



Электромагнитная совместимость:

моделирование

С.П.Куксенко

С.П. Куксенко

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ
СОВМЕСТИМОСТЬ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

В-Спектр
Томск – 2018

УДК 621.31:519.612:537.311:32

ББК 30.2-5-05

К 89

К 89 **Куксенко С.П.** Электромагнитная совместимость: моделирование / под ред. Т.Р. Газизова . – Томск: В-Спектр, 2018. – 188 с.
ISBN 978-5-91191-407-3

Показана актуальность применения математического моделирования при решении проблемы электромагнитной совместимости (ЭМС) различных технических средств на этапе их проектирования, что позволяет существенно сократить как финансовые, так и временные затраты, делая готовое техническое средство более дешевым и надежным. Обсуждаются общие вопросы, связанные с интегральными и дифференциальными уравнениями, а также численные методы их решения. Приведен сравнительный анализ программных продуктов, применяемых при моделировании ЭМС. Рассмотрены этапы построения математических моделей и приведены их примеры. Поскольку решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является наиболее вычислительно затратным этапом построения математических моделей в данной предметной области, рассмотрены особенности, связанные с решением СЛАУ при анализе линий передачи методом моментов.

Для студентов, магистрантов и аспирантов в области радиотехники и инфокоммуникационных технологий, обучающихся по направлению ЭМС.

УДК 621.31:519.612:537.311:32
ББК 30.2-5-05

Рецензенты: **А.А. Светлаков**, д-р техн. наук, проф.,
каф. КСУП, ТУСУР;
И.С. Костарев, канд. техн. наук,
начальник отдела АО «НПЦ «Полус».

ISBN 978-5-91191-407-3

© Куксенко С.П., 2018
© ТУСУР, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| От редактора | 5 |
| Введение | 6 |
| Глава 1. Электромагнитная совместимость: актуальность, математические модели и численные методы | 7 |
| 1.1. Актуальность обеспечения электромагнитной совместимости | 7 |
| 1.2. Дифференциальные уравнения в частных производных | 13 |
| 1.3. Интегральные уравнения | 17 |
| 1.4. Построение математической модели | 20 |
| 1.5. Уравнения Максвелла | 22 |
| 1.6. Численные методы | 23 |
| 1.6.1. Метод конечных разностей во временной области | 24 |
| 1.6.2. Метод конечного интегрирования | 30 |
| 1.6.3. Метод матрицы линий передачи | 32 |
| 1.6.4. Метод конечных элементов | 33 |
| 1.6.5. Метод моментов | 34 |
| 1.6.6. Метод эквивалентной схемы из частичных элементов | 36 |
| 1.6.7. Гибридные методы | 37 |
| 1.7. Уравнения электростатики и магнитостатики | 37 |
| Глава 2. Специализированное программное обеспечение | 39 |
| 2.1. Схемотехническое и квазистатическое моделирование | 39 |
| 2.2. Электродинамическое моделирование | 42 |
| 2.2.1. Программные продукты, основанные на методе моментов | 44 |
| 2.2.2. Программные продукты, основанные на методе конечных разностей во временной области | 51 |
| 2.2.3. Программные продукты, основанные на методе матрицы линий передачи | 53 |
| 2.2.4. Программные продукты, основанные на методе конечных элементов | 53 |
| 2.2.5. Программные продукты, основанные на методе конечного интегрирования | 56 |
| 2.2.6. Образовательные и ознакомительные версии | 57 |
| Глава 3. Метод моментов | 59 |
| 3.1. Общая теория | 59 |
| 3.2. Пример использования | 61 |
| 3.3. Краткая теоретическая справка | 66 |
| 3.4. Базисные и тестовые функции | 67 |
| 3.4.1. Базисные функции подобластей | 67 |
| 3.4.2. Базисные функции полной области | 69 |
| 3.4.3. Базисные функции RWG | 70 |

| | |
|---|-----|
| Глава 4. Электродинамический подход | 73 |
| 4.1. Тестовые задачи | 73 |
| 4.2. Рекомендации по валидации результатов моделирования | 82 |
| 4.2.1. Процесс валидации вычислительного моделирования электромагнетизма | 82 |
| 4.2.2. Уровни валидации модели | 83 |
| 4.2.3. Подготовка к валидации с использованием инженерных решений | 84 |
| 4.2.4. Эталонное решение или внутренняя проверка | 86 |
| 4.2.5. Внутренняя проверка модели | 87 |
| 4.2.6. Численный расчет рейтинга валидации с использованием метода FSV | 89 |
| Глава 5. Квазистатический подход | 91 |
| 5.1. Основы решения | 91 |
| 5.2. Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы методом конечных разностей | 95 |
| 5.2.1. Конечно-разностная аппроксимация | 96 |
| 5.2.2. Повышение точности вычислений | 99 |
| 5.2.3. Двухмерное уравнение Лапласа: однородный диэлектрик | 101 |
| 5.2.4. Двухмерное уравнение Лапласа: неоднородный диэлектрик | 107 |
| 5.3. Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы методом моментов | 115 |
| Глава 6. Особенности решения СЛАУ при анализе линий передачи | 123 |
| 6.1. Сравнение производительности математических библиотек | 123 |
| 6.2. Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика | 128 |
| 6.2.1. Основной алгоритм | 128 |
| 6.2.2. Наличие в анализируемой структуре плоскости земли | 136 |
| 6.2.3. Отсутствие в анализируемой структуре плоскости земли | 137 |
| 6.2.4. Обобщенный алгоритм | 140 |
| 6.2.5. Вычислительные эксперименты | 141 |
| 6.3. Изменение высоты диэлектрика | 159 |
| 6.4. Переупорядочивание и перенумерация | 165 |
| 6.5. Гибридный метод | 171 |
| Заключение | 175 |
| Литература | 176 |
| Приложение 1. Список используемых обозначений и сокращений | 186 |

ОТ РЕДАКТОРА

Освящению различных вопросов моделирования устройств и явлений, связанных с решением разнообразных задач, возникающих при обеспечении ЭМС, посвящено много очень хороших отечественных и зарубежных книг. Однако среди них мало книг с таким «необъятным» названием, как у этой. И, вряд ли, эта книга реально претендует на охват всего, что связано с моделированием ЭМС. Просто, автор невольно оказался «заложником» его же идеи начала выпуска коллективом его коллег серии книг с унифицированными названиями «Электромагнитная совместимость: ...», а его книга оказалась первой в этой серии, из посвященных именно моделированию.

Между тем ряд факторов оправдывает широкое название книги. Все они объединены общей идеей возможности и реализации любых изменений в построении математической модели, которые обеспечат ускорение моделирования. Пользуясь терминологией ТРИЗ (теория решения изобретательских задач), ту же идею можно сформулировать ещё короче: выявление ресурсов ускорения. При этом, блестящее использование системного подхода выявляет «копеечные» ресурсы: не требующие почти никаких затрат. В книге много направлено на ускорение часто самого затратного решения при моделировании, а именно системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), и такие ресурсы находятся. Так, при решении большого числа СЛАУ (а это многовариантный анализ и оптимизация, крайне актуальные при грамотном моделировании) ресурс ускорения находится в надлежащем расположении изменяемых элементов в матрице СЛАУ, которое можно «бесплатно» получить соответствующей нумерацией подобластей на самом первом этапе построения модели (дискретизации). Другим примером является почти тривиальное и «ничего не стоящее» изменение последовательности решения СЛАУ итерационным методом с предобуславливанием (например, не с 1-й по 100-ю СЛАУ, а с 100-й по 1-ю или с 50-й по 1-ю и с 50-й по 100-ю), ускоряющее в несколько раз.

Однако главным достоинством книги являются даже не сами эти находки автора (первые из которых были представлены в его кандидатской диссертации, а все новые будут представлены в готовящейся докторской), а детальное освещение различных методов, при использовании которых находки автора также могут быть успешно использованы. Таким образом, в силу универсальности задачи решения СЛАУ, подходы автора применимы к моделированию не только ЭМС, но и широкого круга других задач проектирования (например, антенн), причем не только электрических, но и тепловых, и механических. Так что, название книги не широкое, а напротив, даже узкое для её содержания! В любом случае, она будет полезна для широкого круга читателей.

******Т.Р. Газизов, д.т.н.,*

ВВЕДЕНИЕ

Из-за массового распространения в последнее десятилетие технических средств (ТС), состоящих из микропроцессорных устройств, высокочастотных схем и маломощных передатчиков, широко применяемых в бытовой технике, автомобильной промышленности и др., выполнение требований электромагнитной совместимости (ЭМС) становится все более сложным, а число аспектов, принимаемых во внимание, стремительно увеличивается. Таким образом, проблема обеспечения ЭМС тесно связана с тем, что составляет обширную область радиотехники, электроники и электротехники. Особо остро проблема обеспечения ЭМС стоит в электроэнергетике. Так, на практике происходят повреждения кабелей вторичной коммутации и устройств релейной защиты и автоматики при коротких замыканиях на шинах распределительных устройств станций и подстанций. Помимо прямых ударов молний возможны удары в близлежащие заземленные конструкции, что приводит к появлению, так называемых, «вторичных воздействий» молний, приводящим к существенным материальным затратам, выходу из строя оборудования, линий связи и объектов в целом.

По мнению автора, вероятность возникновения упомянутых случаев «электромагнитной несовместимости» ТС можно было существенно уменьшить за счет их тщательного математического моделирования с учетом ЭМС при проектировании. Так, общепринятой практикой является использование систем автоматизированного проектирования при разработке различного рода ТС. Отдельно стоит отметить, что для их эффективного использования пользователь должен иметь навыки и знания из нескольких разделов математической физики, для понимания сути, начиная с настроек параметров решателей и заканчивая физичностью полученных результатов. При этом вопросам обеспечения ЭМС уделяется недостаточное внимание, что впоследствии приводит или к необходимости модернизации или к полной замене этих ТС.

Сказанное и сподвигло автора к написанию этой работы, нацеленной на освещение некоторых общих и частных вопросов, связанных с моделированием ЭМС. В первую очередь она нацелена на будущих специалистов в области радиоэлектроники, информационных технологий и др. При этом автор надеется, что данный труд окажется полезным и для уже состоявшихся специалистов и инженеров.

Автор выражает большую признательность за помощь при проведении части вычислительных экспериментов по многократному решению СЛАУ и оформлении монографии Р.С. Суровцеву, В.К. Салову, Е.В. Лежнину и А.А. Иванову, а также Т.Р. Газизову за ряд ценных замечаний при обсуждении её результатов.

ГЛАВА 1

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ: АКТУАЛЬНОСТЬ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1.1. Актуальность обеспечения электромагнитной совместимости

Современное общество трудно представить без различных устройств и систем, функционирование которых основано на электромагнитных явлениях: персональные компьютеры, телевидение, Интернет, микроволновые печи, мобильные телефоны, спутниковые системы связи, радиолокационные системы, электрические двигатели, электрические генераторы, компьютеры, роботы, лазеры, промышленные нагревательные устройства, медицинские системы визуализации, электрические сети, трансформаторы и многое другое. Каждый элемент данного списка используется в различных вариациях и приложениях. Так, например, радар используется для радионавигации, радиолокации, управления огнем, прогноза погоды, слежения за ракетами и их наведения, движения роботов, обеспечения безопасности движения и многого другого. Таким образом, несомненным фактом является то, что электромагнитные явления оказывают глубокое влияние на облик современного общества. При этом широкое использование электромагнитных явлений породило проблему обеспечения ЭМС. Строго говоря, данный термин имеет широкое применение, не ограничивающееся только радиоэлектронными и радиопередающими устройствами и системами, а также их элементами, но в данной работе внимание уделено именно им. Для ясности дальнейшего изложения приведем некоторые понятия и термины согласно ГОСТ Р 50397–2011 (МЭК 60050-161:1990¹) от 2011 г. «Совместимость технических средств электромагнитная Термины и определения» (взамен ГОСТ Р 50397–92 от 1997 г.²) [1]. Данный стандарт устанавливает термины и определения понятий в области ЭМС ТС. Так, термины из данного стандарта, рекомендуются применять во всех видах документации, а также в технической и научной литературе и т.п.

¹ IEC 60050-161:1990 International electrotechnical vocabulary – Chapter 161: Electromagnetic compatibility (MOD)

² Часть терминов изменена и исключена. В конце 2018 г. вступит новая редакция в виде межгосударственного стандарта (ГОСТ 30372–2017).

Техническое средство – электротехническое, электронное и радиоэлектронное изделие, а также любое изделие, содержащее электрические и/или электронные составные части (может быть устройством, оборудованием, системой или установкой).

Электромагнитная обстановка, ЭМО (electromagnetic environment)¹ – совокупность электромагнитных явлений, существующих в данном месте.

Электромагнитная совместимость ТС (electromagnetic compatibility; EMC) – способность ТС функционировать с заданным качеством в заданной ЭМО и не создавать недопустимых электромагнитных помех другим ТС.

Электромагнитная помеха, ЭМП (electromagnetic disturbance)² – любое электромагнитное явление, которое может ухудшить качество функционирования ТС.

Другими словами, под ЭМП подразумевается электромагнитные воздействия отдельных элементов друг на друга или сторонней системы на рассматриваемую через паразитные или функциональные связи. При этом механизм мешающего воздействия предполагает наличие, по крайней мере, одного источника, от которого исходят помехи, и одного чувствительного к помехам элемента, через который помехи могут причинить вред. Оба эти компонента взаимодействуют друг с другом через механизм связи. Помехой может быть напряжение, ток, напряженность поля и т.д.

Эмиттер ЭМП (emitter of electromagnetic disturbance) – ТС, вызывающее возрастание напряжений, токов или электромагнитных полей, которые могут действовать как электромагнитные помехи.

Электромагнитная эмиссия (electromagnetic emission) – явление, при котором электромагнитная энергия исходит от источника.

Кондуктивная ЭМП (conducted disturbance) – ЭМП, энергия которой передается по одному или нескольким проводникам.

Излучаемая ЭМП (radiated disturbance) – ЭМП, энергия которой передается в пространстве в виде электромагнитных волн.

Помехоустойчивость ТС, устойчивость ТС к ЭМП (immunity to a disturbance) – способность ТС сохранять заданное качество функционирования при воздействии на него внешних помех с регламентируемыми значениями параметров. Критерии нормального функционирования, лежащие в основе объективного определения

¹ В общем, электромагнитная обстановка зависит от времени и для ее описания может требоваться статистический подход.

² Электромагнитная помеха может быть электромагнитным шумом, нежелательным сигналом или изменением в среде распространения.

помехоустойчивости, зависят от назначения объекта, и поэтому они всегда специфичны для разных объектов.

Электромагнитная восприимчивость (electromagnetic susceptibility, EMS) – неспособность ТС функционировать без ухудшения качества при наличии электромагнитных помех.

Влияние ЭМП (electromagnetic interference, EMI) – ухудшение качества функционирования ТС или канала передачи, вызванное электромагнитной помехой.

Электромагнитная несовместимость различных ТС приводит к экономическому ущербу, серьезным авариям и даже гибели людей. Из-за массового распространения в последнее десятилетие микропроцессорных устройств, высокочастотных схем и маломощных передатчиков, широко применяемых в бытовой технике и на производстве, выполнение требований ЭМС становится все более сложным, а число аспектов принимаемых во внимание, стремительно увеличивается. Так известны факты, когда вблизи определенных мест, где располагались мощные источники радиоизлучения, автомобильная электроника давала сбои вплоть до полной неработоспособности. На судах регистрировались случаи нештатного включения электропривода, сбоев в работе систем автоматики и даже случай нарушения в работе судна, обусловленные влиянием помех, создаваемых судовым радиотехническим и электротехническим оборудованием. Разряд молнии в систему молниеотводов высотного здания в г. Мюнхен вывел из строя более 200 единиц электронных средств, расположенных в нем и в зданиях на удалении до 1 км.

Проблема ЭМС остро стоит в электроэнергетике. Известны случаи нештатной работы оборудования, выход его из строя и отказы. Так, на одной из тепловых электростанций аварийно остановлен крупный энергоблок из-за ложного срабатывания технологической защиты, на работу которой оказала влияние носимая коротковолновая радиостанция. Практика эксплуатации показывает, что часто происходят повреждения кабелей вторичной коммутации и устройств релейной защиты и автоматики при коротких замыканиях на шинах распределительных устройств подстанций и станций. И это далеко не единичные случаи.

Вопросам обеспечения ЭМС уделяется все больше внимания во всем мире. Введены в действие и постоянно совершенствуются международные и национальные стандарты, содержащие требования к разнообразному оборудованию по ЭМС. Продукция, не соответствующая требованиям ЭМС, не допускается на рынок в Европе и во многих странах мира. Ежегодно проводится несколько международ-

ных симпозиумов и выставок в области ЭМС, собирающих тысячи участников и десятки фирм. Также издается большое количество научных трудов, посвященных как общим, так и отдельным разделам ЭМС [2–12], что подтверждает важность и актуальность её обеспечения.

Проблема обеспечения ЭМС тесно связана с радиотехникой, электроникой и электротехникой. Перечислим наиболее существенные причины, вызывающие обострение проблемы ЭМС, которые должны быть учтены при проектировании ТС различного назначения:

1. Увеличение уровня интеграции, необходимой для расширения функциональных возможностей ТС, ведёт к увеличению плотности монтажа и энергопотребления, а также степени интеграции элементной базы, что приводит к снижению энергетических уровней информационных сигналов, увеличивая восприимчивость ТС к внутренним и внешним помехам.

2. Увеличение быстродействия элементов ТС, определяемое ростом тактовой частоты, также приводит к уменьшению энергии передаваемых импульсов, что ухудшает помехоустойчивость. Однако это усугубляется еще и укорочением фронтов импульсов, а соответственно, расширением спектра в высокочастотную область. Как следствие, возрастает потенциальная опасность воздействия ЭМП от увеличивающегося числа возможных источников помех.

3. Усложнение систем ТС за счет увеличения числа внешних устройств, а значит, внешних линий связи (ЛС), приводит к возрастанию временных задержек и искажений формы полезных сигналов в ЛС.

4. Внедрение различных ТС в производственно-технические процессы и объекты (системы автоматики и управления различными производственными процессами, автомобили и наземный транспорт, летательные аппараты, спутники), обладающие высоким уровнем ЭМП, резко усложняет обеспечение ЭМС ТС.

5. Возрастает вероятность применения преднамеренных электромагнитных воздействий в террористических целях.

6. Увеличивается загрузка диапазонов радиочастот, несмотря на то, что многие участки его уже сильно загружены.

7. Повышается мощность радиопередатчиков, для некоторых типов радиосредств до десятков мегаватт.

С точки зрения ЭМС есть только три аспекта: генерация, передача и приём электромагнитной энергии [13]. Источник (эмиттер) создаёт эмиссию, а канал передачи передаёт её к приёмнику (рецептору), где она обрабатывается. Тогда, если принятая энергия приводит к нежелательному поведению приёмника, то можно говорить о

возникновении помехи. Отдельно стоит отметить, что непреднамеренная передача или приём электромагнитной энергии не обязательно вредны, поскольку помеху создаёт нежелательное поведение приёмника. Таким образом, проблему ЭМС принято рассматривать с двух точек зрения: восприимчивости и влияния. При этом различают несколько механизмов связи, через которые эти взаимодействия реализуются. Так, помехи от источника достигают рецептора различными путями в зависимости от его удаления и среды распространения. При этом помехи, проникающие в рецептор по проводам непосредственно или через наводки, принято называть кондуктивными. Кондуктивная ЭМП обуславливает: гальванический путь (связь) ЭМП и рецептора – связь через общий импеданс; емкостный путь – электрическая связь (электрическое поле в ближней зоне); индуктивный путь – магнитная связь (магнитное поле в ближней зоне). Если передача энергии осуществляется через пространство, между источником и рецептором, то помехи принято называть излучаемыми [14]. При этом путь передачи обусловлен связью через излучение (электромагнитное поле в дальней зоне), рис. 1.1 (приведены англоязычные сокращения для облегчения сопоставления с международной литературой).

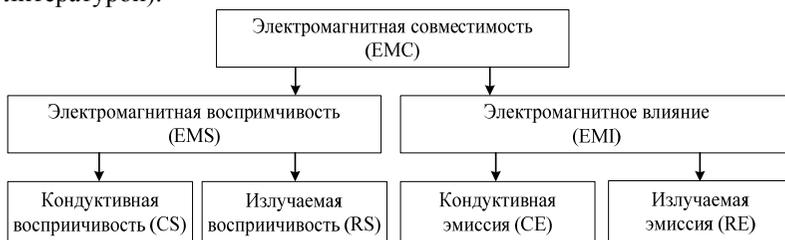


Рис. 1.1. Деление проблемы ЭМС на составляющие

Комплексная цель рациональных работ по ЭМС при проектировании, изготовлении и использовании ТС состоит в том, чтобы устранить возможные недостатки, обусловленные электромагнитной несовместимостью, т.е. путем организованного применения технически реальных мер при оправданных затратах достичь удовлетворительной совместимости. Жизненный цикл (ЖЦ) любого ТС состоит из нескольких стадий (этапов): проектирование; изготовление прототипа; испытание прототипа; производство; эксплуатация; утилизация. При этом обеспечение ЭМС ТС важно предусматривать, начиная с наиболее ранних этапов его разработки, т.е. с момента проектирования, поскольку с увеличением времени в пределах ЖЦ ТС набор доступных разработчику способов борьбы с помехами умень-

шается, т.к. технические решения, необходимые для обеспечения ЭМС, приходится приспособлять под уже имеющиеся элементы изделия, а сложность возможных технических решений при этом, как правило, возрастает (рис. 1.2) [15].

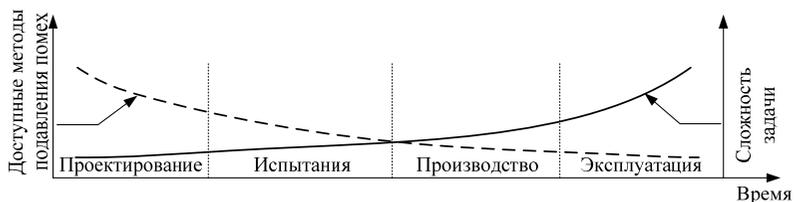


Рис. 1.2. Связь между проблемой и возможностями обеспечения ЭМС ТС в течение ЖЦ [15]

Последовательность действий при решении задачи обеспечения ЭМС ТС состоит из нескольких этапов [15]: оценка ЭМО в рабочей среде проектируемого устройства (системы); прогнозирование воздействия ЭМП на параметры проектируемого ТС; оценка ЭМС проектируемого ТС на основе результатов моделирования помехового воздействия, испытания ТС на устойчивость к электромагнитным воздействиям и на уровень электромагнитных эмиссий.

ЭМО в предполагаемой среде функционирования проектируемого ТС определяется перечнем источников электромагнитных эмиссий и, как правило, регламентируется соответствующими нормативными документами. При отсутствии таких данных, оценить ЭМО можно сложением уровней помех, потенциально создаваемых окружающими средствами или системами в предполагаемом месте размещения проектируемого ТС. При этом на этапе прогнозирования требуется формирование математической модели ЭМО, описание которой может варьироваться в процессе проектирования под действием тех или иных принимаемых технических решений касательно проектируемого устройства.

Моделирование ЭМС ТС – составляющая процесса его проектирования, позволяющая существенно экономить требуемые ресурсы. Возможно физическое и математическое моделирование ТС. Однако, к сожалению, из-за сложности проектируемых ТС любой вид моделирования в полном объеме представляет практически неразрешимую задачу. Это объясняется тем, что полная физическая модель представляет готовое устройство, а это противоречит самой сути проектирования. В то же время, создание полной математической модели крайне редко возможно даже с применением современных программных продуктов и рабочих станций. Поэтому широкое

применение нашли физическое моделирование на основе упрощенных моделей действующих устройств или их частей, реализующих основные функции устройства в целом и имитационное математическое моделирование.

С точки зрения трудоемкости математическое моделирование, как правило, менее затратно, однако достоверность результатов физического, как правило, обычно выше. Математическое моделирование обладает рядом специфических особенностей в отношении различных объектов исследования, подробному изложению которых будут посвящены последующие разделы.

Требования к ЭМС изготовленного ТС регламентируется нормами и стандартами ЭМС. Помимо классов ТС, на которые они распространяются, в этих стандартах определяются методы испытаний, а также критерии оценки их результатов. Существующие стандарты по ЭМС, можно разделить на три группы: общие, базовые и на виды продукции. Первые устанавливают общие принципы проведения испытаний для широких классов ТС. Назначением вторых является установление методов испытаний и степеней жесткости, на которые можно ссылаться из других стандартов, а стандарты на виды продукции устанавливают требования к конкретным видам ТС. Именно последние стандарты используются при процедуре обязательной сертификации.

1.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Электромагнитное взаимодействие не только объясняет все электрические и магнитные явления, но и обеспечивает силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Изучение электромагнитных явлений рассматривается в теории электромагнитного поля, описывающей взаимодействие между электрическими зарядами с помощью уравнений Максвелла: системы связанных уравнений (в дифференциальной или интегральной форме), связывающих источники (заряды и токи) с создаваемыми ими электромагнитными полями и потоками.

Аналитические решения в замкнутом виде известны только в ограниченном количестве частных случаев, которые крайне редко применимы к решению практических задач. Поэтому для преодоления разрыва между теорией и требованиями практики при решении реальных задач используются различного рода (более или менее грубые) упрощения или приближения.

Появление компьютеров сильно изменило акценты при решении уравнений Максвелла. Так, до появления компьютеров было выгодно прикладывать значительные усилия, для предотвращения громоздких вычислений, часто ценой длительных аналитических манипуляций и, в итоге, значительно уменьшенной применимости. Наоборот, с появлением мощных компьютеров более привлекательным стало использование более простых методов, требующих больших вычислений. Такие вычислительные методы применимы при решении различного рода задач без необходимости модификации алгоритмов или компьютерных программ.

Сказанное выше послужило становлением такого направления как вычислительная электродинамика (англ. computational electromagnetics). Данное направление важно для современных инженеров и ученых, которые решают электромагнитные задачи с помощью специализированных инструментальных средств. Так, использование таких средств позволяет ускорить и удешевить процесс проектирования, где использование дорогостоящих и трудоемких прототипов (физическое моделирование) сведено к минимуму. Эти инструменты могут дать важную информацию об электромагнитных процессах, протекающих в проектируемом устройстве, получение которой может быть осложнено или даже невозможно посредством экспериментов или аналитических расчетов. Автоматизация вычислений позволяет провести обширные структурные и параметрические исследования, а при необходимости быстрой разработки, анализа и оптимизации этих устройств, решающее значение для поддержания их конкурентоспособности может иметь использование инструментария вычислительной электродинамики. Таким образом, средства вычислительной электродинамики являются базовым инструментарием при решении задач ЭМС.

Существует широкий выбор как свободно распространяемых, так и коммерчески доступных компьютерных программ, обеспечивающих реализацию популярных и мощных алгоритмов. С помощью этих программ можно решать многие инженерные и научно-исследовательские задачи. Однако их правильный выбор и использование (с точки зрения вычислительных и финансовых затрат) для получения корректных результатов требуют хорошего понимания особенностей и границ применимости того или иного инструментального средства. Кроме того, задачи, выходящие за рамки применимости данных средств, требуют соответствующих модификаций, которые также основаны на хорошем понимании ключевых особенностей вычислительной электродинамики.

Многие задачи, связанные с анализом физических полей описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. К сожалению, во многих случаях, представляющих практический интерес, найти аналитическое решение таких задач трудно или практически невозможно. Это обычно обусловлено сложной формой или неоднородностью свойств области, в которой отыскивается решение. Однако результат можно получить численно с помощью компьютера. Подходы к решению дифференциальных уравнений с частными производными определяются их математической формой.

Во многих случаях для описания физических процессов используют уравнения с частными производными до второго порядка включительно. Так, например, изучение свободных колебаний различной природы приводит к волновым уравнениям вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где $u(x, y, z, t)$ – функция, описывающая волновой процесс; x, y, z – координаты; c – скорость распространения волны в данной среде; t – время. Оператор $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ носит название оператора Лапласа (обозначаемого также как ∇^2).

Процессы распространения тепловой энергии описываются уравнением теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = Q, \quad (1.2)$$

где ρ и C – плотность и теплоемкость вещества, T – температура, k – коэффициент теплопроводности, Q – мощность источников тепла.

Анализ стационарных состояний, например, статических тепловых, электрических, магнитных полей или деформаций при статических нагрузках, проводят, используя уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad (1.3)$$

где $u(x, y, z)$ – функция, описывающая статическое поле, $f(x, y, z)$ – распределенные источники. Если $f(x, y, z) = 0$, то (1.3) обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.4)$$

Известны и другие виды задач и соответствующие им дифференциальные уравнения в частных производных, например, уравнение диффузии или уравнение Гельмгольца.

Несмотря на различие процессов, описываемых рассмотренными уравнениями, и форм их записи, все они с математической точки зрения могут быть представлены как частные случаи обобщенной формы дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x и y

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0, \quad (1.5)$$

где A , B , C и D – некоторые функции, зависящие в общем случае от x , y , u , $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$, причем A , B и C одновременно не обращаются в ноль. Дифференциальные уравнения, описывающие физические поля, могут быть нелинейными. Однако на практике многие задачи рассматриваются в линейном приближении, когда уравнение с частными производными линейно относительно неизвестной функции u и ее частных производных.

На основании того, что уравнению (1.5) можно поставить в соответствие квадратичную форму $A\zeta_1^2 + B\zeta_1\zeta_2 + C\zeta_2^2 = 0$, по математической природе различают следующие типы квазилинейных уравнений:

- гиперболический, если $B^2 - 4AC > 0$ – его аналогом является волновое уравнение (1.1);
- параболический, если $B^2 - 4AC = 0$ – его аналог уравнение теплопроводности (1.2);
- эллиптический, если $B^2 - 4AC < 0$ – аналог уравнение Пуассона (1.3) или Лапласа (1.4).

Приведенная классификация позволяет определить общие подходы к решению дифференциальных уравнений в задачах различных по физической сути, но сходных с математической точки зрения. В задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, другой важной составляющей помимо самого уравнения является формулировка дополнительных условий. Для задач с уравнениями гиперболического или параболического типа, содержащих в качестве независимой переменной время t , условия по t обычно формулируются как начальные, описывающие исходное состояние системы. По координатам x , y и z задают граничные условия. В тепловых задачах они, например, описывают распределение температуры на границе расчетной области. В задачах с уравнениями эллиптического типа, не содержащими переменную t , используют

только граничные условия по координатам x , y и z , а саму задачу называют краевой.

Если краевое условие задает распределение функции u на границе, то его принято называть условием Дирихле. Условие, определяющее производную на границе расчетной области, называют условием Неймана. Условия, представляющие собой комбинацию двух вышеназванных, называют смешанными.

1.3. Интегральные уравнения

Под интегральными уравнениями понимают уравнения, в которых неизвестная функция Φ независимого (скалярного или векторного) аргумента встречается под знаком интеграла. Термин интегральное уравнение ввел в употребление в 1886 г. немецкий математик Поль Дюбуа-Рейман (1831–1889 гг.). Различают линейные и нелинейные интегральные уравнения, в зависимости от того, зависит уравнение от неизвестной функции линейным или нелинейным образом. Построение общей теории линейных интегральных уравнений было начато в конце XIX в. Её основоположниками считаются Вито Вольтерра (1840–1940), Эрик Эвир Фредгольм (1866–1927), Давид Гильберт (1862–1943) и Эрхард Шмидт (1876–1959). Простыми примерами интегральных уравнений являются интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Ганкеля. Так, одной из первых задач являлась задача обращения интеграла

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{jux} dx ,$$

т.е. по известной функции $F(u)$ требуется найти функцию $f(x)$. Как известно, первым решил эту задачу в 1811 г. Ж. Фурье (1768–1830). Функция $f(x)$ определяется следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{-jux} du .$$

Последние два выражения называются прямым и обратным преобразованиями Фурье соответственно.

Линейные интегральные уравнения, которые наиболее часто подлежат рассмотрению, делятся на две категории, названные в честь Фредгольма и Вольтерра. (Наиболее распространенными представителями нелинейных интегральных уравнений являются уравнения Урысона и уравнения Гаммерштейна. Данные уравнения далее не рассматриваются.) Первый класс – уравнения Фредгольма первого, второго и третьего рода соответственно:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.6)$$

$$f(x) = \Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.7)$$

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.8)$$

где $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$, λ – в общем случае комплексный параметр (в некоторых задачах равен единице). Функции $K(x, t)$, называемая ядром интегрального уравнения, и $f(x)$, а также пределы интегрирования a и b известны, а $\Phi(x)$ неизвестна. Область $S = [a, b] \times [a, b]$ изменения переменных x и t называется основным квадратом. Промежуток $[a, b]$, на котором ищется функция $\Phi(x)$, называется областью определения интегрального уравнения. Второй класс – уравнения Вольтера первого, второго и третьего рода соответственно:

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.9)$$

$$f(x) = \Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.10)$$

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\Phi(t)dt, \quad (1.11)$$

с переменным верхним пределом интегрирования. При этом $K(x, t) = 0$ при $t > x$.

Если $f(x) = 0$, то уравнения (1.6)–(1.10) являются однородными, в противном случае – неоднородными. Еще раз отметим, что уравнения (1.6)–(1.10) являются линейными, поскольку неизвестная функция линейна. Так, уравнение вида

$$f(x) = \Phi(x) - \int_a^b K(x,t)\Phi^2(t)dt$$

является нелинейным. Если пределы интегрирования a или b или ядро $K(x, t)$ обращаются в бесконечность, то интегральное уравнение называют сингулярным. Если выполняется условие $K(x, t) = K(t, x)$, то ядро называется симметричным.

Вышеприведенная классификация одномерных интегральных уравнений возникает теории дифференциальных уравнений естественным образом, тем самым демонстрируя тесную связь между интегральной и дифференциальной постановками задачи. Большинство

обыкновенных дифференциальных уравнений может быть сведено к интегральным, но обратное неверно. Граничные условия вводятся отдельно от дифференциальных уравнений, а при интегральном уравнении они включены в него. Например, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Phi}{dx} = F(x, \Phi), a \leq x \leq b \quad (1.12)$$

при условии $\Phi(a) = \text{константа}$. Оно может быть записано в виде уравнения Вольтерра второго рода. Так, после интегрирования уравнения (1.12) получим

$$\Phi(x) = \int_a^x F(x, \Phi(t)) dt + c_1,$$

где $c_1 = \Phi(a)$. В итоге вместо уравнения (1.12) получим

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x F(x, \Phi) dt. \quad (1.13)$$

Любое решение уравнения (1.13) удовлетворяет исходному уравнению (1.12) и заданным граничным условиям. Таким образом, интегральная формулировка уравнения включает как само дифференциальное уравнение, так и соответствующие граничные условия.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = F(x, \Phi), a \leq x \leq b. \quad (1.14)$$

Его интегрирование даёт

$$\frac{d\Phi}{dx} = \int_0^x F(x, \Phi(t)) dt + c_1,$$

где $c_1 = \Phi'(a)$. Интегрирование полученного выражения даёт

$$\Phi(x) = c_2 + c_1 x + \int_a^x (x-t) F(x, \Phi(t)) dt,$$

где $c_2 = \Phi(a) - \Phi'(a)a$. Тогда

$$\Phi(x) = \Phi(a) + (x-a)\Phi'(a) + \int_a^x (x-t) F(x, \Phi) dt. \quad (1.15)$$

Видно, как и ранее, что интегральное уравнение (1.15) обобщает собой как дифференциальное уравнение (1.14), так и граничные условия.

1.4. Построение математической модели

Для численного анализа какой-либо физической проблемы необходимо построить ее математическую модель, учитывающую все существенные для данной задачи особенности реального процесса. Следует отметить, что математическая модель не идентична объекту, а является его приближенным описанием. Поэтому, в зависимости от требований к универсальности и точности, она может иметь различную сложность и требовать для реализации различных вычислительных ресурсов. Процесс построения математической модели условно можно разбить на несколько этапов [16]:

1. Постановка задачи – определение целей расчета и класса решаемых задач, определение необходимого объема входной и выходной информации, а также допустимой погрешности результатов решения.

2. Аналитическая обработка – формулировка уравнений, начальных и граничных условий, описание формы и свойств расчетной области, выбор метода решения, преобразование уравнений модели к виду, наиболее подходящему для данного численного метода.

3. Дискретизация модели – переход от функциональных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием замены непрерывных функций их дискретными аналогами.

4. Решение СЛАУ. На этом этапе важную роль играет выбор как типа, так и самого метода решения (прямой/итерационный), наиболее подходящего для данной системы уравнений с требуемой точностью.

5. Обработка результатов – расчет поля, характеристик и параметров системы по данным решения и их визуализация. Часто на этом этапе приходится восстанавливать отклик системы в широком диапазоне частот по результатам решения в отдельных точках этого диапазона.

Еще раз подчеркнем, что данная градация условна и только облегчает процесс систематизации информации. Так, при использовании явной схемы решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей, не требуется формирование СЛАУ, а вычисления основаны на итерационном уточнении компонент решения. Для примера, на рис. 1.3 показана последовательность передачи данных в системе Altair FEKO для получения результатов моделирования. Видно, что в данном случае выделено 7 этапов, а не 5. При этом функционально они идентичны.

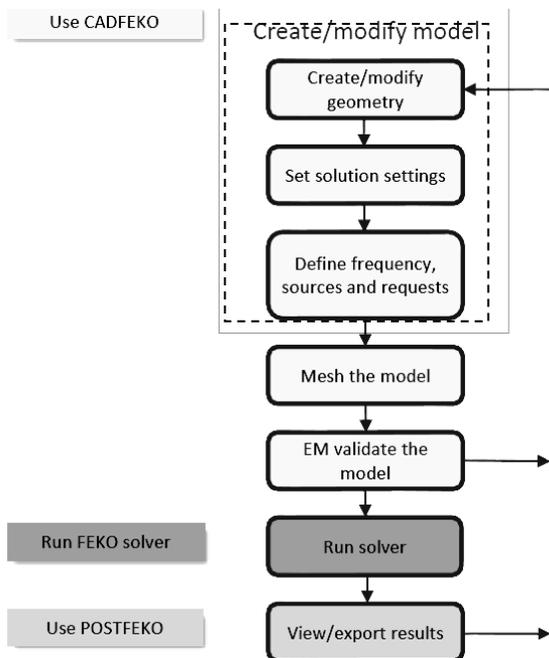


Рис. 1.3. Иллюстрация последовательности работ в системе Altair FEKO¹

Очевидно, что перечисленные этапы не являются независимыми. Так, например, выбор метода дискретизации влияет на свойства получаемой СЛАУ, что, в свою очередь, определяет выбор метода её решения (прямой или итерационный). При этом одной из наиболее важных характеристик математической модели является погрешность получаемых с ее помощью результатов. Эта погрешность складывается из составляющих, вносимых на каждом этапе численного решения:

1. Неустраняемая погрешность, возникающая на первом этапе за счет погрешности в исходных данных (не может быть устранена на последующих этапах, однако может существенно увеличиваться при решении так называемых некорректных задач).

2. Погрешность самой математической модели, связанная с неполным её соответствием реальному физическому объекту.

3. Погрешность дискретизации задачи, а также вычислительная погрешность, возникающая на этапах 4 и 5 и связанная с конеч-

¹ Altair FEKO [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – 2018. – Режим доступа: www.altair.com, свободный. – Загл. с экрана. – Текст на экране англ.

ной точностью представления чисел и конечным числом операций над ними.

На этапе постановки задачи, с учетом имеющихся данных и требований к точности, требуется определиться, какой подход будет использован: схемотехнический, квазистатический или электродинамический. В их рамках применяются численные, аналитические и комбинированные методы. Схемотехнический подход основан на законах Кирхгофа, а моделирование выполняется с использованием принципиальных схем (SPICE-моделирование). Электродинамический подход, основанный на решении уравнений Максвелла, является универсальным, и позволяет решать задачи с произвольной геометрией, однако при этом требования к вычислительным ресурсам могут оказаться чрезвычайно высокими. Альтернативой является квазистатический подход, основанный на допущениях, что поперечные размеры рассматриваемой системы много меньше длин волн, распространяющихся в ней сигналов, что позволяет рассматривать независимо электрические и магнитные поля. При этом распределения этих полей вычисляются из электро- и магнитостатических задач, требующих решения уравнения Пуассона/Лапласа. Этот подход получил широкое распространение при моделировании линий передачи.

1.5. Уравнения Максвелла

Схемотехническое моделирование может быть использовано, когда геометрические размеры моделируемого объекта малы по сравнению с длиной волны из рассматриваемого диапазона частот. При этом полагается, что уровни электромагнитного излучения пренебрежимо малы, и можно использовать анализ, основанный на схемах из сосредоточенных элементов. Когда геометрические размеры объекта начинают становиться сопоставимыми с длинами волн рассматриваемого диапазона, проводники, кабели, соединители, переходные отверстия и пр. начинают действовать подобно антеннам, излучающим или принимающим электромагнитную энергию. Поэтому схемотехнический подход становится не пригодным и необходимо применять электродинамический подход (или в частных случаях, квазистатический). Данный подход основан на решении уравнений Максвелла – системе из 4 уравнений (современная трактовка) в дифференциальной или интегральной форме, связывающих электромагнитное поле (\mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H}) с распределениями тока и заряда (\mathbf{J} , ρ) и характеристиками заполняющей среды объекта (ϵ , μ), табл. 1.1, где ∇ – оператор набла, \mathbf{E} – вектор напряженности элек-

трического поля (В/м), \mathbf{D} – вектор электрической индукции или электрического смещения (Кл/м²), \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля (А/м), \mathbf{B} – вектор магнитной индукции (Тл), ρ – объемная плотность стороннего электрического заряда (Кл/м³), \mathbf{J} – вектор плотности электрического тока (А/м²), ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость (Ф/м), μ – абсолютная магнитная проницаемость (Гн/м).

Т а б л и ц а 1.1

Уравнения Максвелла во временной области

| Дифференциальная форма | Интегральная форма | Название |
|--|--|--------------------------------------|
| $\nabla \times \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ | $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$ | Теорема о циркуляции магнитного поля |
| $\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$ | $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ | Закон индукции Фарадея |
| $\nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D} = \rho$ | $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$ | Закон Гаусса |
| $\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div} \mathbf{B} = 0$ | $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ | Закон Гаусса для магнитного поля |

Оператор набла в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы по осям x , y и z соответственно. В дополнение к приведенным 4 уравнениям используются 3 материальных уравнения: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, где σ – удельная проводимость среды (См/м).

1.6. Численные методы

В работе [17] рассматривается эволюция методов моделирования, приведены общий обзор и краткое изложение актуальных методов, которые сегодня используются, и делается попытка предсказать будущие тенденции, основанные на результатах наблюдения за прошлым и нынешним развитием. Также отмечается, что для промышленности, моделирование ЭМС значительно расширилось за последние несколько лет, благодаря его увеличивающейся важности, и сегодня разработка высокоэффективной системы без этих средств моделирования была бы невозможной. Все используемые численные методы разделяются на методы в частотной и временной областях. В квазистатическом приближении они интерпретируются или как ме-

тоды в частотной области с нулевой частотой $\omega = 0$ или как методы во временной области с $\partial/\partial t = 0$. Далее приведен краткий анализ численных методов, применяемых при моделировании ЭМС.

1.6.1. Метод конечных разностей во временной области

Метод конечных разностей во временной области (FDTD, в отечественной литературе КРВО), в настоящее время являющийся одним из популярнейших методов численного решения электродинамических задач, впервые описан К. Йи в 1966 г. [18] для решения двухмерных задач. Метод представляет собой развертываемую во времени процедуру, в ходе которой реальные непрерывные волны имитируются дискретными числовыми аналогами [19]. Процедура дискретного представления реализована не только для пространства, но и для времени, входящего в уравнения Максвелла. На рис. 1.4 приведена, так называемая, элементарная ячейка Йи, содержащая компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} и используемая при вычислениях (общий случай). Так, компоненты этих векторов могут быть вычислены друг через друга со сдвигом на полшага по времени.

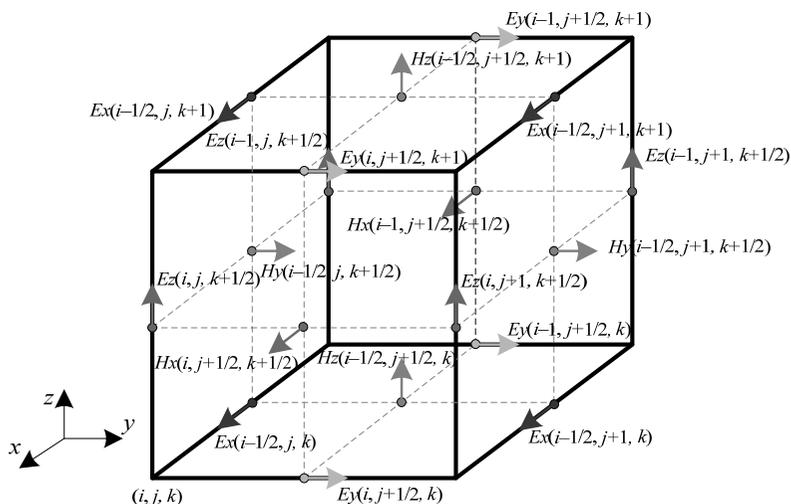


Рис. 1.4. Положения компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в ячейке Йи

Для упрощения решения применяются простые приближения второго порядка центральными разностями [20], полученные для пространственных и временных производных электрического и магнитного полей. Этим обеспечивается дискретное представление непрерывного электромагнитного поля в объеме пространства на неко-

тором временном интервале [21]. Таким образом, суть метода заключается в следующем: в некоторый момент времени выполняется расчет всех компонент электрической составляющей ЭМП внутри и на границах дискретизированной области пространства, после чего определяются все компоненты магнитной составляющей электромагнитного поля. Процесс продолжается до тех пор, пока счетчик временных интервалов не достигнет предельного значения или не наступит некоторое событие (например, достижение фронтом электромагнитной волны заданной точки пространства) [22, 23].

Рассмотрим электромагнитное поле в трехмерной области, заполненной изотропным диэлектриком. В этом случае (с использованием материальных уравнений) уравнения закона индукции Фарадея и теоремы о циркуляции магнитного поля примут вид

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.16)$$

Перед их решением сначала напомним, что для некоторого вектора \mathbf{F} (в декартовой системе координат) справедливо

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{F} = \text{rot}(F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

С учетом этого, исходная система векторных уравнений (1.16) в общем случае сводится к системе из 6 скалярных уравнений, каждое из которых содержит только одну искомую компоненту указанных векторов:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right), \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right). \quad (1.22)$$

Рассмотрим одномерный случай, при этом используются только E_x и H_y проекции векторов. Тогда система уравнений (1.16) сводится к двум уравнениям (при условии пренебрежения магнитными или электрическими потерями, т.е. $\sigma = 0$)

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.23) и (1.24) являются уравнениями плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , при этом электрическое поле ориентировано по оси x , а магнитное по оси y .

При помощи центральной конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам и времени ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$) получим следующие уравнения

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{h}, \quad (1.25)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \frac{E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)}{h}. \quad (1.26)$$

В этих уравнениях верхний индекс, зависящий от n , характеризует дискретизацию по времени, т.е. $t = n\Delta t$. Для дискретизации пространственной координаты используется параметр k , т.е. $z = kh$. Суть верхних индексов по n и пространственных шагов согласно k показана на рис. 1.5. Видно, что для вычисления, например $H_y^n(k+1/2)$, требуются значения $E_x^{n-1/2}$ при k и $k+1$, а для вычисления $E_x^{n+1/2}(k+1)$ – значения H_y^n при $k+1/2$ и $k+3/2$.

Полученные уравнения (1.25) и (1.26) могут быть реорганизованы в итерационный алгоритм

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon h} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)],$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu h} [E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)].$$

После введения обозначения $\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$, последние уравнения примут вид

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\Delta t}{h} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)], \quad (1.27)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\Delta t}{h} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)]. \quad (1.28)$$

Шаг по времени Δt выбирается после задания шага h как

$$\Delta t = h/2c_0,$$

где c_0 – скорость света в свободном пространстве. Тогда, если $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ (свободное пространство) получим

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{\Delta t}{h} = c_0 \frac{h/2 \cdot c_0}{h} = 1/2.$$

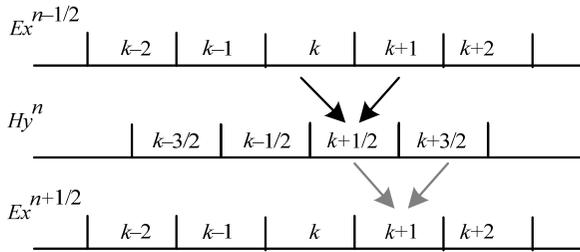


Рис. 1.5. Последовательность вычислений проекций векторов **E** и **H**

Уравнения (1.27), (1.28) могут быть непосредственно реализованы в программном коде. При этом реализовывать инкремент 1/2 нет необходимости. Так, дискретные значения по времени и пространству нужны только для того, чтобы показать, что значения векторов **E** и **H** фактически смещены друг относительно друга. Для ясности взаимосвязь между «программными» и «физическим» массивами продемонстрирована на рис. 1.6. Примеры реализации уравнений (1.27), (1.28) в Matlab/Octave:

$$\begin{aligned} ex(k) &= ex(k) + 0,5*(hy(k-1) - hy(k)), \\ hy(k) &= hy(k) + 0,5*(ex(k) - ex(k+1)). \end{aligned}$$

Видно, что верхние индексы $n + 1/2$ и $n - 1/2$ в явном виде не используются. Так, значение $ex(k)$ в правой части эквивалентно $\tilde{E}_x^{n-1/2}(k)$, а в левой – $\tilde{E}_x^{n+1/2}(k)$. Зависимость по координатам при этом используется в явном виде, с той лишь разницей, что $k + 1/2$ и $k - 1/2$ граничат с k и $k - 1$ в массивах при программной реализации.

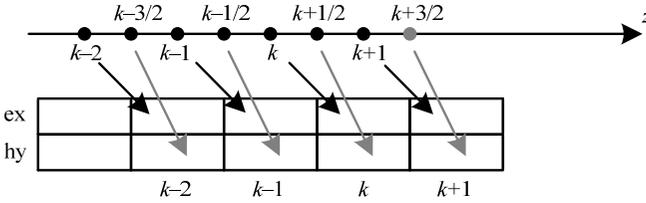


Рис. 1.6. Соотношение между физической и программной реализациями

Вернемся к определению шага по времени. При распространении в свободном пространстве, один шаг сетки (расстояние h) может быть пройден минимум за $\Delta t = h/c_0$. В двухмерном случае получим $\Delta t = h/(\sqrt{2}c_0)$, а в трехмерном – $\Delta t = h/(\sqrt{3}c_0)$. После обобщения получим условие, называемое условием Куранта,

$$\Delta t \leq h/(\sqrt{n}c_0),$$

где n – размерность моделируемого пространства. Данное условие говорит, что временной шаг должен быть меньше определённого значения, иначе результаты будут некорректными. Далее будем использовать $\Delta t = h/2c_0$.

На рис. 1.7 приведен пример распространения Гауссова импульса (после 100 временных интервалов), сгенерированного в центре некоторой области свободного пространства. В рассматриваемом примере импульс распространяется от центра в сторону боковых границ. Видно, что электрическое поле положительно в обеих полуплоскостях, а магнитное – отрицательно в левой полуплоскости.

Из рассмотренного примера не ясно, что происходит при завершении сетки. Поскольку моделировать распространение сигнала бесконечно долго не представляется возможным, необходимо каким-то образом ограничить сетку. В случае моделирования ограниченных структур, например волноводов или резонаторов, данная проблема легко решается. Однако при решении задач излучения нужно искусственно имитировать свободное пространство. Для этого используются поглощающие граничные условия (absorbing boundary conditions, ABC).

Для рассматриваемого одномерного случая достаточно легко получить поглощающие граничные условия. Поскольку $\Delta t = h/2c_0$, то для прохождения одной ячейки сетки требуется 2 временных шага. При этом для левой границы ($k = 1$) для электрического поля справедливо равенство

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(1) = \tilde{E}_x^{n-2+1/2}(2),$$

а для правой ($k = ke$, ke – последний отсчёт) –

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(ke) = \tilde{E}_x^{n-2+1/2}(ke-1).$$

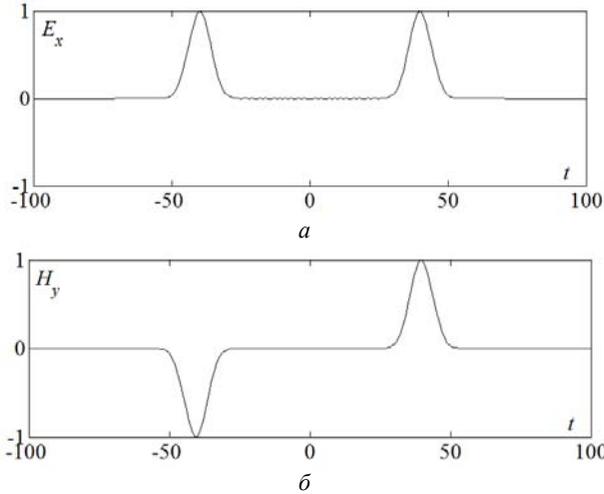


Рис. 1.7. Результат распространения Гауссова импульса в свободном пространстве после истечения 100 временных отсчетов для E_x (а) и H_y (б)

Рассмотренный случай соответствует распространению волны в свободном пространстве. Оценим, как изменится вычислительный алгоритм для $\varepsilon_r \neq 1$ и немагнитных материалов. Для этого снова рассмотрим уравнения (1.27) и (1.28). С учетом того, что $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ и $\mu = \mu_0$, получим

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{h\sqrt{\varepsilon\mu}} \left[H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2) \right], \quad (1.29)$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{\Delta t}{h\sqrt{\varepsilon\mu}} \left[\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k) \right]. \quad (1.30)$$

Достоинства FDTD. Простой и прямой подход к решению уравнений Максвелла. Имеет явную схему решения, не требующую хранения СЛАУ, а также неявную схему, сводящуюся к СЛАУ. Достаточно просто описывается неоднородность среды. Работа во временной области, позволяет получать результаты в большом диапазоне частот. Так как, согласно методу, поля вычисляются последовательно с течением времени, это позволяет создавать анимированные изображения распространения волновых процессов в счетном объеме. Метод позволяет указать материал в каждой точке счетного объ-

ема и может использовать не только широкий спектр металлов и диэлектриков, но и материалов с нелинейными свойствами. Позволяет непосредственно моделировать эффекты на отверстиях, так же как эффекты экранирования, причем поля внутри и вне экрана могут быть рассчитаны как напрямую, так и нет. Возвращает сразу значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Недостатки FDTD. Счетный объем должен быть разделен на очень большое число ячеек (величина дискретизации должна быть малой по сравнению с наименьшей длиной волны), что означает большие затраты памяти и времени моделирования, почему оказывается сложным моделировать задачи с длинными, тонкими пространственными структурами, например, поля проводников с током. Выполняется расчет полей в каждой точке счетного объема, поэтому, если требуется найти поле на некотором отдалении от источника, это, скорее всего, значит, что счетный объем окажется чрезмерно большим. Счетный объем должен быть конечным, чтобы уместиться в памяти компьютера, что в большинстве случаев достигается с помощью задания искусственных граничных условий в счетном объеме, использование которых может привести к искажению данных.

1.6.2. Метод конечного интегрирования

Метод конечного интегрирования (FIT) предложен Томасом Виландом в 1977 г. в качестве вычислительного инструмента для решения уравнений Максвелла [24]. FIT представляет собой дискретную формулировку уравнений Максвелла в интегральной форме, удобную для реализации на компьютерах и позволяющую моделировать реальные электромагнитные задачи со сложной геометрией. Метод может быть реализован как во временной, так и в частотной областях. При этом FDTD считается частным случаем FIT [25]. Кроме того, не накладывается никаких ограничений на тип используемой сетки разбиения, наряду со структурированной сеткой в декартовой системе координат поддерживаются неортогональные сетки, например, тетраэдральная. Метод конечного интегрирования имеет высокую эффективность в тех задачах, где необходим анализ нестационарных процессов в неоднородном, анизотропном пространстве для объектов с произвольной формой границ. Этот численный метод обеспечивает универсальную схему пространственной дискретизации, которую можно применять к различным случаям, начиная со статического поля и заканчивая высокочастотными расчетами во временной и частотной областях.

Для численного решения этих уравнений определяется область расчета. В процессе создания сетки эта область разбивается на

ячейки. Пространственная дискретизация уравнений Максвелла производится на двух ортогональных ячейках – первичной и вторичной (дуальная сетка).

Суть метода заключается в следующем. Первоначально записываются уравнения Максвелла в интегральной форме. Далее вычислительная область разбивается на конечное число объемных ячеек (FIT-ячейки). FIT-ячейки сформированы так, что они точно соответствуют друг другу и пересечение двух различных ячеек, является либо пустотой, либо многоугольником с одномерным краем, либо точкой, разделенной обеими ячейками. Эта схема разложения приводит к конечной сетке интегрирования, которая служит вычислительной сеткой. Целая вычислительная область составлена из конечного набора элементарных ячеек. Пересечение двух элементарных непустых объемов является объемом, пересечение двух элементарных непустых плоскостей – линией, пересечение двух линий – точкой. Переменные в FIT (электромагнитные поля и потоки) обычно расположены вдоль элементарных линий или на элементарных плоскостях. Аналогично могут быть вычислены напряжения вдоль других краев ячейки. Полный магнитный поток через плоскость может быть вычислен как интеграл плотности магнитного потока через эту плоскость. Полный магнитный поток через большую плоскость может быть вычислен как сумма магнитных потоков составляющих элементарных областей. В результате электрические напряжения и магнитные потоки всего комплекса ячеек можно представить в матричном уравнении [26].

Производные времени, входящие в уравнение Максвелла, аппроксимированы согласно центральной дифференциальной формуле. Уравнения электрического и магнитного полей получены из этих дискретизированных уравнений, из которых видно, что электрическое и магнитное поля смещены относительно друг друга на половину временного шага.

Сигнал возбуждения играет очень важную роль в получении корректного отклика системы при анализе в определенном частотном диапазоне. Чтобы получить отклик системы в частотном диапазоне, выгодно использовать пульсирующее возбуждение как функцию времени. Для такого возбуждения обычно используется Гауссов импульс.

Чтобы охарактеризовать основные свойства микроволновых устройств, используются пульсирующие источники сигнала, при воздействии которых анализируются различные поля в определенных местах устройства. Пространственные характеристики сигнала

возбуждения гарантируют его распространение через устройство, тогда как его временная характеристика гарантирует получение отклика устройства в надлежащем диапазоне частот.

Достоинства FIT. Может быть применен во всем частотном диапазоне, от постоянного тока до высоких частот. Легко применим к электрически сложным конструкциям. Подходит не только для любого типа решетки, но и использует различные способы дискретизации при моделировании. Требуется небольшой памяти и малого времени вычисления.

Недостатки FIT. Главным недостатком метода является сложность дискретизации изогнутых структур. Другие недостатки аналогичны методу FDTD.

1.6.3. Метод матрицы линий передачи

Метод матрицы линии передачи (TLM) впервые предложен в 1971 г. [27] и считается универсальным методом для анализа распределения электромагнитного поля. Данный метод основан на моделировании распространения электромагнитных волн с помощью ячеек линии передачи с периодом Δb (пространственной решетки). Гибридная TLM-ячейка определяет 6 компонент поля.

Границы, соответствующие электрическим и магнитным стенкам, представляются короткозамкнутыми и разомкнутыми шунтирующими узлами на соответствующих границах. Наличие магнитных и диэлектрических материалов может быть смоделировано за счет подключения короткозамкнутых шлейфов длиной $\Delta b/2$ на последовательных узлах и разомкнутых шлейфов – на параллельных узлах. Электрические и магнитные поля заменяются эквивалентными генераторами в линиях.

Численный расчет начинается с возбуждения решетки в определенных точках импульсами тока и напряжения. Распространение этих импульсов затем рассчитывается через дискретные временные интервалы. После нахождения решения во временной области частотный спектр может быть определен с помощью преобразования Фурье. Ввиду периодичности разбиения исследуемого пространства решение в частотной области имеет полосы пропускания и запырания. Достаточно полному изложению метода посвящены работы [28–, 30].

Достоинства TLM. Гибкость и простота математической формулировки и программной реализации. Электрические и магнитные компоненты поля могут быть вычислены в одной точке пространства.

Недостатки TLM. Ряд ограничений, которые должны учитываться при моделировании. Из-за введения периодических решетчатых структур, появляется типичное явление пропускания и режекции в полосе частот, для исключения которого частотный диапазон должен быть ниже границы частотного диапазона исследования и ограничен размером ячейки. Более вычислительно затратен по сравнению с FDTD.

1.6.4. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ, FEM) широко применяется при механическом анализе конструкций. Несмотря на то, что математическая трактовка метода была предложена в 1943 г. Курантом [31], для решения электромагнитных задач он не применялся до 1968 г., с которого он стал применяться при анализе волноводов, электрических машин, полупроводниковых приборов, микрополосковых линий, электромагнитного излучения биологическими объектами и др.

Метод конечных элементов более мощный и универсальный численный метод решения задач, связанных со сложными геометриями и неоднородными средами, по сравнению с FDTD и методом моментов, которые концептуально проще и легче реализуемы в программном коде. Методическая общность метода позволяет строить на его основе универсальные компьютерные программы для решения широкого круга задач. Поэтому, программы, разработанные для решения задач из других дисциплин могут быть и были успешно применены для решения задач из другой предметной области с незначительными модификациями или без таковых [32].

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любая непрерывная величина (температура, давление, перемещение) аппроксимируется дискретной моделью, построение которой выполняется на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей [33]. Алгоритм построения дискретной модели изучаемой непрерывной величины заключается в следующем. В рассматриваемой области фиксируют конечное число точек. Эти точки в дальнейшем называют узлами. Полагают, что исследуемая непрерывная величина в каждом узле является переменной, подлежащей определению в процессе решения задачи. Область изменения непрерывной величины разбивают на элементы. Эти элементы имеют между собой общие узлы и, в совокупности, аппроксимируют форму области в целом. Непрерывную величину аппроксимируют в пределах каждого элемента полиномом, коэффициенты которого рассчитывают на основании значений этой вели-

ны в узлах. Каждый элемент аппроксимируют своим полиномом, а коэффициенты полиномов подбирают таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ соседних элементов. Объединяют конечные элементы в ансамбль. В этом ансамбле узловые значения искомым функций подобраны таким образом, чтобы обеспечить достаточное приближение к непрерывному распределению. Этот этап приводит к СЛАУ относительно узловых значений. Решают полученную систему, то есть находят узловые значения. Для аппроксимации непрерывной области, при решении сформулированных граничных задач используют систему пирамидальных элементов, что позволяет записать систему уравнений для \mathbf{E} (или \mathbf{H}), решение которой позволяет определить коэффициенты интерполяционных полиномов. Далее конечные элементы объединяются в ансамбль, а интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты (связанные с моделью в целом) [34].

Достоинства FEM. Ясный физический смысл на всех этапах расчета, что позволяет легко проконтролировать результаты. Легкость расчета комбинированных конструкций, т.е. конструкций, включающих в себя элементы различной размерности.

Недостатки FEM. Необходимость в эффективном генераторе конечных элементов. Сложность уравнений. При формировании объемной модели устройства (3D-модели) требуется проводить дискретизацию занимаемой им области с переменным шагом, что ведет к увеличению вычислительных затрат. Увеличение вычислительных затрат в многокомпонентных средах.

1.6.5. Метод моментов

Математический метод получения матричных уравнений был назван методом моментов (МоМ) [35]. Иногда этот метод называют методом приближений, но это название становится неправильным, когда решение сходится к пределу. Единственное, что отличает его от других решений, например бесконечных степенных рядов – это время вычислений, необходимое для получения заданной точности. Однако метод может быть использован и для приближенных решений – решений, не сходящихся к пределу.

Общая теория метода моментов довольно проста. Рассматривается характеристическое операторное уравнение, для решения которого используют систему базисных функций в области определения оператора. Далее задается система весовых, или тестовых, функций в области значений оператора и берется скалярное произведение с каждой функцией, в результате чего получается система уравне-

ний, которую можно записать в матричном виде. Если полученная матрица является невырожденной, то существует обратная ей матрица и соответственно решение полученной системы. Это решение может быть точным или приближенным в зависимости от выбора базисных и тестовых функций. Таким образом, одной из главных проблем при использовании МоМ для решения каждой конкретной задачи является выбор этих функций. Причем базисные функции должны быть линейно независимыми и такими, чтобы их суперпозиция могла хорошо аппроксимировать искомое решение. Тестовые функции также должны быть линейно независимыми. Кроме того, выбирая данные функции, необходимо учитывать следующие факторы: требуемая точность решения; легкость вычисления матричных элементов; размер матрицы, которую можно обратить; реализация хорошо обусловленной матрицы.

Эффективность приложения метода для получения результата с заданной точностью определяется, в конечном счёте, затратами времени и памяти компьютера. При одновариантном анализе, решение методом моментов сводится к следующим шагам: получение из уравнений Максвелла интегральных уравнений структуры; дискретизация структуры (разбиение структуры на N подобластей, в каждой из которых искомая функция аппроксимируется базисными функциями); вычисление элементов матрицы СЛАУ порядка N ; вычисление элементов вектора воздействий размером N ; решение СЛАУ; вычисление требуемых характеристик из вектора решения СЛАУ.

Метод моментов предусматривает следующие этапы решения электродинамической задачи. Металлические элементы анализируемой структуры заменяются эквивалентными поверхностными электрическими токами. Затем решается задача возбуждения окружающей среды данными токами. При этом среда может быть сложной, т.е. может содержать магнито-диэлектрические слои.

Решение задачи возбуждения среды осуществляется с помощью аппарата тензорных функций Грина. После того, как задача возбуждения решена, и электрическое поле найдено, на него накладываются граничные условия на металлических элементах. Последнее условие используется для определения эквивалентных токов. Важным моментом решения является разбиение поверхности металла на элементарные площадки и аппроксимация электрического тока в пределах площадки.

Достоинства МоМ. Объект моделирования может иметь сложную форму. Высокая скорость вычислений при относительно невысоких требованиях к ресурсам ЭВМ. В частности, МоМ удобен

для внешних задач (открытых геометрий) и для нескольких различных линейных и однородных сред. Метод моментов подходит для гибридизации с аналитическими и численными процедурами, такими как GTD/UTD (геометрическая теория дифракции/однородная теория дифракции), а также FMM и MLFMM (быстрый метод мультиполей и многоуровневый быстрый метод мультиполей) [36]. В отличие от МКР или МКЭ, МоМ требует дискретизации сеткой не объема, а только поверхности, поэтому затраты на эту процедуру относительно малы.

Недостатки МоМ. Сложен для моделирования внутренних задач и неоднородных сред. Низкая скорость вычисления по сравнению с другими методами для объектов сравнительно простых конфигураций. (Однако этого недостатка можно избежать, основываясь на том, что в настоящее время растет быстродействие ЭВМ и быстро развиваются математические методы решения, позволяющие ускорить процесс вычисления задач МоМ [37].)

1.6.6. Метод эквивалентной схемы из частичных элементов

Метод эквивалентной схемы из частичных элементов (РЕЕС) предложен в 1972 г. в работе [38] и развит в работах [39, 40]. Примечательно, что это состоялось примерно в то же время, что и обнаружение другого метода, основанного на использовании электрических схем – TLM. Справедливости ради стоит отметить, что первые работы по разработке схемно-ориентированного метода для решения уравнений Максвелла в дифференциальной форме были выполнены Кроном в 1940-х годах [41]. Метод РЕЕС ориентирован на решение уравнений Максвелла в интегральной форме, что, в конечном счете, требует решения плотных СЛАУ, как при использовании метода моментов.

При использовании РЕЕС моделируемая структура дискретизируется на электрически малые элементы. Затем составляется эквивалентная схема (матрица), описывающая связь между этими элементами, и затем решается результирующая СЛАУ. Метод хорошо подходит для анализа электромагнитного излучения от печатных плат.

Достоинства РЕЕС. Аналогичны МоМ, но есть возможность добавления элементов схемы в программный модуль для моделирования характеристик схемы со сосредоточенными элементами. Метод применим как в частотной, так и во временной областях. Отлично подходит для моделирования печатных плат. Моделирование на постоянном токе, учет скин эффекта и дисперсии в диэлектрике также достаточно просто реализуются.

Недостатки РЕЕС. Аналогичны недостаткам МоМ.

1.6.7. Гибридные методы

Ни один из численных методов не подходит для всех требующих решения задач электромагнитного моделирования. Так, программные коды МоМ практически непригодны для описания неоднородных нелинейных диэлектриков. Коды метода конечных элементов не могут эффективно моделировать большие задачи рассеяния. Мультипольные и основанные на дифракции подходы не годятся для небольших сложных геометрий или задач, требующих точного определения величины поверхностного тока. К сожалению, существуют задачи, где необходимо учитывать все эти особенности, например, при оценке излучения от печатной платы, и поэтому, анализ не может быть выполнен ни одним из этих методов.

Одним из вариантов решения данной проблемы является объединение двух или нескольких методов в одном программном коде. Каждый метод применяется к области задачи, для которой он лучше всего подходит. Соответствующие граничные условия применяются на интерфейсах между этими областями.

1.7. Уравнения электростатики и магнитостатики

Рассмотрим неизвестное во времени электрическое поле в отсутствие токов ($\mathbf{J} = 0$). Из уравнений Максвелла получим систему уравнений электростатики:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E}.\end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, то электростатическое поле является потенциальным и его можно представить в виде $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$, где Φ – электростатический потенциал.

Запишем разность потенциалов между двумя точками, расположенными на расстоянии d друг от друга:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = -\mathbf{E}\mathbf{d}, \quad (1.31)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{d} – векторы, характеризующие электрическое поле и расстояние в пространстве соответственно. В декартовой системе координат

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z.\end{aligned}$$

Расписывая скалярное произведение двух векторов в правой части (1.31), получим

$$\Delta\Phi = -(E_x\Delta x + E_y\Delta y + E_z\Delta z). \quad (1.32)$$

Так как $\Delta\Phi$ – функция координат x , y и z , то

$$\Delta\Phi = (\partial\Phi/\partial x)\Delta x + (\partial\Phi/\partial y)\Delta y + (\partial\Phi/\partial z)\Delta z. \quad (1.33)$$

Приравнивая правые части (1.32) и (1.33), получим, что $E_x = -(\partial\Phi/\partial x)$, $E_y = -(\partial\Phi/\partial y)$, $E_z = -(\partial\Phi/\partial z)$, тогда

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\nabla\Phi. \quad (1.34)$$

Поскольку вектор электрической индукции \mathbf{D} связан с вектором \mathbf{E} известным соотношением $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$,

$$\mathbf{D} = -\epsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\epsilon\nabla\Phi. \quad (1.35)$$

Если индукция создается зарядом с объемной плотностью ρ , то в соответствии с законом Гаусса или третьим уравнением Максвелла

$$(\partial D_x / \partial x) + (\partial D_y / \partial y) + (\partial D_z / \partial z) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla \Phi) = \rho,$$

тогда при $\epsilon = \text{const}$ (диэлектрик однороден) получим $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon$.

В декартовых координатах

$$(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) + (\partial^2\Phi/\partial z^2) = -\rho/\epsilon. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36), устанавливающее связь между потенциалом, созданным произвольно распределенными зарядами, и объемной плотностью этих зарядов, известно как уравнение Пуассона. В частном случае, когда в рассматриваемом объеме нет зарядов, например, вне проводников линии передачи, уравнение упрощается до

$$(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) + (\partial^2\Phi/\partial z^2) = 0 \text{ или } \nabla^2\Phi = 0. \quad (1.37)$$

Это уравнение известно как уравнение Лапласа. Задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения в частных производных (1.37) для двух- или трехмерного потенциала, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Затем, когда распределение потенциала найдено, по нему с помощью (1.34) находится структура электрического поля.

Аналогично магнитоэлектростатика изучает не изменяющиеся во времени магнитные поля. Так, если положить $\partial/\partial t = 0$, из первого и четвертого уравнений Максвелла получим:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \text{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}. \end{aligned}$$

ГЛАВА 2 СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Еще в начале века, большинство электрических, радиотехнических, радиоэлектронных и др. ТС разрабатывалось с помощью создания и тестирования их прототипов (физическое моделирование), процесса, который затратен, как финансово, так и по времени. В настоящее время затраты на проектирование и анализ могут быть существенно сокращены с помощью численных расчетов, выполняемых на компьютере (математическое моделирование). Таким образом, благодаря стремительному развитию компьютерных и сопутствующих технологий основным инструментом проектирования как в промышленных, так и в научных исследованиях, стало специализированное программное обеспечение (инструментальные средства).

2.1. Схемотехническое и квазистатическое моделирование

Далее приведен краткий сравнительный анализ коммерческих программных продуктов, пригодных для схемотехнического и квазистатического анализа ЭМС. Из широкого выбора САПР были выделены приведенные в табл. 2.1.

Основной отличительной особенностью CST (PCBMod, CableMod) от других программных продуктов является возможность выполнить анализ целостности сигналов и ЭМС в кабелях (модуль CableMod). Модуль поддерживает следующие виды структур: коаксиальный кабель, витую пару, ленточный кабель, сложный жгут с неограниченным числом кабелей, экранированный кабель и т.д.

Программный продукт Simbeog (система трехмерного электромагнитного моделирования многослойных печатных плат) в основном предназначен для получения качественных электромагнитных моделей линий передачи, периодических структур, неоднородностей и переходных отверстий. Поэтому данный продукт можно использовать только, если проект печатной платы или модуля требует экстракции параметров с применением полной 3D-системы моделирования или имеется необходимость определения параметров проводников и диэлектриков по измеренным данным.

Программный продукт SpeedXP представляет собой интегрированную среду анализа целостности сигналов и перекрестных искажений в сложных печатных платах и кристаллах интегральных микросхем. В состав пакета входят два самостоятельных приложе-

ния, имеющих единый интерфейс и общую базу данных: Speed2000 и PowerSI. Программа Speed2000 – это пакет анализа проблем ЭМС с оригинальным вычислительным ядром, работающий во временной области. Программа PowerSI выполняет аналогичные функции, но ее ядро работает в частотной области. Здесь можно рассчитать спектры сигналов и помех в различных проводниках печатной платы, оценить частотные характеристики отдельных узлов микросхемы, оптимизировать размещение экранов. Программы Speed2000 и PowerSI дополняют друг друга и позволяют в рамках одного продукта полностью перекрыть все возможные вопросы, связанные с ЭМС. В дополнение к ним в состав пакета SpeedXP входит программа BroadBand SPICE, предназначенная для экстракции SPICE схем замещения устройств, описанных матрицами S -параметров, что дает возможность учитывать их в пакетах моделирования на основе ядра HSPICE.

Т а б л и ц а 2 . 1

**Программные продукты
для схемотехнического и квазистатического моделирования**

| № п/п | Название системы | Электронный адрес производителя | Производитель | Страна |
|-------|---|---------------------------------|------------------------------|-----------|
| 1 | SpeedXP (SPEED2000 + PowerSI) | www.cadence.com | Cadence Design Systems, Inc. | США |
| 2 | CST (PCBMod, CableMod) | www.cst.de | CST | Германия |
| 3 | SIwave | www.ansoft.com | Ansoft Corporation | США |
| 4 | Compliance | www.quantec-emc.com | Quantec EMC Inc. | |
| 5 | Simbeor | www.simberian.com | Simberian | США |
| 6 | Altium Designer | www.altium.com | Altium Limited | Австралия |
| 7 | Zuken CADSTAR (модуль: CADSTAR SI Verify) | www.zuken.com | Zuken | США |
| 8 | PADS (HyperLynx) | www.mentor.com | Mentor Graphics | США |
| 9 | Sonnet | www.sonnetsoftware.com | Sonnet Software | США |
| 10 | NI AWR Microwave Office | www.awrcorp.com | NI AWR EDA Software | США |
| 11 | ELCUT | www.elcut.ru | TOR corp. | Россия |
| 12 | TALGAT | www.talgat.org | ТАЛГАТ | Россия |

Altium Designer – это система, позволяющая реализовывать проекты электронных средств на уровне схемы или программного кода с последующей передачей информации проектировщику ПЛИС или печатной платы. Отличительной особенностью программы является проектная структура и сквозная целостность ведения разработки на разных уровнях проектирования. Иными словами, изменения в разработке на уровне платы могут мгновенно быть переданы на уровень ПЛИС или схемы и также обратно.

Sonnet – пакет программ, предназначенный для электромагнитного моделирования планарных СВЧ-структур: полосковых и микрополосковых линий, копланарных волноводов, одно- и многослойных печатных плат, включающих переходные отверстия различных конфигураций линий, а также антенн.

Microwave Office – программный продукт, предназначенный для разработки всех видов радиочастотных и СВЧ-устройств, начиная от сложных СВЧ-сборок и кончая интегральными СВЧ-микросхемами. Возможности программного продукта Microwave Office: интерактивный ввод принципиальных схем и топологических описаний; моделирование линейных и нелинейных схем; электромагнитное моделирование; синтез, оптимизация и статистический анализ выхода годных; проверка соответствия схемы ее топологическому описанию; контроль топологии на удовлетворение технологическим ограничениям.

ELCUT – это комплекс программ для инженерного моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач методом конечных элементов. Дружественный русскоязычный пользовательский интерфейс, простота описания даже самых сложных моделей, широкие аналитические возможности комплекса и высокая степень автоматизации всех операций позволяют разработчику полностью сосредоточиться на своей задаче. Пользователь может начать работу с ELCUT практически сразу, не отвлекаясь на изучение математических основ вычислительных алгоритмов и особенностей их реализации. Редактор модели позволяет легко и быстро описать геометрию модели. Также можно импортировать фрагменты модели из AutoCAD или других систем проектирования. При построении сетки конечных элементов можно использовать удобные средства управления ее густотой или полностью довериться автоматической системе построения сетки. Источники и граничные условия полностью независимы от сетки и могут быть изменены в любое время. Интерактивный постпроцессор позволяет просмотреть результаты расчета в различных формах представления: линии поля, цветные карты,

графики различных величин вдоль произвольных контуров и пр. Можно вычислять различные интегральные величины на заданных пользователем линиях, поверхностях или объемах.

Возможности системы TALGAT будут описаны в следующем разделе.

2.2. Электродинамическое моделирование

На рис. 2.1 в виде коллажей приведены названия программных продуктов для моделирования на 1997, 2009 и 2014 гг. [42–44]. Хорошо прослеживается тенденция появления новых продуктов, объясняющаяся возрастающими требованиями к проектированию. Поэтому существующий арсенал программных продуктов достаточно обширен. Для наглядности и первого сравнения в табл. 2.2 приведена общая информация лишь о некоторых из них.



Рис. 2.1. Коллаж из названий программных продуктов на 1997 (а), 2009 (б), 2014 (в) гг. [42–44]

Таблица 2.2

Программные продукты для электродинамического моделирования

| № п/п | Название системы | Главный метод | Производитель | Страна |
|-------|----------------------|---------------|---|----------------|
| 1 | Concept-II | MoM | University of Technology Hamburg-Harburg [45] | Германия |
| 2 | Altair FEKO | MoM | Altair Engineering, Inc. [46] | США |
| 3 | EMCos Studio | MoM | EmCoS [47] | Грузия |
| 4 | WIPL-D | MoM | WIPL-D [48] | Сербия |
| 5 | Singula | MoM | Integrated Engineering Software Sales Inc. [49] | Канада |
| 6 | HyperLynx 3D EM | MoM | Mentor Graphics [50] | США |
| 7 | GEMACS | MoM | Applied Research Associates [51] | США |
| 8 | newFASANT | MoM | NEWFASANT SL [52] | Испания |
| 9 | Momentum | MoM | Keysight [53] | США |
| 10 | Lucernhammer | MoM | Tripoint Industries, Inc. [54] | США |
| 11 | TALGAT | MoM | ТАЛГАТ [55] | Россия |
| 12 | GEMS | FDTD | Computer and Communication Unlimited [56] | США |
| 13 | QuickWave | FDTD | QWED [57] | Польша |
| 14 | Semcad-X | FDTD | SPEAG [58] | Швейцария |
| 15 | EMPIRE | FDTD | IMST GmbH [59] | Германия |
| 16 | XFDTD | FDTD | RECOM [60] | США |
| 17 | CEM One | FDTD | ESI Group [61] | Франция |
| 18 | EMA3D | FDTD | Electro Magnetic Applications [62] | США |
| 19 | Em.cube | FDTD | EMAG Technologies [63] | США |
| 20 | CST MICROSTRIPES | TLM | CST (Flomerics Gr.) [64] | Германия |
| 21 | MEFiSTo | TLM | FAUSTUS Scientific Corp. [65] | Канада |
| 22 | ANSYS HFSS | FEM | Ansys Corp. [66] | США |
| 23 | EMPro | FEM | Keysight [53] | США |
| 24 | Opera | FEM | Cobham [67] | Великобритания |
| 25 | Асоника-ЭМС | FEM | «НИИ «АСОНИКА» [68] | Россия |
| 26 | CST Microwave Studio | FIT | CST [64] | Германия |

Анализ развития программных продуктов показывает, что в последнее время наметился ряд тенденций их развития. Первой является расширение функциональных возможностей этих средств за счет совершенствования основного (появившегося исторически первым и на основе которого была создана система) численного метода, интеграция других численных методов, а также их гибридов. Данный подход позволяет расширить возможности системы в целом за

счет повышения ее универсальности. Так, если основной метод не подходит для требуемого вида анализа, пользователь всегда может воспользоваться другим методом или гибридом. В качестве примера можно привести такие системы как FEKO и EMCoS Studio, первоначально ориентированные на использование метода моментов: относительно недавно в данных системах реализована возможность использования метода конечных элементов. Второй тенденцией является поглощение одних систем другими. Данный подход в части расширения функциональных возможностей схож с предыдущим, однако более универсален. Так, система CST поглотила английскую компанию Flomerics, занимающуюся разработкой линейки продуктов для электромагнитного моделирования MicroStripes и FLO/EMC. Благодаря данному поглощению CST получила возможность дополнить имеющийся у нее ряд вычислительных модулей, хорошо зарекомендовавшими себя разработками фирмы Flomerics, базирующимися на методе TLM. Аналогичным образом поступила компания ANSYS, поглотившая компанию ANSOFT. Наконец, третьим является объединение в единой оболочке средств различного вида моделирования: теплотехнического, электромагнитного, гидродинамики и др. Так, в качестве примера можно привести поглощение компании ANSOFT (программный продукт HFSS для электродинамического моделирования) компанией ANSYS (другие виды моделирования). Аналогично система FEKO вошла в линейку программных продуктов компании Altair (первоначально занимающейся твердотельным моделированием). Подобное недавно произошло и с линейкой продуктов CST, приобретенных компанией Dassault Systèmes, являющейся одной из лидеров по созданию систем автоматизированного проектирования.

Далее приведены краткие описания систем электродинамического моделирования, основанных на самых универсальных численных методах.

2.2.1. Программные продукты, основанные на методе моментов

2.2.1.1. Система CONCEPT-II

Программный продукт CONCEPT-II предназначен для численного решения задач электромагнитного излучения и рассеяния в частотной области. Ядро вычислений основано на решении интегральных уравнений для электрического (EFIE) и магнитного (MFIE) полей методом моментов. CONCEPT-II может использоваться для вычисления токов, напряжений и полей, которые являются результа-

том какого-либо возбуждения металлических структур или диэлектрических тел. Электромагнитные поля могут быть вычислены как в ближней, так и дальней зонах.

2.2.1.2. Система Altair FEKO

Система трехмерного электродинамического моделирования Altair FEKO (далее FEKO) предназначена для анализа антенных систем и неоднородных диэлектрических сред и является высокопрофессиональным продуктом, в котором сосредоточены все лучшие качества, достигнутые и развитые в настоящее время в программах проектирования СВЧ-устройств. МоМ в дополнение с методом физической оптики (PO) открывает широкие возможности расчета антенных систем в присутствии больших металлических объектов со сложной формой. Удобный интерфейс построения геометрии и задания возбуждающих источников позволяет рассчитывать управляемые диаграммы направленности антенных фазовых решеток.

Вычислительные возможности:

- моделирование сложных структур с помощью следующих методов: МоМ, MLFMM, векторного FEM и FDTD;
- анализ электрически больших структур с использованием приближенных методов: однородной теории дифракции (UTD), метода геометрической оптики (GO) и его модификации (RL-GO), а также метода PO и его версии для укрупненных сеток (LE-PO);
- использование базисных функций высших порядков для снижения вычислительной сложности задачи;
- схема адаптивной частотной интерполяции для эффективного анализа в широкой полосе частот;
- эффективный децентрализованный вычислительный модуль (есть возможность параллельных и кластерных вычислений) для обработки моделей с повышенной сложностью;
- специальные функции Грина для плоско-слоистых структур;
- различные опции для моделирования диэлектрических объектов (объемные, плоские сетки, аппроксимации для земли, тонких листов, изолированных проводов и др.);
- задания частотно-зависимых электрических характеристик материалов;
- интеграция цепей, заданных в виде SPICE-моделей.

Отметим дополнения, которые интегрированы в версию 2017 г. Конечноразностный решатель поддерживает параллельность OpenMP и MPI, позволяя пользователям в полной мере использовать машины с несколькими ядрами и несколькими вычислительными узлами в кластерных средах. Реализована поддержка трехмерных

анизотропных материалов при использовании конечноразностного и конечноэлементного решателей. Улучшена сходимость метода MLFMM. Уменьшены вычислительные затраты на моделирование при использовании решателя многопроводных линий передачи. Улучшен генератор сетки.

Система FEKO позволяет использовать несколько численных методов, а также даёт возможность их гибридизации (рис. 2.2), что существенно расширяет круг решаемых задач. Выбор того или иного численного метода опирается на использование целого ряда критериев: сложность геометрии анализируемого объекта, его электрические размеры, имеющиеся вычислительные мощности и др. Краткая история реализации новых численных методов в FEKO приведена в табл. 2.3. Представленные данные еще раз подтверждают актуальность разработки специализированных программных продуктов.



Рис. 2.2. Совокупность численных методов в системе FEKO [46]

Таблица 2.3

Реализация новых методов в системе FEKO

| Год | Метод |
|------|----------------------|
| 1991 | MoM |
| 1992 | MoM/PO |
| 1994 | MoM/UTD |
| 2004 | MLFMM |
| 2005 | MoM/FEM |
| 2007 | MoM/RL-GO |
| 2010 | MLFMM/FEM; MoM/LE-PO |
| 2014 | MLFMM/PO+LE-PO; FDTD |

Отдельно стоит отметить, что FEKO – один из самых популярных коммерческих программных продуктов у российских специалистов. Об этом можно судить по имеющейся русскоязычной литературе [69–71].

2.2.1.3. Система EMCos Studio

EMCos Studio – пакет прикладных программ, предназначенный для решения сложных проблем ЭМС. Пакет EMCos Studio специально разработан компанией EMCoS для инженеров, работающих над проблемами ЭМС в больших системах, таких как автомобили, самолеты и корабли, требующих специального подхода для ее оценки. Если такие устройства как антенны, антенные усилители, кабельные узлы, интегральные схемы или большие металлические рассеиватели должны быть оценены вместе, то в большинстве случаев прямое численное решение волнового уравнения не дает удовлетворительного результата и нужны комбинированные комплексные подходы. Именно такие подходы были реализованы в EMCos Studio. Программа комбинирует в себе удачные интерфейсные решения для пре- и постпроцессинга с высокой точностью расчетов в сложных задачах. Пакет EMCos Studio также может быть использован в качестве стандартного электромагнитного солвера, например, при расчете антенных характеристик.

В последней версии реализованы следующие новые возможности:

- поддержка KVL формата кабельных жгутов;
- подход для быстрого анализа крупномасштабных кабельных систем в частотной и временной областях;
- одновременный учет поверхностного эффекта и эффекта близости;
- быстрые методы решения крупномасштабных электромагнитных задач;
- возможность распределенных вычислений.

2.2.1.4. Система HyperLynx 3D EM

Система ориентирована на решение антенных задач, в том числе планарных. Именно для таких структур, как считается, наилучшим образом подходит программа HyperLynx 3D EM, представляющая собой полноволновой инструмент для моделирования, использующий метод моментов. Программа позволяет рассчитывать S -параметры, распределение токов на поверхности антенны, диаграмму направленности в дальней зоне для антенны в моноэлектродной конфигурации и для несложной антенной решетки, распределение поля вблизи поверхности антенны и т.д. Для более сложных антенных решеток программа позволяет, после полного обсчета одного

элемента, прогнозировать поведение линейной или прямоугольной системы путем введения, так называемого, «фактора решетки», который учитывает в некоторой степени прохождение сигнала из антенны в антенну при различном расположении элементов [72, 73].

2.2.1.5. Система TALGAT

Система TALGAT, базирующаяся на математических моделях на основе метода моментов, предназначена для компьютерного моделирования широкого класса задач ЭМС за счет выполнения следующих основных функций: вычисления временного и частотного откликов произвольных схем из отрезков многопроводных линий передачи на основе вычисления матриц погонных параметров произвольных двухмерных и трехмерных структур проводников и диэлектриков; электродинамического анализа произвольных трехмерных структур из проводов с RLC-нагрузками; структурно-параметрической оптимизации с указанными видами анализа. Система разрабатывается с 2002 г. на базе собственных научных исследований её авторов. Отличительной особенностью системы является её модульная архитектура, позволяющая разработчику нового модуля использовать все ранее реализованные возможности системы. Структурная схема системы приведена на рис. 2.3.

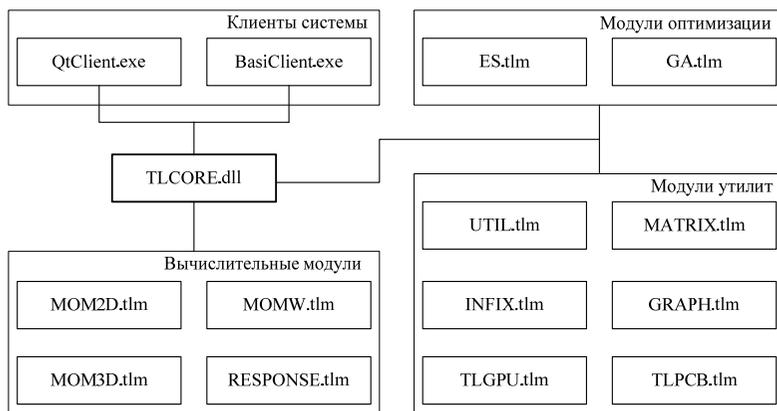


Рис. 2.3. Структурная схема системы TALGAT

Клиенты системы – модули пользовательского интерфейса. Ядро системы – TLCORE. Вычислительные модули: MoM2D и MoM3D – вычисление матриц погонных параметров двухмерных и трехмерных структур соответственно; RESPONSE – вычисление отклика (квазистатический анализ); MoMW – электродинамический анализ проводных структур. Модули оптимизации: ES – эволюцион-

ные стратегии; GA – генетические алгоритмы. Модули утилит – вспомогательные модули (матричные операции, работа с графиками и пр.). Для «общения» пользователя с системой используются интерпретируемые скриптовые языки TALGAT_Script и Python_Script.

Помимо средств уменьшения вычислительных затрат за счет совершенствования сегментации структуры и решения СЛАУ, в системе реализована возможность создания принципиальных схем. При работе с приложением пользователь размещает элементы принципиальной схемы, соединяет их узлами и указывает параметры. На данный момент доступны следующие элементы: резистор; конденсатор; катушка индуктивности; источник напряжения; источник тока; многопроводная линия передачи (в качестве параметров задаются матрицы погонных параметров L , C , R , G порядка N_{COND} , где N_{COND} – количество проводников, не считая опорного; земля; пробник; пробник динамического отображения тока. Пример создания принципиальной схемы приведен на рис. 2.4.

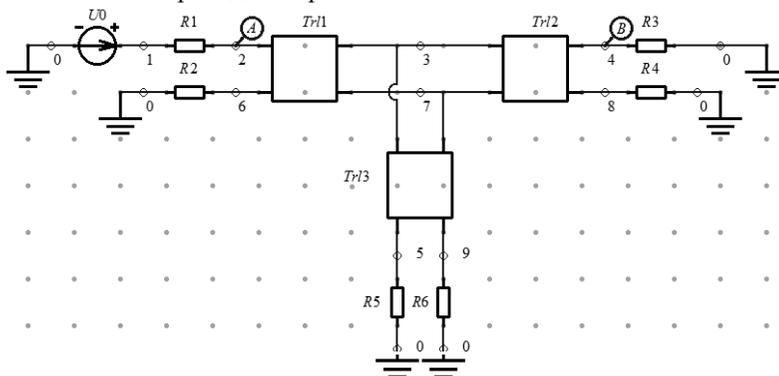


Рис. 2.4. Пример принципиальной схемы

Для наглядного отображения изменений сигнала при распространении в линии передачи реализована возможность анимации графиков. Для этого необходимо на принципиальной схеме указать начальный узел A и конечный узел B (рис. 2.4). После указания узлов автоматически определяется возможный путь распространения импульса. На рис. 2.5 приведены формы напряжения во временной области для схемы, представленной на рис. 2.4. Проводник, вдоль которого вычисляется сигнал, окрашивается цветом анимированного графика формы этого сигнала. На рис. 2.6 показан процесс моделирования ЭМС печатной платы (ПП), отображающий взаимодействие модулей системы.

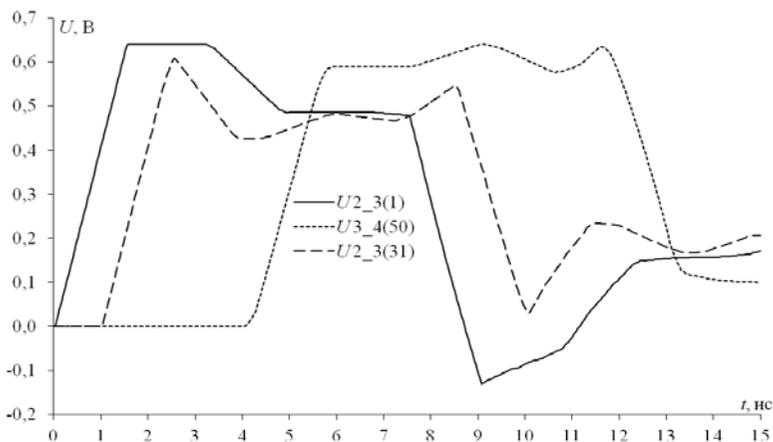


Рис. 2.5. Анимация временного отклика импульсного сигнала:

$U_{2_3(1)}$ и $U_{3_4(50)}$ – отклики в узлах A и B ;

$U_{2_3(31)}$ – отклик в текущей координате схемы

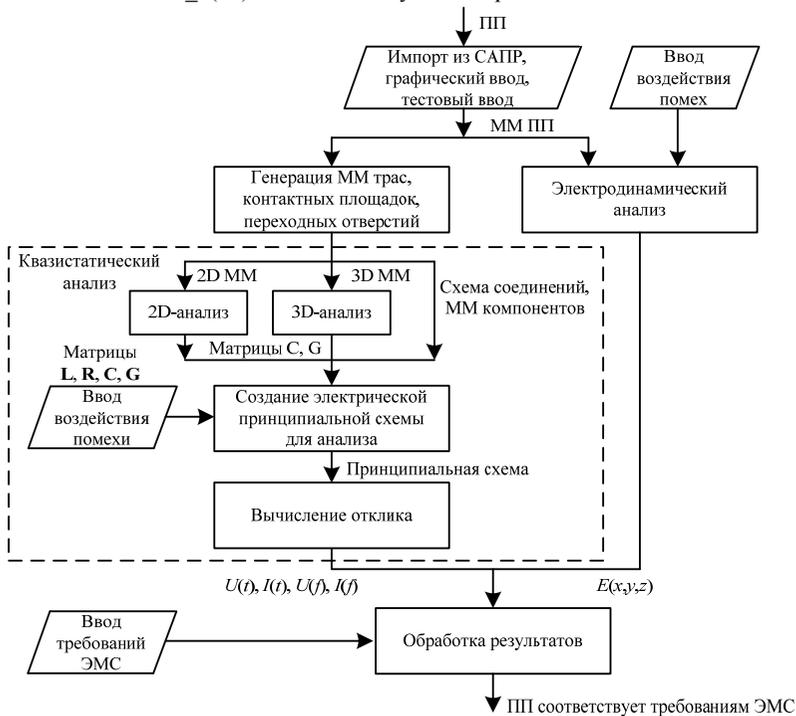


Рис. 2.6. Процесс моделирования ЭМС ПП в системе TALGAT

(ММ – математическая модель)

2.2.2. Программные продукты, основанные на методе конечных разностей во временной области

2.2.2.1. Система QUICKWAVE

QUICKWAVE является двумерной и трёхмерной средой для моделирования электромагнитных высокочастотных полей и для разработки, проектирования, моделирования, анализа и оптимизации высокочастотных электромагнитных узлов. Алгоритм FDTD, реализованный в системе, решает уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей. Алгебраические уравнения записываются во временной форме и решаются в каждой временной точке анализа и дают широкополосную частотную характеристику. FDTD имитаторы могут обрабатывать сложный диэлектрик, структурируя его и описывая отдельные объекты, составленные из ячеек.

2.2.2.2. Система SEMCAD-X

SEMCAD-X – система электромагнитного и теплового моделирования, основанная на методе FDTD, разработанная компанией Schmid & Partner Engineering (SPEAG). Программное обеспечение спроектировано, чтобы удовлетворить ряду потребностей: оценка электромагнитного излучения, ЭМС, проектирование антенн (зависимость входного сопротивления от частоты, КПД, коэффициент усиления, диаграммы направленности), решение задач дозиметрии, медицины и оптики. SEMCAD-X включает подпрограмму SPICE, которая моделирует электронные схемы, которые составлены из различных аналоговых элементов. В большинстве реальных ситуаций эти схемы взаимодействуют с физическими устройствами, типа полосковых линий или антенн. Есть возможность моделирования электромагнитных проблем с использованием фактического сигнала, управляющего электромагнитной системой. Можно рассмотреть напряжение или ток в схеме.

2.2.2.3. Система EMPIRE

Empire – универсальная система трехмерного электромагнитного моделирования полей, которая применяется для моделирования электромагнитных полей корпусов, соединительных проводов, радиаторов, волноводов, антенн и проблем ЭМС. Особенности программного пакета Empire: есть возможность 2D/3D-импорта и экспорта данных, дистанционное управление, простая настройка моделирования структуры, автоматическое создание сетки, параметризация, удобный дизайн.

Компания IMST разработала для Empire уникальную технологию моделирования XPU, которая позволяет ускорить расчет электромагнитного поля для крупных проектов (более 1000 млн. ячеек).

Суть технологии состоит в том, что Empire определяет тип и архитектуру используемого для моделирования процессора и в соответствии с этим оптимизирует алгоритм расчета электромагнитного поля. В результате оптимально задействуются все ядра процессора и все уровни памяти (регистры, кэш-память, ОЗУ, жесткий диск). Эффективное использование кэш-памяти дает возможность исключить задержку передачи данных между ОЗУ и ЦП. Кроме того, технология XPU обеспечивает доступ ко всей оперативной памяти компьютера (на сегодня до 512 Гбайт), в результате чего можно моделировать даже весьма крупные объекты. Для повышения скорости моделирования XPU поддерживает подкачку данных (своппинг) из ОЗУ на жесткие диски (объем выделяемой памяти до 2 Тбайт) [74].

2.2.2.4. Система XFDTD

XFDTD – система полного трехмерного электромагнитного моделирования компании Remcom, обладающая интуитивным графическим пользовательским интерфейсом подготовки расчетов и представления результатов. Алгоритм FDTD решает уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей. Алгебраические уравнения записываются во временной форме и решаются в каждой временной точке анализа и дают широкополосную частотную характеристику. Моделируемые объекты подготавливаются в собственном трехмерном графическом редакторе или импортируются из машиностроительных систем проектирования Pro/Engineer, Inventor и др.

2.2.2.5. Система GEMS

GEMS – это пакет для моделирования задач ЭМС. Он имеет удобный и интуитивно понятный 3D интерфейс для создания модели исследуемой структуры. В GEMS также имеется возможность параллельных вычислений на многопроцессорных компьютерах, суперкомпьютерах и кластерах. GEMS создан для решения большого круга задач. Это, например, моделирование массивов антенн, сложных антенн, корпусов технических объектов, микроволновых контуров и устройств, а также воздействие электромагнитных волн на живые организмы. По сравнению с другими программными продуктами GEMS эффективно использует аппаратные возможности вычислительной системы.

2.2.2.6. Система EM.Cube

EM.Cube – система для электромагнитного моделирования проблем разработки радиочастотной системы. Она имеет несколько различных симуляторов, которые могут решать широкий спектр задач моделирования, таких как электромагнитное излучение, рассеяние, распространение волн в различных средах, паразитные связи,

помехи, целостность сигнала, взаимодействие полей на биологические объекты.

2.2.2.7. Система EMAXD

EMAXD позволяет трехмерное численное решение уравнений Максвелла, основанное на конечноразностном методе во временной области в прямоугольных координатах. История системы насчитывает около 40 лет. EMAXD позволяет помимо прочего моделировать тонкие провода, тонкие зазоры и тонкие поверхности, размеры которых меньше чем размер вычислительной ячейки. Разрешены для использования зависящие от частоты и анизотропные электромагнитные параметры. Кроме того, существуют различные граничные условия, источники и переменные размеры ячеек.

Анализ может быть выполнен на современных рабочих станциях и настольных компьютерах. Однако высокоточное моделирование аэрокосмических средств при сложных воздействиях, таких как молния, может быть выполнено средствами параллельной обработки или с помощью вычислительных кластеров. При этом программный код очень эффективно масштабируется для большого числа процессоров и обеспечивает значительное снижение требований к времени вычисления больших моделей.

2.2.3. Программные продукты, основанные на методе матрицы линий передачи

CST MICROSTRIPES – система, позволяющая анализировать высокочастотные электродинамические задачи. Данный продукт является полноценной системой, которая позволяет проектировать и анализировать электромагнитные устройства и структуры, а также решать задачи ЭМС. Задание геометрии происходит, используя встроенный редактор с помощью примитивов (основанный на ядре ACIS) или импортируя геометрию из другой САПР. После завершения вычислений отображаются компоненты электрического и магнитного полей, поверхностные токи и др.

2.2.4. Программные продукты, основанные на методе конечных элементов

2.2.4.1. Система ANSYS HFSS

HFSS – это пакет программ, который позволяет вычислять многомодовые S -параметры и электромагнитные поля в трехмерных пассивных структурах произвольной формы. HFSS использует для решения уравнений электродинамики метод конечных элементов, включающий адаптивное генерирование и деление ячеек. Решения

для электромагнитного поля, найденные из уравнений Максвелла, позволяют точно определить все характеристики СВЧ-устройства с учетом возникновения и преобразования одних типов волн в другие, потерь в материалах и на излучение и т.д. HFSS предоставляет возможности моделирования антенн, делителей мощности, схем коммутации, волноводных элементов, фильтров СВЧ и трехмерных неоднородностей, описание которых сводится к созданию чертежа структуры, точному заданию материала, идентификации портов и требуемых характеристик. В результате расчета находятся поля внутри и вне структур, а также многомодовые S -параметры. Рассчитанные S -параметры могут использоваться далее в программах анализа линейных и нелинейных схем, в частности, в программе Microwave Office, Serenade Ansoft или ADS.

Мощным средством повышения эффективности решения является адаптивный метод уплотнения сетки, который состоит в следующем: начальные тетраэдральные ячейки создаются на основании структуры, созданной из базовых элементов, имеющихся в библиотеке HFSS (примитивов). Это начальное разбиение на ячейки предоставляет грубую информацию о поле, выделяя области с высокой его напряженностью или с большими градиентами. Разбиение на ячейки затем уплотняется только там, где поле претерпевает резкое изменение, уменьшая вычислительные затраты при улучшении точности. Если необходимо, пользователи могут вести адаптацию вручную, интерактивно используя интерфейс программы.

2.2.4.2. Система EMPro

EMPro представляет собой конструкторскую среду создания 3D-моделей и моделирования с целью анализа 3D-электромагнитного взаимодействия высокоскоростных цифровых и ВЧ/СВЧ-компонентов. В EMPro можно анализировать объемные структуры, с помощью конечноэлементного решателя. Для проектов, в которых имеются электрически большие компоненты, такие как антенны, или для анализа целостности сигнала, может быть использован симулятор на основе метода конечных разностей во временной области. В состав конечноэлементного решателя входят прямой и итерационный алгоритмы принятия решений, использующие линейные и квадратичные базисные функции, что позволяет решать широкий диапазон задач.

2.2.4.3. Асоника-ЭМС

Программа (подсистема) АСОНИКА-ЭМС позволяет быстро решать вопросы обеспечения стойкости ТС к внешним электромагнитным воздействиям и оперативно принимать решения о внесении изменений в конструкцию.

Подсистема производит:

– расчет напряженности электрического и магнитного полей в трех измерениях внутри типового и произвольного корпуса электронного блока (импорт файлов моделей из САПР-систем в форматах IGES и SAT) при воздействии электромагнитных волн;

– расчет эффективности экранирования электрического и магнитного полей корпусом типового и произвольного блоков.

Реализована сетевая база данных, содержащая электромагнитные параметры конструкционных материалов. Структурная схема системы приведена на рис. 2.7. Система состоит из трех подсистем: интерфейса пользователя, расчетного ядра и графической подсистемы.

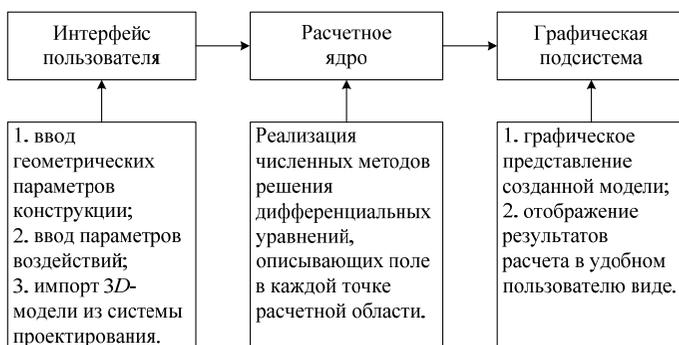


Рис. 2.7. Структурная схема системы Асоника-ЭМС

Интерфейс пользователя решает две задачи: с его помощью можно ввести вручную геометрические параметры испытуемого типового изделия (блока, шкафа) либо нетипового, взяв их из файла, созданного в системах трехмерного проектирования, а также задать параметры электромагнитного поля, воздействию которого подвергается изделие. Импорт модели блоков произвольной формы, выполненных в САПР-системах, происходит в формате SAT и IGES. После того, как трехмерная модель конструкции анализируемого корпуса введена в проект, необходимо задать параметры источника возбуждения (плоской электромагнитной волны). Далее настраиваются параметры конечно-элементной сетки, задается частота (диапазон частот) решения в диалоговом окне. Следующим шагом будет указание результатов, которые программа должна будет вывести на экран по завершению расчетов. В этом окне можно задать отображение электрического и магнитного полей для разных частот (если задан их диапазон) и фаз. Затем можно запускать проект на расчет и после его завершения отобразится распределение напряженности

электрического поля внутри корпуса и в прилегающем пространстве. Также подсистема выдает график эффективности экранирования электрического и магнитного полей.

2.2.5. Программные продукты, основанные на методе конечного интегрирования

CST Microwave Studio (CST MWS) представляет собой программу, предназначенную для быстрого и точного численного моделирования высокочастотных устройств (антенн, фильтров, ответвителей мощности, планарных, многослойных структур), а также анализа проблем целостности сигналов и ЭМС во временной и частотных областях с использованием прямоугольной или тетраэдральной сеток разбиения, соответственно.

Главным преимуществом вычислительных технологий компании CST является использование идеальной аппроксимации границ (Perfect Boundary Approximation, PBA). При моделировании 3D-структур, содержащих поверхности сложной кривизны, использование классической прямоугольной сетки разбиения приводит к необходимости использовать слишком мелкую сетку и неоправданно большое число ячеек. Использование тетраэдральной сетки частично решает проблему и позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам. Технология PBA использует преимущества обоих перечисленных подходов, но обеспечивает беспрецедентный прирост производительности без потери точности вычислений.

Также в системе реализованы еще две технологии: метод тонких стенок (Thin Sheet Technique, TST), позволяющий оптимально представить две диэлектрические части кубической ячейки, разделенные тонкой металлической стенкой, а также многоуровневая схема подсеток (Multilevel Subgridding Scheme, MSS). Последняя позволяет линиям разбиения начинаться и заканчиваться в любой точке анализируемого объема и, тем самым, вблизи элементов произвольной формы получить особые конформные слои с измельченной сеткой разбиения.

В конце 2017 г. производитель программного обеспечения для проведения электродинамического моделирования Computer Simulation Technology представил новые возможности своего продукта CST STUDIO SUITE 2018, выход которого состоялся в первой половине 2018 г. Среди прочих дополнений выделяются следующие:

Реализация гибридного способа моделирования. Гибридные методы вычислений ранее уже были доступны в CST, например, при моделировании кабельных систем. В данном случае речь идет о со-

вместном использовании временного вычислителя (T , метод FIT) и интегрального (I , метод моментов). Такая связка позволяет оптимально анализировать, например, параметры антенны на носителе так, что источник детально рассчитывается временным способом, а его окружение – интегральным. При этом вычисляется изменение не только диаграммы направленности источника при размещении на объекте, но и S -параметров, потерь и др. характеристик.

Возможность использования матриц связи в качестве целей оптимизации резонаторных фильтров. Указанный способ работает в связке с продуктом Filter Designer 3D, используемым для вычисления целевой матрицы связи. Указанный способ оптимизации позволяет ускорить сходимость оптимизации параметров фильтров различного типа (ФНЧ, ФВЧ-полосовых с нулями передачи).

Возможность импорта поверхностного разбиения для моделей в формате Nastran.

Добавлена параметризация амплитудно-фазового распределения среди элементов решетки, генерируемого с помощью мастера Array Wizard.

Поддержка новой линейки микропроцессоров Gold 6148 (Skylake), новых карт графического ускорения Tesla P100, Quadro GP100.

Отдельно стоит отметить, что в системе реализована возможность интеграции с другими продуктами компании, например с системой CST CABLE STUDIO, которая предназначена для моделирования электромагнитных эффектов в кабелях и позволяет оптимизировать массу и размер одиночных проводов, витых пар, а также сложных жгутов с неограниченным числом проводников. Также она позволяет оценивать напряжения в разных точках кабелей, токи через определенные проводники, S -параметры, импедансы, а также взаимные наводки проводников друг на друга. За счет интеграции с CST MICROWAVE STUDIO она дает возможность моделировать воздействие на кабели внешних электромагнитных полей. Например, возможно моделирование уровней сигналов в электропроводке самолета при попадании в него грозового разряда.

В анонсированной версии 2019 г. продолжены работы по гибриднему использованию вычислительных модулей и расширению сферы применимости программы. Посредством взаимодействия с пакетом SIMULIA дополнительно могут быть реализованы возможности мультифизического моделирования.

2.2.6. Образовательные и ознакомительные версии

Часть инструментальных средств, рассмотренных выше, имеет специализированные студенческие или демо-версии, которые

предназначены для ознакомления с особенностями их использования. Данные версии, как правило, имеют неограниченный срок использования и ряд ограничений, касающихся вычислительных возможностей (численный метод, методы решения СЛАУ, способ дискретизации и пр.). Однако имеющиеся примеры и описания отлично подходят для вводного ознакомления и получения навыков работы с инструментальными средствами электродинамического моделирования. В табл. 2.4 приведен перечень таких средств, доступных для скачивания на официальных сайтах производителей.

Т а б л и ц а 2 . 4

Перечень образовательных и ознакомительных версий программных продуктов

| № | Инструментальное средство | Сайт разработчика |
|---|----------------------------------|---|
| 1 | CST STUDIO SUITE Student version | https://www.cst.com |
| 2 | FEKO LITE | https://altairhyperworks.com |
| 3 | Concept-II demo version | http://www.tet.tuhh.de |
| 4 | newFasant Silver Version | https://www.fasant.com |
| 5 | QuickWave STUDENT Release | http://www.qwed.com.pl |
| 6 | Sonnet Lite | http://www.sonnetsoftware.com |
| 7 | Wipl-D Demo | https://www.wipl-d.com |

ГЛАВА 3 МЕТОД МОМЕНТОВ

Суть метода моментов заключается в том, чтобы заменить неизвестную функцию в функциональном уравнении (например, интегральном уравнении для электрического поля) с помощью линейной комбинации (набора) известных (базисных) функций с неизвестными (требующими нахождения) коэффициентами. Затем преобразованное функциональное уравнение при соблюдении граничных условий (например, электрический потенциал на границах объекта) с помощью тестовых функций сводится к СЛАУ. Её решение даёт значения неизвестных коэффициентов, с помощью которых вычисляются значения интересующих параметров. Сначала кратко рассмотрим общую теорию метода, в терминологии взвешенных невязок, а затем сделаем соответствующие пояснения.

3.1. Общая теория

Рассмотрим обобщенную задачу (детерминированное уравнение)

$$Lf = g \text{ в области } \Omega, \quad (3.1)$$

где L – линейный оператор (дифференциальный, интегральный или интегро-дифференциальный)¹, g – известная функция, а f – искомая неизвестная функция. (При решении электромагнитных задач линейный оператор L , как правило, является интегро-дифференциальным, f – соответствует токам, g – воздействию полю.) Область Ω представляет собой пространственную область, описываемую координатами. Функция f может быть как скалярной, так и векторной. Пусть f представлена линейной комбинацией базисных функций f_n в области действия L , т.е.

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n, \quad (3.2)$$

где a_n – неизвестные коэффициенты. Для приближённых решений (3.2) является конечной суммой, а для точных – обычно бесконечной. Подставляя (3.2) в (3.1) и используя линейность L , получим

$$\sum_{n=1}^N a_n Lf_n \approx g, \quad (3.3)$$

где равенство является обычно приближённым. Тогда невязка

¹ Оператор L по определению представляет собой перечень операций над функцией f , в результате которых получается другая функция g .

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n Lf_n. \quad (3.4)$$

Базисные функции выбираются так, чтобы они моделировали ожидаемое поведение неизвестной функции по всей ее области, и они могут быть скалярами или векторными в зависимости от решаемой задачи. Если базисные функции определены на локальных областях, они называются локальными базисными функциями или базисными функциями подобластей. Если они определены на всей области, то их называют глобальными базисными функциями или базисными функциями полной области. (Далее рассматриваются только локальные функции.)

Далее в области определения L определим систему тестовых (весовых) функций f_m , и зададим соответствующее скалярное произведение [75] (внутреннее произведение [76] или момент [77]). Так, для функций f и q оно задается в виде

$$(f, q) = \int f q dL, \quad (3.5)$$

где интеграл может быть линейным (как в рассматриваемом случае), поверхностным или объемным, в зависимости от используемых функций.

Для нахождения точного решения требуется, чтобы невязка была равна нулю, а это соответствует равенству нулю скалярного произведения каждой тестовой функции и невязки, т.е.

$$(f_m, g) - \sum_{n=1}^N a_n (f_m, Lf_n) = 0$$

или

$$\sum_{n=1}^N a_n (f_m, Lf_n) = (f_m, g). \quad (3.6)$$

Это уравнение соответствует СЛАУ с матрицей порядка N , которую можно записать в матричном виде

$$\mathbf{Za} = \mathbf{b},$$

где матричные элементы вычисляются по формуле

$$z_{mn} = (f_m, Lf_n), \quad (3.7)$$

а элементы вектора свободных членов (правой части) – по формуле

$$b_m = (f_m, g). \quad (3.8)$$

Для любого численного метода важно выяснить вопросы, связанные с его сходимостью, скоростью сходимости и точностью, которые для метода моментов зависят от оператора L , базисных функ-

ций f_n , тестовых функций f_m и их числа N . Эффективность приложения метода для получения результата с заданной точностью определяется, в конечном счёте, затратами времени и памяти компьютера. Таким образом, если не рассматривать задачу синтеза, а ограничиться задачей одновариантного анализа, то для метода моментов решение сводится к следующим шагам:

- получение из уравнений Максвелла интегральных уравнений структуры;
- дискретизация структуры (разбиение структуры на N подобластей, в каждой из которых искомая функция аппроксимируется базисной функцией);
- вычисление элементов матрицы СЛАУ размером $N \times N$;
- вычисление элементов вектора воздействий размером N ;
- решение СЛАУ;
- вычисление требуемых характеристик из вектора решения СЛАУ.

Таким образом, метод моментов можно охарактеризовать следующим образом: неизвестная величина (например, поле или плотность тока, зависящая от пространственных координат) аппроксимируется конечным рядом известных функций (называемых базисными), умноженными на неизвестные коэффициенты. Это приближение подставляется в линейное операторное уравнение. Левую и правую части полученного уравнения умножают на подходящую функцию (называемую тестовой или весовой функцией) и интегрируют по области, в которой определена тестовая функция. Таким образом, линейное операторное уравнение сводится к линейному алгебраическому уравнению. Повторяя эту процедуру для набора независимых тестовых функций, число которых должно равняться числу базисных функций, получают СЛАУ. Решение СЛАУ дает неизвестные коэффициенты и позволяет найти приближенное решение операторного уравнения.

3.2. Пример использования

В качестве небольшого и наглядного примера, демонстрирующего простоту и элегантность метода моментов, рассмотрим электростатическую задачу нахождения распределения заряда на тонкой проволоке [77]. Для этого напомним, что электрический потенциал φ в точке \mathbf{r} (точке наблюдения), обусловленный объемной плотностью электрического заряда ρ , задается интегралом

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (3.9)$$

Если в точке источника \mathbf{r}' известна плотность электрического заряда $\rho(\mathbf{r}')$, то в любой точке наблюдения может быть найден соответствующий потенциал, и, наоборот, зная потенциал можно определить соответствующую плотность заряда.

В качестве примера рассмотрим тонкую проводящую проволоку (thin wire) длиной L и диаметром $2a$, ориентированную вдоль оси x и схематично показанную на рис. 3.1. Если радиус проволоки намного меньше её длины, выражение (3.9) упрощается

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^L \frac{\tau(x')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx', \quad (3.10)$$

где

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

а τ – линейная плотность заряда.

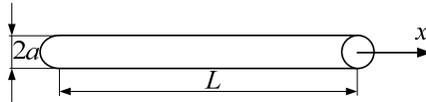


Рис. 3.1. Тонкая проволока

До этого момента задача сводится к необходимости решения интегрального уравнения. Далее перейдем к приближенному решению данной задачи с использованием метода моментов. Для этого сегментируем проволоку на N подынтервалов длиной h каждый, как показано на рис. 3.2. Для этого потребуется $N + 1$ узел, с координатами

$$x_n = (n - 1)h, \text{ при } h = L / N \text{ и } n = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Далее сегменту с индексом n соответствует подынтервал, расположенный между узлами x_n и x_{n+1} .

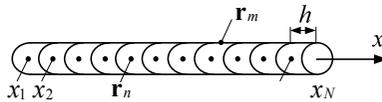


Рис. 3.2. Сегментация тонкой проволоки

Далее с помощью кусочно-постоянных базисных функций в каждом подынтервале положим, что плотность заряда имеет постоянное значение, такое, что $\tau(x')$ кусочно-постоянна по длине проволоки. Математически это записывается следующим образом

$$\tau(x') = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x'), \quad (3.11)$$

где α_n – неизвестные коэффициенты (которые надо вычислить), а $f_n(x')$ базисная функция, имеющая постоянное значение на подынтервале n и равная нулю вне его, т.е.

$$f_n(x') = \begin{cases} 0, & x' < (n-1)h \\ 1, & (n-1)h \leq x' \leq nh \\ 0, & x' > nh \end{cases}. \quad (3.12)$$

Далее, подставляя (3.12) в (3.10), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x') \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'. \quad (3.13)$$

Используя определение импульсной функции (3.12), перепишем полученное выражение как

$$4\pi\epsilon\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{(n-1)h}^{nh} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' \quad (3.14)$$

или в более наглядном виде

$$4\pi\epsilon\varphi(\mathbf{r}) = \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' + \alpha_2 \int_h^{2h} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^L \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx',$$

что даёт одно уравнение с N неизвестными, а именно $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Таким образом, получили сумму интегралов, каждый из которых определен на соответствующем подынтервале. При этом для получения единственного решения требуется N уравнений или допущений (ограничений). Строго говоря, эти уравнения должны быть линейно независимы. Для этого сопоставим граничное условие (потенциал на проводе) в N точках с координатами x_m вдоль провода. Этот процесс называется коллокация (согласование по точкам). Ему соответствует процесс аппроксимации с помощью тестовых функций. В данном случае это соответствует использованию дельта функций Дирака¹. Для удобства (без потери общности) выберем в качестве координат этих N точек середины подынтервалов

$$x_m = (m - 1/2)h, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда уравнение (3.14) для каждой из этих N точек даст систему из N уравнений. Для отсутствия сингулярности в подынтегральном выражении, возникающей из-за $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, расположим точки наблюдения (поля) на поверхности проволоки. Тогда знаменатель подынтегральной функции преобразуется к виду

¹ Обобщённая функция, позволяющая записать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин (масса, заряд и др.), сосредоточенных или приложенных в одной точке.

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + a^2}, \quad (3.15)$$

и выражение (3.14) может быть записано как

$$4\pi\epsilon\varphi(x_1) = \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^{Nh} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx';$$

⋮

$$4\pi\epsilon\varphi(x_N) = \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^{Nh} \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx'$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

где элементы матрицы вычисляются как

$$z_{mn} = \int_{(n-1)h}^{nh} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + a^2}} dx', \quad (3.17)$$

а элементы правой части (вектора свободных членов) как

$$b_m = 4\pi\epsilon\varphi(x_m). \quad (3.18)$$

Интеграл в (3.17) представляется в замкнутом виде как

$$z_{mn} = \log \frac{(x_b - x_m) + \sqrt{(x_b - x_m)^2 - a^2}}{(x_a - x_m) + \sqrt{(x_a - x_m)^2 - a^2}}, \quad (3.19)$$

где $x_b = nh$ и $x_a = (n-1)h$.

На рис. 3.3 приведено распределение заряда по поверхности проволоки при $N = 10, 15$ и 100 (для решения СЛАУ использовалось обращение матрицы). Видно, что увеличение числа базисных функций увеличивает точность результата, и заряд больше на концах проволоки.

В качестве заключения по данному примеру сделаем несколько выводов, касательно специфики решения задачи.

1. Замена поверхностной плотности заряда на линейную позволила существенно сократить вычислительную сложность задачи.

2. В процессе коллокации граничные условия были точно соблюдены только в N дискретных точках. При этом между этими точками потенциал будет отклоняться от указанного (постоянного) значения. Для уменьшения влияния данной особенности стоит прибегать уменьшению длины подынтервалов.

3. Выбранные кусочно-постоянные базисные функции оканчиваются на концах подынтервала, а поскольку аппроксимируется заряд, который является непрерывным, их использование даёт нефизичные результаты. Это ясно видно на рис. 3.3, *а*. (Влияние этого факта может быть уменьшено также за счет уменьшения длины подынтервалов.)

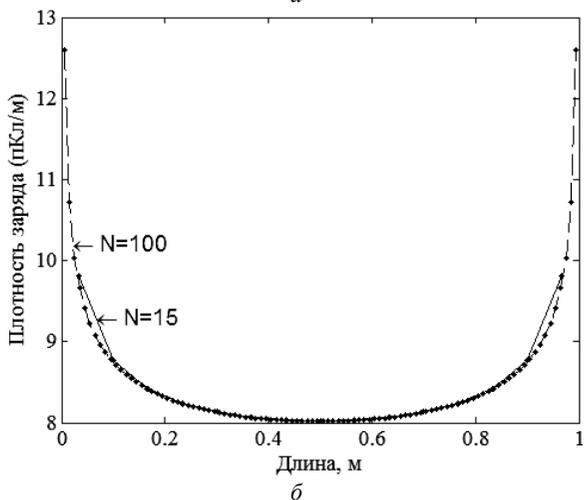
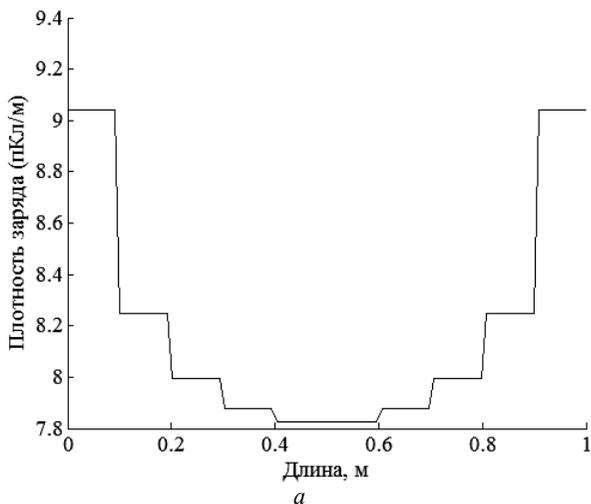


Рис. 3.3. Продольное распределение заряда по поверхности тонкой проволоки при $N = 10$ (*а*) и 15 и 100 (*б*)

3.3. Краткая теоретическая справка

Обобщая сказанное выше, можно сделать вывод, что основная идея метода моментов – сведение функционального уравнения к СЛАУ. Такой метод разработан Иваном Бубновым в 1913 г. для решения задач упругости, который получил широкое распространение после работ Бориса Галёркина в 1915 г. Поэтому этот метод часто называют методом Бубнова–Галёркина. Теоретическое обоснование метода выполнено в 1942 г. советским математиком Мстиславом Келдышем. Однако стоит отметить, что до появления компьютеров как этот метод, так и другие, не являлись востребованными из-за утомительных вычислений, требуемых для их применения, и их использовали в последнюю очередь. При этом эти численные методы, такие же численные, как и аналитические методы, просто оперируют с такими элементами вычислительной математики как линейные пространства и ортогональные проекции.

В оригинальной версии МоМ, предложенной Харрингтоном, используются кусочно-постоянные (импульсные) базисные функции и функции Дирака в виде тестовых. Данный метод известен также как метод коллокаций. Харрингтон в работе [75] выполнил обобщение, позволяющее считать методы коллокаций, Галёркина и наименьших квадратов частным случаем МоМ. При этом, по мнению некоторых авторов, методы конечных элементов и конечных разностей также можно считать частными случаями МоМ [78]. Однако в прикладной математике этот подход принято называть по-другому. Так, в 1956 г. в работе [79] Crandall предложил термин «метод взвешенных невязок», обобщив под ним целое семейство методов. Общее обсуждение данного подхода содержится в [80, 81]. Под невязкой уравнения $Lf = g$ подразумевается выражение

$$R = L(f - \hat{f}) = L\hat{f} - g,$$

где \hat{f} – функция, аппроксимирующая функцию f с помощью набора базисных функций. Далее накладывается условие ортогональности (взятия скалярного произведения) невязки всем тестовым функциям (в случае метода Галёркина – базисным функциям).

Название «метод моментов», по всей видимости, является неудачным [82, 83], поскольку оно имеет немного другое значение в современной прикладной математике. Еще более запутывает ситуацию и то, что другим термином, широко используемым в других областях техники, является «метод граничных элементов», а при описании поверхности структур этот термин и термин метод моментов, используемый в электромагнетизме, являются синонимами (при

этом МоМ – более общий подход [82]). Однако при решении задач электромагнетизма этот подход исторически все же называют МоМ. Харингтон при выборе названия для использованного им метода, позаимствовал его из работы [84], где авторы описывали метод решения интегрального уравнения и называли его метод моментов. Ранее, метод с таким названием, был предложен в работах [85, 86], где в качестве тестовых функций для решения интегральных уравнений использовались полиномы (моменты функции).

3.4. Базисные и тестовые функции

Эффективность МоМ во многом зависит от выбора ячеек и набора базисных и тестовых (пробных, весовых) функций. Этот выбор определяется формой всей проводящей поверхности. Если эта поверхность (или совокупность поверхностей) имеет форму многоугольника с прямыми углами, целесообразно использовать ячейки прямоугольной формы с размерами $h_x \times h_y$. Системы базисных функций делятся на два вида: функции подобластей и функции полной области. Ниже на одномерном примере рассмотрим наиболее часто используемые базисные и тестовые функции.

3.4.1. Базисные функции подобластей

3.4.1.1. Кусочно-постоянные функции

Наиболее простые базисные функции имеют постоянное значение в ячейке и равны нулю вне ее. Такие функции, называемые кусочно-постоянными (КПБФ) или импульсными (pulse functions), имеет вид, показанный на рис. 3.4. При этом интересующий интервал делится на N подынтервалов. На рисунке подынтервалы имеют одинаковую длину, но это условие не является обязательным. На рис. 3.4 приведен пример использования КПБФ, задаваемых как

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1}, m=1, \dots, N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

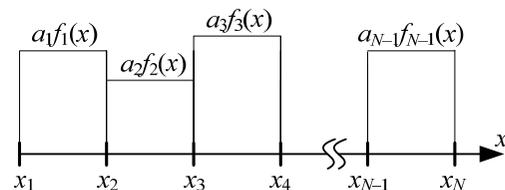


Рис. 3.4. Кусочно-постоянные базисные функции

3.4.1.2. Кусочно-линейные функции

Недостатком КПБФ является то, что получаемая в результате их использования аппроксимирующая функция разрывна, что в электродинамике в ряде случаев неприемлемо, так как разрывные функции могут порождать сингулярные поля, не отвечающие физической реальности. Тем не менее, рассматриваемая система базисных функций нашла достаточно широкое применение.

Более сложные базисные функции предполагают изменение искомой величины вдоль одной или обеих координат в пределах ячейки. Так, если ток течет в направлении оси x и его можно считать постоянным вдоль оси y , в качестве базисной можно использовать так называемые «крышечные» или кусочно-линейные базисные функции (КЛБФ). Семейство таких функций приведено на рис. 3.5. Интервал делится на N точек и $N-1$ подынтервалов, что требует использования $N-2$ БФ. Длина КЛБФ взята одинаковой, но, как и в случае с импульсными функциями, это не обязательное условие. Поскольку смежные функции перекрывают один сегмент, то использование треугольников позволяет кусочно линейаризовать решение между сегментами. КЛБФ определяются как

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_m - x}{h_x}, & x_m - h_x \leq x < x_m; \\ 1 + \frac{x_m - x}{h_x}, & x_m \leq x < x_m + h_x; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из рис. 3.5 видно, что при таком использовании решение на концах интервала (x_1 и x_N) равно нулю. Таким образом, такая реализация желательна, когда априорно известно, что значение решения на концах интервала равно нулю, но не желательна, если решение может быть ненулевым. Если вместо этого добавить первый и последний сегменты полутреугольника, решение больше не будет принудительно сбрасываться в ноль. Это показано на рис. 3.6. В этом случае используются уже не $N-2$, а N КЛБФ.

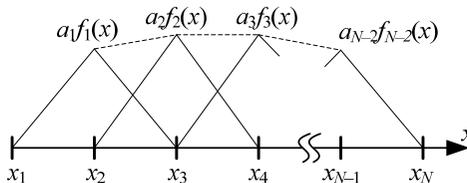


Рис. 3.5. Семейство кусочно-линейных базисных функций

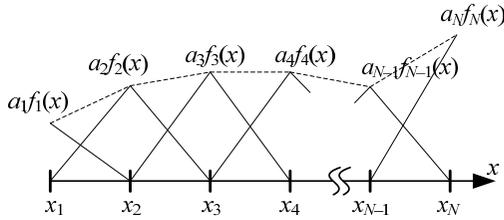


Рис. 3.6. Семейство кусочно-линейных базисных функций с дополнительными функциями на концах интервала

3.4.1.3. Кусочно-синусоидальные функции

Для моделирования быстро изменяющихся в пространстве токов удобнее использовать кусочно-синусоидальные базисные функции (КСБФ), которые подобны КЛБФ, как показано на рис. 3.7. Они часто используются при анализе проводных антенн из-за их способности представлять синусоидальные распределения токов. Эти функции определяются как

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{\sin[k(x - (x_m - h_x))]}{\sin(kh_x)}, & x_m - h_x \leq x < x_m; \\ \frac{\sin[k(x_m + h_x) - x]}{\sin(kh_x)}, & x_m \leq x < x_m + h_x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. При этом требуется чтобы длина сегмента была значительно меньше периода используемой синусоиды (не менее 10).

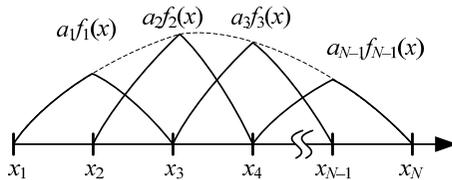


Рис. 3.7. Семейство кусочно-синусоидальных базисных функций

3.4.2. Базисные функции полной области

Рассмотренные БФ подобластей, как следует из названия и приведенных примеров, отличны от нуля только в части рассматриваемого интервала/области. БФ полной области определены на всем интервале. Наиболее известными являются БФ Фурье

$$f_m = \cos(2m-1)\pi z/2,$$

Чебышёва

$f_m = T_{2m-2}(z)$, где $T_0(z) = 1$, $T_1(z) = z$, ..., $T_{m+1}(z) = 2zT_m(z) - T_{m-1}(z)$,
Маклорена

$$f_m = z^{2m-2},$$

и Лежандра

$$f_m = P_{2m-2}(z), \text{ где } P_m(z) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dz^m} (z^2 - 1)^m,$$

где $m = 1, 2, \dots, N$, $z = 2x/L$, а L – длина интервала.

Все БФ полной области имеют ограниченное применение, поскольку они требуют априорного знания природы аппроксимируемой функции. Поэтому БФ подобластей чаще используются на практике, особенно при разработке универсальных программных кодов.

3.4.3. Базисные функции RWG

Для аппроксимации криволинейных границ поверхностей произвольной формы принято использовать разбиение на треугольники, а для представления тока в них – БФ РВГ (RWG – Rao, Wilton, Glisson) [87]. На рис. 3.8 показаны два смежных треугольника T_n^+ и T_n^- , имеющих общее ребро n . При этом каждая базисная функция ассоциируется с этим общим ребром и вне их равна нулю. Положение точки на поверхности треугольников можно определяется радиус-векторам $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$ относительно начала координат (точка O) или радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$ относительно вершины, противоположащей общему ребру n (вершина \mathbf{v}^\pm). При этом $\boldsymbol{\rho}_n^+$ направлен от внешней вершины, а $\boldsymbol{\rho}_n^-$ – к внешней вершине соответствующего треугольника. Обозначение треугольников плюсом или минусом определяется выбором положительного направления тока, протекающего через ребро n . Таким образом, ток должен вытекать из треугольника T_n^+ и втекать в треугольник T_n^- .

С помощью введенных обозначений базисная функция (векторная) определяется как

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} l_n \boldsymbol{\rho}_n^+ / (2A_n^+), & \mathbf{r} \in T_n^+; \\ l_n \boldsymbol{\rho}_n^- / (2A_n^-), & \mathbf{r} \in T_n^-; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где l_n – длина ребра и A_n^\pm – площади соответствующих треугольников. Согласно рис. 3.8 вектор $\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r})$ может быть выражен через начало координат как

$$\rho_n^+(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^+ - \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in T_n^+,$$

а вектор $\rho_n^+(\mathbf{r})$ соответственно как

$$\rho_n^+(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{r} \in T_n^-.$$

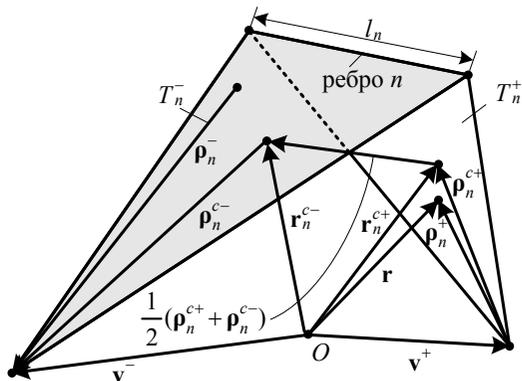


Рис. 3.8. Смежные треугольники с общим ребром и геометрические параметры, связанные с ним

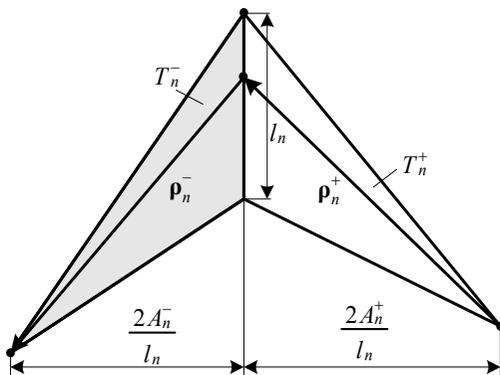


Рис. 3.9. Геометрия для представления нормальной составляющей базисной функции

Базисная функция \mathbf{f}_n используется для приближенного представления поверхностного тока. Ниже перечислены некоторые ее характеристики, которые делают ее подходящей для этого.

1. Нормальная к граничным ребрам составляющая плотности тока, (исключая ребро n), равна нулю, т.е. ток через внешнюю границу двух треугольников не течет. Поэтому на границе отсутствуют разрыв плотности тока и связанные с ним линейные заряды.

2. Нормальная к ребру n составляющая функции постоянна вдоль ребра. Численно она равна высоте треугольников T_n^\pm , если за основание взять ребро n (рис. 3.9). Плотность потока функции \mathbf{f}_n через ребро равна единице и непрерывна при переходе из T_n^+ в T_n^- . Поэтому линейные заряды на ребре n также отсутствуют.

ГЛАВА 4 ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В данной главе приведены результаты сравнения нескольких программных продуктов на тестовых задачах. Далее приведены рекомендации по проверке (валидации) результатов моделирования.

4.1. Тестовые задачи

На рис. 4.1, *a* приведен вид несимметричного вибратора (НВ), длиной 12 см и радиусом 0,5 см, расположенного в центре идеально проводящей пластины, размерами 40×30 см. Целью моделирования являлось определение частотных зависимостей модуля входного импеданса НВ, в диапазоне от 200 МГц до 1 ГГц. На рис. 4.1, *б* приведены полученные частотные зависимости модуля входного импеданса НВ.

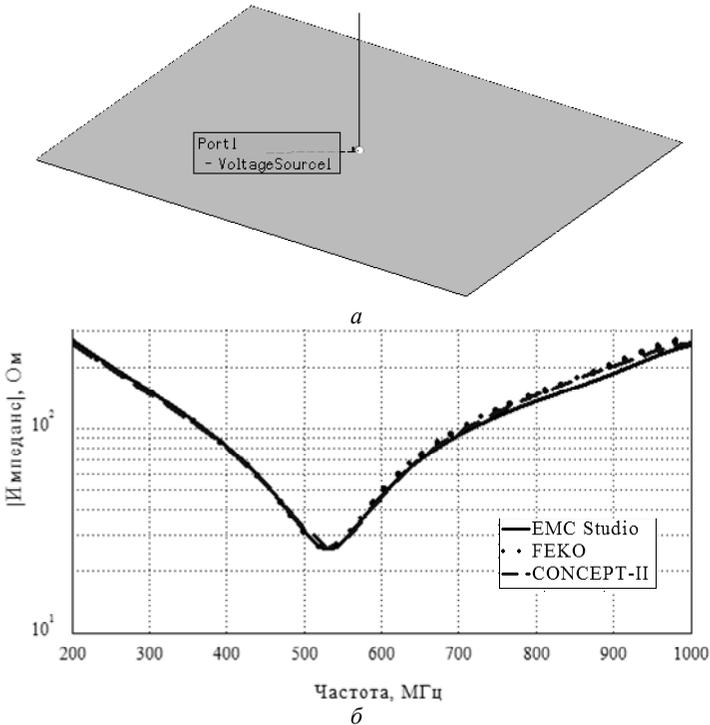


Рис. 4.1. НВ на идеально проводящей пластине (*a*) и частотные зависимости модуля его входного импеданса (*б*)

При использовании системы FEKO поверхность пластины была дискретизирована на 344 треугольника, а НВ – на 9 сегментов. В случае EMC Studio – 344 и 9, а CONCEPT-II – 300 и 9 соответственно. Видно, что результаты хорошо согласуются между собой, а наибольшее расхождение составило 20 Ом (10%) на частоте 900 МГц.

Далее выполнено моделирование металлического корпуса (480×400×300 мм) со щелями (200×10 мм, расстояние от переднего края – 80 и 240 мм), который возбужден НВ (длиной 120 и радиусом 5 мм), рис. 4.2 [88]. Целью моделирования являлось определение частотных зависимостей модуля входного импеданса и модуля коэффициента отражения НВ, в диапазоне от 200 МГц до 1 ГГц.

На рис. 4.3 приведены полученные частотные зависимости модуля входного импеданса и модуля коэффициента отражения НВ. При использовании системы FEKO поверхность корпуса была дискретизирована на 1286 треугольников, а НВ – на 9 сегментов, тогда как при использовании EMCoS Studio – на 1280 треугольников и 9 сегментов соответственно. Как видно из представленных зависимостей, системы показали практически одинаковые результаты, а наибольшее расхождение составило 100 Ом для входного импеданса на частоте 880 МГц и 3 дБ для коэффициента отражения на частоте 929 МГц.

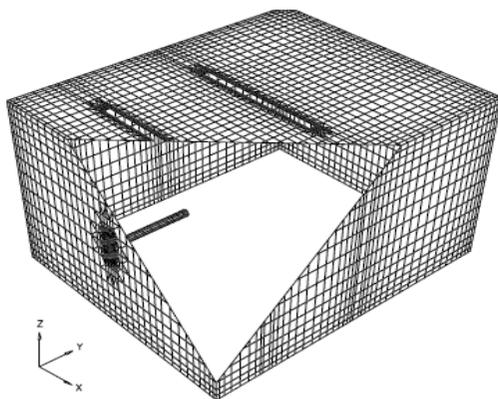
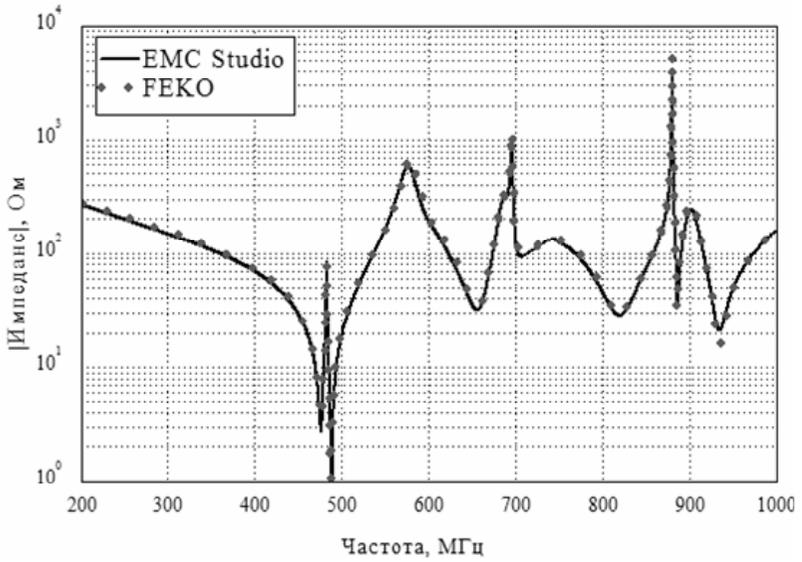
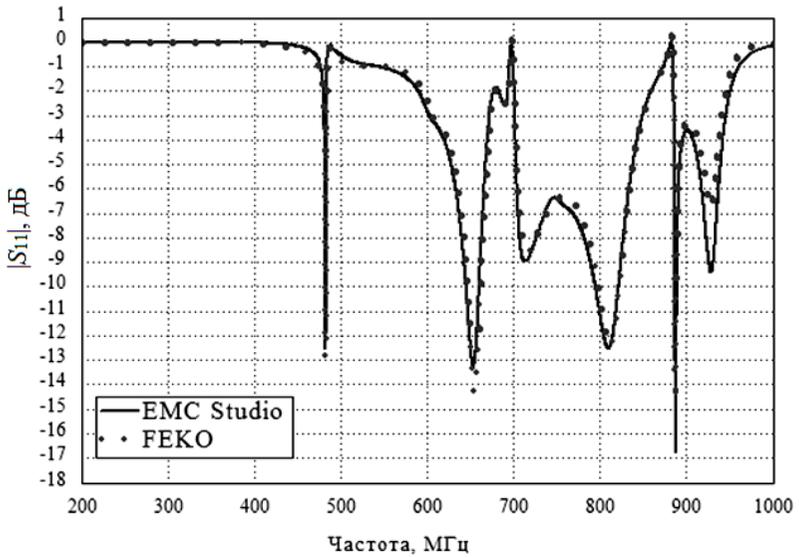


Рис. 4.2. Корпус с двумя щелями, возбужденный НВ [88]

На рис. 4.4 приведены результаты моделирования (частотные зависимости модуля входного импеданса) в системе Concept-II и измерений в безэховой камере, представленные в работе [88]. Видно, что полученные результаты хорошо согласуются с результатами измерений из работы [88].



a



б

Рис. 4.3. Частотные зависимости модуля входного импеданса (*a*) и $|S_{11}|$ (*б*) НВ, возбуждающего корпус с двумя щелями

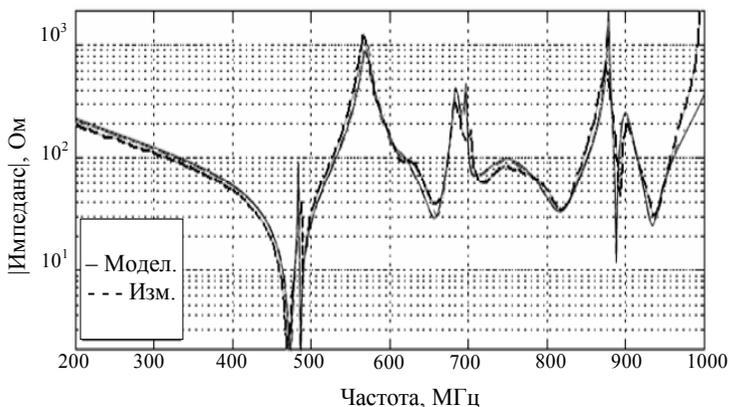


Рис. 4.4. Частотные зависимости модуля входного импеданса, полученные с помощью моделирования и измерений

Далее выполнено моделирование корпуса блока питания (БП), рис. 4.5, *а*, возбужденного НВ (радиусом 0,07 см), установленным в центре нижней стенки корпуса, рис. 4.5, *б*. Габаритные размеры корпуса: $26 \times 12 \times 14,7$ см, материал корпуса – алюминий (проводимость $3,816 \times 10^7$ См/м), а НВ – медь (проводимость $5,813 \times 10^7$ См/м). Целью моделирования являлось получение зависимости модуля коэффициента отражения НВ от частоты, в диапазоне от 300 МГц до 1,4 ГГц, для трех длин (12, 6 и 3 см) НВ.

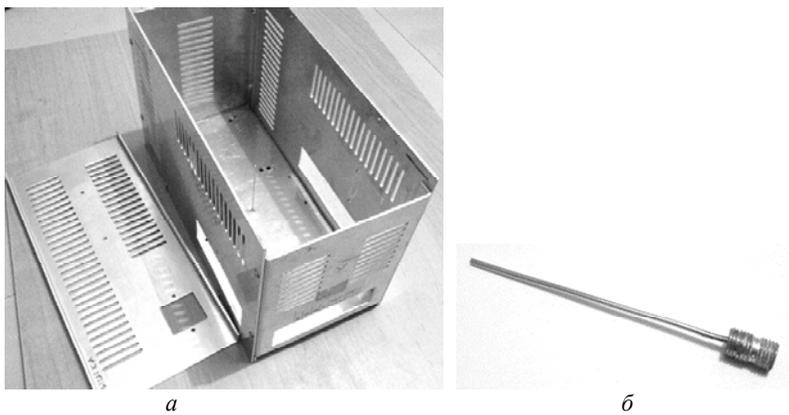
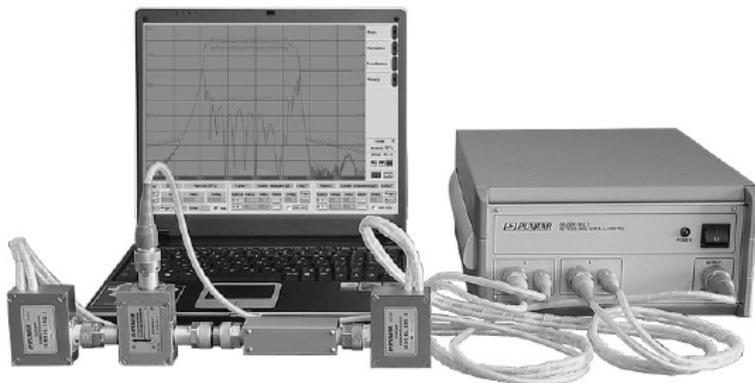
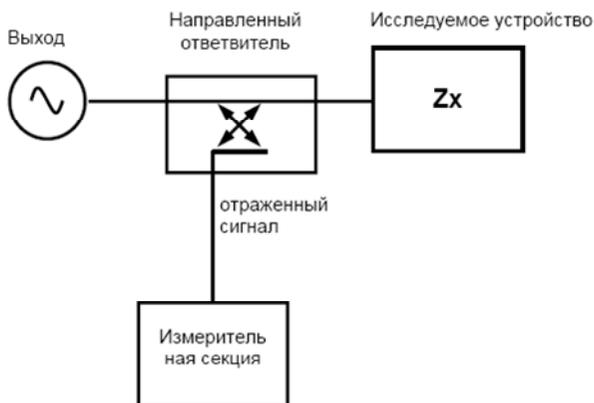


Рис. 4.5. Корпус блока питания: общий вид (*а*) и НВ с соединителем SMA (*б*)

Помимо моделирования выполнены натурные измерения в двух лабораториях с помощью измерителей комплексных коэффициентов передачи (ИККП) «Обзор-102» и «Обзор-103». Первый позволяет проводить измерения в диапазоне от 0,3 МГц до 1,2 ГГц, а второй – 0,3 МГц до 1,4 ГГц. Общий вид ИККП «Обзор-103» и схема измерения комплексного коэффициента отражения с помощью него приведены на рис. 4.6.



a



б

Рис. 4.6. Общий вид ИККП «Обзор-103» (*a*) и схема для измерения с помощью него комплексного коэффициента отражения S_{11} (*б*)

При длине НВ 12 см и использовании системы FEKO поверхность корпуса БП была дискретизирована на 8446 треугольников, а НВ на 20 сегментов, а при использовании EMCoS Studio – на 5154 треугольников и 13 сегментов соответственно. Полученные час-

тотные зависимости приведены на рис. 4.7, *a*. Видно, что зависимости имеют схожий характер и практически идентичны, а наибольшее расхождение составило менее 0,1 дБ на частоте 960 МГц. При этом расхождения между измерениями во всем частотном диапазоне составляют по уровню не более 0,7 дБ, а сдвиг по частоте – не более 50 МГц.

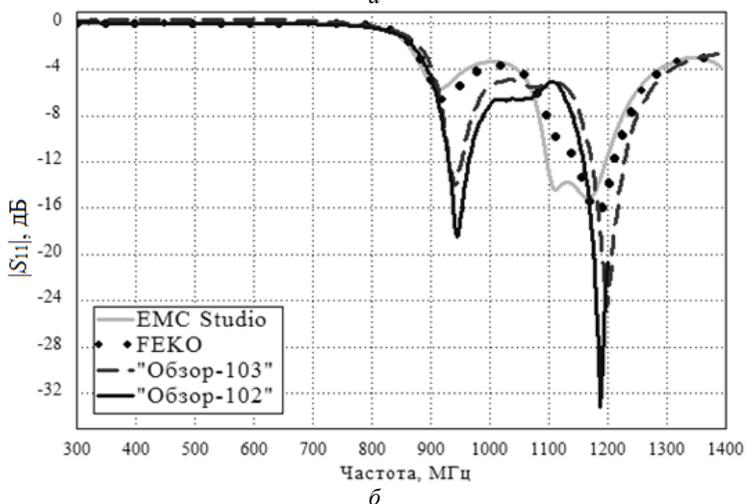
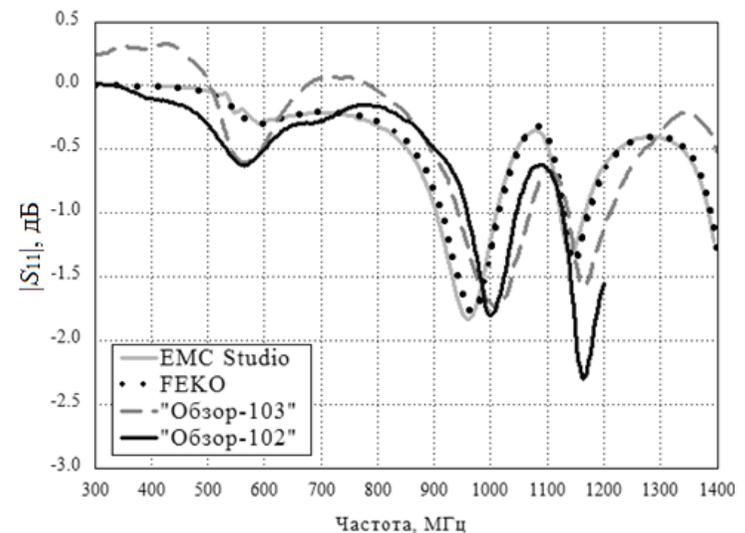


Рис. 4.7 (начало)

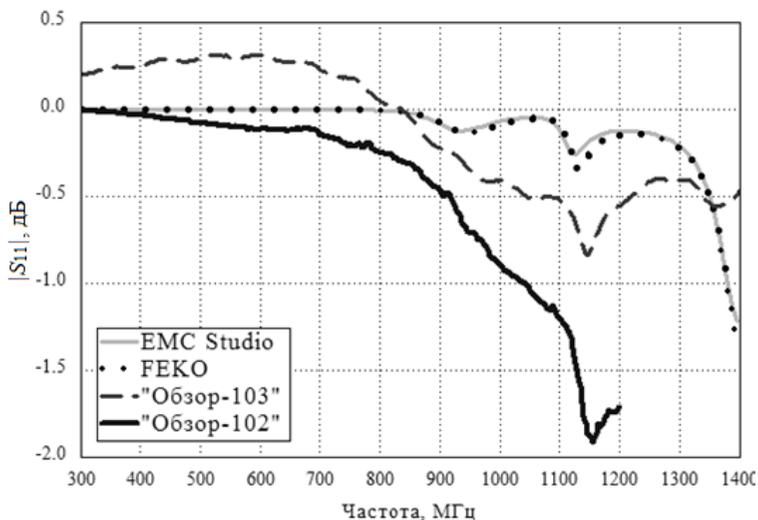


Рис. 4.7 (окончание). Частотные зависимости $|S_{11}|$ НВ
длиной 12 (а), 6 (б) и 3 (в) см

При длине вибратора 6 см и использовании системы FEKO поверхность корпуса была дискретизирована на 10411 треугольников и НВ на 10 сегментов, а EMCos Studio на 5120 треугольников и 10 сегментов соответственно. Полученные зависимости приведены на рис. 4.7, б. Видно, что результаты, полученные в FEKO, визуальное хорошо согласуются с результатами измерений. Для демонстрации влияния качества дискретизации на результаты моделирования, на рис. 4.8, а приведены аналогичные результаты, полученные в FEKO при загрузлении сетки (5126 треугольников).

Видно, что при практически одинаковой дискретизации результаты хорошо согласуются (наибольшее расхождение составляет не более 1 дБ в диапазоне частот от 1100 МГц до 1200 МГц). При учащении дискретизации, в диапазоне частот от 1100 МГц до 1200 МГц наблюдается только один ярко выраженный резонанс (1185 МГц). В то же время общий вид характеристики сдвинулся вверх по частоте в среднем на 50 МГц. Для наглядности на рис. 4.8, б приведен пример грубой дискретизации, а на рис. 4.8, в – учащенной. Таким образом, качество сетки дискретизации оказывает существенное влияние на результаты моделирования. Так, точность метода моментов тем выше, чем меньше размер элементарной площадки, а рассматриваемый корпус БП геометрически сложен, т.к. имеет

большое количество щелей закругленной формы. При этом учащение дискретизации ведет к росту объема требуемой машинной памяти, что необходимо учитывать до начала моделирования.

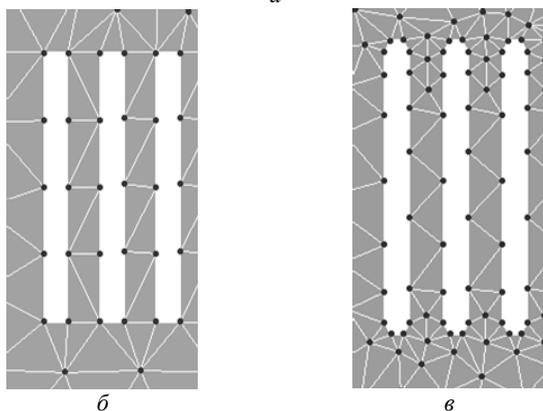
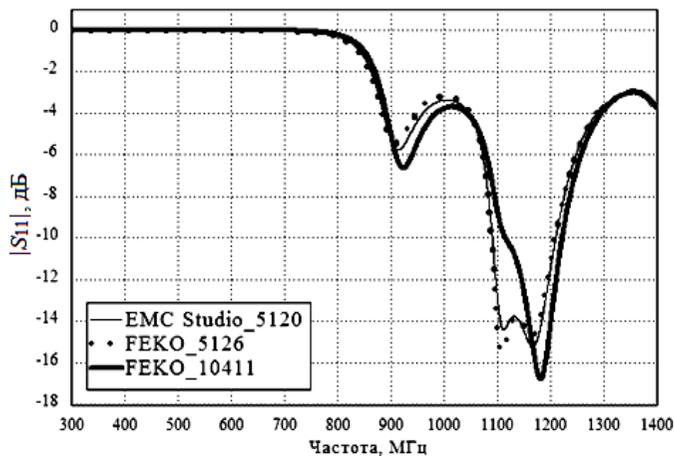


Рис. 4.8. Частотные зависимости $|S_{11}|$ НВ длиной 6 см при грубой и учащенной дискретизациях (а), и фрагменты участков с ними (б, в)

Из результатов измерений (рис. 4.7, б) видно, что на частоте 1185 МГц НВ имеет хорошее согласование с нагрузкой. Данная частота близка к резонансной частоте четвертьволнового вибратора. Результаты моделирования с более грубой дискретизацией идентичны измерениям, однако, наблюдается различие на резонансе (1185 МГц) по уровню на 16 дБ. Результаты моделирования с более

грубой дискретизацией показывают согласование антенны с генератором в полосе 1100–1185 МГц, чего не наблюдается в измерениях.

На рис. 4.7, *в* приведены частотные зависимости при длине НВ 3 см. Результаты дискретизации в FEKO – 10411 треугольника и 10 сегментов, в EMCoS Studio – 5154 треугольника и 6 сегментов. Наибольшее расхождение между результатами моделирования составляет менее 0,1 дБ на частоте 1125 МГц. Изменение характеристик по уровню происходит в узких пределах от 0,5 до –2 дБ, что близко к полному отражению энергии от НВ. Общий вид характеристик, как измерений, так и моделирования имеет схожий характер. Наибольшее расхождение между измерениями, по уровню, составляет 1 дБ на частоте 1150 МГц, а расхождение между моделированием и измерениями около 1,5 дБ.

Одной из возможных причин различий между результатами измерений на приборах «Обзор-102» и «Обзор-103» является то, что они проводились в разных электромагнитных обстановках (лабораториях). Наглядным примером этому являются зависимости, приведенные на рис. 4.7, *а* и *в*. Так, видно, что измеренный модуль коэффициента отражения НВ на приборе «Обзор-103» больше нуля (шкала в дБ). Это означает, что отраженный от нагрузки (в данном случае от НВ) сигнал по амплитуде больше, чем падающий, на нижних частотах исследуемого диапазона, что вызвано внешними наводками на НВ. Сравнение результатов компьютерного моделирования и экспериментов показывает, что общий вид характеристик (число резонансов и значения по уровню) в среднем идентичен. Однако, общая характеристика, в случае компьютерного моделирования является сдвинутой ниже по частоте на 50–100 МГц, относительно характеристики измерений. Возможными причинами отличия являются:

- проведение измерений не в безэховой камере;
- неточность задания размеров корпуса БП при моделировании;
- необходимость более учащенной дискретизации;
- ошибки метода, в данном случае, метода моментов.

Для оценки ошибок метода моментов на рис. 4.9 приведены результаты моделирования при длине НВ 3 см в программных продуктах, использующих метод FDTD: Empire и Semacad-X. Так, видно, что максимальное отклонение 1,5 дБ на частоте 1155 МГц составляет между результатами в Semcad-X и измерениями с помощью прибора «Обзор-102». При использовании «Обзор-103» максимальное отклонение составляет 0,48 дБ на частоте 1100 МГц. Полученные данные наглядно демонстрируют необходимость правильного выбора численного метода, наиболее пригодного для моделирования тех или иных задач.

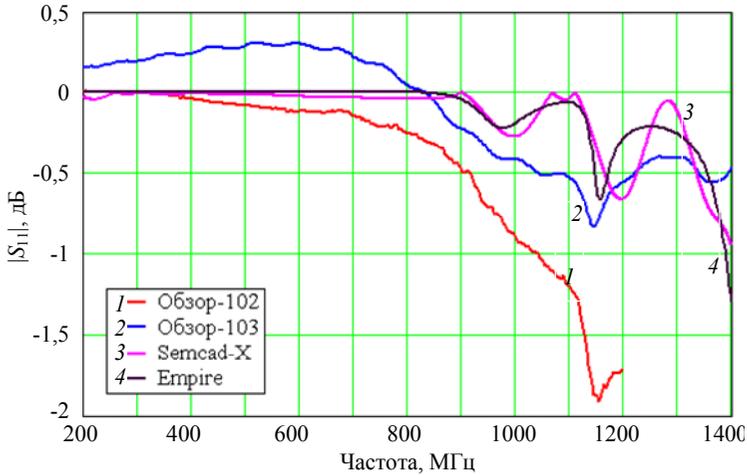


Рис. 4.9. Частотные зависимости $|S_{11}|$ НВ длиной 3 см

4.2. Рекомендации по валидации результатов моделирования

Для подтверждения корректности результатов моделирования разработан специальный стандарт [89], в котором определен процесс проверки (валидации) вычислительных методов, средств компьютерного моделирования и математических моделей, применяемых при решении электромагнитных задач. Стандарт применим к широкому кругу задач: ЭМС, эффективная поверхность рассеяния, целостность сигнала, антенны др. Проверка данных решения достигается путем сравнения с наборами данных, полученными при измерениях, альтернативными программными кодами, аналитическими выражениями и др. Рекомендуемая практика применения этого стандарта описана в [90]. В нем приведены рекомендации по валидации результатов моделирования. Примеры использования данных стандартов приведены, например в [91, 92]. Вопросы расширения функционала метода валидации выделением особенностей (FSV), использование которого является ядром стандарта [89], приведены в [93, 94]. Далее кратко рассмотрены основные положения данного стандарта.

4.2.1. Процесс валидации вычислительного моделирования электромагнетизма

Процесс проверки (валидации) вычислительных моделей результатов моделирования, описанный в стандарте [89], во многом зависит от того, что именно проверяется и какие данные доступны

для подтверждения. Предпочтительной является валидация результатов с помощью известных эталонных решений (external reference). С этой целью в стандарте описаны различные способы выбора таких решений, а также процедура сравнения полученных наборов данных. Если подходящее сравнение не может быть получено, то валидация возможна с использованием схем, основанных на проверке в том же программном продукте при других параметрах – внутренняя проверка (self-referenced). Хотя эти схемы и имеют меньший охват, но они, тем не менее, позволяют достичь высокого уровня точности. Блок-схема, показанная на рис. 4.10, отражает последовательность действий процесса валидации.

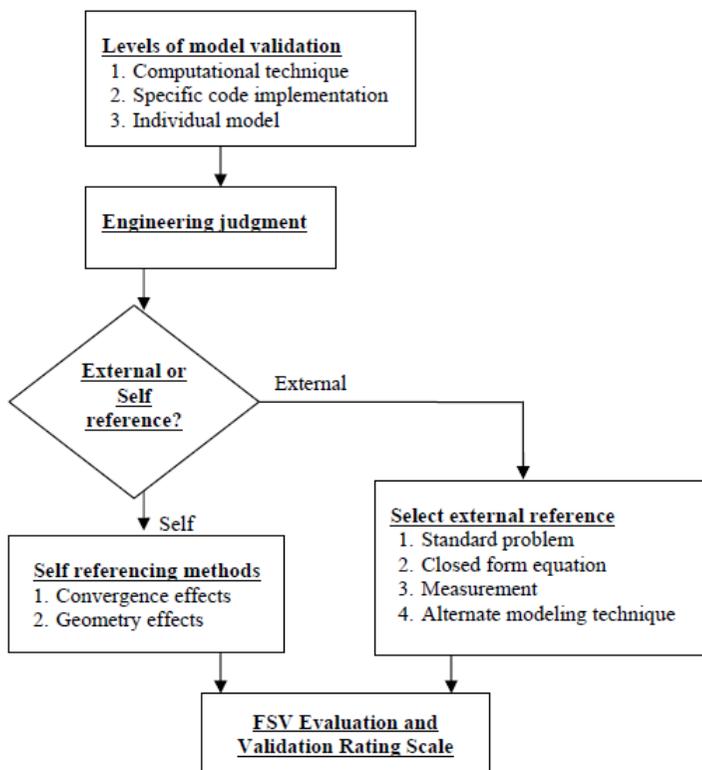


Рис. 4.10. Блок-схема процесса валидации [89]

4.2.2. Уровни валидации модели

Существуют три разных уровня полной валидации модели (levels of model validation). При выборе способа важно учитывать, какого уровня необходимо достичь.

1. Математический уровень: валидация вычислительных методов.
2. Уровень реализации: валидация конкретного программного кода.
3. Уровень модели: валидация конкретной модели.

Первый уровень определяет корректность выбранного вычислительного метода. Второй включает конкретную реализацию кода, а третий – конкретные детали модели. Для полной проверки модели все три уровня должны быть корректными.

Первым уровнем является валидация вычислительного метода. Обычно этот шаг не является необходимым при решении большей части задач электромагнитного моделирования, так как вычислительные методы подвергаются обширной экспериментальной проверке. В том случае, если была разработана новая методика, она должна пройти валидацию, с целью определения ограничений, сильных сторон, а также точности метода. При валидации кода или нового вычислительного метода может потребоваться широкий диапазон моделей для полной проверки.

Второй уровень валидации состоит в обеспечении достоверности программной реализации и получении корректных результатов для определенной модели. Рекомендуется проверять конкретные части кода на примере решения типовых задач, для решения которых они будут использоваться.

Третий уровень валидации предназначен для конкретной модели и является наиболее распространенной проблемой для инженеров. Практически во всех случаях инструменты компьютерного моделирования предоставят очень точный ответ на заданный вопрос. Однако нет никакой гарантии, что был задан правильный «вопрос», т.е. пользователь может непреднамеренно указать источник или какой-либо другой элемент модели, который не является значимым для фактической физической структуры.

4.2.3. Подготовка к валидации с использованием инженерных решений

Перед проведением детального анализа валидации необходимо убедиться, что выбор проверяемой модели является надёжным. Приведенный далее список не является исчерпывающим, т.к. другие проверки могут быть более подходящими для конкретной модели, однако, если какая-либо из проверок применима, временные затраты могут быть сокращены.

Некоторые из методов моделирования (MoM и РЕЕС) вычисляют токи по всей структуре. Поля, определяемые токами, которые навелись при воздействии на неё, обеспечивают существенное понимание валидности вычислительного результата. Просмотр токов

на определенных частотах, особенно вблизи резонанса, позволяет наблюдать картины стоячих волн, поведение в областях щелей (апертур) в металлических поверхностях. Токи не должны быстро меняться в соседних участках или сегментах и должны иметь близкое к нулю значение на концах проводов или пластин. Если эти требования не выполняются, то это указывает на наличие проблем при построении геометрической модели.

При использовании методов моделирования во временной области (FDTD, PEES, TLM) значения полей, токов или напряжений находятся для всей вычислительной области для каждого временного шага. Как правило, конечным результатом является напряженность поля в определенном месте. Однако просмотр полученных значений во всей области вычислений может дать существенное представление о валидности вычислительного результата.

При использовании методов моделирования во временной области (например, FDTD и TLM) необходимо убедиться в корректности заданных граничных условий во всех точках наблюдения, чтобы гарантировать, что поля не отражаются от границ вычислительной области. Наблюдение за конечными результатами поля в какой-то конкретной точке не является гарантией того, что все возможные эффекты были правильно смоделированы.

Методы моделирования во временной области, основанные на токе или напряжении (такие как PEES и TLM), особенно полезны для моделей печатных плат. Можно просмотреть анимацию токов или напряжений, чтобы гарантировать, что сигнал распространяется по требуемому пути и что любые резонансы затухают до определенного значения, и тем самым доказать, что моделирование завершено.

В некоторых случаях для проверки модели могут быть использованы известные величины. Например, значения диаграммы направленности диполя хорошо известны, и если модель похожа на диполь, то результаты моделирования диполя могут дать представление о валидности первичной модели.

Зачастую проверки работоспособности могут быть выполнены на основе математических «граничных условий». Примерами являются проверка симметрии полученного электромагнитного поля в симметричной задаче, проверка согласованности решения поля с уравнениями Максвелла и проверка согласованности полевых решений с производными уравнениями (например, сохранение заряда и энергии).

4.2.4. Эталонное решение или внутренняя проверка

После определения того, какие результаты моделирования подлежат проверке, необходимо выбрать соответствующий подход. Там, где это возможно, будет проведено сравнение полученного решения с эталонным. Решения стандартных проблем доступны для валидации исходных моделей. В тех случаях, когда они недостаточны, эталонное решение может быть получено с помощью выражений в замкнутом виде, измерений или альтернативных методов моделирования. В ситуациях, когда невозможно провести сравнение, необходимо убедиться в точности модели с помощью того же программного продукта при задании других параметров моделирования (внутренняя проверка). К ним относятся оценка сходимости и оценка геометрии задачи. Выбор подходящего подхода имеет решающее значение, поскольку он является основой валидации. Поэтому крайне важно использовать подход, дающий максимально возможную точность.

4.2.4.1. Подход, основанный на решении стандартных задач

В последние годы разработано несколько вариантов валидаций стандартных задач, созданных для того, чтобы помочь инженерам, которые хотят сравнить результаты применения различных инструментов моделирования к конкретным задачам, схожим с типами задач, для решения которых они были созданы. Решения задач известны и могут быть использованы в качестве эталона для проверки модели.

4.2.4.2. Подход, основанный на выражениях в замкнутом виде

Выбор модели, геометрия которой достаточно проста и позволяет использовать выражения в замкнутом виде, должен выполняться с осторожностью. Например, точное моделирование отражений от идеально проводящей сферы может служить хорошим показателем, но не гарантирует, что моделирование отражений от сложного объекта, такого как самолет или танк, даст правильный результат. Кроме того, эти выражения не отражают того, как код будет оценивать эмиссии от печатной платы или вычислять эффективность экранирования. Выражения в замкнутом виде, как правило, являются специализированными и не отражают общую задачу, решение которой представляет интерес для пользователя. Поэтому рекомендации на основании этих выражений должны быть выбраны с осторожностью, чтобы обеспечить их соответствие задачам моделирования.

4.2.4.3. Подход, основанный на результатах измерений

При использовании результатов измерений в качестве основы для валидации необходимо проявлять большую осторожность, чтобы минимизировать погрешность измерений. Например, измерения ан-

тени и эффективной поверхности рассеяния могут быть выполнены с высокой точностью, в то время как при измерении электромагнитных помех могут быть получены погрешности, превышающие 6 дБ. Чтобы свести к минимуму количество ошибок валидации, связанных с использованием результатов измерений, геометрические размеры вычислительной среды должны быть точно представлены в модели, общая точность измерений должна быть соблюдена, должно быть учтено влияние измерительного оборудования.

4.2.4.4. Подход, основанный на использовании альтернативного метода моделирования

Другим популярным подходом к валидации результатов моделирования является моделирование одной и той же проблемы с использованием двух разных методов. Если физические свойства проблемы правильно смоделированы с помощью обоих методов, то результаты должны совпадать. Достижение одинаковых результатов более чем одним методом моделирования для одной и той же задачи может добавить уверенности в валидности результатов.

Существует множество методов полноволнового моделирования. У каждого есть свои сильные стороны, и у каждого есть свои недостатки. Необходимо проявлять осторожность при использовании соответствующих методов моделирования и убедиться, что они различны, чтобы сделать сравнение действенным. Сравнение метода моделирования на основе решения дифференциальных уравнений (FDTD, FEM, TLM) и метода на основе решения интегральных уравнений (MoM, PEEC) предпочтительно из-за различной природы этих подходов.

По самой природе методов полноволнового моделирования часто при моделировании наблюдаются резонансы, объясняющиеся геометрией структуры. Эти резонансы важны для обоснованности результатов моделирования. Чаще всего моделирование практических задач сводится к раздельному моделированию небольших частей объекта из-за ограничений памяти и сложности модели. Эти небольшие модели также имеют резонансы, которые не имеют отношения к резонансам объекта в целом. Результаты, основанные на этих резонансах, часто вводят в заблуждение, поскольку резонанс не обусловлен изучаемым явлением, а скорее обусловлен размерами разделенной модели. Поэтому следует проявлять осторожность при оценке валидности модели несколькими методами.

4.2.5. Внутренняя проверка модели

Если модель не может быть проверена с помощью эталонного решения, то должна быть применена внутренняя проверка. Это менее надежный метод, из-за возможного сохранения ошибки в исход-

ной модели, поэтому он должен использоваться только в тех случаях, когда сравнение с эталонным решением невозможно.

Вторичные модели создаются с помощью тех же подходов, что и первичные, и используются в качестве основы для проверки первичных моделей. Требуется создать, по меньшей мере, два варианта вторичных моделей, однако не исключена необходимость создания дополнительных моделей с целью более точного выявления источников ошибок. Существуют два вида изменений, которые могут быть внесены в параметры первичной модели, чтобы создать валидные вторичные модели. Изменения не должны существенно влиять на результат и должны иметь известное воздействие на решение. Параметры оценки сходимости решения: сетка, сегмент или размер ячейки; вычислительная область; абсорбирующие граничные условия. Параметры оценки изменения геометрии: размер апертур; количество апертур; размещение компонентов на печатных платах. Результаты, полученные с помощью первичной и вторичных моделей сравниваются с использованием метода FSV.

Существует ряд параметров модели, которые должны быть определены до того, как будет выполнено фактическое моделирование. Размер сетки или ячейки часто устанавливается не более чем одна десятая длины волны, исходя из предположения о том, что токи или поля постоянны внутри них. Однако этот размер может быть недостаточно мал, чтобы правильно зафиксировать изменение тока или поля, если их амплитуда быстро изменяется на структуре. Изменение размера сетки или ячейки является хорошим способом обеспечения их правильного размера. Если размер сетки или ячейки правильный, окончательные результаты моделирования не изменяются. Однако, если результаты изменяются при изменении размера сетки или ячейки, то использован неправильный размер.

При использовании объемных методов (FDTD, FEM, TLM) может варьироваться размер области вычислений. Вариация области вычислений может обеспечить отсутствие ложных сигналов и эффекта усечения сетки возле поглощающих границ, которые влияют на физическую модель. Конечный результат не должен зависеть от размера области вычисления или расстояния между физической моделью и поглощающими границами.

Полезно использовать изменения в исходных моделях для оценки конкретных изменений в решении. Модели обычно содержат ряд параметров, влияющих на результат. Размер апертур, их количество и размещение компонентов на печатных платах могут влиять на конечный результат моделирования. Во многих случаях последствия

изменения параметра можно предсказать из опыта, хотя количественное изменение может быть заранее неизвестно.

4.2.6. Численный расчет рейтинга валидации с использованием метода FSV

После выбора подхода для валидации, необходимо использовать метод для её оценки. Метод FSV используется для определения соответствия между эталонным решением и полученными результатами моделирования.

В прошлом для сравнения двух наборов данных использовались различные методы. Простое вычитание одного набора данных из второго показывает разницу между значениями, но ограничено в качестве индикатора согласования набора данных, в случае если существует небольшое смещение между наборами данных. Подобным образом была использована взаимная корреляция, однако её результаты трудно сопоставимы с результатами визуальной проверки наборов данных, выполненной человеком.

FSV – метод, сочетающий в себе сравнение на основе амплитуд с сравнением, основанным на характеристиках, чтобы дать общее представление о согласованности двух наборов данных. FSV был откалиброван, чтобы соответствовать решениям эксперта, которые несколько субъективны, и ранжировать согласованность по уровням: «отлично», «очень хорошо», «хорошо», «плохо» и т.д. Метод FSV используется для количественной оценки сопоставления наборов данных для валидации. Результат применения метода состоит в нахождении глобальной меры различия (global difference measure, GDM). Дополнительные уровни детализации метода FSV могут быть применены, чтобы помочь в сравнении и понимании любого несоответствия между наборами данных.

Опытные профессионалы могут посмотреть на данные, представленные на рис. 4.11, и решить, что два набора имеют «хорошую» или «нормальную» согласованность в зависимости от их ожиданий. FSV позволяет объективно выполнить сравнение, удаляя элемент субъективности из процесса принятия решений.

Основой метода FSV является декомпозиция результатов сравнения на две «составные» меры, а затем рекомбинация результатов, с целью получения глобальной степени соответствия. В методе задействована мера разности амплитуд (ADM), которая сравнивает амплитуды и характер изменения двух наборов данных, и мера разности особенностей (FDM), которая сравнивает быстро меняющиеся параметры (как функции независимых переменных). После этого методы ADM и FDM объединяются для формирования GDM. Вели-

чины ADM, FDM и GDM можно использовать в качестве инструментов для детального анализа или как единого общего измерения.

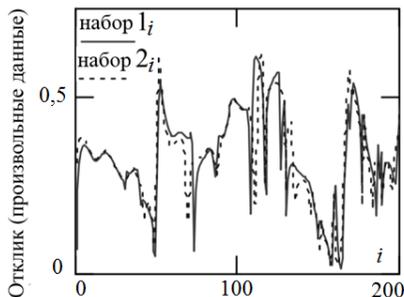


Рис. 4.11. Пример сравнения двух наборов данных

Шкала оценки валидации (VRS) устанавливает метод сравнительного анализа, позволяющий проводить «визуальные» сравнения между экспериментальными и моделируемыми данными (или любыми двумя наборами данных). Этот метод основан на общей количественной оценке подобию. Цель VRS двояка: во-первых, она позволяет отдельным лицам или группам экспертов визуально оценивать сравнение с помощью общей системы отсчета. Это особенно полезно для проверки согласованности между результатами FSV и визуальной оценкой. Во-вторых, она позволяет перевести результаты FSV на визуальную основу.

ГЛАВА 5 КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

5.1. Основы решения

Решение уравнений Максвелла позволяет получить решение для системы любой сложности, но это, как правило, сопровождается значительными вычислительными затратами. Поэтому на практике часто используют мощные вычислительные кластеры (вычислительные центры, суперкомпьютеры) или прибегают к различного рода упрощениям, одним из которых является использование квазистатического подхода. Данный подход (также называемый ТЕМ-аппроксимацией) применяют когда поперечные размеры рассматриваемой системы (структуры) малы по сравнению с длиной распространяющейся электромагнитной волны [95]. Так, например, в большинстве линий передачи распространяются поперечные ТЕМ- или квази-ТЕМ-волны, где электрические и магнитные поля перпендикулярны (или «почти» перпендикулярны) к направлению распространения. Такой подход позволяет упростить уравнения Максвелла, в частности пренебречь током смещения в законе полного тока Ампера. В результате требуется решение не уравнений Максвелла, а уравнения Пуассона/Лапласа.

Квазистатический подход получил широкое распространение при математическом моделировании линий передачи, в общем случае, многопроводных. Частным их случаем являются различные плосковые структуры, которые широко используются для создания элементов радиотехнических устройств: печатных плат, фильтров [96], средств снижения уровня перекрестных помех [97–99] или их компенсации [100], устройств защиты [101], фазовращателей [102], антенн [103], линий задержки [104] и др.

При квазистатическом подходе электрические характеристики линий передачи характеризуются матрицами погонной ёмкости, индуктивности, сопротивления и проводимости. В случае не учета потерь в проводниках и диэлектриках, из которых состоит линия передачи, вычисляются только первые две матрицы. Для их нахождения используется уравнение Пуассона (дифференциальная форма)

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0,$$

где φ – электростатический потенциал, а ρ – объемная плотность заряда. При отсутствии в анализируемой области свободных зарядов данное уравнение сводится к уравнению Лапласа. Решение данных уравнений, тем или иным численным методом, позволяет определить

требуемые матрицы погонных параметров линии передачи, используемые в дальнейшем для анализа целостности сигналов, получения временного отклика [105] и других параметров [106].

При одновариантном анализе, как упоминалось ранее, построение математической модели состоит из нескольких взаимосвязанных этапов, наиболее затратным из которых является решение СЛАУ. При использовании метода моментов матрица СЛАУ является плотной и несимметричной, поэтому для решения СЛАУ зачастую используются прямые методы, такие как метод Гаусса или его модифицированная версия, основанная на LU-разложении.

В настоящее время совершенствование прямых методов является основным направлением в прикладных и академических исследованиях. Так, например, представлены результаты исследования уменьшения затрат времени и энергии на параллельную реализацию разложения Холецкого и LU-разложения на основе гибридного использования центрального и графического процессоров [107]. Представлены три варианта параллельной реализации алгоритма LU-разложения для проведения вычислений на многоядерном процессоре с использованием инструкций OpenMP [108]. Приведены результаты разработки, программной реализации и оптимизации матричных операций, входящих в блочную версию LU-разложения и показано значительное (до 2 раз) ускорение разложения матриц разного порядка [109]. Показано ускорение на 60% от применения параллельных вычислений для матричных операций на графическом процессоре, а также ускорение на 80–90% разложений Холецкого, LU- и QR- [110]. Представлены результаты разработки и тестирования масштабируемых библиотек линейной алгебры для эффективного использования алгоритма LU-разложения на многопоточных архитектурах рабочих станций [111]. Рассмотрены разные алгоритмы прямого решения СЛАУ (LU-разложение, сжатое блочное разложение и их многоуровневые реализации) применительно к методу моментов [112]. Предложен гибридный метод LU-разложения, основанный на работе с блочными структурами, для решения СЛАУ, полученных методом моментов [113]. Он основан на новом подходе к преобразованию матрицы СЛАУ при вычислении элементов матриц L и U , совместно с оптимальным распределением нагрузки между центральным и графическим процессорами.

Часто необходим многовариантный анализ рассматриваемой полосковой структуры в диапазоне изменения её параметров с целью получения набора параметров, используемых для дальнейшего моделирования. В этом случае, временные затраты многократно воз-

растают из-за необходимости решения серии СЛАУ. При этом наиболее перспективным видится поиск путей алгоритмического решения данной проблемы, в частности, за счет использования итерационных методов или модификации прямых методов, с учетом специфики решаемой задачи. Так, выполнен обзор и ряд исследований по уменьшению затрат времени на многократное итерационное решение СЛАУ, возникающих при анализе полосковых структур, где показана перспективность данного подхода [114–116].

Далее приведены математическая модель, её совершенствование и вычислительные алгоритмы для получения матриц погонных параметров многопроводных линий передачи с помощью метода моментов. Предлагаемые совершенствования затрагивают самый вычислительно затратный этап построения математической модели – решение СЛАУ.

Волновое сопротивление линии передачи без потерь определяется как

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (5.1)$$

где L – погонная индуктивность; C – погонная ёмкость. При этом фазовая скорость равна

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.2)$$

При удалении из рассматриваемой структуры диэлектрика (замена его на воздух) волновое сопротивление и фазовая скорость вычисляется как

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C_0}}, \quad (5.3)$$

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad (5.4)$$

где C_0 – погонная емкость структуры без диэлектрика, а $u_0 = c$ – скорость света в свободном пространстве. Комбинируя выражения (5.1)–(5.4), получим

$$Z = \frac{1}{u_0 \sqrt{CC_0}} = \frac{1}{uC}, \quad (5.5)$$

$$u = u_0 \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{u_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{reff}}}}, \quad (5.6)$$

$$\epsilon_{\text{reff}} = \frac{C}{C_0}, \quad (5.7)$$

где ϵ_{eff} – эффективная относительная диэлектрическая проницаемость.

Таким образом, для нахождения волнового сопротивления и фазовой скорости для рассматриваемой структуры с неоднородным диэлектрическим заполнением необходимо нахождение погонной емкости с диэлектрическим заполнением C и без него (без границ диэлектрик-диэлектрик) C_0 . Для нахождения индуктивности можно воспользоваться выражением

$$L = \mu_0 \epsilon_0 C_0^{-1}. \quad (5.8)$$

В случае простых конфигураций линии можно воспользоваться известными аналитическими выражениями [117]. Для сложных и многопроводных линий такие выражения отсутствуют и необходимо прибегать к помощи численных методов. В общем случае, величины L и C в приведенных выражениях являются матрицами, называемыми матрицами погонных коэффициентов электростатической (C) и электромагнитной (L) индукции. Также матрицу C часто называют ёмкостной матрицей Максвелла [118], узловой ёмкостной матрицей [119] и погонной ёмкостной матрицей [120] (для краткости далее просто ёмкостная матрица). Поясним особенности вычисления ёмкостной матрицы C на примере трехпроводной линии передачи, поперечное сечение которой приведено на рис. 5.1.

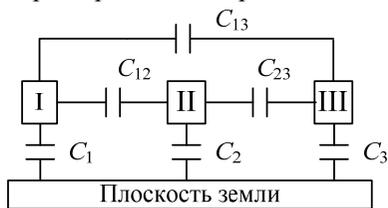


Рис. 5.1. Трехпроводная линия передачи

Рассмотрим задачу нахождения погонных зарядов (Q) при известных потенциалах на них. На практике часто потенциал опорного проводника (плоскости земли), устанавливается равным 0 В. Разности потенциалов между проводниками и ним обозначим через V_1 , V_2 и V_3 , а между проводниками – V_{12} , V_{13} и V_{23} . Тогда

$$\begin{aligned} Q_I &= C_{11}V_1 + C_{12}V_{12} + C_{13}V_{13}, \\ Q_{II} &= C_{21}V_{12} + C_{22}V_2 + C_{23}V_{23}, \\ Q_{III} &= C_{31}V_{13} + C_{32}V_{23} + C_{33}V_3. \end{aligned}$$

Перепишем данную систему уравнений в следующем виде:

$$\underline{Q}_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) = (C_{11} + C_{12} + C_{13})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3,$$

$Q_{II} = C_{21}(V_2 - V_1) + C_2 V_2 + C_{23}(V_2 - V_3) = -C_{21}V_1 + (C_2 + C_{21} + C_{23})V_2 - C_{23}V_3,$
 $Q_{III} = C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) + C_3 V_3 = -C_{31}V_1 - C_{32}V_2 + (C_3 + C_{31} + C_{32})V_3,$
 или в матричном виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} \mathbf{V},$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 + C_{12} + C_{13} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{21} & C_2 + C_{21} + C_{23} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_3 + C_{31} + C_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} \\ \underline{C}_{31} & \underline{C}_{32} & \underline{C}_{33} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты \underline{C}_{ij} называются коэффициентами электростатической индукции – собственными при одинаковых индексах и взаимными при разных индексах и имеют размерность погонной емкости. Несмотря на отрицательный знак у внедиагональных элементов матрицы \mathbf{C} , ёмкость между отдельным проводником и плоскостью земли положительна.

5.2. Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы методом конечных разностей

Метод конечных разностей (FDM, МКР) впервые был разработан А. Томом в 1920 г. под названием «Метод квадратов» для решения нелинейных уравнений гидродинамики. С тех пор метод нашел применение в решении проблем различных областей. Методы конечных разностей основаны на аппроксимациях, которые позволяют заменять дифференциальные уравнения уравнениями конечных разностей. Эти разностные уравнения имеют алгебраический вид. Они ставят в соответствие значению зависимой переменной в точке расчетной области значение в некоторой соседней точке. Таким образом, решение методом конечных разностей, в основном, состоит из трех этапов: разделение области решения на сетку узлов; аппроксимация данного дифференциального уравнения разностным эквивалентом; решение разностных уравнений с учетом заданных граничных условий и/или начальных условий. Таким образом, в основе МКР лежит аппроксимация производных функций одной или нескольких переменных значениями этой функции в дискретном множестве значений аргументов (узлах). Совокупность узлов образует сетку, покрывающую расчетную область. Далее для ясности кратко приведем особенности конечно-разностной аппроксимации [16] и рассмотрим способы повышения точности вычислений [121], а затем подробно опишем процесс вычисления ёмкостной матрицы [29].

5.2.1. Конечно-разностная аппроксимация

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (x_0-h_1, x_0+h_2) и имеет производную в точке B ($x = x_0$), равную тангенсу угла наклона касательной DE в этой точке (рис. 5.2). Таким образом, существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'_{FD}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таким образом, её можно вычислить в близко расположенной точке, например в точке C . Тогда $\Delta x = h_2$ и

$$f'_{FD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2}.$$

Это, так называемая, правая или правосторонняя конечно-разностная формула (в англоязычной литературе её часто называют forward-difference). Вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} f''_{FD}(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + \frac{3}{2}h_2) - f'(x_0 + \frac{1}{2}h_2)}{h_2} = \\ &= \frac{1}{h_2} \left[\frac{f(x_0 + 2h_2) - f(x_0 + h_2)}{h_2} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} \right] = \\ &= \frac{f(x_0 + 2h_2) - 2f(x_0 + h_2) + f(x_0)}{h_2^2}. \end{aligned}$$

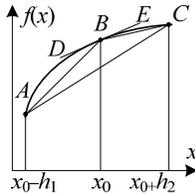


Рис. 5.2. Аппроксимация производной конечными разностями

С тем же успехом можно использовать левую или левостороннюю формулу (backward-difference).

$$f'_{BD}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.$$

Тогда в точке A ($x = x_0 - h_1$) получим

$$f'_{BD}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h_1)}{h_1}. \quad (5.9)$$

Расстояние между точками, в которых вычисляются значения функции, называется шагом сетки (поэтому метод конечных разностей также называют методом сеток). В данном случае шаги отличаются по значению, т.е. используется неравномерная сетка. Вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} f''_{BD}(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 - \frac{1}{2}h_1) - f'(x_0 - \frac{3}{2}h_1)}{h_1} = \\ &= \frac{1}{h_1} \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - h_1)}{h_1} - \frac{f(x_0 - h_1) - f(x_0 - 2h_1)}{h_1} \right] = \\ &= \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h_1) + f(x_0 - 2h_1)}{h_1^2}. \end{aligned}$$

Еще одним возможным вариантом является использование центральной или двусторонней разностной формулы (central-difference):

$$f'_{CD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1)}{h_1 + h_2}.$$

Последняя формула дает более точное, чем предыдущие, решение, поскольку значение производной равно тангенсу угла наклона хорды AC , что ближе к точному решению.

При $h_2 = h_1 = h$ получим

$$f'_{CD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (5.10)$$

Далее, используя центральные разности и полагая, что $h_2 = h_1 = h$, вычислим вторую производную

$$\begin{aligned} f''_{CD}(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + h/2) - f'(x_0 - h/2)}{h} = \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right] \end{aligned}$$

и в итоге получим

$$f''_{CD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \quad (5.11)$$

Эта формула называется второй разностной производной. В ней точка, в которой аппроксимируется производная, центральная среди точек, вовлеченных в аппроксимацию. Зависимость этой производной от значений функции $f(x)$ в точках, используемых для аппроксимации, часто иллюстрируется «шаблоном» или «молекулой», как показано на рис. 5.3.



Рис. 5.3. Трехточечный шаблон для второй разностной производной (одномерный случай)

Стоит отметить важность правосторонних и левосторонних разностей. Так, на рис. 5.4 схематично показана ситуация когда не применимы ни левосторонние, ни центральные разности, поскольку для их использования необходимо знание значения функции в точке x_{-1} (x_0-h).

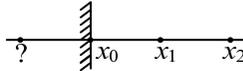


Рис. 5.4. Случай применимости только правосторонних разностей

Оценим количественно ошибку конечно-разностных аппроксимаций. Её можно получить, используя разложение функции в ряд Тейлора:

$$FD: f(x_0 + h_2) = f(x_0) + h_2 f'(x_0) + \frac{1}{2!} h_2^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} h_2^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (5.12)$$

$$BD: f(x_0 - h_1) = f(x_0) - h_1 f'(x_0) + \frac{1}{2!} h_1^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} h_1^3 f'''(x_0) + \dots \quad (5.13)$$

Видно, что формулы (5.12) и (5.13) имеют погрешность порядка $h_{1,2}$ (записывается как $O(h_{1,2})$), возникающую за счет отбрасывания высших членов ряда Тейлора. Вычитая (5.13) из (5.12), получим

$$f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1) = (h_2 + h_1) f'(x_0) + \frac{1}{2!} (h_2^2 - h_1^2) f''(x_0) + O(h^3). \quad (5.14)$$

Поделив левую и правую части выражения (5.14) на $h_2 + h_1$, получим

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1)}{h_2 + h_1} + O(h_2 - h_1), \quad (5.15)$$

т.е. формулу, которая также имеет первый порядок погрешности. Однако, если $h_1 = h_2 = h$, в формуле (5.14) исчезает член, содержащий вторую производную, и тогда получим формулу

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2), \quad (5.16)$$

имеющую погрешность $O(h^2)$. Сложив (5.13) и (5.12) получим

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + O(h^4). \quad (5.17)$$

Поделив это выражение на h^2 , получим (5.11), погрешность которой имеет порядок $O(h^2)$.

Таким образом, погрешность конечно-разностных формул определяется значением шага h . Чем оно меньше, тем формула точнее. Однако при неограниченном уменьшении шага погрешность вычисления производных начинает увеличиваться из-за того, что при уменьшении шага разность между значениями функции в соседних узлах сетки уменьшается, что приводит к возрастанию влияния ошибок округления. Типовая зависимость погрешности конечно-разностной формулы от шага сетки показана на рис. 5.5.

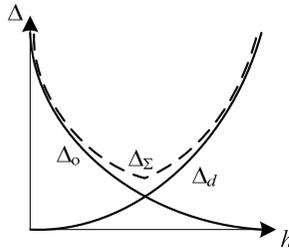


Рис. 5.5. Зависимость погрешности конечно-разностной аппроксимации от шага сетки (Δ_d – погрешность, вызванная отбрасыванием высших членов ряда Тейлора; Δ_0 – погрешность, вызванная конечной точностью представления чисел; Δ_Σ – суммарная погрешность)

5.2.2. Повышение точности вычислений

Рассмотрим способы повышения точности. Сначала используем трехточечный шаблон и правосторонние разности. Для этого потребуется три точки: $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$. Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции в этих точках

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + O(h^3),$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + O(h^3).$$

Вычитая второе уравнение из первого, умноженного на 4, в результате получим выражение для FD производной

$$f'_{FD}(x_0) = \frac{4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) - 3f(x_0)}{2h}. \quad (5.18)$$

При использовании трехточечного шаблона и левосторонних разностей получим:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + O(h^3),$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + O(h^3).$$

Также вычтем второе уравнение из первого, умноженного на 4:

$$4f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h) = 3f(x_0) - 2hf'(x_0) + O(h^3).$$

В результате получим выражение для BD

$$f'_{BD}(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h},$$

производной с погрешностью $O(h^2)$.

Применим пятиточечный шаблон (центральные разности). Для этого потребуется пять точек: $x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$. Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции в этих точках:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4),$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4),$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4}{2!}h^2f''(x_0) + \frac{8}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4),$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{4}{2!}h^2f''(x_0) - \frac{8}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4).$$

Вычитая второе уравнение из первого и четвертое из третьего, получим

$$S_h: f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{3}h^3f'''(x_0) + O(h^4),$$

$$S_{2h}: f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8}{3}h^3f'''(x_0) + O(h^4).$$

Для исключения $f'''(x_0)$ вычислим $8S_h - S_{2h}$:

$$8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h) = 12hf'(x_0) + O(h^4).$$

В результате получим первую производную

$$f'_{CD}(x_0) = \frac{8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h)}{12h}, \quad (5.19)$$

погрешность которой имеет порядок $O(h^4)$.

Для нахождения второй производной запишем

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{8}f'''(x_0) + \\ &+ \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6), \end{aligned}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + O(h^6),$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4h^3}{3} f'''(x_0) + \\ + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(x_0) + \frac{32h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + O(h^6),$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4h^3}{3} f'''(x_0) + \\ + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(x_0) - \frac{32h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + O(h^6).$$

Сложив первое уравнение со вторым и третье с четвертым, получим

$$S_h: f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_0) + O(h^6),$$

$$S_{2h}: f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) = f(x_0) + 4h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3} h^2 f^{(4)}(x_0) + O(h^6).$$

Для исключения $f^{(4)}(x_0)$ вычислим $S_h - S_{2h}/16$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h) = \\ = \frac{15}{8} f(x_0) + \frac{3}{4} h^2 f''(x_0) + O(h^6).$$

В результате получим

$$f''_{CD}(x_0) = \frac{-f(x_0 - 2h) + 16f(x_0 - h) - 30f(x_0) + 16f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h^2}, \quad (5.20)$$

погрешность которой имеет порядок $O(h^4)$.

5.2.3. Двухмерное уравнение Лапласа: однородный диэлектрик

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при реализации конечно-разностного метода – это вывод конечно-разностных уравнений в исследуемой пространственной области из соответствующего дифференциального уравнения в частных производных. В случае, когда для анализа линии передачи используется уравнение Лапласа, распределение потенциала ищется в ограниченной области, которая разбивается координатными линиями на некоторое число элементарных ячеек. Каждая точка пересечения двух

линий, являющихся сторонами ячейки, образует узел. Значения потенциала в узловых точках и являются искомыми величинами.

В двумерном случае простейшая равномерная сетка соответствует декартовой системе координат и состоит из прямоугольных ячеек. Из каждого узла сетки, двигаясь вдоль сторон ячеек, можно попасть в четыре соседних узла (рис. 5.6, а). Такая сетка называется пятиточечной. Если бы рассматривалась трехмерная задача, то при движении по сетке из каждого узла можно было бы попасть в шесть соседних. В этом случае сетка семиточечная.

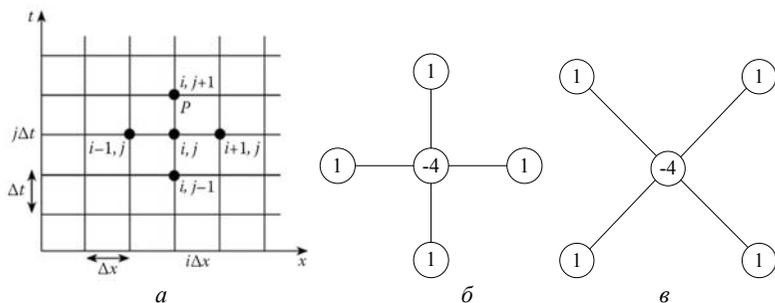


Рис. 5.6. Двумерная конечно-разностная сетка (а), стандартный (б) и косой (в) двумерные шаблоны для решения уравнения Лапласа

Применим конечно-разностный подход, чтобы найти решение функции Φ , зависящей от двух пространственных переменных x и t (уравнение Лапласа):

$$(\partial^2 \Phi / \partial x^2) + (\partial^2 \Phi / \partial t^2) = 0. \quad (5.21)$$

Разделим область решения в плоскостях x и t на равные прямоугольники, как показано на рис. 5.6, а. Обозначим координаты узлов по x и t как

$$x = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, \quad t = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots$$

и значение функции в некоторой точке P как

$$\Phi_P = \Phi(i\Delta x, j\Delta t) = \Phi(i, j).$$

Тогда, используя (5.10) и (5.11), получим производные функции Φ в узле (i, j)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_t |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{xx} |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i+1,j) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Phi_{tt} |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i,j+1) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i,j-1)}{(\Delta t)^2}.$$

Подставляя полученные выражения в (5.21), получим конечно-разностное представление

$$\frac{\Phi(i+1,j) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i-1,j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi(i,j+1) - 2\Phi(i,j) + \Phi(i,j-1)}{(\Delta t)^2} = 0.$$

Полагая $\Delta x = \Delta t = h$ получим

$$\Phi(i,j) = \frac{1}{4} [\Phi(i+1,j) + \Phi(i-1,j) + \Phi(i,j+1) + \Phi(i,j-1)]. \quad (5.22)$$

Данное приближение называется пятиточечным центральным приближением лапласиана. Его шаблон (вычислительная молекула) приведен на рис. 5.6, б (в отечественной литературе – пятиточечный шаблон «крест»).

Другое приближение можно получить с помощью четырех точек $(x \pm \Delta, t \pm \Delta)$, расположенных на двух диагоналях. Эти точки используются таким же образом, как для первого приближения, с тем отличием, что изменился шаг сетки (расстояние между узловыми точками равно $\sqrt{2}h$). Соответствующий шаблон приведен на рис. 5.6, в (в отечественной литературе – пятиточечный диагональный шаблон). Конечный вид для решаемого уравнения Лапласа примет вид

$$\Phi(i+1,j+1) + \Phi(i+1,j-1) + \Phi(i-1,j+1) + \Phi(i-1,j-1) = 4\Phi(i,j).$$

Если комбинировать эти два пятиточечных шаблона, то можно получить девятиточечные шаблоны. Для этого удобно воспользоваться выражением (S_+ – стандартный и S_* – косой шаблоны)

$$\alpha S_+ = (1 - \alpha S_*). \quad (5.23)$$

Записав α в виде рационального числа a/b , при использовании пятиточечных шаблонов лапласиан $(\Delta\Phi)$ можно записать в виде

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2bh^2} [2a\Phi(i+1,j) + 2a\Phi(i-1,j) + 2a\Phi(i,j+1) + 2a\Phi(i,j-1) + (b-a)\Phi(i+1,j+1) + (b-a)\Phi(i+1,j-1) + (b-a)\Phi(i-1,j+1) + (b-a)\Phi(i-1,j-1) - 4(a+b)\Phi(i,j)].$$

Видно, что при $b = a = 1$ получим стандартный пятиточечный шаблон. При $a = 1/2$ и $b = 3/2$, $a = 1$ и $b = 2$, $a = 2$ и $b = 3$ получим ряд девятиточечных шаблонов с коэффициентами 8, 12 и 20 соответ-

венно (в отечественной литературе их называют шаблонами типа «ящик»):

$$\frac{1}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, с использованием выражения (5.20), получим стандартный (в отечественной литературе иногда называется «большим крестом»)

$$\frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$$

и диагональный

$$\frac{1}{24h^2} \begin{bmatrix} -1 & & & & -1 \\ & 16 & & & \\ & & -60 & & \\ & & & 16 & \\ -1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

девятиточечные шаблоны.

Комбинируя эти два шаблона с помощью выражения (5.23), получим общее выражение для семнадцатиточечных шаблонов:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & \frac{1}{24bh^2} [-2a\Phi(i-2, j) + 32a\Phi(i-1, j) + 32a\Phi(i+1, j) - 2a\Phi(i+2, j) - \\ & - 2a\Phi(i, j-2) + 32a\Phi(i, j-1) + 32a\Phi(i, j+1) - 2a\Phi(i, j+2) - \\ & - (b-a)\Phi(i-2, j-2) + 16(b-a)\Phi(i-1, j-1) + \\ & + 16(b-a)\Phi(i+1, j+1) - (b-a)\Phi(i+2, j+2) - \\ & - (b-a)\Phi(i-2, j+2) + 16(b-a)\Phi(i-1, j+1) + \\ & + 16(b-a)\Phi(i+1, j-1) - (b-a)\Phi(i+2, j-2) - 60(a+b)\Phi(i, j)]. \end{aligned}$$

Так, при $a = b = 1$, получим стандартный девятиточечный шаблон, а при $a = 1$ и $b = 2$, получим

$$\frac{1}{48h^2} \begin{bmatrix} -1 & & -2 & & -1 \\ & 16 & 32 & 16 & \\ -2 & 32 & -180 & 32 & -2 \\ & 16 & 32 & 16 & \\ -1 & & -2 & & -1 \end{bmatrix}.$$

Вернемся к решению уравнения Лапласа (5.21) при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, и найдем распределение потенциала в прямоугольной области, ограниченной идеально проводящими электродами (рис. 5.7, а). Вы-

числительная модель с указанием используемых значений потенциалов и узлов сетки приведена на рис. 5.7, б. Используем пятиточечный шаблон, описываемый уравнением (5.22) и $h = 1/3$, а также итерационный метод для нахождения значений потенциала в узлах 1–4. Так, при использовании метода Якоби уравнение (5.22) примет вид

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \frac{1}{4} [\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n)} + \Phi(i, j+1)^{(n)} + \Phi(i, j-1)^{(n)}],$$

где верхний индекс обозначает номер итерации. При использовании метода Гаусса–Зейделя (при организации вычислений по строкам) уравнению (5.22) соответствует

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \frac{1}{4} [\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n+1)} + \Phi(i, j+1)^{(n+1)} + \Phi(i, j-1)^{(n)}],$$

а метода релаксации –

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \Phi(i, j)^{(n)} + \frac{R}{4} [\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n+1)} + \Phi(i, j+1)^{(n+1)} + \Phi(i, j-1)^{(n)} - \Phi(i, j)^{(n)}],$$

где R – параметр релаксации. При $R = 1$ получим метод Гаусса–Зейделя, при $R > 1$ – метод последовательной верхней релаксации, а при $R < 1$ – метод последовательной нижней релаксации. Далее используем метод Гаусса–Зейделя.

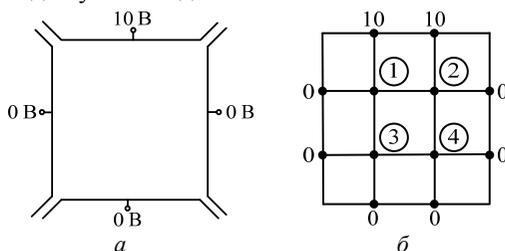


Рис. 5.7. К примеру решения конечно-разностных уравнений: физическая модель (а) и вычислительная модель (б)

Положив потенциал во всех внутренних узлах (1–4) равным нулю ($\Phi_{ij} = 0$), с помощью (5.22) получим «новые» значения в них за 10 итераций:

| | | |
|-----------------|---|--|
| Первая итерация | $(1/4)(0+0+10+0)=2,5$ $(1/4)(0+0+2,5+0)=0,625$ | $(1/4)(0+2,5+10+0)=3,125$ $(1/4)(0+0,625+3,125+0)=0,9375$ |
| Вторая итерация | 3,4375 1,09375 | 3,59375 1,171875 |
| Третья итерация | 3,671875 1,2109375 | 3,7109375 1,23046875 |

| | | |
|--------------------|---|---|
| Четвертая итерация | 3,73046875 1,240234375 | 3,740234375 1,2451171875 |
| Пятая итерация | 3,7451171875 1,24755859375 | 3,74755859375 1,248779296875 |
| Шестая итерация | 3,748779296875 1,2493896484375 | 3,7493896484375 1,24969482421875 |
| Седьмая итерация | 3,74969482421875 1,249847412109375 | 3,749847412109375 1,2499237060546875 |
| Восьмая итерация | 3,7499237060546875 1,24996185302734375 | 3,74996185302734375 1,249980926513671875 |
| Девятая итерация | 3,749980926513671875 1,2499904632568359375 | 3,7499904632568359375 1,24999523162841796875 |
| Десятая итерация | 3,74999523162841796875 1,249997615814208984375 | 3,749997615814208984375 1,2499988079071044921875 |

Видно, что с каждой итерацией значения потенциала в каждом узле постепенно сближаются, так как разность между ними уменьшается. Еще раз отметим (рис. 5.5), что все расчеты проводятся с числами, имеющими ограниченное число десятичных разрядов (на рассмотренном небольшом примере это не так критично). В результате этого появляется дополнительная погрешность округления, которая добавляется к погрешности, возникающей при конечно-разностной аппроксимации.

Отметим, что в данном случае значение потенциала в одном из внутренних узлов сразу же используется для отыскания потенциала в соседнем узле. Данная процедура повторяется для каждого из узлов до тех пор, пока два следующих друг за другом приближения не совпадут с требуемой точностью (tol). Для этого в конце каждой итерации необходимо выполнять проверку вида

$$error \leq tol,$$

где $error = \max \left| \frac{\Phi_i^{(it)} - \Phi_i^{(it-1)}}{\Phi_i^{(it)}} \right|$, $tol = 10^{-m}$, и, если условие выполняется

сы, прекратить итерации, а в противном случае продолжить вычисления. Параметр m позволяет контролировать точность вычислений (количество верных знаков после запятой). Стоит отметить еще одно важное обстоятельство. Поскольку итерационный процесс может расходиться или стагнировать, для предотвращения образования бесконечного цикла при программной реализации, необходимо задавать максимальное количество итераций, при достижении которого итерационный процесс должен прерваться.

Рассмотрим другой подход к решению той же задачи. Для этого воспользовавшись (5.22) запишем систему уравнений для нахождения потенциалов во внутренних узлах

$$\begin{aligned}
4\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - 0\Phi_4 &= 10, \\
-\Phi_1 + 4\Phi_2 - 0 - \Phi_4 &= 10, \\
-\Phi_1 - 0\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 &= 0, \\
-0\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + 4\Phi_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда, в матричном виде, получим

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \mathbf{Av} = \mathbf{b}.$$

Видно, что полученная матрица является ленточной. Решив систему, например с помощью метода исключения Гаусса, получим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,75 \\ 3,75 \\ 1,25 \\ 1,25 \end{bmatrix}.$$

Видно, что полученные решения близки. Первый вариант решения соответствует явной схеме, а второй – неявной.

5.2.4. Двухмерное уравнение Лапласа: неоднородный диэлектрик

Рассмотренный выше пример решения двухмерного уравнения Лапласа характеризовался однородным диэлектрическим заполнением расчетной области. Далее рассмотрим случай слоистого диэлектрика. Подобная ситуация возникает, например, при моделировании линий передачи, содержащей более одной диэлектрической среды. Поэтому необходимо соответствующим образом преобразовать уравнение, описывающее распределение потенциала в пространстве, например уравнение (5.22), при использовании пятиточечного шаблона аппроксимации.

Для конкретики рассмотрим микрополосковую линию передачи. Слоистая среда состоит из двух диэлектриков с плоской границей раздела между ними. Простейший вариант такого заполнения, допускающий введение равномерной квадратной сетки, изображен на рис. 5.8. Сетку построим так, чтобы границы части ячеек сетки совпали с границей раздела между диэлектриками. Шаг сетки равен h и отчет номеров узлов ведется от узла в центре, которому присвоим индексы i, j [122].

Запишем уравнение Лапласа при однородном заполнении $\nabla^2\Phi = 0$. Чтобы ввести более общее уравнение, справедливое при неоднородном заполнении, обратимся к закону Гаусса в дифференциальной форме (электрические заряды могут концентрироваться только на поверхности проводника)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

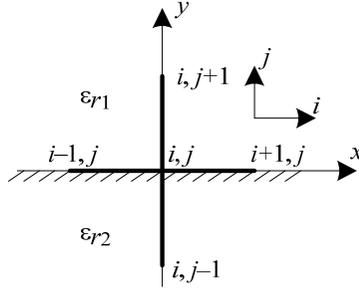


Рис. 5.8. Двухслойный диэлектрик

Так как в пространстве вне проводников нет свободных зарядов, то $\rho = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, т.е. в двухмерном случае для прямоугольных координат

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0.$$

Из этого уравнения вытекают конечно-разностные уравнения, связывающие поля по обе стороны от границ.

Поскольку $\mathbf{D} = -\varepsilon \nabla \Phi$, то в полупространстве над границей раздела, где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$, составляющая вектора индукции, параллельная координате y ,

$$\frac{\partial D_y^{\text{над}}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} (\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j))}{h},$$

а под границей, где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}$ –

$$\frac{\partial D_y^{\text{под}}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} (\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1))}{h}.$$

При записи выражений использовались правосторонняя и левосторонняя разности. Тогда скорость изменения составляющей электрической индукции, нормальной к границе, при переходе через границу раздела двух сред выражается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_y}{\partial y} &= \frac{\partial D_y^{\text{под}}}{\partial y} - \frac{\partial D_y^{\text{над}}}{\partial y} = \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{h} [\varepsilon_{r1} (\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)) - \varepsilon_{r2} (\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1))]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Аналогичное выражение можно записать и для производной от составляющей D_x в направлении координаты x , однако пока не ясно, какое значение ε_r в данном случае использовать в узлах $i-1, j$ и $i+1, j$. Пока положим $\varepsilon_r = \varepsilon_{r3}$, тогда

$$\frac{\partial D x^{\text{ПР}}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} (\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j))}{h},$$

$$\frac{\partial D x^{\text{ЛЕВ}}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} (\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j))}{h}.$$

В результате получим

$$\frac{\partial D x}{\partial x} = \frac{\partial D x^{\text{ЛЕВ}}}{\partial x} - \frac{\partial D x^{\text{ПР}}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3}}{h} [\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) - 2\Phi(i, j)]. \quad (5.25)$$

Складывая выражения (5.24) и (5.25) и приравнявая результат к нулю, получим значение потенциала в точках, расположенных на границах раздела,

$$\Phi(i, j) = \frac{\varepsilon_{r1} \Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2} \Phi(i, j-1) + \varepsilon_{r3} (\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j))}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{r3}}. \quad (5.26)$$

Еще раз отметим, что данное уравнение используется только для точек на границе, а выше или ниже её – уравнение (5.22).

Перейдем к определению величины ε_{r3} , полагая, что вклад в величину $\Phi(i, j)$ узловых потенциалов $\Phi(i-1, j)$ и $\Phi(i+1, j)$ вдоль оси y одинаков, т.е.

$$\varepsilon_{r1} \Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2} \Phi(i, j-1) = \varepsilon_{r3} (\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)),$$

тогда

$$\varepsilon_{r3} = \frac{\varepsilon_{r1} \Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2} \Phi(i, j-1)}{\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)}. \quad (5.27)$$

Прежде чем при вычислениях использовать уравнение (5.26), необходимо на каждом шаге итерации определять ε_{r3} с помощью (5.27), а затем полученное выражение подставлять в (5.26). Выражение (5.27) можно упростить, если предположить, что в соседних узлах сетки значения потенциала отличаются незначительно, т.е. $\Phi(i, j+1) \approx \Phi(i, j-1)$, тогда

$$2\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}.$$

Описанный подход основан на использовании закона Гаусса в дифференциальной форме. Рассмотрим подход, основанный на использовании закона Гаусса в интегральной форме. Согласно граничных условий, для нормальных составляющих электрического поля, если плотность поверхностных электрических зарядов равна нулю (что соответствует границе раздела диэлектрик–диэлектрик), $D_{1n} = D_{2n}$. Таким образом, данное выражение справедливо, если

$$\oint_l \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_\Sigma = 0.$$

Подставив в это выражение $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, получим

$$0 = \oint_l \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl,$$

где $\partial \Phi / \partial n$ – производная по направлению нормали к контуру l , рис. 5.9, тогда

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{h} h + \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i-1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \\ & + \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i-1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i, j-1) - \Phi(i, j)}{h} h + \\ & + \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) = & \frac{\varepsilon_{r1}}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \Phi(i, j+1) + \frac{\varepsilon_{r2}}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \Phi(i, j-1) + \\ & + \frac{1}{4} \Phi(i-1, j) + \frac{1}{4} \Phi(i+1, j). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Полученное выражение эквивалентно (2.26) при $2\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}$, а при отсутствии границы диэлектрик-диэлектрик, т.е. $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$, оно эквивалентно (5.22).

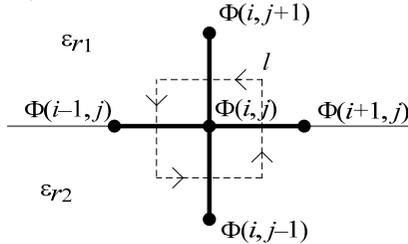


Рис. 5.9. Граница раздела диэлектрик-диэлектрик

Если в структуре больше границ диэлектрик-диэлектрик, например 4 (рис. 5.10), используя аналогичный прием, получим

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) = & \frac{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})\Phi(i, j+1) + (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r4})\Phi(i-1, j)}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})} + \\ & + \frac{(\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})\Phi(i, j-1) + (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})\Phi(i+1, j)}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})}. \end{aligned}$$

Оценим изменения в уравнениях при исследовании симметричных структур. Для конкретности на рис. 5.11, а приведена экранированная двухполосковая линия передачи (в англоязычной литера-

туре, называемая shielded double-strip line with partial dielectric support [29]), а на рис. 5.11, б показана её часть, полученная с использованием полной симметрии.

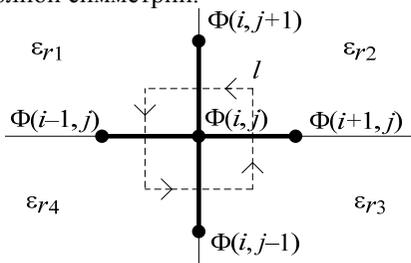


Рис. 5.10. Структура со слоистым диэлектриком

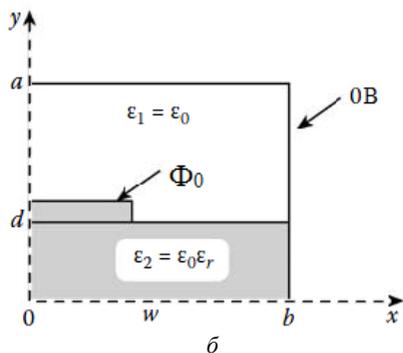
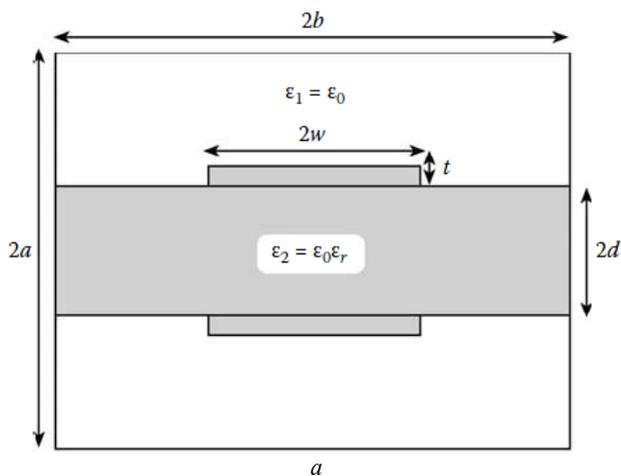


Рис. 5.11. Экранированная двухполосковая линия передачи (а) и её вид при использовании полной симметрии (б)

На линии симметрии налагается условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Это означает, что на линии симметрии вдоль оси y , ($x = 0$) производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2h} = 0$, откуда следует что $\Phi(i+1, j) = \Phi(i-1, j)$. Тогда уравнение (5.22) упрощается

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) + 2\Phi(i+1, j)]. \quad (5.29)$$

На оси симметрии вдоль оси x ($y = 0$), $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2h} = 0$, тогда $\Phi(i, j+1) = \Phi(i, j-1)$, а уравнение (5.22) упрощается:

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i-1, j) + \Phi(i+1, j) + 2\Phi(i, j+1)]. \quad (5.30)$$

Таким образом, для нахождения распределения потенциала в соответствующих узлах используются выражения (5.22), (5.28), (5.29) и (5.30).

Перейдем к определению погонной емкости. Так, в общем случае, емкость связана с величиной полного заряда в анализируемой структуре (системе) следующим равенством

$$C = k \frac{q_{\Sigma}}{\Phi_0}, \quad (5.31)$$

где Φ_0 – потенциал между внутренним (центральным) и внешним проводниками (рис. 5.11, б). Коэффициент k – коэффициент, необходимый для учета симметрии. Так, в рассматриваемом случае он равен 4 (полная симметрия).

Для нахождения полного заряда воспользуемся законом Гаусса для контура l , охватывающего внутренний проводник. Выберем прямоугольный контур между двумя смежными прямоугольными границами, как показано на рис. 5.12. Тогда

$$\begin{aligned} q_{\Sigma} = \oint_l \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl = \varepsilon \left(\frac{\Phi_P - \Phi_N}{\Delta x} \right) \Delta y + \varepsilon \left(\frac{\Phi_M - \Phi_L}{\Delta x} \right) \Delta y + \\ + \varepsilon \left(\frac{\Phi_H - \Phi_L}{\Delta y} \right) \Delta x + \varepsilon \left(\frac{\Phi_G - \Phi_K}{\Delta y} \right) \Delta x + \dots \end{aligned} \quad (5.32)$$

Полагая $\Delta x = \Delta y = h$, получим

$$q_{\Sigma} = (\varepsilon \Phi_P + \varepsilon \Phi_M + \varepsilon \Phi_H + \varepsilon \Phi_G + \dots) - (\varepsilon \Phi_N + 2\varepsilon \Phi_L + \varepsilon \Phi_K + \dots).$$

Если узел расположен на границе диэлектрик-диэлектрик, то $\epsilon_r = (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})/2$. Если же он расположен на оси симметрии, то $\Phi = \Phi/2$ (поскольку симметрия учтена в уравнении (5.31)).

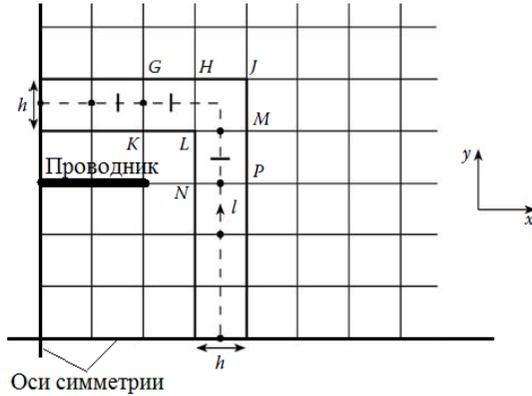


Рис. 5.12. Прямоугольный контур L , используемый для нахождения сосредоточенного заряда на поверхности проводника

Далее необходимо аналогично вычислить C_0 , удалив диэлектрические границы (положив для всех узлов $\epsilon_{ri} = 1$). После этого можно вычислить волновое сопротивление по (5.5).

Отдельно стоит отметить, что при вычислениях часто проверяют не сходимость первичного параметра (потенциала) в узлах, а вторичного (емкость), для чего выполняется проверка

$$\text{error} = \max \left| \frac{C_{ij}^{(it)} - C_{ij}^{(it-1)}}{C_{ij}^{(it)}} \right| \leq \text{tol}.$$

Используя (1.34), для двухмерного случая в виде,

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{i}(\partial\phi/\partial x) + \mathbf{j}(\partial\phi/\partial y)) = -\nabla\Phi,$$

можно определить напряженность с использованием вычисленных потенциалов. Так, вычислив потенциалы в узлах сетки и используя центральную конечно-разностную аппроксимацию, можно вычислить значения компонент вектора напряженности, а затем – суммарные значения (рис. 5.13).

Тогда компоненты вектора напряженности, согласно рисунка 5.13, a , вычисляются как

$$E_x(i, j) = -\frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h}, \quad E_y(i, j) = -\frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{h}.$$

Далее, используя рис. 5.13, б, вычисляются суммарные значения вектора напряженности в узлах новой сетки (количество строк и столбцов этой сетки на единицу меньше количества строк и столбцов сетки для вычисления потенциалов), как среднее арифметическое значение от индивидуальных значений компонент вектора

$$E'x(i, j) = \frac{Ex(i, j+1) + Ex(i, j)}{2}, \quad E'y(i, j) = \frac{Ey(i+1, j) + Ey(i, j)}{2}.$$

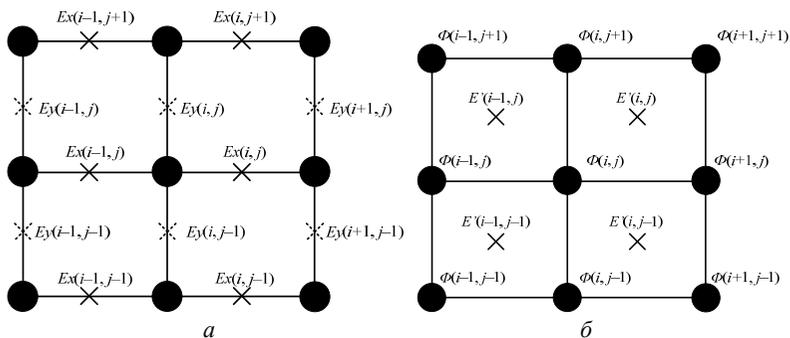


Рис. 5.13. Шаблон для вычисления компонент вектора напряженности электрического поля. Центральные разности вдоль осей x и y для вычисления индивидуальных компонент вектора (а), узлы сетки для вычисления суммарных значений вектора напряженности (б)

Еще раз рассмотрим уравнение Лапласа для функции Φ в области Ω с известными на границе Γ значениями. Пусть Ω – прямоугольник, а Γ – его граница. Пронумеруем только внутренние узлы, поскольку значения функции на границе известны. Точки разметим при движении по горизонтали и снизу вверх. Эта разметка называется естественным упорядочиванием (рис. 5.14, а). Структура результирующей матрицы приведена на рис. 5.14, б.

Как было показано выше, при такой нумерации узлов возникает зависимость в данных. Так, при вычислении $\Phi(i, j)$ на текущей итерации требуются значения в соседних узлах, как на этой итерации, так и на предыдущей, что создает проблему для организации параллельных вычислений.

Рассмотрим другой подход к нумерации внутренних узлов, пригодный для параллельной реализации, который называется красно-черным упорядочиванием (рис. 5.15). При нём на каждой итерации сначала производится расчет значений функции в узлах одного цвета, затем – в узлах другого цвета. При этом сначала нумеруются красные узлы, а затем – черные.

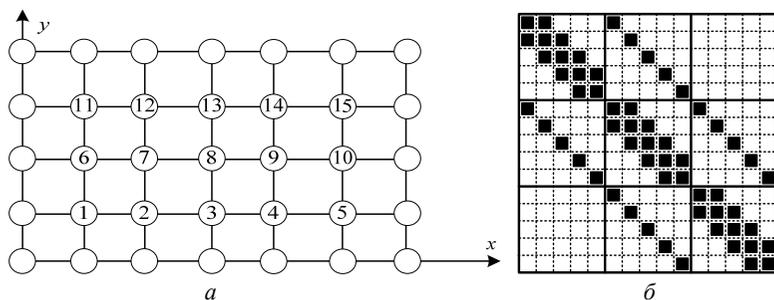


Рис. 5.14. Естественное упорядочивание неизвестных для двухмерной сетки 7×5 (а) и соответствующая ей структура матрицы (б)

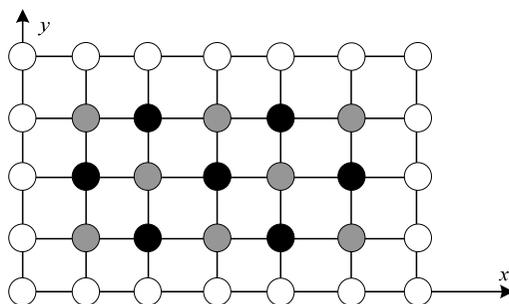


Рис. 5.15. Красно-черное упорядочивание неизвестных для двухмерной сетки 7×5

Заметим, что смежны с каждым красным узлом лишь черные узлы. Поэтому, если вначале перевычисляются компоненты из красных узлов, используются только старые значения из черных узлов. Затем, когда перевычисляются компоненты из черных узлов, которые смежны лишь с красными узлами, будут использоваться лишь новые значения из этих красных узлов. Другими словами можно сказать, что красно-черное упорядочивание обеспечивает перевод рекуррентных формул метода Зейделя в двухшаговое использование формул Якоби.

5.3. Математическая модель вычисления ёмкостной матрицы методом моментов

В работе [123], на основании работы [124], представлен детальный вывод моделей для вычисления ёмкостной матрицы C методом моментов с помощью аналитических выражений для элементов матрицы СЛАУ, для двумерных и трёхмерных конфигураций, с идеально проводящей плоскостью и без неё. Для ясности дальней-

шего изложения кратко поясним суть данного подхода на примере двумерной задачи (для трехмерной задачи подход аналогичен). В качестве операторного уравнения выступает уравнение Пуассона в интегральной форме:

$$\varphi = \mathbf{L}^{-1}\rho, \quad \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (5.33)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – соответствующая функция Грина, \mathbf{r} – точка наблюдения (x, y) , \mathbf{r}' – точка источника (x', y') , рис. 5.16, а $d\Gamma$ – дифференциал по поверхности структуры.

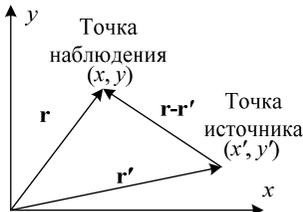


Рис. 5.16. Точки источника и наблюдения

В данной постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению (φ), при этом требуется найти плотность заряда (ρ). Для двумерного случая функция Грина имеет вид:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi}, \quad (5.34)$$

и

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (5.35)$$

Рассмотрим математическую модель вычисления ёмкостной матрицы на примере связанной микрополосковой линии, поперечное сечение которой приведено на рис. 5.17.

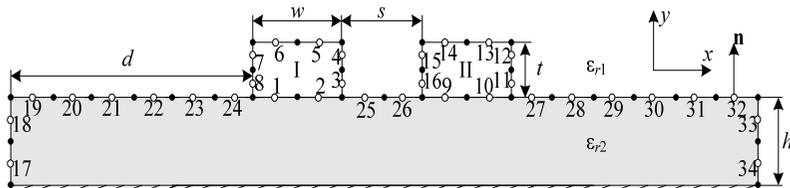


Рис. 5.17. Поперечное сечение связанной микрополосковой линии

Структура содержит два проводника (I и II), расположенных на диэлектрическом основании с относительной диэлектрической

проницаемостью ε_{r2} , над идеально проводящей (бесконечной) заземленной плоскостью.

Для вычисления необходимо пошагово выполнить следующие действия (также приведены соответствующие комментарии).

1. Дискретизировать границы проводников и диэлектрической подложки (граница раздела двух сред) на небольшие отрезки (подынтервалы) длинами l_n , $n = 1, 2, \dots, N$. На рис. 5.17 деление на подынтервалы показано с помощью закрашенных кругов, а центры подынтервалов отмечены с помощью не закрашенных кругов. При этом сначала дискретизируются проводниковые, а затем диэлектрические границы. В данном случае границы дискретизированы на $N = 34$ подынтервала, при этом границам проводник–диэлектрик соответствует $N_C = 16$, а диэлектрик–диэлектрик – $N_D = 18$ ($N = N_C + N_D$).

2. Когда в структуре имеются границы соприкосновения диэлектрика с проводником, необходимо работать в терминах полной плотности заряда σ_T , которая представляет собой сумму плотности свободного и поляризационного зарядов [125, 126]:

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sigma_S(\mathbf{r}) + \sigma_P(\mathbf{r}).$$

При этом на границе диэлектрик–диэлектрик полная плотность заряда состоит только из плотности поляризационных зарядов.

3. Учесть наличие плоскости земли с помощью метода зеркальных изображений. При этом вместо функции (5.34) необходимо использовать

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi} - \frac{\ln|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|}{2\pi}, \quad (5.36)$$

где $\underline{\mathbf{r}}'$ – точка мнимого источника. При отсутствии плоскости земли используется (5.34).

4. Задать потенциалы (один вольт) на проводниковых подынтервалах и подставить выражения для аппроксимации плотности заряда и функции Грина в уравнение (5.33). Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') [\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (5.37)$$

где dl' – элемент контура границ проводник–диэлектрик, а L_C – длина этого контура. Полученное уравнение является уравнением Фредгольма первого рода.

5. Получить аналогичное уравнение для границ диэлектрик–диэлектрик. При этом следует учесть, что на границе диэлектрик–диэлектрик, между средами с диэлектрическими проницаемостями ε_1

и ε_2 , нормальная составляющая общего вектора электрического смещения $\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'$ не меняется. Тогда

$$\varepsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}'_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}'_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_D, \quad (5.38)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали (рис. 5.17), $\mathbf{E}'_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}'_2(\mathbf{r})$ – общее электрическое поле в средах 1 (с ε_1) и 2 (с ε_2) соответственно (в рассматриваемой структуре $\varepsilon_{r1} = 1$ (воздух)), при приближении к линии L_D границы раздела этих сред.

Для этого используется связь потенциала с напряженностью поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}).$$

Подставив уравнение (5.37) в последнее, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \nabla [\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - \ln|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'|] dl' = \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \end{aligned} \quad (5.39)$$

поскольку

$$\int_L \nabla [\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - \ln|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'|] dl' = \int_L \left[\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r}'-\underline{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] dl'.$$

Рассматривая предел уравнения (5.39), когда \mathbf{r} приближается к границе раздела двух сред, можно показать, что этот предел будет различным, если \mathbf{r} приближается к границе со стороны среды 1 или со стороны среды 2. С учетом этого получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' + \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0}, \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' - \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0}, \quad \mathbf{r} \in L_D. \end{aligned} \quad (5.40)$$

В результате, подставив (5.40) в (5.38), получим

$$0 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] \cdot \mathbf{n} dl', \quad \mathbf{r} \in L_D. \quad (5.41)$$

6. Выразить полную плотность в виде линейной комбинации известных базисных функций (ω_n) и неизвестных коэффициентов (α_n)

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \omega_n(\mathbf{r}). \quad (5.42)$$

Часто используемыми являются кусочно-постоянные базисные функции, которые равны единице на подынтервале с номером n и нулю вне его. При этом коэффициенты α_n соответствуют значению равномерной плотности заряда на подынтервалах с длинами l_n . Так, $q_n = l_n \alpha_n$ – погонный заряд на подынтервале длиной l_n (Кл/м).

7. Подставить (5.42) в (5.37) и (5.41) и, взяв для них скалярные произведения с тестовыми функциями (Дирака), сформировать СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v}$, где \mathbf{S} – матрица размера $N \times N$, а $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{v} – N \times 1$. Вектор \mathbf{v} содержит единицы в тех строках, которые соответствуют подынтервалам проводник-проводник.

Описанные шаги справедливы, если в структуре имеется один проводник, не считая опорного. При наличии нескольких проводников, как на рис. 5.17, описанные выше шаги повторять нет необходимости, а нужно лишь изменить вектор \mathbf{v} . При этом, все используемые вектора \mathbf{v} можно заменить на одну матрицу \mathbf{V} , состоящую из N_{COND} столбцов, где N_{COND} – число проводников в структуре, не считая опорного. Столбцы этой матрицы соответствуют векторам \mathbf{v} , сформированным для каждого из проводников. Тогда задача сводится к СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ и \mathbf{V} – матрицы размера $N \times N_{\text{COND}}$. Структура полученной СЛАУ приведена на рис. 5.18.

Элементы матрицы \mathbf{S} вычисляются как:

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} [\ln|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n| - \ln|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|] dl', \quad m = 1, \dots, N_C, \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.43)$$

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl',$$

$$m = N_C + 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N, \quad m \neq n, \quad (5.44)$$

$$s_{mm} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} \right] dl',$$

$$m = N_C + 1, \dots, N. \quad (5.45)$$

Для вычисления интегралов в уравнениях (5.43)–(5.45) используются численное интегрирование [118] или аналитические выражения в замкнутом виде [123]. Полученная матрица \mathbf{S} является плотной (практически полностью отсутствуют нулевые элементы). Если в рассматриваемой структуре отсутствует плоскость земли, то необходимо соблюсти закон сохранения заряда. Для этого к матрице СЛАУ \mathbf{S} добавляются дополнительная строка и столбец, элементы которых вычисляются по простым формулам, а соответствующая строка матрицы \mathbf{V} заполняется нулями [123]. При этом при формировании СЛАУ вместо (5.36) используется (5.34).

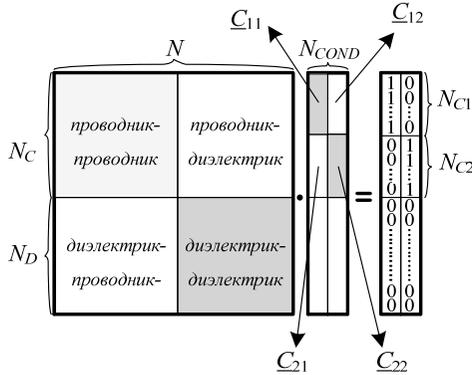


Рис. 5.18. Структура матрицы СЛАУ

8. Решить СЛАУ.

9. Вычислить элементы ёмкостной матрицы \mathbf{C} . При этом учесть, что поверхностная плотность свободных зарядов вычисляется как

$$\sigma_S(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{r})\sigma_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_{CD},$$

где $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, соприкасающегося с поверхностью проводника по контуру L_C . Тогда элементы ёмкостной матрицы \mathbf{C}

$$\underline{C}_{ij} = \int_{L_{C_i}} \varepsilon_r(\mathbf{r})\sigma_S^j(\mathbf{r})dl_i / V, \quad V = 1 \text{ В},$$

где индекс i – относится к проводнику, по контуру L_{C_i} которого ведется интегрирование, а j – к проводнику, находящемуся под потенциалом 1 В, когда остальные проводники заземлены (0 В). В матричном виде получим

$$\underline{C}_{ij} = \sum_{k \in L_{C_i}} \varepsilon_r \Sigma_{kj} l_k / V, \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{COND}}, \quad V = 1 \text{ В}.$$

На рис. 5.18 наглядно продемонстрированы блоки матрицы $\mathbf{\Sigma}$, участвующие в вычислении.

В результате, задача нахождения ёмкостной матрицы многопроводной линии передачи (МПП) сводится к решению СЛАУ вида $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V}$, с квадратной и плотной матрицей \mathbf{S} размера $N \times N$ ($N = N_C + N_D$), связывающей плотности заряда элементов дискретизации на проводниках и диэлектрических границах, составляющих матрицу $\mathbf{\Sigma}$, с потенциалами этих элементов – матрица \mathbf{V} , обе размера $N \times N_{\text{COND}}$. После вычисления $\mathbf{\Sigma}$, вычисляются элементы искомой ёмкостной матрицы.

Еще раз вернемся к структуре матрицы СЛАУ (рис. 5.18). Для общего случая произвольно ориентированных границ проводников и

диэлектриков эта матрица имеет структуру, показанную на рис. 5.19, *a* и схематично демонстрирующую расположение её элементов, соответствующих проводниковым (Π) и диэлектрическим (Δ) границам. Для частного случая линейных и ортогональных границ двумерной структуры [123] каждый блок матрицы на рис. 5.19, *a* имеет структуру, показанную на рис. 5.19, *б*, т.е. состоит из 4 субблоков, соответствующих границам, ортогональным к осям Y ($\perp Y$) и X ($\perp X$). В случае трехмерных структур организация субблоков показана на рис. 5.19, *в*.

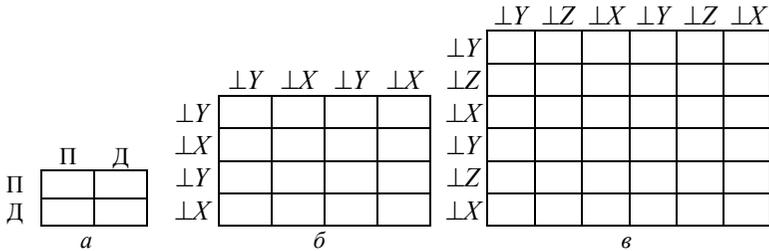


Рис. 5.19. Структуры матрицы СЛАУ для произвольно (*a*) и ортогонально ориентированных границ для двумерных (*б*) и трехмерных (*в*) структур из проводников и диэлектриков

Таким образом, сначала сегментируются границы проводник-диэлектрик и полученным подынтервалам присваиваются номера с 1 по N_C . При этом сначала сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, ортогональные Y (номер последнего – N_{CY}), затем – ортогональные X (номер последнего – N_C). После этого сегментируются границы диэлектрик-диэлектрик и полученным подынтервалам присваиваются номера с $N_C + 1$ по N . При этом сначала сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, ортогональные Y (номер последнего – N_{DY}), затем – ортогональные X (номер последнего – N).

Каждый подынтервал описывается следующими параметрами: x_n – координата X центра n -го подынтервала; y_n – координата Y центра n -го подынтервала; d_n – длина n -го подынтервала; ϵ_n – диэлектрическая проницаемость около n -го подынтервала проводник-диэлектрик; ϵ_n^+ и ϵ_n^- – диэлектрические проницаемости соответственно на положительной (к которой указывает n_n) и отрицательной (от которой указывает n_n) сторонах n -го подынтервала диэлектрик-диэлектрик, где n_n – единичный вектор, проведенный нормально от центра n -го подынтервала в направлении соответствующей оси. Из них вычисляются элементы матрицы СЛАУ по формулам, приведенным ниже.

Для строк с номерами $m = 1, \dots, N_C$

$$s_{mm} = -\frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0}, \quad \begin{cases} m=1, \dots, N_C \\ n=1, \dots, N \end{cases}, \quad (5.46)$$

где

$$I_{mn} = a_1 \cdot \ln(a_1^2 + c_1^2) - 2a_1 + 2c_1 \cdot \operatorname{actg}\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - a_2 \cdot \ln(a_2^2 + c_2^2) + 2a_2 - 2c_1 \cdot \operatorname{actg}\left(\frac{a_2}{c_1}\right).$$

Здесь для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); c_1 = y_m - y_n. \quad (5.47)$$

Для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); c_1 = x_m - x_n. \quad (5.48)$$

Для строк с номерами $m = (N_C + 1), \dots, N$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0}, \quad \begin{cases} m=(N_C+1), \dots, N \\ n=1, \dots, N \end{cases}, m \neq n;$$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_m^+ + \varepsilon_m^-}{\varepsilon_m^+ - \varepsilon_m^-}, \quad m = (N_C + 1), \dots, N,$$

где для строк номерами $m = (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$I_{mn} = \operatorname{actg}\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - \operatorname{actg}\left(\frac{a_2}{c_1}\right), \quad (5.49)$$

и переменные совпадают с (5.47), а для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a_2^2 + c_1^2}{a_1^2 + c_1^2}\right), \quad (5.50)$$

где переменные совпадают с (5.48). Для строк с номерами $m = (N_{DY} + 1), \dots, N$ для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ I_{mn} вычисляется по (5.50) с переменными (5.47). Для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$ I_{mn} вычисляется по (5.49), где переменные совпадают с (5.48).

Когда плоскость земли отсутствует, землей считается $(N_{COND} + 1)$ -й проводник. Тогда, следуя [127], добавляются $(N + 1)$ -я строка и столбец с элементами

$$s_{nN+1} = \frac{d_n}{2s_{nn}}, \quad s_{N+1n} = d_n \varepsilon_n, \quad n = 1, \dots, N_C.$$

ГЛАВА 6 ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СЛАУ ПРИ АНАЛИЗЕ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

6.1. Сравнение производительности математических библиотек

В последние годы активно создаются и внедряются математические библиотеки, реализующих параллельные алгоритмы векторных и матричных операций. Важно отметить, что повышения производительности программного кода можно добиться не в связи с распараллеливанием, а за счет использования различных режимов компиляции и вычислительных инструментариев. Таким примером является, например, коммерческая библиотека Intel MKL [128]. Бесплатно распространяемая библиотека ATLAS позволяет достичь высокой производительности за счёт использования оптимизации кода на этапе компиляции под конкретную вычислительную платформу [129]. Свободно распространяемая библиотека Eigen широко использует параллелизацию с помощью технологии OpenMP (открытый стандарт для распараллеливания программ), а также поддержку инструкций семейства SSE (технологии потоковой обработки целочисленных данных, позволяющей расширить возможности процессора) [130]. Также достойны внимания исторически появившаяся первой бесплатная библиотека LAPACK [131], а также коммерческая библиотека ACML корпорации AMD [132].

Далее приведены результаты, полученные на двух рабочих станциях (PC), параметры которых приведены в табл. 6.1, при $N = 1000, 2000, \dots, 10000$ с использованием компилятора Microsoft Visual Studio 2008 при двух наборах ключей компиляции: «А» – только оптимизация компилятора; «В» – оптимизация компилятора с генерацией кода с помощью инструкций SSE2 и поддержкой многопоточности (OpenMP).

Таблица 6.1

Характеристики используемых рабочих станций (PC)

| № PC | Платформа | Частота процессора, МГц | Объём ОЗУ, Гб | Количество ядер/потоков | Операционная система |
|------|--------------------------|-------------------------|---------------|-------------------------|----------------------|
| 1 | CPU Intel Core i7-970 | 3200 | 12 | 6/12 | Windows 7 |
| 2 | CPU Intel Core 2Duo-4400 | 2000 | 2 | 2/2 | Windows XP |

Полученные результаты времени вычисления при изменении порядка СЛАУ для наборов ключей компиляции «А» и «В» приведены на рис. 6.1. Использование библиотеки Eigen по сравнению с другими при наборе ключей компиляции «А» приводит к наибольшим временным затратам по сравнению с другими библиотеками вне зависимости от используемой РС. При наборе ключей «В» наблюдается обратная ситуация: использование библиотеки Eigen приводит к наименьшим временным затратам. Таким образом, можно сделать вывод, что из рассмотренных библиотека Eigen является оптимальной (с точки зрения минимизации временных затрат) при использовании компилятора, поддерживающего инструкции SSE2, и многоядерных РС. Дополнительные вычисления еще при двух наборах ключей (оптимизация совместно с генерацией кода с помощью инструкций SSE2 и оптимизация совместно с поддержкой OpenMP) показали, что эффективность данной библиотеки, в первую очередь, повышается за счет возможности использования инструкций SSE2.

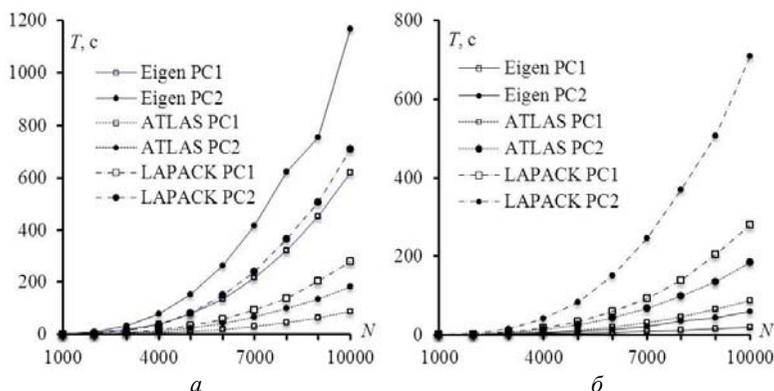


Рис. 6.1. Время решения СЛАУ (T , с) с использованием библиотек при наборе ключей компиляции «А» (а) и «В» (б)

Поскольку на практике существует ряд задач, при решении которых большая точность решения не имеет принципиальной важности, то используют одинарную точность для снижения затрат времени. Поэтому, далее выполнено тестирование производительности тех же библиотек при использовании различных типов данных и наборе компиляции «В».

Время решения СЛАУ при использовании действительных чисел с одинарной (float) и двойной (double) точностью при изменении порядка матрицы $N = 1000, 2000, \dots, 5000$ приведено на рис. 6.2.

На рис. 6.3 приведены аналогичные результаты, полученные при использовании комплексных чисел с одинарной и двойной точностью, соответственно.

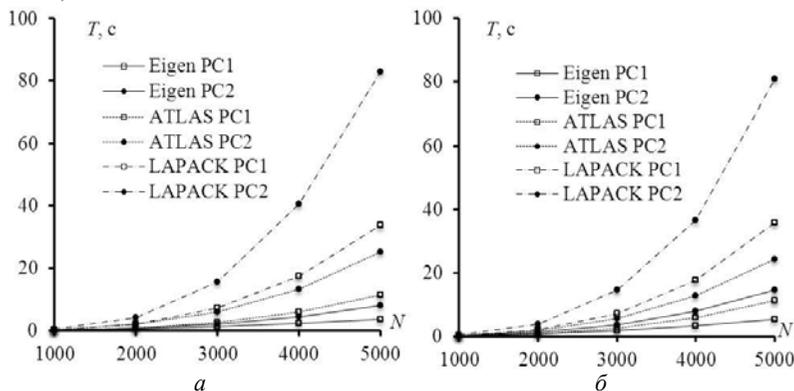


Рис. 6.2. Время решения СЛАУ (T , с) при использовании действительных чисел одинарной (a) и двойной (b) точности

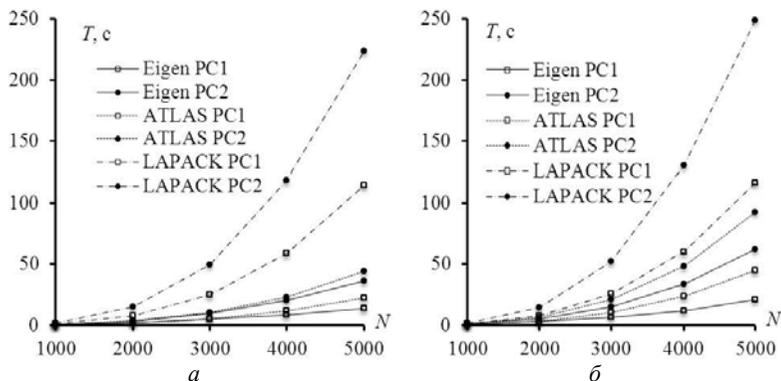


Рис. 6.3. Время решения СЛАУ (T , с) при использовании комплексных чисел одинарной (a) и двойной (b) точности

Время вычисления для комплексных значений в 4 раза возрастает по сравнению с действительными значениями вне зависимости от РС. Двойная точность приводит к двойному увеличению временных затрат по сравнению с одинарной точностью. Наибольшей производительностью обладает библиотека Eigen, вне зависимости от используемого типа данных. Таким образом, в дальнейшем оптимальным является использование этой библиотеки.

Таким образом, при включении поддержки всех инструкций наиболее производительна по сравнению с LAPACK и ATLAS, библиотека Eigen. Поэтому далее выполнено сравнение производительности её и другой бесплатно распространяемой библиотекой линейной алгебры BOOST [133].

BOOST – собрание библиотек, расширяющих C++, которые свободно распространяются по лицензии Boost Software License вместе с исходным кодом. Проект является своего рода «испытательным полигоном» для различных расширений языка и некоторые библиотеки являются кандидатами на включение в последующие версии стандарта C++. Библиотека BOOST имеет заметную направленность на исследования и расширяемость (метапрограммирование и обобщённое программирование с активным использованием шаблонов). В её состав входит библиотека линейной алгебры uBLAS, которая предоставляет реализацию различных матрично-векторных операций. Также к библиотеке BOOST могут быть подключены другие специализированные библиотеки, оптимизированные для конкретной вычислительной платформы и позволяющие повысить производительность.

Выполнено тестирование алгоритмов LU-разложения, входящих в состав библиотек Eigen и BOOST, с помощью компилятора Microsoft Visual Studio 2008 (MSVC) для типов данных: double и float. Использованы четыре различных конфигурации проекта (табл. 6.2) и две PC (табл. 6.3).

Таблица 6.2

Конфигурации проекта MSVC
(+ поддержка включена, – поддержка отключена)

| Конфигурация | Оптимизация | SSE | OpenMP |
|--------------|-------------|-----|--------|
| A | + | – | – |
| B | – | + | – |
| C | – | – | + |
| D | + | + | + |

Таблица 6.3

Характеристики рабочих станций (PC)

| № PC | Платформа | Частота процессора, МГц | Объём ОЗУ, Гб | Количество ядер/потоков | Операционная система |
|------|-----------------------|-------------------------|---------------|-------------------------|----------------------|
| 1 | CPU Intel i5-2410 | 2300 | 4 | 2/4 | Windows 7 |
| 2 | CPU Intel Core i7-970 | 3200 | 24 | 6/12 | Windows 7 |

Вычисления производились при $N = 1000, 2000, 3000, 4000$. Полученные результаты для типов данных float и double сведены в табл. 6.4. На рис. 6.4 для примера приведены зависимости времени выполнения LU-разложения от порядка матрицы СЛАУ для переменных типа float и конфигурации «D».

Таблица 6.4

Время (с) решения (с) СЛАУ при использовании алгоритмов LU-разложения из библиотек BOOST и Eigen

| Конфигурация | Библиотека | PC | N | | | | | | | |
|--------------|------------|----|-------|--------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|
| | | | float | | | | double | | | |
| | | | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 |
| A | BOOST | 1 | 1,85 | 14,88 | 50,98 | 122,43 | 1,94 | 15,35 | 51,1 | 121,05 |
| | | 2 | 2,26 | 18,20 | 61,56 | 146,07 | 2,26 | 18,44 | 62,72 | 148,86 |
| | Eigen | 1 | 0,61 | 4,65 | 16,19 | 37,16 | 0,22 | 1,61 | 5,14 | 12,22 |
| | | 2 | 0,68 | 5,16 | 17,16 | 40,25 | 0,22 | 1,65 | 5,41 | 12,59 |
| B | BOOST | 1 | 38,2 | 301,25 | 1349,29 | 2373,36 | 37,01 | 288,18 | 1043,83 | 3490,84 |
| | | 2 | 32,09 | 256,53 | 865,61 | 2051,50 | 32,1 | 256,87 | 866,47 | 2054,33 |
| | Eigen | 1 | 2,84 | 25,76 | 115,57 | 171,32 | 4,77 | 36,59 | 121,42 | 453,13 |
| | | 2 | 2,59 | 20,58 | 68,55 | 159,67 | 4,13 | 32,03 | 105,75 | 248,65 |
| C | BOOST | 1 | 37,36 | 393,69 | 1106,73 | 3439,82 | 36,31 | 324,76 | 1226,9 | 3320,37 |
| | | 2 | 31,01 | 247,84 | 835,53 | 1981,10 | 31,53 | 252,22 | 850,94 | 2016,79 |
| | Eigen | 1 | 4,82 | 47,14 | 147,86 | 337,85 | 4,09 | 34,57 | 119,22 | 300,72 |
| | | 2 | 3,58 | 16,77 | 47,11 | 95,35 | 3,47 | 15,72 | 42,62 | 84,35 |
| D | BOOST | 1 | 2,23 | 17,93 | 60,31 | 143,45 | 1,92 | 15,57 | 52,27 | 124,25 |
| | | 2 | 2,00 | 16,14 | 54,65 | 129,59 | 2,25 | 18,29 | 62,18 | 147,64 |
| | Eigen | 1 | 0,19 | 0,52 | 1,69 | 2,86 | 0,21 | 0,69 | 2,24 | 5,09 |
| | | 2 | 0,31 | 0,57 | 1,17 | 2,4 | 0,34 | 0,96 | 2,15 | 4,17 |

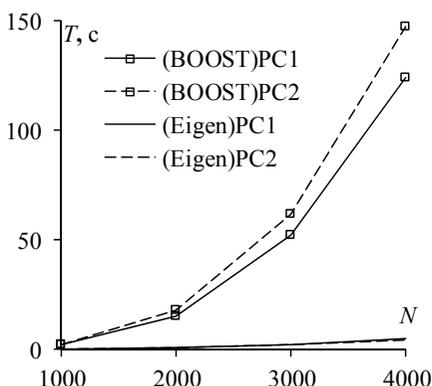


Рис. 6.4. Зависимости времени (T , с) LU-разложения от N для переменных типа float и конфигурации «D»

Из результатов видно, что даже для вычислительно мощных РС время LU-разложения матриц больших порядков может быть довольно существенным. Время вычисления с использованием функции библиотеки Eigen существенно меньше, чем BOOST. Так, при использовании только средств оптимизации (конфигурация «А»), для РС 1 и 2 время библиотеки BOOST в 3–9,9 и 3,3–11,8 раза больше времени библиотеки Eigen, в зависимости от используемой РС для типов переменной float и double соответственно.

При поддержке всех инструкций и директив (конфигурация «D») отношение времен библиотек BOOST и Eigen увеличивается до 11,7–24,4 и 6,5–35,4 для типов переменной float и double соответственно. Примечательно, что время LU-разложения имеет слабую зависимость от типа используемой переменной. Необходимо отметить, неоднозначность полученных результатов в зависимости от параметров РС. Так, для конфигурации «А» затраты на LU-разложение с помощью более вычислительно мощной РС 2 выше, чем для РС 1, вне зависимости от типа используемых переменных. Вероятнее всего, это объясняется особенностями используемого компилятора, в частности, причиной может быть различная автоматическая оптимизация кода под архитектуру конкретного процессора. Кроме того, аналогичная зависимость наблюдается для конфигурации «D» и библиотеки BOOST. Необходимо отметить, что OpenMP и SSE2 вносят несущественный вклад в ускорение вычислений.

Наиболее существенное влияние на время LU-разложения оказывает используемая конфигурация проекта. Так, отключение оптимизации кода (конфигурации «B» и «C») приводит к значительному росту затрат времени, который является наиболее существенным для библиотеки BOOST. Таким образом, ключевую роль для минимизации затрат времени на вычисления оказывает оптимизация кода. Выявленные преимущества библиотеки Eigen говорят о предпочтительности использования её функций для программной реализации разрабатываемых ниже алгоритмов по сравнению с функциями библиотеки BOOST.

6.2. Изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика

6.2.1. Основной алгоритм

Поскольку, как показано выше, матрица СЛАУ S является плотной, то для решения СЛАУ предпочтительно использовать метод, основанный на LU-разложении матрицы. Данный вариант вычисления ёмкостных матриц реализован и успешно используется в

системе TALGAT [134]. Однако возможен ряд усовершенствований, которые позволят сократить вычислительные затраты. Например, важной практической задачей является вычисление ёмкостной матрицы (далее \underline{C}) в диапазоне параметров материалов, таких как относительная диэлектрическая проницаемость. Это требуется при вычислении временного отклика с учетом частотной зависимости параметров материала подложки, когда для каждой частоты из спектра воздействующего сигнала вычисляются значения ϵ_r . Аналогичное необходимо при многократном вычислении в диапазоне параметров диэлектрика или при оптимизации его параметров. При этом структура матрицы СЛАУ \mathbf{S} может быть представлена в упрощенном виде, как на рис. 6.5.

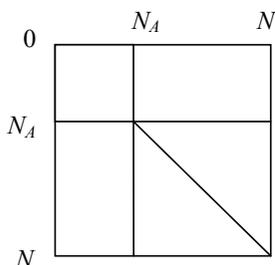


Рис. 6.5. Структура матрицы СЛАУ при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика

При многократном изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика изменяются только элементы на главной диагонали нижнего правого блока матрицы \mathbf{S} , соответствующего подынтервалам диэлектрик-диэлектрик. Этот ресурс можно использовать для уменьшения общего времени многократного решения СЛАУ. Для ясности дальнейшего изложения приведем алгоритм m -кратного вычисления ёмкостной матрицы \underline{C} (далее исходный алгоритм). Учтём, что при $N_{\text{COND}} > 1$, что часто возникает на практике, используется одно LU-разложение исходной матрицы (основные затраты) и последующее получение решения СЛАУ для каждого из N_{COND} векторов свободных членов (малые затраты на каждое решение).

Алгоритм 6.1 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} (исходный алгоритм)

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^k
- 3 Выполнить LU-разложение матрицы \mathbf{S}^k
- 4 Для i от 1 до N_{COND}
- 5 Вычислить элементы вектора воздействия \mathbf{v}_i

- 6 Найти вектор решения σ_i^k из уравнения $S^k \sigma_i^k = v_i$
- 7 Вычислить элементы i -го столбца емкостной матрицы \underline{C}^k
- 8 Увеличить i
- 9 Увеличить k

Как известно, LU-разложение – широко используемый метод решения СЛАУ вида $Ax = b$, являющийся альтернативной формулировкой метода исключения Гаусса. При этом исходная матрица СЛАУ A сначала декомпозируется на произведение двух треугольных матриц L и U , и затем, последовательно с этими матрицами решаются две СЛАУ. В результате вычисляется вектор неизвестных x . Из анализа приведенного алгоритма 6.1, видно, что от внутреннего цикла по i формально можно уйти, заменив векторы σ_i и v_i ($i = 1, 2, \dots, N_{\text{COND}}$) матрицами Σ и V , размером $N \times N_{\text{COND}}$ (упоминались в предыдущем подразделе). Изменение параметров структуры приводит к изменению элементов матрицы S^k , но не матрицы V^k , поэтому её нижний индекс далее опущен. Тогда алгоритм m -кратного вычисления матрицы \underline{C} примет следующий вид.

- 1 Вычислить элементы матрицы воздействий V
- 2 Для k от 1 до m
- 3 Вычислить элементы матрицы S^k
- 4 Выполнить LU-разложение матрицы S^k
- 5 Найти матрицу решения Σ^k из уравнения $S^k \Sigma^k = V$
- 6 Вычислить элементы емкостной матрицы \underline{C}^k
- 7 Увеличить k

Анализ выражений (5.43)–(5.45) показывает, что процесс многократного вычисления матрицы \underline{C} можно ускорить, используя специфику построения матрицы СЛАУ S , а точнее – место расположения в ней элементов, зависящих от ϵ_r . Так, из (5.45) видно, что они расположены только в строках, соответствующих N_D подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, причем только на главной диагонали матрицы. Таким образом, вычислив один раз матрицу S (при $k = 1$), на следующем шаге, соответствующем изменению ϵ_r , необходимо лишь модифицировать диагональные элементы матрицы в её строках, соответствующих подынтервалам диэлектрик-диэлектрик. Таким образом, при изменении ϵ_r , пересчет элементов матрицы S сводится к модификации некоторого (определенного, для каждой конфигурации) количества диагональных элементов.

Для наглядного представления других усовершенствований, рассмотрим алгоритм блочного LU-разложения. Если представить

матрицу \mathbf{S}^k , соответствующую некоторому значению диэлектрической проницаемости ϵ_r , в блочном виде (индекс k опущен)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$, $\mathbf{B} – N_A \times N_D$, $\mathbf{C} – N_D \times N_A$ и $\mathbf{D} – N_D \times N_D$, то, как отмечено выше, при смене значения ϵ_r изменится только часть элементов матрицы, а именно элементы блока \mathbf{D} . Очевидно, что изменение данного блока приведет к изменению LU-разложения матрицы \mathbf{S}^k и, соответственно, решения СЛАУ (матрицы Σ). Алгоритм, с учетом модификаций только элементов блока \mathbf{D} , можно представить следующим образом.

Алгоритм 6.2 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ при изменении диагональных элементов блока \mathbf{D}

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 Иначе
- 6 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 7 Вычислить диагональные элементы блока \mathbf{D}^k
- 8 Выполнить LU-разложение матрицы \mathbf{S}^k
- 9 Найти матрицу решения Σ^k из уравнения $\mathbf{S}^k \Sigma^k = \mathbf{V}$
- 10 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 11 Увеличить k

Далее представим первую матрицу в виде произведения матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , т.е.

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

где $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{L}_{10} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ 0 & \mathbf{U}_{11} \end{bmatrix}$, а \mathbf{I} – единичная матрица. Тогда,

для ускорения многократного решения СЛАУ при изменении элементов блока \mathbf{D} можно использовать блочное LU-разложение. Для подтверждения этого сначала оценим временные затраты, приходящиеся на: многократное LU-разложение, однократное LU-разложение и решения для N_{COND} векторов свободных членов, а также многократное LU-разложение и решения для каждого вектора свободных членов.

Алгоритм блочного LU-разложения и последующего решения СЛАУ имеет вид:

1. $\mathbf{U}_{00} = \mathbf{A}$, $\mathbf{U}_{01} = \mathbf{B}$.
2. $\mathbf{L}_{10} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ относительно \mathbf{L}_{10} .

3. $\mathbf{U}_{11} = \mathbf{D} - \mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01}$ (дополнение Шура).
4. Решить $\mathbf{U}_{00}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{V}_0$.
5. $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{Y}_0$.
6. Решить $\mathbf{U}_{11}\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{Y}_1$.
7. $\mathbf{X}_0 = \mathbf{U}_{01}\mathbf{\Sigma}_1$.
8. Решить $\mathbf{U}_{00}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_0$.
9. $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Z}$.

Данный алгоритм блочного LU-разложения использует матрично-матричные операции (базовые подпрограммы линейной алгебры, BLAS3), которые предпочтительно использовать для получения высокой производительности [135]. При изменении блока \mathbf{D} и использовании многократного LU-разложения реализуется только одна операция вычитания, так как произведение $\mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01}$ уже получено и сохранено.

Для получения численных оценок использовано LU-разложение из бесплатно распространяемой библиотеки линейной алгебры Eigen [130], написанной на языке C++, а также блочный алгоритм, реализованный с помощью функций данной библиотеки. Все вычислительные эксперименты здесь выполнены с помощью матриц порядка $N = 1000$.

Сначала оценено время, затрачиваемое на 1000 LU-разложений. При использовании LU-разложения из библиотеки Eigen затраты составили 196 с. Затраты времени на блочное LU-разложение, в зависимости от N_A/N , сведены в табл. 6.5. Видно, что затраты времени на последовательное LU-разложение многократно превышают затраты на блочное разложение, поскольку один раз выполняется полный расчет элементов, а далее многократно пересчитывается только блок \mathbf{D} . При увеличении отношения N_A/N ускорение увеличивается, поскольку размер блока \mathbf{D} уменьшается, и операции с ним занимают меньше в общем времени решения.

Таблица 6.5

**Затраты времени на блочное LU-разложение
при изменении отношения N_A/N**

| N_A/N | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---------------|------|-----|------|-----|------|------|------|-------|------|
| $T, \text{с}$ | 5,72 | 4,1 | 3,34 | 2,5 | 1,79 | 1,19 | 0,71 | 0,281 | 0,11 |

Далее оценено время однократного LU-разложения стандартного библиотечного (LU) и блочного (Block LU) и последующих решений при $N_{\text{COND}} = 5, 10, 15$ в диапазоне изменения N_A/N . Полученные результаты приведены на рис. 6.6. Видно, что минимальное время при использовании стандартного разложения по сравнению

блочным в 2 раза меньше, а на краях диапазона N_A/N это отношение достигает 4 раз. Минимальное время при использовании блочного разложения в точке $N_A/N = 0,5$ связано с делением исходной матрицы на блоки равного размера. Таким образом, для однократного решения СЛАУ с N_{COND} правыми частями (векторами свободных членов) блочный алгоритм использовать неэффективно.

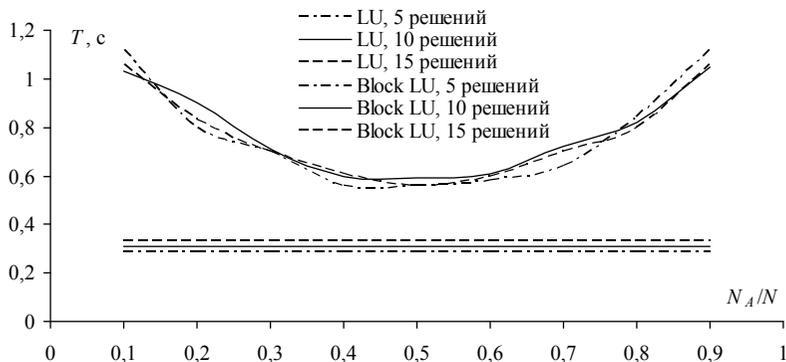


Рис. 6.6. Время однократного LU-разложения с получением из него решений СЛАУ для 5, 10, 15 векторов свободных членов в зависимости от N_A/N (горизонтальными линиями показано время при использовании стандартного разложения)

Поскольку, как показано выше, для многократного решения СЛАУ с изменяющимся блоком \mathbf{D} предпочтительнее использовать блочное разложение, а для однократных вычислений – стандартное, то далее выполнена оценка временных затрат на многократное решение СЛАУ с несколькими правыми частями ($N_{COND} = 5, 10, 15$). Полученные результаты приведены на рис. 6.7. Количество повторений LU-разложения принято равным 2^k , где $k = 8, 9$ и 10 . Видно, что при малых значениях N_A/N время решения СЛАУ с помощью блочного разложения в несколько раз превышает время решения с помощью стандартного. В зависимости от количества правых частей и k , поведение зависимостей различно. При этом, начиная со значения $N_A/N \approx 0,53$, использование блочного разложения становится предпочтительным. Вычислительные оценки ускорения при использовании блочного разложения относительно стандартного сведены в табл. 6.6. Видно, что ускорение с ростом N_A/N до 0,9 возрастает до 20 раз, а с ростом количества решаемых СЛАУ – до 35 раз.

Таким образом, использование блочного LU-разложения для ускорения многократного решения СЛАУ с частично меняющейся матрицей может быть эффективно. Так, с ростом N_A/N это ускорение

значительно возрастает. При этом стоит отметить, что на практике существуют структуры, для которых это ускорение будет достигать десятков раз. Например, для структур с большим числом границ проводник-диэлектрик, а также малым числом границ диэлектрик-диэлектрик, или для структур с большим числом диэлектриков, но изменяющейся относительной диэлектрической проницаемостью только одного из них.

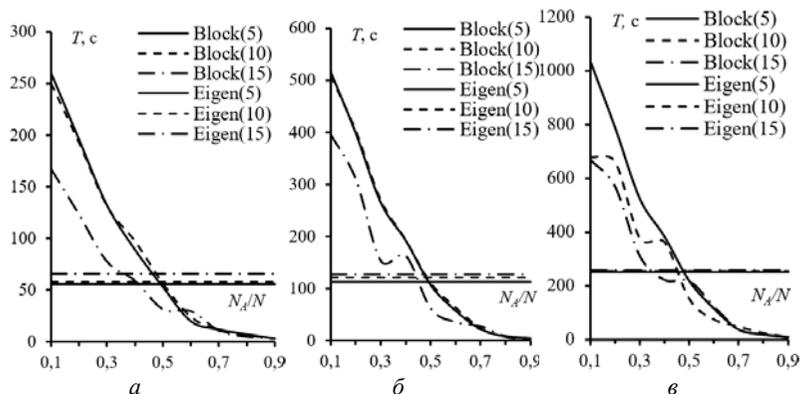


Рис. 6.7. Время (T , с) решения 2^k СЛАУ с 5, 10, 15 правыми частями при $k = 8$ (а), 9 (б), 10 (е) в зависимости от N_A/N (горизонтальными линиями показано время при использовании стандартного разложения)

Т а б л и ц а 6.6

Ускорение при использовании блочного разложения относительно стандартного при решении 2^k СЛАУ

| N_A/N | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|-----|-----|------|------|-----|
| $T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 8$ | 1,3 | 2,4 | 5,5 | 9,2 | 20 |
| $T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 9$ | 1,4 | 2,4 | 5 | 16 | 30 |
| $T_{\text{Eigen}}/T_{\text{Block}}, k = 10$ | 1,4 | 2,4 | 6,25 | 17,3 | 35 |

Как было показано выше, для реализации предложенного блочного разложения надо дважды найти \mathbf{A}^{-1} . Поэтому, для сокращения вычислительных затрат, алгоритм можно изменить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{00} &= \mathbf{A}^{-1}, & \mathbf{U}_{01} &= \mathbf{U}_{00}\mathbf{B}, \\ \mathbf{L}_{10} &= \mathbf{C}, & \mathbf{U}_{11} &= \mathbf{D} - \mathbf{L}_{10}\mathbf{U}_{01} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{U}_{00}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Видно, что тогда при изменении блока \mathbf{D} в разложении изменяется только \mathbf{U}_{11} . Таким образом, при модификации ε_r , используя данное представление матрицы, необходимо пересчитывать только элементы матрицы \mathbf{U}_{11} , при этом второй раз обращаться не

надо. Поскольку матрицы \mathbf{L} и \mathbf{U} , полученные после LU-разложения, хранятся на месте исходной матрицы \mathbf{S} , т.е. записываются на ее место, то алгоритм вычислений примет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}^{-1}; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}\mathbf{B}; \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим решение СЛАУ с матрицей, полученной после разложения по описанной последовательности.

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{L}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}.$$

Обозначив $\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{X}$, получим:

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{10} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_0;$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{L}_{10}\mathbf{V}_0,$$

где \mathbf{V}_0 и \mathbf{X}_0 – блоки размера $N_A \times N_{\text{COND}}$, а \mathbf{V}_1 и \mathbf{X}_1 – $N_D \times N_{\text{COND}}$. Делая обратную подстановку, получим:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_0 \\ \boldsymbol{\Sigma}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_1 = (\mathbf{U}_{11})^{-1}\mathbf{X}_1;$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = (\mathbf{U}_{00})^{-1}(\mathbf{X}_0 - \mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1) = (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{X}_0 - (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1 = (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{V}_0 - (\mathbf{U}_{00})^{-1}\mathbf{U}_{01}\boldsymbol{\Sigma}_1.$$

Объединив ранее полученные выражения, получим алгоритм для нахождения матрицы решения $\boldsymbol{\Sigma}$.

- 1 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$,
- 2 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}$,
- 3 $\mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B}$,
- 4 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{V}_0$,
- 5 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{X}_0$,
- 6 $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_1$,
- 7 $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_1$.

Тогда алгоритм m -кратного вычисления матрицы \mathbf{C} примет вид.

Алгоритм 6.3 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы \mathbf{C} с использованием блочного LU-разложения

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1\mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1\mathbf{V}_0$
- 8 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1\mathbf{X}_0$
- 9 Иначе
- 10 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 11 Вычислить диагональные элементы блока \mathbf{D}^k

- 12 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$
 13 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$
 14 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1 \Sigma_1^k$
 15 Вычислить элементы емкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}_k$
 16 Увеличить k

Если в структуре отсутствует бесконечная заземленная плоскость, то при изменении ε_r , помимо изменения значений элементов, расположенных на диагонали матрицы, соответствующих N_D подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, также меняются элементы последней «дополнительной» строки. Данный факт приводит к тому, что при $k = 1$ полученное произведение блоков \mathbf{CB} нет смысла запоминать, для возможности дальнейшего использования, поскольку изменение ε_r приводит к изменению блока \mathbf{C} , и соответственно всего произведения.

Таким образом, при решении задачи многократного вычисления ёмкостной матрицы анализируемой структуры может как присутствовать, так и отсутствовать плоскость земли. В первом случае, при изменении ε_r , меняются только диагональные элементы блока \mathbf{D} , а во втором – диагональные элементы блока \mathbf{D} и элементы последней «дополнительной» строки матрицы. Далее рассмотрим более подробно каждый из этих вариантов в отдельности.

62.2. Наличие в анализируемой структуре плоскости земли

Поскольку при изменении ε_r , как отмечено выше, изменяются только элементы главной диагонали блока \mathbf{D} , то данный факт можно использовать для совершенствования алгоритма 6.3. Для этого представим матрицу СЛАУ в виде

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Diag} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{Diag} – диагональная матрица размера $N_D \times N_D$. Очевидно, что

$$\mathbf{D} = \underline{\mathbf{D}} + \mathbf{Diag}$$

и, в данном случае, диагональные элементы матрицы $\underline{\mathbf{D}}$ равны нулю, а диагональная матрица \mathbf{Diag} необходима для хранения изменяющихся элементов матрицы. Таким образом, выражение $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ (строка 12 алгоритма 6.3) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{D}^k = \underline{\mathbf{D}}^k + \mathbf{Diag}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k.$$

Поскольку в данном случае (структура с плоскостью земли) элементы блоков $\underline{\mathbf{D}}$, \mathbf{C} и \mathbf{B} не зависят от k (изменение ε_r), то последнее выражение преобразуется к виду

$$\mathbf{D}^k = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{CB} + \mathbf{Diag}^k.$$

Таким образом, если вычислить $\mathbf{D} = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{C}\mathbf{B}$ при $k = 1$, то, каждый раз добавляя диагональную матрицу \mathbf{Diag}^k , будем получать требуемую матрицу \mathbf{D}^k . Тогда СЛАО можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^k & \mathbf{B}^k \\ \mathbf{C}^k & \underline{\mathbf{D}} + \mathbf{Diag}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_0^k \\ \Sigma_1^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}.$$

Размеры блоков Σ_0^k и $\mathbf{V}_0 - N_A \times N_{\text{COND}}$, а Σ_1^k и $\mathbf{V}_1 - N_D \times N_{\text{COND}}$, $N = N_A + N_D$. С учетом этого алгоритм 6.3 можно представить в следующем виде.

Алгоритм 6.4 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ с использованием блочного LU-разложения при изменении диагональных элементов блока \mathbf{D}

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1 и сохранить элементы главной диагонали блока \mathbf{D} в матрице \mathbf{Diag}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{D}^1 = \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$
- 8 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
- 9 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$
- 10 Иначе
- 11 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 12 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k + \mathbf{Diag}^k$
- 13 $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$
- 14 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1 \Sigma_1^k$
- 15 Вычислить элементы ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 16 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{Diag}^k$
- 17 Вычислить элементы матрицы \mathbf{Diag}^{k+1}
- 18 Увеличить k

6.2.3. Отсутствие в анализируемой структуре плоскости земли

Как отмечалось выше, если плоскость земли отсутствует, изменение ϵ_r приводит к изменению блока \mathbf{C} , и соответственно всего произведения $\mathbf{C}\mathbf{B}$. Поскольку в данном случае в блоке \mathbf{C} изменяется только последняя «дополнительная» строка, то с учетом этого усовершенствован алгоритм 6.3. Для пояснения сути изменений, представим первую матрицу СЛАО в виде (индекс матрицы опущен)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{A} – блок размера $N_A \times N_A$; \mathbf{B} – $N_A \times N_D^*$; \mathbf{E} – $N_A \times 1$; \mathbf{C} – $N_D^* \times N_A$; \mathbf{D} – $N_D^* \times N_D^*$; \mathbf{F} – $N_D^* \times 1$; \mathbf{G} – $1 \times N_A$; \mathbf{H} – $1 \times N_D^*$; \mathbf{I} – 1×1 ; $N_A = N - N_D$, $N_D^* = N_D - 1$.

Таким образом, с изменением ϵ_r при анализе структуры, у которой отсутствует плоскость земли, изменятся не только элементы главной диагонали блока \mathbf{D}^k , но и элементы последней строки, а именно блоков \mathbf{G} , \mathbf{H} и \mathbf{I} . С учетом этого алгоритм 6.3 можно преобразовать к виду (без учета изменения диагональных элементов блока \mathbf{D}^k).

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$
- 6 $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$
- 7 $\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{E}^1$
- 8 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$
- 9 $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{E}^1$
- 10 $\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$
- 10 Иначе
- 11 $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$
- 12 Вычислить диагональные элементы блока \mathbf{D}^k
- 13 Вычислить элементы блока \mathbf{G}^k
- 14 Вычислить элементы блока \mathbf{H}^k
- 15 Вычислить элементы блока \mathbf{I}^k
- 16 $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{B}^1$
- 17 $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{E}^1$
- 18 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} \mathbf{X}_0$
- 19 Решить СЛАУ $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^k & \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{H}^k & \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \Sigma_1^k = \mathbf{X}_1$
- 20 $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{E}_1] \Sigma_1^k$
- 21 Вычислить элементы емкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}^k$
- 22 Увеличить k

К данному алгоритму аналогично предыдущему случаю (когда в структуре присутствует плоскость земли) можно использовать дополнительную диагональную матрицу (**Diag**), для сокращения

числа арифметических операций. С учетом этого окончательный вид алгоритма примет следующий вид.

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы S_1 и сохранить элементы главной диагонали блока D в матрице \mathbf{Diag}_1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий V
- 5 $A^1 = (A^1)^{-1}$
- 6 $B^1 = A^1 B^1$
- 7 $E^1 = A^1 E^1$
- 8 $D^1 = D - C^1 B^1$
- 9 $X_0 = A^1 V_0$
- 10 $F^1 = F^1 - C^1 E^1$
- 11 Иначе
- 12 $S^k = S^1$
- 13 Вычислить элементы блока G^k
- 14 Вычислить элементы блока H^k
- 15 Вычислить элементы блока I^k
- 16 $H^k = H^k - G^k B^1$
- 17 $I^k = I^k - G^k E^1$
- 18 $D^k = D^k + \mathbf{Diag}^k$
- 19 $X_1 = V_1 - \begin{bmatrix} C^1 \\ G^k \end{bmatrix} X_0$
- 20 Решить СЛАУ $\begin{bmatrix} D^k & F^1 \\ H^k & I^k \end{bmatrix} \Sigma_1^k = X_1$
- 21 $\Sigma_0^k = X_0 - [B_1 \quad E_1] \Sigma_1^k$
- 22 Вычислить элементы емкостной матрицы C^k
- 23 $D^k = D^k - \mathbf{Diag}^k$
- 24 Вычислить элементы матрицы \mathbf{Diag}^{k+1}
- 25 Увеличить k

Дополнительно может быть усовершенствован еще один шаг алгоритма – строка 19. Для этого представим блоки матриц V_1 и X_1 размера $N_D \times N_{COND}$ в виде

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{11} \end{bmatrix} \text{ и } X_1 = \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{11} \end{bmatrix},$$

где V_{10} и X_{10} – блоки размера $N_{D*} \times N_{COND}$, а V_{11} и X_{11} – $1 \times N_{COND}$, тогда

$$X_1 = V_1 - \begin{bmatrix} C^1 \\ G^k \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} V_{10} - C_1 X_{10} \\ V_{11} - G_k X_{10} \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{X}_{10} = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_0 \text{ и } \mathbf{X}_{11} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{G}_k \mathbf{X}_0.$$

6.2.4. Обобщенный алгоритм

Объединив алгоритмы для обоих случаев (когда в анализируемой структуре присутствует и отсутствует плоскость земли), получим обобщенный алгоритм для вычисления емкостных матриц.

Алгоритм 6.5 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ произвольной структуры с использованием блочного LU-разложения

```
1 Для  $k$  от 1 до  $m$ 
2   Если  $k = 1$ 
3     Вычислить элементы матрицы  $\mathbf{S}^1$  и сохранить элементы главной диагонали блока  $\mathbf{D}$  в матрице  $\mathbf{Diag}^1$ 
4     Вычислить элементы матрицы воздействий  $\mathbf{V}$ 
5      $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$ 
6      $\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^1$ 
7      $\mathbf{D}^1 = \mathbf{D} - \mathbf{C}^1 \mathbf{B}^1$ 
8      $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$ 
9     Если в структуре присутствует плоскость земли
10     $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$ 
11    Иначе
12       $\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{E}^1$ 
13       $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{E}^1$ 
14       $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^1 - \mathbf{G}^1 \mathbf{B}^1$ 
15       $\mathbf{I}^1 = \mathbf{I}^1 - \mathbf{G}^1 \mathbf{E}^1$ 
16       $\mathbf{X}_{10} = \mathbf{V}_{10} - \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_0$ 
17    Иначе
18       $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^1$ 
19      Если в структуре отсутствует плоскость земли
20        Вычислить элементы блока  $\mathbf{G}^k$ 
21        Вычислить элементы блока  $\mathbf{H}^k$ 
22        Вычислить элементы блока  $\mathbf{I}^k$ 
23         $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{B}^k$ 
24         $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^k - \mathbf{G}^k \mathbf{E}^k$ 
25       $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k + \mathbf{Diag}^k$ 
26      Если в структуре присутствует плоскость земли
27         $\mathbf{\Sigma}_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$ 
28         $\mathbf{\Sigma}_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1 \mathbf{\Sigma}_1^k$ 
29      Иначе
30         $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{V}_{11} - \mathbf{G}^k \mathbf{X}_0$ 
31      Решить СЛАУ  $\begin{bmatrix} \mathbf{D}^k & \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{H}^k & \mathbf{I}^k \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1^k = \mathbf{X}_1$ 
```

- 32 $\Sigma_0^k = X_0 - [B_1 \ E_1] \Sigma_1^k$
 33 Вычислить элементы ёмкостной матрицы \underline{C}^k
 34 $D^k = D^k - \text{Diag}^k$
 35 Вычислить элементы Diag^{k+1}
 36 Увеличить k

6.2.5. Вычислительные эксперименты

Приведенные выше алгоритмы (исходный 6.1 и усовершенствованные 6.3 и 6.5) реализованы в системе TALGAT с использованием библиотеки Eigen. В системе ранее были реализованы две команды для вычисления ёмкостной матрицы \underline{C} : **SMN_C** и **CALCULATE_C**. В ходе разработки дополнительно реализованы команды **SMN_C_UPDATE** для вычисления матрицы **S** при изменении значения ϵ_r и выбора двух вариантов дальнейшего решения **SET_MOM2D_BLOCK_SOLVE**. При задании **SET_MOM2D_BLOCK_SOLVE 0** используется алгоритм обычного LU-разложения, а при **SET_MOM2D_BLOCK_SOLVE 1** – алгоритм блочного LU-разложения. Чтобы узнать, какое значение установлено в данный момент, реализована команда **GET_MOM2D_BLOCK_SOLVE**, по возвращаемому значению которой и определяется установленное в данный момент значение.

Далее приведены результаты вычислительного эксперимента, позволяющие оценить эффективность предложенных усовершенствований. Для исследований с помощью скрипта TALGAT создана программа, формирующая соединитель СНП 339 (геометрическая модель поперечного сечения показана на рис. 6.8, *a*), имеющий 42 внутренних проводника во внешнем прямоугольном (опорном) проводнике-корпусе. Вокруг каждого внутреннего проводника и внутри внешнего проводника имеется тонкий слой воздуха (рис. 6.8, *б* и *в*).

При изменении параметров сегментации проводников и диэлектриков (отношения N_A/N) оценивалось ускорение, которое возможно получить при использовании блочных операций в скрипте TALGAT. Целью моделирования являлась оценка временных затрат на вычисление 10 ёмкостных матриц ($\epsilon_r = 5; 5,5; \dots; 9,5$) при учащении сегментации проводников и диэлектриков. Для достижения этой цели использованы СЛАНУ 3 порядков (N), а также 2 РС, характеристики которых приведены в табл. 6.7.

Временные затраты приведены в табл. 6.8 с ростом N_A/N для каждого значения N увеличивается выигрыш по времени при использовании алгоритма 6.3 по сравнению с алгоритмом 6.1, независимо от используемой РС. Максимальный выигрыш достигает

2,5 раза при $N=4145$ и $N_A/N=0,81$, в случае использования РС1. Таким образом, очевидна более высокая эффективность использования алгоритма 6.3 по сравнению с алгоритмом 6.1 для многократного вычисления емкостной матрицы.

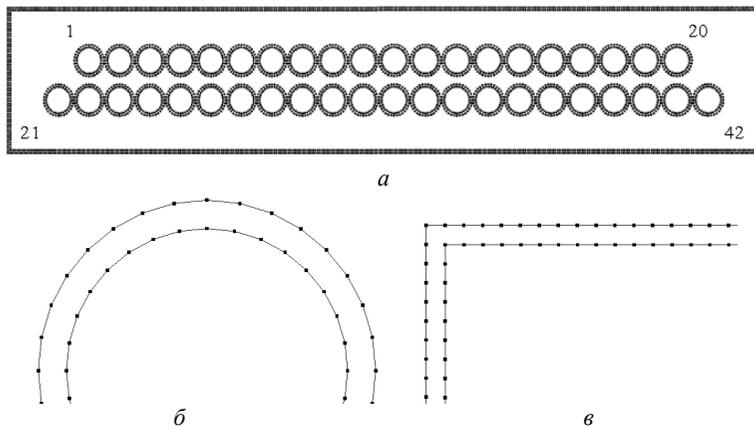


Рис. 6.8. Геометрическая модель поперечного сечения соединителя с наличием диэлектрических слоев (а), увеличенные фрагменты внутреннего круглого (б) и внешнего прямоугольного (в) проводников с воздушными слоями

Таблица 6.7

Характеристики рабочих станций (РС)

| № РС | Платформа | Частота процессора, МГц | Объем ОЗУ, Гб | Количество ядер/потоков | Операционная система |
|------|--------------------------------|-------------------------|---------------|-------------------------|----------------------|
| 1 | CPU Intel Celeron(R) CPU P4500 | 3200 | 2 | 2/2 | Windows 7 |
| 2 | CPU Intel Core i7-970 | 1870 | 12 | 6/12 | Windows 7 |

Таблица 6.8

Время вычисления (T , с) 10 ёмкостных матриц, используя алгоритмы 6.1 и 6.3, при участии сегментации проводников и диэлектриков

| N_A/N | № РС | $N = 1037$ | | | $N = 2071$ | | | $N = 4145$ | | |
|---------|------|------------|-----------|-------------------|------------|-----------|-------------------|------------|-----------|-------------------|
| | | $T_{6.1}$ | $T_{6.3}$ | $T_{6.1}/T_{6.3}$ | $T_{6.1}$ | $T_{6.3}$ | $T_{6.1}/T_{6.3}$ | $T_{6.1}$ | $T_{6.3}$ | $T_{6.1}/T_{6.3}$ |
| 0,18 | 1 | 14,5 | 11,7 | 1,24 | 63,5 | 48,2 | 1,31 | 322,4 | 271,2 | 1,19 |
| | 2 | 5 | 4,3 | 1,16 | 20,2 | 16 | 1,26 | 92,3 | 68,3 | 1,35 |
| 0,50 | 1 | 12,9 | 8 | 1,61 | 57,6 | 40,1 | 1,44 | 275,4 | 167,3 | 1,65 |
| | 2 | 4,3 | 3,3 | 1,30 | 17,6 | 12 | 1,47 | 79,6 | 48,9 | 1,63 |
| 0,81 | 1 | 10,4 | 5,9 | 1,76 | 52,5 | 23,6 | 2,22 | 241,3 | 98 | 2,46 |
| | 2 | 3,2 | 2,2 | 1,45 | 14 | 8,3 | 1,69 | 67,9 | 38,4 | 1,77 |

Для оценки последующих усовершенствований алгоритма 6.3 проведен аналогичный вычислительный эксперимент на РС1 с матрицей $N = 4145$ при изменении сегментации проводников и диэлектриков, для алгоритмов 6.3 и 6.5. Результаты приведены в табл. 6.9. Для наглядности также приведены результаты при использовании алгоритма 6.1, не использующего блочное представление матрицы, а также отношения времени работы алгоритмов. Видно, что использование алгоритма 6.5 предпочтительнее, чем алгоритмов 6.1 и 6.3. Так, оно дает ускорение по сравнению с алгоритмом 6.1 около 2,7 раза при $N_A/N = 0,81$ и около 1,5 раза при $N_A/N = 0,18$ по сравнению с алгоритмом 6.3. В случае использования алгоритма 6.2, являющегося матричной версией исходного алгоритма, полученный выигрыш незначительно снизится. Стоит отметить, что увеличение количества определяемых емкостных матриц приведет к увеличению временного выигрыша при использовании предложенных усовершенствований.

Таблица 6.9

**Время вычисления ёмкостных матриц,
используя алгоритмы 6.1, 6.3 и 6.5 при $N = 4145$ для РС1**

| N_A/N | $T_{6.1}$ | $T_{6.3}$ | $T_{6.5}$ | $T_{6.1}/T_{6.3}$ | $T_{6.1}/T_{6.5}$ | $T_{6.3}/T_{6.5}$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0,18 | 322,4 | 271,2 | 185,4 | 1,19 | 1,74 | 1,46 |
| 0,50 | 275,4 | 167,3 | 119,9 | 1,46 | 2,3 | 1,4 |
| 0,81 | 241,3 | 98 | 89,1 | 2,46 | 2,71 | 1,1 |

Далее получены аналитические оценки арифметической сложности и ускорения при использовании алгоритма 6.4 (6.5 при наличии плоскости земли) относительно алгоритма 6.2 (матричная версия исходного алгоритма 6.1). В случае изменения диагональных элементов блока **D** изменятся только элементы блока U_{11} , а все остальные блоки (U_{00} , U_{01} , L_{10}) останутся неизменными. За счет этого достаточно лишь однократно вычислить U_{00}^{-1} и $L_{10}U_{01}$. Таким образом, при выполнении m вычислений будет однократно выполняться вычислительно затратное разложение матрицы СЛАУ (требующее приведения матрицы к пригодному для дальнейших вычислений виду) и выполняется последующие $m - 1$ вычислений блока U_{11} .

Для оценки ускорения рассмотрим (аналогично работе [136]) отношение (β) общего времени решения m СЛАУ согласно алгоритма 6.2 (последовательное LU-разложения) ко времени вычисления по алгоритму 6.4 (блочное LU-разложения):

$$\beta = \frac{mT_{LU}}{T_1 + (m-1)T_S}, \quad (6.1)$$

где T_1 – время первого решения; T_S – время последующего решения СЛАУ (время решения СЛАУ при готовом LU-разложении примем равным для обоих алгоритмов). Тогда с помощью (6.1) получим оценку максимально возможного ускорения:

$$\beta_{\max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mT_{LU}}{T_1 + (m-1)T_S} = \frac{T_{LU}}{T_S}. \quad (6.2)$$

Из выражений (6.1) и (6.2) следует, что чем больше m , тем меньше ускорение зависит от времени первого решения. Также видно, что величина ускорения обратно пропорциональна времени вычисления блока \mathbf{U}_{11} , которое определяется порядком этого блока. Так, при больших m и малых N_D можно получить значительное ускорение многократных вычислений, в то время как при малых m и больших N_D ускорение будет незначительным или его вообще не будет.

Из алгоритма 6.4 видно, что на первом шаге ($k = 1$) выполняется приведение исходной матрицы СЛАУ \mathbf{S} к блочному виду, а на последующих шагах ($k > 1$) выполняются обращения блоков \mathbf{D}^k , с изменяющимися диагональными элементами, для нахождения требуемых матриц Σ^k .

Таким образом, только первое (при $k = 1$) нахождение емкостной матрицы является вычислительно затратным. Для детальной оценки вычислительных затрат и ускорения усовершенствованным алгоритмом необходимо выполнить аналитическую оценку арифметических затрат на реализацию исходного и усовершенствованного алгоритмов.

Перед оценкой затрат необходимо отметить, что алгоритмы содержат ряд вспомогательных шагов, необходимых для формирования матрицы СЛАУ на основании параметров исходной структуры проводников и диэлектриков, ее модификации для каждого нового (начиная со второго) значения относительной диэлектрической проницаемости, а также для вычисления элементов емкостной матрицы. Эти затраты много меньше затрат на решение СЛАУ и не связаны непосредственно с ним, поэтому далее они не учитывались.

Исходный алгоритм вычисления ряда емкостных матриц основан на последовательном алгоритме LU-разложения, поэтому сначала выполним оценку его арифметической сложности (Q). Известно, что арифметическая сложность алгоритма последовательного LU-разложения состоит из затрат на операции прямого (Q_{FW}) и обратного (Q_{BW}) ходов [137]:

$$Q_{FW} = \frac{4N^3 - 3N^2 - N}{6}, \quad Q_{BW} = 2N^2 - N. \quad (6.3)$$

Тогда общая сложность вычисления m ёмкостных матриц алгоритмом 6.2 составляет

$$Q_{LU} = Q_{FW} + N_{\text{COND}} Q_{BW}. \quad (6.4)$$

Из алгоритма 6.4 видно, что для вычисления одной ёмкостной матрицы необходимо однократно выполнить обращение блока \mathbf{A} , а на каждом k -м шаге – блока \mathbf{D}_k . Если для обращения матрицы порядка N используется LU-разложение с последующим решением СЛАУ с двумя треугольными матрицами, тогда с учетом (6.3) сложность обращения исходной матрицы составляет

$$Q_{INV} = Q_{FW} + N Q_{BW} = \frac{8}{3} N^3 - \frac{3}{2} N^2 - \frac{1}{6} N. \quad (6.5)$$

Оценим сложность перемножения матриц и матричного вычитания. Так, на умножение матриц размером $N_1 \times N_2$ и $N_2 \times N_3$ требуется

$$Q_{MM} = N_3 N_1 (2N_2 - 1) \quad (6.6)$$

операций, а на вычитание матриц размером $N_1 \times N_2$ –

$$Q_{SM} = N_1 N_2. \quad (6.7)$$

В табл. 6.10 сведены операции алгоритма 6.4 (арифметические действия, направленные на решение СЛАУ) и их сложность, согласно (6.5)–(6.7). Учитывались только операции, направленные на решение СЛАУ. При вычислениях полагалось $N = N_A + N_D$. Номера матриц (верхние индексы) опущены.

Далее, используя данные из табл. 6.10, получена арифметическая сложность первого решения СЛАУ при N_{COND} проводников в структуре

$$Q_f = Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}$$

и последующих $(m-1)$ вычислений

$$Q_{m-1} = (m-1)(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}).$$

Тогда для m -кратного решения СЛАУ при использовании алгоритма 6.4 для вычисления ёмкостной матрицы требуется

$$Q_{BLU} = Q_f + Q_{m-1} = Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + m(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16}) \quad (6.8)$$

операций. Таким образом, получим аналитическое выражение для оценки ускорения (β_Q) m -кратного вычисления ёмкостной матрицы в виде отношения количества операций алгоритма 6.2 к количеству операций алгоритма 6.4:

$$\beta_Q = \frac{m Q_{LU}}{Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 + Q_{10} + m(Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{16})}. \quad (6.9)$$

Для получения пороговых значений параметров СЛАУ, после которых предложенный алгоритм 6.4 эффективнее исходного алго-

ритма 6.2, выполнен ряд оценок по (6.9). Так, в табл. 6.11 приведены оценки при $N = 1000$, $N_A = 100, 500, 900$, $N_{\text{COND}} = 1, 2, 10$ и $m = 100, 200, \dots, 1000$.

Таблица 6.10

| Оценки арифметической сложности шагов алгоритма 6.4 | | |
|---|--|--|
| № шага | Действие | Арифметическая сложность (Q) |
| Однократно выполняемые операции | | |
| 5 | $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ | $Q_5 = \frac{8}{3}N_A^3 - \frac{3}{2}N_A^2 - \frac{1}{6}N_A$ |
| 6 | $\mathbf{B} = \mathbf{AB}$ | $Q_6 = N_D N_A (2N_A - 1)$ |
| 7 | $\mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{CB}$ | $Q_7 = 2N_A N_D^2$ |
| 9 | $\mathbf{X}_0 = \mathbf{AV}_0$ | $Q_9 = N_A N_{\text{COND}} (2N_A - 1)$ |
| 10 | $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{CX}_0$ | $Q_{10} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$ |
| Многokrратно выполняемые операции ($m - 1$) | | |
| 12 | $\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{Diag}$ | $Q_{12} = N_D$ |
| 13 | $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_1$ | $Q_{13} = \frac{8}{3}N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$ |
| 14 | $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}\mathbf{\Sigma}_1$ | $Q_{14} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$ |
| 16 | $\mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{Diag}$ | $Q_{16} = N_D$ |

На основе полученных результатов (табл. 6.11) можно сделать несколько выводов. Для однократных вычислений, как и было показано ранее, алгоритм 6.4 не эффективен, что объясняется высокими затратами на обращение блоков \mathbf{A} и \mathbf{D} . Однако при $N_A = 500$ на реализацию алгоритма требуется меньше вычислительных операций, чем при $N_A = 900$ и $N_A = 100$, что связано с оптимальным соотношением размеров блоков, на которые разбита матрица. Данный алгоритм может быть не эффективен и для многократных вычислений. Так при $N_A = 100$ для всех m и N_{COND} его затраты приблизительно в 3 раза больше затрат алгоритма 6.2. Однако, для многократных вычислений при $N_A = 500$ ускорение составляет 2 раза. Наибольшие ускорения достигаются при $N_A = 900$ – 101 раз при $N_{\text{COND}} = 10$ и 134 раза при $N_{\text{COND}} = 1$.

Для проверки корректности полученных аналитических оценок разработана программа для многократного решения СЛАУ [138], используемая для нахождения m ёмкостных матриц согласно алгоритмов 6.2 и 6.4. Использованы РС с параметрами из табл. 6.3. Вычислительные оценки ускорения выполнены при $N = 1000$, $N_A/N = 0,9$, $N_{\text{COND}} = 1, 10$ и $m = 100, 200, \dots, 1000$. Результаты сведены в

табл. 6.12. Для сравнения в ней приведены и аналитические оценки ускорения из табл. 6.11.

Таблица 6.11

| Оценки ускорения по (6.9) | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| m | 1 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| $N_{\text{COND}} = 1$ | | | | | | | | | | | |
| $N_A = 100$ | 0,31 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 |
| $N_A = 500$ | 0,57 | 1,95 | 1,98 | 1,98 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 |
| $N_A = 900$ | 0,31 | 27,73 | 49,59 | 67,26 | 81,84 | 94,1 | 104,52 | 113,5 | 121,32 | 128,18 | 134,27 |
| $N_{\text{COND}} = 2$ | | | | | | | | | | | |
| $N_A = 100$ | 0,31 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 | 0,34 |
| $N_A = 500$ | 0,57 | 1,95 | 1,97 | 1,98 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 |
| $N_A = 900$ | 0,31 | 27,56 | 48,98 | 66,1 | 80,1 | 91,75 | 101,6 | 110,05 | 117,37 | 123,77 | 129,42 |
| $N_{\text{COND}} = 10$ | | | | | | | | | | | |
| $N_A = 100$ | 0,32 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,35 |
| $N_A = 500$ | 0,59 | 1,95 | 1,98 | 1,98 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 | 1,99 |
| $N_A = 900$ | 0,32 | 26,33 | 44,68 | 58,20 | 68,58 | 76,80 | 83,47 | 88,98 | 93,63 | 97,58 | 101,00 |

Таблица 6.12

Аналитические и вычислительные оценки ускорения решения СЛАУ за счет использования алгоритма блочного LU-разложения для вычисления m емкостных матриц

| N_{COND} | Оценка | m | | | | | | | | | |
|-------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|
| | | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| 1 | Аналитика | 27,73 | 49,59 | 67,26 | 81,84 | 94,1 | 104,52 | 113,5 | 121,32 | 128,18 | 134,27 |
| | PC1 | 5,98 | 11,97 | 16,93 | 22,09 | 27,07 | 31,53 | 35,56 | 38,72 | 42,1 | 44,56 |
| | PC2 | 7,13 | 14,01 | 20,09 | 26,2 | 30,91 | 32,33 | 31,97 | 36,58 | 39,21 | 41,12 |
| 10 | Аналитика | 26,33 | 44,68 | 58,20 | 68,58 | 76,80 | 83,47 | 88,98 | 93,63 | 97,58 | 101,0 |
| | PC1 | 5,94 | 11,86 | 16,33 | 21,46 | 25,93 | 29,39 | 32,75 | 33,91 | 38,03 | 42,10 |
| | PC2 | 7,4 | 14,47 | 18,07 | 24,15 | 29,96 | 34,74 | 37,3 | 42,89 | 45,65 | 46,84 |

Результаты, представленные в табл. 6.12, подтверждают ряд оценок, сделанных выше. Однако, результаты аналитических оценок выше (в 3–5 раза для PC1 и в 2–4 раза для PC2) вычислительных, но характер роста ускорения одинаков: с увеличением m возрастает и ускорение. Необходимо отметить неоднозначное влияние количества правых частей N_{COND} на ускорение при аналитических и вычислительных оценках. Так, характер зависимости ускорения от N_{COND} , полученный аналитически и для PC1 совпадает – с увеличением N_{COND} ускорение уменьшается, однако обратный характер зависимости проявляется при использовании для вычислительных оценок PC2. Причины такой зависимости однозначно пояснить сложно. Вероятнее всего, это может быть связано с различием характеристик PC, используемых в эксперименте.

Далее проведены исследования зависимости времени и ускорения вычисления ёмкостной матрицы от порядка N матрицы СЛАУ, оценка которых актуальна для практических задач (анализ сложных структур).

Для исследования использована система TALGAT, в которой реализовано вычисление комплексной матрицы многопроводной МПЛ с учетом частотной зависимости материала подложки FR-4 [139]. Рассмотрена связанная микрополосковая линия (две полоски на диэлектрической подложке над идеально проводящей плоскостью). Вид её поперечного сечения в системе TALGAT приведен на рис. 6.9.

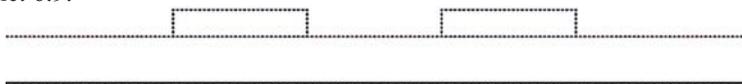


Рис. 6.9. Вид поперечного сечения связанной микрополосковой линии

Сначала получено время однократного вычисления матрицы \underline{C} для $N = 1125, 2250, 4500$ с разным числом проводниковых N_C и диэлектрических N_D подынтервалов при одинаковом соотношении $N_A/N = 0,53$ ($N = N_A + N_D$). Как было показано ранее, данное значение близко к оптимальному (с точки зрения минимизации временных затрат) для однократного решения СЛАУ. При этом использование алгоритма 6.4 (6.5 при наличии плоскости земли) для однократного вычисления ёмкостной матрицы не эффективно, так как при первом вычислении происходит приведение исходной матрицы к виду пригодному для последующих многократных вычислений.

При вычислениях использовалась рабочая станция: Intel(R) Core(TM) i7 CPU, частота процессора 2800 МГц, 4 ядра, объем ОЗУ 12288 Мб. В табл. 6.13 приведены время однократного и многократного ($m = 2^n$, где $n = 7, 8, 9, 10$) вычисления ёмкостной матрицы исходным 6.2 ($T_{6.2}$) и усовершенствованным 6.4 ($T_{6.4}$) алгоритмами, а также их соотношение.

Из табл. 6.13 видно, что, как и отмечалось ранее, алгоритм 6.4 не эффективен для однократного вычисления ёмкостной матрицы. Так, с ростом N отношение времен уменьшается и достигает 0,64 раза при $N = 4500$. Также видно, что время вычисления согласно алгоритма 6.4 меньше чем – 6.2. Ускорение возрастает от 2,9 до 3,7 раза, при росте N от 1125 до 4500 и практически не зависит от количества вычислений m . Это объясняется особенностью работы алгоритма 6.4. Важно отметить, что на первое вычисление, при использовании алгоритма 6.4, например, для $N = 4500$, затрачивается порядка 11 с, что для $m = 128$ составляет лишь 4% от общих временных

затрат. Таким образом, при больших значениях m время первого вычисления почти не влияет на общее время вычисления, что подтверждает полученное выражение (6.2).

Таблица 6.13

Время однократного и многократного вычисления ёмкостной матрицы алгоритмами 6.2 и 6.4 при $N_d/N = 0,53$

| m | N | $T_{6.2}, \text{с}$ | $T_{6.4}, \text{с}$ | $T_{6.2}/T_{6.4}$ |
|----------|------|---------------------|---------------------|-------------------|
| 1 | 1125 | 0,32 | 0,36 | 0,89 |
| | 2250 | 1,4 | 1,88 | 0,74 |
| | 4500 | 6,9 | 10,8 | 0,64 |
| 2^7 | 1125 | 40,2 | 13,9 | 2,9 |
| | 2250 | 182,2 | 57,4 | 3,2 |
| | 4500 | 887,0 | 248,2 | 3,6 |
| 2^8 | 1125 | 81,1 | 27,4 | 2,95 |
| | 2250 | 366,1 | 113,8 | 3,2 |
| | 4500 | 1777,2 | 489,1 | 3,6 |
| 2^9 | 1125 | 162,6 | 54,9 | 2,96 |
| | 2250 | 732,3 | 225,8 | 3,25 |
| | 4500 | 3552,2 | 970,6 | 3,65 |
| 2^{10} | 1125 | 325,3 | 109,2 | 2,98 |
| | 2250 | 1465,1 | 451,8 | 3,25 |
| | 4500 | 7101,5 | 1935,6 | 3,7 |

Далее исследовано применение предложенного блочного алгоритма 6.4 для вычисления временного отклика сигнала, передаваемого по линии передачи, при контролируемой точности вычислений. Сначала выполнен анализ точности результатов, а затем – скорости получения отклика. При моделировании задач ЭМС печатной платы необходимо знать значение относительной диэлектрической проницаемости её диэлектрической подложки. При этом, комплексная относительная диэлектрическая проницаемость является функцией, зависящей от частоты, т.е $\epsilon_r(f)$, что необходимо учитывать при вычислении временного отклика многопроводных линий передачи, т.к. это ведет к получению более «физических» результатов [140]. При этом, как упоминалось ранее, такое моделирование характеризуется довольно большими временными затратами, значительная часть которых связана с многократным (может достигать десятков тысяч) вычислением ёмкостной матрицы, поскольку она должна вычисляться на каждой частоте спектра воздействующего сигнала.

Оценка применимости алгоритма 6.4 выполнена путем увеличения длины подынтервалов l на границах диэлектрик-диэлектрик структуры (рис. 6.9). Данное увеличение ведет к уменьшению размера блока \mathbf{D} и, тем самым, общего времени вычислений. Выполнено

моделирование по получению отклика линии передачи длиной 1 м, при воздействии на неё трапециевидным импульсом с длительностью фронтов 100 пс и вершины 10 пс. Количество СЛАУ (временных отсчётов сигнала) составляло 2^{16} (отношение длительности анализируемого временного интервала к длительности одного отсчета). В качестве материала диэлектрической подложки взят широко распространённый FR-4, для которого зависимость $\epsilon_r(f)$ хорошо известна [141] и реализована в системе TALGAT в виде аппроксимирующей функции.

Сначала выполнено моделирование при учете $\epsilon_r(f)$ FR-4 с помощью обоих алгоритмов: исходного 6.2 и усовершенствованного 6.4. Корректность вычислений (отклик в конце активной линии) показана на рис. 6.10.

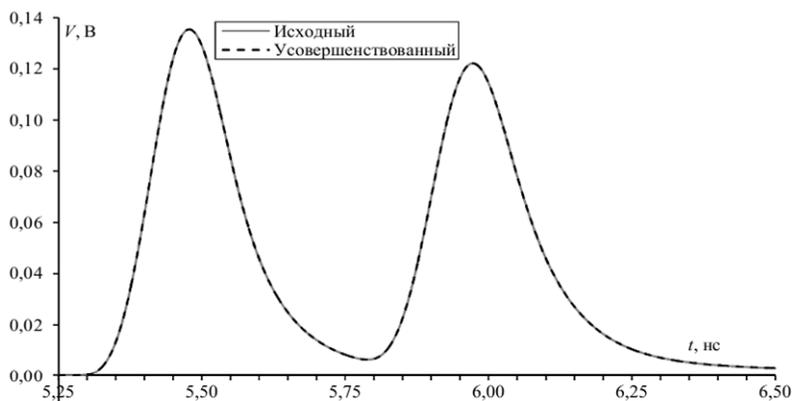


Рис. 6.10. Отклик в конце активного проводника связанной микрополосковой линии при использовании алгоритмов 6.2 (исходный) и 6.4 (усовершенствованный)

Далее оценено влияние на получаемый отклик изменения длины подынтервалов l границ диэлектрик-диэлектрик. С каждым вычислением отклика значение l удваивалось (от 5 мкм до 640 мкм). При значении $l = 640$ мкм диэлектрические границы больше не делятся на подынтервалы. Полученные результаты приведены на рис. 6.11, из которого следует, что рост l всё больше влияет на отклик. Так, график сдвигается влево, а амплитуды импульсов увеличиваются. В табл. 6.14 приведено время, в которое импульсы достигают своих максимальных значений, их амплитуды, а также ошибки по времени и амплитуде в зависимости от l (отличие результатов, полученных алгоритмами 6.2 и 6.4).

Из табл. 6.14 видно, что при увеличении l от 5 до 640 мкм время задержки уменьшилось на 4,22% для первого импульса и 3,21% – для второго. Разность задержек увеличилась на 8,11 %. При этом амплитуда первого импульса увеличилась на 4,35%, а второго – на 2,94%. Таким образом, даже при очень грубой сегментации на диэлектрических границах может сохраняться приемлемая точность вычисления отклика. На практике существуют структуры с большим числом диэлектрических слоев, сегментация которых сначала может быть очень грубой, а затем учащаться с контролем точности интересующего параметра. Такая процедура приведет к СЛАУ минимального размера N и, соответственно, к минимизации времени её решения. При этом N уменьшается за счет уменьшения числа подынтервалов на диэлектрических границах, так что $N_d/N \rightarrow 1$. Поэтому далее оценено ускорение, полученное за счет использования алгоритма 6.4.

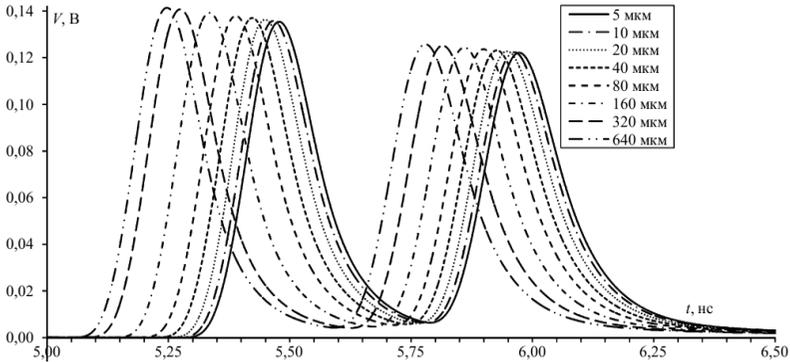


Рис. 6.11. Отклик в конце активного проводника линии передачи (рис. 6.9) при изменении l

Таблица 6.14

Время и амплитуда импульсов и их относительные ошибки в зависимости от l

| l , мкм | t_1 , нс | $ \Delta t_1 /t_1$, % | V_1 , В | $\Delta V_1/V_1$, % | t_2 , нс | $ \Delta t_2 /t_2$, % | V_2 , В | $\Delta V_2/V_2$, % | $t_2 - t_1$, нс | $\Delta(t_2 - t_1)/(t_2 - t_1)$, % |
|-----------|------------|------------------------|-----------|----------------------|------------|------------------------|-----------|----------------------|------------------|-------------------------------------|
| 5 | 5,4730 | 0 | 0,1355 | 0 | 5,9660 | 0 | 0,1222 | 0 | 0,493 | 0 |
| 10 | 5,4615 | -0,20 | 0,1358 | 0,22 | 5,9575 | -0,14 | 0,1224 | 0,16 | 0,496 | 0,60 |
| 20 | 5,4430 | -0,55 | 0,1363 | 0,59 | 5,9428 | -0,39 | 0,1228 | 0,49 | 0,500 | 1,41 |
| 40 | 5,4178 | -1,00 | 0,1371 | 1,18 | 5,9215 | -0,75 | 0,1232 | 0,82 | 0,504 | 2,23 |
| 80 | 5,3823 | -1,66 | 0,1378 | 1,69 | 5,8940 | -1,20 | 0,1237 | 1,22 | 0,512 | 3,85 |
| 160 | 5,3295 | -2,62 | 0,1393 | 2,80 | 5,8545 | -1,87 | 0,1244 | 1,80 | 0,525 | 6,50 |
| 320 | 5,2690 | -3,73 | 0,1408 | 3,91 | 5,8100 | -2,61 | 0,1252 | 2,45 | 0,541 | 9,73 |
| 640 | 5,2418 | -4,22 | 0,1414 | 4,35 | 5,7743 | -3,21 | 0,1258 | 2,94 | 0,533 | 8,11 |

В табл. 6.15 сведены время и ускорение вычисления отклика при задействованном одном и всех ядрах компьютера. Видно, что с загрузлением сегментации время вычислений значительно уменьшается. Так, для исходного алгоритма 6.2 сокращение составило примерно 6 раз, а для алгоритма 6.4 – 4 раза. При этом ускорение уменьшилось с 2 до 1,5 раза. Также видно, что алгоритм 6.4 при $l > 40$ мкм не ускоряется использованием нескольких ядер, а дальнейшее увеличение l нецелесообразно, поскольку ускорение возрастает незначительно, а ошибка – наоборот существенно. Так, например, при $l = 40$ мкм ускорение составляет 1,6–1,9 раза, а ошибка – порядка 2%. Таким образом, сохраняя приемлемую точность вычислений можно получить их ускорение.

Таблица 6.15

Время и ускорение вычисления отклика в зависимости от l при использовании одного и всех ядер компьютера

| l , мкм | N_A | N | N_A/N | Одно ядро | | | Все ядра | | |
|-----------|-------|-----|---------|---------------|---------------|-------------------|---------------|---------------|-------------------|
| | | | | $T_{6,2}$, с | $T_{6,4}$, с | $T_{6,2}/T_{6,4}$ | $T_{6,2}$, с | $T_{6,4}$, с | $T_{6,2}/T_{6,4}$ |
| 5 | 288 | 708 | 0,40 | 9825 | 4587 | 2,14 | 6565 | 3913 | 1,68 |
| 10 | 288 | 498 | 0,58 | 4341 | 2012 | 2,16 | 3215 | 1897 | 1,69 |
| 20 | 288 | 393 | 0,75 | 2668 | 1312 | 2,03 | 2174 | 1297 | 1,67 |
| 40 | 288 | 339 | 0,85 | 2057 | 1088 | 1,89 | 1757 | 1093 | 1,61 |
| 80 | 288 | 314 | 0,92 | 1820 | 1024 | 1,77 | 1601 | 1021 | 1,56 |
| 160 | 288 | 302 | 0,95 | 1722 | 995 | 1,73 | 1513 | 991 | 1,52 |
| 320 | 288 | 295 | 0,98 | 1654 | 976 | 1,69 | 1466 | 976 | 1,50 |
| 640 | 288 | 291 | 0,99 | 1610 | 969 | 1,66 | 1436 | 966 | 1,48 |

Отметим несколько факторов, повлиявших на незначительность полученного ускорения. Приведенные значения ускорения получены путем сложения временных затрат на многократное вычисление ёмкостной матрицы и вычисление отклика. При этом операции ускорения последнего не применялись. Вторым фактором является малость порядков матриц решаемых СЛАУ. Тот факт, что исследование выполнено на примере вычисления временного отклика лишь одного отрезка, простой линии передачи (содержащей только один диэлектрический слой) не означает, что алгоритм 6.4 не может применяться к более сложным структурам. Еще раз подчеркнем, что ускорение достигается именно на этапе вычисления ёмкостной матрицы, поэтому, чем сложнее структура, тем более выгодным ставится использование данного алгоритма. Помимо этого, ускорение (даже без загрузки сегментации) сильно зависит от конкретной структуры поперечного сечения линии передачи, и, в частности, от специфики её диэлектрических границ (числа диэлектриков, протя-

женности границ и начальной сегментации). Наконец, важно понимать, что специфика диэлектрического заполнения при закруглении сегментации может давать различные ошибки вычисления отклика, что требует их контроля.

Таким образом, полученное в предыдущем подразделе выражение для аналитической оценки, а также полученные оценки говорят об эффективности многократных вычислений ёмкостной матрицы с помощью блочного LU-разложения при изменении ϵ_r . Однако сравнение аналитических и вычислительных оценок показало, что результаты, полученное с помощью них, хоть и схожи по характеру зависимости от количества точек изменения матрицы СЛАУ m , однако отличаются по характеру зависимости от количества правых частей N_{COND} и по значениям. Поэтому далее выполнены более детальные оценки матричных операций, используемых при блочном LU-разложении.

Для оценки влияния программной реализации на эффективность разработанных алгоритмов 6.2 и 6.4 использованы математические пакеты Matlab, Octave и Scilab, широко используемые при научных исследованиях и инженерных расчетах [142, 143], а также библиотека Eigen. При вычислениях использовалась PC с параметрами: ОС – Microsoft Windows 7×64 бит, ЦПУ – Intel(R) Core(TM) i7 CPU 970 3,20 ГГц, ОЗУ – 24 Гб, а также пакеты Matlab 2013b (Intel MKL), Octave 4.4.0 (Open BLAS) Scilab 5.5.2 (Intel MKL), а также библиотека Eigen 3.3.4 и Microsoft Visual Studio 2013 ((Eigen::setNbThreads(6), ключи компиляции: /O2, /Ot, /Gt, /GL, /MD, /Qpar, /arch:SSE2, /openmp). Далее совместному использованию Eigen и Visual Studio соответствует обозначение пакет Eigen.

Вначале выполнено тестирование вариантов решения СЛАУ, основанных на LU-разложении на примере системы вида $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V}$, где \mathbf{S} – квадратная, действительная и плотная матрица (типовая матрица при анализе полосковых структур), \mathbf{V} – матрица размера $N \times 10$, при $N = 100, 200, \dots, 5000$. Матрицы были заполнены с помощью генератора случайных чисел (в Matlab функция rand()).

Исследованные варианты реализации приведены в табл. 6.16 и табл. 6.17. Согласно справочной документации варианты I и II во всех пакетах эквивалентны, но для чистоты эксперимента протестированы отдельно. Вариант III (согласно той же документации) при хорошей обусловленности матрицы (число обусловленности меньше чем $1/(10 \times \text{eps})$, где eps – машинный эpsilon) основан на LU-разложении и последующем решении двух треугольных систем (при плохой обусловленности используется метод наименьших квадра-

тов). В данной работе использовались только хорошо обусловленные матрицы ($\text{cond}(S) < 10^8$). Вариант IV отличается хранением матрицы перестановок в виде вектора (в Scilab – отсутствует).

Таблица 6.16

**Варианты реализации решения СЛАУ
в Matlab/Octave/Scilab с помощью LU-разложения**

| Вариант | Список команд |
|---------|--|
| I | $[L,u]=lu(S); \Sigma=u \setminus (l \setminus V);$ |
| II | $[L,u,p]=lu(S); \Sigma=u \setminus (l \setminus (p * V));$ |
| III | $\Sigma=S \setminus V;$ |
| IV | $[L,u,p]=lu(S,'vector'); \Sigma=u \setminus (l \setminus (V(p,:)));$ |

Таблица 6.17

**Варианты реализации решения СЛАУ
в Eigen с помощью LU-разложения**

| Вариант | Список команд |
|---------|--|
| I | $\Sigma=S.lu().solve(V);$ |
| II | $\Sigma.noalias()=S.lu().solve(V);$ |
| III | $\Sigma=S.lu().solve(V).eval();$ |
| IV | $ppLU.compute(S); \Sigma=ppLU.solve(V);$ |
| V | PartialPivLU<Matrix> lu(S); T=lu.matrixLU().triangularView<UnitLower>().solve(lu.permutation P()*V); $\Sigma=lu.matrixLU().triangularView<Upper>().solve(T);$ |

На рис. 6.12 приведены полученные результаты (здесь и далее среднее время 10-кратных вычислений). В Matlab наименьшее время работы соответствует использованию варианта IV, а Octave и Scilab – III. Расхождение при использовании различных вариантов в Matlab является наименьшим, а при Scilab – наибольшим. При использовании Eigen, время практически не зависит от реализации, а наибольшее различие во времени между разными вариантами составляет менее 3%. Наименьшее среднее время решения соответствует варианту IV. Поэтому для дальнейшего исследования алгоритма 6.2 в Matlab и Eigen использовался вариант IV, а Octave и Scilab – III.

Перечень использованных функций (команд) для реализации алгоритма 6.4 на примере Matlab приведен в табл. 6.18 (принятые обозначения интуитивно понятны, поэтому приведены без дополнительных пояснений). В табл. 6.19 приведено время вычислений при $N = 1000, 3000, N_A = N/2, N_{COND} = 10$ и $m = 100, 500, 1000$ при использовании алгоритма 6.2, а в табл. 6.20 для алгоритма 6.4 при тех же параметрах. Для заполнения матриц использована функция rand().

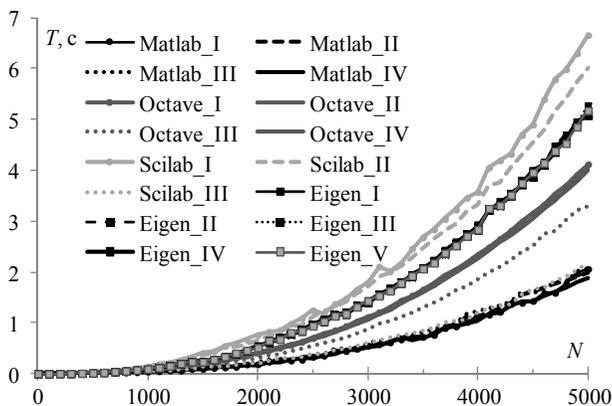


Рис. 6.12. Время решения СЛАУ с помощью LU-разложения: Matlab, Scilab, Octave и Eigen

Таблица 6.18

Реализация функций алгоритма 6.4 с использованием синтаксиса Matlab

| № шага | Реализация |
|--------|--|
| 4 | $S(1:N_a, 1:N_a) = \text{inv}(S(1:N_a, 1:N_a))$ |
| 5 | $S(1:N_a, N_a+1:N) = S(1:N_a, 1:N_a) * S(1:N_a, N_a+1:N)$ |
| 6 | $S(N_a+1:N, N_a+1:N) = S(N_a+1:N, N_a+1:N) - S(N_a+1:N, 1:N_a) * S(1:N_a, N_a+1:N)$ |
| 8 | $X(1:N_a, 1:N_{\text{cond}}) = S(1:N_a, 1:N_a) * V(1:N_a, 1:N_{\text{cond}})$ |
| 9 | $X(N_a+1:N, 1:N_{\text{cond}}) = V(N_a+1:N, 1:N_{\text{cond}}) - S(N_a+1:N, 1:N_a) * X(1:N_a, 1:N_{\text{cond}})$ |
| 12 | $nz = N_a * (N+1); \text{step}_- = N+1; \text{end}_- = N * N;$ $S(nz:\text{step}_-:\text{end}_-) = S(nz:\text{step}_-:\text{end}_-) + \text{Diag_mat}';$ |
| 13 | $\text{SIGMA}(N_a+1:N, 1:N_{\text{cond}}) = \text{inv}(S(N_a+1:N, N_a+1:N)) * X(N_a+1:N, 1:N_{\text{cond}})$ |
| 14 | $\text{SIGMA}(1:N_a, 1:N_{\text{cond}}) = X(1:N_a, 1:N_{\text{cond}}) - S(1:N_a, N_a+1:N) * \text{SIGMA}(N_a+1:N, 1:N_{\text{cond}})$ |
| 16 | $S(nz:\text{step}_-:\text{end}_-) = S(nz:\text{step}_-:\text{end}_-) - \text{Diag_mat}';$ |

Таблица 6.19

Время работы (с) алгоритма 6.2

| N | Пакет | m | | |
|------|--------|--------|--------|---------|
| | | 100 | 500 | 1000 |
| 1000 | Matlab | 3,57 | 16,49 | 31,09 |
| | Octave | 5,91 | 28,84 | 58,42 |
| | Scilab | 4,03 | 19,57 | 39,81 |
| | Eigen | 8,91 | 44,47 | 89,16 |
| 3000 | Matlab | 49,63 | 225,90 | 456,54 |
| | Octave | 86,25 | 429,23 | 859,76 |
| | Scilab | 55,40 | 278,86 | 568,44 |
| | Eigen | 138,95 | 696,55 | 1403,08 |

Таблица 6.20

Время работы (с) алгоритма 6.4 при $N_A = 0,5N$

| N | Пакет | m | | |
|------|--------|--------|--------|---------|
| | | 100 | 500 | 1000 |
| 1000 | Matlab | 1,60 | 6,84 | 13,35 |
| | Octave | 2,72 | 13,21 | 25,97 |
| | Scilab | 1,60 | 6,88 | 13,61 |
| | Eigen | 9,41 | 45,93 | 91,67 |
| 3000 | Matlab | 25,00 | 106,19 | 211,08 |
| | Octave | 39,78 | 192,48 | 381,78 |
| | Scilab | 25,73 | 110,50 | 216,40 |
| | Eigen | 188,10 | 927,34 | 1854,33 |

Из табл. 6.19 и 6.20 видно, что наименьшее время, для реализации обоих алгоритмов соответствует использованию Matlab. Максимальное различие во времени вычислений при использовании Scilab относительно Matlab для алгоритма 6.2 составило 1,28 раза, для алгоритма 2 – 1,03. Использование Octave даёт различие относительно Matlab в 1,90 и 1,95 раза, а Eigen – 3,08 и 8,79 соответственно.

Далее исследована зависимость времени выполнения шагов алгоритма 6.4 от порядка матрицы S в каждом пакете. Использованы следующие параметры: $N = 100, 200, \dots, 5000$, $N_A = 0,5N$, $N_{COND} = 10$, $m = 500$. На рис. 6.13 приведено время вычислений, соответствующее шагам 4–6, 8 и 9 (однократные вычисления при $k = 1$) и шагам 12–14 (многократные вычисления). Для наглядности на рисунках также приведена графическая интерпретация соответствующих операций. Затраты на шаге 16 идентичны затратам на шаге 12, поэтому отдельно не приведены. Затраты на вычисления элементов, согласно шагов 7, 15 и 17, не учитывались в виду их малости (оценивались только затраты, приходящиеся на решение СЛАНУ). Как видно, преобладающие временные затраты приходятся на шаг 13.

В табл. 6.21 сведены полученные вычислительные оценки, а также аналитические оценки ускорения. Видно, что в целом оценки согласуются между собой. Стоит отметить, что практически всегда использование пакета Scilab дает наибольшее ускорение, вне зависимости от N , а использование Eigen дает замедление процесса вычислений. Последний факт объясняется неоптимальной реализацией функций обращения матриц (рис. 6.13, a и $ж$). При этом в случае $m \gg 1$ шаг 4 мало влияет на получаемое ускорение. Поэтому для большего ускорения требуется совершенствовать шаг 13 алгоритма 6.4.

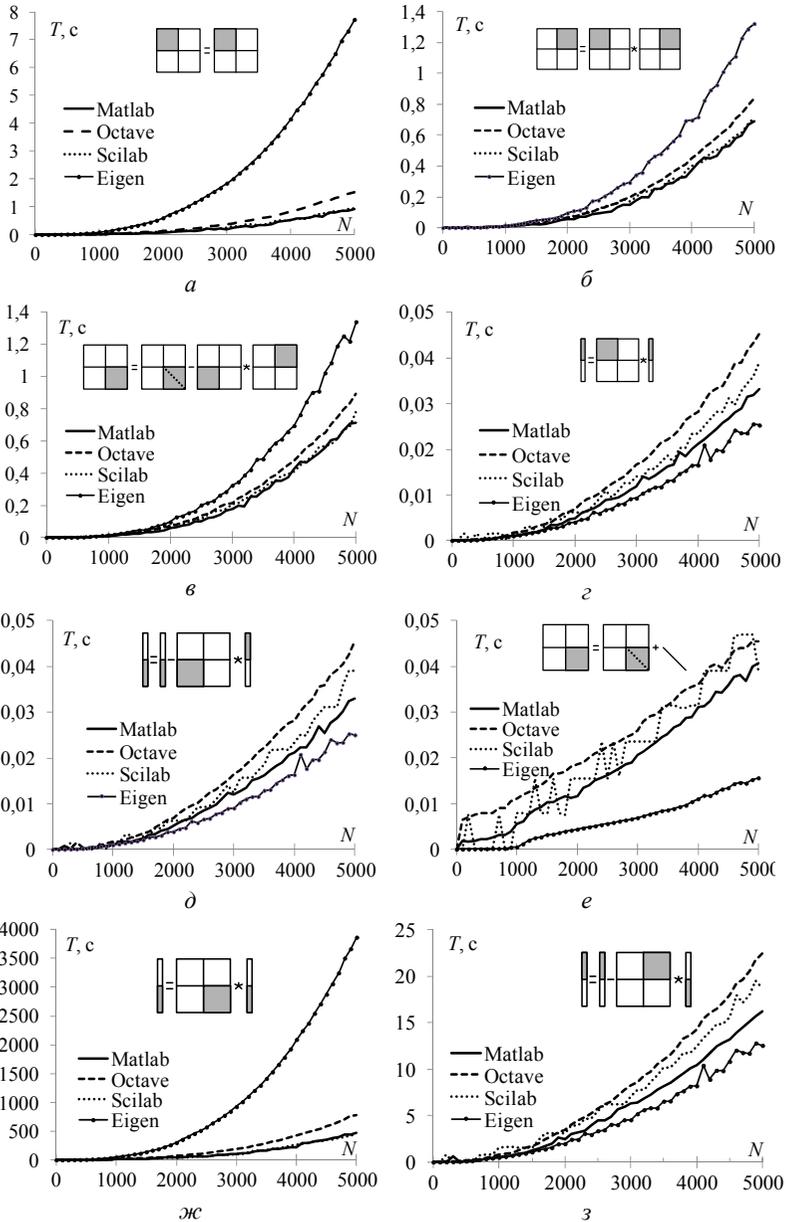


Рис. 6.13. Время выполнения шагов алгоритма 6.4:
4 (а), 5 (б), 6 (в), 8 (г), 9 (д), 12 (е), 13 (ж) и 14 (з)

Таблица 6.21

Оценки ускорения решения при использовании алгоритма 6.4

| N | Оценка | Пакет | m | | |
|------|----------------|--------|------|------|------|
| | | | 100 | 500 | 1000 |
| 1000 | Аналитическая | | 1,95 | 1,99 | 2,00 |
| | Вычислительная | Matlab | 2,23 | 2,41 | 2,33 |
| | | Octave | 2,17 | 2,18 | 2,25 |
| | | Scilab | 2,52 | 2,84 | 2,93 |
| | | Eigen | 0,95 | 0,97 | 0,97 |
| 3000 | Аналитическая | | 1,95 | 1,99 | 2,00 |
| | Вычислительная | Matlab | 1,99 | 2,13 | 2,16 |
| | | Octave | 2,17 | 2,23 | 2,25 |
| | | Scilab | 2,15 | 2,52 | 2,63 |
| | | Eigen | 0,74 | 0,75 | 0,76 |

Для совершенствования шага 13 алгоритма 6.4 перепишем его в виде $\mathbf{D}^k \Sigma_1^k = \mathbf{X}_1$. Тогда для решения данной системы можно воспользоваться LU-разложением матрицы \mathbf{D}^k с последующим N_{COND} раз решением с разными правыми частями, состоящими из столбцов матрицы \mathbf{X}_1 . Далее алгоритм 6.4 с учетом этих изменений будем называть алгоритм 6.4-У1. При этом вычислительная сложность шага 13 алгоритма 6.4 вместо

$$Q_{13} = \frac{8}{3} N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$$

будет

$$Q_{13} = \frac{1}{6} \left(4N_D^3 + 3N_D^2(4N_{\text{COND}} + 1) - N_D(6N_{\text{COND}} + 1) \right).$$

При этом общая вычислительная сложность полученного алгоритма 6.4-У1 также изменится. Так, в табл. 6.22 приведены временные затраты на его реализацию (при тех же параметрах, что и в табл. 6.20), а в табл. 6.23 аналитические и вычислительные оценки ускорения, относительно алгоритма 6.2. Из табл. 6.22 и 6.23 видно, что оценки в целом согласуются, а наименьшее время, для реализации алгоритма 6.4-У1, как и в случае с алгоритмом 6.4, соответствует случаю использования Matlab. Максимальное различие во времени вычислений при использовании Scilab относительно Matlab составило 1,25 раза, Octave и Eigen – 1,91 и 2,44 раза соответственно. При этом Eigen, вне зависимости от N , дает наибольшее ускорение (что еще раз подтверждает факт неоптимальной реализации функции обращения матриц). Однако при этом, общие временные затраты больше в сравнении с использованием других пакетов.

Таблица 6.22

Время работы (с) алгоритма 6.4-У1 при $N_A = 0,5N$

| N | Пакет | m | | |
|------|--------|-------|--------|--------|
| | | 100 | 500 | 1000 |
| 1000 | Matlab | 0,81 | 3,90 | 7,41 |
| | Octave | 1,54 | 7,17 | 14,18 |
| | Scilab | 1,00 | 4,79 | 8,77 |
| | Eigen | 1,76 | 8,17 | 15,80 |
| 3000 | Matlab | 11,50 | 51,95 | 99,59 |
| | Octave | 18,08 | 83,91 | 164,99 |
| | Scilab | 14,05 | 63,95 | 124,80 |
| | Eigen | 26,69 | 125,75 | 242,70 |

Таким образом, предложенное усовершенствование алгоритма 6.4 позволило дополнительно уменьшить (примерно в 2 раза) вычислительные затраты.

Таблица 6.23

Оценки ускорения решения при использовании алгоритма 6.4-У1 и $N_{COND} = 10$

| N | Оценка | Пакет | m | | |
|------|----------------|--------|------|------|------|
| | | | 100 | 500 | 1000 |
| 1000 | Аналитическая | | 6,75 | 7,23 | 7,36 |
| | Вычислительная | Matlab | 4,41 | 4,23 | 4,20 |
| | | Octave | 3,84 | 4,02 | 4,12 |
| | | Scilab | 4,03 | 4,09 | 4,54 |
| | | Eigen | 5,06 | 5,44 | 5,64 |
| 3000 | Аналитическая | | 7,09 | 7,62 | 7,76 |
| | Вычислительная | Matlab | 4,32 | 4,35 | 4,58 |
| | | Octave | 4,77 | 5,12 | 5,21 |
| | | Scilab | 3,94 | 4,36 | 4,55 |
| | | Eigen | 5,21 | 5,54 | 5,78 |

6.3. Изменение высоты диэлектрика

В предыдущих подразделах рассмотрена специфика матрицы СЛАУ и её решение при изменении относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика. Показано, что за счёт использование блочного LU-разложения позволяет сократить временные затраты на вычисление серии ёмкостных матриц и получение отклика в конце линии передачи. При этом в матрице СЛАУ изменялись лишь диагональные элементы блока, соответствующего диэлектрическим граммам.

Очевидно, что изменение некоторого параметра моделируемой структуры приводит к изменению лишь части элементов матрицы СЛАУ системы, а остальные элементы при этом остаются неизменными. Например, при моделировании в диапазоне параметров структуры возможно изменение не только относительной диэлектрической проницаемости, но и её размеров. Так, например, при оптимизации связанной линии передачи варьируется толщина диэлектрика (h_C) между проводниками (рис. 6.14), где диапазон изменения h_C снизу ограничен величиной h , а сверху – суммой h и t (w и t – ширина и толщина сигнального проводника соответственно, s – расстояние между сигнальными проводниками, h – толщина диэлектрического слоя, h_C – толщина диэлектрика между сигнальными проводниками, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика).

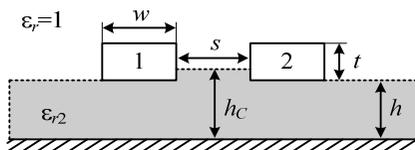


Рис. 6.14. Поперечное сечение связанной микрополосковой линии

Из рис. 6.14, видно, что данное поперечное сечение имеет 11 границ раздела двух сред: 8 на проводниках и 3 на диэлектриках. Границы проводник-диэлектрик делятся на подынтервалы, последовательно нумерующиеся от 1 до N_A , а диэлектрик-диэлектрик – от $N_A + 1$ до N . При изменении высоты границы раздела между воздухом и диэлектрической подложкой, находящейся между проводниками, изменяется только часть элементов матрицы, расположение которых схематично показано на рис. 6.15. В этом случае $N_D = N_D^{\text{const}} + N_D^{\text{var}}$, т.е. N_D состоит из количества подынтервалов с постоянными и изменяющимися параметрами соответственно. При этом количество неизменяющихся элементов составляет $N^{\text{const}} = N_C + N_D^{\text{const}}$ и $N = N^{\text{const}} + N_D^{\text{var}}$. Далее N^{const} соответствует N_A , а $N_D^{\text{var}} - N_D$.

В общем случае, перед вычислениями, чтобы подынтервалы, соответствующие изменяющимся строкам и столбцам матрицы СЛАУ нумеровались последними, необходимо изменить нумерацию границ структуры (перенумерация рассмотрена в следующем подразделе). Тогда алгоритм вычисления серии ёмкостных матриц может быть представлен в следующем виде (по аналогии с алгоритмом 6.4).

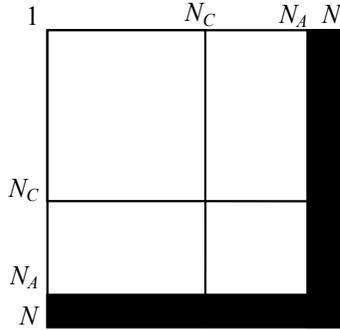


Рис. 6.15. Вид матрицы СЛАУ при изменении h_C (изменяемое выделено жирным)

Алгоритм 6.6 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} с использованием блочного LU-разложения при изменении высоты диэлектрического слоя

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы \mathbf{S}^1
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий \mathbf{V}
- 5 $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1} (\mathbf{A} - \text{блок размера } N_A \times N_A)$
- 6 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$ (\mathbf{X}_0 и \mathbf{V}_0 – блоки размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 7 $\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^k$ (\mathbf{B} – блок размера $N_A \times N_D$)
- 8 $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ (\mathbf{D} – блок размера $N_D \times N_D$, $\mathbf{C} - N_D \times N_A$)
- 9 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^k \mathbf{X}_0$ (\mathbf{X}_1 и \mathbf{V}_1 – блоки размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)
- 10 $\mathbf{\Sigma}_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$ ($\mathbf{\Sigma}_1$ – блок размера $N_D \times N_{\text{COND}}$)
- 11 $\mathbf{\Sigma}_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}^k \mathbf{\Sigma}_1^k$ ($\mathbf{\Sigma}_0$ – блок размера $N_A \times N_{\text{COND}}$)
- 12 Вычислить элементы ёмкостной матрицы \underline{C}^k
- 13 Вычислить элементы изменяющихся блоков \mathbf{B}^{k+1} , \mathbf{C}^{k+1} и \mathbf{D}^{k+1}
- 14 Увеличить k

Далее получены аналитические оценки арифметической сложности разработанного алгоритма 6.6. Для этого, как и ранее, использованы выражения (6.5)–(6.7). Полученные оценки приведены в табл. 6.24.

Тогда для аналитической оценки ускорения решения СЛАУ относительно алгоритма 6.2 справедливо выражение

$$\beta_Q = \frac{m Q_{LU}}{(Q_5 + Q_6) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11})}. \quad (6.10)$$

С его помощью получены оценки ускорения вычислений (табл. 6.25) для $N = 1000, 2000, 3000$ и $m = 10, 20, \dots, 100$ при $N_A/N = 0,9; 0,99;$

0,999 и $N_{\text{COND}} = 2$. Количество СЛАУ m выбрано, исходя из того, что число изменений матрицы ограничено значением t , которое ограничено типовыми значениями, в данном случае, от 5 до 105 мкм.

Таблица 6.24

| Оценки арифметической сложности шагов алгоритма 6.6 | | |
|--|---|--|
| № шага | Действие | Арифметическая сложность (Q) |
| Однократно выполняемые операции | | |
| 5 | $\mathbf{A}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$ | $Q_5 = \frac{8}{3}N_A^3 - \frac{3}{2}N_A^2 - \frac{1}{6}N_A$ |
| 6 | $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{V}_0$ | $Q_6 = N_A N_{\text{COND}} (2N_A - 1)$ |
| Многokrратно выполняемые операции | | |
| 7 | $\mathbf{B}^k = \mathbf{A}^1 \mathbf{B}^k$ | $Q_7 = N_D N_A (2N_A - 1)$ |
| 8 | $\mathbf{D}^k = \mathbf{D}^k - \mathbf{C}^k \mathbf{B}^k$ | $Q_8 = 2N_A N_D^2$ |
| 9 | $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^k \mathbf{X}_0$ | $Q_9 = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$ |
| 10 | $\Sigma_1^k = (\mathbf{D}^k)^{-1} \mathbf{X}_1$ | $Q_{10} = \frac{8}{3}N_D^3 + N_D^2 \left(2N_{\text{COND}} - \frac{3}{2} \right) + N_D \left(N_{\text{COND}} - \frac{1}{6} \right)$ |
| 11 | $\Sigma_0^k = \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}^k \Sigma_1^k$ | $Q_{11} = 2N_A N_D N_{\text{COND}}$ |

Таблица 6.25

Аналитические оценки ускорения многократного решения СЛАУ при использовании алгоритма 6.6

| N | N_A | m | | | | | | | | | |
|------|-------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 1000 | 900 | 1,77 | 2,39 | 2,70 | 2,89 | 3,02 | 3,11 | 3,17 | 3,23 | 3,27 | 3,30 |
| | 990 | 2,40 | 4,49 | 6,31 | 7,92 | 9,35 | 10,63 | 11,78 | 12,83 | 13,78 | 14,64 |
| | 999 | 2,50 | 4,96 | 7,39 | 9,78 | 12,13 | 14,46 | 16,75 | 19,00 | 21,23 | 23,42 |
| 2000 | 1800 | 1,77 | 2,39 | 2,70 | 2,89 | 3,01 | 3,10 | 3,17 | 3,22 | 3,27 | 3,30 |
| | 1980 | 2,40 | 4,48 | 6,30 | 7,91 | 9,33 | 10,61 | 11,76 | 12,81 | 13,75 | 14,62 |
| | 1998 | 2,49 | 4,95 | 7,37 | 9,76 | 12,11 | 14,43 | 16,71 | 18,96 | 21,18 | 23,37 |
| 3000 | 2700 | 1,77 | 2,38 | 2,70 | 2,88 | 3,01 | 3,10 | 3,17 | 3,22 | 3,27 | 3,30 |
| | 2970 | 2,40 | 4,47 | 6,29 | 7,90 | 9,33 | 10,61 | 11,76 | 12,80 | 13,75 | 14,61 |
| | 2997 | 2,49 | 4,95 | 7,37 | 9,75 | 12,10 | 14,42 | 16,70 | 18,95 | 21,17 | 23,35 |

Из табл. 6.25 видно, что итоговое ускорение слабо зависит от N (в рассматриваемом диапазоне). Наименьшая эффективность алгоритма 6.6 наблюдается при малых N_A . Так, при $N_A = 900$ ускорение увеличивается от 1,77 до 3,3 раза. Однако его эффективность существенно возрастает при увеличении N_A и стремлении его к N . Так,

при увеличении N_A от 900 до 999 для $m = 100$ ускорение достигает 23 раз. При этом по мере роста m от 10 до 100 ускорение существенно возрастает. Так, при $N_A = 900$ рост составляет 1,86 раза, а при $N_A = 999$ – 9,37 раза. Таким образом, ключевыми параметрами, влияющими на время вычислений, являются порядок блока **A** и число требуемых решений m .

Отметим, что выполнение аналитических оценок ускорения позволяет быструю и априорную оценку эффективности и целесообразности использования того или иного алгоритма. Поэтому далее оценено, при каких граничных значениях параметров решения целесообразно использование алгоритма 6.6. Согласно данным из табл. 6.25 для параметра m это значение меньше 10, поэтому выполнены аналогичные оценки для $m < 10$. На рис. 6.16 приведены полученные зависимости для $N = 1000$, из которого видно, что ускорение начинается с $m = 4$ при $N_A = 999, 990, 900$ и сохраняется даже при уменьшении N_A до 700, хотя и стагнирует с ростом m .

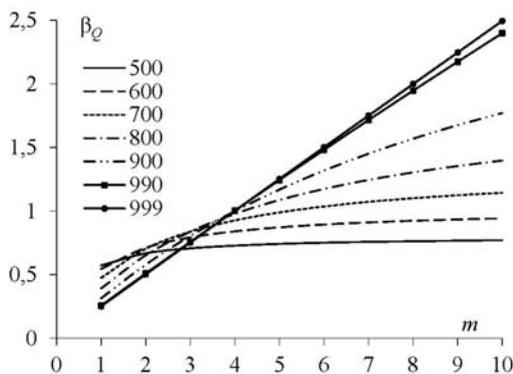


Рис. 6.16. Аналитические оценки ускорения за счет использования алгоритма 6.6 в зависимости от m для $N = 1000$ при изменении N_A

Далее получены вычислительные оценки ускорения. Для этого сначала выполнена программная реализация алгоритма 6.6 (реализация алгоритма 6.2 выполнена ранее). Для вычислений использована РС без использования параллельных вычислений (работало одно ядро процессора): платформа AMD FX(tm)-8350 Eight-Core Processor; операционная система Windows 7×64; частота процессора 4,01 ГГц; объем ОЗУ 32 Гб. Для наглядного сравнения параметры матрицы СЛАУ и значения m приняты такими же, как в табл. 6.25. Полученные результаты сведены в табл. 6.26.

Таблица 6.26

**Вычислительные оценки ускорения многократного решения СЛАУ
при использовании алгоритма 6.6**

| N | N_A | m | | | | | | | | | |
|------|-------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 1000 | 900 | 1,17 | 1,68 | 1,96 | 2,14 | 2,26 | 2,36 | 2,43 | 2,50 | 2,54 | 2,57 |
| | 990 | 1,37 | 2,58 | 3,65 | 4,70 | 5,60 | 6,50 | 7,28 | 8,03 | 8,75 | 9,35 |
| | 999 | 1,39 | 2,74 | 3,98 | 5,36 | 6,65 | 7,99 | 9,26 | 10,56 | 11,81 | 13,00 |
| 2000 | 1800 | 1,31 | 1,89 | 2,22 | 2,44 | 2,59 | 2,69 | 2,77 | 2,83 | 2,90 | 2,94 |
| | 1980 | 1,51 | 2,89 | 4,16 | 5,32 | 6,37 | 7,34 | 8,25 | 9,06 | 9,87 | 10,57 |
| | 1998 | 1,54 | 3,07 | 4,59 | 6,10 | 7,58 | 9,06 | 10,35 | 11,92 | 13,38 | 14,75 |
| 3000 | 2700 | 1,35 | 1,95 | 2,29 | 2,52 | 2,67 | 2,78 | 2,88 | 2,95 | 2,99 | 3,04 |
| | 2970 | 1,55 | 2,97 | 4,25 | 5,44 | 6,53 | 7,54 | 8,48 | 9,34 | 10,12 | 10,87 |
| | 2997 | 1,59 | 3,14 | 4,70 | 6,30 | 7,76 | 9,26 | 10,78 | 12,26 | 13,69 | 15,17 |

Результаты из табл. 6.26 подтверждают ряд оценок, сделанных выше. Так, ускорение возрастает по мере роста N_A и m , однако вычислительные оценки в среднем в 1,5 раза ниже полученных аналитически. При этом характер зависимости ускорения от N_A и m схож при обеих оценках: минимальное ускорение составляет 1,17 раза, максимальное – 15,17. Из табл. 6.26 также видно, что ускорение увеличивается с ростом N , при исследованных параметрах на 16%, чего не наблюдалось при по аналитическим оценкам. Данная зависимость от N объясняется тем, что при подсчете арифметических операций алгоритмов 6.2 и 6.6, не учитывались затраты на запись матриц в память, а также возможные промахи кэша, связанные со спецификой алгоритма 6.6 (одновременный доступ к разным областям памяти).

Далее для реализации априорного определения значения порога N_A/N выше которого предпочтительнее использовать алгоритм 6.6, по сравнению с алгоритмом 6.2, выполнена оценка ускорения при изменении порядка блока с неизменяющимися элементами N_A . Полученные значения при $m = 10$ и 100 для $N = 1000$ сведены в табл. 6.27, из которой следует, что ускорение возрастает при росте N_A/N . При этом при $N_A/N < 0,4$ ускорение не зависит от m . Однако дальнейшее увеличение N_A/N ведет к большему росту ускорения при $m = 100$, чем при $m = 10$. Так, значение N_A/N , при котором временные затраты при использовании алгоритмов 6.6 и 6.2 равны между собой, при $m = 10$ близко к 0,8, а для $m = 100$ – к 0,7. При этом максимальное ускорение при $m = 10$ составляет 1,17 раза, а для $m = 100$ – 2,57 раза.

**Оценка ускорения многократного решения СЛАУ
в зависимости от N_A/N при $m = 10$ и 100 для $N = 1000$**

| N_A/N | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $m = 10$ | 0,17 | 0,23 | 0,31 | 0,41 | 0,55 | 0,68 | 0,83 | 0,98 | 1,17 |
| $m = 100$ | 0,17 | 0,23 | 0,31 | 0,42 | 0,57 | 0,77 | 1,05 | 1,48 | 2,57 |

Таким образом, значения порога N_A/N , при котором проявляется эффективность алгоритма 6.6, зависит от количества решаемых СЛАУ m , и при малых значениях m оно выше, чем при больших. Также стоит отметить, что при малых значениях N_A и m предпочтительнее использование алгоритма 6.2, что согласуется с аналитическими оценками, полученными ранее.

6.4. Переупорядочивание и перенумерация

Как было показано ранее, матрица \mathbf{S} состоит из блоков, разделённых по типу подынтервалов, соответствующих проводниковых и диэлектрических границ (см. рис. 6.5). Если при многовариантном анализе изменяемые элементы расположены в последних строках и столбцах матрицы \mathbf{S} (см. рис. 6.15), то возможно непосредственное применение блочного LU-разложения. Ситуация усложняется, когда требуется изменять параметр структуры, например толщину одного из проводников, приводящий к такому изменению элементов, что матрица не имеет структурированного вида, как схематично показано на рис. 6.17 и, тем самым, становится невозможным использование описанных выше алгоритмов и требуется полный пересчет.

Для расширения применимости разработанных алгоритмов далее использована перестановка строк и столбцов (переупорядочивание матрицы), что соответствует перенумерации подынтервалов. Так, при использовании перенумерации матрица, как и раньше, делится на блоки, но теперь, в зависимости от изменения её элементов при многовариантном анализе (многократном решении СЛАУ). Количество неизменяемых элементов обозначим N_A . При использовании перенумерации элементы матрицы \mathbf{S} , описывающие изменяющиеся подынтервалы, расположены в последних строках и столбцах матрицы \mathbf{S} . В результате матрица принимает вид, приведенный на рис. 6.15.

Для организации переупорядочивания (перенумерации) доработан алгоритм формирования матрицы \mathbf{S} в системе TALGAT. Для этого с помощью ассоциативного массива задаётся соответствие между номерами «старых» и «новых» сегментов. Этот массив исполь-

зуется как при генерации матрицы \mathbf{S} , так и при решении СЛАУ. Таким образом, процесс переупорядочивания удается виртуализировать без необходимости прямой перестановки строк и столбцов.

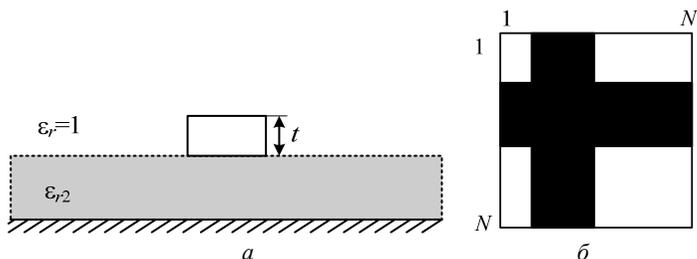


Рис. 6.17. Поперечное сечение микрополосковой линии (а) и схематичный вид структуры матрицы СЛАУ при изменении t (б) (для наглядности чёрным выделены строки и столбцы, содержащие изменяемые элементы)

Пользователь может самостоятельно задать интервалы для перенумерации. Для этого реализована команды **CHANGE_NUMERATION**, в качестве аргументов которой выступают конфигурация структуры (conf) и информация (в виде списка) о её изменяемых интервалах (r).

| | | | | | | | | | | | |
|------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|
| 8,2 | 1,2 | 5,4 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 8,2 | 1,8 | 4,5 | 1,8 | 1,2 | 1,2 |
| 4,5 | 5,6 | 6,0 | 0,7 | 4,2 | 0,8 | 4,2 | 7,6 | 6,4 | 1,3 | 3,9 | 0,8 |
| 5,4 | 1,7 | 12,0 | 1,7 | 1,8 | 1,8 | 4,5 | 2,9 | 13,3 | 2,9 | 1,8 | 1,8 |
| 4,5 | 0,7 | 6,0 | 5,6 | 0,8 | 4,2 | 4,2 | 1,3 | 6,4 | 7,6 | 0,8 | 3,9 |
| -0,6 | 0,1 | -1,0 | 0,1 | -10,5 | -0,2 | -0,6 | 0,0 | -1,1 | 0,1 | -10,5 | -0,2 |
| 0,6 | -0,1 | 1,0 | -0,1 | 0,2 | -8,3 | 0,6 | -0,1 | 1,1 | 0,0 | 0,2 | -8,3 |
| а | | | | | | б | | | | | |
| 8,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 5,4 | 1,2 | 8,2 | 1,2 | 1,2 | 1,8 | 4,5 | 1,8 |
| -0,6 | -10,5 | -0,2 | 0,1 | -1,0 | 0,1 | -0,6 | -10,5 | -0,2 | 0,0 | -1,1 | 0,1 |
| 0,6 | 0,2 | -8,3 | -0,1 | 1,0 | -0,1 | 0,6 | 0,2 | -8,3 | -0,1 | 1,1 | 0,0 |
| 4,5 | 4,2 | 0,8 | 5,6 | 6,0 | 0,7 | 4,2 | 3,9 | 0,8 | 7,6 | 6,4 | 1,3 |
| 5,4 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 12,0 | 1,7 | 4,5 | 1,8 | 1,8 | 2,9 | 13,3 | 2,9 |
| 4,5 | 0,8 | 4,2 | 0,7 | 6,0 | 5,6 | 4,2 | 0,8 | 3,9 | 1,3 | 6,4 | 7,6 |
| в | | | | | | г | | | | | |

Рис. 6.18 (окончание). Матрица \mathbf{S} до и после перенумерации при $t = 1$ мм (а, в) и $t = 1,5$ мм (б, г) (неизменяемые элементы отмечены фоном)

Для наглядности на примере микрополосковой линии продемонстрируем работу алгоритма перенумерации при изменении высоты проводника t (см. рис. 6.17, а). Так, на рис. 6.18, а и б приведены исходные матрицы \mathbf{S} для $t = 1$ и $1,5$ мм соответственно при исполь-

зовании самой грубой сегментации (каждому интервалу соответствует один подынтервал), а на рис. 6.18, ϵ и ζ – результирующие матрицы после перенумерации. Видно, что при использовании перенумерации неизменяемые элементы группируются в левом верхнем блоке (A) матрицы S.

Тогда алгоритм 6.6 с учетом перенумерации пример вид:

Алгоритм 6.7 – m -кратное вычисление ёмкостной матрицы \underline{C} с использованием блочного LU-разложения и перенумерации

- 1 Для k от 1 до m
- 2 Если $k = 1$
- 3 Вычислить элементы матрицы S^1
- 3' Перенумеровать границы структуры так, чтобы интервалы, соответствующие изменяющимся строкам и столбцам матрицы S_1 , нумеровались последними
- 4 Вычислить элементы матрицы воздействий V
- 5 $A^1 = (A^1)^{-1} (A - \text{блок размера } N_A \times N_A)$
- 6 $X_0 = A^1 V_0$ (X_0 и V_0 – блоки размера $N_A \times N_{COND}$)
- 7 $B^k = A^1 B^k$ (B – блок размера $N_A \times N_D$)
- 8 $D^k = D^k - C^k B^k$ (D – блок размера $N_D \times N_D$, $C - N_D \times N_A$)
- 9 $X_1 = V_1 - C^k X_0$ (X_1 и V_1 – блоки размера $N_D \times N_{COND}$)
- 10 $\Sigma_1^k = (D^k)^{-1} X_1$ (Σ_1 – блок размера $N_D \times N_{COND}$)
- 11 $\Sigma_0^k = X_0 - B^k \Sigma_1^k$ (Σ_0 – блок размера $N_A \times N_{COND}$)
- 12 Вычислить элементы ёмкостной матрицы \underline{C}^k
- 13 Вычислить элементы изменяющихся блоков B^{k+1} , C^{k+1} и D^{k+1}
- 14 Увеличить k

При перенумерации формируется структура данных в виде ассоциативного массива, позволяющего получить соответствие между «старыми» (до перенумерации) номерами интервалов изменяемых границ и «новыми» (после перенумерации). При этом сложность составляет N_G операций, где N_G – количество интервалов (границ) структуры. Для обратного соответствия формируется еще один ассоциативный массив, с такими же затратами. Также формируется массив для хранения «старых» индексов изменяемых подынтервалов (N_D операций) и массив для установления соответствия между «старыми» номерами подынтервалов и «новыми» (N операций). Таким образом, сложность алгоритма перенумерации оценивается выражением

$$Q_{3'} = 3N_G + N + N_D.$$

Тогда выражение (6.10) за счет использования перенумерации примет вид

$$\beta_Q = \frac{mQ_{LU}}{(Q_5 + Q_6) + m(Q_7 + Q_8 + Q_9 + Q_{10} + Q_{11}) + Q_3}. \quad (6.11)$$

Выполнена апробация алгоритма 6.7 для многовариантного анализа двух- и трехпроводных линий передачи, поперечные сечения которых приведены на рис. 6.19. Геометрические параметры структуры 1: $s = 900$; $w = 1890$ мкм, толщина подложки $h = 290$ мкм; начальная толщина проводников $t = 35$ мкм; порядок матрицы \mathbf{S} $N = 1100$. Параметры структуры 2: $s = 10$; $w = 8$ мкм; $h_1 = 6$; $h_2 = 11$ мкм; начальная толщина проводников $t = 6$ мкм; $N = 1700$. Использована РС со следующими параметрами: платформа – Intel(R) Core(TM) i7 CPU 930; частота процессора – 2,80 ГГц; объем ОЗУ – 12 Гбайт; число ядер – 8; операционная система – Windows 7×64.

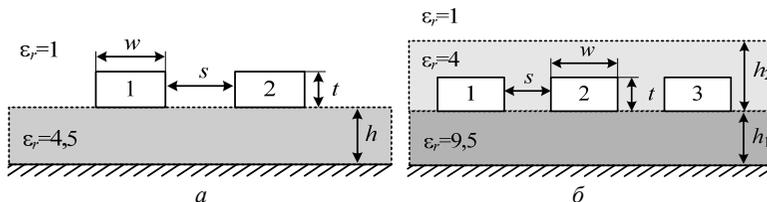


Рис. 6.19. Двух- (а) и трехпроводная (б) линии передачи (1, 2, 3 – проводники)

В табл. 6.28 приведены оценки ускорения многократного вычисления матрицы $\underline{\mathbf{C}}$ за счет использования алгоритма 6.7. Вычисления выполнялись при изменении толщины одного (вариант 1) и двух проводников (вариант 2). Количество изменений составляло 2^k , $k = 1, 2, \dots, 10$. Аналогичные результаты для структуры 2 сведены в табл. 6.29.

Из полученных результатов видно, оценки в целом согласуются, однако их поведение различно. Так, численные оценки выше, чем аналитические для обеих структур и обоих вариантов. Также можно заметить, что чем больше количество изменений, тем больше оценка, однако наблюдаются и её понижение в некоторых случаях. Так, ускорение наблюдается при $k > 2$ для всех случаев кроме структуры 1 и варианта 2. Таким образом, полученные оценки показывают, что использование перенумерации в большинстве случаев позволяет ускорить процесс многократного вычисления матрицы $\underline{\mathbf{C}}$. При этом с увеличением значения N_A/N ускорение увеличивается.

Далее выполнена оценка затрат на формирование блоков матрицы \mathbf{S} . Затраты на первое формирование матрицы \mathbf{S} (шаг 3 алго-

ритма 6.7) совпадают с затратами на её формирование при использовании последовательного LU-разложения, т.е. $Q_3 = Q_S$, а затраты на переформирование блоков **B**, **C**, **D**, на основании [123], оцениваются следующим выражением

$$Q_{13} = \frac{1325}{3}(N^2 - N_A^2) + \frac{29}{3}NN_G + 11N + \frac{62}{3}N_G + \frac{49}{3}.$$

Таблица 6.28

Оценки ускорения многократного вычисления матрицы **C**
для рис. 6.19, а

| Вариант | k | N_A/N | Аналитические | Численные |
|---------|-----|---------|---------------|-----------|
| 1 | 1 | 0,73 | 0,69 | 1,99 |
| | 2 | | 0,95 | 1,95 |
| | 3 | | 1,15 | 1,94 |
| | 4 | | 1,30 | 1,93 |
| | 5 | | 1,38 | 1,93 |
| | 6 | | 1,43 | 1,93 |
| | 7 | | 1,46 | 1,97 |
| | 8 | | 1,47 | 2,01 |
| | 9 | | 1,48 | 1,93 |
| 2 | 1 | 0,46 | 0,63 | 1,98 |
| | 2 | | 0,67 | 2,04 |
| | 3 | | 0,70 | 2,18 |
| | 4 | | 0,71 | 2,18 |
| | 5 | | 0,71 | 2,14 |
| | 6 | | 0,72 | 2,12 |
| | 7 | | 0,72 | 2,13 |
| | 8 | | 0,72 | 2,25 |
| | 9 | | 0,72 | 2,20 |

Тогда ускорение за счет использования алгоритма 6.7 оценивается следующим выражением (затраты Q_4 и Q_{12} не учитывались ввиду их малости)

$$\beta_Q = \frac{m(Q_{LU} + Q_S)}{Q_3 + Q_3' + Q_5 + Q_6 + m \sum_{i=7}^{11} Q_i + (m-1)Q_{13}}.$$

Далее выполнены вычисления при изменении толщины только одного из проводников (см. рис. 6.19). Отношение N_A/N для структуры 1 составило 0,73 (табл. 6.30), а для структуры 2 – 0,82 (табл. 6.31). Для наглядности ускорения приведены с учетом и без учета затрат на формирование матрицы **S** и её блоков.

Таблица 6.29

**Оценки ускорения многократного вычисления матрицы \underline{C}
для рис. 6.19, б**

| Вариант | k | N_A/N | Аналитические | Численные |
|---------|-----|---------|---------------|-----------|
| 1 | 1 | 0,82 | 0,64 | 2,64 |
| | 2 | | 0,99 | 2,67 |
| | 3 | | 1,36 | 2,71 |
| | 4 | | 1,68 | 2,75 |
| | 5 | | 1,90 | 2,83 |
| | 6 | | 2,03 | 2,72 |
| | 7 | | 2,11 | 2,78 |
| | 8 | | 2,15 | 2,68 |
| | 9 | | 2,17 | 2,69 |
| 2 | 1 | 0,65 | 0,72 | 2,58 |
| | 2 | | 0,89 | 2,78 |
| | 3 | | 1,01 | 2,88 |
| | 4 | | 1,08 | 2,98 |
| | 5 | | 1,12 | 2,97 |
| | 6 | | 1,14 | 2,99 |
| | 7 | | 1,15 | 2,87 |
| | 8 | | 1,16 | 3,03 |
| | 9 | | 1,16 | 3,03 |

Из табл. 6.30 и табл. 6.31 видно, что полученные оценки хорошо согласуются между собой. С учетом затрат на формирование матрицы \underline{S} и её блоков, расхождение между оценками для двухпроводной линии составляет около 17%, а трехпроводной – до 32%. Таким образом, полученные оценки показывают, что для рассмотренных структур использование перенумерации позволяет ускорить многократное вычисление матрицы \underline{C} около 2 раз. Также можно сделать вывод, что чем больше отношение N_A/N , тем выше эффективность применения перенумерации с точки зрения минимизации временных затрат.

Таблица 6.30

**Оценки ускорения многократного вычисления матрицы \underline{C}
для рис. 6.19, а при $N_A/N=0,73$**

| k | Аналитические | | Численные |
|-----|------------------------------|-----------------------------|-----------|
| | Без учета Q_S, Q_3, Q_{13} | С учетом Q_S, Q_3, Q_{13} | |
| 5 | 1,38 | 1,59 | 1,93 |
| 6 | 1,43 | 1,64 | 1,93 |
| 7 | 1,46 | 1,66 | 1,97 |
| 8 | 1,47 | 1,67 | 2,01 |

Оценки ускорения многократного вычисления матрицы \underline{C}
 для рис. 6.19, б при $N_d/N=0,82$

| k | Аналитические | | Численные |
|-----|------------------------------|-----------------------------|-----------|
| | Без учета Q_S, Q_3, Q_{13} | С учетом Q_S, Q_3, Q_{13} | |
| 5 | 1,90 | 2,07 | 2,83 |
| 6 | 2,03 | 2,20 | 2,72 |
| 7 | 2,11 | 2,27 | 2,78 |
| 8 | 2,15 | 2,30 | 2,68 |

6.5. Гибридный метод

Как было показано ранее, совершенствование шага 13 алгоритма 6.4 позволяет существенно уменьшить временные затраты на получение серии ёмкостных матриц. В данном разделе приведены результаты разработки гибридного метода многократного решения СЛАУ для дальнейшего уменьшения затрат.

Еще раз рассмотрим шаг 13 алгоритма 6.4-У1, т.е. СЛАУ вида $\mathbf{D}^k \Sigma_1^k = \mathbf{X}_1$, при некоем значении k . Для её решения воспользуемся итерационным методом. Поскольку СЛАУ, в общем случае, состоит из N_{COND} правых частей, то необходимо использовать блочный метод, например, BI-BiCGStab [144]. Алгоритм 6.4-У1, в котором используется итерационное решение СЛАУ на шаге 13, далее называется алгоритмом 6.4-У2. Тогда вычислительные затраты на шаг 13 пропорциональны произведению требуемого числа итераций и квадрата порядка решаемой СЛАУ и оцениваются как [114]

$$10N_D^2 N_{\text{COND}}(2 + N_{it}).$$

Для тестирования разработанного гибридного алгоритма (алгоритм 6.4-У2) использованы 5-проводная микрополосковая линия и плоский симметричный 10-проводный кабель с двумя диэлектрическими слоями, поперечные сечения которых приведены на рис. 6.20, а также пакет Matlab. СЛАУ формировались в системе TALGAT, после чего они загружались в Matlab, где и выполнялись основные вычисления, согласно алгоритма 6.4-У2. Полученные результаты (матрицы \mathbf{X}^k) загружались в систему TALGAT, где выполнялось вычисление ёмкостной матрицы (\underline{C}^k).

При анализе рассматривалось линейное изменение относительной диэлектрической проницаемости (ϵ_{r2}) подложки для микрополосковой линии и покрывающего слоя для кабеля в диапазоне от 1,11 до 11,01 ($k = 1, \dots, m, m = 100$). Для кабеля относительная ди-

электрическая проницаемость подложки (ϵ_{r1}) была принята равной 5,4. Исследовано несколько вариантов реализации алгоритма: выбор порядка (прямой (\rightarrow) или обратный (\leftarrow)) изменения ϵ_{r2} (подобно описан в работе [145]); использование в качестве начального приближения решения, полученного на предыдущем ($k-1$)-м шаге; использование диагонального предобусловливания. Прямой порядок соответствовал приращению 1,11; 1,21; ...; 11,01. Использовано три порядка СЛАУ (полученных учащением сегментации границ структуры). Для первой структуры N_d/N : 1050/1370, 2100/2740 и 4200/5480, а для второй – 500/1000, 1552/3032 и 3004/5864. Итерационный процесс останавливался, если относительная норма невязки (tol) становилась меньше значения 10^{-4} .

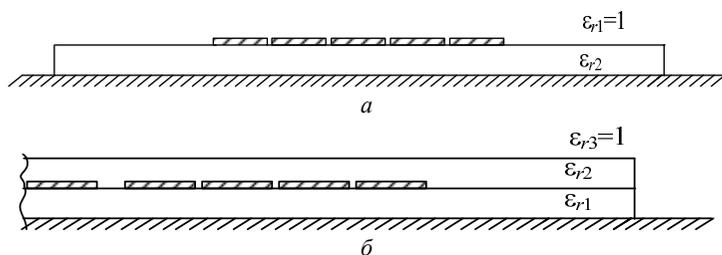


Рис. 6.20. Поперечные сечения 5-проводной микрополосковой линии (а) и симметричного 10-контактного плоского кабеля (б)

Полученные результаты для первой структуры сведены в табл. 6.32, а для второй – в табл. 6.33 (I – нулевое начальное приближение, II – предыдущее решение, III – нулевое начальное приближение и диагональное предобусловливание, и IV – предыдущее решение и диагональное предобусловливание). Курсивом помечено общее число затраченных итераций. Для наглядности использован верхний индекс в виде «*», сигнализирующий о том, что хотя бы при решении одной СЛАУ требуемое число итераций достигало максимального, которое было принято равным 100.

Из представленных результатов видно, что предложенный гибридный метод существенно сокращает время вычислений. Так, для симметричной микрополосковой линии ускорение достигает 25 раз. При этом выбор предыдущего решения в качестве начального приближения следующего решения является наилучшим вариантом. В то же время, выбор порядка решения практически не влияет на затраты времени.

В случае симметричного кабеля, для всех исследованных версий алгоритма 6.4-У2, за исключением 6.4-У2-I, использование об-

ратного порядка предпочтительнее по сравнению с прямым. Использование диагонального предобусловливания практически всегда снижает число итераций, но это снижение не существенно и поэтому его использование не позволяет получить желаемое ускорение. Еще одним важным наблюдением является то, что с точки зрения минимизации временных затрат, использование в качестве начального приближения решения предыдущей СЛАУ является более выигрышным по сравнению с фиксированным начальным приближением (в данной случае нулевым).

Таблица 6.32

Время работы (с) и число итераций алгоритмов при разных наборах параметров и $tol = 10^{-4}$ для рис. 6.20, а

| N_A/N | Алгоритм | | | | | | |
|-----------|----------|-------|--------|--------------|--------------|------------|------------|
| | 6.2 | 6.4 | 6.4-У1 | 6.4-У2-I | | 6.4-У2-II | |
| | | | | → | ← | → | ← |
| 1050/1370 | 9,01 | 1,18 | 0,86 | 0,72 195 | 0,69 194 | 0,51 99 | 0,51 99 |
| 2100/2740 | 44,81 | 5,24 | 3,78 | 2,79 196 | 2,70 195 | 2,27 99 | 2,41 99 |
| 4200/5480 | 250,05 | 24,02 | 16,48 | 12,40 197 | 12,40 197 | 9,94 99 | 9,94 99 |

Таблица 6.33

Время работы (с) и число итераций алгоритмов при разных наборах параметров и $tol = 10^{-4}$ для рис. 6.20, б

| N_A/N | Алгоритм | | | | | | | | |
|-----------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| | 6.4-У1 | 6.4-У2-I | | 6.4-У2-II | | 6.4-У2-III | | 6.4-У2-IV | |
| | | → | ← | → | ← | → | ← | → | ← |
| 500/1000 | 0,81 | 1,87 650 | 1,95 653 | 1,82 469 | 1,76 462 | 3,98 1879* | 2,05 621 | 2,42 698 | 2,03 398 |
| 1552/3032 | 11,27 | 9,45 698 | 9,36 694 | 6,86 363 | 6,83 359 | 21,05 1718* | 11,40 655 | 11,58 682 | 8,65 349 |
| 3004/5864 | 62,34 | 36,49 776 | 36,58 777 | 25,27 336 | 24,45 330 | 59,89 1327* | 42,50 700 | 41,44 667 | 31,72 351 |

Для демонстрации точности предлагаемого подхода, на рис. 6.21, а и б приведены соответственно последние ($k = 100$) ёмкостные матрицы (пФ/м), полученные в системе TALGAT при использовании алгоритма 6.2 (\underline{C}_{100}^T) и алгоритма 6.4-У2-II в сочетании с обратным порядком при $tol = 10^{-4}$ (\underline{C}_{100}) для случая 3004/5864. (Сравнение результатов, полученных в системе TALGAT, с результатами, полученными другими авторами, можно найти в [146, 147]). Для облегчения визуального сравнения полученных результатов

значения элементов матрицы \underline{C}_{100} , имеющие различия с соответствующими значениями элементов матрицы \underline{C}_{100}^T , помечены подчеркиванием. Видно, что различия малы, а самые существенные имеют отличие во втором знаке после запятой. При этом наибольшая поэлементная относительная погрешность составляет менее 1%.

$$\underline{C}_{100}^T =$$

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 159,166 | -27,0511 | -1,00930 | -0,46658 | -0,22882 | -0,14323 | -0,09452 | -0,06018 | -0,04806 | -0,04847 |
| -27,0593 | 167,278 | -25,1093 | -0,98541 | -0,33222 | -0,18046 | -0,10778 | -0,06596 | -0,05076 | -0,04881 |
| -1,01324 | -25,1093 | 167,285 | -0,26995 | -0,71115 | -0,30135 | -0,15701 | -0,08980 | -0,06611 | -0,06123 |
| -0,46676 | -0,98228 | -26,9889 | 159,789 | -6,62611 | -0,78963 | -0,31274 | -0,15648 | -0,10757 | -0,09571 |
| -0,23142 | -0,33499 | -0,71977 | -6,62628 | 159,785 | -27,1995 | -0,77653 | -0,29849 | -0,17934 | -0,14432 |
| -0,14347 | -0,18015 | -0,30074 | -0,77652 | -27,1995 | 159,785 | -6,62630 | -0,71491 | -0,03340 | -0,23320 |
| -0,09525 | -0,10825 | -0,15782 | -0,31273 | -0,78963 | -6,62611 | 159,789 | -26,9735 | -0,98663 | -0,47196 |
| -0,06046 | -0,06599 | -0,08985 | -0,15580 | -0,29928 | -0,70697 | -26,9814 | 168,314 | -26,7845 | -1,01661 |
| -0,04828 | -0,05077 | -0,06612 | -0,10713 | -0,17964 | -0,33119 | -0,98898 | -26,7844 | 168,308 | -27,0448 |
| -0,04847 | -0,04861 | -0,06099 | -0,09497 | -0,14408 | -0,23056 | -0,47179 | -1,01341 | -27,0351 | 159,166 |

а

$$\underline{C}_{100} =$$

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 159,166 | -27,0511 | -1,00930 | -0,46658 | -0,22883 | -0,14323 | -0,09452 | -0,06018 | -0,04806 | -0,04847 |
| -27,0593 | 167,278 | -25,1093 | -0,98541 | -0,33222 | -0,18046 | -0,10778 | -0,06595 | -0,05075 | -0,04799 |
| -1,01323 | -25,1093 | 167,285 | -0,26995 | -0,71116 | -0,30135 | -0,15701 | -0,08980 | -0,06611 | -0,06121 |
| -0,46677 | -0,98226 | -26,9889 | 159,789 | -6,62612 | -0,78964 | -0,31274 | -0,15647 | -0,10756 | -0,09568 |
| -0,23142 | -0,33497 | -0,71976 | -6,62628 | 159,785 | -27,1995 | -0,77653 | -0,29848 | -0,17931 | -0,14429 |
| -0,14346 | -0,18013 | -0,30073 | -0,77653 | -27,1995 | 159,785 | -6,62630 | -0,71490 | -0,03340 | -0,23318 |
| -0,09524 | -0,10823 | -0,15782 | -0,31274 | -0,78964 | -6,62612 | 159,789 | -26,9735 | -0,98663 | -0,47196 |
| -0,06045 | -0,06598 | -0,08984 | -0,15580 | -0,29929 | -0,70697 | -26,9814 | 168,314 | -26,7844 | -1,01659 |
| -0,04828 | -0,05076 | -0,06612 | -0,10714 | -0,17965 | -0,33119 | -0,98898 | -26,7844 | 168,308 | -27,0448 |
| -0,04846 | -0,04861 | -0,06099 | -0,09497 | -0,14408 | -0,23056 | -0,47179 | -1,01341 | -27,0351 | 159,166 |

б

$$\underline{C}_{100} =$$

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 158,823 | -27,0230 | -1,02412 | -0,47493 | -0,23345 | -0,14621 | -0,09669 | -0,06176 | -0,04939 | -0,04965 |
| -27,0150 | 166,938 | -25,0715 | -0,99162 | -0,33593 | -0,18242 | -0,10926 | -0,06691 | -0,05157 | -0,04955 |
| -1,01994 | -25,0715 | 166,945 | -0,26950 | -0,71671 | -0,30423 | -0,15903 | -0,09103 | -0,06713 | -0,06212 |
| -0,47410 | -0,99471 | -26,9957 | 159,447 | -6,63421 | -0,80335 | -0,31959 | -0,16052 | -0,11050 | -0,09795 |
| -0,23664 | -0,34382 | -0,73450 | -6,63452 | 159,443 | -27,1634 | -0,78621 | -0,30408 | -0,18323 | -0,14715 |
| -0,14628 | -0,18402 | -0,30626 | -0,78620 | -27,1634 | 159,443 | -6,63455 | -0,72979 | -0,03430 | -0,23846 |
| -0,09748 | -0,11116 | -0,16183 | -0,31958 | -0,80335 | -6,63422 | 159,447 | -26,9416 | -0,99916 | -0,47937 |
| -0,06132 | -0,06697 | -0,09101 | -0,15774 | -0,30203 | -0,71230 | -26,9356 | 167,975 | -26,7424 | -1,02274 |
| -0,04899 | -0,05154 | -0,06701 | -0,10855 | -0,18148 | -0,33469 | -0,99463 | -26,7423 | 167,968 | -27,0000 |
| -0,04964 | -0,04994 | -0,06256 | -0,09714 | -0,14707 | -0,23522 | -0,48022 | -1,02837 | -27,0075 | 158,823 |

в

Рис. 6.21. Ёмкостные матрицы (пФ/м), полученные для $N_d/N=3004/5864$ при использовании алгоритмов 6.2 (а) и 6.4-У2-П в сочетании с обратным порядком при $tol = 10^{-4}$ (б), 10^{-1} (в)

Далее при анализе кабеля была уменьшена требуемая точность вычислений до $\text{tol} = 10^{-1}$. При этом время вычислений составило 18,15 с, а требуемое число итераций 104. Полученная матрица \underline{C}'_{100} приведена на рис. 6.21, в. Видно, что различия в подавляющем большинстве, как и раньше, незначительны, а наибольшая поэлементная относительная погрешность составляет менее 4%.

Таким образом, при незначительной потере точности, удалось ускорить процесс многократного решения СЛАУ до 2,5 ($\text{tol} = 10^{-4}$) и 3,4 ($\text{tol} = 10^{-1}$) раза, для 3004/5864 при использовании алгоритма 6.4-У2-П и обратного порядка, относительно алгоритма 6.4-У1. При этом ускорение относительно алгоритма 6.4 (использование обращения блока **D**) и 6.2 (исходный с полным пересчетом LU-разложения) еще более существенно. В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть усовершенствованы алгоритмы 6.6 и 6.7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная монография посвящена проблеме обеспечения ЭМС технических средств, в части вопросов моделирования. Автор не ставил перед собой цель всесторонне осветить широту задач, охватываемых ЭМС, а лишь стремился поспособствовать в привлечении к ней внимания и, поэтому, надеется, что данная работа будет полезной для читателя.

В работе предпринята попытка качественно сравнить универсальные численные методы и основанные на них программные продукты, а также представить некоторые рекомендации по их использованию и валидации результатов моделирования. Помимо этого, в работе достаточно подробно рассмотрены математические модели для анализа линий передачи (без потерь), широко используемые на практике при решении задач ЭМС (в частности, целостности сигналов и питания).

Значительная часть работы посвящена авторским разработкам в части многократного решения СЛАУ с помощью блочного LU-разложения при анализе линий передачи методом моментов. В конце работы представлен гибридный численный метод, позволяющий существенно ускорить процесс моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р 50397–2011. Совместимость технических средств электромагнитная. Термины и определения. – взамен ГОСТ Р 50397–92; введ. 08.12.2011. – М.: Стандартинформ, 2011. – 61 с.
2. Paul C. Transmission Lines in Digital Systems for EMC practitioners. – Wiley-IEEE Press., 2012. – 270 p.
3. Кечиев Л.Н. Экранирование технических средств и экранирующие системы / Л.Н. Кечиев, Б.Б. Акбашев, П.В. Степанов. – Группа ИДТ, ИД «Технологии», 2010. – 472 с.
4. Электромагнитная совместимость систем спутниковой связи / В.В. Тимофеев и др.; под ред.: Л.Я. Кантора, В.В. Ноздрина. – М.: ФГУП НИИР, 2009. – 279 с.
5. Электромагнитный терроризм на рубеже тысячелетий / М. Бакстром и др.; под ред. Т.Р. Газизова. – Томск: Том. гос. ун-т, 2002. – 206 с.
6. Ott H.W. Electromagnetic Compatibility Engineering. – USA, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. – 872 p.
7. Гизатулин Р.М. Помехоустойчивость и информационная безопасность вычислительной техники при электромагнитных воздействиях по сети электропитания: монография / Р.М. Гизатуллин, З.М. Гизатуллин. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2014. – 142 с.
8. Ozenbaugh R.L. EMI filter design. Third edition / R.L. Ozenbaugh, T.M. Pullen. – CRC Press, 2011. – 272 p.
9. E.B. Joffe. Grounds for grounding / Joffe E.B., Lock K.S. – USA, New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2010. – 1088 p.
10. Tesche F.M. EMC analysis methods and computational models / F.M. Tesche, M. Ianoz, T. Karlsson. – New York: Wiley-Inter-science, 1996. – 656 p.
11. Weston D.A. Electromagnetic compatibility: methods, analysis, circuits, and measurement. Third edition. – USA, Boca Raton: CRC Press, 2016. – 1150 p.
12. Иванов В.А. Модельные и стендовые исследования электризации космических аппаратов / В.А. Иванов, В.Ю. Кириллов, Е.П. Морозов // Под ред. В.Ю. Кирилова – М.: Изд-во МАИ, 2012. – 168 с.
13. Paul C.R. Introduction to electromagnetic compatibility. Second edition – John Wiley, 1992. – 1016 p.
14. Дьяков А.Ф. Электромагнитная совместимость в электроэнергетике и электротехнике / А.Ф. Дьяков, Б.К. Максимов, Р.К. Борисов. – М.: Энергоатомиздат, 2003. – 768 с.
15. Геворкян В.М. Электромагнитная совместимость электронных информационных систем: в 2 ч. – Ч. 1. Общие вопросы электромагнитной совместимости технических средств: учеб. пособие. – М.: Изд-во МЭИ, 2006. – 432 с.
16. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. – М.: Физматлит, 2013. – 430 с.
17. Ruehli A.E. Electromagnetic compatibility modeling techniques: past, present and future / A.E. Ruehli, E. Miersch // 19th International Zurich symposium on electromagnetic compatibility. – Zurich, 2008. – P. 1–4.

18. Yee K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1966. – Vol. 14, № 3. – P. 302–307.
19. Сосунов Б.В. Применение метода конечных разностей временной области в задачах дифракции радиоволн / Б.В. Сосунов, А.А. Тимчук // Вопросы ЭМС и расчета антенн и радиолиний: ВАС. – 1994. – С. 220–226.
20. Taflove A. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations / A. Taflove, M. Brodwin // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 1975. – Vol. MMT-23. – P. 623–630.
21. Detailed FD-TD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens / A. Taflove, K. Umashankar, V. Beker, et al. // IEEE Transactions on antennas and propagation – 1988. – Vol. 36, Issue 2. – P. 247–257.
22. Беляцкий А.И. Определение соответствия численных аналогов физическим прототипам при моделировании электродинамических процессов методом конечных разностей во временной области / А.И. Беляцкий, М.В Рыжов, С.М. Токарев // Сб. науч.-метод. статей вузов связи МО РФ. – 2003. – С. 21–27.
23. Беляцкий А.И. Оценка адекватности моделей электродинамических процессов при использовании метода конечных разностей во временной области / А.И. Беляцкий, М.В Рыжов, С.М. Токарев // Сб. науч.-метод. статей вузов связи МО РФ. – 2003. – С. 28–33.
24. Weiland T. A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields // Electronics and Communications AEUE. – 1977. – Vol. 31, № 3. – P. 116–120.
25. Clemson vehicular electronics laboratory: the finite integration technique [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cecas.cle-mson.edu/cvel/modeling/tutorials/techniques/fit/finite_integration.html, свободный (дата обращения: 11.09.18).
26. Clemens M. Discrete electromagnetism with the finite integration technique / M. Clemens, T. Weiland // Progress in electro-magnetics research. – 2001. – Vol. 32. – P. 65–87.
27. Johns P.B. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix / P.B. Johns, R.L. Beurle // Proceedings of the institution of electrical engineers. – 1971. – Vol. 118, Is. 9. – P. 1203–1208.
28. M Weiner. Electromagnetic analysis using transmission line variables. – World Scientific, 2001. – 510 p.
29. Sadiku M.N.O. Numerical techniques in electromagnetics. – Third edition. – CRC Press LLC, 2009. – 710 p.
30. Christopoulos C. The transmission-line modeling (TLM) method in electromagnetics. – Morgan&Claypool, 2006. – 132 p.
31. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bull. Am. Math. Soc. – 1943. – Vol. 49, № 1. – P. 1–23.

32. Desai C.S. Introduction to the finite element method: a numerical approach for engineering analysis / C.S. Desai, J.F. Abel. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1972. – 477 p.
33. Silvester P. Finite element solution of saturate magnetic field problems / P. Silvester, M. Chari // IEEE Trans. Power Appar. Syst. – 1970. – Vol. 89, № 7. – P. 1642–1651.
34. Довбыш В.Н. Встроенные трансформаторные подстанции – проблемы электромагнитного мониторинга / В.Н. Довбыш, М.Ю. Маслов, Ю.М. Сподобаев // Матер. IV междунар. симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. – СПб., 2005. – С. 25–30.
35. Харрингтон Р.Ф. Применение матричных методов к задачам теории поля // Труды института инженеров по электронике и радиотехнике. – 1967. – № 2. – С. 5–19.
36. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учеб. для вузов. – М.: Изд-во «Дизайн ПРО», 2004. – 640 с.
37. Liu Y. A novel fast iteration technique for scattering by 2-D perfect conducting cylinders / Y. Liu, J. Hu, K.K. Mei // IEEE Trans. Electromagn. Compat. – 2002. – Vol. 44, № 1. – P. 263–265.
38. Ruehli A.E. Inductance calculations in a complex integrated circuit environment // IBM Journal of Research and Development. – 1972. – Vol. 16, Issue 5. – P. 470–481.
39. Ruehli A.E. Efficient capacitance calculations on three-dimensional multiconductor systems / A.E. Ruehli, P.A. Brennan // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1973. – Vol. 21, Is. 2. – P. 76–82.
40. Ruehli A.E. Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1974. – Vol. 22, Is. 3. – P. 216–221.
41. Kron G. Equivalent circuit for the field equations of Maxwell // Proceedings of the IRE. – 1944. Vol. 32, № 5. – P. 289–299.
42. Hubing T.H. An EMC engineer's guide to electromagnetic modeling software // IEEE EMC Society Distinguished Lecturer Presentation. – Ottawa, 1997. – P. 1–21.
43. Su C. Overview of electromagnetic modeling software / C. Su, H. Ke, T. Hubing // Proc. of the 25th International Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics. – Monterey, CA, 2009. – P. 1–6.
44. Hubing T.H. How EMC engineers use computer modeling tools productively // First International Conference on Automation, Control, Energy and Systems (ACES). – USA, Jacksonville, 2014. – P. 1–56.
45. Institut für theoretische elektrotechnik – Hamburg University of Technology (TUNH) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.tet.tu-harburg.de, свободный (дата обращения: 04.08.18).
46. Altair: Transforming the way companies design products and make decisions [электронный ресурс]. – Режим доступа: www.altair.com, свободный (дата обращения: 04.08.18).
47. EMCoS [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.emcos.com, свободный (дата обращения: 04.08.18).

48. Electromagnetic simulation and EM modeling software: WIPL-D [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.wipl-d.com, свободный (дата обращения: 04.08.18).
49. INTEGRATED Engineering software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.integratedsoft.com, свободный (дата обращения: 04.08.18).
50. Mentor, a siemens business, leads in electronic design automation software – Mentor Graphics [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.mentor.com, свободный (дата обращения: 05.08.18).
51. GEMACS – Electromagnetic analysis program [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.gemacs.com, свободный (дата обращения: 05.08.18).
52. newFASANT – Software solutions for electromagnetic simulation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.fasant.com, свободный (дата обращения: 05.08.18).
53. Keysight technologies [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.keysight.com, свободный (дата обращения: 05.08.18).
54. Lucernhammer: electromagnetic signature / radar cross section prediction [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lucernhammer.tripointindustries.com>, свободный (дата обращения: 05.08.18).
55. TALGAT Система компьютерного моделирования электромагнитной совместимости [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.talgat.org/talgat-software, свободный (дата обращения: 07.08.18).
56. GEMS [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.2comu.com, свободный (дата обращения: 07.08.18).
57. QWED – Software for electromagnetic design [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.qwed.com.pl, свободный (дата обращения: 07.08.18).
58. EuCAP animation SPEAG, Schmid & Partner Engineering AG [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.semcad.com, свободный (дата обращения: 07.08.18).
59. EMPIRE XPU – FDTD simulator for 3D EM modeling of antennas, filters, multilayer components, packages, waveguide elements, RCS, EMC and SAR calculations [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.empire.de, свободный (дата обращения: 07.08.18).
60. Electromagnetic simulation software & EM modeling – Remcom [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.remcom.com, свободный (дата обращения: 07.08.18).
61. ESI Group – Virtual prototyping software and services [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.esi-group.com, свободный (дата обращения: 09.08.18).
62. Electro magnetic applications, Inc. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.ema3d.com, свободный (дата обращения: 09.08.18).
63. EMAG Technologies Inc. Innovative RF solutions [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.emagtech.com, свободный (дата обращения: 09.08.18).

64. CST – Computer simulation technology [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.cst.de, свободный (дата обращения: 09.08.18).
65. FSC former website [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.faustcorp.com, свободный (дата обращения: 09.08.18).
66. Engineering simulation. 3D design software. ANSYS [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.ansys.com, свободный (дата обращения: 09.08.18).
67. Opera electromagnetic FEA simulation software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.operafea.com (дата обращения: 10.08.18).
68. АСОНИКА: компьютерное моделирование РЭС и контроль изделий электроники [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.asonika-online.ru (дата обращения 10.08.18).
69. Банков С.Е. Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР / С.Е. Банков, А.А. Курушин. – М.: Солон-Пресс, 2010. – 276 с.
70. Банков С.Е. Электродинамическое моделирование антенных и СВЧ-структур с использованием FEKO / С.Е. Банков, А.Н. Грибанов, А.А. Курушин. – М.: OneBook, 2013. – 426 с.
71. Лагутин В. Новые возможности электродинамического анализа геометрически сложных структур в Altair FEKO // Современная электроника. – 2016. – № 8. – С. 2–5.
72. Максимович Е.С. Использование программы электромагнитного моделирования IE3D для разработки планарных антенн // EDA Express. – 2005. – № 12. – С. 2–6.
73. Карабан В.М. Возможности программного обеспечения компании Mentor Graphics в области трехмерного моделирования электромагнитных полей электронных устройств и систем / В.М. Карабан, А.С. Краюхин, Р.С. Севастьянов // Технические науки: теория и практика: матер. II Междунар. науч. конф. – 2014. – С. 3–5.
74. Ежов В. 3D-моделирование СВЧ-полей с помощью Empire Хру по материалам семинара компании «ПСБ СОФТ» // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2016. – № 6. – С. 1–6.
75. Harrington R.F. Field computation by moment methods. – USA, NY: Macmillan, 1968. – 240 p.
76. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел; под ред. Э.И. Григолюк. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
77. Gibson WC. The Method of Moments in Electromagnetics. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2008. – 272 p.
78. Swanson D.G. Microwave circuit modeling using electromagnetic field simulation / D.G. Swanson W.J.R. Hofer. – Norwood: Artech House Publishers, 2003. – 474 p.
79. Crandall S.H. Engineering analysis. – USA, NY: McGraw-Hill, 1956. – 151 p.
80. Ames W.F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. – USA, NY: Academic Press, 1965. – 305 p.
81. Finlayson B.A. The method of weighted residuals and variational principles. – USA, NY: Academic Press, 1972. – 412 p.

82. Davidson D.B. Computational electromagnetics for RF and microwave engineering. – Cambridge: University Press, 2011. – 505 p.
83. Rylander T. Computational Electromagnetics / T. Rylander, P. Ingelström, A. Bondeson. – USA, NY: Springer, 2013. – 286 p.
84. Канторович А.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: физ.-мат. лит., 1959. – 684 с.
85. Kryloff N.M. Les méthodes de résolution approchée des problèmes de la physique mathématique. – Paris: Gauthier-Villars, 1931. – 71 p.
86. Кравчук М.Ф. Применение метода моментов для решения линейных дифференциальных уравнений // Сообщения АН УССР. – 1932. – Т. 1. – 168 с. (на украинском)
87. Rao S. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape / S. Rao, D. Wilton, A. Glisson // IEEE Transactions on Antennas and Propagation – 1982. – Vol. 30, Is. 3. – P. 409–418.
88. Schlagenhauser F. Computer simulation and experimental validation of a metallic enclosure with slots / F. Schlagenhauser, J. He, K. Fynn // IEEE Int. Symp. on EMC. – Minneapolis, 2002. – P. 273–278.
89. IEEE Std 1597.1–2008. Standard for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulation. – Part 1, 2. – IEEE Standard, 2008. – 41 p.
90. IEEE Std 1597.2–2010. Recommended practice for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulations. – IEEE, 2010. – 124 p.
91. Jakobus U. Aspects of and insights into the rigorous validation, verification, and testing processes for a commercial electromagnetic field solver package / U. Jakobus, R.G. Marchand, D.J. Ludick // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2014. – Vol. 56, Is. 4. – P. 759–770.
92. Lessons from applying IEEE standard 1597 for validation of computational electromagnetics computer modeling and simulations / S. Park, M. Kotzev, H.D.D. Bruns, et al. // IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine. – 2017. – Vol. 6, № 2. – P. 55–67.
93. Development of next generation FSV tools and standards / A.L. Drozd, B. Archambeault, A. Duffy, et al. // IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility. – Pittsburgh, USA, 2012. – P. 647–648.
94. Geng Y. Research on FSV in membership function credibility verification – for system performance evaluation / Y. Geng, T. Jiang, X. Zhang // Proc. of progress in electromagnetic research symposium (PIERS). – Shanghai, China, 2016. – P. 4723–4727.
95. Jackson J.D. Classical electrodynamics – USA, NY: John Wiley & Sons, 1962. – 641 p.
96. Kikkert J. A design technique for microstrip filters // 2nd international conference on signal processing and communication systems, (ICSPCS 2008). – Gold Coast, Australia, 2008. – P. 1–5.
97. Guang-Hwa S. Analysis and design of crosstalk noise reduction for coupled striplines inserted guard trace with an open-stub on time-domain in high-speed digital circuits / S. Guang-Hwa, S. Jia-Hung, C. Po-Wei // IEEE Transac-

tions on components, packaging and manufacturing. – 2011. – Vol. 1, № 10. – P. 1537–1582.

98. Accurate design methodology to prevent crosstalk / C.H. Chen, W.T. Huang, Chou C.T., et al. // *Electronics letters*. – 2007. – Vol. 43, № 3. – P. 149–150.

99. Gong K. Phase velocity lines for low crosstalk microstrip interconnection of high-speed digital circuits: design and experimental validation / K. Gong, Z. Du, G. Yan // *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*. – 2006. – Vol. 48, № 1. – P. 95–103.

100. Serpentine guard trace to reduce the far-end crosstalk voltage and the crosstalk induced timing jitter of parallel microstrip lines / H.K. Jung, H.J. Park, H.B. Lee et al. // *IEEE Transactions on advanced packaging*. – 2008. – Vol. 3, № 4. – P. 809–817.

101. Газизов Т.Р. Модальный фильтр как устройство защиты бортовых вычислителей и блоков управления космических аппаратов от электростатического разряда / Т.Р. Газизов, Е.С. Долганов, А.М. Заболоцкий // *Изв. высш. учеб. заведения. Физика*. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 39–43.

102. Широкополосные дискретные недисперсионные фазовращатели на основе эффекта кратного изменения фазовой скорости в многосвязных полосковых структурах с существенно неуравновешенной электромагнитной связью при сохранении согласования в широкой полосе частот / Н.Д. Малютин, А.Г. Лошилов, В.Н. Федоров, и др. // *Доклады ТУСУР*. – 2014. – № 4(34). – С. 22–30.

103. Herscovici N. A new consideration in the design of microstrip antennas // *IEEE Transactions and antennas propagation*. – 1998. – Vol. 46, № 12. – P. 807–812.

104. Dispersive delay line with effective transmission-type operation in coupled-line technology / A. Lujambio, I. Arnedo, M. Chudzik, et al. // *Micro-wave and wireless components letters*. – 2011. – Vol. 21. – P. 459–461.

105. Заболоцкий А.М., Временной отклик многопроводных линий передачи / А.М. Заболоцкий, Т.Р. Газизов. – Томск: Том. гос. ун-т, 2007. – 152 с.

106. Bhatti A.A. A computer based method for computing the N-dimensional generalized ABCD parameter matrices of N-dimensional systems with distributed parameters // *The twenty-second southeastern symposium on system theory*. – Cookeville, USA, 1990. – P. 590–593.

107. Reducing energy consumption of dense linear algebra operations on hybrid CPU-GPU platforms / M.F. Dolz, F.D. Igual, R. Mayo et al. // *IEEE 10th International symposium on parallel and distributed processing with applications (ISPA)*. – Madrid, Spain, 2012. – P. 56–62.

108. Margaritis K.G.. Implementing parallel LU factorization with pipelining on a multicore using OpenMP / K.G. Margaritis, P.D. Michailidis // *IEEE 13th International conference on computational science and engineering (CSE)*. – Hong Kong, China, 2010. – P. 253–260.

109. Implementation of block algorithm for LU factorization / K. Ji, W. Liu, Z. Shi, et al. // World congress on computer science and information engineering. – Los Angeles, USA, 2009. – Vol. 2. – P. 569–573.
110. Demmel J.W. Benchmarking GPUs to tune dense linear algebra / J.W. Demmel, V. Volkov // International conference for high performance computing, networking, storage and analysis. – Ostin, USA, 2008. – P. 1–11.
111. Design of scalable dense linear algebra libraries for multithreaded architectures: the LU factorization / E. Chan, E.S. Quintana-Orti, R.A. van de Geijn, et al. // IEEE International symposium on parallel and distributed processing. – Sydney, Australia, 2008. – P. 1–8.
112. Rius J.M. Accelerated direct solution of the MoM linear system using block compression and nested factorization / J.M. Rius, A. Heldring // International conference on electromagnetics in advanced applications (ICEAA). – Torino, Italy, 2011. – P. 636–639.
113. Topa T. Efficient out-of-GPU memory strategies for solving matrix equation generated by method of moments / Electronics letters. – 2015. – Vol. 51, № 1. – P. 1542–1544.
114. Gazizov T.R. Acceleration of multiple solution of linear systems for analyses of microstrip structures / T.R. Gazizov, S.P. Kuksenko, R.R. Akhunov // International journal of mathematical models and methods in applied sciences. – 2015. – Vol. 9. – P. 721–726.
115. Ахунув Р.Р. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений итерационным методом с адаптивным переформированием предобуславливателя / Р.Р. Ахунув, Т.Р. Газизов, С.П. Куксенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 8. – С. 1395–1400.
116. Kuksenko S.P. Choosing order of operations to accelerate strip structure analysis in parameter range / S.P. Kuksenko, R.R. Akhunov, T.R. Gazizov // Journal of physics: conference series. – 2018. – Vol. 1015, № 3. – P. 1–6.
117. Вольман В.И. Справочник по расчету и конструированию СВЧ-полосковых устройств. – М.: Радио и связь, 1982. – 328 с.
118. Makarov S.N. Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB / S.N. Makarov, G.M. Noetscher, A. Nazarian. – John Wiley & Sons, 2016. – 589 p.
119. Tesche F.M. EMC analysis methods and computational models / F.M. Tesche, M. Ianoz, T. Karlsson. – USA, NY: Wiley-Interscience, 1996. – 656 p.
120. Paul C. Transmission lines in digital and analog electronic systems: signal integrity and crosstalk. – Wiley-IEEE Press, 2010. – 299 p.
121. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2000. – 344 с.
122. Фуско В. СВЧ-цепи. Анализ и автоматизированное проектирование: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
123. Газизов Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях / Т.Р. Газизов; под ред. Н.Д. Малютина – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 212 с.

124. Scheinfein M.R. Methods of calculation of electrical parameters for electronic packaging applications / M.R.Scheinfein, O.A. Palusinski // IEEE Transactions of the Society for Computer Simulation. – 1987. Vol. 4, No. 3. – P. 187–254.

125. Bazdar M.B. Evaluation of quasi-static matrix parameters for multi-conductor transmission lines using Galerkin's method // M.B. Bazdar, A.R. Djordjevic, R.F. Harrington, et al. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1994. – Vol. 42, No 7. – P. 1223-1228.

126. Rao S.M. The electrostatic field of conducting bodies in multiple dielectric media / S.M. Rao, T.K. Sarkar, R.G. Harrington // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1984. – No. 32, Issue 11. – P. 1441–1448.

127. Electrical performance of high-speed interconnect systems / M.R. Scheinfein, J.C. Liao, O.A. Palusinski, et al. // IEEE Transactions Components, Hybrids, Manufacturing Technology. – 1987. – Vol. CHMT-10, No 3. – P. 303–309.

128. Intel. Инновационные решения для ЦОД, интернета вещей и ПК [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.intel.com>, свободный (дата обращения: 21.09.18).

129. Automatically Tuned Linear Algebra Software (ATLAS) [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/atlas>, свободный (дата обращения: 21.09.18).

130. Eigen, библиотека линейной алгебры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://eigen.tuxfamily.org>, свободный (дата обращения: 11.09.2018).

131. LAPACK – Linear Algebra PACKage [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.netlib.org/lapack>, свободный (дата обращения: 21.09.18).

132. AMD [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://developer.amd.com>, свободный (дата обращения: 22.09.18).

133. Boost C++ Libraries [Электронный ресурс]: библиотека линейной алгебры. – Режим доступа: <http://www.boost.org>, свободный (дата обращения: 22.09.2018).

134. Куксенко С.П. Новые возможности системы моделирования электромагнитной совместимости TALGAT / С.П. Куксенко, А.М. Заболоцкий, А.О. Мелкозеров и др. // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 2(36). – С. 45–50.

135. Golub G.H. Matrix computations. Second edition / G.H. Golub, C.F. Van Loan. – Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press, 1989. – 784 p.

136. Akhunov R.R. Multiple iterative solution of linear algebraic systems with a partially varying matrix / R.R. Akhunov, S.P. Kuksenko, V.K. Salov // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 199, № 4. – P. 381–385.

137. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 137 с.

138. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615793 РФ. Многократное решение систем линейных

алгебраических уравнений с частично изменяющейся матрицей / Р.С. Суворцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка № 2015612566. Дата поступления 02.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25.05.2015.

139. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618664 РФ. Вычисление комплексной емкостной матрицы многопроводной микрополосковой линии на подложке из FR-4 в диапазоне частот с помощью блочного LU-разложения / Р.С. Суворцев, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов. – Заявка № 2015612938. Дата поступления 02.04.2015. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.08.15.

140. Салов В.К. Важность корректного учёта частотной зависимости диэлектрической проницаемости материалов при моделировании задач ЭМС / В.К. Салов, П.Е. Орлов, Т.Р. Газизов // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, №9/3. – С. 106–108.

141. Djordjevic A.R. Wideband frequency-domain characterization of FR-4 and time-domain causality / A.R. Djordjevic, R.M. Biljic, V.D. Lika-Smiljanic, et al. // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility – 2001. – Vol. 43, № 4. – P. 662–666.

142. Wouwer A.V. Simulation of ODE/PDE models with MATLAB®, OCTAVE and SCILAB. Scientific and engineering applications / A.V. Wouwer, P. Saucez, C. Vilas. – Switzerland: Springer International Publishing, 2014. – 406 p.

143. Quarteroni A. Scientific computing with MATLAB and Octave / A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. – Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2010. – 465 p.

144. Guennouni A. A block version of BiCGSTAB for linear systems with multiple right-hand sides / A. Guennouni, K. Jbilou, H. Sadok // Electronic transactions on numerical analysis. – 2003. – Vol. 16. – P. 129–142.

145. Ахунов Р.Р. Простой способ ускорения вычисления емкостных матриц полосковой структуры при изменении её геометрического параметра / Р.Р. Ахунов, С.П. Куксенко, Т.Р. Газизов // Доклады ТУСУР. – 2015. – № 4. – С. 144–148.

146. Газизов Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях и влияний преднамеренных силовых электромагнитных воздействий: дис. ... д-ра тех. наук: 05.12.07. – Томск, 2010. – 351 с.

147. Ахунов Р.Р. Анализ полосковых структур радиоэлектронных устройств с уменьшенными вычислительными затратами // Докл. Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники. – 2017. – № 2 (20). – С. 96–99.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Список используемых обозначений и сокращений

Кириллица

- БП – блок питания
- БФ – базисная функция
- ВЧ – высокие частоты
- ЖЦ – жизненный цикл
- ИККП – измеритель комплексного коэффициента передачи
- КЛБФ – кусочно-линейная базисная функция
- КПБФ – кусочно-постоянная базисная функция
- КПД – коэффициент полезного действия
- КРВО – метод конечных разностей во временной области
- КСБФ – кусочно-синусоидальная базисная функция
- ЛС – линия связи
- МКР – метод конечных разностей
- МКЭ – метод конечных элементов
- ММ – математическая модель
- МоМ – метод моментов
- МПЛ – микрополосковая линия
- МПЛП – многопроводная линия передачи
- МЭК – международная электротехническая комиссия
- НВ – несимметричный вибратор
- ОЗУ – оперативное запоминающее устройство
- ОС – операционная система
- ПЛИС – программируемая логическая интегральная схема
- ПП – печатная плата
- РВГ – Рао–Вильтон–Глиссон
- РС – рабочая станция
- САПР – система автоматизированного проектирования
- СВЧ – сверхвысокие частоты
- СЛАУ – система линейных алгебраических уравнение
- СНП – соединитель низкочастотный прямоугольный
- ТЕМ – поперечная электромагнитная волна
- ТС – техническое средство
- ФВЧ – фильтр высоких частот
- ФНЧ – фильтр низких частот
- ЦП – центральный процессор
- ЭВМ – электронно-вычислительная машина
- ЭМО – электромагнитная обстановка
- ЭМП – электромагнитная помеха
- ЭМС – электромагнитная совместимость

Латиница

- ABC – absorbing boundary conditions, абсорбирующие граничные условия
- ADM – amplitude difference measure, мера разности амплитуд

EFIE – electric field integral equation, интегральное уравнение для электрического поля
EMC – electromagnetic compatibility, электромагнитная совместимость
EMI – electromagnetic interference, влияние электромагнитной помехи
EMS – electromagnetic susceptibility, электромагнитная восприимчивость
FEM – finite element method, метод конечных элементов
FDM – finite difference method, метод конечных разностей
FDM – feature difference measure, мера разности особенностей
FDTD – finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FIT – finite integration technique, метод конечного интегрирования
FMM – fast multipole method, быстрый метод мультиполей
FSV – feature selective validation, метод валидации выделением особенностей
GDM – global difference measure, глобальная мера различия
GO – geometrical optics, метод геометрической оптики
GTD – geometrical theory of diffraction, метод геометрической теории дифракции
LE-PO – large element– physical optics, метод физической оптики для укрупненной сетки
MFIE – magnetic field integral equation, интегральное уравнение для магнитного поля
MLFMM – multilevel fast multipole method, многоуровневый быстрый метод мультиполей
MoM – method of moments, метод моментов
MPI – message passing interface, интерфейс передачи сообщений
MSS – multilevel subgridding scheme, многоуровневая схема подсеток
MSVC – Microsoft Visual Studio, интегрированная среда разработки
PBA – perfect boundary approximation, аппроксимации для идеальных граничных условий
PEEC – partial element equivalent circuit method, метод эквивалентной схемы из частичных элементов
RL-GO – ray launching–geometrical optics, метод геометрической оптики с лучевым приближением
PO – physical optics, метод физической оптики
RWG – Rao–Wilton–Glisson, Рао–Вильтон–Глиссон
SMA – sub-miniature version A, соединитель для подключения коаксиального кабеля с волновым сопротивлением 50 Ом
TLM – transmission line matrix, метод матрицы линии передачи
TST – thin sheet technique, метод тонких стенок
UTD – uniform theory of diffraction, метод однородной теории дифракции
VRS – feature selective validation, шкала оценки валидации

Научное издание

Сергей Петрович Куксенко

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Корректор В.Г. Лихачева
Верстка В.М. Бочкаревой

Издательство «В-Спектр»
Подписано к печати 15.12.2018.
Формат 60×84¹/₁₆. Печать трафаретная.
Печ. л. 11,75.
Тираж 500 экз. Заказ 79.

Тираж отпечатан в издательстве «В-Спектр»
ИНН/КПП 7017129340/701701001
634055, г. Томск, пр. Академический, 13-24. Тел. 49-09-91.
E-mail: bvm@sibmail.com