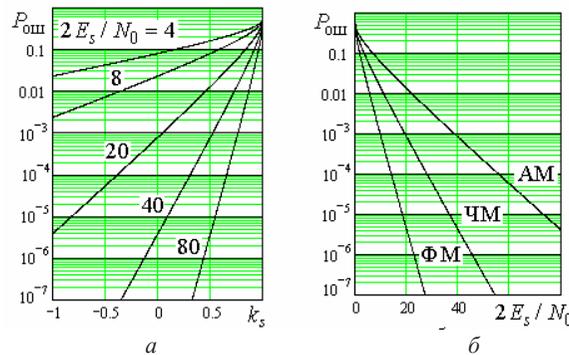


Рис. 3.10. Зависимость полной вероятности ошибки  $P_{\text{ош}}$  от коэффициента взаимной корреляции  $k_s$  между детерминированными сигналами (а) и кривые потенциальной помехоустойчивости (б) для АМ, ЧМ, ФМ

Интеграл вероятности  $\Phi(x)$  является монотонно возрастающей функцией аргумента. Поэтому при заданном отношении сигнала к шуму наибольшую помехоустойчивость (меньшую вероятность ошибки) будут иметь сигналы, для которых коэффициент взаимной корреляции минимален. Величина  $k_s$  изменяется от  $-1$ , когда  $s_1(t) = -s_0(t)$  (противоположные сигналы), до  $+1$ , когда  $s_1(t) = s_0(t)$ .

На рис. 3.10,б показаны эти кривые для трех видов модуляции: АМ с сигналами  $s_1(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$  и  $s_0(t) = 0$ ; ЧМ с сигналами  $s_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$  и  $s_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , причем обычно  $(\omega_1 - \omega_0) \cdot T \gg 1$  и  $k_s = 0$ ; ФМ с сигналами  $s_1(t) = A \cos(\omega t)$  и  $s_0(t) = -A \cos(\omega t)$ , т.е.  $k_s = -1$ . Из графиков следует, что при заданной энергии элементарных сигналов наибольшую потенциальную помехоустойчивость имеют ФМ-сигналы.

### 3.6.2. Статистические характеристики качества обнаружения

Вычислим показатели, определяющие качество работы оптимального обнаружителя. Выше было отмечено, что в РЛ-системах для задач обнаружения гипотеза  $H_0: y(t) = n(t)$ . Выражения сигнала  $z$  на выходе корреляционного приемника для двух гипотез следуют из (3.52) и (3.55). Условные ПРВ  $W(z/H_1)$  и  $W(z/H_0)$  также остаются гауссовыми. Их параметры (среднее значение и дисперсия) рассчитываются тем же способом, что и при выводе формулы (3.21). В итоге получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[z/H_1] = 2E_s/N_0; & D_{z/H_1} = 2E_s/N_0; \\ \mathbf{M}[z/H_0] = 0; & D_{z/H_0} = 2E_s/N_0. \end{cases} \quad (3.59)$$

На рис. 3.11 показаны условные ПРВ; они имеют гауссову форму и отличаются, как и следует из (3.59), только положением.

В соответствии с критерием Неймана – Пирсона необходимо задать вероятность ложной (fals) тревоги  $F = P(\hat{H}_1/H_0)$ , т.е. вероятность превышения порогового уровня  $z_{\text{П}}$  случайной величиной  $z$ , когда на входе приемника имеется только шум:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2E_s/N_0} \sqrt{2\pi}} \int_{z_{\text{П}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(2E_s/N_0)}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\text{П}}}{\sqrt{2E_s/N_0}}\right). \quad (3.60)$$

Вероятность правильного обнаружения (detection)  $D = P(\hat{H}_1/H_1)$  при этом оказывается равной:

$$D = \frac{1}{q_0 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{z_{\text{П}}}^{\infty} e^{-\frac{(z-q_0)^2}{2q_0^2}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\text{П}}}{q_0} - q_0\right), \quad (3.61)$$

где  $q_0 = \sqrt{2E_s/N_0}$  — отношение сигнала к шуму по напряжению на выходе коррелятора при  $t = T$  или на выходе СФ при  $t = t_0$ .

На рис. 3.11 показаны площади, соответствующие величинам  $D$  и  $F$ . Видно, что желание одновременного уменьшения  $F$  и увеличения  $D$  является противоречивым. При заданном значении  $F$  из (3.60) следует определить нормированный порог  $z_{\Pi}/q_0$  и затем согласно (3.61) вычислить вероятность правильного обнаружения  $D$ . Семейство кривых  $D = f(q_0)$  при  $F = \text{const}$  называют *характеристиками обнаружения*. Эти характеристики для оптимального обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами следуют из (3.60), (3.61) и показаны на рис. 3.12. Они позволяют для заданных значений  $F$  и  $D$  определить необходимое отношение сигнала к шуму.

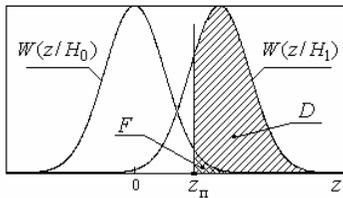


Рис. 3.11. Нормальные ПРВ при наличии и отсутствии сигнала:  $D$  — вероятность правильного обнаружения;  $F$  — вероятность ложной тревоги

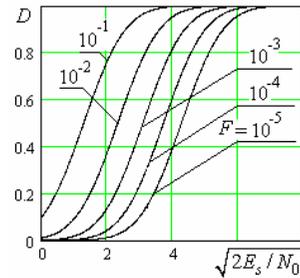


Рис. 3.12. Характеристики обнаружения детерминированного сигнала

Теория обнаружения утверждает, что *никакой другой способ обработки, кроме оптимального*, не может обеспечить лучшего сочетания параметров  $F, D, q_0$ . В этом и есть сила и практическая польза результатов теории.

В разделе 3 показана важная роль согласованного фильтра (или коррелятора) при извлечении полезной информации о наличии сигнала известной формы в смеси с шумом. Повторим, что *эффект улучшения отношения сигнала к шуму на выходе СФ по сравнению с таковым на входе объясняется по существу когерентным (синфазным) сложением составляющих полезного сигнала и некогерентным суммированием шума*. Например, в случае ФКМ-сигнала, со-

стоящего из  $M$  парциальных импульсов, комплексная амплитуда напряжения в максимуме на выходе *когерентного сумматора*  $\dot{S}_{\Sigma}$  после линии задержки с  $M$ -отводами (см. рис. 3.3–3.4) равна  $\dot{S}_{\Sigma} = M\dot{S}_1$  ( $\dot{S}_1$  — комплексная амплитуда парциального импульса). Соответственно мощность полезного сигнала  $P_{\Sigma} = M^2 S_1^2 / 2$ . Поскольку шумы *некогерентны* и суммируются по мощности, то их средняя мощность в полосе  $\Delta F_{opt}$  фильтра, согласованного с парциальным импульсом длительностью  $\Delta = \tau_n / M$ , равна  $P_n = M \sigma_n^2 = MN_0 \cdot \Delta F_{opt}$ . Полоса  $\Delta F_{opt} \approx 1/2\Delta$ , так как СФ имеет АЧХ вида  $|\sin x/x|^2$ . Для отношения сигнала к шуму по мощности на выходе СФ получим:  $q_0^2 = P_{\Sigma} / P_n = 2E_s / N_0$ , где полная энергия сигнала  $E_s = \tau_n \cdot S_1^2 / 2$ .

На рис. 3.13 показаны осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ-сигнала (7 позиционный код Баркера).

Длительность сигнала  $\tau_n$  соответствует семи клеткам на экране. На рис. 3.13,а,б показан ВЧ-процесс (смесь сигнала и шума) на входе фильтра и огибающая на выходе фильтра при отношении уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума примерно равном 10. Очевидно, что проблемы обнаружения такого сильного сигнала практически нет. Проблема обнаружения (различения) возникает, когда сигнал на входе СФ сравним по уровню с шумом и это видно на рис. 3.13,в,д. Положение существенно улучшается на выходе фильтра (рис. 3.13,з,е).

Следует обратить внимание на боковой всплеск слева от главного максимума на рис. 3.13,е. В данном случае он соответствует боковому лепестку функции неопределенности полезного сигнала (см. рис. 3.4). Однако в реальной РЛ-системе, когда число целей заведомо неизвестно, этот боковой максимум может принадлежать другому объекту, сигнал от которого более слабый. Это означает, в частности, что уровень боковых лепестков ФН сигнала имеет важное значение в плане достоверности получаемой в РТС информации. Он должен иметь вполне определенную величину, зависящую от динамического диапазона полезных сигналов на входе.

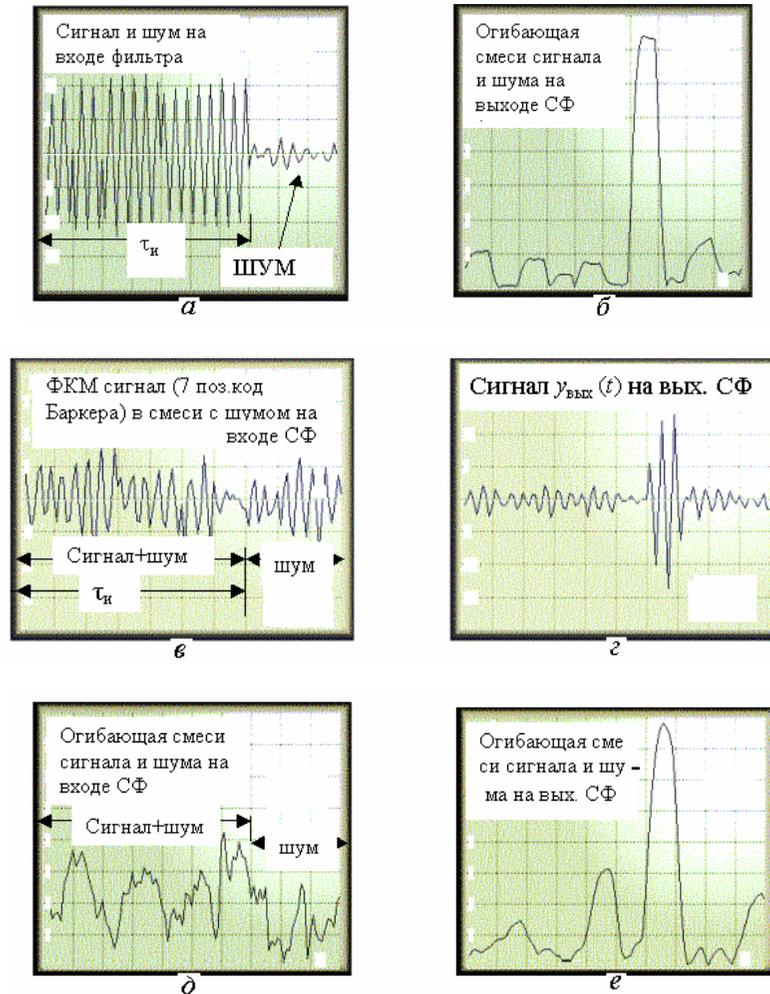


Рис. 3.13. Осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ-сигнала в смеси с гауссовым шумом:  
 а, б — на входе фильтра отношение сигнала к шуму равно 10;  
 в–е — отношение сигнала к шуму равно 1,5

### 3.6.3. Общие черты задач сыщика и оптимального обнаружителя

Алгоритмы обнаружения и различения сигналов, полученные выше, по своей логической структуре «сходны» с процедурой, которую реализует детектив при «поиске-обнаружении» преступника (полезный сигнал) в большой толпе (шум) людей. Действительно, он заведомо изучает облик и повадки преступника — собирает всю *априорную информацию* о нем. В самой благоприятной (простой) ситуации он имеет его фотографию (*опорный сигнал*) и точно знает, где и когда (в каком кафе и в какое время), как правило, появляется «сигнал — преступник». Все действия (рассуждения) и принятие решения осуществляет мозг детектива (вычислительное устройство). Проблема в том, что реально всегда существует помеха: есть «люди — шум» и неизвестно точно, есть ли там преступник сегодня.

Задача обнаружения, конечно, будет намного сложнее, если информация о сигнале станет не такой полной. Радиосигнал может иметь неизвестное время прихода (и преступник тоже) или, например, неизвестную и случайную амплитуду и начальную фазу. Преступник также может изменить черты лица. Наконец, и шум может быть не белый и не гауссов — люди могут быть в кафе, на пляже, где они (и преступник тоже) ... в темных очках. Что должен сделать сыщик, не нарушая закон, чтобы побудить посетителей снять очки, дабы повысить вероятность обнаружения? Оптимальный алгоритм обнаружения при этом окажется другим. В теории обнаружения получены мощные результаты для различных, встречающихся на практике, ситуаций.

Легко представить, что число обоснованно разнообразных задач обнаружения велико. Однако следует уяснить два очевидных обстоятельства: ставить задачу обнаружения (различения), *ничего не зная о сигнале*, не имеет смысла, и эффективность обнаружителя (различителя) всегда будет выше, если он *наиболее полно учитывает априорную информацию об ожидаемом сигнале и шуме*.

Читателю, который проявит глубокий интерес к задачам теории обнаружения сигналов, можно рекомендовать для изучения [7, 9, 13].

## 4. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ПАРАМЕТРАМ

В этом разделе будут рассмотрены основные аспекты второй обширной области теории статистических решений — теории оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех. Фактически в прикладной теории РТС представляют интерес оптимальные методы демодуляции сигналов (*первичной обработки*), если *информационное сечение* обозначено на входе приемника. Если же оно выбрано в НЧ-тракте РТС (*вторичная обработка*), то интерес представляют оптимальные алгоритмы выделения (*фильтрации*) НЧ-сообщений или их параметров. В последнем случае помехи должны быть приведены ко входу НЧ-тракта РТС.

### 4.1. Оценки параметров сигналов и их свойства

В целях простоты изучения данного вопроса будем считать, что информативное сообщение  $\lambda(t)$  является скалярным и постоянно на интервале обработки. Обозначим его неизвестное и постоянное значение  $\lambda$ . В общем случае полезный сигнал может также содержать один или несколько мешающих параметров  $\beta$ .

В теории оценивания известны два различных подхода к построению оценок параметров. Первый из них ориентирован на получение *интервальной оценки*. В этом случае для заданной *доверительной вероятности*  $P_d$  в устройстве обработки сигнала  $y(t)$  формируются две величины  $\lambda_n^*$  и  $\lambda_v^*$ . Они определяют нижнюю и верхнюю *границы доверительного интервала*, для которого выполняется условие

$$P[\lambda \in (\lambda_n^*; \lambda_v^*)] = P_d.$$

Таким образом, доверительный интервал — промежуток, который с вероятностью  $P_d$  «накрывает» неизвестное значение параметра  $\lambda$ .

Второй подход предполагает формирование *точечных оценок*. Задача оценивания параметра  $\lambda$  теперь состоит в том, чтобы по принятой (*наблюдаемой*) реализации сигнала, допустим на входе приемника  $y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t)$ ;  $t \in (0; T)$ , получить достаточно близкую к  $\lambda$

величину  $\lambda^* = E\{y(t)\}$ . Здесь  $E$  — функционал, определяющий преобразование реализации  $y(t)$ , заданной на интервале  $(0; T)$ , в скалярную величину  $\lambda^*$ , которую называют *оценкой параметра*  $\lambda$ . Под оценкой параметра  $\lambda^*$  обычно понимают некоторое *правило (способ)* получения  $\lambda^*$  по конкретной реализации входного сигнала.

Являясь неизвестным, параметр  $\lambda$  может (в зависимости от конкретной задачи) рассматриваться как случайная величина, постоянная на интервале обработки, либо как неизвестная и неслучайная величина. Например, в РЛ- и РН-системах при оценке дальности  $D$  до цели за время приема одного или нескольких отраженных радиопульсов можно считать, что параметр  $\lambda \equiv D = \text{const}$  и является случайной величиной. В подобных случаях ПРВ параметра  $\lambda$  до приема сигнала  $y(t)$  называют *априорной* и обозначают  $W_\lambda(\lambda)$ .

Оценка  $\lambda^*$ , будучи результатом преобразования конкретной реализации  $y(t)$ , содержащей шум, является случайной величиной. Изучая свойства оценок, обычно выделяют следующие три: несмещенность оценки; эффективность оценки; состоятельность или сходимость оценки. Поясним подробнее эти свойства.

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно математическому ожиданию оцениваемого параметра. Оценка является *безусловно несмещенной*, если  $\mathbf{M}[\lambda^*] = \mathbf{M}[\lambda]$ . Если же среднее значение оценки вычисляют при фиксированном  $\lambda$  и справедливо равенство  $\mathbf{M}[\lambda^*/\lambda] = \lambda$ , то оценка является *условно несмещенной*.

Очевидно, процесс оценивания сопровождается ошибками. Разность  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$  есть ошибка оценки. Среднее значение  $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^*$  называют *смещением оценки*. Для несмещенных оценок  $\bar{\varepsilon} = 0$ .

Рассеяние (разброс) ошибки характеризуют средним значением квадрата ошибки

$$\mathbf{M}[\varepsilon^2] = \bar{\varepsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4.1)$$

где  $W(\varepsilon)$  — ПРВ ошибки оценивания. Величина  $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2}$  имеет единицу измерения, совпадающую с таковой для оцениваемого параметра, и называется *среднеквадратичной ошибкой (СКО)*

оценки. Если в (4.1) использовать условную ПРВ  $W(\varepsilon/\lambda)$ , т.е. распределение вероятностей ошибки при фиксированном значении неизвестного параметра  $\lambda$ , то получим  $\sigma_{\varepsilon/\lambda}$  — условную среднеквадратичную ошибку.

В некоторых случаях удобно использовать величину дисперсии ошибки

$$D_{\varepsilon} = \mathbf{M} \left[ (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \right] = \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2. \quad (4.2)$$

Из этого выражения видно, что для несмещенных оценок ( $\bar{\varepsilon} = 0$ ) понятия дисперсии ошибки и среднего квадрата ошибки тождественны.

Несмещенная оценка называется эффективной, если она имеет наименьшую из всех возможных оценок дисперсию.

Оценка называется состоятельной в среднеквадратичном смысле, если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ (\lambda_T^* - \lambda)^2 \right] = 0, \quad (4.3)$$

где  $\lambda_T^*$  означает, что оценка получена в результате обработки реализации  $y(t)$ , длительность которой  $T$ . Другими словами, для состоятельной оценки средний квадрат ошибки при  $T \rightarrow \infty$  приближается к нулю.

В случае оценки векторного параметра  $\lambda^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  (знак транспонирования «Т» у вектора означает запись его в виде строки) устройство обработки (измеритель) формирует вектор оценок  $\lambda^{*T} = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ . Соответственно имеем вектор ошибок оценок  $\varepsilon^T = (\lambda - \lambda^*)^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ . Рассеяние ошибок в векторном случае характеризует ковариационная матрица ошибок оценивания. Например, РЛС часто работает в режиме совместного измерения дальности  $D$  и радиальной скорости  $V$  цели. Ковариационная матрица ошибок оценивания в 2-мерной задаче имеет вид

$$\mathbf{K}_{\varepsilon} = \mathbf{M} \left[ \varepsilon \cdot \varepsilon^T \right] = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_D^2} & \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} \\ \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} & \overline{\varepsilon_V^2} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

На главной диагонали матрицы  $\mathbf{K}_{\varepsilon}$  расположены средние квадраты ошибок по дальности и скорости; элементы другой диагонали равны ковариационному моменту ошибок двух параметров. Эта матрица симметрическая. Ее определитель, как правило, не равен нулю.

## 4.2. Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех

В разделе 3 отмечалось, что при решении задач синтеза структуры устройств обработки следует максимально учитывать реальную априорную информацию о статистических свойствах сигналов и помех. Степень полноты этой информации определяется содержанием конкретной задачи. Рассмотрим последовательно несколько способов построения оценок параметров в порядке уменьшения полноты априорной информации, требуемой для получения оценки.

### 4.2.1. Байесовские оценки параметров

Будем считать, что наблюдаемый сигнал  $y(t) = F[s(t, \lambda); n(t)]$ ;  $t \in [0; T]$ , т.е. получен в результате определенного взаимодействия сигнала  $s(t, \lambda)$ , зависящего от одного информативного параметра  $\lambda$ , и случайной помехи  $n(t)$ . Параметр  $\lambda$  является случайным и остается постоянным на интервале наблюдения. Его априорная ПРВ  $W_{\lambda}(\lambda)$  известна.

Статистические свойства помехи также известны. Это означает, что при дискретном отборе данных с шагом по времени  $\Delta t = T/m$  на интервале наблюдения  $[0; T]$  может быть задана  $m$ -мерная ПРВ помехи  $W_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = W_n(\mathbf{n})$ . Статистические свойства полезного сигнала определены заданием  $m$ -мерной условной ПРВ  $W_s(s/\lambda)$ .

Таким образом, при заданном операторе  $F$  и известных статистических свойствах сигнала и помехи определена  $m$ -мерная условная ПРВ наблюдаемого случайного сигнала  $W_y(y/\lambda)$ , а также совместная ПРВ  $W(y, \lambda) = W_y(y/\lambda) \cdot W_{\lambda}(\lambda)$ .

Параметр  $\lambda$  в задаче построения байесовских оценок является аналогом номера гипотезы в проблеме выбора решения при различении сигналов. Однако теперь  $\lambda$  есть непрерывная (или дискретная) случайная величина. Аналогом потерь (в задаче различения), связанных с принятием гипотезы  $\hat{H}_i$ , когда в действительности справедлива  $H_j$ , в задаче оценки является функция потерь  $C(\varepsilon)$ . Значение этой функции определяет потери, которые несет потребитель оценок вследствие ошибки  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$ , обусловленной расхождением оценки  $\lambda^*$

с истинным параметром  $\lambda$ .

В качестве критерия оптимальности оценок выступает *байесов риск*  $R$ , который определяется как статистическое среднее функции потерь по всем возможным реализациям наблюдаемого сигнала и оцениваемого параметра. Таким образом, получаем

$$R = \mathbf{M}[C(\varepsilon)] = \overline{C[\lambda - \lambda^*(\mathbf{y})]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C[\lambda - \lambda^*(\mathbf{y})] \cdot W(\mathbf{y}, \lambda) d\mathbf{y} d\lambda, \quad (4.5)$$

где  $\lambda^*(\mathbf{y})$  — оценка как функция наблюдаемого сигнала (выборки) при дискретном отборе данных. Интегрирование по  $\mathbf{y}$  в (4.5) является  $m$ -кратным, т.е.  $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_m$ .

Оценка  $\lambda_B^*(\mathbf{y})$ , минимизирующая средний риск (4.5), называется *байесовой оценкой*, а получающееся при этом минимальное значение  $R_{\min}$  среднего риска — *байесовым риском*.

Согласно формуле Байеса представим совместную ПРВ в виде

$$W(\mathbf{y}, \lambda) = W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) \cdot W_y(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

где  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  — апостериорная ПРВ параметра  $\lambda$  при конкретной выборке наблюдаемого сигнала  $\mathbf{y}$ . Подставим (4.6) в (4.5) и запишем выражение для среднего риска иначе

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{\infty} C[\lambda^*(\mathbf{y}) - \lambda] \cdot W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.7)$$

Внутренний интеграл в (4.7) вычисляется при фиксированном значении выборки  $\mathbf{y}$  и является по существу условным апостериорным средним (по множеству значений  $\lambda$ ) функции потерь. По смыслу это *условный (апостериорный) байесов риск*. Обозначим его  $R_{\lambda^*}(\mathbf{y})$ , что означает зависимость условного риска от  $\mathbf{y}$  при заданном способе формирования  $\lambda^*(\mathbf{y})$ . В итоге (4.7) примет вид

$$R = \overline{R_{\lambda^*}(\mathbf{y})} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\mathbf{y}) R_{\lambda^*}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.8)$$

Функция  $W_y(\mathbf{y}) \geq 0$  определяет свойства входного сигнала и явно от  $\lambda$  не зависит. Поэтому минимум среднего риска  $R$  можно обес-

печить путем минимизации условного риска

$$R_{\lambda^*}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} C[\lambda^*(\mathbf{y}), \lambda] \cdot W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda \quad (4.9)$$

за счет оптимального способа построения оценки  $\lambda^*(\mathbf{y})$ .

Обсудим возможный вид функции потерь. Здравый смысл позволяет считать целесообразным задание  $C(\varepsilon)$  со следующими свойствами: 1)  $C(0) = 0$  (безошибочная оценка не влечет потери); 2)  $C(\varepsilon) = C(-\varepsilon)$  (потери не зависят от знака ошибки); 3)  $C(\varepsilon)$  — функция неубывающая (с увеличением ошибки потери растут или могут быть постоянными). Этим требованиям удовлетворяют три классических функции: квадратичная, модульная и простая. Они показаны на рис. 4.1.

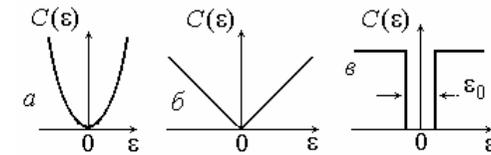


Рис. 4.1. Типичные функции потерь при оценке скалярного параметра:  $a$  — квадратичная;  $b$  — модульная;  $c$  — простая

Определим вид байесовской оценки при квадратичной функции потерь. Выражение (4.9) принимает при этом следующий вид

$$R_{\lambda^*}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda^*)^2 \cdot W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.10)$$

Видно, что байесовская оценка  $\lambda^*$ , обеспечивающая минимум (4.10), будет иметь минимальную среднеквадратичную ошибку. Полагая выполненными условия дифференцирования интеграла по параметру (по оценке), вычислим производную от условного риска (4.10) по оценке  $\lambda^*$  и приравняем ее нулю. В итоге получим уравнение

$$\left. \frac{\partial R_{\lambda^*}(\mathbf{y})}{\partial \lambda^*} \right|_{\lambda^* = \lambda_B^*} = \lambda_B^* - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, *байесовская оценка  $\lambda_B^*(\mathbf{y})$  при квадратичной функции потерь имеет минимум СКО* и определяется в виде

$$\lambda_B^*(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что оценка  $\lambda_B^*$  ( $\mathbf{y}$ ) равна апостериорному среднему значению параметра  $\lambda$  по условному распределению вероятностей  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  при фиксированном значении выборки  $\mathbf{y}$ .

Рассмотрим байесовскую оценку параметра  $\lambda$  при использовании функции потерь *модульного типа*. Подставив  $C(\varepsilon) = |\lambda^* - \lambda|$  в (4.9), имеем

$$R_{\lambda^*}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda^* - \lambda| W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \\ = \int_{-\infty}^{\lambda^*} (\lambda^* - \lambda) W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda - \int_{\lambda^*}^{\infty} (\lambda - \lambda^*) W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda.$$

Приравняв производную от условного риска по  $\lambda^*$  нулю, получаем уравнение для оценки

$$\int_{\lambda_B^*}^{\infty} W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda_B^*} W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.13)$$

Из (4.13) видно, что байесовская оценка при модульной функции потерь совпадает с определением медианы апостериорного распределения вероятностей  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  неизвестного параметра  $\lambda$ . Простая функция потерь (см. рис. 4.1,б) определяется выражением

$$C(\lambda, \lambda^*) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\lambda - \lambda^*| < \varepsilon_0, \\ 1 & \text{при } |\lambda - \lambda^*| \geq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

При использовании этой функции предполагается, что оценки, образуемые измерительной РТС, одинаково хороши, если ошибка не превышает по модулю  $\varepsilon_0$  (потери равны нулю). Оценки одинаково плохи, если модуль ошибки превышает  $\varepsilon_0$ . Применение функции потерь (4.14) оправдано, например, в системе радионаведения, когда поражение цели происходит при любом промахе, не превышающем некоторой величины.

Представим средний риск для функции потерь (4.14) в виде

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, \lambda^*) d\lambda d\lambda^* = \iint_{|\lambda - \lambda^*| \geq \varepsilon_0} W(\lambda, \lambda^*) d\lambda d\lambda^* = P[|\lambda - \lambda^*| > \varepsilon_0].$$

Из данного выражения видно, что минимизация среднего риска эквивалентна минимуму вероятности того, что модуль ошибки превысит заданное значение  $\varepsilon_0$ . Для определения решающего правила перепишем выражение условного риска в виде

$$R_{\lambda^*}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{(\lambda^* - \varepsilon_0)} W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda + \int_{(\lambda^* + \varepsilon_0)}^{\infty} W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.15)$$

Дифференцируя (4.15) по  $\lambda^*$  и приравнявая производную нулю, найдем условие, определяющее оценку:

$$W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) \Big|_{\lambda = \lambda^* - \varepsilon_0} = W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) \Big|_{\lambda = \lambda^* + \varepsilon_0}. \quad (4.16)$$

Таким образом, оптимальная оценка должна обеспечивать равные значения апостериорной ПРВ в точках  $(\lambda^* + \varepsilon_0)$  и  $(\lambda^* - \varepsilon_0)$ . Если функция  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  симметрична относительно некоторого  $\lambda = \tilde{\lambda}$ , то байесовская оценка совпадает с центром симметрии, т.е.  $\lambda_B^* = \tilde{\lambda}$ . Можно показать, что по мере уменьшения величины  $\varepsilon_0$  байесовская оценка при простой функции потерь приближается к значению параметра  $\lambda_{\max}$ , при котором апостериорная ПРВ  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  максимальна.

#### 4.2.2. Оценки максимального правдоподобия

Байесовская оценка при простой функции потерь соответствует положению максимума функции  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  и может быть определена как корень уравнения

$$\frac{\partial W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_B^*} = 0. \quad (4.17)$$

Поскольку логарифм есть монотонно возрастающая функция аргумента, то часто более удобно решать уравнение

$$\frac{\partial \ln [W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_B^*} = 0. \quad (4.18)$$

Используем известное соотношение для любой условной ПРВ

$$W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) = W_\lambda(\lambda) W_y(\mathbf{y}/\lambda) / W(\mathbf{y}) = k \cdot W_\lambda(\lambda) \cdot W_y(\mathbf{y}/\lambda),$$

где  $k$  — константа, не зависящая от  $\lambda$ , и подставим его в (4.18).

В итоге уравнение для оценки примет вид

$$\left. \frac{\partial \ln [W_y(\mathbf{y}/\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_B^*} + \left. \frac{\partial \ln [W_\lambda(\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_B^*} = 0. \quad (4.19)$$

Во многих практических задачах априорная неопределенность о параметре велика, т.е. функция  $W_\lambda(\lambda)$  достаточно широкая — имеет слабо выраженный максимум по  $\lambda$  или вовсе его не имеет. В этом случае второе слагаемое в (4.19) близко к нулю. В итоге оценка по максимуму апостериорной вероятности совпадает с небайесовской оценкой по максимуму функции  $L(\lambda) \equiv W_y(\mathbf{y}/\lambda)$ . Функцию  $L(\lambda)$  называют *функцией правдоподобия (ФП)*. Оценки параметров, определенные этим способом, называют *оценками максимального правдоподобия (МП)*. Таким образом, *функция правдоподобия есть функция неизвестного параметра  $\lambda$  и важно изменение ее значений при изменении параметра, подлежащего оцениванию*. В дальнейшем нижний индекс у ПРВ, как правило, не будем указывать.

Отметим, что существуют различные ситуации (такие, например, как измерение радиолокатором скорости вращения планеты), когда нет смысла предполагать, что параметр  $\lambda$  выбирается случайным образом из некоторого множества, на котором можно разумным способом задать априорную ПРВ. В этом случае использование оценок МП в сравнении с байесовскими в большей степени соответствует содержанию подобных задач.

При наличии в полезном сигнале случайных неинформативных параметров  $\boldsymbol{\beta}$  ФП принимает вид  $L(\lambda; \boldsymbol{\beta}) = W(\mathbf{y}/\lambda; \boldsymbol{\beta})$ . Определение МП-оценки  $\lambda_{МП}^*$  в этом случае связано с предварительным вычислением безусловной ПРВ выборки путем статистического усреднения, т.е.

$$W(\mathbf{y}/\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{y}/\lambda; \boldsymbol{\beta}) W(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta} = L(\lambda),$$

где  $W(\boldsymbol{\beta})$  — совместная ПРВ совокупности параметров  $\boldsymbol{\beta}$ . Интегрирование при этом выполняется по области возможных значений  $\boldsymbol{\beta}$ .

Таким образом, поиск оценок МП связан, в общем случае, с решением одного или системы (для векторного параметра  $\boldsymbol{\lambda}$ ) нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\left. \frac{\partial \ln [W(\mathbf{y}/\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{МП}^*} = 0. \quad (4.20)$$

Процесс определения МП-оценки равносильна выбору среди семейства ПРВ  $W(\mathbf{y}/\lambda)$ , образованного значениями параметра  $\lambda \in \Lambda$ , такой  $W(\mathbf{y}/\lambda_{МП}^*)$ , которая для конкретной выборки  $\mathbf{y}$  доставляет максимальное значение плотности вероятностей. Отсюда проистекает название — «*максимально правдоподобная оценка*». Любое значение  $\lambda$ , отличное от  $\lambda_{МП}^*$ , для которого  $L(\lambda; \mathbf{y}) < L(\lambda_{МП}^*; \mathbf{y})$ , приводит к меньшей вероятности по отношению к исходным данным, и поэтому оно менее удовлетворительно.

Оценки МП постоянных параметров могут иметь ряд примечательных свойств — они асимптотически (при увеличении объема выборки) состоятельны, эффективны и их ПРВ  $W(\lambda_{МП}^*/\lambda)$  является гауссовой. Поэтому метод построения оценок по максимуму ФП находит широкое практическое применение. Указанные свойства оценок МП реализуются в случае, если ФП обладает свойством регулярности. Суть этого свойства в том, что должно выполняться тождество [5]

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \lambda} W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y},$$

т.е. ПРВ  $W(\mathbf{y}/\lambda)$  должна допускать дифференцирование по параметру под знаком интеграла. В указанном тождестве  $T(\mathbf{y})$  является произвольной интегрируемой функцией. В практических задачах нарушение тождества часто связано с наличием у функции  $W(\mathbf{y}/\lambda)$  (как функции  $\mathbf{y}$ ) точек разрыва, которые изменяются в зависимости от  $\lambda$ .

В простейшем случае уравнение правдоподобия (4.20) является линейным и его решение можно найти аналитически. В общем случае для его решения необходимо использовать численные методы. Результативность численного метода зависит от характера функции правдоподобия и близости начального приближения к неизвестному корню уравнения. В частности, важное значение имеет унимодальность ФП, т.е. наличие у нее единственного максимума.



Решая (4.28) матричным методом, получаем выражение оценки МНК

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{МНК}}^* = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{y}, \quad (4.29)$$

где  $\mathbf{L} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}$  — матрица размера  $(r \times m)$ , определяющая линейное преобразование вектора наблюдений  $\mathbf{y}$ .

Важно отметить, что оптимальная по МНК оценка вектора неизвестных параметров сводится к линейному оператору (оператор  $\mathbf{L}$ ) над входными данными. Очевидно, это есть следствие линейности модели наблюдаемого сигнала по неизвестным параметрам и аддитивности помехи.

Получение оценки согласно (4.29) предполагает обращение матрицы  $\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}$  размера  $(r \times r)$ . Рассмотрим структуру этой матрицы для случая, когда  $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ . Выполнив перемножение матриц, получим

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m f_0^2(t_i) & \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_1(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_1^2(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_1(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m f_{r-1}^2(t_i) \end{vmatrix}. \quad (4.30)$$

Обращение матрицы (4.30) реализуется просто, если она является диагональной. Для этого необходимо, чтобы семейство функций  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_{r-1}(t)$  обладало свойством дискретной ортогональности, т.е.  $\sum_{i=1}^m f_k(t_i) f_l(t_i) = 0$  для любых  $k \neq l$ . Например, полиномы Чебышева имеют это свойство. При этом необходимо временной интервал наблюдения  $(0; T)$  привести к интервалу  $(-1; 1)$  и временные отсчеты формировать в моменты  $t_i = \cos[(2i-1)\pi/2m]$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ , причем  $m > k, l$ .

### 4.3. Статистические свойства оценок МНК

Определим смещение и дисперсию оценок МНК. Вычислим математическое ожидание оценки  $\mathbf{M}[\boldsymbol{\lambda}_{\text{МНК}}^*]$ . Для этого в (4.29) подставим выражение вектора наблюдений (4.23) и представим уравнение оценки в виде

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{МНК}}^* = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} (\mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}) = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{L} \mathbf{n}, \quad (4.31)$$

где  $\mathbf{L}$  — матрица, определяющая оператор оценки в (4.29). Таким образом, из (4.31) вектор ошибок оценки

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}} = (\boldsymbol{\lambda}_{\text{МНК}}^* - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{L} \mathbf{n} \quad (4.32)$$

и его статистическое среднее  $\mathbf{M}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}] = \mathbf{M}[\mathbf{L} \mathbf{n}] = \mathbf{L} \mathbf{M}[\mathbf{n}]$ . Из этого следует, что среднее значение ошибки обращается в нуль при  $\mathbf{M}[\mathbf{n}] = 0$ , т.е. оценки МНК являются несмещенными, если помеха  $n(t)$ , введенная в модель наблюдений (4.21), имеет нулевое среднее.

Определим ковариационную матрицу вектора ошибок (4.32) в виде

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}} = \mathbf{M}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] = \mathbf{L} \overline{\mathbf{n} \mathbf{n}^T} \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \mathbf{K}_n \mathbf{L}^T, \quad (4.33)$$

где  $\mathbf{K}_n$  — ковариационная матрица помехи. В развернутой форме с учетом выражения для  $\mathbf{L}$  матрица (4.33) имеет вид

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_n \mathbf{R} \mathbf{F} (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1}. \quad (4.34)$$

Обсудим вопрос, связанный с выбором весовой матрицы  $\mathbf{R}$ , которая определяет коэффициенты  $R_{ij}$  в выражении (4.25) для критерия оптимальности  $J$ . Очевидно, что существенный вклад в  $J$  вносят большие по величине невязки, которые возникают при большой интенсивности помехи. В связи с этим для снижения их влияния целесообразно задать весовые коэффициенты обратно пропорциональными интенсивности помехи. Можно строго показать [4], что при выборе  $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$  оценки параметров по МНК для линейной задачи вида (4.21) и при гауссовой помехе имеют минимальную дисперсию ошибки. При оценке векторного параметра  $\boldsymbol{\lambda}$  это означает минимизацию суммы средних квадратов ошибок по всем составляющим вектора  $\boldsymbol{\lambda}$ . Очевидно, что получение таких оценок требует априорной информации о корреляционных свойствах помехи, т.е. необходимо знать матрицу  $\mathbf{K}_n$ .

Подставим в (4.34) оптимальную весовую матрицу  $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$ . В итоге ковариационная матрица ошибок принимает простой вид

$$\mathbf{K}_{\varepsilon_{\text{МНКopt}}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{F})^{-1}. \quad (4.35)$$

Задача формирования оценок МНК усложнится, если математическая модель (4.21) будет нелинейной по параметрам. В этом случае

целевая функция, равная  $J(\boldsymbol{\lambda}^*) = \sum_{i=1}^m [y_i - s(t_i; \boldsymbol{\lambda}^*)]^2$ , не является квадратичной функцией от переменных  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{r-1}^*$ .

Поиск аналитического решения системы уравнений вида (4.26) с целью определения выражения для оценок МНК в нелинейных задачах, как правило, оказывается безуспешным. Проблема обычно решается подходящим численным методом. Возможность применения МНК в конкретной задаче зависит от скорости сходимости и точности выбранного численного метода. Большое значение при этом имеют оценки на первом шаге итеративного процесса поиска корней (начальное приближение) и сведения о характере целевой функции.

#### 4.4. Пример оценки неизвестного скалярного параметра

Рассмотрим одну из простых задач оценивания, когда выборочный вектор наблюдаемого сигнала  $\mathbf{y}$  образован совокупностью отсчетов вида

$$y_i = \lambda + n_i, \quad (4.36)$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $n_i$  — дискретный отсчет стационарного гауссова шума с равномерным энергетическим спектром  $G_n(\omega) = N_0/2$  в полосе  $\omega \in (-2\pi f_b; 2\pi f_b)$  и средним  $\bar{n}_i = 0$ ;  $\lambda$  — *неизвестный параметр*.

**Нахождение оценки МП параметра  $\lambda$ .** Прежде получим в явном виде функцию правдоподобия  $L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$ . Будем полагать, что интервал дискретизации  $\Delta t = 1/(2f_b)$ . Тогда согласно (1.45) дискретная последовательность  $n_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) является последовательностью статистически независимых случайных величин. Из (4.36) следует, что  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) есть стационарная гауссова последовательность независимых случайных величин со средним  $\bar{y}_i = \lambda$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{y}/\lambda) &= \prod_{i=1}^m W(y_i/\lambda) = \prod_{i=1}^m \frac{\exp[-0,5\sigma_n^{-2}(y_i - \lambda)^2]}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} = \\ &= C \cdot \exp\left[-0,5\sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2\right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $\lambda$ ;  $\sigma_n^2 = \bar{n}_i^2 = N_0 f_b$  — дисперсия дискретного шума.

Из (4.37) найдем логарифм функции правдоподобия

$$\ln[L(\lambda)] = \ln[W(\mathbf{y}/\lambda)] = \ln C - 0,5\sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2. \quad (4.38)$$

Таким образом, уравнение правдоподобия имеет вид

$$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda} = \sum_{i=1}^m y_i - m\lambda = 0$$

и в итоге для МП оценки параметра  $\lambda$  получаем

$$\lambda_{\text{МП}}^*(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i. \quad (4.39)$$

Выражение оценки (4.39) по существу является средним арифметическим выборочных отсчетов.

**Нахождение оценки МНК параметра  $\lambda$ .** В соответствии с (4.22), (4.23) матрица  $\mathbf{F}$  размера  $(m \times r)$  имеет  $m$  строк и один столбец. Определим весовую матрицу  $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1} = \sigma_n^{-2} \cdot \mathbf{E}$ , тогда целевая функция (4.25) для оценок МНК примет вид

$$J(\boldsymbol{\lambda}^*) = (1/\sigma_n^2) \cdot \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda^*)^2,$$

который с точностью до постоянной совпадает с выражением (4.38) для логарифма функции правдоподобия. Непосредственно из выражения (4.29) для оценки МНК получаем

$$\lambda_{\text{МНК}}^*(\mathbf{y}) = \left[ |1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot |1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i.$$

Сравнивая полученную оценку с выражением (4.39) для  $\lambda_{\text{МП}}^*$ , видим, что в данном случае они полностью совпадают. Внимательное рассмотрение проделанных выше простых преобразований показывает, что совпадение оценок обусловлено, во-первых, линейностью математической модели и, во-вторых, гауссовым характером ПРВ аддитивного шума.

Найдем дисперсию оценки  $\lambda_{\text{МНК}}^*$ . Отметим, что согласно (4.36) дисперсия единичного отсчета  $D_{y_i} = \sigma_n^2$ . Учтем, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме их дисперсий. В итоге получим

$$\mathbf{D}[\lambda_{\text{МНК}}^*] = \mathbf{D}\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i\right] = \frac{\sigma_n^2}{m}. \quad (4.39a)$$

Отсюда следует, что рассеяние оценки МНК при неограниченном увеличении объема  $m$  выборки становится бесконечно малым.

**Определение байесовской оценки параметра  $\lambda$ .** Предположим теперь, что неизвестный параметр  $\lambda$  является случайной величиной с гауссовой априорной ПРВ, параметры которой  $m_\lambda$  и  $\sigma_\lambda$ , т.е.

$$W_\lambda(\lambda) = \left[1/(\sigma_\lambda \sqrt{2\pi})\right] \cdot \exp\left[-0,5\sigma_\lambda^2(\lambda - m_\lambda)^2\right]. \quad (4.40)$$

Полагаем также, что  $\lambda$  статистически не зависит от помехи  $n(t)$ . В этом случае безусловная  $m$ -мерная ПРВ выборочного вектора  $\mathbf{y}$  в (4.23) также гауссова с параметрами  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{m}_y = \mathbf{F}m_\lambda$  и диагональной корреляционной матрицей вида  $\mathbf{K}_y = (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2) \cdot \mathbf{E}$ , т.е.

$$W(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)^{m/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)}{2(\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)}\right]. \quad (4.41)$$

Условная ПРВ  $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$  (функция правдоподобия) соответствует (4.37) и в матричной форме имеет вид

$$W_y(\mathbf{y}/\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma_n^m} \exp\left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)}{2\sigma_n^2}\right]. \quad (4.42)$$

Подставляя (4.40)–(4.42) в (4.6), найдем апостериорную ПРВ  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ , которая также имеет гауссов вид. Выполнив группирование слагаемых в показателе экспоненты функции  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ , получим выражение для апостериорного математического ожидания параметра, т.е. для оптимальной байесовской оценки, в следующем виде:

$$\lambda_{\text{Б}}^*(\mathbf{y}) = \frac{m_\lambda/\sigma_\lambda^2 + (1/\sigma_n^2) \sum_{i=1}^m y_i}{1/\sigma_\lambda^2 + m/\sigma_n^2} = \frac{m_\lambda + \eta \sum_{i=1}^m y_i}{1 + m\eta}, \quad (4.43)$$

где  $m$  — объем выборки;  $m_\lambda$  — среднее значение параметра  $\lambda$ ;  $\eta = \sigma_\lambda^2/\sigma_n^2$  — отношение априорной дисперсии оцениваемого параметра к дисперсии помехи. Рассмотрим (4.43) в 2-х предельных формах.

1. При  $\eta \rightarrow 0$ , когда, допустим,  $\sigma_\lambda \rightarrow 0$  или  $\sigma_n \rightarrow \infty$ , оценка  $\lambda_{\text{Б}}^* \rightarrow m_\lambda$ . Это и ясно, поскольку в первом случае параметр  $\lambda$  априорно точно задан, и реальные данные не могут дать новой информации, а во втором случае интенсивность помехи так велика, что обработка выборочных данных теряет смысл. В обоих случаях байесовская оценка параметра приравнивается заданному среднему значению  $m_\lambda$ .

2. При  $\sigma_\lambda \rightarrow \infty$  (априорная информация отсутствует) в итоге имеем

$$\lambda_{\text{Б}}^* = (1/m) \sum_{i=1}^m y_i = \lambda_{\text{МП}}^*,$$

т.е. байесовская оценка совпадает с оценкой МП.

Рассмотрим вопрос смещения байесовских оценок. Введем величину относительного смещения условной (при заданном  $\lambda$ ) байесовой оценки

$$\delta = \frac{\overline{\lambda_{\text{Б}}^*/\lambda} - \lambda}{\lambda}, \quad (4.44)$$

где  $\overline{\lambda_{\text{Б}}^*/\lambda} = \mathbf{M}[\lambda_{\text{Б}}^*/\lambda]$  — условное среднее оценки (4.43). Из (4.36)

условное среднее  $\mathbf{M}[y_i/\lambda] = \lambda$ . Учитывая это, найдем среднее оценки (4.43) и выделим из полученного соотношения величину (4.44). В итоге получим

$$\delta = \frac{\delta_\lambda}{1 + m\eta}, \quad (4.45)$$

где  $\delta_\lambda = (m_\lambda - \lambda)/\lambda$  — относительное отклонение случайного параметра  $\lambda$  от его среднего значения  $m_\lambda$ .

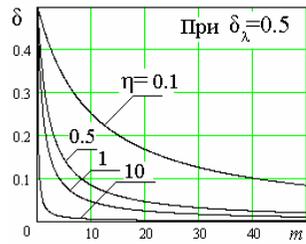


Рис. 4.2. Зависимость относительного смещения  $\delta$  условной байесовской оценки параметра  $\lambda$  от объема выборки  $m$

своей форме и имеет вид

$$D_{\lambda^*_B} = \frac{\sigma_\lambda^2}{1 + m(\sigma_\lambda^2/\sigma_n^2)}. \tag{4.46}$$

Полагая в этом выражении  $\sigma_\lambda^2 \rightarrow \infty$ , что эквивалентно отсутствию априорной информации, когда  $\lambda_B^* \rightarrow \lambda_{МП}^*$ , получаем соотношение для дисперсии оценки МП скалярного параметра  $\lambda$  в виде

$$D_{\lambda_B^*} = \frac{\sigma_n^2}{m} = D_{\lambda_{МП}^*}. \tag{4.47}$$

Данное выражение, как и следовало ожидать, совпадает с (4.39а) для дисперсии оценки МНК.

В заключение сделаем замечание, связанное с формой представления оператора формирования оценки. Вычисление оценок в соответствии с (4.39) или (4.29) предполагает наличие (запоминание) в вычислителе полного ( $m$ -мерного) выборочного вектора  $\mathbf{y}$  и последующую его обработку. В случае, если возникает необходимость продолжить наблюдение (прием), предстоит все вычисления повторить заново. В большинстве практических задач это ведет к неоправданному завышению требований к памяти и производительности вычислителя. По этой причине в реальных устройствах такой (*параллельный*) способ используется редко. Широкое применение находят

На рис. 4.2 показана зависимость  $\delta(m)$ . Таким образом, условная байесовская оценка при фиксированном объеме выборки в общем случае имеет смещение, тем большее, чем меньше величина  $\eta$  и чем сильнее оцениваемый параметр отклонился от среднего.

Дисперсия байесовской оценки  $D_{\lambda^*_B} = (\lambda - \lambda_B^*)^2$ , так же, как и сама оценка, определяется после приведения ПРВ  $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$  к стандартной гауссовской форме и имеет вид

последовательные алгоритмы обработки, в которых оценка параметра  $\lambda_k^*$  на текущем  $k$ -м шаге по времени образуется в виде суммы двух слагаемых: оценки на предыдущем шаге  $\lambda_{(k-1)}^*$  и поправки (обновления), зависящей от нового наблюдения  $y_k$ , полученного на текущий момент  $t_k = k\Delta t$ . Покажем это на примере алгоритма (4.39). Оценку на текущем  $k$ -м шаге можно представить в следующей форме:

$$\lambda_k^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i = \frac{1}{k} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k \right] = \frac{1}{k} \left[ (k-1) \cdot \lambda_{(k-1)}^* + y_k \right]$$

или

$$\lambda_k^* = \lambda_{(k-1)}^* + \frac{1}{k} \left[ y_k - \lambda_{(k-1)}^* \right]; \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.48}$$

Формирование оценки согласно (4.48) предполагает принудительное введение начального значения оценки  $\lambda_0^*$ . В данном случае это может быть первое выборочное значение  $y_1$ , т.е. как последовательный, алгоритм начнет работать с шага  $k = 2$ . Структура выражения (4.48) является типичной для последовательных алгоритмов оценивания параметров. На рис. 4.3 она показана в виде схемы устройства, в состав которого входит дискриминатор с изменяющимся во времени коэффициентом усиления.

Рассмотренный частный пример позволяет сформулировать следующие общие закономерности теории оценок.

1. Байесовские оценки параметров по максимуму апостериорной ПРВ  $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$  и максимально правдоподобные оценки сближаются по мере уменьшения априорной информации о параметре.

2. Условные байесовские оценки (при фиксированном значении неизвестного параметра) имеют смещение, которое уменьшается при увеличении объема выборки.

3. Оценки параметров по методу наименьших квадратов являются несмещенными, если аддитивная помеха имеет нулевое среднее значение.

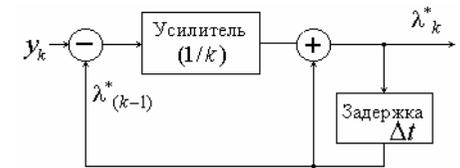


Рис. 4.3. Структурная схема последовательного алгоритма оценки постоянной величины

4. Оценки по методу наименьших квадратов при соответствующем выборе матрицы весовых коэффициентов ( $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$ ) в линейных по параметрам моделях наблюдений с аддитивной гауссовой помехой являются строго оптимальными и обеспечивают минимум дисперсий оценок.

#### 4.5. Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы

В п. 4.2.1 отмечалась общность задач различения гипотез и оценки параметров. Оптимальная процедура обработки наблюдаемого сигнала  $y(t)$  в задаче различения (обнаружения) сигналов предполагает образование статистики в виде отношения правдоподобия  $L(\mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/H_1)/W(\mathbf{y}/H_0)$  и функции правдоподобия  $L(\lambda) = W(\mathbf{y}/\lambda)$  в задаче оценки параметра.

Пусть гипотеза  $H_1$  связана с наличием полезного сигнала  $s(t, \lambda)$ , а  $H_0$  — с его отсутствием. Поскольку  $W(\mathbf{y}/H_0)$  теперь от  $\lambda$  не зависит и  $W(\mathbf{y}/H_1) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$ , то отношение правдоподобия и функция правдоподобия совпадают с точностью до постоянного множителя, не зависящего от  $\lambda$ . Этот факт позволяет при решении задач оценки параметров сигнала использовать результаты, полученные в подразделе 3.6.

Допустим, на интервале времени  $[0; T]$  наблюдается сумма  $y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t)$ , где  $s(t, \lambda_0)$  — полезный сигнал, известный с точностью до параметра, истинное значение которого  $\lambda_0$ ;  $n(t)$  — стационарный белый гауссов шум. Используя (3.47) при  $s_0(t) = 0$  и полагая параметр  $\lambda$  неэнергетическим, представим ФП параметра  $\lambda$  в виде

$$L(\lambda) = \text{const} \cdot \exp[z(\lambda)],$$

$$\text{где } z(\lambda) = \ln L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t, \lambda) dt + C \quad (4.49)$$

— логарифм ФП. В дальнейшем всегда постоянная  $C$ , как несущественная, не участвует в записи  $z(\lambda)$ .

Важно отметить, что явная зависимость от  $\lambda$  в (4.49) обусловлена тем, что только опорный (ожидаемый) сигнал  $s(t, \lambda)$  функционально связан с  $\lambda$ .

Формирование максимально правдоподобной оценки  $\lambda_{\text{МП}}^*$  предполагает определение  $\lambda$ , при котором (4.49) имеет глобальный максимум. Эта оценка, если она существует, является корнем уравнения правдоподобия

$$\frac{d \ln [L(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} [z(\lambda)] \Big|_{\lambda=\lambda_{\text{МП}}^*} = 0. \quad (4.50)$$

Аппаратное решение уравнения (4.50) можно реализовать различными способами. Первый из них предполагает фиксацию (запоминание) принятого сигнала  $y(t)$  с последующим расчетом  $z(\lambda)$  для заданного множества значений  $\{\lambda_i\}$ , где  $i = 1, \dots, M$  и  $\lambda_i \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ .

В качестве оценки выбирается  $\lambda_{\text{МП}}^* = \arg \left( \max_{i \in 1, \dots, M} z(\lambda_i) \right)$ , т.е. одно из  $M$  значений  $\lambda_i$ , при котором ФП имеет наибольшую величину. Данный способ связан с большими затратами времени и практически редко применяется.

Второй способ реализуется в многоканальном (параллельном) вычислителе, структура которого показана на рис. 4.4. Оптимальный измеритель состоит из генератора сетки  $M$  опорных сигналов и  $M$  идентичных каналов, в каждом из которых формируется логарифм ФП для некоторого значения параметра  $\lambda_i$ . В решающем устройстве происходит сравнение множества  $\{z(\lambda_i)\}$  и выбор номера канала с наибольшим значением уровня входного сигнала. Оценка

$$\lambda_{\text{МП}}^* = \arg \left[ \max_{\lambda_i} z(\lambda_i) \right].$$

Количество каналов, очевидно, оказывает влияние на точность измерения параметра  $\lambda$ .

Следует отметить, что в структуре оптимального измерителя (см. рис. 4.4), подобно оптимальному различителю (подраздел 3.6), реализуется вычисление *корреляционных интегралов*. В подразделе 3.2 при рассмотрении преобразований сигналов в согласованном фильтре было показано, что они сходны с операцией формирования корреляционного интеграла. Таким образом, и в данном случае оптимальный измеритель корреляционного типа может быть выполнен на основе применения, в общем случае, системы СФ.

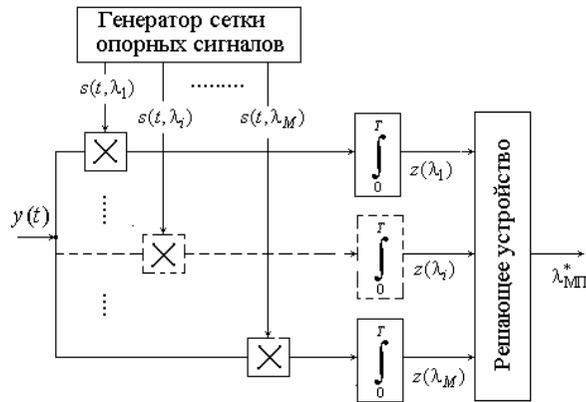


Рис. 4.4. Общая структурная схема устройства формирования МП оценки параметра сигнала известной формы

Наконец, существует косвенный метод получения оценки с использованием дискриминатора. При этом предполагается, что известно опорное значение оцениваемого параметра  $\lambda_{оп}$ , попадающее в область сигнального выброса ФП. Представим логарифм ФП (4.49) рядом Тейлора в окрестности точки  $\lambda_{оп}$

$$z(\lambda) \approx z(\lambda_{оп}) + \left. \frac{d}{d\lambda} z(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_{оп}} \cdot (\lambda - \lambda_{оп}) + \frac{d^2}{2 d\lambda^2} z(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_{оп}} \cdot (\lambda - \lambda_{оп})^2.$$

Обозначим производные логарифма ФП в точке  $\lambda_{оп}$  символами

$$A_{оп} = \frac{d}{d\lambda} z(\lambda_{оп}), \quad B_{оп} = \frac{d^2}{d\lambda^2} z(\lambda_{оп}). \quad (4.51)$$

Подставим (4.51) в (4.50) и запишем уравнение правдоподобия

$$A_{оп} + B_{оп} (\lambda_{МП}^* - \lambda_{оп}) = 0,$$

из которого следует выражение для оптимальной оценки в виде

$$\lambda_{МП}^* = \lambda_{оп} - \frac{A_{оп}}{B_{оп}}. \quad (4.52)$$

Структурная схема оптимального дискриминатора, построенного в соответствии с уравнением (4.52), приведена на рис. 4.5. Первый (верхний) канал оптимального дискриминатора формирует сигнал рас-

согласования, а второй регулирует коэффициент усиления в зависимости от мощности сигнала и помехи. Первый канал называют дискриминатором, а второй — блоком точности. Основное применение дискриминаторы находят в схемах следящих измерителей. Значение опорного параметра обычно формируется в блоке поиска.

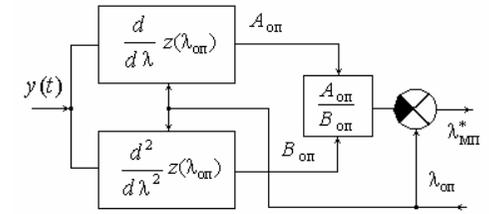


Рис. 4.5. Структурная схема оптимального дискриминатора

#### 4.6. Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссова шума

Рассмотрим задачу оценки амплитуды  $a$  радиоимпульса известной формы  $s(t;a) = a \cdot s_1(t)$ , поступающего в сумме с гауссовым белым шумом  $n(t)$  на вход приемного устройства-измерителя. Сигнал на входе приемника

$$y(t) = a s_1(t) + n(t) = a S_0(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.53)$$

где  $S_0(t)$  — функция, определяющая форму нормированной огибающей;  $a$  — амплитуда сигнала — максимальное значение функции  $a S_0(t)$  на интервале наблюдения;  $\omega$  — несущая частота;  $\Phi(t)$  — закон ФМ;  $\varphi$  — начальная фаза. Считаем, что все параметры сигнала (4.53), исключая  $a$ , известны.

Запишем на основании (3.47) функцию правдоподобия энергетического параметра  $a$ . В данном случае  $E_{s0} = 0$ ;  $s_0(t) = 0$  и в итоге имеем

$$L(a) = \exp(-E_s/N_0) \cdot \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) a s_1(t) dt\right), \quad (4.54)$$

где  $E_s = a^2 \int_0^T s_1^2(t) dt = a^2 E_1$  — энергия сигнала;  $E_1$  — энергия весовой функции  $s_1(t)$ . Уравнение правдоподобия принимает следующий вид:

$$\frac{d}{da^*} \left[ \ln L(a^*) \right] = -\frac{2a^* E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t) dt = 0.$$

Корень уравнения — МП оценка параметра  $a$

$$a_{\text{МП}}^* = \frac{1}{E_1} \int_0^T y(t) s_1(t) dt. \quad (4.55)$$

Соотношение (4.55) определяет структуру оптимального измерителя, которая показана на рис. 4.6. Она состоит из генератора весовой функции  $s_1(t)$ , интегратора за время обработки  $(0 \div T)$  и масштабного усилителя с коэффициентом  $(1/E_1)$ .

Определим среднее и дисперсию полученной оценки. Полагая истинное значение амплитуды равным  $a_0$ , найдем

$$\mathbf{M} \left[ a_{\text{МП}}^* \right] = \frac{1}{E_1} \int_0^T \left[ a_0 s_1(t) + \mathbf{M} [n(t)] \right] s_1(t) dt = a_0,$$

т.е. оценка  $a_{\text{МП}}^*$  несмещенная.



Рис. 4.6. Структура оптимального измерителя амплитуды полностью известного радиоимпульса

Для определения дисперсии оценки  $D_{a_{\text{МП}}^*}$  положим максимальное значение нормированной огибающей  $\max [S_0(t)] = 1$  и представим энергию весовой функции согласно п. 1.3.3 в виде

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt = \frac{1}{2} \tau_{\text{и}},$$

где  $\tau_{\text{и}}$  — величина, равная в данном случае длительности радиосигнала

$$\tau_{\text{и}} = \int_0^T S_0^2(t) dt.$$

В итоге для дисперсии оценки получаем соотношение [9]

$$D_{a_{\text{МП}}^*} = \mathbf{M} \left[ \left( a_{\text{МП}}^* - a_0 \right)^2 \right] = \iint_{00}^{TT} K_n(t_2 - t_1) s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{\tau_{\text{и}}}. \quad (4.56)$$

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды сигнала с известными остальными параметрами пропорциональна интенсивности белого шума и обратно пропорциональна длительности радиоимпульса.

#### 4.7. Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия

Вычисление дисперсии оптимальных оценок при произвольном отношении сигнала к шуму часто является весьма сложной задачей. Практический же интерес представляет режим работы измерительной РТС, в котором обеспечивается достаточно высокая точность. В противном случае измерения просто теряют смысл. В большинстве случаев СКО параметра не превышает 5–10% от измеряемой величины. Высокая точность в оптимальных РТС обеспечивается при достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности мощности белого шума: обычно  $q_0 = \sqrt{(2E_s/N_0)} \geq (3 \div 5)$ .

При больших величинах  $q_0$  для определения статистических характеристик оценки  $\lambda_{\text{МП}}^*$  успешно применяется метод малого параметра, под которым понимают величину  $\varepsilon = q_0^{-1}$  [9]. Рассмотрим кратко этот метод, полагая параметр  $\lambda$  неэнергетическим.

Подставим в формулу (4.49) для логарифма ФП сигнал  $y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t)$  и запишем  $z(\lambda)$  в развернутой форме

$$z(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t; \lambda) dt = z_s(\lambda; \lambda_0) + z_n(\lambda) =$$

$$= \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t; \lambda_0) s(t; \lambda) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t; \lambda) dt, \quad (4.57)$$

где  $z_s(\lambda; \lambda_0)$  и  $z_n(\lambda)$  — сигнальная и шумовая составляющие логарифма ФП;  $\lambda_0$  — истинное значение параметра. Отметим, что постоянная величина в (4.57), как и ранее, отброшена, поскольку она не влияет на конечный результат.

При полезном входном сигнале  $s(t; \lambda_0)$  известной формы сигнальная функция  $z_s(\lambda; \lambda_0)$  является неслучайной. Выражение  $z_s(\lambda; \lambda_0)$  по существу сходно с сигнальной функцией, которая введена в первом разделе (1.10), (1.11). В соответствии с логикой введения этой функции она имеет максимум при  $\lambda = \lambda_0$ .

Случайный характер ФП  $L(\lambda)$  обусловлен слагаемым  $z_n(\lambda)$ , для которого согласно (4.57) среднее значение  $\overline{z_n(\lambda)} = 0$ . По этой причине положение максимума функции  $z(\lambda)$ , т.е. корень уравнения правдоподобия и соответственно оценка  $\lambda_{МП}^*$ , оказываются случайными (изменяются при различных реализациях шума на интервале наблюдения). Очевидно, что в первом приближении можно положить

$$\lambda_{МП}^* = \lambda_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}, \quad (4.58)$$

где  $\tilde{\lambda}$  — случайная поправка, обусловленная наличием шума. Видно, что влияние  $\tilde{\lambda}$  на оценку при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к нулю, т.е. при  $q_0 \rightarrow \infty$  имеем  $z_n \rightarrow 0$  и  $\lambda_{МП}^* \rightarrow \lambda$ .

Метод малого параметра [9] предполагает введение функции

$$\Psi(\lambda) = \varepsilon^2 \frac{d}{d\lambda} z(\lambda),$$

которая определяет скорость изменения логарифма ФП от аргумента — параметра  $\lambda$  и явно зависит от малого параметра  $\varepsilon$ . На рис. 4.7 условно показаны логарифм ФП и сигнальная функция.

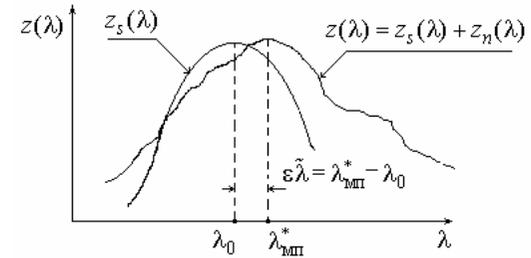


Рис. 4.7. Логарифм ФП  $z(\lambda)$  и сигнальная функция  $z_s(\lambda; \lambda_0)$

Представим функцию  $\Psi(\lambda)$  в окрестности истинного значения  $\lambda_0$  в виде ряда Тейлора. Тогда при учете в разложении только линейной части ряда значение  $\Psi(\lambda_{МП}^*) = 0$  можно представить в виде

$$\Psi(\lambda_{МП}^*) = \Psi(\lambda_0) + \frac{d\Psi(\lambda_0)}{d\lambda} (\lambda_{МП}^* - \lambda_0) = 0. \quad (4.59)$$

После введения соответствующих нормировок для  $z_s(\lambda; \lambda_0)$  и  $z_n(\lambda)$ , из (4.59) с учетом (4.58), получаем алгебраическое уравнение для случайной поправки  $\tilde{\lambda}$  в виде

$$B \tilde{\lambda} = -A, \quad \text{где } B = \frac{d^2}{d\lambda^2} [\tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0)] \Big|_{\lambda=\lambda_0}; \quad A = \frac{d}{d\lambda} [\tilde{z}_n(\lambda)] \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (4.60)$$

Величина  $B$  определяет кривизну в точке  $\lambda_0$  нормированной сигнальной функции

$$\tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{q_0^2} z_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t; \lambda_0) s(t; \lambda) dt. \quad (4.61)$$

Сравнение (4.61) с (1.10) показывает, что  $\tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0)$  эквивалентно функции  $q(\Delta x) = q(x, x_0)$ , определяющей различие двух копий сигнала, отличающихся значениями информативных параметров.

Величина  $A$  является случайной и определяет (в первом приближении) нормированное приращение логарифма ФП, обусловленное влиянием шума. Нормированная шумовая функция  $\tilde{z}_n(\lambda) = z_n(\lambda)/q_0$  и ее среднее  $\overline{\tilde{z}_n} = 0$ .

Для определения среднего и дисперсии оценки  $\lambda_{МП}^*$  найдем соответствующие характеристики поправки  $\tilde{\lambda}$ . Согласно (4.60)  $\overline{A} = 0$ , так

как  $\overline{\tilde{z}_n} = 0$ . Таким образом, в первом приближении при большом отношении  $2E_s/N_0$  максимально правдоподобная оценка параметра является несмещенной.

Непосредственной проверкой можно показать, что корреляционная функция  $\overline{\tilde{z}_n(\lambda_1) \tilde{z}_n(\lambda_2)} = \tilde{z}_s(\lambda_1; \lambda_2)$ . Таким образом, величина дисперсии  $D_A = A^2$  определяется в данном случае значением второй производной от нормированной сигнальной функции и имеет вид

$$D_A = - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} [\tilde{z}_s(\lambda_1; \lambda_2)] \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0}. \quad (4.62)$$

В (4.62) знак минус обусловлен тем, что вторая производная от сигнальной функции в максимуме отрицательна. Окончательно с учетом (4.60), (4.62) и (4.58) для дисперсии МП оценки неэнергетического параметра получим

$$\mathbf{D}[\lambda_{МП}^*] = \frac{\varepsilon^2 D_A}{B^2} = - \frac{1}{(2E_s/N_0) \left[ \partial^2 \tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0) / \partial \lambda^2 \right] \Big|_{\lambda_0}}. \quad (4.63)$$

Таким образом, при большом отношении  $q_0^2 = 2E_s/N_0$  дисперсия МП оценки параметра  $\lambda$  обратно пропорциональна величине этого отношения и значению кривизны нормированной сигнальной части логарифма функции правдоподобия по параметру  $\lambda$  в точке  $\lambda_0$ .

Важно отметить, что (4.61) совпадает также с АКФ полезного сигнала по параметру  $\lambda$  (см. п. 1.3.2). В частности, когда  $\lambda$  является задержкой  $\tau$ , получаем  $\tilde{z}_s(\lambda) \equiv k(\tau)$ , при  $\lambda = \Omega$  имеем  $\tilde{z}_s(\lambda) \equiv k(\Omega)$ . Таким образом, дисперсия МП-оценки неэнергетического сигнала  $\lambda$  обратно пропорциональна кривизне нормированной АКФ сигнала по параметру  $\lambda$  в точке максимума.

Применение формулы (4.63) для расчета дисперсии МП-оценки параметра сигнала иногда может дать результат, достижение которого в реальном измерителе практически теряет смысл. В частности, подобная ситуация возникает при оценке времени задержки  $\tau_0$  ВЧ-радиоимпульса  $s(t - \tau_0)$  с полностью известными параметрами. Рассмотрим подробнее суть вопроса.

Как следует из подраздела 4.5, формирование оценки  $\tau_{МП}^*$  предполагает наличие в устройстве обработки генератора опорного сигнала

$s(t - \tau)$ . Поскольку фактически необходимо определить взаимное положение на оси времени двух сигналов, то момент начала отсчета времени при этом не имеет значения и можно полагать  $\tau_0 = 0$ .

Нормированная сигнальная функция в задаче оценке временной задержки сигнала имеет вид

$$\tilde{z}_s(\tau; \tau_0 = 0) = (1/E_s) \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt,$$

который полностью совпадает с выражением (1.15а) для временной автокорреляционной функции  $k(\tau)$  ВЧ-сигнала  $s(t)$ . Ранее было показано, что сигнальная часть отклика на выходе СФ также повторяет по форме АКФ  $k(\tau)$ . Вид этой функции для радиоимпульсов с прямоугольной и гауссовой огибающей показан на рис. 1.10, 1.11.

В случае узкополосных ВЧ-сигналов, когда несущая  $\omega_0$  значительно превышает полосу  $\Delta\omega$  и огибающая  $K(\tau)$  (1.16) практически постоянна на интервале времени, равном периоду ВЧ-сигнала, величина  $k''(\tau = 0)$  фактически определяется множителем  $\cos(\omega_0\tau)$  и равна  $-\omega_0^2$ . Таким образом, для частот, превышающих сотни мегагерц и более, можно, казалось бы, достигнуть точности измерения времени задержки порядка единиц наносекунд. Однако это, как правило, невозможно. Причиной тому является наличие близко расположенных соседних пиков сигнальной функции. Они не позволяют реализовать надежное (однозначное) измерение временной задержки.

Выход из положения состоит в том, чтобы оценку  $\tau_{МП}^*$  получать по положению максимума огибающей  $K(\tau)$ . Необходимость использования огибающей сигнальной функции  $z_s(\tau)$  возникает и в том случае, когда полезный сигнал содержит неизвестную начальную фазу [12]. Для выделения огибающей  $K(\tau)$  в оптимальном измерителе используется амплитудный детектор. Если функция  $z_s(\tau)$  образуется с помощью согласованного фильтра, детектор подключается к его выходу.

Таким образом, при расчете дисперсии  $\mathbf{D}[\tau_{МП}^*]$  следует в (4.63) использовать вторую производную  $K''(\tau = 0)$ . Определим ее величину через спектральную функцию комплексной огибающей  $\dot{G}(\omega)$ .

Для этого предварительно покажем справедливость соотношения

$$2E_s \cdot \dot{K}(\tau) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \left| \dot{G}(\omega) \right|^2.$$

Введем  $\dot{\Gamma}(\omega; \tau)$  как преобразование Фурье по переменной  $t$  от произведения  $\dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau)$ , рассматривая  $\tau$  в качестве параметра.

В итоге получим  $\dot{\Gamma}(\omega; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{-i\omega\tau} dt$  и отметим, что

согласно (1.16)  $2E_s \cdot \dot{K}(\tau) = \dot{\Gamma}(0; \tau)$ . В соответствии со свойствами преобразования Фурье справедливы соотношения

$$\dot{S}(t) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\Leftrightarrow}} \dot{G}(\omega); \quad \dot{S}^*(t) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\Leftrightarrow}} \dot{G}^*(-\omega); \quad \dot{S}^*(t - \tau) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\Leftrightarrow}} \dot{G}^*(-\omega) e^{-i\omega\tau}.$$

Известно также, что Фурье-образ произведения двух функций времени является сверткой Фурье-образов этих функций. Таким образом, для функции  $\dot{\Gamma}(\omega; \tau)$  запишем интеграл свертки в виде

$$\dot{\Gamma}(\omega; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{G}^*(x - \omega) e^{i(x - \omega)\tau} dx,$$

из которого при  $\omega = 0$  непосредственно следует

$$\dot{\Gamma}(0; \tau) = \dot{K}(\tau) = (1/2E_s) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Выполнив вычисление второй производной от этого выражения по  $\tau$  и учитывая (1.19), получим

$$K''(\tau = 0) = (1/2E_s) \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega = -\Delta\Omega^2,$$

где  $\Delta\Omega$  — среднеквадратичная полоса частот радиосигнала, равная среднеквадратичной ширине энергетической спектральной плотности  $|\dot{G}(\omega)|^2$  комплексной огибающей. Напомним, что точка начала отсчета частоты ( $\omega = 0$ ) совмещена при этом с центром масс нормированной функции (1.18). В итоге для дисперсии оценки времени задержки получим

$$\mathbf{D}[\tau_{\text{МП}}^*] = \frac{1}{(2E_s/N_0) \cdot \Delta\Omega^2}. \quad (4.63a)$$

В радиолокационных и радионавигационных системах измерение времени задержки сигнала на входе приемника относительно сигнала, излученного передатчиком, позволяет определить дальность до объекта. Формула (4.63a) позволяет *вычислить дисперсию оптимальной оценки дальности, связанную с влиянием аддитивного собствен-*

*ного шума приемника.*

#### 4.8. Оптимальная оценка начальной фазы радиосигнала

Определим оптимальный алгоритм приемника-измерителя начальной фазы  $\varphi$  радиоимпульса вида (4.53). На основании (4.57) запишем уравнение правдоподобия для неэнергетического параметра  $\varphi$

$$\left. \frac{d}{d\varphi} \ln [L(\varphi)] \right|_{\varphi_{\text{МП}}^*} = \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) aS(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] dt \right] \Bigg|_{\varphi_{\text{МП}}^*} = 0.$$

Для оценки  $\varphi_{\text{МП}}^*$  получаем уравнение

$$\int_0^T y(t) S(t) \sin[\omega t + \Phi(t) + \varphi_{\text{МП}}^*] dt = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \sin(\varphi_{\text{МП}}^*) \int_0^T y(t) S(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] dt + \\ & + \cos(\varphi_{\text{МП}}^*) \int_0^T y(t) S(t) \sin[\omega t + \Phi(t)] dt = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Из (4.64) окончательно получаем

$$\varphi_{\text{МП}}^* = -\text{arctg} \left\{ \frac{\int_0^T y(t) S(t) \sin[\omega t + \Phi(t)] dt}{\int_0^T y(t) S(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] dt} \right\}. \quad (4.65)$$

Из (4.65) следует структурная схема оптимального устройства формирования оценки  $\varphi_{\text{МП}}^*$ . На рис. 4.8 она приведена для случая гармонического радиосигнала, когда нет амплитудной и фазовой модуляции ( $S(t) = S_0$  и  $\Phi(t) = 0$ ). По своей структуре данный приемник-измеритель, как и в подразделе 4.5, является измерителем *корреляционного типа*.

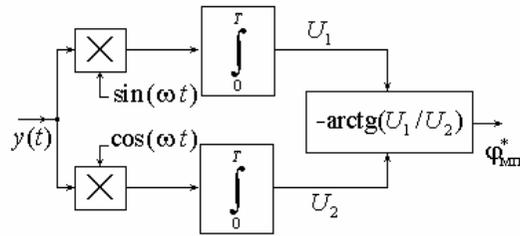


Рис. 4.8. Оптимальный измеритель начальной фазы гармонического радиосигнала

Используя соотношение (4.63), вычислим дисперсию оценки  $D_{\Phi_{\text{МП}}}^*$ . С этой целью, учитывая (4.57), запишем нормированную сигнальную функцию (4.61)

$$\begin{aligned} \tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0) &= \frac{z_s(\lambda; \lambda_0)}{q_0^2} = \\ &= \frac{2}{N_0 q_0^2} \int_0^T a^2 S^2(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi_0] dt \approx \\ &\approx \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в (4.63) и в итоге получим

$$D_{\Phi_{\text{МП}}}^* = 1/q_0^2. \quad (4.66)$$

Таким образом, дисперсия МП-оценки начальной фазы радиосигнала обратно пропорциональна отношению сигнала к шуму по мощности и не зависит от вида амплитудной и фазовой модуляции радиосигнала.

Напомним, что величина  $q_0^2 = 2E_s/N_0$  и соответствует максимальному отношению мощностей сигнала и шума на выходе согласованного с полезным сигналом фильтра.

#### 4.9. Информация по Фишеру. Неравенство Крамера-Рао

Нельзя не обратить внимания, что определение МП-оценок пара-

метров сигнала и анализ их точности всякий раз связаны с необходимостью рассмотрения логарифма функции правдоподобия  $\ln[L(\lambda)] = \ln[W(\mathbf{y}/\lambda)]$ . Можно предположить, что этот факт обусловлен гауссовым видом ПРВ аддитивного шума. Однако это не так, и суть указанного совпадения несколько глубже. Она связана с понятием *количества информации* о неизвестном параметре  $\lambda$ , которое содержится в случайной выборке  $\mathbf{y}$ .

Это понятие играет фундаментальную роль и было введено в теории оценок Р.А. Фишером.

Рассмотрим понятие количества информации. Будем полагать, что выборка образована совокупностью  $\{y_i\}$  *n* независимых случайных величин с одинаковой ПРВ. Таким образом, условная ПРВ выборки и она же функция правдоподобия параметра  $\lambda$  имеет вид

$$L(\lambda; \mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/\lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i/\lambda). \quad (4.67)$$

Причем в силу условия нормировки ПРВ

$$\int_{\mathbf{y}} L(\lambda; \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1. \quad (4.68)$$

Последующие выкладки основаны на предположении о *регулярности* ФП (п. 4.2.2). Они состоят в том, что  $L(\lambda; \mathbf{y})$ , а также ее первая и вторая производные по параметру  $\lambda$  должны быть равномерно по  $\lambda$  непрерывны относительно  $\mathbf{y}$ , и ФП должна допускать дифференцирование под знаком интеграла в (4.68). Следует отметить, что эти требования выполняются для многих важных вероятностных моделей, встречающихся в практических задачах. В частности, для ПРВ Гаусса и Пуассона, а также биномиального, гамма-распределения вероятностей и др.

Рассмотрим случайную величину

$$v(\mathbf{y}; \lambda) = \frac{\partial \ln[L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln[W(y_i/\lambda)]}{\partial \lambda}, \quad (4.69)$$

которую называют *вкладом* (или *функцией вклада*) выборки  $\mathbf{y}$  [5]. Каждое *i*-е слагаемое в правой части (4.69) определяет *вклад i-го наблюдения*,  $i = 1, \dots, n$ . Будем полагать, что случайная величина  $v$  имеет конечный второй момент, т.е.  $\mathbf{M}[v^2(\mathbf{y}; \lambda)] < \infty$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  — интервал возможных значений неизвестного параметра. При

выполнении условий регулярности ФП путем дифференцирования тождества (4.68) найдем

$$0 = \int_Y \frac{\partial L(\lambda; \mathbf{y})}{\partial \lambda} d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial [\ln L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y} = \mathbf{M}[v(\mathbf{y}; \lambda)]. \quad (4.70)$$

Таким образом, для регулярных моделей выборочных данных среднее значение *вклада* — математическое ожидание производной от логарифма ФП по  $\lambda$ , равно нулю.

Количество информации по Фишеру о параметре  $\lambda$ , содержащееся в независимой выборке  $\mathbf{y}$  объема  $n$ , определяется соотношением

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M}[v^2(\mathbf{y}; \lambda)] = \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial \ln[W(\mathbf{y}/\lambda)]}{\partial \lambda}\right)^2\right] \quad (4.71)$$

или с учетом (4.67):

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M}\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln[W(y_i/\lambda)]\right)^2\right].$$

Величина  $i_{n=1} = i_1$  называется *количеством (фишеровской) информации, содержащимся в одном наблюдении*. Из (4.71) для нее получим

$$i_1(\lambda) = \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial \ln[W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda}\right)^2\right]. \quad (4.72)$$

В практических расчетах удобно использовать для  $i_1(\lambda)$  эквивалентное представление. Оно получается после повторного дифференцирования (4.70) по  $\lambda$  и имеет вид

$$i_1(\lambda) = -\mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln[W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda^2}\right)\right]. \quad (4.73)$$

Из соотношений (4.71), (4.72) с учетом независимости выборки следует  $i_n(\lambda) = n \cdot i_1(\lambda)$ , т.е. общее количество информации растет пропорционально объему выборки.

Рассмотрим пример вычисления функции  $i_1(\lambda)$ . Для этого обратимся к задаче из подраздела 4.4, где выборочные значения  $y_i = \lambda + n_i$ .

Шум имеет гауссовскую ПРВ —  $N(0; \sigma_n^2)$ , и величина  $y_i$  также является гауссовой. Таким образом, в этом случае вклад одного наблюдения

$$v(y_1; \lambda) = \frac{\partial \ln[W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda} = \frac{y_1 - \lambda}{\sigma_n^2}; \quad \frac{\partial^2 \ln[W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\sigma_n^2}.$$

Отсюда по формуле (4.73) получаем  $i_1(a) = 1/\sigma_n^2$ , что не противоречит здравому смыслу. Действительно, чем меньше дисперсия шума, тем большую информацию несет случайное выборочное наблюдение  $y_i$  об оцениваемом параметре  $a$ .

В статистической теории оценок существует теорема [3], которая утверждает, что при выполнении условий регулярности для ФП и существовании  $i_n(\lambda)$  ПРВ случайной величины  $T = \sqrt{n}(\lambda_{МП}^* - \lambda)$ , где  $\lambda_{МП}^*$  — единственный корень уравнения правдоподобия, сходится (по мере увеличения объема выборки  $n$ ) к нормальному распределению с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln[W(y_i/\lambda)]\right)^2\right]} = \frac{1}{i_1}. \quad (4.74)$$

Это означает, что при больших  $n$  оценка МП является несмещенной, т.е.  $\mathbf{M}[\lambda_{МП}^*] = \lambda$  и ее дисперсия равна

$$\mathbf{D}[\lambda_{МП}^*] = \sigma_{\lambda_{МП}^*}^2 = \frac{1}{n \cdot i_1}. \quad (4.75)$$

Подчеркнем, что при *любых* видах ПРВ  $W(\mathbf{y}/\lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i/\lambda)$ , удовлетворяющих условиям регулярности, асимптотически выполняется (4.74). Это поясняет и оправдывает название «количество информации», введенное Р. Фишером для величины, находящейся в знаменателе.

Рассмотрим без доказательства известное в теории оценок и важное для практических приложений неравенство Крамера–Рао. Оно утверждает, что для дисперсии несмещенной оценки  $\lambda^*$  параметра  $\lambda$

при произвольном объеме выборки  $n$  выполняется соотношение

$$\sigma_{\lambda_*}^2 \geq [i_n(\lambda)]^{-1}, \text{ где } i_n(\lambda) = n \cdot i(\lambda). \quad (4.76)$$

Это неравенство определяет *нижнюю границу дисперсий любых несмещенных оценок параметра  $\lambda$* .

Условием его справедливости является только наличие свойств регулярности у функции  $W(u/\lambda)$  и независимость выборки.

С неравенством (4.76) связано понятие *эффективности оценки*. Несмещенная оценка параметра  $\lambda$  называется *эффективной*, если ее дисперсия равна границе Крамера–Рао. Таким образом, *соотношения (4.74), (4.75) утверждают, что оценка МП асимптотически (при  $n \rightarrow \infty$ ) несмещенная и эффективная*.

Значимость результата (4.76) для практики разработки измерительных РТС состоит в следующем. Инженер в конкретной задаче может использовать различные алгоритмы обработки сигналов, и далеко не всегда их привлекательность связана с оптимальностью (в смысле дисперсии ошибки). Возможно, они более простые в технической реализации или, наконец, просто интуитивно ясные по структуре. Однако ответ на вопрос о том, исчерпаны ли ресурсы измерительной системы по точности, реализованы ли ее предельные возможности, очень часто важен и многое определяет. Допустим, что выбранный вариант построения системы управления воздушным движением обеспечивает СКО ошибки вывода самолета на полосу посадки 100 м, в то время как предельно достижимая (потенциальная) СКО при тех же свойствах входных сигналов могла бы быть 15 м. Очевидно, ресурс системы по точности далеко не исчерпан. Последствия применения системы посадки в первом варианте связаны с риском при наличии низкой облачности, поскольку пилот, в случае непопадания в зону посадки, ограничен в выполнении маневра. Конечно, возможно расширение полосы, но это практически неприемлемо, если аэродром — авианосец.

#### 4.10. Разрешение сигналов

Для многих типов РТС, и в особенности радиолокационных и радионавигационных, характерным является режим работы, когда на входе приемника одновременно присутствуют более чем один полезный сигнал. Например, при РЛ-наблюдении двух объектов, находящихся в зоне облучения, определяемой шириной диаграммы направленности антенны, входной сигнал приемника

$$y(t) = s_1(t; \lambda_1, \beta_1) + s_2(t; \lambda_2, \beta_2) + n(t), \quad t \in (0; T). \quad (4.77)$$

Составляющими вектора информативных параметров  $\lambda_i$  каждого из сигналов могут быть время задержки  $\tau_{0i}$ , связанное с дальностью до объектов, доплеровский сдвиг частоты  $\Omega_{0i}$ , зависящий от их радиальной скорости, высота полета объектов, угловая координата.

В РЛ-системе необходимо для каждого объекта получить оценки полезных параметров. В случае, когда объекты близки друг к другу по какому-либо из параметров (допустим по дальности), сигналы  $s_1(\cdot)$  и  $s_2(\cdot)$  на входе приемника перекрываются во времени. Если объекты имеют близкие радиальные скорости, то произойдет перекрытие частотных спектров сигналов.

Очевидно, что определение числа сигналов в наблюдаемой реализации (4.77) и измерение параметров каждого из них при перекрытии сигналов значительно сложнее, нежели в случае, когда сигналы достаточно разнесены по соответствующему параметру.

*Проблема разрешения сигналов, перекрывающихся по одному или нескольким параметрам (по времени задержки и (или) частоте), состоит в отдельном выделении полезной информации, содержащейся в каждом из них.*

Разрешающая способность наряду с точностью относится к важнейшим тактическим показателям РТС. В РЛ-системах она влияет на полноту сведений о наблюдаемой обстановке при наличии нескольких целей. Разрешающая способность количественно равна *минимальной разнице по каждому из разрешаемых параметров двух сигналов, при которой возможно их отдельное обнаружение и измерение параметров*.

Наличие шума, как и ранее, вносит неопределенность и придает задаче статистический характер. Чем больше отношение энергий сигналов и шума, тем меньшая разница в параметрах разрешаемых сигналов может быть уверенно отмечена *в выходном устройстве системы обработки*. И, наоборот, при уменьшении этого отношения требуется все большее и большее различие параметров перекрывающихся сигналов для их уверенного разрешения.

Кроме отношения энергий сигналов и шума на достоверность разрешения большое влияние оказывает форма разрешаемых сигналов и, в первую очередь, их протяженность по параметру разрешения. Чем уже разрешаемые сигналы по этому параметру, тем ближе друг к другу они могут быть расположены и при этом надежно разрешены, и тем

лучше разрешающая способность РТС. Таким образом, определенный смысл имеет анализ разрешающей способности без учета влияния шума. Во всяком случае, результаты анализа будут оправдываться по мере увеличения уровня сигнала по отношению к шуму. В этом случае в литературе по теории РТС обычно говорят о *потенциальной (предельной) разрешающей способности* системы по соответствующему параметру: по дальности (по времени задержки сигналов), по радиальной скорости (по частотному сдвигу спектра сигналов).

Учитывая указанные выше обстоятельства, рассмотрим влияние законов и параметров модуляции сигналов на разрешающую способность РТС по времени задержки  $\tau$  и сдвигу несущей частоты  $F$ .

#### 4.10.1. Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы

В пп. 1.3.1, 1.3.2 определено понятие функции различия (1.7) двух сигналов  $s(t, \lambda_0)$  и  $s(t, \lambda)$ , отличающихся значениями информативных параметров  $\lambda_0$  и  $\lambda$ , и в дальнейшем показана ключевая роль нормированной сигнальной функции  $q(\lambda_0, \lambda)$  в задачах различения, обнаружения сигналов и измерения их параметров на фоне шума. Напомним, что функция  $q(\lambda_0, \lambda)$  при заданных  $\lambda_0$  и  $\lambda$  определяет степень различия двух копий сигнала, отличающихся значением параметра  $\lambda$ .

В важном частном случае, когда двумерный неэнергетический параметр  $\lambda = \{\tau, \Omega\}$ , функция  $q(\lambda_0, \lambda)$  по существу является частотно-временной корреляционной функцией  $k(\tau, F)$ , имеющей вид (1.13). Напомним, что огибающую  $K(\tau, F)$  функции  $k(\tau, F)$  называют функцией неопределенности. В подразделе 3.2 показано, что сигнальная функция  $z_s(t)$  на выходе фильтра, согласованного с сигналом  $s(t; \tau_0 = 0, \Omega_0 = 0)$ , при входном воздействии  $s(t - \tau; \Omega)$  повторяет по форме функцию  $k[(t - \tau); \Omega = \text{const}]$ .

Поскольку любое разрешение основано на различиях расстроенных на  $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda$  копий сигнала и мерой этого различия по неэнергетическим параметрам  $\tau$  и  $\Omega$  является функция неопределенности  $K(\tau, \Omega)$ , то анализ разрешения сигналов по  $\tau$  и  $\Omega$  непременно связан с формой этой функции.

Рассмотрим огибающую  $Z_s(t)$  отклика  $z_s(t)$  СФ при воздействии на его вход двух некогерентных радиосигналов, отличающихся вре-

менной задержкой. Пусть на вход поступают два сигнала с прямоугольной огибающей длительностью  $T_S$  и простой модуляцией, т.е. база сигналов  $B = \Delta T \cdot \Delta F \approx 1$ . Временное положение сигналов отличается на величину  $\Delta\tau$  (рис. 4.9). В силу линейности фильтра сигнальный отклик (3.18) на его выходе  $z_s(t)$  будет также состоять из двух слагаемых. Причем с точностью до постоянного коэффициента огибающая каждого из них имеет форму, которая совпадает с огибающей временной автокорреляционной функции  $K(\tau)$ . Для прямо-угольных радиоимпульсов  $K(\tau)$  имеет треугольную форму и протяженность по времени  $2T_S$  (см. рис.1.9,a). Таким образом, на выходе детектора огибающей получим два треугольных импульса, разделенных промежутком  $\Delta\tau$ .

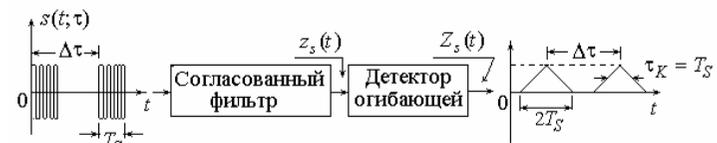


Рис. 4.9. Разрешение по времени задержки 2 радиосигналов прямоугольной формы с простой модуляцией при согласованной фильтрации

Ширину  $\tau_K$  функции  $K(\tau)$  и соответственно длительность сигналов на выходе СФ удобно определить по уровню 0,5 от их максимального значения. Величина  $\tau_K = 2\tau_{0,5}$ , где  $\tau_{0,5}$  — *интервал корреляции*, определяемый из условия  $K(\tau_{0,5}) = 0,5$ . Для прямоугольного радиоимпульса (см. рис.1.9,a)  $\tau_{0,5} = 0,5T_S$  и, следовательно,  $\tau_K = T_S$ . Найдём связь длительности сигнала  $\tau_K$  на выходе СФ со среднеквадратической шириной спектра узкополосного радиосигнала  $\Delta F$ . Для этого в формуле (1.22), определяющей протяженность сечения (эллипса) функции неопределенности  $K(\tau, F)$  по оси  $\tau$ , зададим величину  $c = 0,5$ . В итоге получим

$$\delta_\tau = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F} \Big|_{c=0,5} = \tau_K = \frac{\sqrt{3}}{\Delta F}. \quad (4.78)$$

Определение величины, *характеризующей разрешающую способность сигнала по задержке  $\tau$* , предполагает введение критерия, который позволяет определить минимальное сближение двух сигналов  $\Delta\tau_{\min}$ , при котором «наблюдатель» может фиксировать их наличие.

Согласно критерию Релея, который обычно применяется в оптических измерениях, полагают  $\Delta\tau_{\min} = \delta\tau_p$ . Это соответствует такому

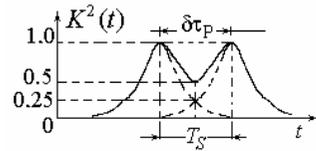


Рис. 4.10. Интенсивность отклика согласованного фильтра при разрешении 2 некогерентных сигналов по критерию Релея

положению сигналов на выходе устройства разрешения СФ, при котором *огibaющая мгновенной мощности двух некогерентных сигналов* имеет двугорбую форму с провалом до уровня, равного половине от максимума. Мгновенная мощность каждого сигнала пропорциональна функции  $K^2(t)$ . Поскольку для некогерентных сигналов мощность суммы сигналов равна сумме мощностей, то «провал» до половины от максимума (рис. 4.10) образуется при пересечении огибающих как раз на уровне 0,5 от максимального; при этом  $\delta\tau_p = \Delta\tau_{\min} = \tau_K$ . В случае радиоимпульса с простой модуляцией  $\tau_K \approx T_S$  (при прямоугольной огибающей  $\tau_K = T_S$ ), поэтому для такого сигнала  $\delta\tau_p \approx T_S$ . Можно положить  $\delta\tau_p \approx \Delta T$ , так как среднеквадратическая длительность сигнала  $\Delta T$ , если она существует, имеет всегда тот же порядок, что и длительность сигнала  $T_S$ .

Таким образом, общий вывод состоит в том, что предельная разрешающая способность сигнала по задержке равна ширине огибающей временной АКФ сигнала, т.е.  $\delta\tau_p = \tau_K$ . Улучшение разрешающей способности (уменьшение  $\delta\tau_p$ ) связано согласно (4.78) с увеличением ширины спектра сигнала  $\Delta F$ . Привлекая понятие базы сигнала  $B = \Delta F \cdot \Delta T$ , можно утверждать, что разрешающая способность

$$\delta\tau_p \approx 1/\Delta F = \Delta T/B. \tag{4.79}$$

Таким образом, повысить разрешающую способность сигнала по времени задержки, используя простую модуляцию ( $B \approx 1$ ), возможно только путем сокращения его длительности. В этом случае при неизменной мощности излученного сигнала его энергия уменьшится. В итоге в приемнике на выходе согласованного фильтра максимальное отношение сигнала к шуму  $q_0^2 = 2E_s/N_0$  также уменьшится и, как следствие, в РТС станут хуже характеристики обнаружения и различения сигналов. Исправить положение возможно путем увеличения мощности излучения. Однако это не всегда допустимо. Более того, режим с малой мощностью излучения повышает скрытность работы

и благоприятствует решению проблемы электромагнитной совместимости различных РТС.

Применение сложных сигналов позволяет избежать указанных последствий. Действительно, согласно (4.79) можно при заданной длительности сигнала  $\Delta T$  значительно увеличить (с целью повышения разрешающей способности) базу сигнала  $B$  путем увеличения ширины его спектра  $\Delta F$ .

На рис. 4.11,а условно показаны два перекрывающихся по времени ВЧ-сигнала  $s(t)$  и  $s(t-\tau)$  со сложной модуляцией, которые поступают на вход СФ. Автокорреляционная функция сигналов  $k(\tau)$  показана на рис. 4.11,б; ее ширина  $\tau_K \approx 1/\Delta F = \Delta T/B$ , причем  $\tau_K \ll T_S$ . Сигналы на выходе СФ показаны на рис. 4.11,в. По форме они повторяют функцию  $k(\tau)$  и, таким образом, сжимаются по длительности по сравнению с входными сигналами примерно в  $B = \Delta F \cdot \Delta T$  раз. В итоге перекрывающиеся по времени входные сигналы будут разрешены по задержке, если  $\Delta\tau \geq \Delta\tau_{\min}$ . Разрешающая способность по критерию Релея  $\delta\tau_p = \tau_K \approx 1/\Delta F$ , т.е. формально это совпадает с выражением при использовании простых сигналов. Однако у сложного сигнала эту величину можно изменять независимо от его длительности  $T_S$ . Действительно, например, при ЛЧМ ширина спектра сигнала определяется девиацией частоты, а при ФКМ —  $\Delta F \approx 1/\Delta$ , где  $\Delta$  — длительность парциального импульса (пп. 1.3.4 и 3.3.2).

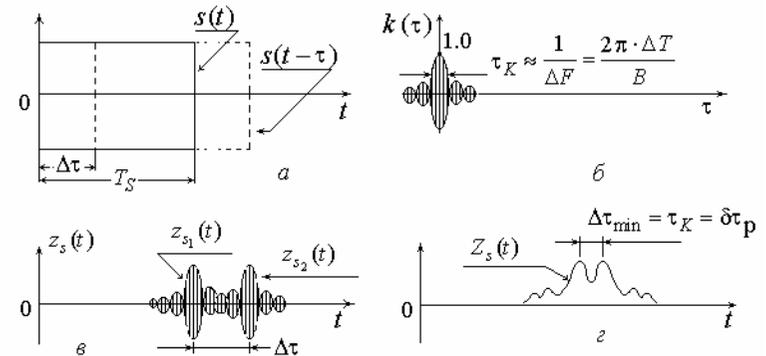


Рис. 4.11. Разрешение сложных сигналов по времени задержки: два перекрывающихся по времени задержки радиосигнала на входе согласованного фильтра (а); автокорреляционная функция радиосигнала (б); сигнальный отклик согласованного фильтра (в); огибающая сигнального отклика (г)

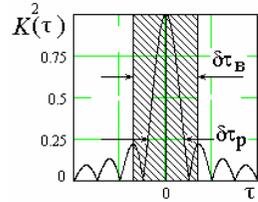


Рис. 4.12. Соотношение величин разрешающей способности по Релею и Вудворду

На рис. 4.11,б видно, что наличие боковых всплесков (лепестков) и их уровень существенно влияют на достоверность разрешения сигналов по времени задержки. Параметр  $\tau_K$ , равный разрешающей способности  $\delta\tau_p$  (по критерию Релея), учитывает только локальное поведение временной автокорреляционной функции  $K(\tau)$ . В этой связи более корректной для задачи разрешения является характеристика, предложенная Ф. Вудвордом. Он ввел величину, называемую «постоянной разрешения по времени», которая определяется выражением

$$\delta\tau_B = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau) d\tau. \quad (4.80)$$

По существу постоянная разрешения  $\delta\tau_B$  равна ширине прямоугольника, площадь которого равна площади под кривой  $K^2(\tau)$ . На рис. 4.12 показано соотношение величин временной разрешающей способности по Релею и Вудворду.

Рассмотрим в общем виде особенности разрешения сигналов по двум параметрам — задержке  $\tau$  и частоте  $F$ .

#### 4.10.2. Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте. Тело неопределенности

Качество разрешения сигналов по двум параметрам  $\tau$  и  $F$  зависит от вида функции неопределенности (частотно-временной корреляционной функции)  $K(\tau, F)$ . Геометрически  $K(\tau, F)$  представляет поверхность, форма которой (ширина, уровень боковых лепестков и др.) зависит от способа и параметров модуляции сигнала (см. рис. 1.8,а и 1.12,а). Способ и параметры модуляции ВЧ-сигнала  $s(t) = \text{Re}[\dot{S}(t) e^{i\omega_0 t}]$  определяют его комплексную огибающую  $\dot{S}(t) = S(t) e^{i\Phi(t)}$ . В п. 1.3.2 показано, что функция неопределенности

$$K(\tau, \Omega) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{i\Omega t} dt \right|.$$

Тело, образованное поверхностью  $|K(\tau, F)|^2$  и плоскостью координат  $(\tau, F)$ , называется *телом неопределенности*.

Очевидно, разрешение двух копий сигнала, отличающихся друг от друга по времени запаздывания на  $\tau$  и по частоте на  $F$ , будет тем выше, чем меньше значение ФН в точке с координатами  $\tau$  и  $F$ . Другими словами, совместная разрешающая способность по задержке  $\tau$  и частоте  $F$  будет выше, если тело неопределенности имеет максимально узкий и единственный пик.

Свойства главного сечения  $K(\tau) = K(\tau; \Omega = 0)$  обсуждались выше — протяженность пика ФН вдоль оси  $\tau$  определяет разрешающую способность  $\delta\tau_p$  сигнала по времени и имеет порядок длительности  $\tau_K$  огибающей временной автокорреляционной функции сигнала. Другое главное сечение ФН — частотная автокорреляционная функция  $K(F) = K(\tau = 0; F) = |K(\tau = 0; F)|$ , очевидно, определяет разрешение только по частоте, когда копии сигналов совмещены по времени, но отличаются частотами. В соответствии с (1.15) имеем

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 e^{i2\pi Ft} dt \right|. \quad (4.81)$$

Явный смысл этой функции как функции корреляционной установить просто. Применяя к (4.81) теорему Парсеваля, получим

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f - F) \dot{G}^*(f) df \right|. \quad (4.82)$$

Таким образом, протяженность пика функции неопределенности вдоль частотной оси  $F$  имеет порядок ширины  $F_K$  огибающей частотной автокорреляционной функции  $K(F)$ . Согласно (4.81)  $K(F)$  и  $|\dot{S}(t)|^2 = S^2(t)$  образуют пару сопряженных по Фурье функций. Следовательно, *повышение разрешающей способности только по частоте, т.е. уменьшение величины  $\delta F_p \approx F_K$ , для любых сигналов связано с увеличением протяженности действительной огибающей  $S(t) = |\dot{S}(t)|$  радиосигнала  $s(t)$* . В случае простых сигналов это равносильно увеличению их длительности ( $T_S$  или  $\Delta T$ ) и непременно ве-

дет к снижению разрешения по задержке  $\tau$ , так как  $\delta\tau_p \approx \Delta T/B$ . Увеличение совместной разрешающей способности по параметрам  $\tau$  и  $F$  для сигналов с простой модуляцией реализовать невозможно.

Для наглядного пояснения данного положения обратимся к геометрической интерпретации. На рис. 4.13 показана функция неопределенности для простого сигнала с гауссовой огибающей. Длительность сигнала  $s(t)$  и протяженность его спектра можно положить приближенно равными соответствующим среднеквадратичным величинам  $\Delta T$  и  $\Delta F$ . Тогда протяженность области определения функции  $K(\tau, F)$  по переменным  $\tau$  и  $F$  практически равна  $2\Delta T$  и  $2\Delta F$ . Площадь основания  $\Pi_{\text{осн}}$ , в пределах которого сосредоточено тело неопределенности,  $\Pi_{\text{осн}} \approx 4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$ .

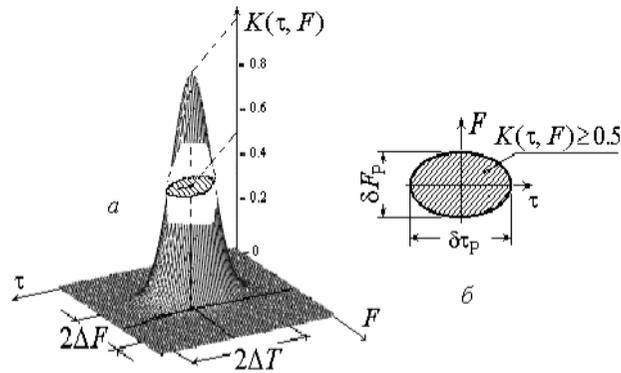


Рис. 4.13. Функция неопределенности радиоимпульса с простой модуляцией (а); область высокой корреляции (б)

Совместное разрешение сигналов по задержке  $\tau$  и частоте  $F$ , как было показано ранее, возможно вне области высокой корреляции, которая определяется условием  $K(\tau, F) \geq 0,5$  и показана на рис. 4.13. Главные оси эллипса (границы области высокой корреляции) согласно (4.78) равны разрешающей способности  $\delta\tau_p = \sqrt{3}/\Delta F$  и  $\delta F_p = \sqrt{3}/\Delta T$ . Таким образом, площадь  $\Pi_{0,5}$  области высокой корреляции (площадь эллипса) равна  $\Pi_{0,5} = 3\pi/(4\Delta T \cdot \Delta F) = 3\pi/4B$ .

Для простых сигналов ( $B = 1$ ) и величина  $\Pi_{0,5}$  составляет около 60 % от общей площади основания  $\Pi_{\text{осн}}$ . Это значит, что для простых сигналов почти весь объем тела неопределенности, равный

постоянной величине, сосредоточен в области высокой корреляции и вытеснить оттуда существенную часть полного объема в целях улучшения совместного разрешения по параметрам  $\tau$  и  $F$  невозможно. В этом и состоит особенность задачи совместного разрешения при использовании сигналов с простой модуляцией, когда сужение ФН по одной из осей непременно вызывает ее расширение по другой.

Идеальное тело неопределенности должно иметь «кнопочный» вид — типа иглы единичной высоты на прямоугольном основании, имеющем площадь  $4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$  (рис. 4.14). Однако получить тело неопределенности с нулевыми боковыми лепестками невозможно, так как должен выполняться принцип неопределенности. Приближение тела неопределенности к идеальной форме возможно только при использовании сложных сигналов ( $B \gg 1$ ).

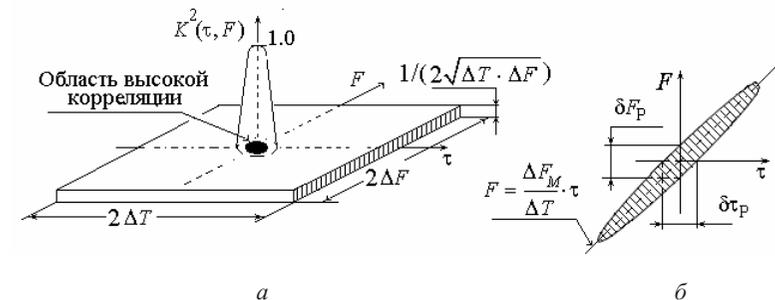


Рис. 4.14. Условное представление идеального тела неопределенности сложного (база  $B > 1$ ) сигнала (а) и область высокой корреляции радиосигнала с внутримпульсной линейной частотной модуляцией (б)

Действительно, при площади  $\Pi_{\text{осн}} = 4B \gg 1$  область высокой корреляции будет иметь площадь  $\Pi_{0,5} = (3\pi/4B) \ll 1$ . Поскольку  $K^2(\tau, F) \leq 1$ , то объем главного пика тела неопределенности, соответствующий области высокой корреляции, равен  $V_{\text{гл}} \approx 1 \cdot (3\pi/4B)$ , т.е. он имеет порядок величины  $1/B$ . Остальная часть объема  $V_{\text{ост}} \approx [1 - (1/B)] \approx 1$ , т.е. практически весь объем тела неопределенности придется на основание, площадь которого  $4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$ . Таким образом, высота основания, имеющая смысл средней интенсивности (мощности) боковых лепестков, равна  $1/4B$ . Это значит, что среднеквадратичный уровень боковых лепестков идеальной частотно-

временной корреляционной функции  $K(\tau, F)$  или то же самое средне-квадратичная величина напряжения на выходе СФ вне области главного пика примерно равна  $1/2\sqrt{B}$  (см. рис. 4.14). Таким образом, уменьшение уровня боковых лепестков можно получить только за счет увеличения базы сигнала.

Следует отметить, что сама по себе большая величина базы  $B$  не обеспечивает приближения ФН  $K(\tau, F)$  к идеальной форме. Например, функция неопределенности ЛЧМ-сигнала (см. рис. 1.12) имеет вид не иглы, расположенной на основании, а узкого гребня, повернутого относительно осей  $\tau, F$ . Область высокой корреляции такого сигнала показана на рис. 4.14, б, она ограничена эллипсом, у которого большая ось совпадает с линией  $F = (\Delta F_M / \Delta T)\tau$ , где  $\Delta F_M$  — девиация частоты. В пределах этой области отрезки вдоль осей  $\tau$  и  $F$  равны величинам разрешающей способности ЛЧМ-сигнала по частоте  $\delta F_p = \sqrt{3}/\Delta T$  и по времени  $\delta \tau_p = \sqrt{3}/\Delta F_M$ . Таким образом, подходящим выбором девиации  $\Delta F_M$  (ширины спектра) и длительности  $\Delta T$  можно обеспечить высокое разрешение по времени  $\tau$  при  $F = 0$  и по частоте  $F$  при  $\tau = 0$ . Вместе с тем из рис. 4.14, б видно, что какими бы ни были девиация  $\Delta F_M$  и длительность сигнала  $\Delta T$ , в области высокой корреляции существуют значения временного и частотного сдвигов, которые могут превышать величины разрешения  $\delta \tau_p$  по времени или  $\delta F_p$  по частоте. Это означает, что сигналы с такими значениями параметров  $\tau$  и  $F$  не будут наблюдаться раздельно.

Функцию неопределенности, близкую к идеальной, можно получить в классе сигналов с ФКМ. У этих сигналов область высокой корреляции, как и в случае простых сигналов, симметрична относительно осей  $\tau$  и  $F$ . Они имеют достаточную длительность  $T_S = n \cdot \Delta$  ( $\Delta$  — длительность парциального элемента и  $n$  — их число), что позволяет получить необходимое разрешение по частоте. Ширина автокорреляционной функции  $K(\tau)$ , определяющая разрешение по времени задержки, равна  $\tau_K = \Delta \approx 1/\Delta F$  (п. 1.3.4). База сигнала с ФКМ  $B = T_S \cdot \Delta F \approx n \cdot \Delta \cdot 1/\Delta = n$ . Боковые лепестки (см. рис. 1.16, б) на плоскости  $(\tau, F)$  имеют при этом характер хаотически расположенных треугольных пиков, уровень некоторых из них может превышать  $1/\sqrt{B}$ .

## Заключение

Материал пособия составляет основу статистической теории оптимальных методов различения, обнаружения и оценки параметров сигналов при наличии помех. Напомним ключевые моменты, которые могут оказать помощь в систематизации результатов теории.

Прежде всего обсуждается необходимость введения функции, определяющей степень близости сигналов  $s(t, \lambda)$  и  $s(t, \lambda_0)$ , имеющих различные значения параметра  $\lambda$ . Для неэнергетических параметров  $\tau$  и  $F$  таковой функцией является  $k(\tau, F)$  — частотно-временная АКФ сигнала и ее огибающая  $K(\tau, F)$ , названная функцией неопределенности. Объем тела неопределенности, ограниченного поверхностью  $K^2(\tau, F)$ , не зависит от формы сигнала и равен 1. Свойства функций  $k(\tau, F)$  и  $K(\tau, F)$  играют фундаментальную роль в статистической теории приема сигналов, что и подтверждено в дальнейшем.

Было показано, что линейный согласованный фильтр с импульсной реакцией  $h(t; \lambda_0) = s(t_0 - t; \lambda_0)$  формирует на выходе сигнал, среднее значение которого  $z_s(t; \lambda_0)$  совпадает по форме с АКФ сигнала по времени задержки  $\tau$ . В момент окончания полезного сигнала на выходе СФ обеспечивается наибольшее отношение мощностей сигнала к шуму —  $q_0^2 = 2E_s/N_0$ .

При решении задачи синтеза оптимального различителя (обнаружителя) была показана определяющая роль отношения правдоподобия. Оказалось, что при гауссовой помехе эта статистика, по существу, предполагает применение корреляторов или СФ. Характеристики потенциальной помехоустойчивости приемника-различителя зависят от параметра  $2E_s/N_0$  и степени близости сигналов — их корреляции.

Структура оптимальных приемников-оценителей параметров сигналов включает воспроизведение ФП  $L(\lambda)$  или в более общем случае апостериорной ПРВ  $W(\lambda/y)$ . Получение оптимальной оценки связано с поиском глобального максимума этих функций. Гауссов характер аддитивной помехи и здесь предопределяет структуру приемников, которые содержат СФ или корреляторы. Дисперсия оценок МП зависит от параметра  $2E_s/N_0$  и кривизны пика нормированного логарифма сигнальной части ФП. Эта кривизна совпадает с кривизной пика АКФ регулярного сигнала по оцениваемому параметру. Фундаментальная роль статистики в виде ФП связана с понятием количества фишеровской информации о параметре  $\lambda$ , содержащемся

в независимой выборке, и неравенством Крамера-Рао, определяющем нижнюю границу дисперсии несмещенных оценок в регулярном случае.

Таким образом, мера близости сигналов, использующая АКФ по информативному параметру, оказалась исчерпывающей для рассмотрения задач обработки сигналов при гауссовой помехе. Параметры и форма АКФ определяют предельные возможности РТС по помехоустойчивости, точности и разрешающей способности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Л. В. Теория и проектирование радиосистем / Л.В. Березин, В.А. Вейцель. — М.: Сов. радио, 1977.
2. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. — М.: Сов. радио, 1970.
3. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. — М.: Наука, 1972.
4. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. — М.: Сов. радио, 1978.
5. Ивченко Г.И. Математическая статистика / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. — М.: Высшая школа, 1984.
6. Кук Ч. Радиолокационные сигналы. Теория и применение / Ч. Кук, М. Бернфельд. — М.: Сов. радио, 1971.
7. Радиотехнические системы / Под ред. Ю.М. Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990.
8. Слока В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов. — М.: Сов. радио, 1970.
9. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983.
10. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. — М.: Сов. радио, 1975.
11. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
12. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я.Д. Ширмана. — М.: Сов. радио, 1970.
13. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. — М.: ИЛ, 1963.

## Основные обозначения и сокращения

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$s(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t))$ $s(t) = \operatorname{Re} \left[ \dot{S}(t) e^{i\omega_0 t} \right] = \operatorname{Re} [\dot{s}(t)],$	Действительный узкополосный радиосигнал
$\dot{S}(t) = S(t) e^{i\Phi(t)}$	Комплексная огибающая сигнала
$\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow} \underset{F}{}$	Знак взаимного преобразования Фурье для двух функций слева и справа от него
$\dot{G}(\omega); \dot{G}(\omega) \overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{S}(t)$	Спектральная функция комплексной амплитуды сигнала
$\dot{g}(\omega) = g(\omega) e^{i\gamma(\omega)}; \dot{g}(\omega) \overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow} s(t)$ $\dot{g}(\omega) = 0,5 \left[ \dot{G}(\omega - \omega_0) + \dot{G}^*(-\omega - \omega_0) \right]$	Комплексный частотный спектр $\dot{g}(\omega)$ действительного сигнала $s(t)$ ; $g(\omega)$ — амплитудно-частотный спектр; $\gamma(\omega)$ — фазочастотный спектр
$\Delta T$ и $\Delta\Omega = 2\pi \cdot \Delta F$	Среднеквадратические длительность и полоса частот сигнала
$B = \Delta T \cdot \Delta F \geq 1/4\pi$	База сигнала
$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}  \dot{S}(t) ^2 dt = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  \dot{G}(\omega) ^2 d\omega$ $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty}  \dot{g}(\omega) ^2 d\omega$	Энергия сигнала. $ \dot{G}(\omega) ^2 =  \dot{G}(2\pi f) ^2$ — энергетическая спектральная плотность, Дж/Гц
$\dot{G}(\omega - \omega_0) \overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{s}(t)$	Односторонний спектр комплексного узкополосного сигнала
$\dot{k}(\omega) = K(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$	Комплексный коэффициент передачи линейного фильтра

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$h(\tau) \overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{k}(\omega)$	Импульсная реакция линейного фильтра
$q(x_0, \nu_0, x, \nu) =$ $= (1/E_s) \int_0^T s(t, x_0, \nu_0) s(t, x, \nu) dt$	Нормированная сигнальная функция, определяющая различие сигналов по двум неэнергетическим параметрам
$k(\tau, \Omega) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t-\tau); (\omega_0 - \Omega)] dt =$ $= \operatorname{Re} \left\{ \dot{K}(\tau, \Omega) \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}$	Частотно-временная автокорреляционная функция узкополосного высокочастотного (ВЧ) радиосигнала; $\dot{K}(\tau, \Omega)$ — комплексная огибающая этой функции
$K(\tau, \Omega) =  \dot{K}(\tau, \Omega) ; \dot{K}(0; 0) = 1$	Функция неопределенности (ФН) сигнала или огибающая частотно-временной автокорреляционной функции
$K(\tau) =  \dot{K}(\tau; 0)  =$ $= \left  (1/2E_s) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) d\tau \right  =$ $= \frac{1}{2E_s} \left  \int_{-\infty}^{\infty}  \dot{G}(f) ^2 e^{i2\pi f\tau} df \right ; K(\tau_K/2) = 0,5$ $2E_s \dot{K}(\tau) \overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}  \dot{G}(\omega) ^2$	Огибающая временной автокорреляционной функции (АКФ) $k(\tau)$ детерминированного сигнала (иногда в контексте просто — временная автокорреляционная функция); $\tau_K$ — ширина огибающей временной АКФ по уровню 0,5
$K(F) = \left  \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f - F) \dot{G}^*(f) df \right  =$ $=  \dot{K}(F) $	Огибающая частотной автокорреляционной функции (АКФ) сигнала (иногда в контексте просто частотная автокорреляционная функция)

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$\dot{K}(F) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty}  \dot{S}(t) ^2 e^{i2\pi Ft} dt; K(F_K/2) = 0,5$	$F_K$ — ширина частотной автокорреляционной функции по уровню 0,5
$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(\mathbf{x})$	Совместная плотность распределения вероятностей (ПРВ) системы $n$ случайных величин
$\mathbf{M}[\cdot] = \overline{[\cdot]}; \mathbf{D}[\dots] = \overline{[\dots]^2} - [\overline{[\dots]}]^2$	Операторы математического ожидания (среднее по ансамблю) и дисперсии
$\mathbf{K}_n = \mathbf{M}\left[(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})^T\right];$ $\mathbf{n}$ — вектор-столбец; $\mathbf{n}^T$ — вектор строк	Ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{n}$
$D_x = \sigma_x^2; \sigma_x = \sqrt{D_x}$	Дисперсия случайной величины $x$ ; $\sigma_x$ — среднее квадратическое отклонение (СКО)
$L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$	Функция правдоподобия (ФП), совпадающая по виду с условной плотностью распределения вероятностей (ПРВ) принятых данных $\mathbf{y}$ при заданном значении параметра $\lambda$ .
$z(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = z_s(\lambda, \lambda_0) + z_n(\lambda) =$ $= \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t, \lambda) dt$	Логарифм функции правдоподобия (ЛФП), имеющий сигнальную $z_s(\cdot)$ и шумовую $z_n(\cdot)$ составляющие

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$\lambda_B^*, \lambda_{МП}^*, \lambda_{МНК}^*$	Оценки параметра $\lambda$ : соответственно — байесовская, максимально правдоподобная и по методу наименьших квадратов
$\varepsilon = (\lambda - \lambda^*)$ $\mathbf{M}[\varepsilon^2] = \overline{\varepsilon^2};$ $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$	Ошибка оценки параметра $\lambda$ . Средний квадрат ошибки. Среднеквадратичная ошибка
$\delta\tau_P$ и $\delta F_P$  $\delta\tau_B$ и $\delta F_B$	Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Релея). Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Вудворда)
$q_0^2 = 2E_s/N_0$	Максимальное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе согласованного фильтра
$N_0/2$	Двухсторонняя спектральная плотность мощности белого шума, Вт/Гц
$L(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)}$	Отношение правдоподобия в задаче оптимального различения и обнаружения сигналов
$i_1(\lambda) = \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial \ln[W(\mathbf{y}_1/\lambda)]}{\partial \lambda}\right)^2\right]$	Количество информации Фишера о параметре $\lambda$ , содержащееся в одиночном наблюдении

Учебное издание

Тисленко Владимир Ильич

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Технический редактор *Н.С. Голикова*

Корректор *Н.М. Минайчева*

Компьютерная верстка *Е.Н. Воронина*

Подписано в печать 23.12.03. Формат 60x84/16.

Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Усл. печ.л. 8,89. Уч.-изд.л. 7,82. Тираж 300. Заказ .

---

Издано в Томском государственном университете  
систем управления и радиоэлектроники  
634050 г. Томск, пр. Ленина, 40

Отпечатано в ОГУП «Асиновская типография»  
г. Асино, ул. Проектная, 22