Министерство образования и науки
Российской Федерации

Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)

Кафедра физики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой физики

______________ Е.М. Окс

“ 3 ” мая 2012г.

Физика

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания для студентов
всех специальностей

Составители:

Доценты кафедры физики

__________ В.А. Мухачёв

________ А.Л. Магазинников

“ 3 ” мая 2012г.

2012

Содержание

Введение

Измерения физических величин и получение их числовых значений являются непосредственной задачей многих физических экспериментов. Выведенные в результате измерений физические законы приводятся в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

Получение надёжных числовых значений не является простой задачей из-за погрешностей, неизбежно возникающих при измерениях. Мы рассмотрим эти погрешности, а также методы, применяемые при обработке результатов измерений. Владение этими методами нужно для того, чтобы научиться получать из совокупности измерений наиболее близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

Настоящие методические указания являются весьма кратким руководством по нахождению погрешностей простых измерений. Здесь приведены (без доказательств) лишь основные понятия теории погрешностей измерений и основные приёмы расчёта. Более подробно простые методы расчёта погрешностей измерений представлены в [1]. Полное изложение теории погрешностей измерений есть в монографии [2].

1 Виды измерений

Принято различать прямые и косвенные измерения.

Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину. Так, падение напряжения на сопротивлении можно найти по вольтметру, длину стержня измерить линейкой, а время — секундомером.

К *косвенным* относятся измерения таких физических величин, для нахождения которых необходимо использовать связь в виде формулы с другими, непосредственно измеряемыми величинами. Например, площадь прямоугольника находят по измерению длин его сторон, электрическое сопротивление — по измерению силы тока и напряжения.

При косвенном измерении искомую величину находят с помощью прямых измерений других величин, связанных с искомой величиной известной зависимостью. Интересующая нас величина находится путём соответствующих расчётов.

Качество измерений определяется их точностью. При прямых измерениях точность опытов устанавливается из анализа точности метода и прибора, а также из повторяемости результатов измерений.

Точность косвенных измерений зависит как от надёжности используемых для расчёта данных, так и от структуры формул, связывающей эти данные с искомой величиной.

2 Виды погрешностей измерений

2.1 Абсолютная и относительная погрешности

Точность измерений характеризуется их погрешностями. *Абсолютная погрешность измерения* по своему смыслу есть разность между результатом измерения и истинным значением измеряемой величины. Обозначая абсолютную погрешность измерения величины x символом Δx, получим

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}. \tag{2.1}$$

Ясно, что измеряется абсолютная погрешность Δx в тех же единицах, что и измеряемая величина x.

Абсолютная погрешность ничего не говорит о качестве проводимых измерений. Одна и та же погрешность $\Delta x = 1$ мм при измерении длины комнаты не сыграет роли, при измерении длины стола может быть уже существенна, а при измерении диаметра болта совершенно недопустима. Качество измерения характеризует *относительная погрешность* — отношение абсолютной погрешности к самой величине:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta(x)}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}}. \tag{2.2}$$

Относительная погрешность — безразмерная величина. Очень часто её выражают в процентах.

Согласно (2.1) и (2.2), чтобы найти абсолютную и относительную погрешности измерения, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение интересующей нас величины. Цель измерений всегда состоит в том, чтобы узнать неизвестное заранее значение физической величины и оценить погрешность измерения. При оценках погрешностей учитываются условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и ряд других факторов. Единого правила, шаблона, пригодного для всех случаев жизни, нет.

2.2 Случайные и систематические погрешности

Говоря о погрешностях измерений, необходимо прежде всего упомянуть о *грубых погрешностях* (промахах), возникших вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. В эту группу входят погрешности, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях. Например, при измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого объекта оказался совмещённым не с “0” линейки, а, скажем, с делением “10” мм, причём отсчёт будет сделан без учёта этого обстоятельства.

Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбросить. Промахи выявляются при повторных измерениях, если они сделаны другим лицом, не знающим результатов предыдущего измерения.

Не связанные с грубыми ошибками, все погрешности делятся на систематические и случайные. Деление на систематчисекие и случайные погрешности обусловлено природой, т.е. причиной возникновения этих погрешностей.

Случайные погрешности меняют величину и знак от опыта к опыту. Причиной такого изменения могут быть, например, неодинаковая масса гирь одного номинала, изменяющаяся величина силы трения во вращающихся частях прибора и т.п. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто результаты не в точности равны друг другу, а “пляшут” вокруг некоторого среднего значения.

Случайные погрешности эксперимента исследуются путём сравнения результатов, полученных при нескольких измерениях, проведённых в одинаковых условиях. Если при двух-трёх измерениях результаты совпали, то на этом следует остановиться. Если они расходятся, нужно попытаться понять причину расхождения и устранить её. Если устранить причину не удаётся, следует провести 10 — 12 измерений и, записав все результаты, обработать их в соответствии с полученной закономерностью разброса величин.

Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Они вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений.

Все факторы, обусловливающие систематические погрешности, можно разделить на четыре группы:

1. Погрешности, природа которых нам известна, и их значение может быть достаточно точно определено. Как правило, это погрешности методики измерения. Например, при взвешивании не учиты-

вается сила выталкивания воздуха. Такие погрешности устраняются путём введения соответствующих поправок. Величина поправок, которые ещё есть смысл вводить, устанавливается в зависимости от значения других погрешностей, сопровождающих данное измерение.

2. Погрешности, также обусловленные недостатками методики измерений, но о существовании которых не подозреваем, хотя они могут быть значительными. Например, если хотим измерить плотность какого-то металла и для этого определим объём и массу образца, то совершим грубую ошибку, если образец содержал внутри пустоты. Здесь приведён простейший пример. При более сложных измерениях нужно всегда очень тщательно продумывать методику, чтобы избежать ошибок подобного рода. Один из наиболее надёжных способов — провести измерение искомой величины совсем другим методом и в других условиях.

3. Погрешности, обусловленные объектом измерений. Эта группа ошибок, хотя и не связана непосредственно с измерительными операциями, может существенным образом исказить результат измерений.

Пример. Если для измерения электропроводности металла взят отрезок проволоки, имеющий утолщение или овальность, то, измерив диаметр проволоки в одном месте, можно допустить существенную ошибку. Для устранения погрешности такого сорта следует провести измерение диаметра проволоки в нескольких местах, а ещё лучше — провести измерения на нескольких идентичных образцах. При этом такая погрешность из систематической переводится в случайную.

4. Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. К этой группе относится погрешность измерительных приборов: неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта. Именно эта группа ошибок и будет учитываться в лабораторном практикуме как систематическая погрешность. Способы определения систематической погрешности приборов будут рассмотрены в следующих разделах.

Различие между систематическими и случайными погрешностями не является абсолютным и связано с постановкой опыта. Например, производя измерение тока не одним, а несколькими одинаковыми амперметрами, мы превращаем систематическую ошибку, связанную с неточностью шкалы, в случайную, величина и знак которой зависят от того, какой поставлен амперметр в данном опыте. Однако во всяком опыте — при заданной его постановке — различие между систематическими и случайными погрешностями всегда можно и нужно устанавливать с полной определённостью [3].

3 Оценка погрешности прямых измерений

3.1 Случайные погрешности

Случайные величины и случайные погрешности изучаются в теории вероятностей и математической статистике. Опишем основные свойства и правила обращения с такими величинами в том объёме, который необходим для обработки результатов измерений, полученных в лаборатории.

Благодаря тому, что случайные погрешности подчиняются вероятностным закономерностям, всегда можно указать интервал, он называется доверительным интервалом, внутри которого с заданной вероятностью заключается истинное значение измеряемой величины. *Доверительный интервал* — это область, внутри которой с заданной вероятностью заключено истинное значение измеряемой величины.

Проделаем n измерений какой-либо величины (например диаметра проволоки) и будем считать, что промахи и систематические ошибки устранены и рассматривать будем только случайные ошибки. В результате этих измерений мы получим ряд значений x_1, x_2, x_3, …, x_n. Если x_0 есть наивероятнейшее значение измеряемой величины, то разность Δx_i между измеренным значением x_i и x_0 называется абсолютной случайной погрешностью отдельного измерения:

$$\begin{aligned} &x_1 - x_0 = \Delta x_1, \\ &x_2 - x_0 = \Delta x_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n - x_0 = \Delta x_n. \end{aligned}$$

За истинное значение измеряемой величины обычно принимается среднее арифметическое из результатов всех n измерений:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.1}$$

Среднее арифметическое $\langle x \rangle$ результатов отдельных измерений при очень большом значении n (т.е. $n \longrightarrow \infty$) равно наивероятнейшему значению измеряемой величины x_0. На практике n всегда конечно, и $\langle x \rangle$ лишь приближённо равно наивероятнейшему значению измеряемой величины. Чем больше число измерений, тем ближе среднее значение к наиболее вероятному.

В преобладающем большинстве случаев для оценки случайной погрешности используется нормальный (Гауссов) закон распределения ошибок. Его особое значение связано со многими обстоятельствами и главное из них — это центральная предельная теорема:

если суммарная погрешность проявляется в результате совместного действия ряда факторов, каждый из которых вносит малую долю в общую погрешность, то по какому бы закону не были распределены погрешности, вызываемые каждым из факторов, результат их совместного действия приводит к Гауссовому распределению погрешностей.

Распределение Гаусса выражается следующим образом:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{3.2}$$

где $\rho(x)$ — плотность распределения вероятности погрешностей:

$$\rho(x) = \frac{1}{dx} \cdot \frac{dn}{n},$$

где $dn/(dx \cdot n)$ — доля случаев, приходящихся на бесконечно малый интервал ошибок dx;

σ — среднеквадратичная погрешность;

σ^2 — дисперсия измерений.

Таким образом, число попаданий dn случайной величины x в бесконечно малый интервал ошибок dx определяется формулой*

$$dn = n\rho(x)dx.$$

График нормального закона распределения представлен на рисунке 3.1. Точки $x = x_0 \pm \sigma$ есть точки перегиба кривой Гаусса. Среднеквадратичная ошибка σ есть мера рассеяния случайных погрешностей. При увеличении σ кривая становятся сильно размытой; случайные погрешности имеют большие значения и сильно рассеяны. Наоборот, если случайная погрешность мала, то результаты измерения x группируются вблизи наивероятнейшего значения x_0.

Отношение площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями $x_0 \pm \sigma$ (на рисунке эта площадь заштрихована) ко всей площади под кривой составляет 0,68, и запись $x = x_0 \pm \sigma$ говорит о том, что любое проведённое измерение x с вероятностью $\alpha = 0{,}68$ (68%) лежит в доверительном интервале от $x_0 - \sigma$ до $x_0 + \sigma$.

Доверительному интервалу значений случайной величины x от $x_0 - 2\sigma$ до $x_0 + 2\sigma$ (здесь $\Delta x = 2\sigma$) соответствует вероятность попадания любого проведённого измерения $\alpha = 0{,}95$. Доверительному интервалу от $x_0 - 3\sigma$ до $x_0 + 3\sigma$ (здесь $\Delta x = 3\sigma$) соответствует вероятность 0,997.

---

*В статистике Максвелла существует формула, определяющая число частиц, имеющих скорости в интервале $(v, v+dv)$: $dn = nF(v)dv$, где $F(v)$ — функция распределения Максвелла по абсолютным значениям скоростей.

Указание одной лишь абсолютной погрешности Δx лишено смысла. Дело в том, что результаты отдельных измерений могут выходить за пределы доверительного интервала $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$. Вместе с погрешностью необходимо обязательно указывать доверительную вероятность α (надёжность измерений), т.е. вероятность попадания измерения в доверительный интервал.

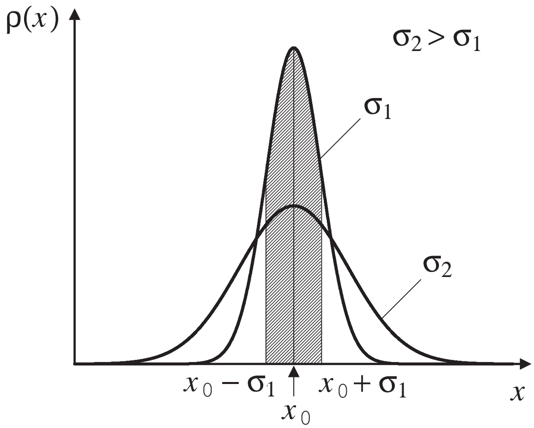

Рисунок 3.1 – Кривые распределения Гаусса при разных среднеквадратичных отклонениях σ_1 и σ_2

3.2 Стандартная погрешность и погрешность среднего арифметического

Прежде чем приводить формулы оценки случайных погрешностей, отметим, что в процессе измерений определить наивероятнейшее значение x_0 нельзя. Однако оценить погрешности возможно, если заменить x_0 средним арифметическим значением $\langle x \rangle$.

При ограниченном числе n измерений отклонение отдельного измерения от среднего значения оценивается выборочным среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\text{отд}}$:

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}. \qquad (3.3)$$

В формуле (3.3) $\sigma_{\text{отд}}$ называется среднеквадратичной погрешностью отдельного измерения или стандартной погрешностью (стандартным отклонением).

Стандартная погрешность характеризует погрешность каждого отдельного измерения, т.е. метода измерений. Но очень часто нужно знать погрешность результата всей совокупности измерений данной величины x, т.е. погрешность среднего арифметического $\langle x \rangle$. Именно погрешность среднего арифметического чаще всего и нужно вычислять в лабораторном практикуме.

За величину случайной погрешности среднего арифметического принимается среднеквадратичная погрешность среднего арифметического:

$$\boxed{\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}. \qquad (3.4)}$$

Тогда результат измерения величины x может быть представлен в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma_{\text{ср}}.$$

Как понимать этот доверительный интервал? Пусть мы провели серию из n измерений, получили некоторое значение $\langle x_1 \rangle$ и абсолютную погрешность $\Delta x = \sigma_{1\text{ср}}$. Отложим полученные результаты на числовой оси (рисунок 3.2). Если провести другую серию измерений этой же величины, то получим другое значение среднего арифметического $\langle x_2 \rangle$. Но с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}68$ значение $\langle x_2 \rangle$ попадёт внутрь доверительного интервала $(\langle x_1 \rangle - \Delta x, \langle x_1 \rangle + \Delta x)$, вычисленного по первой серии измерений.

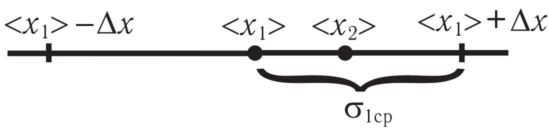

Рисунок 3.2 – Графическая иллюстрация случайной погрешности среднего арифметического

Можно показать, что в случае удвоенного значения $\Delta x = 2\sigma_{\text{ср}}$ доверительная вероятность равна 0,95.

Приведённые выше значения вероятностей α справедливы при большом числе n измерений. В лабораторном практикуме обычно n невелико, и составляет $5 - 7$. Определяется доверительная вероятность в зависимости от величины $\sigma(x)$ и числа n измерений с помощью коэффициентов Стьюдента $t(\alpha, n)$ (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Коэффициенты Стьюдента, $t(\alpha, n)$

n	Доверительная вероятность, α								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,0	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,7
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	0,89	1,1	1,4	1,8	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
15	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
25	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,68	0,84	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Например, при $n = 7$ доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ соответствует коэффициент Стьюдента $t(\alpha, n) = 2{,}4$. Тогда $\Delta x = 2{,}4\sigma_{\text{ср}}$ и запись

$$x = \langle x \rangle \pm 2{,}4\sigma_{\text{ср}}$$

будет означать, что истинное значение найденной величины лежит в указанном доверительном интервале с вероятностью 0,95 (95%). С увеличением n коэффициент Стьюдента $t(\alpha, n)$ стремится (при этой вероятности) к двум.

3.3 Оценка погрешности измерительных приборов

Погрешность прибора оценивается на заводе-изготовителе путем сравнения показаний данного прибора с показаниями другого, более точного. Результат проверки приводится либо в паспорте к прибору, либо указанием класса точности γ: 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0.

Чем меньше класс точности, тем точнее прибор. Класс точности указывается на шкале прибора в виде цифры с запятой следующими способами: **1,0** , $\underset{\vee}{\mathbf{1{,}0}}$, **1,0** . И за каждым обозначением скрывается своё содержание класса точности.

1. У приборов, где обозначено **1,0** — класс точности есть приведённая погрешность, выраженная в процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta(x)\cdot 100\%}{X_N}, \tag{3.5}$$

где $\Delta(x)$ — абсолютная погрешность данного прибора; X_N — нормирующее значение.

Нормирующее значение принимается равным:

1) конечному значению шкалы прибора, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы;

2) сумме конечных значений шкалы прибора (без учета знаков), если нулевая отметка находится внутри шкалы.

У приборов, имеющих резко неравномерную шкалу (например, у омметров), нормирующее значение принимается равным длине шкалы. В этом случае погрешность и длину шкалы выражают в одних единицах, например, в миллиметрах. Класс точности таких приборов обозначают так: **1,0** . Этими приборами в лабораторном практикуме пользоваться не будем.

Следует запомнить, что для всех приборов этого типа постоянной по всей длине шкалы является абсолютная погрешность, значение которой можно найти из выражения (3.5):

$$\boxed{\Delta(x) = \frac{\gamma\cdot X_N}{100\%}.} \tag{3.6}$$

Относительная погрешность таких приборов изменяется по длине шкалы, она равна:[*]

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \frac{\gamma\cdot X_N}{x\cdot 100\%}. \tag{3.7}$$

Следовательно, качество измерений с помощью таких приборов выше, если измерения проводятся в правой половине шкалы прибора.

---

[*]При однократном измерении под x следует понимать результат этого единичного измерения. Если же произведены многократные измерения, то в формулу следует подставлять среднее значение $\langle x\rangle$ случайной величины x.

2. У приборов, где обозначено 1,0 — класс точности есть относительная погрешность, выраженная в процентах. У этих приборов постоянной по всей длине шкалы является относительная погрешность, следовательно, качество измерений с помощью таких приборов не зависит от того, в какой части шкалы проводятся измерения.

Абсолютная погрешность таких приборов изменяется по длине шкалы и равна:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma \cdot x}{100\%}. \tag{3.8}$$

3. В последнее время широко используются цифровые универсальные приборы, отличающиеся высокой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов, систематические погрешности цифровых электроизмерительных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение абсолютной погрешности мультимеров серий M890D, M890F, M890C, M890G, M9102A оценивается по формуле:

`Погрешность = (% от считываемых данных + количество единиц младшего разряда),`

или

$$\boxed{\Delta(x) = \frac{\varepsilon \cdot x}{100\%} + N \cdot \delta,} \tag{3.9}$$

где δ — единица младшего разряда (разрешающая способность).

При изменении предела измерений прибора или вида измерений (напряжение, ток, сопротивление) структура формулы не изменяется, меняются только числа, входящие в формулу (3.9). Приведём эти числа для различных режимов измерения постоянного напряжения и тока.

Таблица 3.2 – Предельные погрешности измерений постоянного напряжения

Диапазон измерения	Погрешности измерения, $\pm\varepsilon \pm N$	Разрешающая способность, δ
200 мВ	$\pm 0{,}5\% \pm 1$	100 мкВ
2 В	$\pm 0{,}5\% \pm 1$	1 мВ
20 В	$\pm 0{,}5\% \pm 1$	10 мВ
200 В	$\pm 0{,}5\% \pm 1$	100 мВ
1000 В	$\pm 0{,}8\% \pm 2$	1В

Из таблицы видно, что при установке диапазона измерения напряжений до 200 мВ одна единица младшего разряда δ равна 100 мкВ. Если диапазон до 2 В, то $\delta = 1$ мВ и т.д.

Таблица 3.3 – Предельные погрешности измерений постоянного тока

Диапазон измерения	Погрешности измерения, $\pm\varepsilon \pm N$	Разрешающая способность, δ
2 мА	$\pm0{,}8\% \pm 1$	1 мкА
20 мА	$\pm0{,}8\% \pm 1$	10 мкА
200 мА	$\pm1{,}2\% \pm 1$	100 мкА
20 А	$\pm2{,}0\% \pm 5$	10 мА

При установке диапазона измерения напряжений до 2 мА одна единица младшего разряда δ равна 1 мкА. Если диапазон до 20 мА, то $\delta = 10$ мкА и т.д.

4. На микрометрах, штангенциркулях, секундомерах и некоторых других приборах указывается абсолютная погрешность в виде числа с единицей измерения, например, 0,05 мм; 0,2 с.

5. Если же у прибора нет паспорта, не обозначена абсолютная погрешность и не указан класс точности, то абсолютная погрешность такого прибора равна половине цены наименьшего деления шкалы. Если прибор цифровой, то, погрешность следует принять равной одной - двум единицам младшего разряда.

3.4 Оценка суммарной погрешности

В реальных опытах присутствуют как систематические, так и случайные ошибки. Пусть измерения характеризуются погрешностями $\Delta_{\text{сист}}$ и $\sigma_{\text{случ}}$. Суммарная погрешность находится по формуле

$$\boxed{\Delta_{\text{сум}} = \sqrt{\Delta^2_{\text{сист}} + [3\sigma_{\text{случ}}]^2}} \qquad (3.10)$$

с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}96$ (при $n = 5 - 7$ измерениях).

В лабораторном практикуме можно пользоваться и упрощенной формулой:

$$\Delta_{\text{сум}} = \Delta_{\text{сист}} + 2\sigma_{\text{случ}}. \qquad (3.11)$$

Доверительная вероятность в этом случае при $n = 5 - 7$ равна 0,90.

Таким образом, при наличии как систематической, так и случайной погрешности полная ошибка опыта больше, чем каждая из них в отдельности.

Если в результате многократных измерений какой-либо величины получен ряд совершенно одинаковых значений, то в этом случае случайная погрешность существенно меньше систематической и ее невозможно учесть. Если результаты измерений отличаются один от другого, то в этом случае необходимо оценить как систематическую, так и случайную погрешности и найти их сумму.

4 Оценка погрешности косвенных измерений

Пусть искомая величина является функцией нескольких аргументов, которые находятся в результате прямых измерений:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k),$$

где k — число аргументов, являющихся результатом прямых измерений.

Среднеквадратичная погрешность косвенного измерения

$$\Delta^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_2) + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_k),$$

или

$$\Delta(y) = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_2) + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_k)}. \tag{4.1}$$

Относительная погрешность косвенного измерения

$$\varepsilon(y) = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_1) + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_2) + \cdots + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_k}\right)^2 \cdot \Delta^2(x_k)}. \tag{4.2}$$

Доверительная вероятность найденных значений $\Delta(y)$ и $\varepsilon(y)$ равна доверительной вероятности $\Delta(x_i)$, $i = 1, 2, ..., k$ поэтому необходимо, чтобы доверительные вероятности аргументов были равны друг другу.

Тем, кто не знаком с дифференциальным исчислением и с частными производными, можно пользоваться простыми правилами, вытекающими из формул (4.1) и (4.2), см. таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Простейшие формулы для нахождения погрешности косвенного измерения

Функция	Формула для расчёта погрешности
$y = x_1 \pm x_2$	$\Delta(y) = \sqrt{\Delta^2(x_1) + \Delta^2(x_2)}$
$y = x_1 \cdot x_2$ или $y = x_1/x_2$	$\varepsilon(y) = \sqrt{\varepsilon^2(x_1) + \varepsilon^2(x_2)}$
$y = \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_m}$	$\varepsilon(y) = \sqrt{\sum\limits_1^k \varepsilon^2(x_i) + \sum\limits_1^m \varepsilon^2(z_i)}$
$y = x^m$	$\varepsilon(y) = m\varepsilon(x)$
$y = \sqrt[m]{x}$	$\varepsilon(y) = \dfrac{1}{m}\varepsilon(x)$
$y = \ln x$	$\Delta(y) = \varepsilon(x);\ \ \varepsilon(y) = \dfrac{\varepsilon(x)}{\lvert \ln x\rvert}$
$y = \lg x$	$\Delta(y) = \dfrac{\varepsilon(x)}{\ln 10};\ \ \varepsilon(y) = \dfrac{\varepsilon(x)}{\ln 10 \cdot \lvert \ln x\rvert}$

5 Точность вычислений и запись результата измерений

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, произведенные с большим числом десятичных знаков, чем это необходимо, создают ложное впечатление о большой точности измерений. В то же время, разумеется, не следует ухудшать результаты измерений, пользуясь излишне грубыми методами вычисления.

Экспериментаторы придерживаются простого правила: погрешность, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок, т.е. в десять раз, меньше суммарной погрешности измерений. При этом можно быть уверенным, что в процессе арифметических вычислений ощутимым образом не исказятся результаты измерений.

При десяти и меньшем числе измерений придерживаются следующего правила. При записи суммарной величины погрешности приводят одну значащую цифру, если она больше трех, и две значащие цифры, если первая из них меньше четырех. Например, если $\Delta(x) = 0{,}423$, то записывают $\Delta(x) = 0{,}4$; если $\Delta(x) = 0{,}324$, то следует писать две значащие цифры $\Delta(x) = 0{,}32$. Поскольку погрешность записывают, используя максимум две цифры, то арифметические вычисления следует проводить, используя максимум три значащие цифры.

При записи результата измерений, т.е. величины $\langle x \rangle$, последней значащей цифрой следует указывать ту, разряд которой соответствует младшему разряду погрешности измерений. Например, нашли, что сопротивление проводника $\langle R \rangle = 28{,}735$ Ом, погрешность измерения при этом $\Delta(R) = 0{,}247$ Ом. Ответ следует записать так:

$$R = (28{,}74 \pm 0{,}25)\ \text{Ом},$$

или

$$R = 28{,}74\ (0{,}25)\ \text{Ом}.$$

Если бы погрешность измерения оказалась другой, например, $\Delta(R) = 0{,}438$ Ом, то

$$R = (28{,}7 \pm 0{,}4)\ \text{Ом},$$

или

$$R = 28{,}7\ (0{,}4)\ \text{Ом}.$$

6 Пример оценки погрешности косвенного измерения

Пусть при измерении сопротивления некоего резистора используются следующие приборы: стрелочный вольтметр класса точности 1,0 с максимальным значением шкалы 50 В и цифровой амперметр с установленным диапазоном измерения до 200 мА. Для определения R можно воспользоваться законом Ома:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Результаты измерений приведены в таблице 6.1. Напряжения U и ток I являются прямыми измерениями, а сопротивление резистора R — измерение косвенное. Измерения напряжения и силы тока производились в одинаковых условиях, различные значения U и I получались в результате случайных отклонений от истинных величин.

Таблица 6.1

Измеряемая величина	1	2	3	4	5	Средние значения
U, В	25,5	25,0	24,7	25,3	24,5	25,0
I, мА	50,5	50,0	49,5	50,5	50,5	50,2
R, Ом	505	500	499	501	485	498

Вычисляем среднее значение сопротивления:

$$\langle R\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{505+500+499+501+485}{5} = 498 \text{ Ом}.$$

Оценим погрешность найденной величины $\langle R\rangle$. Из таблицы 4.1 следует, что

$$\varepsilon(R)_{\text{сист}} = \sqrt{\varepsilon^2(U)_{\text{сист}} + \varepsilon^2(I)_{\text{сист}}}.$$

Итак, нужно найти относительные систематические погрешности измерений $\varepsilon(U)_{\text{сист}}$ и $\varepsilon(I)_{\text{сист}}$. Так как класс точности вольтметра 1,0, то его абсолютная систематическая погрешность, в соответствии с формулой (3.6):

$$\Delta(U)_{\text{сист}} = \frac{50\cdot 1{,}0\%}{100\%} = 0{,}5 \text{ В}.$$

Относительная систематическая погрешность прибора:

$$\varepsilon(U)_{\text{сист}} = \frac{0{,}5}{25{,}0} = 0{,}02.$$

По таблице 3.3 определяем необходимые параметры, входящие в формулу (3.9), и рассчитываем абсолютную систематическую погрешность тока:

$$\Delta(I)_{\text{сист}} = \frac{1{,}2\%\cdot 50{,}2}{100\%} + 1\cdot 0{,}1 = 0{,}7 \text{ мА}.$$

Относительная систематическая погрешность тока:

$$\varepsilon(I)_{\text{сист}} = \frac{0{,}7}{50{,}2} = 0{,}014.$$

Рассчитываем относительную и абсолютную систематические погрешности сопротивления:

$$\varepsilon(R)_{\text{сист}} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}014^2} = 0{,}024,$$

$$\Delta(R)_{\text{сист}} = \langle R\rangle\cdot\varepsilon(R)_{\text{сист}} = 498\cdot 0{,}024 = 12 \text{ Ом}.$$

Среднеквадратичная погрешность среднего арифметического R (случайная), в соответствии с формулой (3.4), равна:

$$\sigma(R)_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{(505-498)^2 + (500-498)^2 + \cdots + (485-498)^2}{5\cdot 4}} = 3{,}4 \text{ Ом}.$$

Суммарная абсолютная погрешность R с доверительной вероятностью ($\alpha = 0{,}96$) будет равна в соответствии с формулой (3.10):

$$\Delta(R)_{\text{сум}} = \sqrt{12^2 + (3 \cdot 3{,}4)^2} = 15{,}7 \text{ Ом}.$$

Окончательно, с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}96$ можно утверждать, что искомая величина

$$R = 498 \pm 16 \text{ Ом}.$$

7 Построение графиков и оценка графических погрешностей

7.1 Построение графиков с использованием доверительных интервалов

В практике научных исследований очень часто приходится строить графические зависимости одной из измеряемых величин от другой. Наличие погрешностей измерений обусловливает тот факт, что экспериментальные точки не точно ложатся на прямую или кривую, выражающую теоретическую зависимость между этими величинами.

Например, на рисунке 7.1 показана экспериментальная зависимость напряжения на неизвестном сопротивлении R от величины протекающего через него тока. Экспериментальные точки расположились так, что однозначно провести прямую, выражающую эту зависимость, затруднительно: на рисунке 7.1 показаны три возможных варианта зависимости. Какой из них верен?

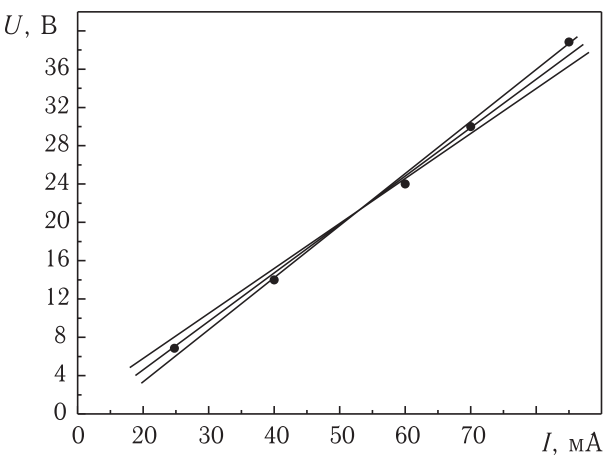

Рисунок 7.1 – Зависимость напряжения U на сопротивлении от тока I

Один из широко распространенных приближенных методов проведения экспериментальной зависимости заключается в том, что на графике указываются доверительные интервалы значений измеренных величин. При построении доверительного интервала следует иметь в виду две ситуации:

1) каждая экспериментальная точка — результат многократного измерения. В этом случае следует найти суммарные абсолютные погрешности каждой из измеренных величин (см. подразделы 3.1 — 3.3): они откладываются по обе стороны от точки на графике вдоль соответствующих координатных осей. При этом можно точно указать доверительную вероятность проведенных измерений;

2) гораздо чаще встречающийся случай: каждая экспериментальная точка — результат однократного измерения. В этом случае можно найти только абсолютные систематические погрешности результатов измерений и также отложить по обе стороны от соответствующей экспериментальной точки. Следует заметить, что для приборов, у которых постоянной является абсолютная погрешность (класс точности таких приборов обозначается, например, 1,0), отрезки доверительных интервалов будут одинаковыми; если измерения проведены с помощью изучаемых цифровых приборов, доверительные интервалы будут неодинаковыми.

В качестве примера рассмотрим еще один метод измерения сопротивления, — при котором не стараются установить одно и то же значение напряжения, как в разделе 6, а измеряется ток при заведомо разных напряжениях. Каждое из этих измерений проводится один раз. Положим, что приборы имеют те же характеристики, что и в разделе 6. Результаты измерений представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Результаты измерений тока и напряжения

I, мА	7,53	15,1	24,8	30,0	37,5
U, В	4	7	12	15	19

По результатам измерений построен график (рисунок 7.2).

Экспериментальные точки не строго укладываются на прямую и, чтобы провести эту прямую более точно, построим доверительные интервалы. Так как измерения однократные, то доверительные интервалы будут представлять собой абсолютные погрешности приборов, с помощью которых проводились измерения тока и напряжения. При классе точности вольтметра 1,0 и максимальном значении шкалы прибора 50 В абсолютная погрешность равна 0,5 В. Параллельно оси напряжения вверх и вниз от каждой экспериментальной точки надо отложить 0,5 В в масштабе графика (рисунок 7.2).

У миллиамперметра абсолютная погрешность изменяется, чем больше величина тока, тем больше погрешность. Максимальная величина абсолютной систематической погрешности измерения тока будет равна:

$$\Delta(I)_{\text{сист}} = \frac{1{,}2\% \cdot 37{,}5}{100\%} + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}6 \text{ мА}.$$

В масштабе рисунка 7.2 это соответствует примерно 1 мм. Для других экспериментальных точек "размер" доверительного интервала на графике будет еще меньше. Такие малые интервалы на графиках обычно не откладываются.

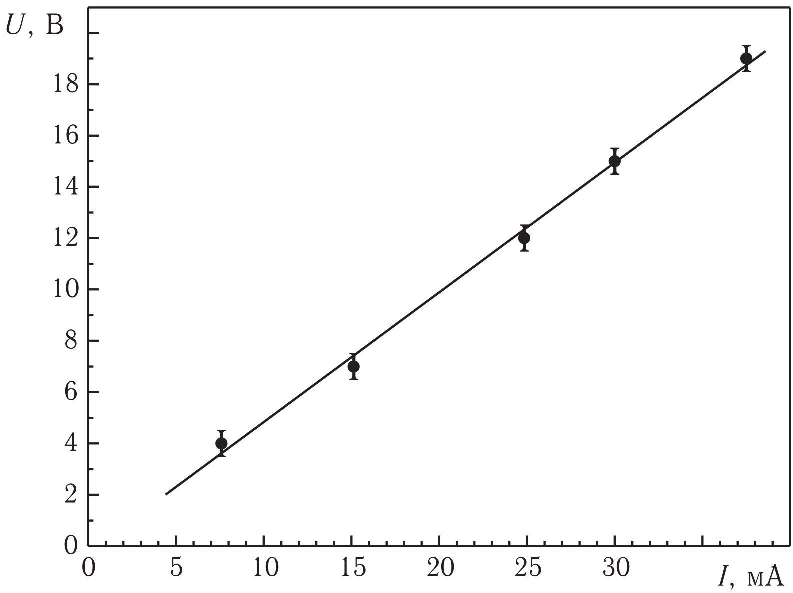

Рисунок 7.2 – Связь между током I и напряжением U для постоянного сопротивления

Прямую следует провести так, чтобы она прошла внутри всех доверительных интервалов. Во многих случаях оказывается, что провести прямую с соблюдением этого условия возможно единственным образом. При нахождении какой-либо величины x из графика абсолютная погрешность этой величины $\Delta(x)$ равна половине цены деления соответствующей шкалы графика.

Рекомендуется самостоятельно рассчитать сопротивление R и погрешность $\Delta(R)$ в рассмотренном примере.

7.2 Линеаризация функций

В физических исследованиях очень часто для сравнения эксперимента с теорией пользуются методом линеаризации теоретической зависимости. Например, исследуется зависимость тока вакуумного диода I от величины задерживающего напряжения U между катодом и анодом. Теоретическая зависимость имеет следующий вид:

$$I = I_0 \exp\left[-\frac{eU}{kT}\right], \tag{7.1}$$

где I_0 — ток при $U = 0$; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; e — заряд электрона.

Построенная по экспериментальным данным зависимость $I = f(U)$ может с равным успехом иллюстрировать и квадратичную, и кубическую, и экспоненциальную зависимости. Чтобы выяснить, подтверждают ли экспериментальные данные теорию, теоретическую зависимость преобразуют так, чтобы между функцией I и аргументом U была линейная зависимость.

Прологарифмировав выражение (7.1), получим:

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{e}{kT}U. \tag{7.2}$$

Это уравнение прямой вида:

$$y = b - ax, \tag{7.3}$$

где $y = \ln I$; $b = \ln I_0$; $a = \dfrac{e}{kT}$ — угловой коэффициент прямой; $x = U$.

Если экспериментальные результаты улягутся на прямую (в пределах погрешностей измерений) в координатах $\ln I = f(U)$), можно утверждать, что зависимость между I и U носит именно экспоненциальный характер, как это и следует из теории (рисунок 7.3).

Во многих случаях знание углового коэффициента a и величины b позволяет определить и другие параметры изучаемого явления. В данном примере, зная a, можно определить температуру катода.

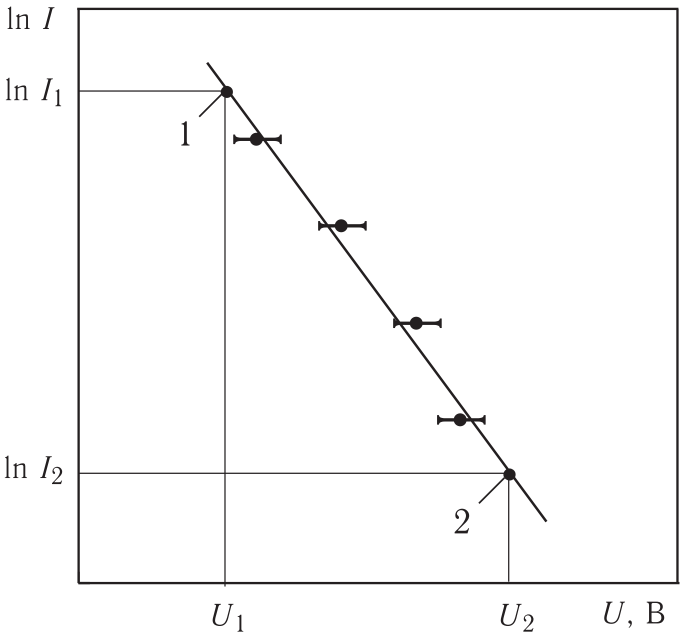

Рисунок 7.3 – Зависимость $\ln I$ от величины задерживающего напряжения U

В приближённых вычислениях угловой коэффициент находится обычно из графика (рисунок 7.3): точно на прямой выбираются две точки (1 и 2) и a определяется как тангенс угла наклона прямой:

$$a = \frac{\ln I_2 - \ln I_1}{U_2 - U_1} = \frac{\Delta \ln I}{\Delta U}.$$

7.3 Метод наименьших квадратов

При нахождении величин a и b из графика к погрешности измерений добавляется погрешность построения графика. Есть точный метод нахождения оценок величин a и b — метод наименьших квадратов.

Формулы для вычисления a и b имеют вид:

$$a = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right]^2}, \qquad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{7.4}$$

Зная a и b и задавшись какими-либо значениями x_1 и x_2 можно вычислить y_1 и y_2 (по формуле 7.3). Затем через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проводится искомая прямая (если построение графика необходимо).

Теория также позволяет найти случайные абсолютные погрешности коэффициентов a и b:

$$\sigma(a) = \sqrt{\frac{S^2 \cdot n}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right]^2}}; \quad \sigma(b) = \sqrt{\frac{S^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right]^2}}, \tag{7.5}$$

где

$$S^2 = \frac{R_{\min}}{n-2}; \quad R_{\min} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2.$$

Следует подчеркнуть, что по формулам (7.5) вычисляется не среднеквадратичная среднего арифметического, а именно стандартная погрешность, т.е. среднеквадратичная погрешность каждого отдельного измерения.

Истинные значения коэффициентов a и b лежат в следующих интервалах:

$$a_{\text{ист}} = a \pm t(\alpha, n) \cdot \sigma(a),$$

$$b_{\text{ист}} = b \pm t(\alpha, n) \cdot \sigma(b),$$

где $t(\alpha, n)$ — коэффициент Стьюдента для данной вероятности α и числа n измерений.

Литература

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. 110с.

2. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. Л: Энергия, 1978. 258с.

3. Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие. В трёх томах. Т.1. Механика / А.Д. Гладун, Д.А. Александров, Ф.Ф. Игошин и др. Под ред. А.Д. Гладуна. М.: МФТИ, 2004. 316с.