

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Утверждаю:

Зав. каф. РЗИ

_____ Задорин А.С.

Методическое пособие по курсу лекций

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

*для специальностей 075300 (организация и технология защиты информации)
и 075400 (комплексная защита объектов информатизации)*

доц. каф. РЗИ

_____ Литвинов Р.В.

ТОМСК 2007

1. Введение

С колебаниями и волнами мы сталкиваемся на каждом шагу как в повседневной жизни, так и при более глубоком изучении физики явлений. Примеры колебаний: различные механические маятники, смена дня и ночи, изменения численности хищных и травоядных животных в регионе, некоторые химические реакции (периодическое изменение цвета реактивов происходит). Особенно важную роль колебания играют в электронике. Колебания происходят в колебательном контуре, СВЧ-резонаторе, оптическом резонаторе лазера, кварцевом резонаторе ваших часов. В газоразрядной и твердотельной плазме существуют плазменные колебания.

В общем случае *колебанием* можно назвать *процесс*, имеющий определенную *периодичность* во времени (или в любых других координатах). Несмотря на большое разнообразие существующих в природе колебательных процессов они подчиняются в целом одинаковым законам и имеют общую классификацию.

При классификации колебаний важно понятие *возмущения*, под которым обычно понимают либо действующие в колебательной системе *источники энергии*, либо *значения* основных физических величин, необходимых для полного описания колебательного процесса, в *начальный момент времени*.

Колебания можно классифицировать по различным *признакам*. Например, по *числу независимых переменных* (обобщенных координат), необходимых для полного описания процессов в колебательной системе. Эти переменные в физике называют *степенями свободы*.

Наиболее общая классификация колебаний заключается в делении их на *линейные* и *нелинейные*. С физической точки зрения для *линейных* систем характерно то, что *изменение величины возмущения* вызывает лишь *количественные изменения* мгновенного значения электрических колебаний, *пропорциональные* величине возмущения. Характерной особенностью линейных

колебаний является выполнение *принципа суперпозиции* для колебаний возникающих под действием многих возмущающих факторов.

В зависимости от того *действует* ли источник энергии во время колебательного процесса или *не действует*, колебания подразделяются на *вынужденные* и *свободные*.

Если материальные *параметры* колебательной системы *зависят* от той или иной независимой физической величины (например элементы электрической цепи C, L или R могут зависеть от времени), то колебания называются *параметрическими* (или *не автономными*). В противном случае *автономными*. Часто понятие параметрических колебаний сужают на системы с периодической зависимостью материальных параметров от обобщенных координат.

Отметим, что сосредоточенные колебательные процессы описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Волна — это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. *Волновой процесс* — более сложная модель движения реальных систем, состояние которых зависит уже не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями, содержащими частные производные.

В физике волнами или волной называют всякое изменяющееся со временем пространственное чередование максимумов и минимумов (в том числе локальных) любой физической величины, например плотности вещества напряженности электрического поля, температуры. Волной часто называют также всякое явление, при котором в пространстве происходит распространение кратковременного электрического или механического «толчка». Таким образом, понятие «волна» охватывает весьма обширный круг явлений.

Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить «условие квазистационарности»: если характерные размеры

системы $L < cT$ (c — скорость распространения возмущения, T — время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами: В случае $L > cT$ процесс нужно считать волновым, а систему — распределенной.

Волны обычно служат наиболее быстрым механизмом переноса энергии, позволяющим осуществить в системе переход от неравновесного состояния к равновесному. При этом не происходит существенного перемещения вещества, хотя такое перемещение иногда возможно как побочное явление, сопровождающее распространение волны.

Волновой процесс — это одна из важнейших форм движения материи; в той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Как показали эксперименты по дифракции и рассеянию микрочастиц, корпускуляр-но-волновой дуализм есть фундаментальное свойство материи вообще, и для описания состояния квантовых систем необходимо пользоваться волновыми функциями.

Волновые процессы — *нелинейные и линейные* — в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике, гидродинамике и т. д. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Например, упругие волны в жидкостях и газах существуют вследствие того, что коллективное движение частиц среды создает чередующиеся сжатия и разрежения, которые вызывают движение в следующем слое жидкости (газа). Возмущение передается от слоя к слою преимущественно в направлении, вдоль которого происходят колебания частиц, т. е. волны в жидкостях и газах являются продольными. Твердые тела обладают сдвиговой упругостью, и в них могут распространяться поперечные волны. Распространение электромагнитных волн происходит вследствие того, что появляющееся в какой-либо точке пространства переменное электрическое поле возбуждает в соседних точках магнитное поле и наоборот.

Однако нет возможности исчерпывающим образом определить, что следует называть колебательным или волновым процессом вообще. Любая попытка ограничить класс рассматриваемых явлений типом уравнения или перечислением каких-либо общих физических свойств обычно приводит к неудаче, так как всегда удастся построить пример, не укладывающийся в принятую схему. Поэтому, приступая к изучению широкого круга столь разнообразных задач, разумно опереться на интуитивные представления и ограничиться вначале весьма общими утверждениями.

Будем рассматривать наиболее характерные свойства волновых процессов на примере нескольких типов волн различной природы. Это вовсе не означает, что рассматриваемые свойства присущи всем волновым процессам без исключения. В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов. Представление о них имеется у каждого человека, наблюдавшего движение маятника или волны, бегущие на поверхности воды. Курс общей физики дополняет наше представление другими конкретными примерами. Несмотря на многообразие ситуаций и различие в способах описания, можно выделить много общего в протекании процессов различной физической природы. Изучение именно этих общих закономерностей составляет предмет специальных курсов теории колебаний и теории волн.

2. Элементарные волновые процессы

2.1. Интуитивное описание недеформирующегося волнового процесса

В зависимости от того какая физическая величина находится в состоянии волнового движения, скалярная, векторная или тензорная, волны принято делить на *скалярные*, *векторные* или *тензорные* [***].

Возмущение физической величины V в каком-нибудь месте пространства в некоторый момент времени проявляется спустя определенное время в другом месте пространства, т. е. передается с определенной скоростью v . Таким образом значение величины V зависит от пространственных

координат и изменяется с течением времени, т.е. V является функцией времени и координат $V(\mathbf{r}, t)$. В простейшем случае эта функция должна быть такой, чтобы пространственная форма начального возмущения $V_0(\mathbf{r})=V(\mathbf{r}, t_0)$ сохранялась во времени. Определим общие требования, которым должна удовлетворять подобная функциональная зависимость.

Рассмотрим для простоты распространение возмущения скалярной физической величины $V(x, t)$ вдоль оси X со скоростью v .

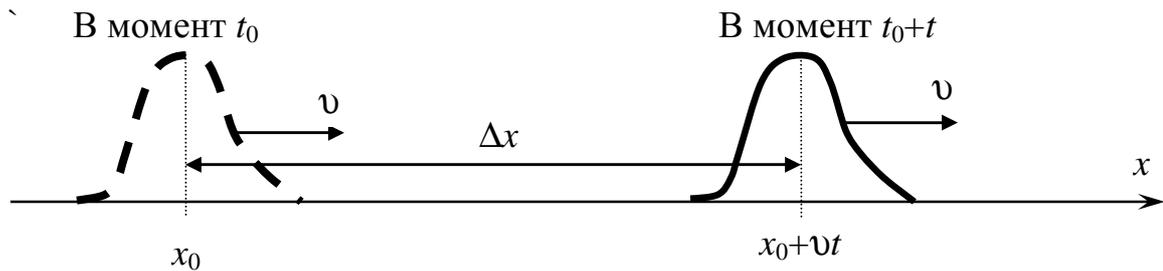


Рис. 2.1. Волновое распространение возмущения

Из рис. 2.1 легко видеть, что форма возмущения $V(x, t)$, распространяющегося со скоростью v в положительном направлении оси X , не изменится, если зависимость от x и t будет иметь вид

$$V(x, t) = V(vt - x). \quad (2.1)$$

К формуле (2.1) можно прийти и другим способом. Пусть в начальный момент времени $V(x=x_0, t=t_0)=V(x_0, t_0)$. По истечении времени Δt функция примет значения $V(x, t)=V(x_0+\Delta x, t_0+\Delta t)$. Ограничимся малыми приращениями $x_0 \gg \Delta x$ и $t_0 \gg \Delta t$. Тогда можно разложить $V(x_0+\Delta x, t_0+\Delta t)$ в ряд Тейлора и ограничиться первыми двумя членами разложения [***]

$$\begin{aligned} V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) - V(x_0, t_0) &= \\ &= \left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\partial x} \right|_{\Delta x=0} \Delta x + \left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\partial t} \right|_{\Delta t=0} \Delta t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Форма возмущения будет сохраняться при распространении, если ее значение в момент t_0 в точке x_0 будет равно ее значению в момент $t_0 + \Delta t$ в точке $x_0 + \Delta x$. Т.е.

$$V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) - V(x_0, t_0) = 0 \quad (2.3)$$

или, что тоже самое

$$\left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\Delta x} \right|_{\Delta x=0} \Delta x + \left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\Delta t} \right|_{\Delta t=0} \Delta t = 0. \quad (2.4)$$

Вводя обозначения

$$\left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\Delta x} \right|_{\Delta x=0} = a, \quad \left. \frac{\partial V(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)}{\Delta t} \right|_{\Delta t=0} = b$$

перепишем условие сохранения формы начального возмущения в виде

$$\Delta x + \frac{b}{a} \Delta t = 0. \quad (2.5)$$

В рассматриваемом случае распространения возмущения вдоль положительного направления оси X приращение координаты положительно $\Delta x > 0$ ($\Delta t > 0$ в силу свойства времени только увеличиваться). Поэтому условие (2.5) может быть выполнено только в случае отрицательного отношения $b/a < 0$. Еще раз обозначая $|b/a| = v$ получим соотношение

$$\Delta x - v \Delta t = 0, \quad (2.6)$$

связывающее приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta t = t - t_0$. Из последнего соотношения следует формула

$$x - vt = \xi \quad (2.7)$$

Таким образом время и координата входят в функцию описывающую волновой процесс не независимо. Они связаны простым линейным соотношением (2.7). Это указывает на то, что $V(x,t)$ на самом деле является функцией одного аргумента $V(x,t)=V(\xi)=V(x-vt)$ (ср. с (2.1)).

Аналогичные рассуждения для волнового процесса, распространяющегося вдоль отрицательного направления оси X показывают, что он описывается функцией вида $V(x+vt)$.

В случае распространения векторных (или тензорных) волн полученные результаты могут быть применены к каждой компоненте вектора $V(x,t)=\{V_i(x-v_i t)\}$ (тензора $V(x,t)=\{V_{i,j,k\dots}(x-v_{i,j,k\dots} t)\}$).

2.2. Монохроматические волны

Широко известными являются волновые процессы с периодической гармонической временной зависимостью, которая, в соответствии с методом комплексных амплитуд [***], может быть описана при помощи пропагатора $\exp[i\omega t]$, где ω – частота. Тогда функция волнового процесса имеет вид $V(x-vt)=F(x)\exp(i\omega t)$. Равенство может быть выполнено, если пространственная часть $F(x)$ функции будет пропорциональна $\exp(px)$ ($F(x)\propto \exp(px)$). Тогда $V(x-vt)=A\exp(px)\exp(i\omega t)=A\exp(i\omega t+px)$, где A некоторая, в общем случае комплексная постоянная (*амплитуда*). Последнее соотношение оказывается справедливым, если $p=-ik$. Тогда легко получить следующую формулу

$$V(vt - x) = A \exp[i(\omega t - kx)] = A \exp\left[ik \left(\frac{\omega}{k} t - x \right) \right] = A \exp[ik(vt - x)]. \quad (2.8)$$

Как видно из последней формулы вещественная постоянная k имеет смысл пространственной частоты. Она называется волновым числом, его размерность $[k]=1/m$. Волновое число связано со скоростью v и частотой ω соотношением

$$\omega = kv. \quad (2.9)$$

Таким образом соотношение (2.8) может быть переписано в хорошо известной форме уравнения для плоской скалярной волны [***]

$$V = A \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2.10)$$

Входящая в показатель экспоненты вещественная величина

$$\phi = \omega t - kx \quad (2.11)$$

называется фазой волны. Как видно в рассматриваемом случае фаза является элементарной линейной функцией от $\omega t - kx = k(\nu t - x)$, т.е. функцией от $\nu t - x$. В момент времени t_0 поставим «маркер» на фазе ϕ_0 в некоторой точке x_0 и будем следить за перемещением этой фазы с течением времени. По истечении времени промежутка времени Δt эта фаза окажется в точке $x = x_0 + \omega \Delta t / k = x_0 + \nu \Delta t$.

Таким образом волновой процесс можно рассматривать с точки зрения перемещения фазы физической величины. Выражение (2.11) может описывать волновой процесс распространяющийся вдоль некоторой прямой. В этом случае геометрическим местом (фигурой) равной фазы является точка.

В случае волновых процессов распространяющихся на плоскости (см. рис. 2.1) линиями равной фазы являются прямыми, а волны этого типа называются *прямолинейными* [***Горелик].

Если волна типа (1.10) распространяется в пространстве, то геометрическое место точек одинаковой фазы является плоскостью перпендикулярной оси X (см. рис. 2.2). В этом случае волны называются *плоскими* [***].

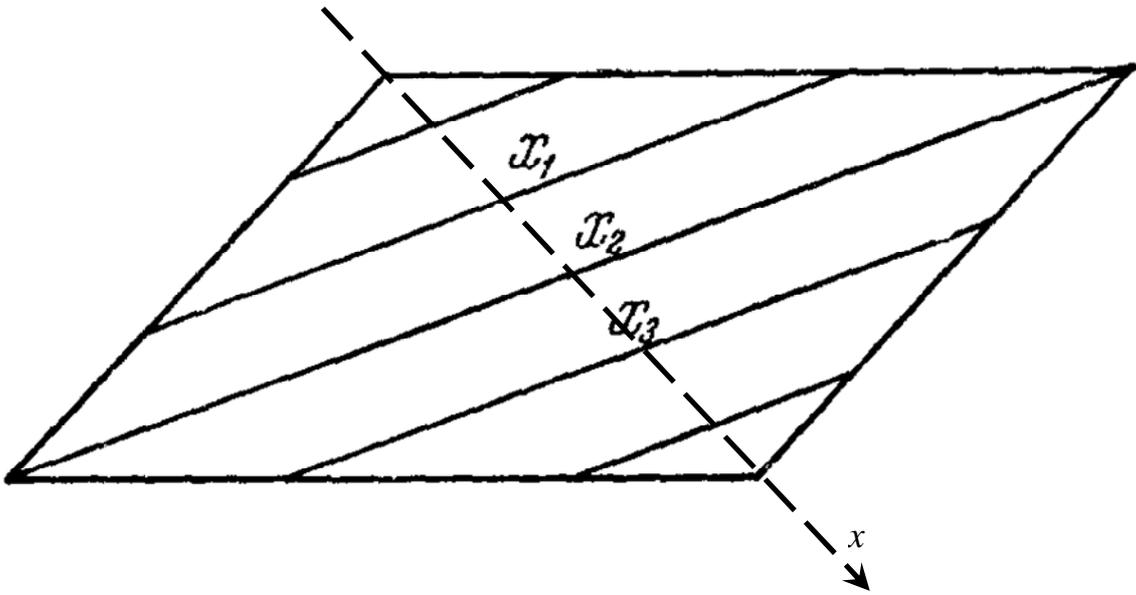


Рис. 2.1. Прямые отвечающие линиям равной фазы для волн на плоскости

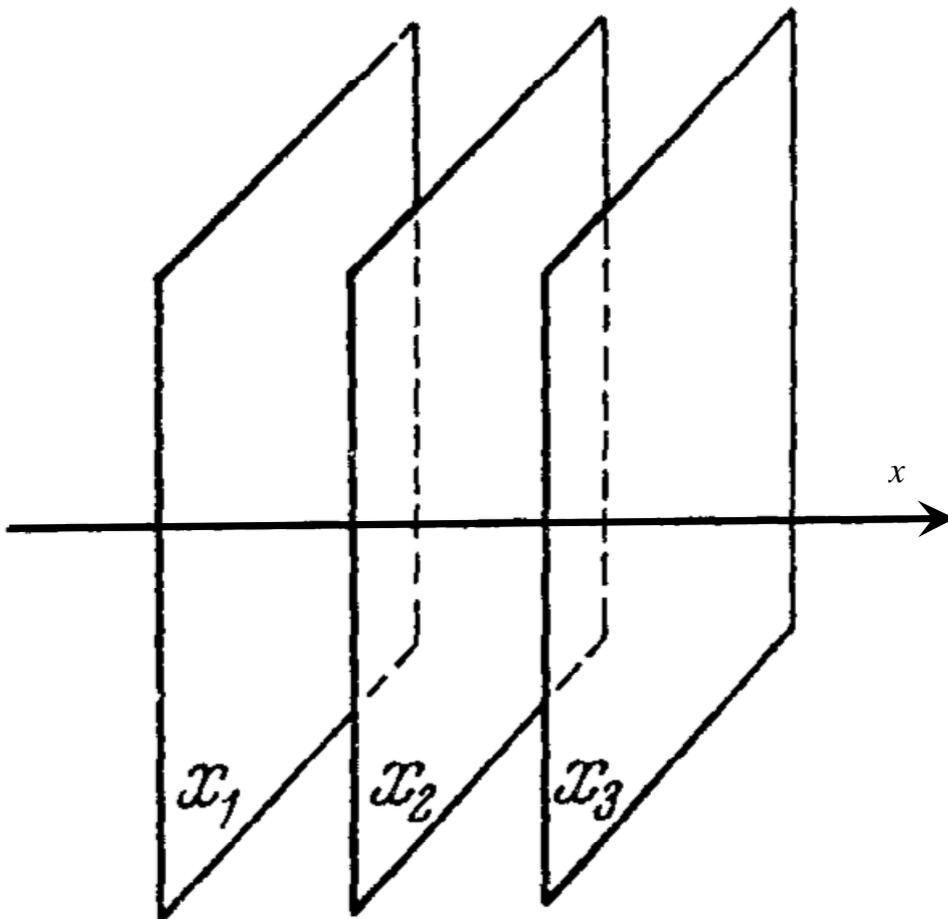


Рис. 2.2. Плоскости равной фазы для волн в пространстве

Естественным обобщением формулы (2.10) на случай плоской волны (в том числе и векторной), распространяющейся в произвольном направлении, не совпадающем не с одной из координатных осей является формула

$$V = A \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (2.12)$$

где A – векторная амплитуда волны, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ – скалярное произведение радиус вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{x}^o + y\mathbf{y}^o + z\mathbf{z}^o$ на волновой вектор $\mathbf{k} = k_x\mathbf{x}^o + k_y\mathbf{y}^o + k_z\mathbf{z}^o$; $\mathbf{x}^o, \mathbf{y}^o$ и \mathbf{z}^o – орты координатной системы (см. рис. 2.3).

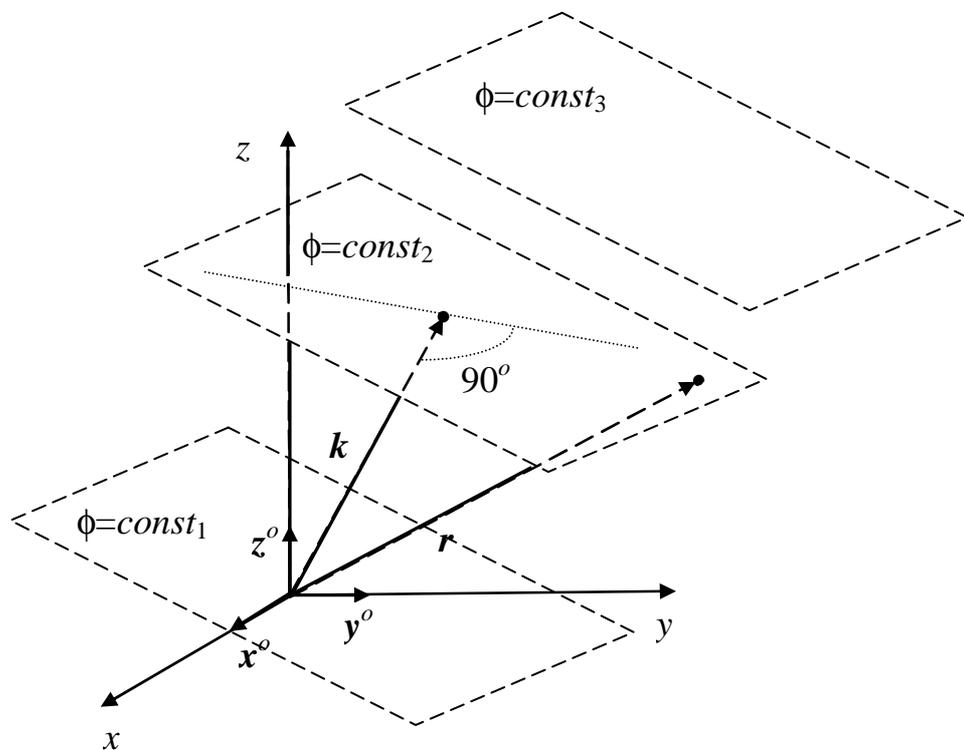


Рис. 2.3. Произвольная ориентация плоскостей равных фаз в пространстве

Отметим, что уравнение $k_x x + k_y y + k_z z + \omega t = const$ есть уравнение семейства плоскостей перпендикулярных волновому вектору \mathbf{k} .

2.3. Цилиндрические и сферические волны

Существуют другие типы волн, которые могут быть описаны выражением, аналогичными формуле (2.10)

$$V = A f(\mathbf{r}) \exp[i\phi(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (2.13)$$

где $f(\mathbf{r})$ и $\phi(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ – скалярные вещественные функции с векторным аргументом.

При такой записи поверхность равных фаз, которую также называют *волновым фронтом* [***], определяется уравнением $\phi(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = const$. Широко известными являются *цилиндрические* и *сферические* волновые фронты.

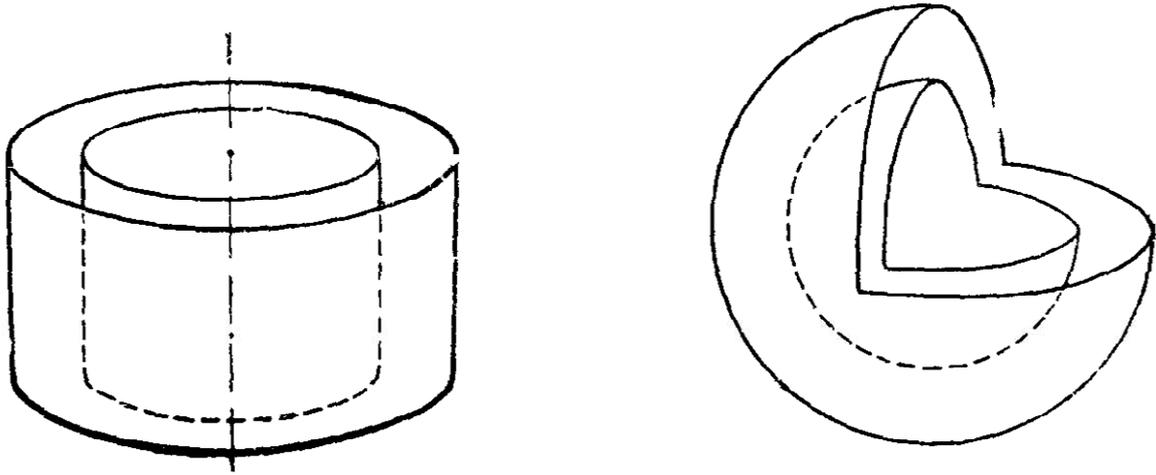


Рис. 2.4. Волновые фронты цилиндрической и сферической волн

Цилиндрические волны, для случая $kr \gg 1$, где ρ – расстояние от оси волнового фронта, описываются соотношением [***]

$$V = A \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp[i(\omega t - k\rho)]. \quad (2.14)$$

В этом случае уравнение $\phi(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \omega t - k\rho = const$ есть уравнение цилиндра. Отметим, что поверхность равных амплитуд также является цилиндром, т.е. совпадает с поверхностью равных фаз.

Сферические волны, для случая $kr \gg 1$, где r – расстояние от центра волнового фронта, описываются соотношением [***]

$$V = A \frac{1}{r} \exp[i(\omega t - kr)]. \quad (2.15)$$

В этом случае уравнение $\phi(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \omega t - kr = \text{const}$ есть уравнение сферы. Отметим, что поверхность равных амплитуд также является сферой, т.е. совпадает с поверхностью равных фаз.

Круг волновых явлений далеко не ограничивается перечисленными выше волновыми процессами. Их многообразие настолько велико, что задача их перечисления скорее всего не будет решена точно. Помимо некоторых простых свойств волновых процессов, рассмотренных выше, они обладают и более сложными свойствами, связанными с физической природой волны, с влиянием среды распространения, со взаимодействием волновых полей одной и той же физической величины между собой, со взаимодействием волновых полей различной физической природы и другими факторами. Данное выше интуитивное математическое описание волновых процессов является простым введением, необходимым для понимания того, каким основным условиям должны удовлетворять решения строгих математических моделей физических полей должны быть найдены при описании волн этих полей.

3. Электромагнитные волны

3.1. Уравнения Максвелла, материальные уравнения и граничные условия

Из общего курса физики известно, что электромагнитное поле в произвольной среде описывается уравнениями Максвелла (см., например, [****]), которые в дифференциальной форме могут представлены в виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{B} – векторы электрической и магнитной индукции; \mathbf{E} и \mathbf{H} – векторы электрической и магнитной напряженности; ρ – объемная плотность электрического заряда; \mathbf{J} – вектор плотности электрического тока.

При записи уравнений (3.1)–(3.4) использовался символический векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \mathbf{x}^o \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}^o \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}^o \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Запись $\nabla \cdot \mathbf{V}$ есть оператор дивергенции над вектором \mathbf{V} , записанный в символьном виде. Так как \mathbf{V} в координатной форме имеет вид $\mathbf{V} = V_x \mathbf{x}^o + V_y \mathbf{y}^o + V_z \mathbf{z}^o$, то, используя свойство скалярного произведения двух векторов, доказанное в курсе линейной алгебры и аналитической геометрии [***], можно получить следующее соотношение

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

Запись $\nabla \times \mathbf{V}$ есть оператор ротора над вектором \mathbf{V} . Используя свойство векторного произведения двух векторов можно получить следующее соотношение

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^o & \mathbf{y}^o & \mathbf{z}^o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}^o \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y}^o \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z}^o \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \quad (3.7)$$

Система (3.1)–(3.4) незамкнута. Однозначно замыкают систему ее материальные уравнения, связывающие между собой физические величины \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , ρ , \mathbf{J} , как функции времени t и радиус-вектора \mathbf{r} . Ограничения, налагаемые материальными уравнениями и соответствующими им физическими процессами в различных средах, определяют характер протекающего электромагнитного процесса. Для большого количества различных извест-

ных материальных сред связь векторов электромагнитного поля \mathbf{D} и \mathbf{E} может быть представлена в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (3.8)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

тензор (второго ранга валентности три [***]) относительной диэлектрической проницаемости, ε_0 – фундаментальная электрическая постоянная [***]. Последнее соотношение может быть записано в следующем развернутом виде

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \\ \varepsilon_{xy}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\ \varepsilon_{xz}E_x + \varepsilon_{yz}E_y + \varepsilon_{zz}E_z \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

или в виде

$$\begin{aligned} D_x \mathbf{x}^o + D_y \mathbf{y}^o + D_z \mathbf{z}^o &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z) \mathbf{x}^o + \\ &+ \varepsilon_0 (\varepsilon_{xy} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z) \mathbf{y}^o + \varepsilon_0 (\varepsilon_{xz} E_x + \varepsilon_{yz} E_y + \varepsilon_{zz} E_z) \mathbf{z}^o \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогичная связь существует и между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H}

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{xy} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{xz} & \mu_{yz} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}. \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\mu}$ – тензор относительной магнитной проницаемости, μ_0 – фундаментальная магнитная постоянная.

Мы будем рассматривать случаи, когда вклад в вектор плотности электрического тока дают только ток смещения и ток проводимости и заданный сторонний ток

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_{cm}, \quad (3.13)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор проводимости на частоте светового поля ω . Кроме того во всех вопросах, рассмотренных в этом разделе, плотность электрического заряда будет заданной функцией времени и координат (чаще всего она будет равна нулю). При этих условиях система уравнений (3.1)-(3.4), (3.8), (3.12) и (3.13) является замкнутой.

Отметим, что уравнения Максвелла могут быть записаны в эквивалентной интегральной форме [***], которая удобна при выводе граничных условий, связывающих электромагнитные поля на границе раздела двух сред. Здесь мы не будем использовать интегральную форму уравнений, а сразу приведем граничные условия, методика получения которых хорошо представлена в учебной литературе (см., например, [***]):

$$\mathbf{E}_{\tau}^I - \mathbf{E}_{\tau}^{II} = 0, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{D}_n^I - \mathbf{D}_n^{II} = \xi, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}_n^I - \mathbf{B}_n^{II} = 0, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{H}_{\tau}^I - \mathbf{H}_{\tau}^{II} = \eta, \quad (3.17)$$

где нижний индекс « τ » относится к составляющим полей, тангенциальным (касательным) к границе раздела сред I и II (верхний индекс); нижний индекс « n » относится к составляющим полей, нормальным (перпендикулярным) к границе раздела сред I и II ; ξ поверхностная плотность электрического заряда

на границе раздела сред; η поверхностная плотность электрического тока на границе раздела сред.

3.2. Волновое уравнение в однородной анизотропной среде без токов и зарядов

В этом случае диэлектрическая и магнитная проницаемость и проводимость среды описываются скалярными величинами. Кроме того выполняются равенства $\rho=0$ и $J_{cm}=0$. Применяя операцию $\nabla \times$ к уравнениям (3.3), (3.4) и учитывая уравнения (3.8), (3.12) и (3.13)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}; \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.19)$$

Учитывая выражение

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad (3.20)$$

уравнение (3.18) может быть преобразовано к виду

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

Последнее уравнение удобно тем, что в него входит одна неизвестная вектор функция – напряженность электрического поля. Это уравнение может быть упрощено при помощи известной формулы векторного анализа

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (3.22)$$

где

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

скалярный дифференциальный оператор Лапласа. Из уравнения (3.1), условия $\rho=0$ и того, что среда изотропная следует, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$. Тогда уравнение (3.21) может быть преобразовано к виду

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.24)$$

Последнее уравнение носит название волнового уравнения для поглощающей среды.

Учитывая выражение

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.25)$$

уравнение (3.19) также может быть преобразовано к форме

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (3.26)$$

Последнее уравнение по своей форме аналогично форме уравнения (3.21). Оно также может быть сведено к форме волнового уравнения

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (3.27)$$

3.3. Общее решение волнового уравнения в непроводящей среде

Покажем, что любая функция вида $\mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ является решением волнового уравнения (3.24) при $\sigma=0$. Введем новую переменную

$$\xi = \omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим для примера одну из вторых производных в последнем соотношении

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{x} \right) = \\ &= \mp k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi} \right) = \mp k_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{x} = k_x^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi^2} = k^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

В свою очередь

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Поэтому

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow (k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \omega^2) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (3.28)$$

Очевидно, что равенство выполняется, если

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \omega^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu \epsilon} \omega = \frac{\sqrt{\mu \epsilon} \omega}{c} = \frac{\omega}{v} = nk_0, \quad (3.29)$$

где c — скорость электромагнитных волн в вакууме; $v = c/\sqrt{\mu \epsilon}$ — их скорость в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и относительной магнит-

ной проницаемостью μ ; k_0 – волновое число в вакууме; $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ – показатель преломления среды.

Формула (3.29) совпадает с формулой (2.9), полученной на основе простых представлений о волновом процессе.

Напомним, что *длина волны* λ в случае вещественного значения волнового числа k определяется соотношением $\lambda = 2\pi/k$. Она равна *расстоянию между двумя ближайшими точками* волнового процесса, в которых *фаза волны отличается на 2π* .

Таким образом, если частота и скалярный квадрат волнового вектора связаны соотношением (3.29), то любая функция вида $\mathbf{E}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, описывающая вектор электрической напряженности, является решением волнового уравнения (3.24) для свободного непроводящего пространства. Очевидно, что функция $\mathbf{H}(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, описывающей вектор магнитной напряженности, является решением волнового уравнения (3.27). Указанные функции описывают волны, недеформирующиеся при распространении.

3.4. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде, свободной от токов и зарядов

Очевидно, что плоская волна вида (2.12) будет решением волнового уравнения (3.24) или (3.27) при $\sigma=0$. Следует отметить, что при записи плоской волны в форме (2.12) конкретизируется только форма волнового фронта, а параметры волны, такие как частота ω и волновой вектор k остаются неизвестными. Они связаны с физическими параметрами среды распространения и могут быть определены при анализе математической модели волнового процесса. Примером такого определения является соотношение (3.29), позволяющее вычислить величину волнового вектора и частоту через показатель преломления среды и волновое число в вакууме.

На практике обычно частота известна и требуется определить величину волнового вектора. В рассматриваемом случае направление волнового вектора в пространстве также считается заданным. Часто оно задается еди-

ничным вектором \mathbf{m} ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = m^2 = 1$). Тогда волновой вектор может быть представлен в форме $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$, где скалярная величина k подлежит определению.

Поставим теперь вопрос о существовании решений этих уравнений в форме плоской волны при отличной от нуля проводимости $\sigma \neq 0$. Для ответа на него подставим выражение (1.12) для плоской волны в уравнение (3.24). В результате получим соотношение

$$\left(k^2 - n^2 k_0^2 + i\mu_0 \mu \omega \sigma\right) \mathbf{A} = 0, \quad (3.30)$$

которое может быть выполнено, при условии обращения в ноль выражения в скобках (условия $\mathbf{A} = 0$ соответствует случаю отсутствия волны). Оно позволяет вычислить величину волнового вектора как

$$\begin{aligned} k &= \pm \sqrt{n^2 k_0^2 - i\mu_0 \mu \omega \sigma} = \pm k_0 \sqrt{n^2 - i \frac{\mu_0 \mu \omega \sigma}{k_0^2}} = \pm k_0 \sqrt{n^2 - i \frac{\mu \sigma}{\omega \epsilon_0}} = \\ &= nk_0 \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}} = nk_0 \sqrt{1 - i \operatorname{tg} \delta} \end{aligned}, \quad (3.31)$$

Здесь введена величина тангенса угла диэлектрических потерь

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}. \quad (3.32)$$

Найдем реальную и мнимую часть волнового вектора

$$k^2 = k_0^2 (\eta - i\chi)^2 = n^2 k_0^2 (1 - i \operatorname{tg} \delta). \quad (3.33)$$

Из последнего соотношения получим систему уравнений

$$\begin{cases} \eta^2 - \chi^2 = n^2 \\ 2\eta\chi = n^2 \operatorname{tg} \delta \end{cases}, \quad (3.34)$$

решив которую получим

$$\eta = \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1}, \quad \chi = \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1}. \quad (3.35)$$

Величина $\dot{n} = \eta - i\chi$ – комплексным показателем преломления. Теперь волновое число может быть записано в виде

$$k = \pm(\eta - i\chi)k_0 = \pm \dot{n}k_0. \quad (3.36)$$

Наличие двух волновых чисел *разных знаков* связано с существование двух фундаментальных линейно независимых решений волнового уравнения, которое является дифференциальным уравнение в частных производных *второго порядка* [***]. Этими решениями выступают две плоских волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Как известно общее решение должно быть суперпозицией двух фундаментальных решений. Поэтому общее решение относительно вектора электрической напряженности плоской электромагнитной волны имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ \exp[i(\omega t - \mathbf{km} \cdot \mathbf{r})] + \mathbf{E}_- \exp[i(\omega t + \mathbf{km} \cdot \mathbf{r})], \quad (3.37)$$

где \mathbf{E}_\pm векторные амплитуды волн, распространяющихся в направлении «+» заданного (известного) единичного вектора \mathbf{m} и в противоположном направлении «-».

Если заранее известно, что распространяется одна волна, то соответствующая ей векторная амплитуда отлична от нуля, а векторная амплитуда другой волны приравнивается нулю, что означает отсутствие этой волны в пространстве.

Рассмотрим случай распространения одной волны в направлении заданного единичного вектора \mathbf{m} . Поскольку ориентация координатных осей ни чем не ограничена, то можно считать, что волна распространяется вдоль положительного направления координатной оси X . Тогда выражение для этой волны может быть преобразовано к виду

$$E = E_+ \exp(-\chi k_0 x) \exp[i(\omega t - \eta k_0 x)] = E_+ \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x\right) \exp[i(\omega t - \eta k_0 x)]. \quad (3.38)$$

Здесь введена величина *коэффициента поглощения*

$$\alpha = 2\chi k_0 = n\sqrt{2(\sqrt{1 + \operatorname{tg} \delta} - 1)} k_0. \quad (3.39)$$

Выясним смысл этого параметра на конкретном примере. Пусть волна с векторной амплитудой $E_+ = E_+ y^o = 1(\text{В/м})y^o$ распространяется на частоте $f=1$ мГц в немагнитной среде ($\mu=1$) с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon=10$ и проводимостью $\sigma=5 \cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$. Для этих параметров получим $\omega=6.28 \cdot 10^6$ рад/с; $n=3.162$; $\operatorname{tg} \delta=4.494 \cdot 10^{-3}$; $\eta=3.164$; $\chi=0.106$; $\alpha=8.88$ м $^{-1}$. На рис. 3.1 показаны графики волнового процесса для скалярного значения

$$E = E_+ \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x\right) \cos(\omega t - \eta k_0 x)$$

реальной части вектора электрической напряженности $\operatorname{Re}(E)$ в различные моменты времени $t=0$ и $t=T/2=1/2f$. Здесь же показан график волнового процесса в пренебрежении коэффициентом α . Из рисунка следует, что коэффициент α описывает затухание волны при ее распространении вдоль положительного направления координатной оси. Это затухания обусловлено поглощением части энергии электромагнитного поля за счет проводимости среды и ее нагревом за счет этого поглощения. Поэтому α и называется коэффициентом поглощения.

Следует отметить взаимосвязь знаков перед коэффициентом поглощения и волновым числом. В выражении (3.38), описывающем плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X они отрицательны. Как следует из формулы (3.37), для волны, распространяющейся в противоположном направлении, эти знаки будут положительными

$$E = E_- \exp\left(+\frac{\alpha}{2}x\right) \exp[i(\omega t + \eta k_0 x)]. \quad (3.40)$$

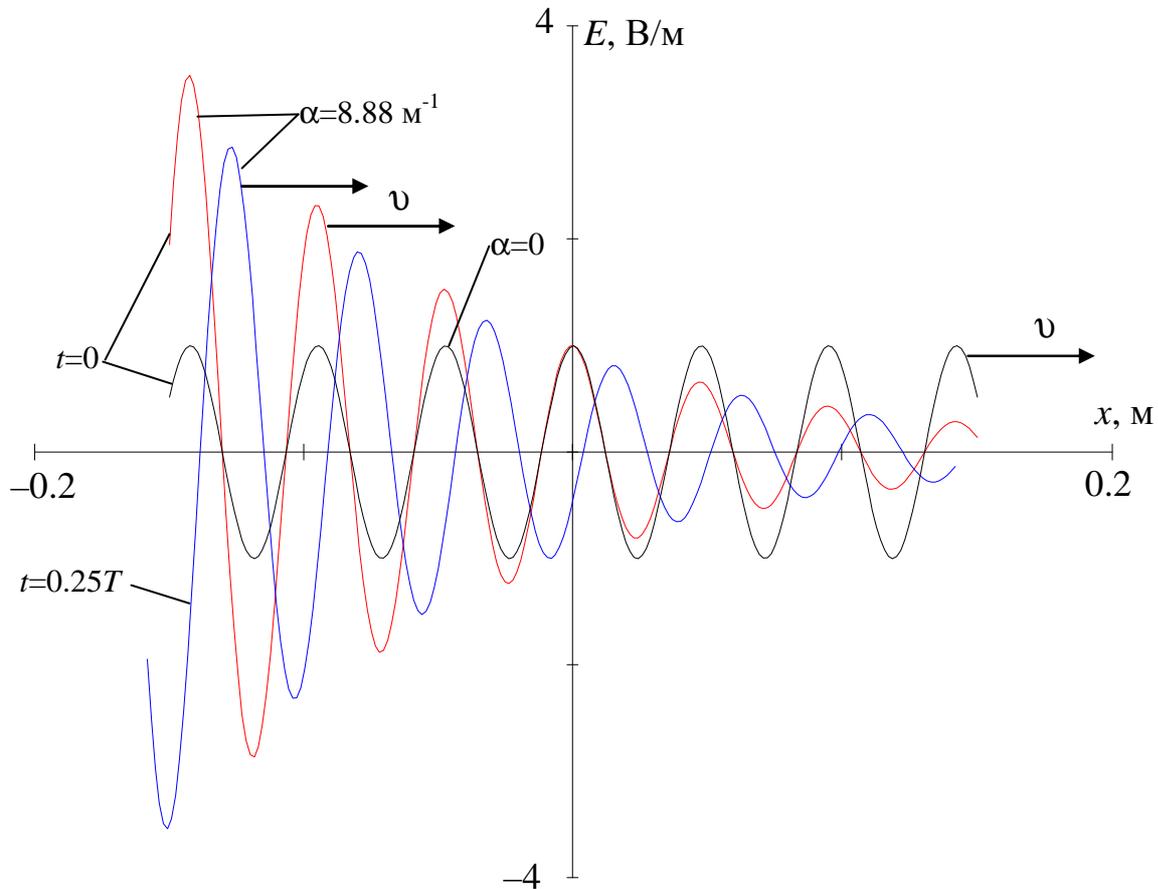


Рис. 3.1. Затухающие и не затухающие плоские волновые процессы.

3.5. Структура плоских электромагнитных волн

Для вектора магнитной напряженности \mathbf{H} могут быть записаны соотношения, аналогичные полученным выше соотношениям для вектора электрической напряженности \mathbf{E} . Эти два вектора не являются независимыми и в пространстве свободном от токов и зарядов могут существовать только в виде связанных волновых процессов. Выясним эту связь для плоской электромагнитной волны на основе исходных уравнений Максвелла. Подставляя выражение для плоской волны в уравнения (3.3) и (3.4) получим

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\mu_0\omega\mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = (-\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma)\mathbf{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\omega\left(1 - \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)\mathbf{E} = -\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\omega\mathbf{E}. \quad (3.41)$$

В общем случае поглощающих сред вектор $\mathbf{k} = (\eta - i\chi)k_0\mathbf{m} = ik_0\mathbf{m}$ является комплексным. Однако, из уравнений (3.41) видно, что это не влияет на взаимную ориентацию векторов \mathbf{m} , \mathbf{E} и \mathbf{H} . Из первого уравнения следует, что $\mathbf{H} \perp \mathbf{m}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$. Из второго — $\mathbf{E} \perp \mathbf{m}$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Таким образом, векторы \mathbf{m} , \mathbf{E} и \mathbf{H} попарно ортогональны. Кроме того, тройка этих векторов в порядке \mathbf{m} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образует правую тройку векторов. Таким образом, в плоской электромагнитной волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} могут колебаться только в плоскости перпендикулярной направлению распространения (см рис. 3.2). Поэтому эти волны относятся к поперечным волнам [***].

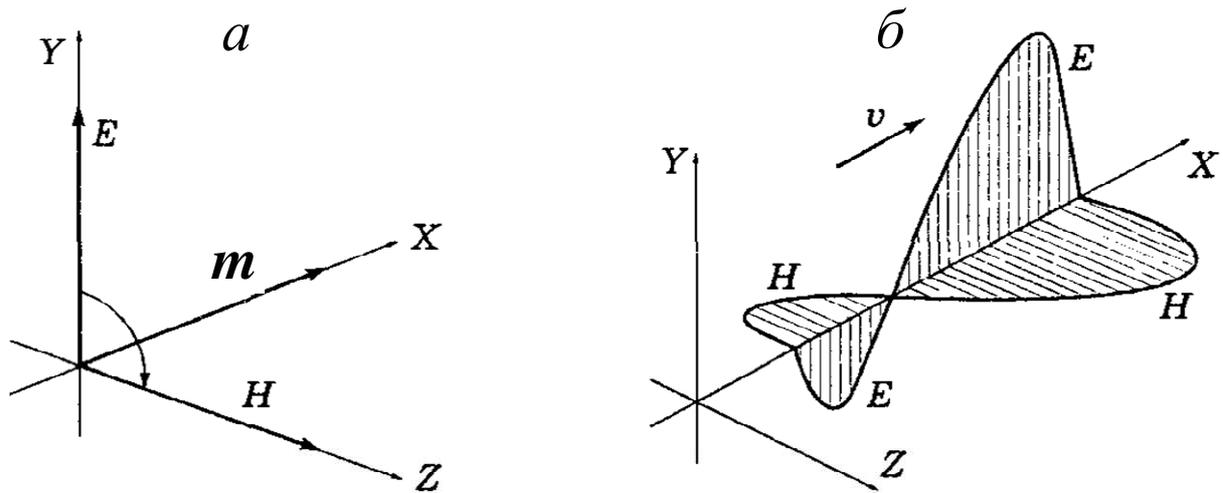


Рис. 3.2 Взаимная ориентация векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоской электромагнитной волне.

Введем в рассмотрение нормированные вектора

$$\mathbf{e}' = \frac{\mathbf{E}_+}{\sqrt{\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{E}_+^*}}, \quad \mathbf{h}' = \frac{\mathbf{H}_+}{\sqrt{\mathbf{H}_+ \cdot \mathbf{H}_+^*}} \quad (3.42)$$

и скалярные амплитуды

$$E_m = \sqrt{\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{E}_+^*}, \quad H_m = \sqrt{\mathbf{H}_+ \cdot \mathbf{H}_+^*} \quad (3.43)$$

Тогда векторные амплитуды могут быть записаны в виде $\mathbf{E}_+ = E_m \mathbf{e}'$, $\mathbf{H}_+ = H_m \mathbf{h}'$. Вектора \mathbf{e} и \mathbf{h} могут быть переопределены так, что $\mathbf{e}' = \exp(i\phi_0)\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}' = \exp(i\phi_0)\mathbf{h}$. При этом фазовые множители могут быть отнесены к комплексным скалярным амплитудам $E_m \exp(i\phi_0) = \dot{E}_m$ и $H_m \exp(i\phi_0) = \dot{H}_m$. Тогда $\mathbf{E}_+ = \dot{E}_m \mathbf{e}$, $\mathbf{H}_+ = \dot{H}_m \mathbf{h}$.

Учитывая предыдущее рассмотрение, представим плоские волны, соответствующие электрической и магнитной составляющим, в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \dot{E}_m \mathbf{e} \exp[i(\omega t - \dot{n} k_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r})] \\ \mathbf{H} &= \dot{H}_m \mathbf{h} \exp[i(\omega t - \dot{n} k_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (3.44)$$

где скалярные амплитуды вещественны, а нормированные вектора удовлетворяют условию $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = 1$ и $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* = 1$.

Из второго уравнения (3.41), уравнений (3.44) легко найти связь между скалярными амплитудами векторов электрической и магнитной напряженности

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{n}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \dot{E}_m = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{n}} \frac{\dot{E}_m}{Z_0}. \quad (3.45)$$

Величина $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ имеет размерность [Ом] и называется волновым сопротивлением среды (размерность H_m -А/м; E_m -В/м).

В немагнитных средах $\dot{\epsilon} = \dot{n}^2$ и последнее выражение приводится к виду

$$\dot{H}_m = \dot{n} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m = \dot{n} Z_0 \dot{E}_m = \dot{Z} \dot{E}_m. \quad (3.46)$$

Нормированный вектор \mathbf{h} магнитной составляющей связан с нормированным вектором \mathbf{e} и вектором \mathbf{m} , задающим направление распространения волны при помощи соотношения

$$\mathbf{h} = \mathbf{m} \times \mathbf{e}, \quad (3.47)$$

которое является следствием первого уравнения (3.41) и ортогональности векторов \mathbf{m} , \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Не смотря на то, что это наличие или отсутствие проводимости среды распространения плоской электромагнитной волны не влияет на взаимную ориентацию векторов \mathbf{m} , \mathbf{E} и \mathbf{H} , фазы этих векторов в одной и той же точке пространства отличаются (см. (3.46)).

Из уравнений (3.44) следует, что для полного описания электромагнитной волны кроме скалярной амплитуды и частоты необходимо указать поляризацию волны, т. е., направление векторов $\mathbf{E} // \mathbf{e}$ и $\mathbf{H} // \mathbf{h}$ в пространстве. Направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{m} в общем случае не являются постоянными во времени. Вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} могут вращаться с течением времени, оставаясь, однако при этом, постоянно ортогональными. Постоянным во времени направлениям колебаний векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} отвечает линейно поляризованная волна, распространение которой показано на рис. 3.2б. Распространение волны в случае правой круговой поляризации показано на рис. 3.3. В этом случае концы векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} описывают в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{m} окружности в противоположных направлениях. В общем случае концы этих векторов описывают эллипс.

Рассмотрим теоретическое описание векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} электромагнитной волны в общем случае ее эллиптической поляризации. Пусть направление распространения плоской гармонической волны совпадает с осью Z . Уравнения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в некоторой произвольной плоскости $z=z_0$ легко получить на основании общих формул (3.44)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{z_0} &= \dot{E}_m \mathbf{e} \exp[i(\omega t - nk_0 z_0)] = \\
&= \dot{E}_m \mathbf{e} \exp(-ink_0 z_0) \exp(i\omega t) = \dot{E}_m^{z_0} \mathbf{e} \exp(i\omega t) \\
\mathbf{H}^{z_0} &= \dot{H}_m \mathbf{h} \exp[i(\omega t - nk_0 z_0)] = \\
&= \dot{H}_m \mathbf{h} \exp(-ink_0 z_0) \exp(i\omega t) = \dot{H}_m^{z_0} \mathbf{h} \exp(i\omega t)
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

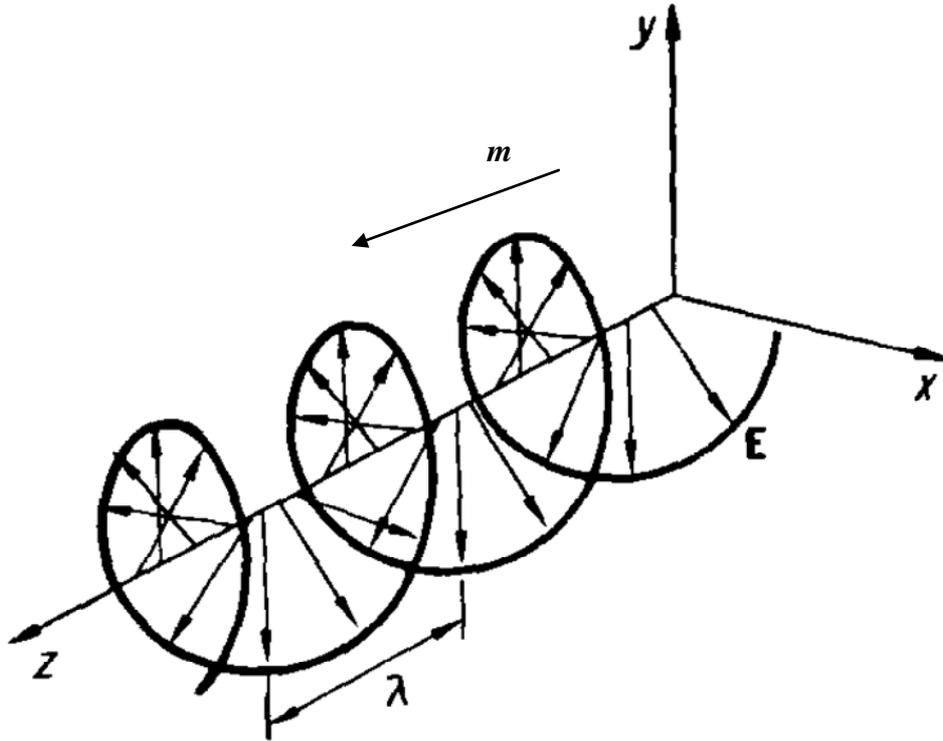


Рис. 3.3 Распространение волны с правой круговой поляризацией

Таким образом, описание общего случая эллиптической поляризации электромагнитных волн может быть осуществлено посредством нормированных векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} . Эти вектора отличаются от принятого в аналитической геометрии определения трехмерного вектора. Они являются комплексными. Нормированный вектор \mathbf{e} может быть представлен в виде

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_a + i r \mathbf{e}_b}{\sqrt{1 + r^2}}, \tag{3.49}$$

где r есть вещественный параметр, смысл которого выяснится чуть ниже, а \mathbf{e}_a и \mathbf{e}_b есть обычные единичные вещественные векторы

$$\begin{aligned} e_a &= \cos\beta x^o + \sin\beta y^o \\ e_b &= -\sin\beta x^o + \cos\beta y^o \end{aligned} \quad (3.50)$$

ортогональные друг другу (см. рис.3.4.) В соотношениях (3.50) угол между направлением вектора e_a и направлением вектора x^o обозначен через β .

Используя (3.47), нормированный вектор h , ортогональный вектору e , можно получить в виде

$$h = \frac{re_a - ie_b}{\sqrt{1+r^2}} \quad (3.51)$$

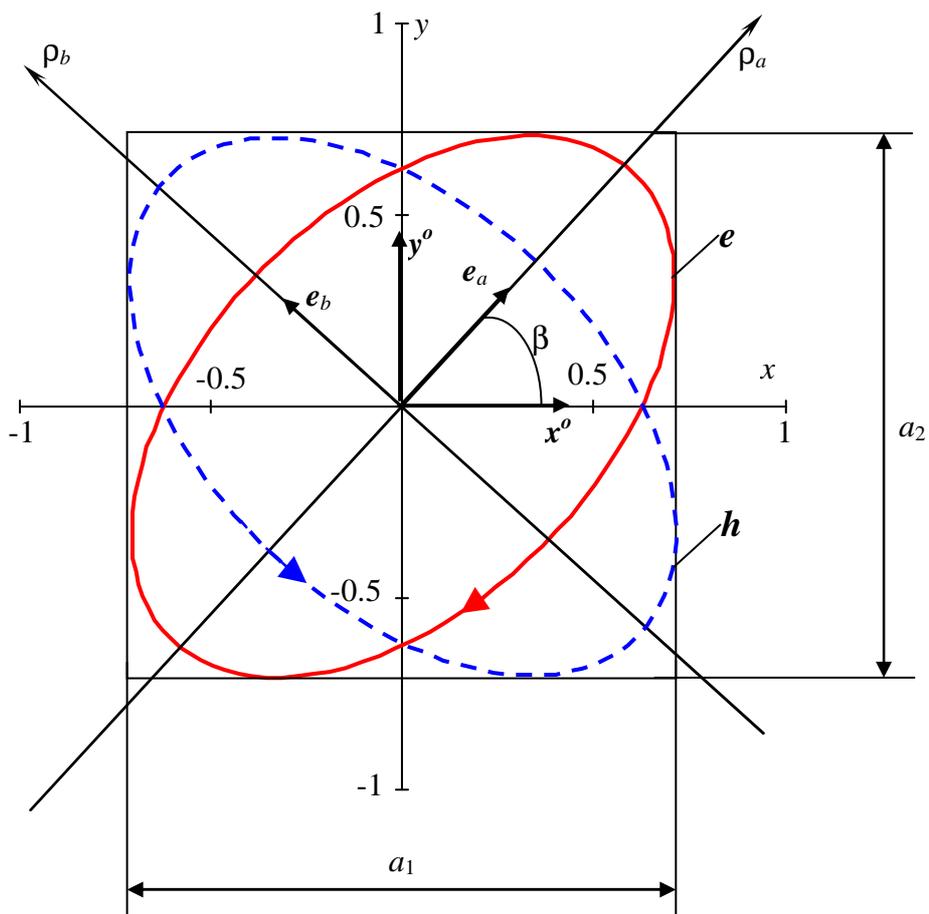


Рис. 3.4 Эллипсы векторов поляризации электрической и магнитной напряженности плоской электромагнитной волны при наблюдении навстречу волне (волна падает на лицо наблюдателя)

Подставим выражение (3.49) в формулу для вектора \mathbf{E} из (3.44). В результате получим

$$\frac{\mathbf{E}^{z_0}}{\dot{E}_m^{z_0}} = \frac{\mathbf{e}_a \exp(i\omega t) + i r \mathbf{e}_b \exp(i\omega t)}{\sqrt{1+r^2}}. \quad (3.52)$$

Или переходя от комплексных амплитуд к вещественным

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{e}_a \cos(\omega t) - r \mathbf{e}_b \sin(\omega t)}{\sqrt{1+r^2}}. \quad (3.53)$$

Из последнего соотношения видно, что направление вектора поляризации в плоскости $z=z_0$ определяется векторной суммой векторов, колеблющихся в ортогональных направлениях.

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{1+r^2}} \\ \rho_b &= \frac{-r \sin(\omega t)}{\sqrt{1+r^2}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Исключая из последних уравнений временной множитель получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{\rho_a}{1/\sqrt{1+r^2}} \right)^2 + \left(\frac{\rho_b}{r/\sqrt{1+r^2}} \right)^2 = 1 \quad (3.55)$$

относительно осей вдоль векторов \mathbf{e}_a и \mathbf{e}_b , которые задают ориентацию главных осей эллипса поляризации в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (см. рис. 3.4). Отношение b/a осей a и b эллипса поляризации характеризуется параметром

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} = r. \quad (3.56)$$

Если $|r| \rightarrow 0$, то $a=1$ и $b=0$. В этом случае волна линейно поляризована вдоль направления вектора e_a .

Если $|r|=1$, то $a = 1/\sqrt{2}$ и $b = 1/\sqrt{2}$. В этом случае волна имеет круговую поляризацию.

Если $|r| \rightarrow \infty$, то $a=0$ и $b=1$. В этом случае волна линейно поляризована вдоль направления вектора e_b .

Таким образом, абсолютная величина параметра $|r|$ характеризует *эллиптичность* поляризации. Однако при описании общего случая эллиптической поляризации необходимо указать также и *направление вращения* вектора E , которое совпадает с направлением вращения вектора p (см. (3.53)). Из соотношений (3.53) и (3.54) следует, что это направление задается знаком параметра r .

При *положительной* величине параметра $r > 0$ конец вектора p или, что то же самое, конец вектора E вращаются *по часовой стрелке (вправо)*, если смотреть против направления распространения волны (волна падает на лицо наблюдателя). В этом случае волна называется *правополяризованной*.

При *отрицательной* величине параметра $r < 0$ конец вектора E вращаются *против часовой стрелки (влево)*, если опять смотреть против направления распространения волны. В этом случае волна называется *левополяризованной*.

Состояние поляризации гармонической волны можно характеризовать множителем поляризации [***]

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} \exp(i\Delta). \quad (3.56)$$

Смысл вещественных величин a_1 и a_2 поясняет рис. 3.4. Так же, как и в монографии [***], введем в рассмотрение угол

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a_1}{a_2}. \quad (3.57)$$

Этот угол связан с углом ψ , характеризующим эллиптичность электромагнитной волны при помощи соотношения

$$\sin 2\psi = (\sin 2\vartheta)\sin \Delta. \quad (3.58)$$

При этом угол β , характеризующий ориентацию эллипса поляризации электромагнитной волны следующим образом связан с углом ϑ :

$$\operatorname{tg} 2\beta = (\operatorname{tg} 2\vartheta)\cos \Delta. \quad (3.59)$$

Как следует из предыдущих рассуждений, при комплексном P волна имеет эллиптическую поляризацию; при чисто мнимом P оси эллипса совпадают с осями координат. Когда $P = \pm i$, поляризация круговая. Знак мнимой части P определяет направление вращения вектора \mathbf{E} в плоскости поляризации. Знак плюс соответствует правой, минус – левой поляризации. В случае действительного P волна поляризована линейно под углом $\beta = \vartheta$.

Эллипс, соответствующий вектору \mathbf{h} и описывающий вектор поляризации магнитной напряженности \mathbf{H} плоской электромагнитной волны, изображен на рис. 3.4. Как видно из этого рисунка оси этого эллипса ортогональны осям эллипса, соответствующего вектору \mathbf{e} . Направление вращения вектора \mathbf{H} , противоположно направлению вращения вектора \mathbf{E} .

3.6. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля и вектор Пойнтинга.

Количество энергии электромагнитного поля в объеме V описывается соотношением [***]

$$W = \int_V \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \right) dV \quad (3.60)$$

Рассмотрим изменение энергии W во времени. Для этого перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\end{aligned}\tag{3.61}$$

Умножим первое уравнение на \mathbf{E} , а второе – на \mathbf{H} скалярно и вычтем уравнения

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E},\tag{3.62}$$

и учтем соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E}^2)}{\partial t}, \\ \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{H}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{H}^2)}{\partial t}, \\ \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].\end{aligned}\tag{3.63}$$

Интегрируя (3.62) по объему, с учетом последних соотношений

$$\int_V \nabla \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dV = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) dV - \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV\tag{3.64}$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},\tag{3.65}$$

и вводя вектор Пойтинга

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],\tag{3.66}$$

получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int \sigma E^2 dV \quad (3.67)$$

Последнее уравнение выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Левая этого уравнения есть полное изменение электромагнитной энергии в объеме V во времени. Первый член в правой части есть поток вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую объем V . (плотность потока энергии через поверхность S в единицу времени). Вторым член в правой части (3.67) есть количество тепла, выделяющегося в проводящих частях объема V в единицу времени.

3.7. Распространение волновых пакетов

Гармоническая плоская волна является неограниченной как в пространстве, так и во времени. Как только размеры ее волнового фронта будут ограничены, например диафрагмой, то в результате дифракции сразу появятся волны с другими направлениями распространения (рис. 3.5а). Точно также, если при ограничении гармонического сигнала во времени (рис. 3.5б), он может быть представлен в виде интеграла Фурье, то есть в виде суперпозиции колебаний с различными частотами. Ограниченная длительность электромагнитного сигнала, таким образом, приводит к существованию некоторой конечной полосы частот $\Delta\omega$ вблизи некоторой центральной частоты ω_0 .

В силу линейности уравнений Максвелла распространение импульсного электромагнитного сигнала в линейной среде можно представить в виде линейной комбинации плоских волн с различными частотами в волновых числах

$$E(x,t) = \sum_{\ell} \dot{E}_m(k_{\ell}) \exp[i(\omega_{\ell} t - k_{\ell} x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp\{i[\omega(k)t - kx]\} dk.$$

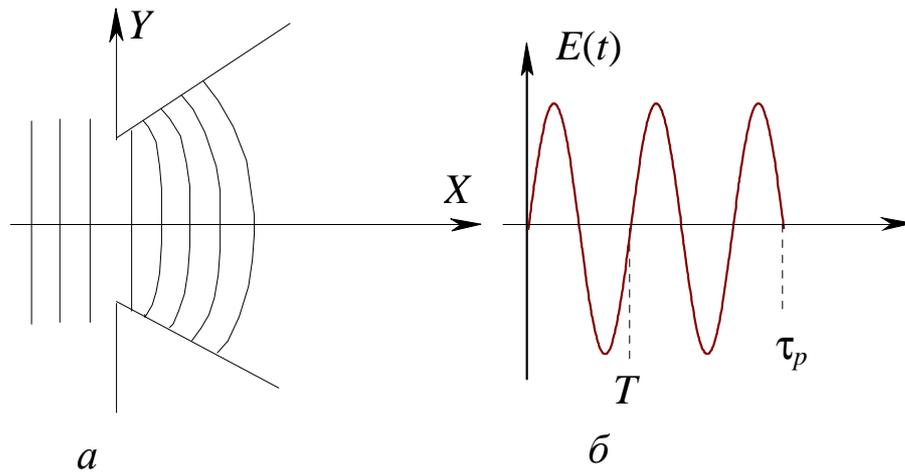


Рис. 3.5

Эти сумма и интеграл удовлетворяют уравнениям Максвелла, поскольку суммируются (интегрируются) плоские волны, являющиеся решением тех же уравнений. Если $\dot{E}_m(k)$ отличаются заметно от нуля лишь в небольшом промежутке $\Delta k \ll k$, то поле $E(x,t)$ описывает *волновой пакет*, или *волновую группу*. В этом случае и $\Delta\omega \ll \omega_0$, и поле будет *почти монохроматическим* (квазимонохроматическим).

Из формулы (3.29) можно получить следующее *дисперсионное уравнение*, устанавливающее связь между ω и k для плоской волны:

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)} k. \quad (3.68)$$

В изотропной среде дисперсионные свойства не зависят от направления, поэтому $\omega(-k) = \omega(k)$.

Рассмотрим теперь эволюцию волнового пакета $E(x,t)$ во времени. Для этого разложим $\omega(k)$ в ряд Тейлора вблизи центрального волнового числа $k_0 = \omega_0 n(\omega_0)/c$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right) (k - k_0) + \dots \quad (3.69)$$

и ограничимся первыми двумя членами разложения, т.к.
 $\Delta k = (k - k_0) \ll k_0, \Delta \omega \ll \omega_0$.

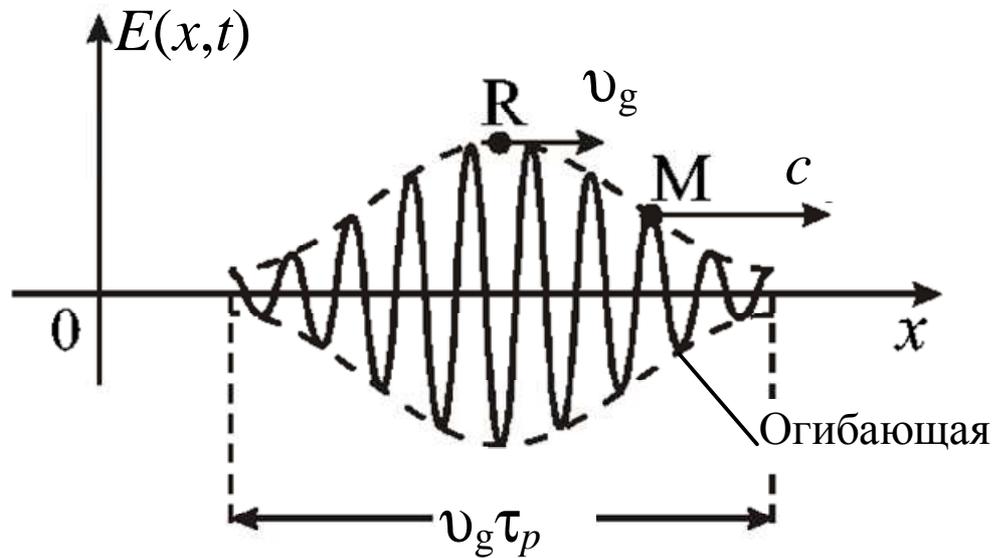


Рис. 3.6. Распространение волнового пакета

Подставим это разложение в интеграл для $E(x, t)$

$$\begin{aligned}
 E(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\omega_0 t + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) t - kx + k_0 x - k_0 x \right] \right\} = \\
 &= \exp [i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - x \right] (k - k_0) \right\} dk.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Интеграл в конечном выражении зависит только от комбинации переменных

$$\left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$$

и называется огибающей

$$E \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$$

волнового пакета. Первый же множитель представляет некоторую *несущую* (заполнение) этого пакета и соответствует гармонической (монохроматической) плоской волне (рис.3.6).

Таким образом,

$$E(x,t) = E \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]. \quad (3.71)$$

Отсюда следует, что волновой пакет распространяется с сохранением своей формы со скоростью

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0, \quad (3.72)$$

которая называется *групповой скоростью* волны. Приведенное соотношение справедливо для волн любой природы: электромагнитных, акустических и т.д. Для дисперсионной зависимости в изотропной среде

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn}{d\omega_0}} = \frac{c}{n + \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0}}. \quad (3.73)$$

При *нормальной дисперсии* $dn/d\omega > 0$ групповая скорость меньше фазовой. При *аномальной дисперсии* $dn/d\omega < 0$, но и в данном случае $v_g < c$.

При анализе мы отбросили в разложении члены второго и высшего порядков малости. Если членом второго порядка

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (k - k_0)^2,$$

пренебречь нельзя, то ширина импульса электромагнитного излучения будет изменяться в процессе распространения (уширяться).

4. Излучение электрического и магнитного диполей в свободном пространстве

4.1. Электрический диполь

В теории электромагнитного поля в качестве простейших излучателей широко используются элементарные электрические и магнитные диполи.

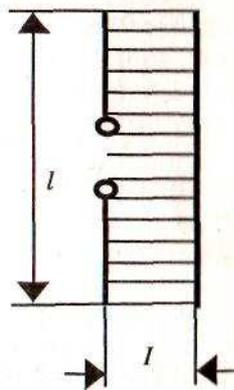


Рис. 4.1. Элементарный электрический излучатель (электрический вибратор) Элементарным электрическим диполем называют прямолинейный излучатель длиной l много меньшей, чем длина волны λ , вдоль которого амплитуда и фаза тока неизменны (рис. 4.1).

Составляющие комплексных амплитуд напряженности поля, создаваемого элементарным электрическим диполем, расположенным в однородной неограниченной среде (без потерь) вдоль оси Z сферической системы координат, в точке наблюдения на расстоянии l при изменении тока в излучателе по гармоническому закону $\dot{I}e^{j\omega t}$ определяются выражениями [***]: — для ближней зоны (рис. 4.2а)

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}l}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad (4.1)$$

$$\dot{E}_r = -i \frac{\lambda Z_0 \dot{I}l}{4\pi^2 r^3} \cos \theta, \quad (4.2)$$

$$\dot{E}_\theta = -i \frac{\lambda Z_0 \dot{I} l}{8\pi^2 r^3} \sin \theta, \quad (4.3)$$

– для дальней зоны (рис. 4.2б)

$$\dot{H}_\varphi = i \frac{\dot{I} l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta, \quad (4.4)$$

$$\dot{E}_\theta = i Z_0 \frac{\dot{I} l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta, \quad (4.5)$$

где $k = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ – волновое число; λ – длина волны колебаний в среде; ϵ и μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемость, соответственно; ω – угловая частота.

Анализ выражений (4.1) – (4.3) показывает, что в ближней зоне составляющие вектора напряженности электрического поля изменяются обратно пропорционально r^3 и отстают по фазе на 90° от составляющей вектора напряженности магнитного поля, которая изменяется обратно пропорционально r^2 . Взаимная ориентация составляющих векторов \dot{E} и \dot{H} ближней зоне в сферической системе координат представлена на рис. 4.3а.

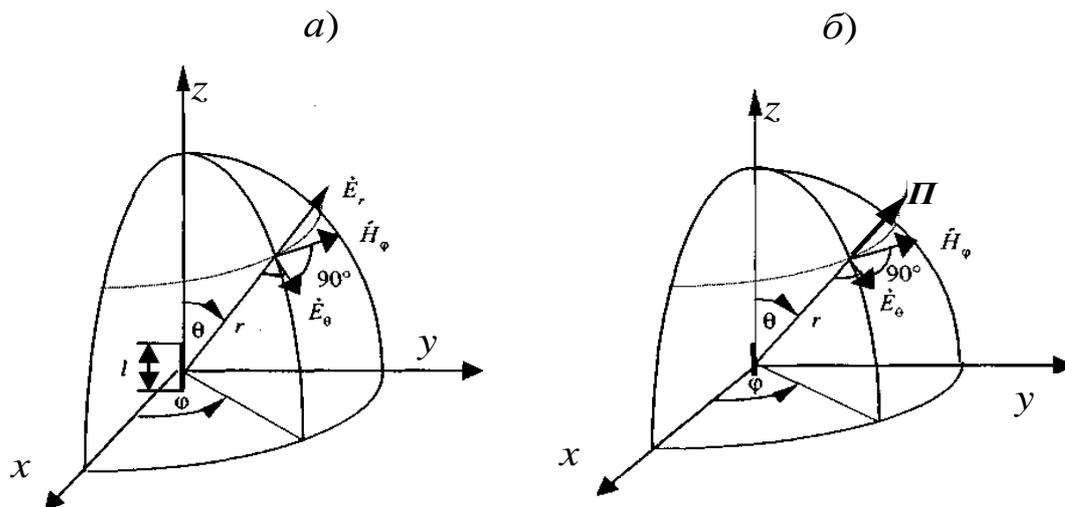


Рис. 4.3. Компоненты электромагнитного поля электрического диполя в ближней а и дальней б зоне. Π – вектор Пойтинга в дальней зоне

Из выражений (4.4), (4.5) следует, что в дальней зоне векторы напряженности электрического и магнитного полей синфазны и убывают об-

ратно пропорционально r . Взаимное расположение векторов напряженности поля в дальней зоне показано на рис. 4.6б. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения: вектор $\dot{\mathbf{E}}$ лежит в плоскости, проходящей через ось диполя, а вектор $\dot{\mathbf{H}}$ – в плоскости, параллельной плоскости ХОУ. Такая картина поля характерна для поперечной электромагнитной волны.

4.2. Магнитный диполь

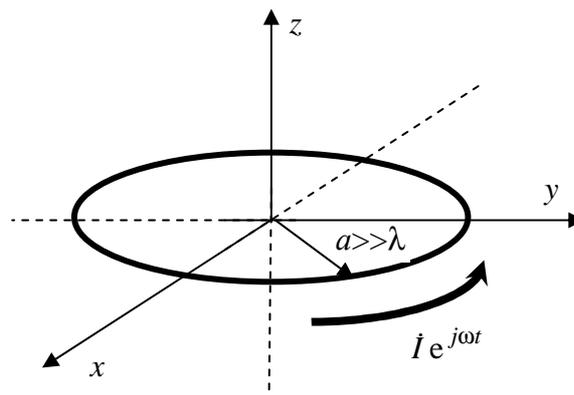


Рис. 4.4. Элементарный магнитный излучатель (магнитный вибратор)

Другим простейшим излучателем является небольшой виток провода (плоская рамка в виде круглого витка радиуса a) с переменным электрическим током $i e^{j\omega t}$ (рис. 4.7). Предполагается, что во всех точках провода ток имеет неизменные амплитуду и фазу. Практически это условие реализуется при размерах рамки, малых в сравнении с длиной волны λ .

Комплексные амплитуды компонент поля элементарного магнитного диполя определяются соотношениями [***]: для ближней зоны (рис. 4.5а):

$$\dot{E}_\varphi = \frac{iS\mu\omega}{2\pi r^2} \sin \theta, \quad (4.6)$$

$$\dot{H}_r = i \frac{iS}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_\theta = i \frac{iS}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad (4.8)$$

для дальней зоны (рис. 4.5б):

$$\dot{E}_\varphi = -i \frac{\dot{I}k^2 SZ_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}, \quad (4.9)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}k^2 S}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr}, \quad (4.10)$$

где $S = \pi a^2$ – площадь рамки с током.

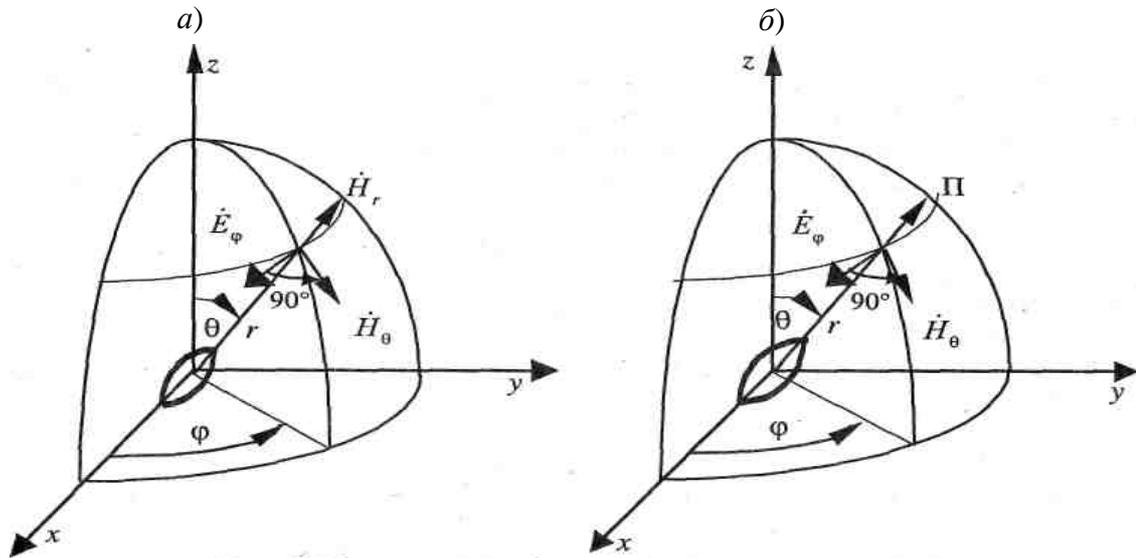


Рис. 4.5. Компоненты электромагнитного поля магнитного диполя в ближней *a* и дальней *б* зоне. Π – вектор Пойтинга в дальней зоне

Таким образом, в ближней зоне электрическая компонента поля рамки изменяется обратно пропорционально r^2 , а магнитные обратно пропорционально r^3 . В дальней зоне электрическая и магнитная компоненты поля изменяются обратно пропорционально r .

4.3. Сравнительный анализ полей электрического и магнитного диполя

Сравнительный анализ выражений (4.1) – (4.3), (4.6) – (4.8) для компонент электромагнитного поля электрического и магнитного диполей показывает, что магнитное поле горизонтальной рамки идентично электрическому полю элементарного вертикального электрического диполя, а электрическое поле, горизонтальной рамки идентично магнитному полю вертикального электрического диполя. Следовательно, горизонтальная рамка создает

такое же поле, как и вертикальный электрический диполь. Различие между этими полями состоит лишь в том, что векторы \dot{E} и \dot{H} меняются в пространстве местами. Поэтому горизонтальную рамочную антенну можно трактовать как фиктивный вертикальный магнитный диполь. Взаимная ориентация векторов \dot{E} и \dot{H} поля рамки в ближней зоне изображена на рис. 4.5а.

Сравнивая выражения (4.9), (4.10) для компонент поля, создаваемого рамкой в дальней зоне, с соответствующими выражениями (4.4), (4.5) для компонент поля, создаваемого элементарным электрическим диполем, отметим, что при одинаковых фазах токов I электрического диполя и рамки поля излучения их будут сдвинуты между собой по фазе на 90° (на это указывает множитель i в выражениях для поля электрического диполя).

Векторы \dot{E} и \dot{H} лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Взаимное расположение векторов напряженности поля рамки в дальней зоне представлено на рис. 4.5б.

Волновое сопротивление свободного пространства Z_0 в дальней зоне ($r \ll \lambda/2\pi$) не зависит от расстояния и равно 377 Ом. Для оценки интенсивности электромагнитного поля в этой зоне достаточно определить одну из составляющих поля. Обычно осуществляют измерение напряженности электрического поля или плотности потока мощности.

Волновое сопротивление в ближней зоне при $r \ll \lambda/2\pi$ зависит от типа излучателя (электрический или магнитный) и от расстояния до него. Если излучатель представляет собой прямой короткий проводник (электрический вибратор), в котором ток высокой частоты мал (сопротивление источника велико), то волновое сопротивление вблизи такого излучателя большое

$$\frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\varphi} = \frac{Z_0}{2\pi r} \gg Z_0,$$

В структуре поля преобладает электрическая составляющая, которая по мере удаления от излучателя уменьшается быстрее ($\dot{E}_\theta \sim 1/r^3$), и, следовательно,

уменьшается волновое сопротивление, асимптотически приближаясь к значению Z_0 в дальней зоне (рис. 4.6).

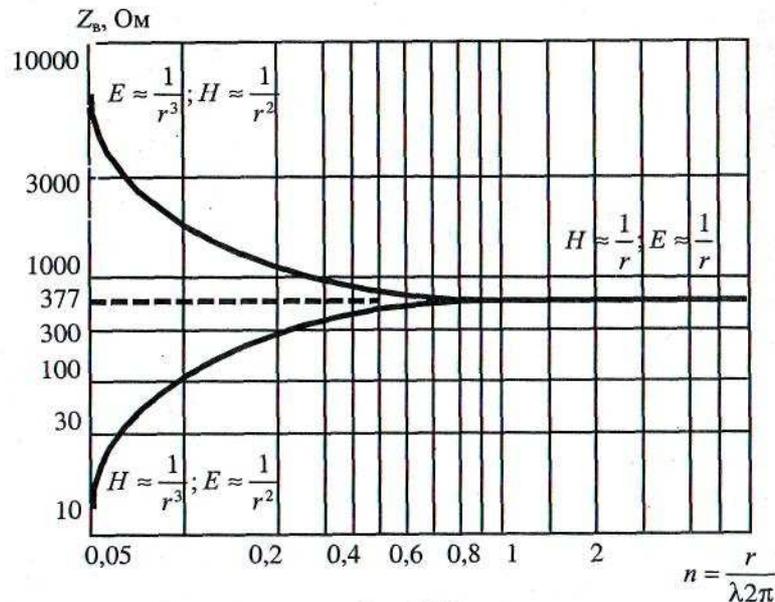


Рис. 4.6. Зависимость волнового сопротивления элементарных вибраторов от расстояния до точки наблюдения.

Если в роли излучателя выступает рамка (источник с низким сопротивлением), то волновое сопротивление в ближней зоне мало:

$$\frac{\dot{E}_\varphi}{\dot{H}_\theta} = \frac{Z_B 2\pi r}{\lambda} \ll Z_0,$$

В этом случае в структуре поля и ближней зоне преобладает магнитная составляющая. По мере удаления от источника излучения волновое сопротивление растет и асимптотически приближается к значению в дальней зоне $Z_0=377$ Ом.

Таким образом, если электрические цепи, технические средства или их элементы обладают значительным сопротивлением и для них характерны больше амплитуды напряжений и малые амплитуды токов, то по своим свойствам ни подобны электрическим излучателям. К таким элементам можно отнести, например, телевизионные кинескопы.

Низкоомные электрические цепи и средства с большими амплитудами токов и малыми амплитудами напряжений – например, мощные транзисторные усилители – близки по своим свойствам к магнитным излучателям.

В большинстве практических случаев результирующее электромагнитное поле создается группой разнотипных источников излучения. Поэтому характер изменения компонент этого поля существенно отличается от того, который свойственен одиночному излучателю, и обычно определяется экспериментально.

4.4. Краткая формулировка результатов сравнительного анализа

Анализ выражений (4.1)–(4.3), (4.6)–(4.8) позволяет сделать следующие выводы :

Структура поля элементарного электрического и элементарного магнитного излучателей отличается взаимным изменением положения в пространстве векторов \dot{E} и \dot{H} .

Поля ближней зоны элементарного электрического и магнитного излучателей существенно неоднородны, а их интенсивность быстро убывает с расстоянием как $1/r^3$ и $1/r^2$, соответственно.

Составляющие напряженности электрического и магнитного полей в ближней зоне сдвинуты по фазе на 90° . Поэтому вектор Пойнтинга оказывается чисто мнимой величиной со средним значением, равным нулю. Следовательно, рассматриваемые поля являются реактивными.

Вблизи элементарного электрического излучателя создается электромагнитное поле, основная энергия которого сосредоточена в электрической составляющей (электрическое поле).

Характеристическое сопротивление среды полю элементарного электрического излучателя в ближней зоне равно:

$$Z_E = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\varphi} = \frac{1}{j\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0 r},$$

Вблизи элементарного магнитного излучателя создается электромагнитное поле, основная энергия которого сосредоточена в магнитной составляющей (магнитное поле).

Характеристическое сопротивление среды полю элементарного магнитного излучателя в ближней зоне равно:

$$Z_H = \frac{\dot{E}_\varphi}{\dot{H}_\theta} = -j\omega\mu_0 r,$$

Характеристическое сопротивление среды полю электрического излучателя Z_E с увеличением расстояния от него уменьшается, а характеристическое сопротивление среды полю магнитного излучателя Z_H увеличивается, и оба стремятся к значению $Z_0 = 120\pi$ Ом, достигая его в дальней зоне при ($r \gg \lambda/2\pi$).

На практике часто встречаются случаи, когда однородные технические средства распределены на некоторой площади (например, группа видеоконтрольных устройств на пульте оператора, работающих с одинаковыми сигналами). Определение напряженности поля, создаваемого такими техническими средствами, осуществляется путем геометрического сложения отдельных составляющих, формируемых каждым излучателем. Анализ структуры электромагнитного поля, создаваемого группой однородных источников, показывает, что закон изменения компонент этого поля существенно отличается от того, который характерен для одиночного излучателя, и обычно определяется экспериментально.

5. Эффект Доплера для электромагнитных волн

Из курса физики известно изменение частоты звуковых сигналов, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника *относительно среды*, являющейся носителем звуковых волн. Для электромагнитных же волн особой среды, которая служила бы их

носителем, нет. Поэтому доплеровское смещение частоты электромагнитных волн (сигналов) определяется только скоростью источника *относительно приемника*.

Пусть в K -системе отсчета находится неподвижный приемник P (рис. 5.1). К нему с релятивистской скоростью v приближается S – источник периодических электромагнитных сигналов. В K' -системе отсчета, связанной с источником, сигналы испускаются с частотой f_0 (собственная частота). Найдем частоту f , с которой воспринимаются эти сигналы приемником.

Промежуток времени между двумя последовательными сигналами (импульсами) в K' -системе, связанной с источником, равен $T_0 = 1/f_0$. Поскольку источник движется со скоростью v , то соответствующий промежуток времени в K -системе, согласно «эффекту замедления хода движущихся часов» [***], будет больше, а именно

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.1)$$

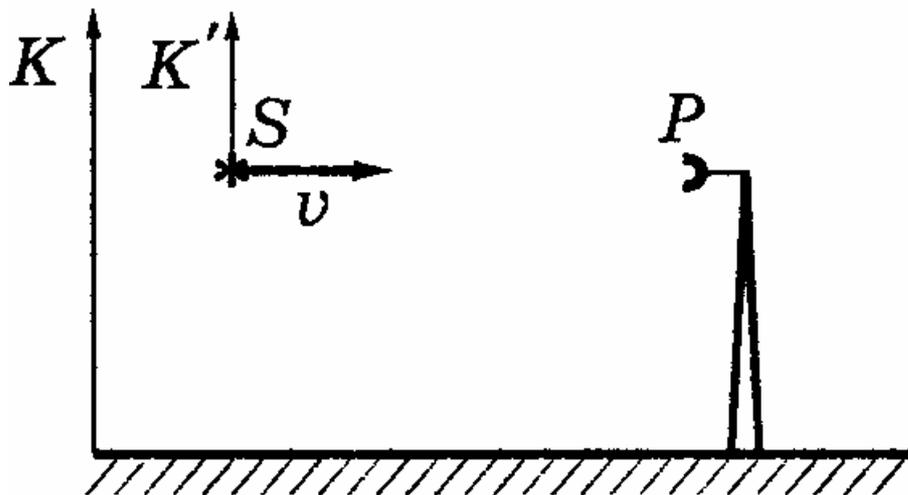


Рис. 5.1

Расстояние между соседними импульсами в K -системе

$$\lambda = cT - vT = \frac{(c - v)T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.2)$$

Поэтому воспринимаемая приемником частота $f=c/\lambda$, или

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (v/c)}. \quad (5.3)$$

Если источник приближается (как в нашем случае), то $f > f_0$, если же удаляется, то $f < f_0$ (в этом случае знак перед f меняется на противоположный). Полученная формула (5.3) соответствует *продольному эффекту Доплера*.

Как видно из приведенного вывода, эффект Доплера для электромагнитных волн является следствием двух явлений: замедления хода движущихся часов (корень в числителе последней формулы) и «уплотнения» (или разряжения) импульсов, связанного с изменением расстояния между источником и приемником – это учтено в первом равенстве формулы (5.2).

Рассмотрим и более общий случай: в K -системе источник S движется со скоростью v , составляющей угол α с линией наблюдения (рис. 5.2). В этом случае в формуле (5.3) следует заменить v на $v_x = v \cos \alpha$, где v_x – проекция вектора v на ось X , положительное направление которой взято от S к P . Тогда

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (v_x/c)}. \quad (5.3)$$

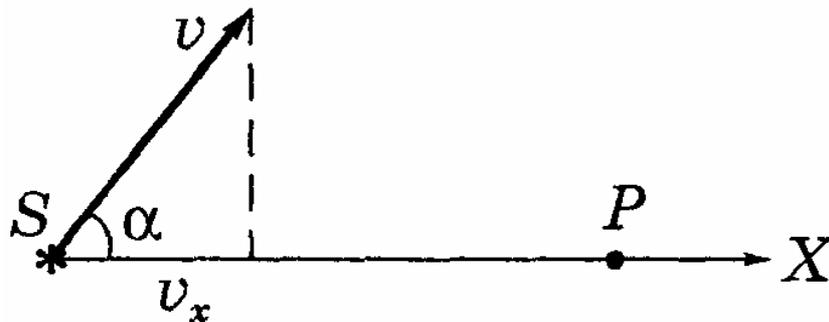


Рис. 5.2

В процессе движения источника S проекция скорости v_x , вообще говоря, меняется, поэтому необходимо учесть *эффект запаздывания*. Воспринимаемая приемником P частота f в момент t будет обусловлена сигналами, испущенными источником S в предшествующий момент $t' = t - l/c$, где l – расстояние от источника S до P в момент t' . Поэтому значение v_x надо брать в момент t' . Итак, частоте $f(t)$ соответствует $v_x(t')$.

При $\alpha = 90^\circ$ ($v_x = 0$) наблюдается *поперечный эффект Доплера*:

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.4)$$

при котором воспринимаемая приемником частота оказывается всегда меньше собственной частоты источника: $f < f_0$. Поперечный эффект является прямым следствием замедления хода движущихся часов. Этот эффект значительно слабее продольного: он зависит от v/c не в первой степени, а во второй, т. е. является квадратичным относительно v/c . Поэтому экспериментально его можно наблюдать, проводя измерения перпендикулярно, например, пучку излучающих атомов, имеющему очень малый угол расходимости (чтобы практически исключить продольный эффект).

В нерелятивистском случае, когда $v \ll c$, вместо (5.4) можно считать, что $T = T_0$, поэтому формула (5.3) не будет содержать корня $\sqrt{1 - \beta^2}$, и тогда воспринимаемая частота

$$f = \frac{f_0}{1 - (v_x/c)} = f_0 [1 + (v_x/c)]. \quad (5.5)$$

Отсюда относительное изменение частоты $(f - f_0)/f_0$ равно

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v_x}{c}. \quad (5.6)$$

При $v_x > 0$ (источник приближается) $\Delta f / f > 0$, если же $v_x < 0$ (источник удаляется), то $\Delta f / f < 0$. При $v_x = 0$ и $\Delta f / f = 0$.

Эффект Доплера нашел многочисленные практические применения. С его помощью определяют, например, скорость излучающих атомов в пучке, угловую скорость вращения Солнца. На эффекте Доплера основаны радиолокационные методы измерения скорости самолетов, ракет, автомашин и др. Именно этот эффект позволил открыть двойные звезды (системы, состоящие из двух звезд, движущихся вокруг общего центра масс) – объекты, которые невозможно разрешить даже самыми мощными телескопами. С помощью эффекта было обнаружено явление, названное космологическим красным смещением: линии в спектре излучения внегалактических объектов смещены в сторону больших длин волн, т. е. в красноволновую часть спектра. Оно свидетельствует о том, что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики со скоростями, пропорциональными расстоянию до них.

Преобразуем формулу (5.5) от частот к длинам волн. Частота $f = c/\lambda$, отсюда малое приращение частоты $\Delta f = -\left(c/\lambda^2\right)\Delta\lambda$. Подставив обе эти формулы в (5.5) и (5.6), получим

$$\lambda = \frac{v_x}{c} = \frac{v \cos \alpha}{c}, \quad (5.7)$$

где α – угол между скоростью \mathbf{v} и направлением наблюдения.