

Министерство образования и науки Российской Федерации
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Д.В. Дубинин

**ИНФОРМАТИКА.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

Учебное пособие

Томск
Издательство ТУСУРа
2017

УДК 519.61:621.39(075.8)
ББК 22.193я73
Д792

Рецензенты:

Клопотов А.А., д-р физ.-мат. наук, профессор Томского государственного архитектурно-строительного университета;

Стукач О.В., д-р техн. наук, профессор Национального исследовательского Томского политехнического университета

Дубинин, Дмитрий Владимирович

Д792 Информатика. Численные методы: учеб. пособие / Д.В. Дубинин. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2017. – 116 с.

ISBN 978-5-86889-784-9

Рассматриваются численные методы решения задач, которые наиболее часто встречаются в практике радиоинженеров.

Для студентов специальностей 11.03.01 «Радиотехника» и 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

УДК 519.61:621.39(075.8)
ББК 22.193я73

Учебное издание

Дубинин Дмитрий Владимирович

ИНФОРМАТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Подписано в печать 27.12.17. Формат 60x84/16.

Усл.-печ. л. 6,74. Тираж 100 экз. Заказ 575.

Томский государственный университет

систем управления и радиоэлектроники.

634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.

ISBN 978-5-86889-784-9

© Дубинин Д.В., 2017

© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2017

Предисловие

Данное пособие написано на основе части одноименного курса, читаемого студентам первого курса специальностей 11.03.01 «Радиотехника» и 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» радиотехнического факультета Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Материалы пособия излагаются в лекциях в течение длительного времени, поскольку соответствуют государственным стандартам.

Учебное пособие состоит из 5 разделов. В первом разделе рассмотрен один из основных методов обработки информации – сортировка данных. Описаны различные алгоритмы сортировки: как простейшие (например, подсчетом, простыми вставками, прямым выбором, «пузырьком»), так и наиболее эффективные (метод Шелла, «быстрая» сортировка).

Второй раздел посвящен методам численного решения уравнений. Аналитические способы решения данной задачи разработаны только для небольшого числа видов уравнений. Даже для алгебраических функций со степенью более 4 в общем случае такого решения нет. Следовательно, численное решение остается единственной альтернативой. Это в полной мере можно отнести и к системам уравнений, методы приближенного решения которых описаны в третьем разделе.

В четвертом разделе рассмотрены приближенные методы вычисления определенных интегралов. Аналитическое решение данной задачи связано с нахождением первообразной подынтегральной функции (формула Ньютона – Лейбница). Первообразная существует не для любой функции. Наиболее известным примером функции, для которой нет первообразной, является

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$. В таких случаях для решения определенных интегралов приходится использовать численные методы.

Пятый раздел пособия посвящен методам интерполяции. Часто при решении технических задач неизвестная зависимость представлена в виде совокупности отдельных значений. Для всестороннего исследования требуется найти ее приближение, то

есть заменить неизвестную функцию рациональной, параметры которой минимизируют ошибки приближения.

Данное пособие может быть использовано при обучении студентов других технических специальностей.

1. Сортировка данных

Человеку приходится сталкиваться с большим объемом информации. Чтобы это взаимодействие было более эффективным, желательно хранить данные в каком-либо порядке. Например, было бы очень трудно и неудобно искать телефонный номер человека в справочнике, где фамилии располагались бы в случайном порядке. С элементами сортировки человек сталкивается при решении многих задач. В программировании под сортировкой понимают изменение порядка объектов данного множества [1, 2].

Сортировка – один из основных алгоритмов обработки информации, состоящий в переупорядочении по нужному признаку заданной последовательности величин.

Наиболее полно алгоритмы сортировки изложены в фундаментальной книге Дональда Кнута «Искусство программирования» [1].

Постановка задачи: необходимо упорядочить N элементов R_1, R_2, \dots, R_N , которые называются записями. Каждая запись R_j имеет ключ K_j , который управляет процессом сортировки. Помимо ключа, запись может содержать побочную информацию, которая не влияет на сортировку, но всегда остается в этой записи.

Отношение порядка $<$ (меньше) на множестве ключей вводится таким образом, чтобы для трех разных ключей a, b, c выполнялись следующие условия:

- справедливо одно и только одно соотношение $a < b$, $a = b$, $a > b$ (закон трихотомии),
- если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (закон транзитивности).

Эти два закона определяют математическое понятие линейного упорядочения.

Задача сортировки – найти такую перестановку записей $p(1), p(2), \dots, p(N)$, после которой ключи расположатся в неубывающем порядке: $K_{p(1)} \leq K_{p(2)} \leq \dots \leq K_{p(N)}$.

Сортировка называется **устойчивой**, если она удовлетворяет дополнительному условию, что записи с одинаковыми ключами остаются в прежнем порядке, т.е.

$$p(i) < p(j), \text{ если } K_{p(i)} = K_{p(j)} \text{ и } i < j.$$

Сортировку разделяют на два класса: внутреннюю, когда все записи хранятся в быстрой оперативной памяти, и внешнюю, когда записи там не помещаются и приходится использовать более медленные внешние запоминающие устройства. В данном пособии будет рассматриваться только внутренняя сортировка. С методами внешней сортировки можно ознакомиться в [1, 2].

Эффективность алгоритма сортировки будет оцениваться двумя показателями: количеством сравнений и количеством обменов.

Все известные алгоритмы сортировки данных можно разделить на четыре группы:

- сортировка подсчетом,
- сортировка вставками,
- сортировка посредством выбора,
- обменная сортировка.

Для объяснения особенностей того или иного алгоритма сортировки будет использоваться одна и та же последовательность записей, ключи которых образуют последовательность [1] (таблица 1.1).

Таблица 1.1. Последовательность ключей для алгоритмов сортировки

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}
503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703

1.1. Сортировка подсчетом

Для сортировки методом подсчета записей R_1, R_2, \dots, R_N по ключам K_1, K_2, \dots, K_N используется вспомогательный массив $C(1), C(2), \dots, C(N)$. Изначально элементы этого массива равны нулю. Все ключи попарно сравниваются. Если ключ K_i больше ключа K_j , то элемент $C(i)$ увеличивается на единицу. В противном случае на единицу увеличивается элемент $C(j)$. После за-

вершения алгоритма элемент массива $C(j)+1$ определяет окончательное положение записи R_j .

В таблице 1.2 показан процесс сортировки методом подсчета с помощью последовательности ключей из таблицы 1.1. Видно, что при сравнении ключа K_{16} с остальными ключами значение $C(16)=12$. Следовательно, запись R_{16} займет 13-е место. Значения $C(5)$, $C(7)$, $C(15)$ станут равными единице.

После аналогичных действий для ключа K_{15} получим значение $C(15)=13$. Следовательно, запись R_{15} займет 14-е место, а значения $C(5)$, $C(7)$ станут равными двум. После 15 итераций будут определены места всех записей.

Приведем фрагмент программы сортировки подсчетом.

Фрагмент программы на языке Си	Фрагмент программы на языке Паскаль
<pre>for(i=1; i<=n; i++) c[i]=0; for(i=n; i>1; i--) { for(j=i-1; j>0; j--) { if (k[i]<k[j]) c[j]++; else c[i]++; } }</pre>	<pre>for i:=1 to n do c[i]:=0; for i:=n downto 2 do begin for j:=i-1 downto 1 do begin if (k[i]<k[j]) then c[j]:=c[j]+1 else c[i]:=c[i]+1; end end</pre>

К недостаткам данного метода можно отнести необходимость дополнительного расхода памяти, связанного с хранением элементов массива $C(1), C(2), \dots, C(N)$, и большое количество сравнений, которое возрастает пропорционально квадрату N количества элементов: $\frac{N(N-1)}{2}$. Это показатель «плохого» алгоритма сортировки.

Таблица 1.2. Процесс сортировки методом подсчета

Ключи	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
C (нач)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C ($i=N$)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	12
C ($i=N-1$)	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	13	12
C ($i=N-2$)	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	11	13	12
C ($i=N-3$)	0	0	0	0	4	0	4	0	1	0	0	0	9	11	13	12
C ($i=N-4$)	0	0	1	0	5	0	5	0	2	0	0	7	9	11	13	12
C ($i=N-5$)	1	0	2	0	6	1	6	1	3	1	2	7	9	11	13	12
.....
C ($i=2$)	6	1	8	0	15	3	14	4	10	5	2	7	9	11	13	12

1.2. Сортировка вставками

Сортировка вставками основана на свойстве, которым пользуются игроки в карточных играх. Перед рассмотрением записи R_j считается, что предыдущие записи R_1, R_2, \dots, R_{j-1} уже упорядочены. Запись R_j вставляется в соответствующее место. Простейшая сортировка вставками является очевидной. Пусть записи R_1, R_2, \dots, R_{j-1} размещены так, что $K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{j-1}$. Сравниваем по очереди K_j с K_{j-1}, K_{j-2}, \dots до тех пор, пока не обнаружим, что запись R_j необходимо вставить между записями R_i и R_{i+1} . Тогда записи $R_{i+1}, R_{i+2}, \dots, R_{j-1}$ сдвигаются, а запись R_j занимает место $(i + 1)$.

Продемонстрируем изложенный алгоритм с помощью последовательности ключей, приведенных ранее (см. таблицу 1.1). Изначально отсортированная часть состоит из одного элемента 503. Ключ 087 сравнивается с 503. Поскольку $087 < 503$, то записи R_1 и R_2 меняются местами. Теперь упорядоченная часть состоит из двух ключей: 087 и 503. Ключ 512 сравнивается с 503, а поскольку $503 < 512$, то обменов нет. Отсортированная часть стала состоять из трех ключей: 087, 503, 512. После трех сравнений ключа 061 ($061 < 512$, $061 < 503$ и $061 < 087$) определено место записи R_4 : она занимает первое место. Остальные записи сдвигаются: R_3 на 4-е место, R_2 на 3-е место, а R_1 на 2-е место. Процесс сортировки приведен в таблице 1.3.

Быстродействие алгоритма простых вставок можно увеличить, применяя бинарные вставки и двухпутевые вставки [1]. Суть бинарных вставок состоит в том, что при размещении записи R_{64} ключ K_{64} следует сравнивать не с K_{63}, K_{62}, \dots , а с ключом K_{32} . Если $K_{64} < K_{32}$, то его необходимо сравнить с ключом K_{16} . Положение записи R_{64} можно найти за шесть сравнений. Общее число сравнений для N вставляемых элементов можно снизить с $N^2/4$ до $N \cdot \log_2 N$.

Таблица 1.3. Процесс сортировки методом простых вставок

Номер итерации	Ключи							
	503	087	512	061	908	170	897	275
1	503							
2	087	503						
3	087	503	512					
4	061	087	503	512				
5	061	087	503	512	908			
6	061	087	170	503	512	908		
7	061	087	170	503	512	897	908	
.....
15	061	087	154	170	275	426	503	509

Окончание таблицы 1.3

Номер итерации	Ключи							
	653	426	154	509	612	677	765	703
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
.....
15	512	612	653	677	703	765	897	908

Приведем фрагмент программы сортировки простыми вставками.

Фрагмент на языке Си	Фрагмент на языке Паскаль
<pre> for(j=2; j<=n; j++) { i=j-1; key=j; rc=r[j]; do { if(key>k[i]) break; r[i+1]=r[i]; i--; } while (i==0); r[i+1]=rc; } </pre>	<pre> for j:=2 to n do begin i:=j-1; key:=j; rc:=r[j]; repeat if(key>k[i]) then break; r[i+1]:=r[i]; i:=i-1; until (i<>0); r[i+1]=rc; end </pre>

Однако бинарные вставки решают задачу только наполовину. После того как найдено место для записи R_j , необходимо передвинуть в среднем $j/2$ записей. Пользуясь двухпутевыми вставками, можно уменьшить это число вдвое. Суть алгоритма двухпутевых вставок: первый элемент помещается в середину области вывода, место для последующих элементов освобождается при помощи сдвигов влево или вправо – в зависимости от значения ключа. В таблице 1.4 показана сортировка двухпутевыми вставками.

Таблица 1.4. Процесс сортировки методом двухпутевых вставок

Номер итер.	Ключи															
	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
1								503								
2							087	503								
3							087	503	512							
4						061	087	503	512							
5						061	087	503	512	908						
6					061	087	170	503	512	908						
7					061	087	170	503	512	897	908					
.....
15	061	087	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908

1.3. Сортировка выбором

При сортировке записей R_1, R_2, \dots, R_N методом простого выбора находится запись R_j , имеющая наибольший ключ K_j . После этого происходит обмен записей R_j и R_N . Далее наибольший ключ ищется у записей R_1, R_2, \dots, R_{N-1} . Найденная запись обменивается с записью R_{N-1} . Подобная операция выполняется $(N - 1)$ раз. В результате процедура сортировки выполнена.

Продемонстрируем изложенный алгоритм с помощью последовательности ключей, приведенных ранее. В таблице 1.5 показан процесс сортировки методом простого выбора.

Таблица 1.5. Процесс сортировки методом простого выбора

Номер итер.	Ключи															
	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
1	503	087	512	061	703	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	908
2	503	087	512	061	703	170	765	275	653	426	154	509	612	677	897	908
3	503	087	512	061	703	170	677	275	653	426	154	509	612	765	897	908
4	503	087	512	061	612	170	677	275	653	426	154	509	703	765	897	908
5	503	087	512	061	612	170	509	275	653	426	154	677	703	765	897	908
6	503	087	512	061	612	170	509	275	154	426	653	677	703	765	897	908
7	503	087	512	061	426	170	509	275	154	612	653	677	703	765	897	908
.....
15	061	087	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908

При первом просмотре среди 16 ключей был определен максимальный ключ $K_5 = 908$. Поэтому записи R_5 и R_{16} меняются местами. Поиск второго по значению ключа проводился среди оставшихся 15 ключей. Им стал $K_7 = 897$. Поэтому меняются местами записи R_7 и R_{15} . После 15 подобных итераций процесс сортировки будет закончен.

Приведем фрагмент программы сортировки простым выбором.

Фрагмент на языке Си	Фрагмент на языке Паскаль
<pre> for(j=n; j>1; j--) { jmax=j; for(i=j-1; i>0; i--) if(k[i]>k[jmax]) jmax=i; if(jmax<j) { r_temp=r[jmax]; r[jmax]=r[j]; r[j]=r_temp; } } </pre>	<pre> for j:=n downto 2 do begin jmax:=j; for i:=j-1 to 1 do if(k[i]>k[jmax])then jmax:=i; if(jmax<j) then begin r_temp:=r[jmax]; r[jmax]:=r[j]; r[j]:=r_temp; end end </pre>

Число сравнений ключей в методе простого выбора фиксировано и равно $(N - 1) \cdot N / 2$. Поэтому алгоритм программно реализован с помощью двух циклических операторов *for*.

1.4. Обменная сортировка «пузырьком»

Рассмотрим два алгоритма, в которых сортировка записей проводится обменом. Простейший обменный алгоритм сортировки называется «пузырек». При сортировке записей R_1, R_2, \dots, R_N с помощью алгоритма «пузырька» сравниваются ключи двух соседних записей R_j и R_{j-1} . Если ключ K_j меньше ключа K_{j-1} , записи R_j и R_{j-1} обмениваются. Сначала сравнивают K_1 и K_2 , обменивая при необходимости R_1 и R_2 , затем K_2 и K_3 , K_3 и K_4 и т.д. После многократного выполнения этого процесса исходная последовательность будет упорядочена. В таблице 1.6 показана сортировка последовательности шестнадцати ключей (см. таблицу 1.1).

Таблица 1.6. Процесс сортировки методом «пузырька»

Номер итер.	Ключи															
	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
1	087	503	061	512	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703	908
2	087	061	503	170	512	275	653	426	154	509	612	677	765	703	897	908
3	061	087	170	503	275	512	426	154	509	612	653	677	703	765	897	908
4	061	087	170	275	503	426	154	509	512	612	653	677	703	765	897	908
5	061	087	170	275	426	154	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908
6	061	087	170	275	154	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908
7	061	087	170	154	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908
8	061	087	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908
9	061	087	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908

Если ключи K_1, K_2, \dots, K_N расположить вертикально, так чтобы первый ключ был внизу, а последний вверху, то записи с большими ключами постепенно «всплывают» и занимают соответствующее место. При первом прохождении запись с ключом

908 занимает последнее место. При втором проходе запись с ключом 897 занимает предпоследнее место и т.д. Поэтому данный алгоритм получил название «пузырек».

Приведем фрагмент программы сортировки «пузырьком».

Фрагмент на языке Си	Фрагмент на языке Паскаль
<pre> jmax=n; do { flag=0; for(i=1; i<jmax; i++) { if(k[i]>k[i+1]) { r_temp=r[i+1]; r[i+1]=r[i]; r[i]=r_temp; flag=1; } } jmax--; } while (flag&& jmax); </pre>	<pre> jmax:=n; repeat flag:=true; for i:=1 to jmax-1 do begin if(k[i]>k[i+1])then begin r_temp:=r[i+1]; r[i+1]:=r[i]; r[i]:=r_temp; flag:=false; end jmax:=jmax-1; until (flag or (jmax=0)); </pre>

1.5. Сортировка методом Шелла

При сортировке «пузырьком» сравниваются ключи соседних записей (шаг равен единице). Быстродействие данного алгоритма можно повысить, если применить сортировку с убывающим шагом, предложенную Дональдом Л. Шеллом [1]. Разделим шестнадцать записей на восемь групп по две записи в каждой группе: (R_1, R_9) , (R_2, R_{10}) , ..., (R_8, R_{16}) , отсортируем каждую группу по отдельности. Затем разобьем записи на четыре группы по четыре записи: (R_1, R_5, R_9, R_{13}) , $(R_2, R_6, R_{10}, R_{14})$, $(R_3, R_7, R_{11}, R_{15})$, $(R_4, R_8, R_{12}, R_{16})$ и отсортируем каждую группу методом простых вставок. После этого разобьем все записи на две группы по восемь записей: $(R_1, R_3, R_5, R_7, R_9, R_{11}, R_{13}, R_{15})$, $(R_2, R_4, R_6, R_8, R_{10}, R_{12}, R_{14}, R_{16})$ и также отсортируем их. Процесс завершается четвертым проходом, в котором сортируются все шестнадцать записей. В таблице 1.7 показана сортировка исход-

ной последовательности ключей методом Шелла с убывающим шагом (8, 4, 2, 1).

Таблица 1.7. Процесс сортировки методом Шелла с убывающим шагом (8, 4, 2, 1)

Номер итер.	Ключи															
	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
1	503	087	154	061	612	170	765	275	653	426	512	509	908	677	897	703
2	503	087	154	061	612	170	512	275	653	426	765	509	908	677	897	703
3	154	061	503	087	512	170	612	275	653	426	765	509	897	677	908	703
4	061	154	087	503	170	512	275	612	426	653	509	765	677	897	703	908
5	061	087	154	170	503	275	512	426	612	509	653	677	765	703	897	908
6	061	087	154	170	275	503	426	512	509	612	653	677	703	765	897	908
7	061	087	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908

При сортировке 8 групп по 2 ключа в каждой было выполнено 8 сравнений: 503 и 653, 087 и 426, 512 и 154, 061 и 509, 908 и 612, 170 и 677, 897 и 765, 275 и 703. По результатам сравнений было проведено 3 обмена: 512 и 154, 908 и 612, 897 и 765.

Во время второй сортировки сравнения проводились внутри 4 групп по 4 элемента в каждой: (503, 612, 653, 908), (087, 170, 426, 677), (154, 765, 512, 897), (061, 275, 509, 703). Первая группа после трех сравнений (503 и 612, 612 и 653, 653 и 908) осталась без изменений. Вторая группа также осталась неизменной после трех сравнений (087 и 170, 170 и 426, 426 и 677). Третья группа ключей изменилась. Произошел 1 обмен (765 и 512) после четырех сравнений (154 и 765, 765 и 512, 154 и 512, 765 и 897). Четвертая группа после трех сравнений (061 и 275, 275 и 509, 509 и 703) изменений не претерпела.

Далее сортировка была проведена внутри двух групп по 8 элементов в каждой группе: (503, 154, 612, 512, 653, 765, 908, 897), (087, 061, 170, 275, 426, 509, 677, 703). После 9 сравнений (503 и 154, 503 и 612, 612 и 512, 503 и 512, 612 и 653, 653 и 765, 765 и 908, 908 и 897, 765 и 897) и трех обменов (503 и 154, 612 и 512, 908 и 897) первая группа стала иметь вид: (154, 503, 512, 612,

653, 765, 897, 908). Вторая группа после аналогичных действий – (061, 087, 170, 275, 426, 509, 677, 703).

Последним этапом выполнялась сортировка с шагом 1 среди всех 16 ключей. В результате получили последовательность ключей: 061, 087, 154, 170, 275, 426, 503, 509, 512, 612, 677, 653, 703, 765, 897, 908. Всего было выполнено 72 сравнения и 29 обменов.

Существуют разные подходы в выборе шагов сортировки [1]. Вместо последовательности шагов (8, 4, 2, 1) можно пользоваться любой последовательностью $(h_t, h_{t-1}, h_{t-2}, \dots, h_1)$, в которой последний шаг равен единице. Например, В. Пратт предложил использовать шаги сортировки, которые выбираются из множества чисел вида $2^p \cdot 3^q$ меньших N , Хиббард – шаги вида $2^k - 1$, А.А. Папернов и Г.В. Стасевич – последовательность $2^k + 1$. Также можно использовать последовательности $(2^k - (-1)^k)$, $(3^k - 1)/2$ или числа Фибоначчи.

1.6. «Быстрая» сортировка

В 1962 году Ч.Э.Р. Хоар предложил обменную сортировку с разделением, которую назвал «quicksort» («быстрая сортировка»). При «быстрой сортировке», помимо исходной последовательности ключей K_1, K_2, \dots, K_N , имеются два указателя i и j . Изначально $i = 1$, $j = N$. Сравниваются записи с ключами K_i и K_j . Если обмена не требуется, то указатель j уменьшается на единицу. Если обмен требуется, то после первого обмена записей R_i и R_j указатель i увеличивается на единицу. Сравнения ключей K_i и K_j будут продолжаться до тех пор, пока не произойдет второй обмен. Затем снова будет уменьшаться указатель j . После ряда обменов, увеличения указателя i и уменьшения указателя j оба указателя станут равными друг другу ($i = j$). Это означает, что слева от той записи, на которой остановились указатели i и j , оказались записи с меньшим ключом, а справа с большим. Исходная задача сводится к двум более простым: независимой сортировке записей R_1, R_2, \dots, R_{i-1} и $R_{i+1}, R_{i+2}, \dots, R_N$. К каждой новой после-

довательности можно применить тот же самый метод. Изложенный выше алгоритм для массива ключей (см. таблицу 1.1) показан в таблице 1.8.

Таблица 1.8. Процесс сортировки быстрым методом (quicksort)

Указ.	Ключи															
	503	087	512	061	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
$j--$	154	087	512	061	908	170	897	275	653	426	503	509	612	677	765	703
$i++$	154	087	503	061	908	170	897	275	653	426	512	509	612	677	765	703
$j--$	154	087	426	061	908	170	897	275	653	503	512	509	612	677	765	703
$i++$	154	087	426	061	503	170	897	275	653	908	512	509	612	677	765	703
$j--$	154	087	426	061	275	170	897	503	653	908	512	509	612	677	765	703
$i++$	154	087	426	061	275	170	503	897	653	908	512	509	612	677	765	703
							$i=j$									

Применительно к данному массиву ключей алгоритм быстрой сортировки работает следующим образом. Изначально запускается подпрограмма, для которой значения указателей $i=1$, $j=16$. После 15 сравнений и 6 перестановок оба указателя сошлись на ключе 503, который стал занимать 7-е место. Значения первых шесть ключей (154, 087, 426, 061, 275, 170) меньше ключа 503, а значения ключей, занимающих места с 8-го по 16-е (897, 653, 908, 512, 509, 612, 677, 765, 703), больше.

Следующий шаг – запуск двух подпрограмм, реализующих алгоритм быстрой сортировки. Первая подпрограмма получит в качестве значений указателей $i=1$, $j=6$, вторая подпрограмма – $i=8$, $j=16$.

В первой подпрограмме с начальными ключами $i=1$, $j=6$ после 5 сравнений и двух перестановок оба указателя сойдутся на ключе 154, который стал занимать 3-е место. Значения первых двух ключей (061, 087) меньше ключа 154, а значения ключей, занимающих места с 4-го по 6-е (426, 275, 170), больше. Процесс работы первой подпрограммы показан в таблице 1.9. Поскольку обе эти группы состоят более чем из одного ключа, первая подпрограмма запустит еще две подпрограммы быстрой сортировки. Одна подпрограмма получит в качестве значений указателей $i=1$, $j=2$, а другая – $i=4$, $j=6$.

Таблица 1.9. Процесс сортировки быстрым методом первой подпрограммы с начальными ключами $i = 1, j = 6$

Указ.	154	087	426	061	275	170
$j--$	061	087	426	154	275	170
$i++$	061	087	154	426	275	170
			$i=j$			

Во второй подпрограмме с начальными ключами $i = 8, j = 16$ после 8 сравнений и двух перестановок (897 и 703, 908 и 897, 897 и 765) оба указателя сойдутся на ключе 897, который стал занимать 15-е место. Значения ключей (703, 653, 765, 512, 509, 612, 677), занимающих места с 8-го по 14-е, меньше ключа 897, а занимающий 16-е место ключ 908 больше него. Процесс работы второй подпрограммы показан в таблице 1.10.

Таблица 1.10. Процесс сортировки быстрым методом второй подпрограммы с начальными ключами $i = 8, j = 16$

Указ.	897	653	908	512	509	612	677	765	703
$j--$	703	653	908	512	509	612	677	765	897
$i++$	703	653	897	512	509	612	677	765	908
$j--$	703	653	765	512	509	612	677	897	908
$i++$	703	653	765	512	509	612	677	897	908
								$i=j$	

Поскольку только один ключ больше ключа 897, то вторая подпрограмма вызовет только одну подпрограмму с начальными ключами $i = 8, j = 14$. Таким образом, выполнение описанных действий по описанному выше алгоритму приведет к сортировке последовательности ключей в кратчайшее время.

1.7. Сравнение алгоритмов сортировки

Эффективность алгоритма сортировки характеризуется несколькими параметрами:

- время сортировки;

- память (потребность в дополнительных затратах памяти, зависящих от числа записей);
- устойчивость (устойчивые алгоритмы не меняют расположения записей, имеющих одинаковый ключ);
- естественность поведения (эффективность метода при сортировке упорядоченных или частично упорядоченных данных). Естественный алгоритм учитывает это и работает быстрее. Неестественный метод этот факт не учитывает.

Время работы алгоритма сортировки зависит от количества сравнений ключей K_1, K_2, \dots, K_N и количества перестановок записей R_1, R_2, \dots, R_N . Чем меньше число сравнений и перестановок, тем эффективнее данный алгоритм.

Поскольку в общем случае исходные данные распределены случайно, следует говорить о минимальном (Min), максимальном (Max) и среднем (Avr) числе сравнений и перестановок. Наибольший интерес представляет зависимость среднего числа (Avr) от количества записей N . В таблице 1.11 перечислены эти зависимости для некоторых алгоритмов сортировки данных. Приведенные формулы определяют только те сравнения и перестановки, которые происходят внутри циклов.

Таблица 1.11. Зависимость числа сравнений и перестановок от количества записей некоторых алгоритмов сортировки

Алгоритм	Число сравнений	Число перестановок записей
Метод подсчета	$\text{Min} - \frac{N(N-1)}{2}$ $\text{Avr} - \frac{N(N-1)}{2}$ $\text{Max} - \frac{N(N-1)}{2}$	$\text{Min} - 0$ $\text{Avr} - \frac{N-1}{2}$ $\text{Max} - N-1$
Метод выбора	$\text{Min} - \frac{N(N-1)}{2}$ $\text{Avr} - \frac{N(N-1)}{2}$ $\text{Max} - \frac{N(N-1)}{2}$	$\text{Min} - 0$ $\text{Avr} - \frac{N-1}{2}$ $\text{Max} - N-1$

Окончание таблицы 1.11

Алгоритм	Число сравнений	Число перестановок записей
Метод простых вставок	$\text{Min} - (N - 1)$ $\text{Avr} - \frac{N(N + 1) - 2}{4}$ $\text{Max} - \frac{N(N - 1)}{2}$	$\text{Min} - 0$ $\text{Avr} - \frac{N^2 - N}{4}$ $\text{Max} - \frac{N^2 - N}{2}$
Обмен «пузырьком»	$\text{Min} - (N - 1)$ $\text{Avr} - \frac{N(N + 1) - 2}{4}$ $\text{Max} - \frac{N(N - 1)}{2}$	$\text{Min} - 0$ $\text{Avr} - \frac{N^2 - N}{4}$ $\text{Max} - \frac{N^2 - N}{2}$
Метод Шелла (1, 4, 13, 40,...) Последовательность шагов $\frac{3^k - 1}{2}$	$\text{Avr} \sim N^{1,2}$	$\text{Avr} - 1,66N^{1,25} \text{ или } 0,33N(\ln N)^2 - 1,26N \ln N$
Метод Шелла (1, 3, 7, 15, 31,...) Последовательность шагов $2^k - 1$	$\text{Avr} \sim N^{1,2}$	$\text{Avr} - 1,22N^{1,26} \text{ или } 0,29N(\ln N)^2 - 1,26N \ln N$
«Быстрая сортировка»	$\text{Avr} \sim N \log_2 N$	$\text{Avr} \sim \frac{N \log_2 N}{6}$

Для «плохих» алгоритмов сортировки такая зависимость имеет квадратичный характер ($\sim N^2$). Степень N менее двух характеризует «хорошие» алгоритмы. Предел такого уменьшения $N \log_2 N$ с точностью до коэффициента достигнут в алгоритме «быстрой сортировки».

1.8. Вопросы и упражнения

1. Что такое сортировка?
2. Какая сортировка считается внутренней, а какая внешней?
3. Дайте классификацию методов сортировки.
4. Какая сортировка считается устойчивой, а какая неустойчивой?

5. Определите число сравнений и число обменов при сортировке методом выбора следующего массива целых чисел: 54, 87, 26, 61, 75, 70, 3, 97.

6. Определите число сравнений и число обменов при сортировке методом «пузырька» следующего массива целых чисел: 42, 61, 54, 96, 73, 41, 16, 57, 24, 36.

7. Определите число сравнений и число обменов при сортировке методом простых вставок следующего массива целых чисел: 14, 16, 57, 84, 26, 37, 84, 61, 54, 46.

8. Определите число сравнений и число обменов при сортировке методом бинарных вставок следующего массива целых чисел: 49, 55, 96, 34, 74, 34, 90, 37.

9. Определите число сравнений и число обменов при сортировке методом Шелла следующего массива целых чисел: 74, 7, 62, 11, 31, 15, 33, 26.

10. Определите число сравнений и число обменов при сортировке «быстрым» методом следующего массива целых чисел: 67, 19, 52, 64, 54, 32, 38, 49.

2. Численное решение уравнений

Уравнение – аналитическая запись задачи о нахождении значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны. Аргументы, от которых зависят эти функции, называют обычно неизвестными, а значения неизвестных, при которых значения функций равны, – решениями (корнями) уравнения.

В школьной программе по математике изучаются способы аналитического решения простейших уравнений: линейного уравнения $ax + b = 0$, квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и ряда других (тригонометрических, показательных, логарифмических). Существуют аналитические решения кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (формула Кардано), алгебраического уравнения 4-й степени (метод Феррари), которые не изучаются в школьной программе. Однако для алгебраических уравнений пятой и более степени для общего случая не существует решения в радикалах (теорема Абеля, 1826). Решение таких уравнений можно найти только приближенно.

Рассмотрим задачу из физики [3]. Шар радиуса r плавает в воде, погрузившись на глубину d (рис. 2.1). Предположим, что радиус шара $r = 10$ см, сделан из дерева, имеющего плотность $\rho_{\text{ш}} = 0,638$ г/см³. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см³. Требуется найти глубину d погружения шарика.

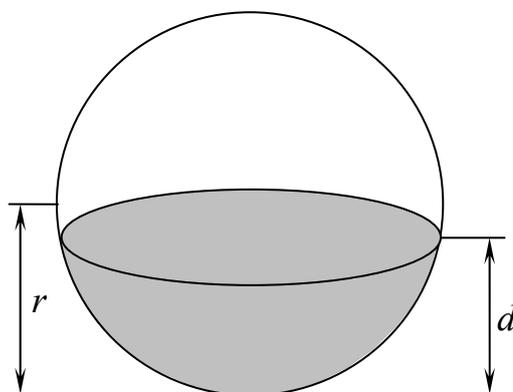


Рис. 2.1. Часть шара радиуса r , погруженного в воду на глубину d

На шар действуют две силы: сила тяжести $m_{\text{ш}}g$ и сила Архимеда $\rho_{\text{в}}gV$, где V – объем погруженной части. Эти силы численно равны и направлены в противоположные стороны. После математических преобразований получим следующие уравнения:

$$m_{\text{ш}}g = \rho_{\text{в}}gV, \quad m_{\text{ш}} = V_{\text{ш}}\rho_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{ш}}.$$

Объем шара, погруженного в воду, можно найти, вычислив интеграл

$$V = \int_0^d \pi(r^2 - (x-r)^2) dx = \frac{\pi d^2(3r-d)}{3}.$$

Тогда

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{ш}}g = \rho_{\text{в}}g \frac{\pi d^2(3r-d)}{3},$$

или

$$\rho_{\text{в}}d^3 - 3rd^2 + 4r^3\rho_{\text{ш}} = 0.$$

При $r = 10$ см, $\rho_{\text{ш}} = 0,638$ г/см³, $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см³ уравнение принимает вид $d^3 - 30d^2 + 2552 = 0$.

На рис. 2.2 показан график полученного кубического полинома.

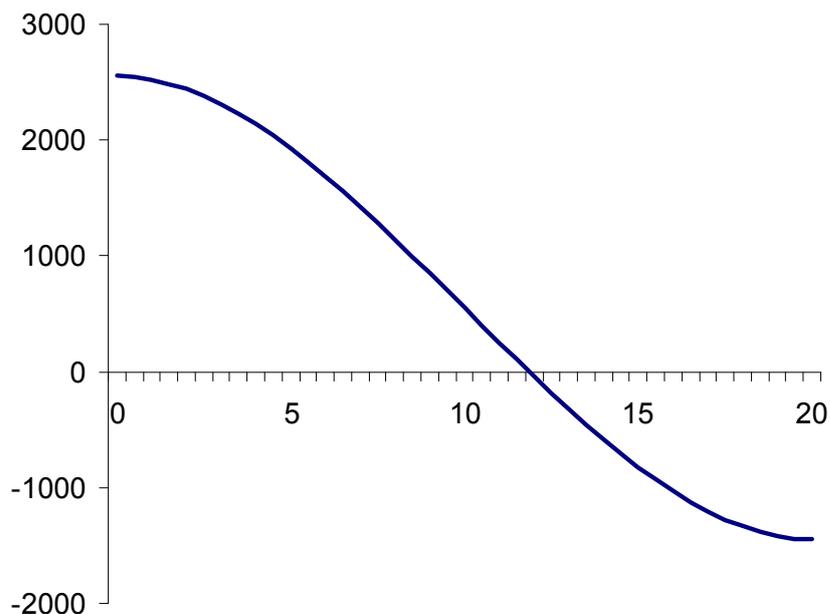


Рис. 2.2. График кубического уравнения $y = d^3 - 30d^2 + 2552$

Из графика видно, что решение уравнения находится около значения $d = 12$. Рассмотрим несколько методов приближенного нахождения корней кубического уравнения, полученного при решении задачи по физике.

2.1. Метод половинного деления (дихотомии)

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a; b]$ и значения функции на границах интервала $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то на данном интервале имеется, по крайней мере, один корень.

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$;
- значения границ интервала a и b , в которых функция $f(x)$ имеет разные знаки;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

При решении уравнения методом половинного деления исходный интервал $[a; b]$ разбивается пополам [3–5]. В середине интервала (точка c) вычисляется значение функции $f(c)$. Если полученное значение по модулю меньше погрешности вычислений ε , то точка c является приближенным решением уравнения $f(x) = 0$. В противном случае проводится повторный поиск решения либо на интервале $[a; c]$, либо на $[c; b]$. Данный процесс показан на рис. 2.3.

Последовательность шагов решения уравнения:

Шаг 1. Определить середину интервала $c = \frac{a + b}{2}$.

Шаг 2. Вычислить значение функции в середине интервала $f(c)$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(c)| < \varepsilon$. Если оно истинно, то c является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если значения $f(a)$ и $f(c)$ имеют одинаковый знак, выполнить присвоение $a = c$ и перейти к шагу 1. Если значения

$f(a)$ и $f(c)$ имеют разные знаки, выполнить присвоение $b = c$ и перейти к шагу 1.

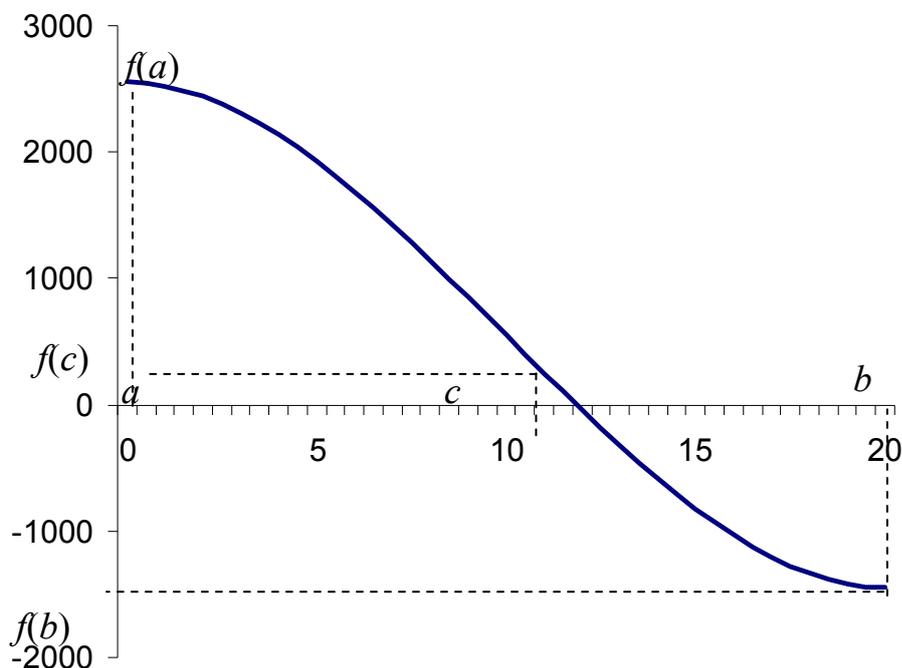


Рис. 2.3. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ методом половинного деления

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, методом половинного деления приведен в таблице 2.1. В качестве начальных приближений использовались значения $a = 0$, $b = 20$.

Таблица 2.1. Процесс нахождения корня уравнения методом половинного деления

Номер итерации	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$ f(c) $	$\lg(f(c))$
1	0	20	10	2552	-1448	552	552	2,742
2	10	20	15	552	-1448	-823	823	2,915
3	10	15	12,5	552	-823	-182	182,4	2,261
4	10	12,5	11,25	552	-182,4	179	179	2,253
5	11,25	12,5	11,875	179	-182,4	-3,91	3,908	0,592
6	11,25	11,875	11,563	179	-3,908	87,06	87,06	1,94

Окончание таблицы 2.1

Номер итерации	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$ f(c) $	$\lg(f(c))$
7	11,563	11,875	11,719	87,06	-3,908	41,45	41,45	1,618
8	11,719	11,875	11,797	41,45	-3,908	18,74	18,74	1,273
9	11,797	11,875	11,836	18,74	-3,908	7,407	7,407	0,87
10	11,836	11,875	11,855	7,407	-3,908	1,747	1,747	0,242
11	11,855	11,875	11,865	1,747	-3,908	-1,08	1,081	0,034
12	11,855	11,865	11,86	1,747	-1,081	0,333	0,333	-0,48
13	11,86	11,865	11,863	0,333	-1,081	-0,37	0,374	-0,43
14	11,86	11,863	11,862	0,333	-0,374	-0,02	0,02	-1,69
15	11,86	11,862	11,861	0,333	-0,02	0,156	0,156	-0,81
16	11,861	11,862	11,861	0,156	-0,02	0,068	0,068	-1,17
17	11,861	11,862	11,861	0,068	-0,02	0,024	0,024	-1,63
18	11,861	11,862	11,861	0,024	-0,02	0,002	0,002	-2,79
19	11,861	11,862	11,862	0,002	-0,02	-0,01	0,009	-2,02
20	11,861	11,862	11,862	0,002	-0,009	-0	0,004	-2,41
21	11,861	11,862	11,862	0,002	-0,004	-0	0,001	-2,94
22	11,861	11,862	11,862	0,002	-0,001	2E-04	2E-04	-3,65

Как видно из таблицы 2.1, условие $|f(c)| < 0,001$ достигнуто за 22 итерации.

При реализации данного алгоритма в компьютерной программе целесообразно ввести ограничение на количество итераций, например данные шаги выполнять не более N раз. При неправильном выборе ε может наступить закливание программы.

2.2. Метод хорд (ложного положения)

Метод половинного деления имеет невысокую сходимость. Быстрее корень уравнения можно найти по методу хорд [3–5]. Соединим отрезком точки с координатами $\{a; f(a)\}$ и $\{b; f(b)\}$. Точка c является пересечением данного отрезка (хорды) и оси абсцисс. В точке c вычисляется значение функции $f(c)$. Если это значение по модулю меньше погрешности вычислений ε , то точка c является приближенным решением уравнения $f(x) = 0$.

В противном случае проводится повторный поиск решения либо на интервале $[a; c]$, либо на $[c; b]$. Данный процесс показан на рис. 2.4.

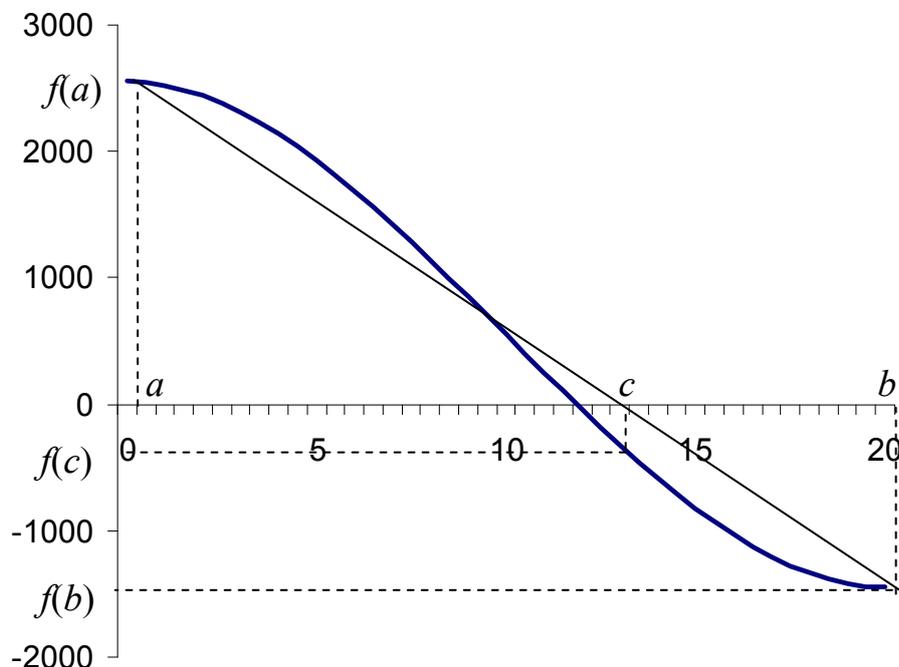


Рис. 2.4. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ методом хорд

Из курса математики известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, имеет вид $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$. Подставим в это уравнение координаты точек $\{a; f(a)\}$ и $\{b; f(b)\}$, найдем координату точки пересечения прямой с осью абсцисс:

$$\frac{c - a}{a - b} = \frac{0 - f(a)}{f(a) - f(b)}, \quad c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$;
- значения границ интервала a и b , в которых функция $f(x)$ имеет разные знаки;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Последовательность шагов решения уравнения:

Шаг 1. Вычислить точку пересечения хорды и оси абсцисс

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Шаг 2. Вычислить значение функции в середине интервала $f(c)$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(c)| < \varepsilon$. Если оно истинно, то значение c является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если значения $f(a)$ и $f(c)$ имеют одинаковый знак, выполнить присвоение $a = c$ и перейти к шагу 1. Если значения $f(a)$ и $f(c)$ имеют разные знаки, выполнить присвоение $b = c$ и перейти к шагу 1.

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, методом хорд приведен в таблице 2.2. В качестве начальных приближений использовались значения $a = 0$, $b = 20$.

Таблица 2.2. Процесс нахождения корня уравнения методом хорд

Номер итерации	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$ f(c) $	$\lg(f(c))$
1	0	20	12,76	2552	-1448	-254,98	254,98	2,4065
2	0	12,76	11,601	2552	-254,98	75,825	75,825	1,8798
3	11,6	12,76	11,867	75,825	-254,98	-1,4781	1,4781	0,1697
4	11,6	11,867	11,862	75,825	-1,4781	-0,0071	0,0071	-2,152
5	11,6	11,862	11,862	75,825	-0,0071	-3E-05	3E-05	-4,473
6	11,6	11,862	11,862	75,825	-3E-05	-2E-07	2E-07	-6,795
7	11,6	11,862	11,862	75,825	-2E-07	-8E-10	8E-10	-9,117
8	11,6	11,862	11,862	75,825	-8E-10	-4E-12	4E-12	-11,44

Как видно из таблицы 2.2, условие $|f(c)| < 0,001$ достигнуто за 5 итераций.

При реализации данного алгоритма в компьютерной программе целесообразно ввести ограничение: данные шаги выполнять не более N раз, поскольку при неправильном выборе значения ε может произойти закливание программы.

2.3. Метод Ньютона (касательных)

Скорость нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ методами половинного деления и хорд невысокая. Существуют более эффективные алгоритмы численного решения уравнений. К их числу относится метод Ньютона (или Ньютона – Рафсена) [3–5].

Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны в окрестности корня, то эту информацию можно использовать для достижения большей сходимости. Предположим, что начальное приближение x_0 близко к корню (рис. 2.5). Проведем в точке $\{x_0; f(x_0)\}$ касательную к графику функции $f(x)$ и найдем пересечение касательной с осью абсцисс (точка x_1).

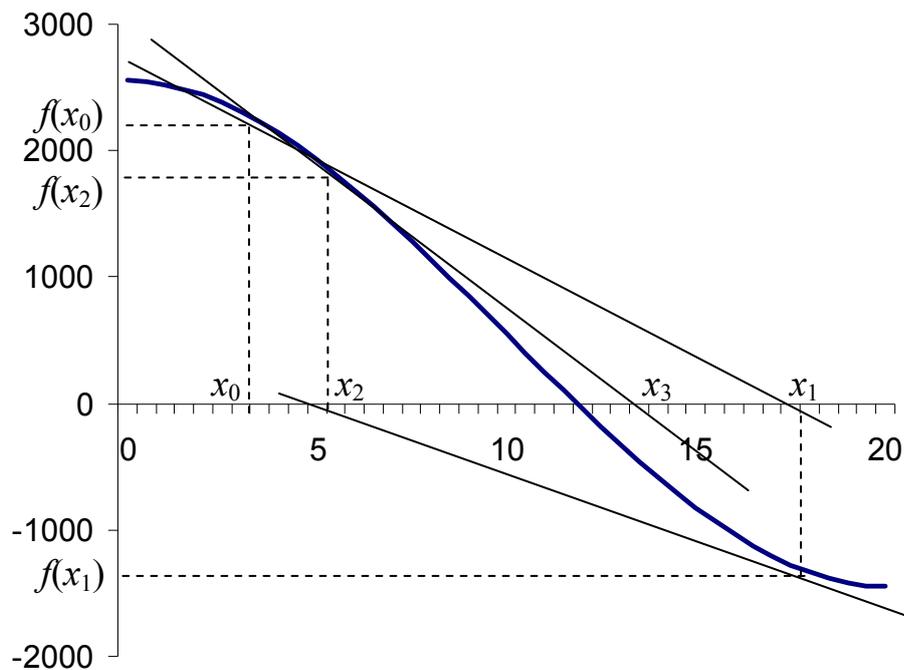


Рис. 2.5. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона

Уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Координата точки пересечения касательной с осью абсцисс определяется по формулам

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

В точке x_1 вычисляется значение функции $f(x_1)$. Если это значение по модулю меньше погрешности вычислений ε , то точка x_1 является приближенным решением уравнения $f(x) = 0$. В противном случае вычисляют точки x_2, x_3, x_4, \dots

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}.$$

Каждая последующая точка x_i находится исходя из предыдущей точки x_{i-1} по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}.$$

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$;
- начальное приближение x_0 ;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Последовательность решения уравнения.

Шаг 1. Вычислить точку пересечения касательной с осью абсцисс.

Шаг 2. Вычислить значение функции $f(x_i)$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(x_i)| < \varepsilon$. Если оно истинно, то x_i является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то перейти к шагу 1.

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, методом Ньютона приведен в таблице 2.3. В качестве начального приближения использовалось значение $x_0 = 5$.

Как видно из таблицы 2.3, всего за 4 итерации достигнуто условие $|f(c)| < 0,000001$. Это показывает, что метод Ньютона обладает лучшей сходимостью по сравнению с методами половинного деления или хорд. В этом его преимущество.

Таблица 2.3. Процесс нахождения корня уравнения методом Ньютона

Номер итерации	x	$f(x)$	$f'(x)$	$ f(x) $	$\lg(f(x))$
0	5,000000	1927,000000	-225,000000	1927,000000	3,284882
1	13,564444	-472,046125	-261,884207	472,046125	2,673984
2	11,761945	28,886356	-290,686649	28,886356	1,460693
3	11,861318	0,053179	-289,606487	0,053179	-1,274262
4	11,861502	0,000000	-289,604436	0,000000	-6,725185

К недостаткам метода можно отнести следующие моменты [3]:

- для вычисления очередного приближения необходимо определять значения двух функций $f(x)$ и $f'(x)$, а не одной, как в методах половинного деления и хорд;

- не всегда можно найти корень уравнения, так как итерационный процесс может быть расходящимся. Пример: решение уравнения $xe^{-x} = 0$ при $x_0 = 2$;

- возможность получения ошибки «деление на ноль» в итерационном процессе. Например, если в рассматриваемом примере значение начального приближения выбрать $x_0 = 20$, то значение производной $f'(x_0) = 3 \cdot 20^2 - 60 \cdot 20 = 0$. При нахождении значения x_1 программа может аварийно завершить работу;

- возможность закливания итерационного процесса. Например, если при решении уравнения $f(x) = x^3 - 12x + 12\sqrt{6} = 0$ значением начального приближения выбрать $x_0 = \sqrt{6}$, то значение x_1 получится равным нулю:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \sqrt{6} - \frac{(\sqrt{6})^3 - 12\sqrt{6} + 12\sqrt{6}}{3(\sqrt{6})^2 - 12} = \\ &= \sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}}{18 - 12} = \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0. \end{aligned}$$

При вычислении значения x_2 получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 - \frac{0^3 - 12 \cdot 0 + 12\sqrt{6}}{3 \cdot 0^2 - 12} = 0 - \frac{12\sqrt{6}}{-12} = 0 + \sqrt{6} = \sqrt{6}.$$

В данном случае итерационный процесс заклился.

2.4. Модифицированный метод Ньютона

Модифицированный метод Ньютона отличается от основного тем, что касательные проводятся под одним и тем же углом. Угол наклона касательной определяют в точке начального приближения x_0 . Процесс решения уравнения модифицированным методом Ньютона показан на рис. 2.6.

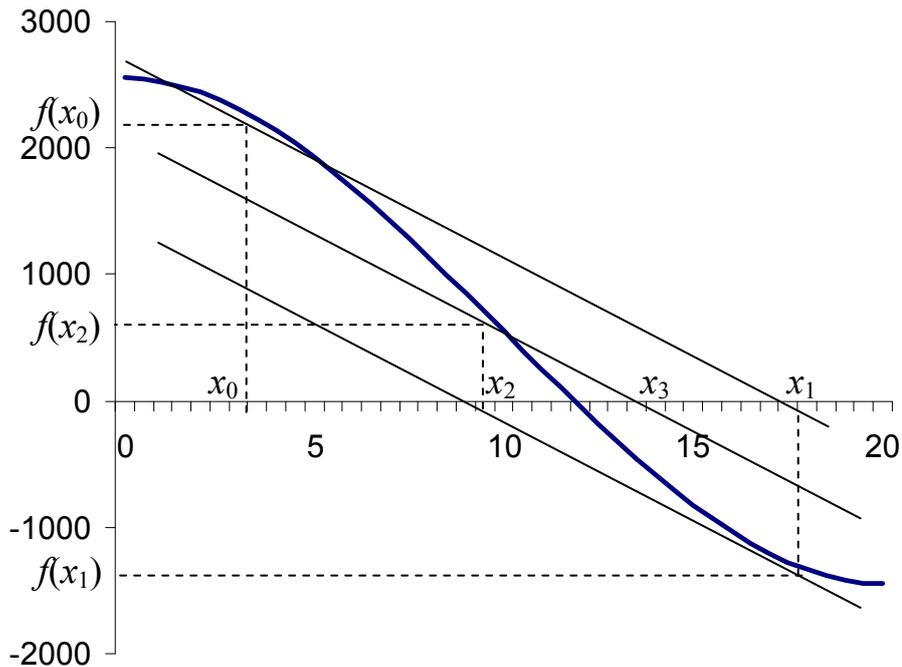


Рис. 2.6. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ модифицированным методом Ньютона

Каждая последующая точка x_i находится исходя из предыдущей точки x_{i-1} по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_0)}.$$

Значение производной функции в начальной точке можно присвоить переменной, чтобы постоянно не вычислять в цикле.

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$;
- начальное приближение x_0 ;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Последовательность решения уравнения.

Шаг 1. Вычислить точку $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_0)}$.

Шаг 2. Вычислить значение функции $f(x_i)$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(x_i)| < \varepsilon$. Если оно истинно, то x_i является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то перейти к шагу 1.

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, модифицированным методом Ньютона приведен в таблице 2.4. В качестве начального приближения использовалось значение $x_0 = 5$.

Таблица 2.4. Процесс нахождения корня уравнения модифицированным методом Ньютона

Номер итерации	x	$f(x)$	$f'(x_0)$	$ f(x) $	$\lg(f(x))$
0	5	1927	-225	1927	3,28488
1	13,56444	-472,046	-225	472,05	2,67398
2	11,46646	115,215	-225	115,22	2,06151
3	11,97853	-33,8136	-225	33,814	1,52909
4	11,82825	9,63698	-225	9,637	0,98394
5	11,87108	-2,7727	-225	2,7727	0,4429
6	11,85875	0,79566	-225	0,7957	-0,09927
7	11,86229	-0,2285	-225	0,2285	-0,64112
8	11,86127	0,06561	-225	0,0656	-1,18306
9	11,86157	-0,01884	-225	0,0188	-1,72498
10	11,86148	0,00541	-225	0,0054	-2,2669
11	11,86151	-0,00155	-225	0,0016	-2,80882
12	11,8615	0,00045	-225	0,0004	-3,35074

Как видно из таблицы 2.4, модифицированный метод Ньютона обладает худшей сходимостью, чем основной. Условие $|f(c)| < 0,001$ достигнуто только за 12 итераций. Однако теперь в цикле вычислять нужно значение только одной функции. Следовательно, время выполнения одной итерации цикла стало меньше.

2.5. Метод секущих

Метод секущих похож на метод хорд. Он не требует, чтобы значения функции на концах интервала имели разные знаки. Через две начальные точки $\{x_0; f(x_0)\}$ и $\{x_1; f(x_1)\}$ проводят прямую и определяют ее пересечение с осью абсцисс x_2 . Если значение функции $f(x)$ в этой точке близко к нулю, то x_2 – решение уравнения. В противном случае проводят новую прямую (секущую) через точки $\{x_1; f(x_1)\}$ и $\{x_2; f(x_2)\}$. Процесс решения уравнения методом секущих показан на рис. 2.7.

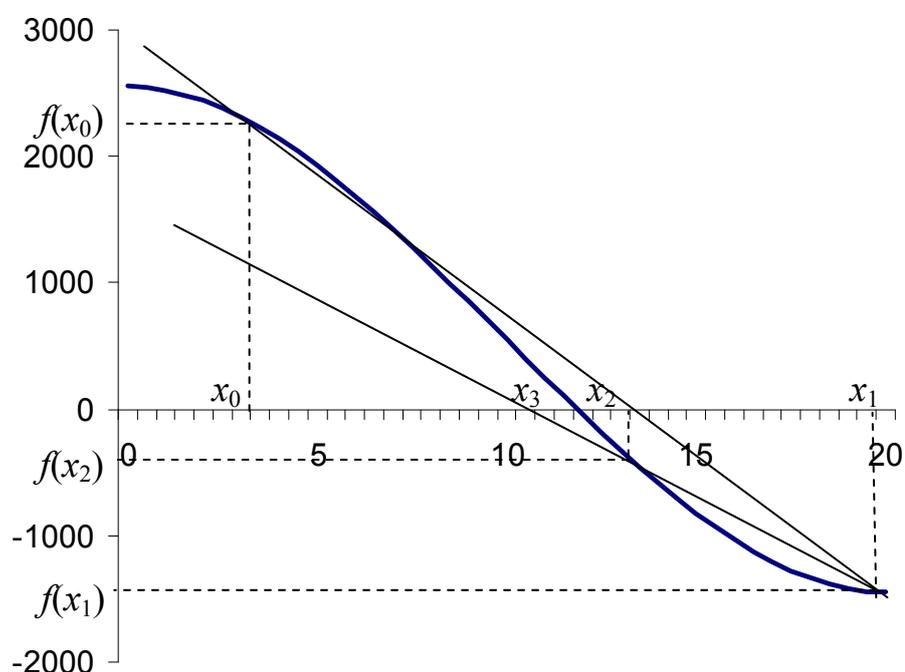


Рис. 2.7. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ методом секущих

Используя формулу, полученную в подразделе 2.2, получим, что каждая последующая точка x_{i+1} находится исходя из двух предыдущих точек x_i и x_{i-1} по формуле

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i).$$

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$;
- начальные приближения x_0 и x_1 ;

- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Последовательность решения уравнения.

Шаг 1. Вычислить точку $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$.

Шаг 2. Вычислить значение функции $f(x_{i+1})$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(x_{i+1})| < \varepsilon$. Если оно истинно, то x_{i+1} является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то выполнить присвоения $x_{i-1} = x_i$, $x_i = x_{i+1}$ и перейти к шагу 1.

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, методом секущих приведен в таблице 2.5. В качестве начальных приближений использовались значения $x_0 = 5$, $x_1 = 5$.

Таблица 2.5. Процесс нахождения корня уравнения методом секущих

Номер итерации	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$ f(x_2) $	$\lg(f(x_2))$
1	0	20	12,76	2552	-1448	-254,98	254,98	2,4065
2	20	12,76	11,213	-1448	-254,975	189,99	189,99	2,2787
3	12,76	11,213	11,873	-254,98	189,987	-3,4246	3,4246	0,5346
4	11,213	11,873	11,862	189,987	-3,42459	-0,0376	0,0376	-1,425
5	11,873	11,862	11,862	-3,4246	-0,03756	9E-06	9E-06	-5,066
6	11,862	11,862	11,862	-0,0376	8,6E-06	-2E-11	2E-11	-10,69

Как видно из таблицы 2.5, за 5 итераций достигнуто условие $|f(x)| < 0,00001$.

При численном решении уравнения методом секущих существует опасность получения расходящейся итерационной последовательности, закливания программы, аварийного завершения с ошибкой «деление на ноль».

2.6. Метод Мюллера

Метод Мюллера был предложен в 1956 году и является развитием метода секущих. При нахождении корней уравнения $f(x) = 0$ методом Мюллера [3] на каждом шаге итерационной процедуры используются три точки $\{x_0; f(x_0)\}$, $\{x_1; f(x_1)\}$ и $\{x_2; f(x_2)\}$ для построения параболы, проходящей через эти точки, и определяют ее пересечение с осью абсцисс x_3 . Процесс решения уравнения методом Мюллера показан на рис. 2.8.

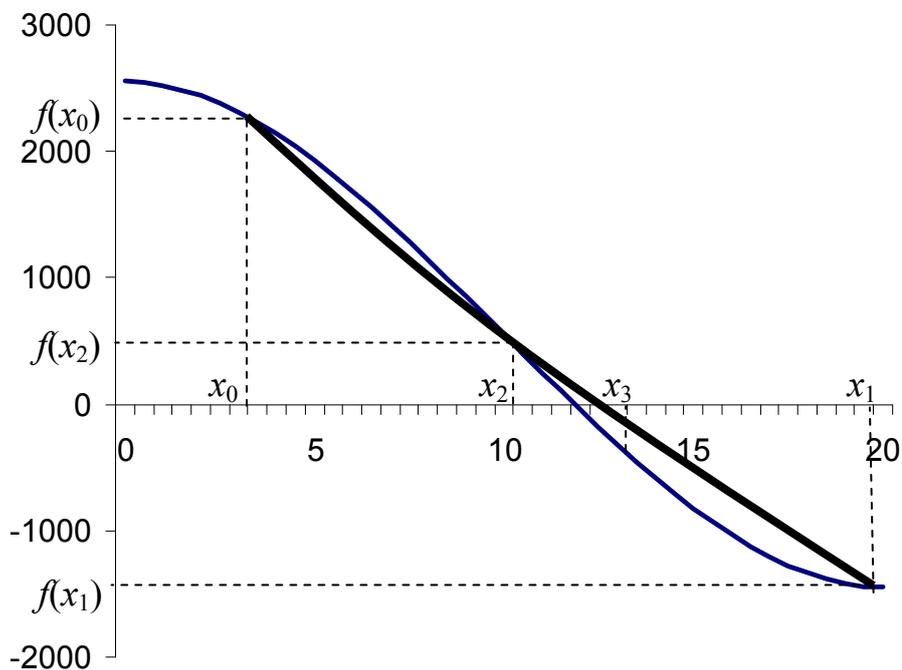


Рис. 2.8. Процесс решения уравнения $f(x) = 0$ методом Мюллера

Уравнение параболы, проходящей через точки $\{x_k; f(x_k)\}$, $\{x_{k-1}; f(x_{k-1})\}$ и $\{x_{k-2}; f(x_{k-2})\}$, можно записать в виде

$$y = f(x_k) + (x - x_k)f[x_k; x_{k-1}] + (x - x_k)(x - x_{k-1})f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}],$$

где $f[x_k; x_{k-1}]$ и $f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}]$ — разделенные разности, вычисляемые по формулам

$$f[x_k; x_{k-1}] = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k},$$

$$f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}] = \frac{f[x_{k-1}; x_{k-2}] - f[x_k; x_{k-1}]}{x_{k-2} - x_k} =$$

$$= \frac{\frac{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})}{x_{k-2} - x_{k-1}} - \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k}}{x_{k-2} - x_k}.$$

Уравнение параболы можно переписать в виде

$$y = f(x_k) + (x - x_k)\omega + (x - x_k)^2 f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}],$$

где $\omega = f[x_k; x_{k-1}] + f[x_k; x_{k-2}] - f[x_{k-1}; x_{k-2}]$.

Итерационная формула имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}]}}.$$

В этой формуле знак выбирается таким образом, чтобы знаменатель был больше по абсолютной величине. Если $\omega < 0$, берется знак «минус», в противном случае – «плюс».

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $f(x)$;
- начальные приближения x_0, x_1 и x_2 ;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Приведем последовательность шагов решения уравнения.

Шаг 1. Вычислить точку

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f[x_k; x_{k-1}; x_{k-2}]}}.$$

Шаг 2. Вычислить значение функции $f(x_{k+1})$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$. Если оно истинно, то x_{k+1} является решением уравнения $f(x) = 0$. Если условие ложно, то выполнить присвоения $x_{k-2} = x_{k-1}$, $x_{k-1} = x_k$, $x_k = x_{k+1}$ и перейти к шагу 1.

Процесс нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, методом Мюллера приведен в табли-

це 2.6. В качестве начальных приближений использовались значения $x_0 = 10$, $x_1 = 20$, $x_2 = 3$.

Таблица 2.6. Процесс нахождения корня уравнения методом Мюллера

Номер итерации	x_k	x_{k-1}	x_{k-2}	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lg(f(x_{k+1}))$
1	10,000000	20	3	12,400136	-154,214	2,18813
2	12,400136	10	20	11,816941	12,91586	1,11112
3	11,816941	12,4	10	11,861629	-0,03703	-1,4314
4	11,861629	11,8	12,4	11,861501	0,000006	-5,2326
5	11,861501	11,9	11,8	11,861502	0,000000	-9,4123

Метод Мюллера обладает высокой сходимостью. За 4 итерации достигнуто условие $|f(x)| < 10^{-5}$. По скорости нахождения решения данный метод уступает только методу Ньютона.

При численном решении уравнения методом Мюллера существует опасность получения расходящейся итерационной последовательности, закливания программы, аварийного завершения с ошибкой «деление на ноль». Кроме того, приближение x_{k+1} может оказаться комплексным числом. В этом случае мнимая часть будет иметь малое значение и ее можно принудительно приравнять нулю.

2.7. Метод итераций

При нахождении корней уравнения $f(x) = 0$ методом итераций решают другое уравнение $x = g(x)$. Функция $g(x)$ связана каким-либо соотношением с функцией $f(x)$. Например, если $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, то $g(x)$ может выразить как $g(x) = \sqrt{\frac{2552}{30-x}}$ или $g(x) = \sqrt[3]{30x^2 - 2552}$.

Уравнение $x = g(x)$ удобно для организации итераций, его решение одновременно будет решением уравнения $f(x) = 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения уравнения $x = g(x)$ методом итераций (рис. 2.9, 2.10).

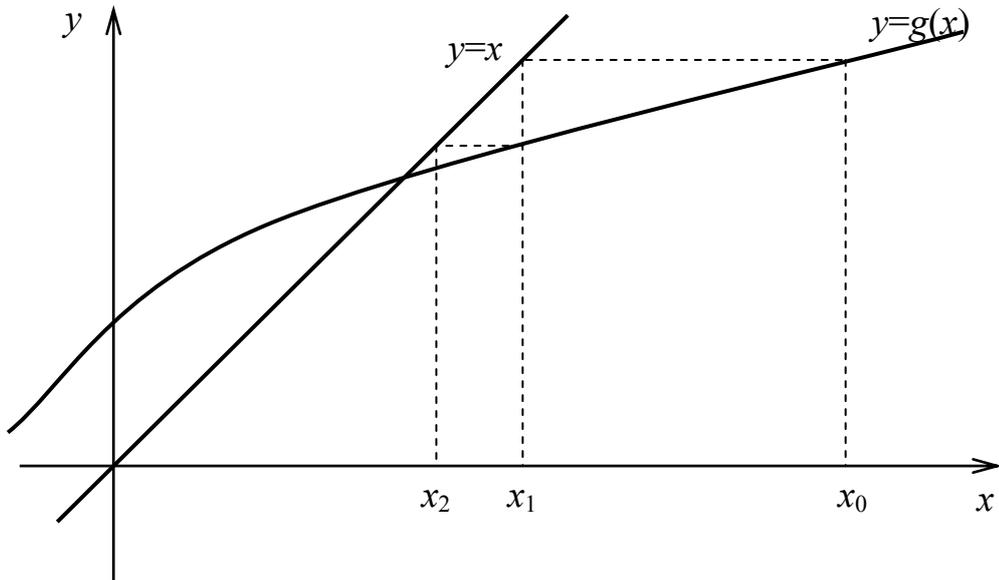


Рис. 2.9. Процесс решения уравнения $x = g(x)$ методом итераций (монотонная сходимость)

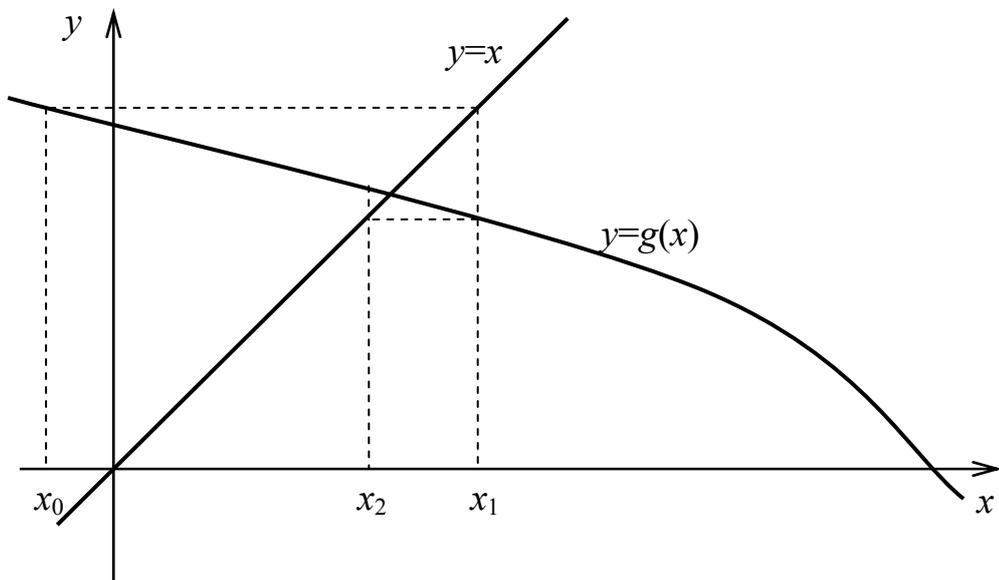


Рис. 2.10. Процесс решения уравнения $x = g(x)$ методом итераций (колеблющаяся сходимость)

Построим на плоскости графики функций $y = x$ и $y = g(x)$. Вычислим в точке начального приближения x_0 значение функции $g(x_0)$. Присвоим это значение $x_1 = g(x_0)$. Если $|x_1 - x_0|$ меньше выбранной погрешности вычислений, то x_1 является

искомым корнем. В противном случае вычисления повторяются. Последовательность значений x_2, x_3, x_4, \dots определяют по следующим соотношениям: $x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), x_4 = g(x_3), \dots$

Каждая последующая точка x_i находится исходя из предыдущей точки x_{i-1} по формуле

$$x_i = g(x_{i-1}).$$

Исходные данные для решения уравнения:

- функция $g(x)$ или $f(x)$;
- начальное приближение x_0 ;
- погрешность вычислений ε ;
- максимальное число итераций N .

Последовательность шагов решения уравнения.

Шаг 1. Вычислить точку $x_i = g(x_{i-1})$.

Шаг 2. Вычислить значение $|x_i - x_{i-1}|$.

Шаг 3. Выполнить сравнение $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$. Если оно истинно, то x_i является решением уравнения $x = g(x)$ или $f(x) = 0$. Если условие ложно, то перейти к шагу 1.

Итерационный процесс решения уравнения $x = g(x)$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Условием сходимости является выполнение в окрестности корня уравнения неравенства

$$|g'(x)| < 1,$$

где $g'(x)$ – производная от функции $g(x)$.

При $0 < g'(x) < 1$ имеет место монотонная сходимость (см. рис. 2.9), при $-1 < g'(x) < 0$ – колеблющаяся сходимость (см. рис. 2.10). Если $|g'(x)| > 1$, то итерационный процесс является расходящимся: при $g'(x) > 1$ имеет место монотонное расхождение (рис. 2.11), при $g'(x) < -1$ – расходящиеся колебания (рис. 2.12).

Процесс нахождения корня уравнения методом простых итераций приведен в таблице 2.7. Вместо решения уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$, решалось уравнение

$x = g(x)$, где $g(x) = \sqrt{\frac{2552}{30-x}}$. В качестве начального приближения использовалось значения $x_0 = 5$.

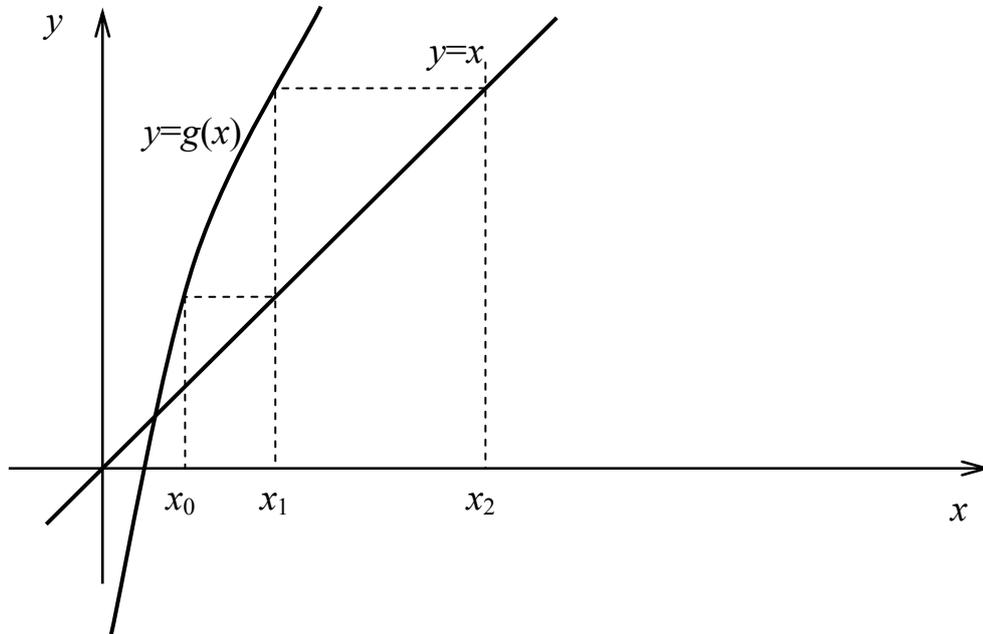


Рис. 2.11. Процесс решения уравнения $x = g(x)$ методом итераций (монотонное расхождение)

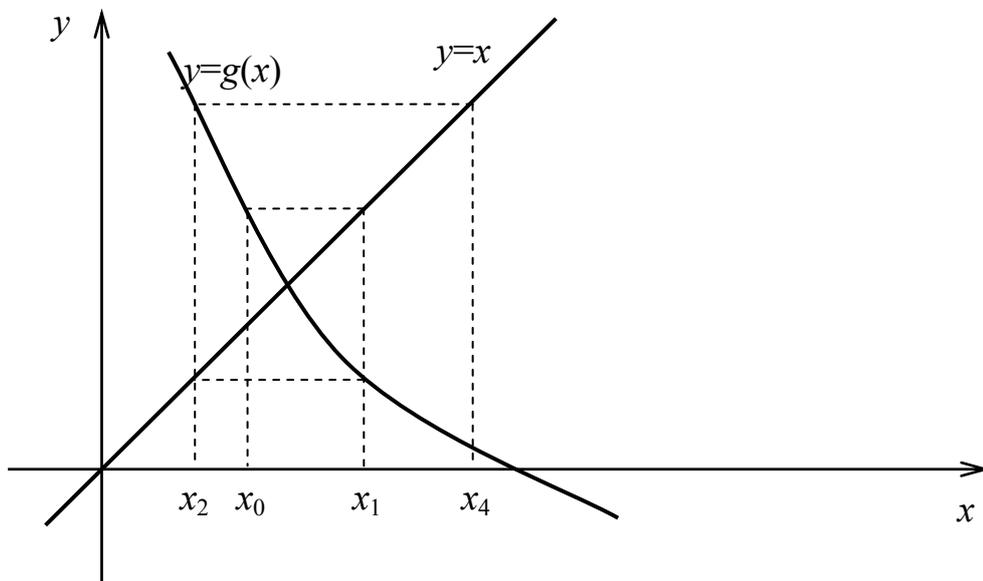


Рис. 2.12. Процесс решения уравнения $x = g(x)$ методом итераций (расходящиеся колебания)

Таблица 2.7. Процесс нахождения корня уравнения методом итераций

Номер итерации	x_i	$x_i - x_{i-1}$	$ x_i $	$\lg(x_i)$
0	5			
1	10,103	5,1034648	5,10346	0,7079
2	11,325	1,2218846	1,22188	0,087
3	11,69	0,3646394	0,36464	-0,4381
4	11,806	0,1158278	0,11583	-0,9362
5	11,843	0,0375195	0,03752	-1,4257
6	11,856	0,0122304	0,01223	-1,9126
7	11,86	0,003995	0,00399	-2,3985
8	11,861	0,0013058	0,00131	-2,8841
9	11,861	0,0004269	0,00043	-3,3697
10	11,861	0,0001396	0,00014	-3,8552
11	11,861	4,564E-05	4,6E-05	-4,3407

Как видно из таблицы, метод итераций обладает невысокой сходимостью. Только за 9 итераций достигнуто условие $|f(x)| < 10^{-3}$. Достоинством этого метода является способность решать не только отдельные уравнения, но и системы уравнений (раздел 3 данного пособия).

2.8. Эффективность численных методов решения уравнений

Для сравнения различных методов численного решения уравнения необходимо ввести количественную меру, которая покажет эффективность процесса поиска корня.

Скорость сходимости является основной характеристикой численных методов решения уравнений.

Предположим, что последовательность $\{p_n\}$ сходится к p и обозначим $E_n = p - p_n$ для $n \geq 0$. Если существуют такие две положительные константы $A \neq 0$ и $R > 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|p - p_n|^R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^R} = A,$$

то говорят, что последовательность сходится к p с порядком сходимости R .

Если $R = 1$, то сходимость называется **линейной**.

Если $R = 2$, то сходимость называется **квадратичной**.

Из всех рассмотренных методов наивысшей скоростью обладает метод Ньютона, у него $R = 2$. Далее следуют метод Мюллера ($R = 1,84$) и метод секущих ($R = 1,62$). Остальные методы имеют более низкую скорость. На рис. 2.13 показана зависимость $\lg |f(x_i)|$ от количества итераций для различных методов численного решения уравнений.

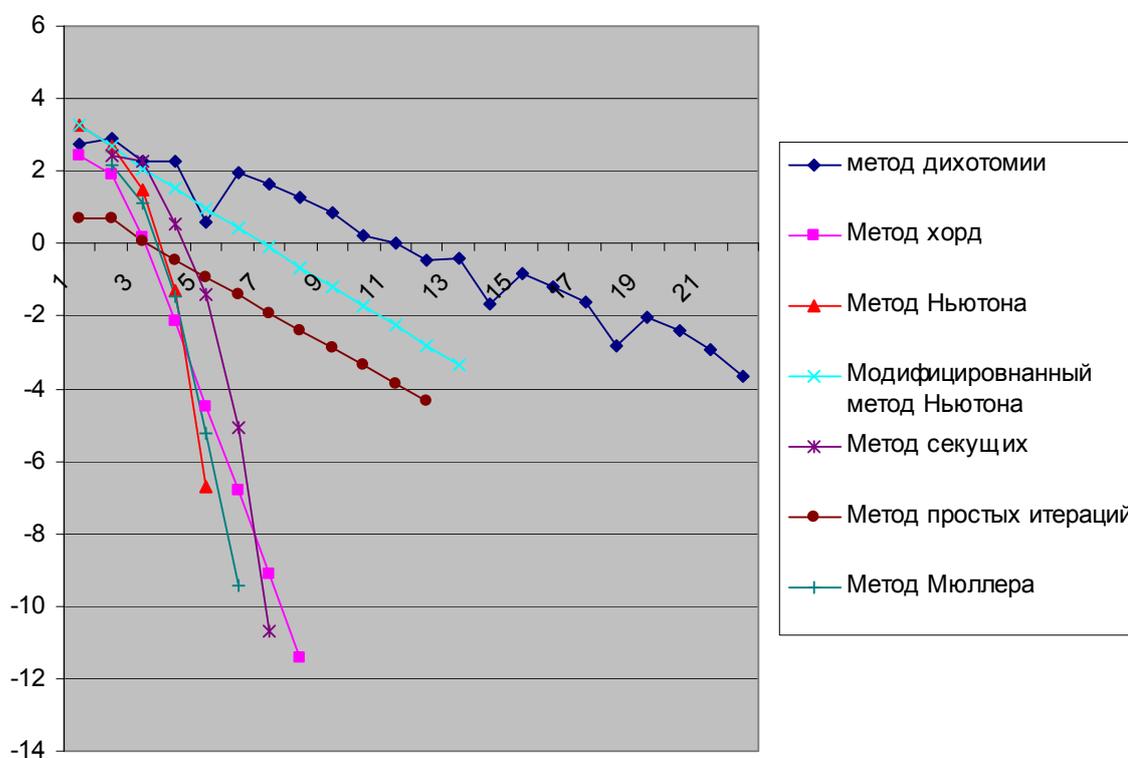


Рис. 2.13 Зависимость $\lg |f(x_i)|$ от количества итераций

2.9. Вопросы и упражнения

1. Назовите причины появления численных методов решения уравнений.

2. Какая количественная оценка используется при сравнении различных методов численного решения уравнений?

3. Определите значение корня уравнения $5x^2 - 8x + 3 = 0$ на интервале $[0,75; 2,25]$, найденного методом половинного деления

с точностью $\varepsilon = 0,1$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления?

4. Определите значение корня уравнения $9x^2 - 11x + 2 = 0$ на интервале $[0,75; 2,25]$, найденного методом хорд с точностью $\varepsilon = 0,1$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления?

5. Определите значение корня уравнения $4x^2 - 9x + 5 = 0$, найденного методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0,1$. Точка начального приближения $x_0 = 2$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления?

6. Определите значение корня уравнения $3x^2 - 11x + 8 = 0$, найденного модифицированным методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0,1$. Точка начального приближения $x_0 = 2$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления?

7. Определите значение корня уравнения $2x^2 - 13x + 11 = 0$, найденного методом секущих с точностью $\varepsilon = 0,1$. Точки начального приближения $x_0 = 0,75$, $x_1 = 2$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления?

8. Проведите сравнительный анализ методов половинного деления и хорд.

9. Проведите сравнительный анализ метода Ньютона и метода секущих.

10. Назовите условие сходимости метода простых итераций.

3. Решение систем уравнений

Совокупность уравнений, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим уравнениям, называется **системой уравнений**:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_M) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_M) = 0, \\ \vdots \\ F_N(x_1, x_2, \dots, x_M) = 0. \end{cases}$$

Значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем уравнениям системы, называют **решением системы**.

Наиболее проработанными являются методы решения систем линейных уравнений. Существуют аналитические методы решения систем линейных уравнений: метод Крамера, метод Гаусса. Кроме аналитических способов, существуют численные методы, например методы итераций Якоби, Гаусса – Зейделя.

3.1. Метод Крамера

Пусть дана система из N линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2, \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases}$$

Согласно методу Крамера решение находится через определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$; $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ для $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_N & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & b_N & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & b_N \end{vmatrix}.$$

Для поиска значений определителей $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ используется формула

$$|A| = \sum_{j=1}^N a_{ij} A_{ij},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение к a_{ij} ; M_{ij} – определитель подматрицы A размера $(N-1) \times (N-1)$, полученной путем удаления i -й строки и j -го столбца в матрице A .

Для $N=2$ определитель матрицы A находится по формуле $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Пример. Решить систему уравнений [3]

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7, \\ 4x - 8y + z = -21, \\ -2x + y + 5z = 15. \end{cases}$$

Находим определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \cdot (-8 \cdot 5 - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (4 \cdot 5 - (-2) \cdot 1) + 1 \cdot (4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-8)) = \\ &= 4 \cdot (-41) + 1 \cdot 22 + 1 \cdot (-12) = -164 + 22 - 12 = -154; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -21 & -8 & 1 \\ 15 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -21 & 1 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -21 & -8 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 7 \cdot (-8 \cdot 5 - 1 \cdot 1) + 1 \cdot (-21 \cdot 5 - 15 \cdot 1) + 1 \cdot (-21 \cdot 1 - 15 \cdot (-8)) = \\ &= 7 \cdot (-41) + 1 \cdot (-120) + 1 \cdot 99 = -287 - 120 + 99 = -308; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 4 & -21 & 1 \\ -2 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -21 & 1 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -21 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-21 \cdot 5 - 15 \cdot 1) - 7 \cdot (4 \cdot 5 - (-2) \cdot 1) + 1 \cdot (4 \cdot 15 - (-2) \cdot (-21)) =$$

$$= 4 \cdot (-120) - 7 \cdot 22 + 1 \cdot 18 = -480 - 154 + 18 = -616;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 4 & -8 & -21 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -21 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -21 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-8 \cdot 15 - (-21) \cdot 1) + 1 \cdot (4 \cdot 15 - (-2) \cdot (-21)) + 7 \cdot (4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-8)) =$$

$$= 4 \cdot (-99) + 1 \cdot 18 + 7 \cdot (-12) = -396 + 18 - 84 = -462.$$

Тогда решением системы являются значения

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-308}{-154} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-616}{-154} = 4, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-462}{-154} = 3.$$

Задача решена.

3.2. Метод Гаусса

При решении системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2, \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

методом Гаусса составляется расширенная матрица $[A | B]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & b_N \end{array} \right].$$

С помощью ряда элементарных операций – перестановки, масштабирования и замещения – добиваются нулевых значений под элементами главной диагонали. Расширенная матрица принимает вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN}^{(N)} & b_N^{(N)} \end{array} \right].$$

Используя алгоритм обратной подстановки, получим решение системы:

$$x_N = \frac{b_N^{(N)}}{a_{NN}^{(N)}}, \quad x_{N-1} = \frac{b_{N-1}^{(N-1)} - x_N \cdot a_{(N-1)N}^{(N)}}{a_{(N-1)(N-1)}^{(N-1)}} \dots$$

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса [3]:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13, \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 28, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Расширенная матрица имеет вид

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Первая строка используется для получения нулей под главной диагональю в первом столбце. Для этого из второй строки вычитается первая строка с множителем 2, из третьей строки вычитается первая строка с множителем 4, из четвертой строки вычитается первая строка с множителем (-3). В результате расширенная матрица принимает вид

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array} \right].$$

Вторая строка используется для получения нулей под главной диагональю во втором столбце. Для этого из третьей строки вычитается вторая строка с множителем 1,5; из четвертой строки вычитается вторая строка с множителем $(-7/4)$. В результате расширенная матрица принимает вид

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 9,5 & 5,25 & 48,5 \end{array} \right].$$

Вычтем из четвертой строки третью строку с множителем $(-1,9)$ и получим

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right].$$

Используя алгоритм обратной подстановки, получим

$$x_4 = \frac{-18}{-9} = 2, \quad x_3 = \frac{-35 - 2 \cdot (-7,5)}{-5} = \frac{-20}{-5} = 4,$$

$$x_2 = \frac{2 - 2 \cdot (-5) - 4 \cdot 2}{-4} = \frac{4}{-4} = -1,$$

$$x_1 = \frac{13 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2}{1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Поскольку компьютер использует арифметику с фиксированной точностью, то при выполнении арифметических операций каждый раз возникает небольшая ошибка. Эти ошибки могут накапливаться и привести к значительной погрешности в решении системы линейных уравнений.

Рассмотрим пример решения системы уравнений [3]. Предположим, что компьютер, решающий систему уравнений, использует арифметику с фиксированной точностью 4 десятичных разряда. По мере выполнения операций ошибка округления будет накапливаться. Это может привести к значительной ошибке итогового результата.

Значения $x_1 = x_2 = 1,000$ являются решениями системы

$$\begin{cases} 1,133x_1 + 5,281x_2 = 6,414, \\ 24,14x_1 - 1,210x_2 = 22,93. \end{cases}$$

Если решать эту систему методом Гаусса, то для получения нулевого значения под главной диагональю расширенной матрицы требуется из второй строки вычесть первую строку с множителем $\frac{24,14}{1,133} = 21,31$. Используем четыре знака в вычислениях:

$$a_{22}^{(2)} = -1,210 - 21,31 \cdot 5,281 = -1,210 - 112,5 = -113,7,$$

$$b_2^{(2)} = 22,93 - 21,31 \cdot 6,414 = 22,93 - 136,7 = -113,8.$$

Получается система уравнений

$$\begin{cases} 1,133x_1 + 5,281x_2 = 6,414, \\ -113,7x_2 = -113,8. \end{cases}$$

С помощью обратной подстановки получаем

$$x_2 = \frac{-113,8}{-113,7} = 1,001,$$

$$x_1 = \frac{6,414 - 5,281 \cdot 1,001}{1,133} = \frac{6,414 - 5,286}{1,133} = \frac{1,128}{1,133} = 0,9956.$$

Возникшая ошибка обусловлена значением коэффициента $\frac{24,14}{1,133} = 21,31$.

Теперь поменяем местами уравнения системы:

$$\begin{cases} 24,14x_1 - 1,210x_2 = 22,93, \\ 1,133x_1 + 5,281x_2 = 6,414. \end{cases}$$

Теперь множитель первой строки $\frac{1,133}{24,14} = 0,04693$. Новые коэффициенты:

$$a_{22}^{(2)} = 5,281 - 0,04693 \cdot (-1,210) = 5,281 + 0,05679 = 5,338,$$

$$b_2^{(2)} = 6,414 - 0,04693 \cdot 22,93 = 6,414 - 1,076 = 5,338.$$

Получается система уравнений

$$\begin{cases} 24,14x_1 - 1,210x_2 = 22,93, \\ 5,338x_2 = 5,338. \end{cases}$$

С помощью обратной подстановки получаем

$$x_2 = \frac{5,338}{5,338} = 1,000, \quad x_1 = \frac{22,93 + 1,210 \cdot 1,000}{24,14} = \frac{24,14}{24,14} = 1,000.$$

Таким образом, для уменьшения ошибок при решении системы уравнений требуется использовать при вычислении множителей наибольший по абсолютной величине элемент.

Значительные ошибки решения системы уравнений возможны в случае плохой обусловленности. Например, требуется решить систему, записанную в матричном виде: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Решение данной системы: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Матрица \mathbf{A} называется плохо обусловленной, если существует такая матрица \mathbf{B} , что при небольших возмущениях коэффициентов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} произойдут большие изменения в решении $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Плохая обусловленность имеет место в системах двух уравнений, когда две линии почти параллельны. Разберем еще один пример [3]. Рассмотрим два уравнения, графики которых приведены на рис. 3.1:

$$x + 2y - 2,00 = 0,$$

$$2x + 3y - 3,40 = 0.$$

Подстановка $x_0 = 1,00$ и $y_0 = 0,48$ в эти уравнения «почти приводит к нулям»:

$$1,00 + 2 \cdot 0,48 - 2,00 = 1,96 - 2,00 = -0,04 \approx 0,$$

$$2 \cdot 1,00 + 3 \cdot 0,48 - 3,40 = 3,44 - 3,40 = 0,04 \approx 0.$$

Расхождение с нулем составило $\pm 0,04$. Истинное решение этой линейной системы: $x = 0,8$ и $y = 0,6$.

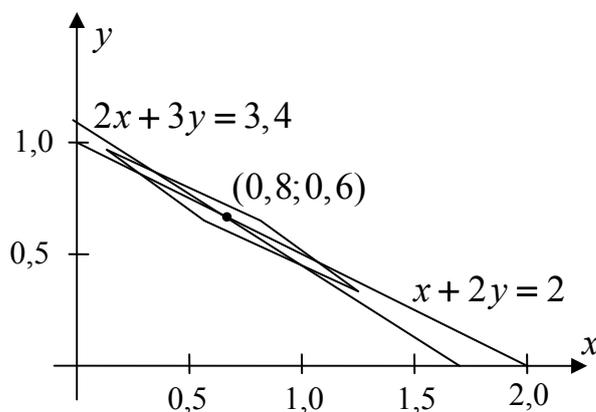


Рис. 3.1. Область, точки которой «почти удовлетворяют» обоим уравнениям

Ошибки приближенного и точного решений: $x - x_0 = 0,80 - 1,00 = -0,20$ и $y - y_0 = 0,60 - 0,48 = 0,12$. Таким образом, просто подстановка значений в систему уравнений не является надежным критерием точности. Ромбовидная область на рис. 3.1 представляет множество, точки которого «почти удовлетворяют» обоим уравнениям.

Плохая обусловленность имеет более сильные последствия, когда нужно решать несколько уравнений. Рассмотрим задачу нахождения кубического полинома $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$, который проходит через четыре точки с координатами: $(2; 8)$, $(3; 27)$, $(4; 64)$, $(5; 125)$ [3]. Очевидно, что $y = x^3$ – требуемый полином. При поиске коэффициентов полинома по методу наименьших квадратов требуется решить следующую линейную систему:

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}.$$

При вычислении значений коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4 использовался компьютер с девятью знаками точности. Были полу-

чены значения $c_1 = 1,000004$, $c_2 = -0,000038$, $c_3 = 0,000126$, $c_4 = -0,000131$.

Данные значения близки к истинному решению, но видно, что ошибка вычисления существует. Предположим, что коэффициент $a_{11} = 20514$ заменен значением 20515 и решается «возмущенная» система. Значения, полученные на таком же компьютере, $c_1 = 0,642857$, $c_2 = 3,750000$, $c_3 = -12,3928$, $c_4 = 12,7500$, не имеют ничего общего с правильным ответом. Для обнаружения плохой обусловленности системы требуется решить ее повторно со слабо возмущенными коэффициентами. Если повторный ответ существенно отличается от предыдущего, то присутствует плохая обусловленность системы уравнений.

3.3. Итеративный метод Якоби

Рассмотрим систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 4x - y + z = 7, \\ 4x - 8y + z = -21, \\ -2x + y + 5z = 15. \end{cases}$$

Их можно выразить в виде
$$\begin{cases} x = \frac{7 + y - z}{4}, \\ y = \frac{21 + 4x + z}{8}, \\ z = \frac{15 + 2x - y}{5}. \end{cases}$$

Это позволяет записать следующий итеративный процесс Якоби:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}, \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8}, \\ z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}. \end{cases}$$

Подставим начальное приближение $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ в правую часть каждого уравнения, чтобы получить новые значения $x_1 = 1,75$, $y_1 = 3,75$, $z_1 = 3$. Они ближе к истинным значениям (2; 4; 3). В таблице 3.1 показана сходимость итераций Якоби для данной системы линейных уравнений.

Таблица 3.1. Сходимость итераций Якоби

Номер итерации	x	y	z
0	1	2	2
1	1,75	3,375	3
2	1,84375	3,875	3,025
3	1,9625	3,925	2,9625
4	1,990625	3,9765625	3
5	1,994140625	3,9953125	3,0009375
6	1,99859375	3,9971875	2,99859375
7	1,999648438	3,999121094	3
8	1,999780273	3,999824219	3,000035156
9	1,999947266	3,999894531	2,999947266
10	1,999986816	3,999967041	3
11	1,99999176	3,999993408	3,000001318
12	1,999998022	3,999996045	2,999998022

Как видно из таблицы 3.1, за 10 итераций абсолютная погрешность корней уравнения не превышает 0,0001.

Метод Якоби работает не всегда. Возможно получение расходящейся итерационной последовательности точек.

3.4. Итеративный метод Гаусса – Зейделя

Итерационный процесс можно ускорить. Итеративный процесс Якоби производит три последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$. Кажется разумным, что x_{k+1} может быть использовано вместо x_k в формуле вычисления y_{k+1} . Аналогично x_{k+1} и y_{k+1} можно использовать в формуле для z_{k+1} вместо x_k и y_k . В результате этих замен получается итеративный процесс Гаусса – Зейделя:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}, \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{8}, \\ z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5}. \end{cases}$$

В таблице 3.2 показана его сходимость при решении системы уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7, \\ 4x - 8y + z = -21, \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases}$$

с начальными приближениями $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$.

Таблица 3.2. Сходимость итераций Гаусса – Зейделя

Номер итерации	x	y	z
0	1	2	2
1	1,75	3,375	3
2	1,84375	3,921875	2,953125
3	1,9921875	3,990234375	2,998828125
4	1,997851563	3,998779297	2,999384766
5	1,999848633	3,999847412	2,999969971
6	1,99996936	3,999980927	2,999991559
7	1,999997342	3,999997616	2,999999414
8	1,999999551	3,999999702	2,999999988
9	1,999999956	3,999999963	2,999999999
10	1,999999993	3,999999995	2,999999998
11	1,999999999	3,999999999	3
12	2	4	3

3.5. Вопросы и упражнения

1. При решении каких систем уравнений численные методы не имеют альтернативы?

2. Чем обусловлена более высокая сходимость метода Гаусса – Зейделя по сравнению с методом Якоби?

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 9x + 9y - 6z = -3, \\ 9x + 8y - 2z = -37, \\ -3x - 8y + 3z = -36 \end{cases}$$
 методом

Гаусса.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 7, \\ 2x + 5y + z = -3, \\ x + 3y + 7z = 4 \end{cases}$$
 методом

Якоби. В качестве начального приближения даны значения: $x_0 = 2, y_0 = 0, z_0 = 2$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 7, \\ 2x + 5y + z = -3, \\ x + 3y + 7z = 4 \end{cases}$$
 методом Га-

усса – Зейделя. В качестве начального приближения даны значения: $x_0 = 2, y_0 = 0, z_0 = 2$.

4. Численное интегрирование

Задача численного интегрирования сводится к нахождению численного значения I :

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Численное интегрирование является основным методом, используемым инженерами и учеными для получения приближенного ответа при решении определенных интегралов, которые нельзя вычислить аналитически. Например, функцию $\Phi(x)$, являющуюся решением интеграла $\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$, нельзя записать

в элементарных функциях [3]. Для получения значения $\Phi(6)$ необходимо использовать численное интегрирование. Площадь криволинейной трапеции (рис. 4.1) равно значению $\Phi(6)$.

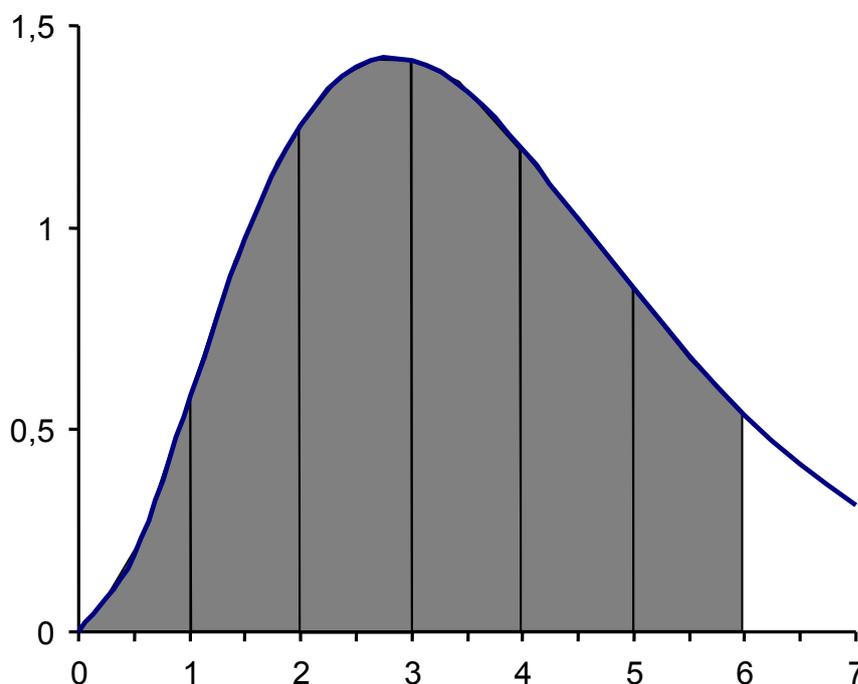


Рис. 4.1. Площадь под кривой $y = \frac{t^3}{e^t - 1}$ при $0 \leq t \leq 6$

Численное интегрирование основано на аппроксимации подынтегральной функции другой функцией, для которой существует аналитическое решение определенного интеграла.

Аппроксимация – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным.

4.1. Метод прямоугольников

Численное интегрирование методом прямоугольников имеет три разновидности: метод левых прямоугольников, метод правых прямоугольников и метод центральных прямоугольников.

При вычислении интеграла методом левых прямоугольников криволинейная трапеция заменяется прямоугольниками, высота которых равна значениям функции в левых точках (рис. 4.2), основания всех прямоугольников равны:

$$h = \frac{b - a}{n},$$

где n – число интервалов разбиения отрезка $[a; b]$; a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования.

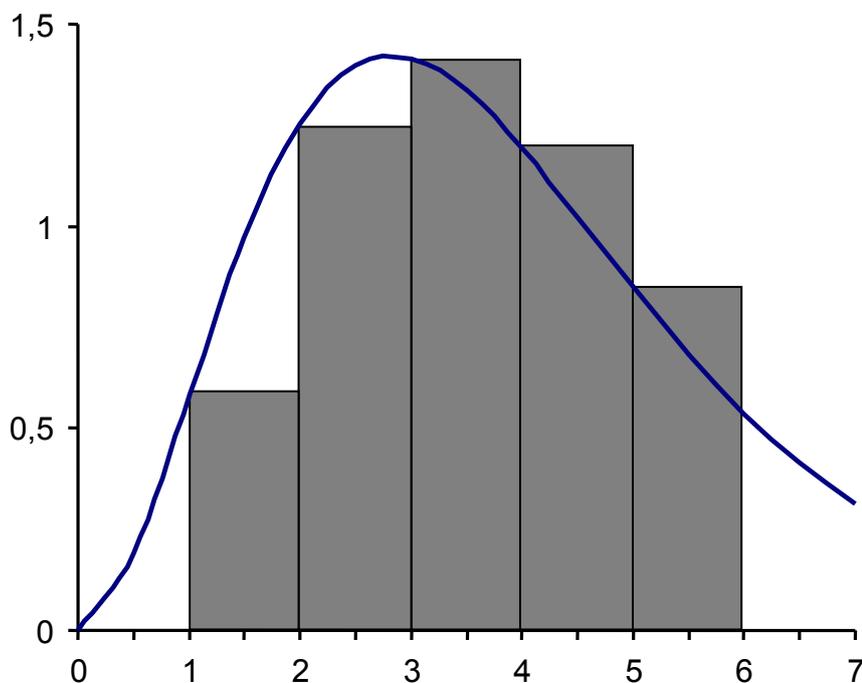


Рис. 4.2. Вычисление интеграла методом левых прямоугольников

Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Суммарная площадь прямоугольников

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.$$

Учитывая, что

$$S_1 = hf(a), S_2 = hf(a+h), S_3 = hf(a+2h),$$

$$S_4 = hf(a+3h), S_5 = hf(a+4h), S_6 = hf(a+5h)$$

и вынося h за скобки, получим

$$\begin{aligned} S_{\Sigma} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \\ &= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + hf(a+3h) + hf(a+4h) + hf(a+5h) = \\ &= h(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + f(a+4h) + f(a+5h)). \end{aligned}$$

В общем случае формула для решения интеграла методом левых прямоугольников имеет вид

$$I_{\text{ЛП}} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $a = 0$, $b = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Шаг интегрирования $h = \frac{6-0}{6} = 1$.

$$I_{\text{ЛП}} = 1 \cdot \left(\frac{0^3}{e^0 - 1} + \frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{e-1} + \frac{8}{e^2-1} + \frac{27}{e^3-1} + \frac{64}{e^4-1} + \frac{125}{e^5-1} = \\
&= 0,582 + 1,252 + 1,415 + 1,194 + 0,848 = 5,291.
\end{aligned}$$

При вычислении интеграла методом правых прямоугольников криволинейная трапеция заменяется прямоугольниками, высота которых равна значениям функции в правых точках (рис. 4.3), основания всех прямоугольников равны:

$$h = \frac{b-a}{n},$$

где n – число интервалов разбиения отрезка $[a; b]$; a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования.

Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Суммарная площадь прямоугольников

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.$$

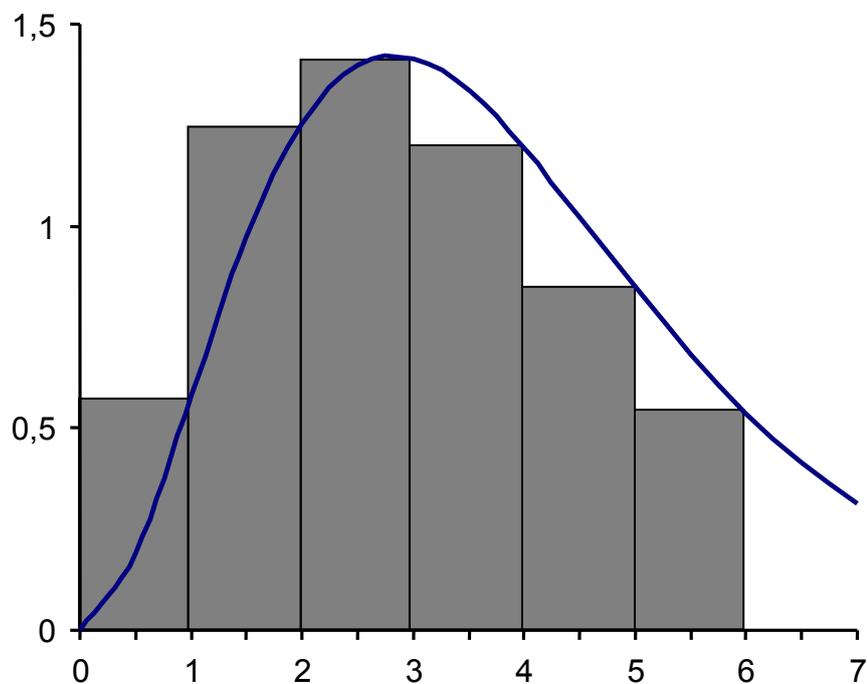


Рис. 4.3. Вычисление интеграла методом правых прямоугольников

Учитывая, что

$$S_1 = hf(a+h), S_2 = hf(a+2h), S_3 = hf(a+3h), \\ S_4 = hf(a+4h), S_5 = hf(a+5h), S_6 = hf(a+6h)$$

и вынося h за скобки, получим

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \\ = hf(a+h) + hf(a+2h) + hf(a+3h) + \\ + hf(a+4h) + hf(a+5h) + hf(a+6h) = \\ = h(f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \\ + f(a+4h) + f(a+5h) + f(a+6h)).$$

В общем случае формула для решения интеграла методом правых прямоугольников имеет вид

$$I_{\text{ПП}} = h \cdot \sum_{i=1}^n f(a+ih),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $a = 0$, $b = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Шаг интегрирования $h = \frac{6-0}{6} = 1$.

$$I_{\text{ПП}} = 1 \cdot \left(\frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} \right) = \\ = \frac{1}{e-1} + \frac{8}{e^2-1} + \frac{27}{e^3-1} + \frac{64}{e^4-1} + \frac{125}{e^5-1} + \frac{216}{e^6-1} = \\ = 0,582 + 1,252 + 1,415 + 1,194 + 0,848 + 0,537 = 5,828.$$

При вычислении интеграла методом центральных прямоугольников криволинейная трапеция заменяется прямоугольни-

ками, высота которых равна значениям функции в центрах интервалов (рис. 4.4). Основания всех прямоугольников

$$h = \frac{b - a}{n},$$

где n – число интервалов разбиения отрезка $[a; b]$; a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования.

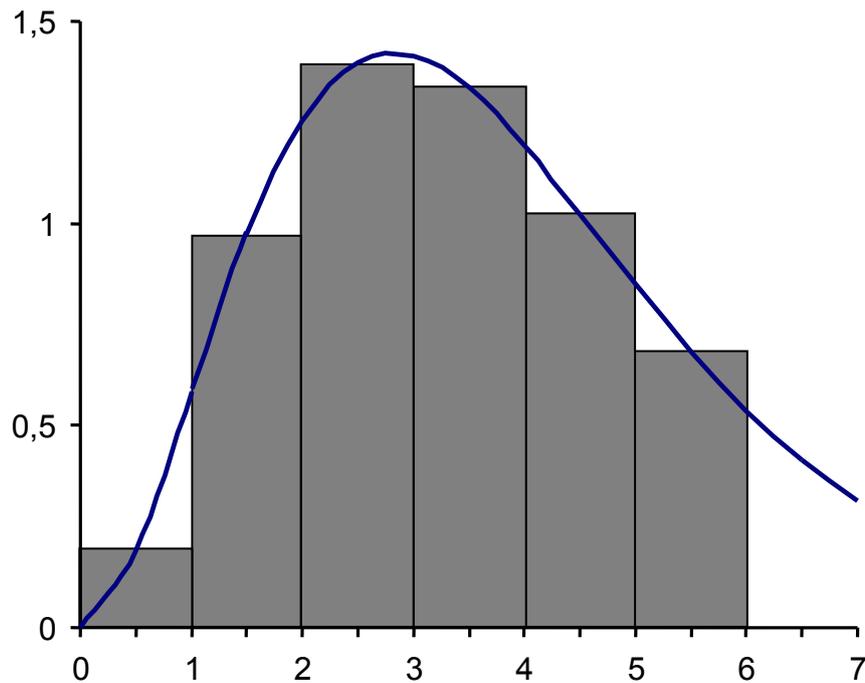


Рис. 4.4. Вычисление интеграла методом центральных прямоугольников

Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Суммарная площадь прямоугольников

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.$$

Учитывая, что

$$S_1 = hf\left(a + \frac{h}{2}\right), S_2 = hf\left(a + \frac{3h}{2}\right), S_3 = hf\left(a + \frac{5h}{2}\right),$$

$$S_4 = hf\left(a + \frac{7h}{2}\right), S_5 = hf\left(a + \frac{9h}{2}\right), S_6 = hf\left(a + \frac{11h}{2}\right)$$

и вынося h за скобки, получим

$$\begin{aligned}
 S_{\Sigma} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \\
 &= hf\left(a + \frac{h}{2}\right) + hf\left(a + \frac{3h}{2}\right) + hf\left(a + \frac{5h}{2}\right) + \\
 &+ hf\left(a + \frac{7h}{2}\right) + hf\left(a + \frac{9h}{2}\right) + hf\left(a + \frac{11h}{2}\right) = \\
 &= h\left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f\left(a + \frac{5h}{2}\right) + \right. \\
 &\left. + f\left(a + \frac{7h}{2}\right) + f\left(a + \frac{9h}{2}\right) + f\left(a + \frac{11h}{2}\right)\right].
 \end{aligned}$$

В общем случае формула для решения интеграла методом центральных прямоугольников имеет вид

$$I_{\text{ЦП}} = h \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(2i-1)h}{2}\right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $a = 0$, $b = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Шаг интегрирования $h = \frac{6-0}{6} = 1$.

$$\begin{aligned}
 I_{\text{ЦП}} &= 1 \cdot \left(\frac{0,5^3}{e^{0,5} - 1} + \frac{1,5^3}{e^{1,5} - 1} + \frac{2,5^3}{e^{2,5} - 1} + \frac{3,5^3}{e^{3,5} - 1} + \frac{4,5^3}{e^{4,5} - 1} + \frac{5,5^3}{e^{5,5} - 1} \right) = \\
 &= \frac{0,5^3}{e^{0,5} - 1} + \frac{1,5^3}{e^{1,5} - 1} + \frac{2,5^3}{e^{2,5} - 1} + \frac{3,5^3}{e^{3,5} - 1} + \frac{4,5^3}{e^{4,5} - 1} + \frac{5,5^3}{e^{5,5} - 1} = \\
 &= 0,193 + 0,969 + 1,397 + 1,335 + 1,024 + 0,683 = 5,601.
 \end{aligned}$$

4.2. Метод трапеций

При вычислении интеграла методом трапеций криволинейная трапеция аппроксимируется линейной функцией на каждом элементарном отрезке (рис. 4.5). Высоты всех трапеций определяются по формуле

$$h = \frac{b - a}{n},$$

где n – число интервалов разбиения отрезка $[a; b]$; a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования.

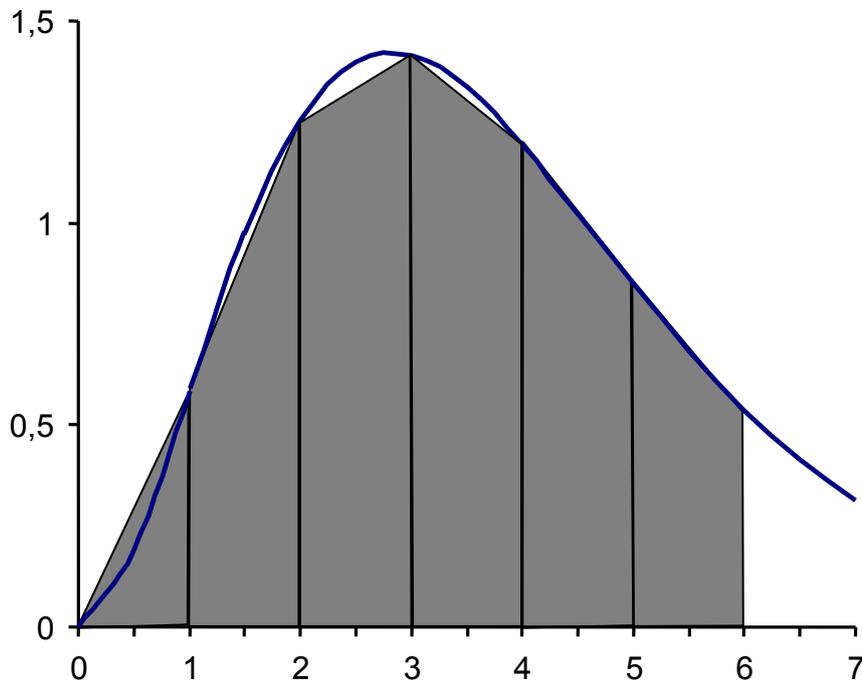


Рис. 4.5. Вычисление интеграла методом трапеций

Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Суммарная площадь трапеций

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.$$

Учитывая, что

$$S_1 = \frac{f(a) + f(a+h)}{2}h, \quad S_2 = \frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2}h,$$

$$S_3 = \frac{f(a+2h) + f(a+3h)}{2}h, \quad S_4 = \frac{f(a+3h) + f(a+4h)}{2}h,$$

$$S_5 = \frac{f(a+4h) + f(a+5h)}{2}h, \quad S_6 = \frac{f(a+5h) + f(b)}{2}h$$

и вынося $h/2$ за скобки, получим:

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$

$$= \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) +$$

$$+ 2f(a+3h) + 2f(a+4h) + 2f(a+5h) + f(b)].$$

В общем случае формула для решения интеграла методом трапеций имеет вид

$$I_{\text{Тр}} = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right],$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $a = 0$, $b = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Шаг интегрирования $h = \frac{6-0}{6} = 1$.

$$I_{\text{Тр}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{0^3}{e^0 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} + 2 \cdot \left(\frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} \right) \right] =$$

$$= 0,5 \cdot [0 + 0,537 + 2 \cdot 5,291] = 0,5 \cdot 11,119 = 5,559.$$

4.3. Метод парабол (Симпсона или Ньютона – Симпсона)

При вычислении интеграла методом парабол криволинейная трапеция заменяется квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$. Рассмотрим вычисление интеграла данной функции на элементарном отрезке $[x_0; x_2]$ (рис. 4.6).

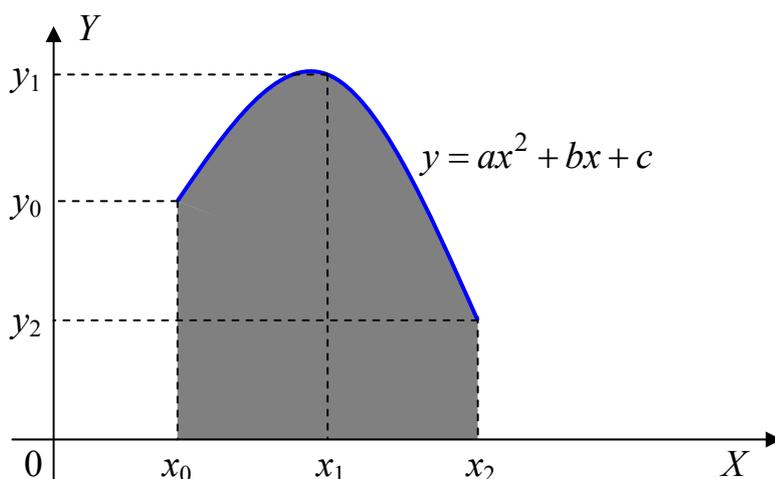


Рис. 4.6. Вычисление интеграла методом парабол

Значение интеграла $I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$ при аппроксимации функции

$f(x)$ квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$ может быть вычислено аналитически:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} [ax^2 + bx + c]dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \Big|_{x_0}^{x_2} =$$

$$= \frac{1}{3}ax_2^3 + \frac{1}{2}bx_2^2 + cx_2 - \frac{1}{3}ax_0^3 + \frac{1}{2}bx_0^2 + cx_0.$$

Введем обозначения:

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2}, \quad x_0 = x_1 - h, \quad x_2 = x_1 + h,$$

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$

Тогда значение интеграла определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{3}ax_2^3 + \frac{1}{2}bx_2^2 + cx_2 - \frac{1}{3}ax_0^3 + \frac{1}{2}bx_0^2 + cx_0 = \\
 &= \frac{a}{3}(x_1+h)^3 + \frac{b}{2}(x_1+h)^2 + c(x_1+h) - \frac{a}{3}(x_1-h)^3 + \frac{b}{2}(x_1-h)^2 + c(x_1-h) = \\
 &= \frac{a}{3}[(x_1+h)^3 - (x_1-h)^3] + \frac{b}{2}[(x_1+h)^2 - (x_1-h)^2] + c[(x_1+h) - (x_1-h)].
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $(x_1 + h) - (x_1 - h) = 2h$,

$$\begin{aligned}
 (x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2 &= [(x_1 + h) + (x_1 - h)][(x_1 + h) - (x_1 - h)] = 2x_1 \cdot 2h, \\
 (x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3 &= [(x_1 + h) - (x_1 - h)][(x_1 + h)^2 + (x_1 + h)(x_1 - h) + (x_1 - h)^2] = \\
 &= 2h[x_1^2 + 2hx_1 + h^2 + x_1^2 - h^2 + x_1^2 - 2hx_1 + h^2] = 2h[3x_1^2 + h^2],
 \end{aligned}$$

получим соотношение

$$I = 2h \left[\frac{a}{3}(3x_1^2 + h^2) + \frac{b}{2} \cdot 2x_1 + c \right].$$

Коэффициенты a, b, c определяются из условия прохождения параболы через три точки: $\{x_0; f(x_0)\}$, $\{x_1; f(x_1)\}$, $\{x_2; f(x_2)\}$. Через три точки можно провести одну параболу. Дана система уравнений

$$\begin{cases}
 ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\
 ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\
 ax_2^2 + bx_2 + c = y_2.
 \end{cases}$$

Найдем коэффициенты a, b, c по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Delta &= x_1(x_1 - h)^2 + (x_1 - h)(x_1 + h)^2 + x_1^2(x_1 + h) - \\ &\quad - x_1(x_1 + h)^2 - x_1^2(x_1 - h) - (x_1 - h)^2(x_1 + h) = \\ &= x_1^2 \cdot 2h + 2h(x_1^2 - h^2) - x_1^2 \cdot 4h = 2hx_1^2 + 2hx_1^2 - 2h^3 - 4hx_1^2 = -2h^3.\end{aligned}$$

По аналогии находятся другие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = -y_0h - y_2h + 2y_1h = -h(y_0 + y_2 - 2y_1),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0 & 1 \\ x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -4hx_1y_1 + 2hx_1y_0 + h^2y_0 + 2hx_1y_2 - h^2y_2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & y_0 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = h^2x_1(y_2 - y_0) - hx_1^2(y_2 + y_0) + 2hx_1^2y_1 - 2h^3y_1.$$

Тогда коэффициенты a , b , c определяются как

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-h(y_0 + y_2 - 2y_1)}{-2h^3} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2},$$

$$\begin{aligned}b &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4hx_1y_1 + 2hx_1y_0 + h^2y_0 + 2hx_1y_2 - h^2y_2}{-2h^3} = \\ &= \frac{4x_1y_1 - 2x_1(y_0 + y_2) + h(y_2 - y_0)}{2h^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{h^2x_1(y_2 - y_0) - hx_1^2(y_2 + y_0) + 2hx_1^2y_1 - 2h^3y_1}{-2h^3} = \\ &= \frac{-hx_1(y_2 - y_0) + x_1^2(y_2 + y_0) - 2x_1^2y_1 + 2h^2y_1}{2h^2}.\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений значение интеграла определяется по формуле

$$I = \frac{1}{h} \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3} (3x_1^2 + h^2) + \frac{4x_1y_1 - 2x_1(y_0 + y_2) + h(y_2 - y_0)}{2} \times \right. \\ \left. \times 2x_1 - hx_1(y_2 - y_0) + x_1^2(y_2 + y_0) - 2x_1^2y_1 + 2h^2y_1 \right].$$

После раскрытия скобок, приведения общих слагаемых получается формула для вычисления интеграла методом парабол на интервале $[x_0; x_2]$:

$$I_{\Pi} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Если интервал интегрирования разбить на n равных частей (n – четное число), то можно распространить данную формулу на произвольное число разбиений.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)dx$. Разобьем отрезок $[x_0; x_6]$ на шесть интервалов ($n = 6$).

Суммарная площадь трапеций $S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3$. Учитывая, что

$$S_1 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2], S_2 = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4], S_3 = \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6]$$

и вынося $h/3$ за скобки, получим

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6] = \\ = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6].$$

В общем случае формула для решения интеграла методом парабол имеет вид

$$I_{\Pi} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n],$$

где $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $x_0 = 0$, $x_6 = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов ($n = 6$),

шаг интегрирования $h = \frac{6 - 0}{6} = 1$:

$$I_{\Pi} = \frac{1}{3} \left[\frac{0^3}{e^0 - 1} + 4 \cdot \frac{1^3}{e^1 - 1} + 2 \cdot \frac{2^3}{e^2 - 1} + 4 \cdot \frac{3^3}{e^3 - 1} + 2 \cdot \frac{4^3}{e^4 - 1} + 4 \cdot \frac{5^3}{e^5 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} \right] =$$

$$= \frac{0 + 4 \cdot 0,582 + 2 \cdot 1,252 + 4 \cdot 1,415 + 2 \cdot 1,194 + 4 \cdot 0,848 + 0,537}{3} =$$

$$= \frac{16,809}{3} = 5,603.$$

4.4. Метод Симпсона 3/8

Если в качестве аппроксимирующей функции использовать полином третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, выполняя те же действия, что и в подразделе 4.3, можно получить формулу для приближенного вычисления интеграла. На элементарном отрезке $[x_0; x_3]$ она имеет вид

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

Если интервал интегрирования разбить на n равных частей (n кратно трем), то можно распространить данную формулу на произвольное число разбиений:

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + \dots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n).$$

Пример. Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. В этом случае $x_0 = 0$, $x_6 = 6$,

$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$. Разобьем отрезок $[0; 6]$ на шесть интервалов

($n = 6$). Шаг интегрирования $h = \frac{6-0}{6} = 1$.

$$I_{\Pi} = \frac{3}{8} \left[\frac{0^3}{e^0 - 1} + 3 \cdot \frac{1^3}{e^1 - 1} + 3 \cdot \frac{2^3}{e^2 - 1} + 2 \cdot \frac{3^3}{e^3 - 1} + 3 \cdot \frac{4^3}{e^4 - 1} + 3 \cdot \frac{5^3}{e^5 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} \right] =$$

$$= \frac{3 \cdot (0 + 3 \cdot 0,582 + 3 \cdot 1,252 + 2 \cdot 1,415 + 3 \cdot 1,194 + 3 \cdot 0,848 + 0,537)}{8} =$$

$$= \frac{3 \cdot 14,995}{8} = 5,623.$$

4.5. Метод Буля

Если в качестве аппроксимирующей функции использовать полином четвертой степени $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, выполняя те же действия, что и в методе парабол, можно получить формулу для приближенного вычисления интеграла. На элементарном отрезке $[x_0; x_4]$ она имеет вид

$$I_{\text{Б}} = \frac{2h}{45} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

Если интервал интегрирования разбить на n равных частей (n кратно четырем), то можно распространить данную формулу на произвольное число разбиений:

$$I_{\text{Б}} = \frac{2h}{45} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 +$$

$$+ 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + \dots + 32y_{n-1} + 7y_n).$$

4.6. Сравнение различных методов по точности приближения

Точное значение интеграла можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$I = \int_a^b f(x)dx = Q(f) + E(f),$$

где $Q(f)$ – численное значение интеграла, полученное тем или иным методом; $E(f)$ – ошибка интегрирования, которая зависит от вида функции $f(x)$ и шага h .

Степенью точности называют такое целое число n , что для всех полиномов $P_i(x)$ степени $i \leq n$ приближенная формула расчета значения интеграла дает абсолютно точный числовой ответ.

В таблице 4.1 приведены формулы расчета приближенного значения интеграла и погрешности вычислений.

Таблица 4.1. Формулы и точность расчета определенного интеграла на элементарных интервалах методами численного интегрирования

Метод	Расчетная формула	Точность $E(f)$
Левых прямоугольников	hf_0	$\frac{h^2 f'(c)}{2}$
Правых прямоугольников	hf_1	$\frac{h^2 f'(c)}{2}$
Центральных прямоугольников	$hf\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$	$\frac{h^3 f^{(2)}(c)}{24}$
Трапеций	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$\frac{h^3 f^{(2)}(c)}{12}$
Симпсона	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$\frac{h^5 f^{(4)}(c)}{90}$
Симпсона 3/8	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$\frac{3h^5 f^{(4)}(c)}{80}$
Буля	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$\frac{8h^7 f^{(6)}(c)}{945}$

4.7. Численное интегрирование методом Гаусса – Лежандра

Постановка задачи интегрирования в каноническом виде [4]: требуется найти площадь под кривой $y = f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

«Король математиков» Гаусс подошел к решению данной задачи с определения метода, который позволяет получить наилучший результат, если вычислять значения функции $f(x)$ только в двух точках. Формула трапеций является методом для нахождения площади под кривой, в ней используются два вычисления функции в крайних точках: $(-1; f(-1))$ и $(1; f(1))$. Но если график функции $y = f(x)$ вогнут вниз, то ошибка приближения соответствует области, которая лежит между кривой и отрезком линии, соединяющей точки (рис. 4.7,*а*). Если можно использовать узлы x_1 и x_2 , которые лежат на интервале $[-1; 1]$, значит линия пересекает кривую в двух точках $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$ и площадь под линией лучше приближает площадь под кривой (рис. 4.7,*б*).

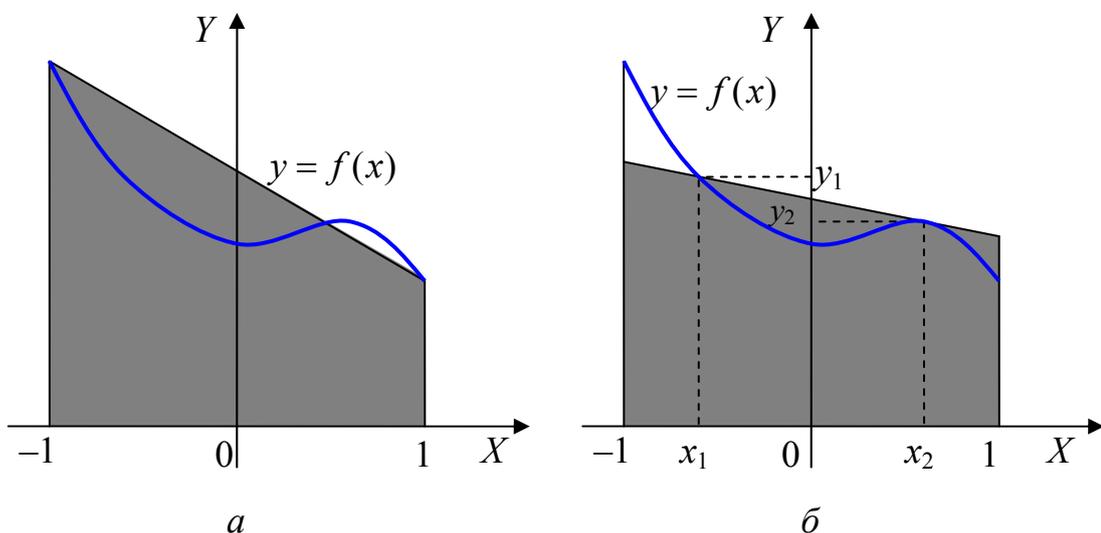


Рис. 4.7. Аппроксимация трапецией, использующей абсциссы -1 и 1 (*а*) и x_1 и x_2 (*б*)

Уравнение линии имеет вид

$$y = f(x_1) + \frac{(x - x_1)(f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1}.$$

Площадь трапеции под линией

$$S = \frac{2x_2}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{2x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Можно убедиться, что формула трапеции является частным случаем данной формулы, если подставить в нее $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $h = 2$:

$$S = \frac{2}{2} f(x_1) - \frac{-2}{2} f(x_2) = f(x_1) + f(x_2) = I_{\text{Тр}}.$$

Согласно методу Гаусса – Лежандра приближенное значение интеграла определяется с помощью весового суммирования значений функции в двух точках по формуле

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2).$$

Значения абсцисс x_1 и x_2 и весов ω_1 и ω_2 выбирается из условия, что данная формула будет точной для четырех функций:

$f(x) = 1, x, x^2$ и x^3 . Четыре интегральных условия имеют вид

$$\begin{aligned} f(x) = 1: & \int_{-1}^1 1 dx = 2 = \omega_1 + \omega_2, \\ f(x) = x: & \int_{-1}^1 x dx = 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2, \\ f(x) = x^2: & \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2, \\ f(x) = x^3: & \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3. \end{aligned}$$

Решим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 2, \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = 0, \\ \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 = \frac{2}{3}, \\ \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 = 0. \end{cases}$$

Запишем второе и четвертое уравнение в виде $\omega_1 x_1 = -\omega_2 x_2$ и $\omega_1 x_1^3 = -\omega_2 x_2^3$. Разделив четвертое уравнение на второе, получим $x_1^2 = x_2^2$, или $x_1 = -x_2$. Подставив найденное соотношение во второе уравнение системы, получим $\omega_1 = \omega_2$. Подставив это соотношение в первое уравнение системы, получим $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

Используя в третьем уравнении системы найденные результаты, получаем

$$\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad x_2^2 = \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, значение интеграла, найденное методом Гаусса – Лежандра по двум точкам, вычисляется по формуле

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Данная формула имеет степень точности, равную 3:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E_2(f),$$

где $E_2(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{135}$.

Пример. Определить значение интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2}$. Оценить его погрешность.

Точное значение интеграла находится по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2) \Big|_{-1}^1 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) \approx 1,09861.$$

Вычисление данного интеграла методом трапеций с шагом $h = 2$ дает значение

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{-1+2} + \frac{1}{1+2} \right) = 1 + 0,33333 \approx 1,33333.$$

Вычисление интеграла методом парабол с шагом $h = 1$ дает значение

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{-1+2} + 4 \frac{1}{0+2} + \frac{1}{1+2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{9} \approx 1,11111,$$

а методом Гаусса – Лежандра по двум точкам –

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}+2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+2} = 0,70291 + 0,38800 \approx 1,09091.$$

Следует заметить, что в формулах Гаусса – Лежандра и трапеций используются два вычисления функции, а для формулы Симпсона – три.

Относительные погрешности вычислений интеграла составили: для метода трапеций 21 %; для метода парабол 1,14 %; для метода Гаусса – Лежандра 0,7 %.

Если требуется вычислить значение интеграла на интервале $[a; b]$, то следует выполнить замену переменной:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad dx = \frac{b-a}{2}dt,$$

В результате получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \frac{b-a}{2} dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 6x^5 dx$.

В данном случае $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = 6x^5$. Проводим замену переменной:

$$x = \frac{0+2}{2} + \frac{2-0}{2}t = 1+t, \quad dx = \frac{2-0}{2} dt = dt.$$

Получаем интеграл

$$\int_0^2 6x^5 dx = \int_{-1}^1 6 \cdot (1+t)^5 dt = 6 \cdot \left(1 + \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^5 + 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = 58,66667.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$.

В данном случае $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Проводим замену переменной:

$$x = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} t = \frac{1+t}{2}, \quad dx = \frac{1-0}{2} dt = \frac{1}{2} dt.$$

Получаем интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\frac{1+t}{2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{\sin(0,5 + 0,5t)}{1+t} dt = 0,94604.$$

При вычислении интеграла методом Гаусса – Лежандра по трем точкам его значение находится по формуле

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3).$$

Значения абсцисс x_1 , x_2 , x_3 и весов ω_1 , ω_2 , ω_3 выбираются из условия, что данная формула будет точной для шести функций: $f(x) = 1$, x , x^2 , x^3 , x^4 и x^5 :

$$f(x) = 1: \quad \int_{-1}^1 1 dx = 2 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

$$f(x) = x: \quad \int_{-1}^1 x dx = 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3,$$

$$f(x) = x^2: \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2,$$

$$f(x) = x^3: \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 + \omega_3 x_3^3.$$

$$f(x) = x^4: \quad \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} = \omega_1 x_1^4 + \omega_2 x_2^4 + \omega_3 x_3^4,$$

$$f(x) = x^5 : \quad \int_{-1}^1 x^5 dx = 0 = \omega_1 x_1^5 + \omega_2 x_2^5 + \omega_3 x_3^5.$$

После решения системы нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2, \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 = 0, \\ \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2 = \frac{2}{3}, \\ \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 + \omega_3 x_3^3 = 0, \\ \omega_1 x_1^4 + \omega_2 x_2^4 + \omega_3 x_3^4 = \frac{2}{5}, \\ \omega_1 x_1^5 + \omega_2 x_2^5 + \omega_3 x_3^5 = 0 \end{array} \right.$$

получаем:

$$x_1 = -\sqrt{0,6}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{0,6}, \quad \omega_1 = \frac{5}{9}, \quad \omega_2 = \frac{8}{9}, \quad \omega_3 = \frac{5}{9},$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{0,6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0,6}).$$

Данная формула имеет степень точности, равную 5:

$$E_3(f) = \frac{f^{(6)}(c)}{15750}.$$

В таблице 4.2 даны значения абсцисс и весов для расчета значения интеграла по двум, трем, четырем и пяти точкам, а также формула для расчета точности вычислений.

Таблица 4.2. Абсциссы и весовые коэффициенты для формулы Гаусса – Лежандра

Число точек	Абсциссы	Весовые коэффициенты	Точность
2	$\pm 0,57735$	1; 1	$\frac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	$\pm 0,774597$ 0	0,555556 0,888889	$\frac{f^{(6)}(c)}{15750}$

Окончание таблицы 4.2

Число точек	Абсциссы	Весовые коэффициенты	Точность
4	$\pm 0,861136$ $\pm 0,339981$	0,347855 0,652145	$\frac{f^{(8)}(c)}{3472875}$
5	$\pm 0,9061798$ $\pm 0,538469$ 0	0,236927 0,478629 0,568889	$\frac{f^{(10)}(c)}{1237732650}$

4.8. Численное решение интеграла методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло принципиально отличается от ранее рассмотренных методов. Он не связан с аппроксимацией подынтегральной функции. В его основе лежит применение случайных величин [6]. Использование случайных величин для решения различных прикладных задач применяется достаточно давно. Например, в 1777 году французский ученый Бюффон предложил метод определения значения числа π . С появлением компьютеров, которые могли с большой скоростью генерировать случайные числа, расширилась область применения стохастических методов. Временем рождения метода Монте-Карло считается 1950 год, когда была опубликована статья «Метод Монте-Карло». Авторы статьи – Николос Константин Метрополис и Станислав Мартин Улам. Название метода связано с городом Монте-Карло княжества Монако, в котором находится большое казино.

Существует несколько алгоритмов вычисления интеграла методом Монте-Карло. В данном пособии будут рассмотрены стандартный и геометрический алгоритмы.

Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Рассмотрим случайную величину u , которая равномерно распределена на интервале $[a; b]$. Тогда значение $f(u)$ тоже будет случайной величиной. Ее математическое ожидание (среднее значение) находится по формуле

$$M[f(u)] = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ – плотность распределения случайной величины u ,

$\varphi(x) = \frac{1}{b-a}$ на интервале $[a; b]$.

Тогда значение интеграла будет выглядеть как

$$M[f(u)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

а значение искомого интеграла можно получить по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)M[f(u)].$$

Если имеется N случайных точек u_1, \dots, u_N , то данная формула принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i).$$

Полученная формула определяет стандартный алгоритм вычисления интеграла методом Монте-Карло.

Теперь рассмотрим геометрический алгоритм вычисления интеграла методом Монте-Карло

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Ограничим функцию $f(x)$ прямоугольником (рис. 4.8), площадь ($S_{\text{ПР}}$) которого можно легко найти.

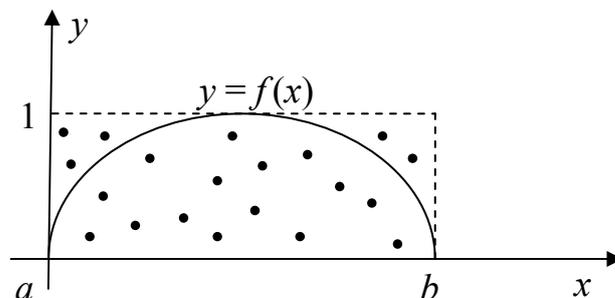


Рис. 4.8. Численное интегрирование функции $y = f(x)$ методом Монте-Карло

Набросаем в этот прямоугольник N точек, координаты которых выбираются случайно. Определим количество точек, которые попали под график функции $f(x)$. Обозначим это количество M . Тогда площадь области, ограниченной функцией $f(x)$ и осью координат, находится по формуле

$$S = S_{\text{пр}} \frac{M}{N}.$$

Полученная формула определяет геометрический алгоритм вычисления интеграла методом Монте-Карло.

Геометрический метод следует применять с осторожностью. Значения функции могут быть не только положительными, но и отрицательными. Следовательно, и значения интеграла могут быть меньше нуля.

Рассмотрим вышесказанное на конкретном примере. Требуется вычислить $I = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$.

График подынтегральной функции приведен на рис. 4.9. Минимальное значение функции $f(x) = \sin x$ на интервале $[0; 2\pi]$ равно -1 , а максимальное $+1$. Абсциссы случайных точек лежат на интервале $[0; 2\pi]$, а ординаты – на интервале $[-1; 1]$.

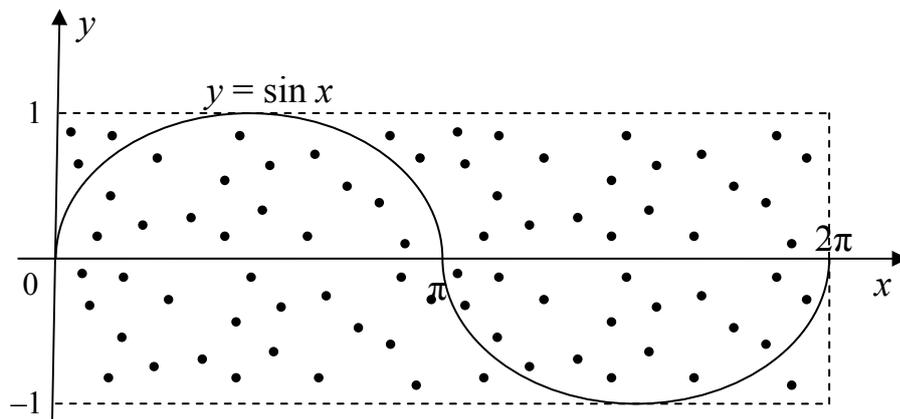


Рис. 4.9. Численное интегрирование функции $y = \sin x$ методом Монте-Карло

Расчет значения M должен вестись по следующему алгоритму.

1. Начальное значение M равно нулю.
2. Рассматриваются координаты всех N случайных точек $(x_i; y_i)$:

- если ордината случайной точки больше нуля ($y_i > 0$) и эта точка лежит под графиком функции $f(x)$ ($y_i < f(x_i)$), то значение M увеличивается на 1;
- если ордината случайной точки меньше нуля ($y_i < 0$) и эта точка лежит над графиком функции $f(x)$ ($y_i > f(x_i)$), то значение M уменьшается на 1;
- в остальных случаях значение M не меняется.

Если сравнивать между собой стандартный и геометрический алгоритмы, то следует заметить, что стандартный метод всегда точнее геометрического.

С помощью такого метода можно определить значение числа π . Найдем точное значение следующего интеграла:

$$S = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

Площадь прямоугольника, который ограничивает функцию $\sin x$, составит $S_{\text{пр}} = \pi$. Получается соотношение $2 = \pi \frac{M}{N}$. Тогда значение числа π находится по формуле

$$\pi = \frac{2N}{M}.$$

Погрешность метода E определяется объемом выборки случайных величин: чем больше случайных точек, тем точнее получается результат. Зависимость погрешности вычисления от объема выборки имеет вид

$$E \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Метод Монте-Карло имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам метода можно отнести:

- простую структуру вычислительного алгоритма;
- прекращение вычисления интеграла в любой момент;
- определение погрешности вычислений при любой размерности задачи;

▪ при вычислении многомерных интегралов метод Монте-Карло остается единственным, способным выдать приближенное значение за конечное время.

Недостатками метода можно считать:

▪ плохая сходимость при вычислении одномерных интегралов по сравнению с регулярным методом;

▪ для уменьшения на порядок погрешности необходимо увеличение количества испытаний на два порядка.

4.9. Вопросы и упражнения

1. В чем состоит геометрический смысл вычисления определенного интеграла?

2. Какой из методов прямоугольников обладает более высокой точностью?

3. Равно ли значение интеграла, вычисленное методом центральных прямоугольников, среднеарифметической величине значений, полученных методами левых и правых прямоугольников?

4. Равно ли значение интеграла, вычисленное методом трапеций, среднеарифметической величине значений, полученных методами левых и правых прямоугольников?

5. Вычислите значение определенного интеграла $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx$

методом левых прямоугольников. Число интервалов разбиения 4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

6. Найдите значение определенного интеграла $\int_{-2}^2 (x^3 - 2x + 2) dx$

методом правых прямоугольников. Число интервалов разбиения 4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

7. Вычислите значение определенного интеграла $\int_0^8 (x^5 - 9x + 1) dx$ методом центральных прямоугольников. Число

интервалов разбиения 4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

8. Вычислите значение определенного интеграла $\int_{-5}^{-1} (x^4 - 6x - 1) dx$ методом трапеций. Число интервалов разбиения 4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

9. Вычислите значение определенного интеграла $\int_{-2}^6 (x^6 - 5x - 3) dx$ методом парабол. Число интервалов разбиения 4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

10. Вычислите значение определенного интеграла $\int_3^5 (x^6 - 11x - 5) dx$ методом Гаусса – Лежандра по двум точкам. Найдите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

11. Вычислите значение определенного интеграла $\int_3^5 (x^6 - 11x - 5) dx$ методом Гаусса – Лежандра по трем точкам. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

12. Вычислите значение определенного интеграла $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx$ методом Монте-Карло с помощью геометрического алгоритма. Количество случайных точек равно 20 (табл. 4.3). Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

12. Вычислите значение определенного интеграла $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx$ методом Монте-Карло с помощью геометрического алгоритма. Количество случайных точек равно 20 (табл. 4.3). Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Таблица 4.3. Координаты случайных точек

	Номер точки																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	2,4	2,6	2,1	2,2	2,2	1,5	2,0	1,8	2,8	1,1	3,0	2,7	3,0	2,4	2,1	1,6	2,4	1,3	2,5	2,9
Y	0,1	0,4	0,0	0,2	0,1	0,2	0,1	0,5	0,3	0,4	0,1	0,0	0,1	0,5	0,0	0,3	0,5	0,4	0,0	0,2

13. Вычислите значение определенного интеграла $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx$

методом Монте-Карло с помощью стандартного алгоритма. Количество случайных точек равно 20. Значения абсцисс возьмите из таблицы 4.3. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

14. Вычислите значение определенного интеграла $\int_1^3 \left(2 \frac{x-1}{x+1} - 0,5 \right) dx$ методом Монте-Карло с помощью геометрического алгоритма. Количество случайных точек равно 20. Их координаты приведены в таблице 4.4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Таблица 4.4. Координаты случайных точек

	Номер точки																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	2,4	2,6	2,1	2,2	2,2	1,5	2,0	1,8	2,8	1,1	3,0	2,7	3,0	2,4	2,1	1,6	2,4	1,3	2,5	2,9
Y	-0,1	0,4	0,1	-0,2	-0,1	0,2	0,1	-0,5	0,3	-0,4	0,1	-0,1	0,1	0,5	0,1	-0,3	0,5	-0,4	-0,1	-0,2

15. Найдите значение определенного интеграла $\int_1^3 \left(2 \frac{x-1}{x+1} - 0,5 \right) dx$ методом Монте-Карло с помощью основного алгоритма. Количество случайных точек равно 20. Их абсциссы приведены в таблице 4.4. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

5. Интерполяция и приближение полиномами

Интерполяция – приближенное или точное нахождение какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней.

В первоначальном понимании **интерполяция** – это восстановление функции по известным ее значениям или значениям ее производных в заданных точках.

Экстраполяция – продолжение функции за пределами ее области определения.

Постановка задачи. Предположим, что функция $y = f(x)$ известна в $N + 1$ точке $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$, где значения x_k принадлежат интервалу $[a; b]$ и удовлетворяют условиям $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq b$ и $y_k = f(x_k)$. Требуется найти функцию, которая проходила бы через данные точки.

Точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ называются узловыми. Условие прохождения интерполяционной функции через узловые точки называется условием Лагранжа.

Все интерполяционные методы можно разделить на две группы. В первую группу входят методы, для которых условие Лагранжа выполняется. Во вторую группу входят методы, которые не требуют выполнения этого условия.

5.1. Интерполяция алгебраическим полиномом

Интерполирующая функция $\varphi(x)$ имеет вид многочлена:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_Nx^N.$$

Для интерполяционного построения требуется предварительно найти значения коэффициентов многочлена $c_0, c_1, c_2, \dots, c_N$. Степень многочлена соответствует числу узловых точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Поскольку интерполяционная функция $\varphi(x)$ проходит через узловые точки, то можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0, \\ \varphi(x_1) = y_1, \\ \dots \\ \varphi(x_N) = y_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + c_3x_0^3 + \dots + c_Nx_0^N = y_0, \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + c_3x_1^3 + \dots + c_Nx_1^N = y_1, \\ \dots \\ c_0 + c_1x_N + c_2x_N^2 + c_3x_N^3 + \dots + c_Nx_N^N = y_N. \end{cases}$$

Запишем данную систему в матричном виде $\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Y}$, где

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты многочлена определяются по формуле $\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$, где \mathbf{X}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{X} .

После нахождения коэффициентов многочлена можно приступить к вычислению значения $\varphi(x)$ в любой точке, принадлежащей интервалу $[a; b]$. Использование для этой цели схемы Горнера позволит резко повысить быстродействие программы. При обычном способе вычисления значения многочлена степени N требуется выполнить N операций сложения и $N + (N-1) + (N-2) + \dots + 2 + 1 + 0 = \frac{N(N+1)}{2}$ операций умножения.

Метод Горнера, или искусственное разделение, задуман как вложенное умножение:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_Nx^N = \\ &= c_0 + x(c_1 + x(c_2 + x(c_3 + x(\dots + c_Nx)\dots))). \end{aligned}$$

При таком способе вычисления значения многочлена требуется выполнить N операций сложения и N операций умножения. Ниже приведен фрагмент программы, вычисляющей значение многочлена по схеме Горнера (метод вложенных умножений).

Фрагмент программы на языке Си	Фрагмент программы на языке Паскаль
<pre>p=c[n]; for(i=n-1; i>=0; i--) p=c[i]+p*x;</pre>	<pre>p:=c[n]; for i:=n-1 downto 0 do p:=c[i]+p*x;</pre>

При аппроксимации алгебраическим полиномом следует помнить, что в случае большого количества узловых точек коэффициенты полинома могут быть найдены со значительными ошибками, как это было показано в подразделе 3.2.

5.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \dots \frac{x-x_N}{x_0-x_N} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \dots \frac{x-x_N}{x_1-x_N} + \\
 & + y_N \frac{x-x_0}{x_N-x_0} \frac{x-x_1}{x_N-x_1} \dots \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} = \sum_{i=0}^N y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.
 \end{aligned}$$

Видно, что интерполяционный полином Лагранжа проходит через узловые точки, то есть выполняется условие Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 P(x_0) = & y_0 \frac{x_0-x_1}{x_0-x_1} \frac{x_0-x_2}{x_0-x_2} \dots \frac{x_0-x_N}{x_0-x_N} + y_1 \frac{x_0-x_0}{x_1-x_0} \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2} \dots \frac{x_0-x_N}{x_1-x_N} + \\
 & + y_N \frac{x_0-x_0}{x_N-x_0} \frac{x_0-x_1}{x_N-x_1} \dots \frac{x_0-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} = y_0 + 0 + \dots + 0 = y_0 = f(x_0).
 \end{aligned}$$

Достоинством полинома Лагранжа является отсутствие предварительных вычислений. Можно сразу приступить к определению значения полинома $P(x)$ вне узловых точек. Недостатком метода является арифметическая сложность вычислений числителя и знаменателя. Количество операций возрастает факториально.

5.3. Интерполяционный полином Ньютона

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + a_N(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{N-1}),$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ – коэффициенты полинома.

Коэффициенты полинома Ньютона находятся исходя из выполнения условия Лагранжа: $P_N(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Коэффициент a_0 находится из соотношения $P_N(x_0) = y_0$:

$$P_N(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \dots + \\ + a_N(x_0 - x_0) \cdot (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_{N-1}) = y_0.$$

Так как все слагаемые, кроме первого, равны нулю, то $a_0 = y_0$. Далее находим коэффициент a_1 из соотношения $P_N(x_1) = y_1$:

$$P_N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \dots + \\ + a_N(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \cdots (x_1 - x_{N-1}) = y_1.$$

Все слагаемые, начиная с третьего, равны нулю, а коэффициент $a_0 = y_0$, отсюда

$$y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1.$$

Тогда $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Аналогично находятся все коэффициенты полинома Ньютона.

Аналитическая формула, по которой находятся коэффициенты полинома, имеет сложный вид, а итерационная процедура очень проста:

$$f[x_{K-J}, x_{K-J+1}, \dots, x_K] = \frac{f[x_{K-J+1}, \dots, x_K] - f[x_{K-J}, \dots, x_{K-1}]}{x_K - x_{K-J}},$$

она основана на разностных отношениях и приведена в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Таблица разностных отношений для $y = f(x)$

x_k	$f[x_k]$	$f[\ , \]$	$f[\ , \ , \]$	$f[\ , \ , \ , \]$	$f[\ , \ , \ , \ , \]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Значения диагональных элементов и являются значениями коэффициентов полинома Ньютона.

Рассмотрим процесс нахождения коэффициентов полинома Ньютона для шести точек: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$. Значения $y_0 = -3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 48$, $y_4 = 105$, $y_5 = 192$ получены для функции $f(x) = x^3 - 4x$. Процедура нахождения коэффициентов полинома Ньютона дана в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Таблица разностных отношений

x_k	$f[x_k]$	$f[\ , \]$	$f[\ , \ , \]$	$f[\ , \ , \ , \]$	$f[\ , \ , \ , \ , \]$	$f[\ , \ , \ , \ , \ , \]$
1	-3					
2	0	3				
3	15	15	6			
4	48	33	9	1		
5	105	57	12	1	0	
6	192	87	15	1	0	0

Коэффициенты полинома получили значения: $a_0 = -3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$. Проведем проверку полученных результатов. Полином Ньютона имеет вид

$$P_5(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Подставим вместо x_0, x_1, x_2 и a_0, a_1, a_2, a_3 их значения:

$$P_5(x) = -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3) = -3 + 3x - 3 + 6x^2 - 18x + 12 + x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6 = x^3 - 4x.$$

Это соответствует приведенной ранее функции. График интерполяционного полинома Ньютона приведен на рис. 5.1.

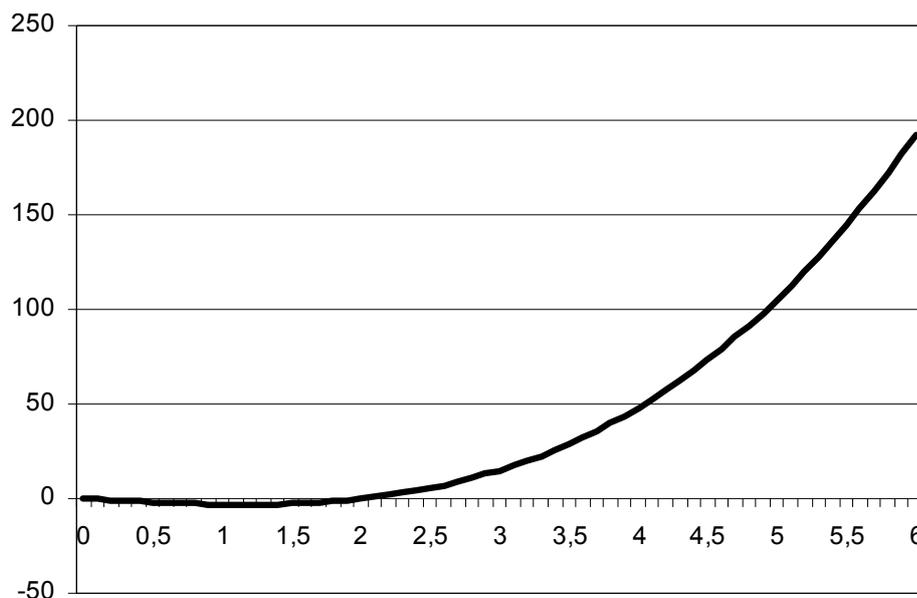


Рис. 5.1. График интерполяционного полинома Ньютона $P_5(x)$

К достоинствам данного метода можно отнести:

- меньшую погрешность интерполяции при близко расположенных узлах;
- возможность использования вложенных умножений при вычислении значений полинома;
- более простой способ получения коэффициентов полинома, чем при интерполяции алгебраическим полиномом.

Недостатком метода можно считать проведение предварительных расчетов коэффициентов полинома. При использовании интерполяционного полинома Лагранжа таких вычислений проводить не нужно.

5.4. Интерполяция параболическим сплайном

Сплайном называется функция, определенная на отрезке $[a; b]$, совпадающая на частичных отрезках $[x_i; x_{i+1}]$ с некоторыми алгебраическими многочленами степени не выше m и имеющая непрерывную $(m-1)$ -ю производную.

Параболическим сплайном называют совокупность многочленов второй степени вида

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2,$$

где a_i, b_i, c_i – коэффициенты параболических полиномов, $i = 0, 1, \dots, N-1$; x_i – абсциссы узловых точек, $i = 0, 1, \dots, N-1$; N – число узловых точек.

Коэффициенты a_i, b_i, c_i находятся при решении системы линейных уравнений исходя из трех условий:

- равенство значений сплайна и аппроксимируемой функции в узлах (условие Лагранжа): $\varphi_i(x_i) = y_i, \varphi_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$;

- непрерывность первой производной в узловых точках: $\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1})$;

- равенства некоторому значению D первой производной в начале или на конце интервала: $\varphi'_0(x_0) = D$ или $\varphi'_{N-1}(x_N) = D$.

Первая производная параболического многочлена равна соответственно $\varphi'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$.

Таким образом, если имеется N узловых точек, то для интерполяции сплайном будут использованы $(N-1)$ параболических многочленов. Поскольку каждый многочлен содержит три коэффициента, то общее число неизвестных $3(N-1)$. Выполнение условия Лагранжа дает $2(N-1)$ уравнений. Поскольку число внутренних узлов $(N-2)$, то выполнение для них равенства первой производной дает $(N-2)$ уравнений. Еще одно уравнение дает выполнение равенства значению D первой производной первого многочлена в начале отрезка интерполяции или последнего многочлена в конце отрезка интерполяции. Общее число уравнений

$$2(N-1) + N - 2 + 1 = 2N - 2 + N - 1 = 3N - 3 = 3(N-1),$$

что соответствует числу неизвестных коэффициентов. Решая данную систему уравнений, можно определить их значения.

Рассмотрим пример нахождения сплайна, если даны следующие значения узловых точек: $\{0; 0\}, \{1; 0,5\}, \{2; 2\}, \{3; 1,5\}$, а производная в конце интервала равна нулю.

Поскольку имеются четыре узловые точки, то сплайн состоит из трех параболических многочленов. Общее число неизвестных коэффициентов 9. Выполнение условий Лагранжа определит 6 уравнений системы, два уравнения будут получены при выполнении непрерывности первой производной, одно уравнение по-

лучится за счет равенства нулю первой производной в начале области определения.

В результате получается система, состоящая из 9 уравнений, решая которую, получим значения коэффициентов сплайна:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x_0) = y_0, \\ \varphi_0(x_1) = y_1, \\ \varphi_1(x_1) = y_1, \\ \varphi_1(x_2) = y_2, \\ \varphi_2(x_2) = y_2, \\ \varphi_2(x_3) = y_3, \\ \varphi'_0(x_1) = \varphi'_1(x_1), \\ \varphi'_1(x_2) = \varphi'_2(x_2), \\ \varphi'_2(x_3) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0, \\ a_0 + b_0(1-0) + c_0(1-0)^2 = 0,5, \\ a_1 = 0,5, \\ a_1 + b_1(2-1) + c_1(2-1)^2 = 2, \\ a_2 = 2, \\ a_2 + b_2(3-2) + c_2(3-2)^2 = 1,5, \\ b_0 + 2c_0(1-0) = b_1, \\ b_1 + 2c_1(2-1) = b_2, \\ b_2 + 2c_2(3-2) = 0. \end{array} \right.$$

Значения трех коэффициентов определены: $a_0 = 0$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 2$. Подставим их значения в систему и исключим три уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 + c_0 = 0,5, \\ 0,5 + b_1 + c_1 = 2, \\ 2 + b_2 + c_2 = 1,5, \\ b_0 + 2c_0 = b_1, \\ b_1 + 2c_1 = b_2, \\ b_2 + 2c_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 + c_0 = 0,5, \\ b_1 + c_1 = 1,5, \\ b_2 + c_2 = -0,5, \\ b_0 + 2c_0 = b_1, \\ b_1 + 2c_1 = b_2, \\ b_2 + 2c_2 = 0. \end{array} \right.$$

Если из шестого уравнения вычесть третье уравнение, то можно найти значения коэффициентов: $c_2 = 0,5$, $b_2 = -1$. Вычитая из пятого уравнение второе уравнение, находим значения коэффициентов: $c_1 = b_1 - 1,5 = -2,5$, $b_1 = 1,5 - 2c_1 = 4$. Вычитая из четвертого уравнения первое, находим $c_0 = b_1 - 0,5 = 3,5$, $b_0 = 0,5 - c_0 = -3$.

В результате получаются уравнения параболических многочленов сплайна:

$$\varphi_0(x) = 3,5x^2 - 3x, \text{ при } x \in [x_0; x_1];$$

$$\varphi_1(x) = -2,5(x-1)^2 + 4(x-1) + 0,5 = -2,5x^2 + 9x - 6 \text{ при } x \in [x_1; x_2];$$

$$\varphi_2(x) = 0,5(x-2)^2 - 1(x-2) + 2 = 0,5x^2 - 3x + 6 \text{ при } x \in [x_2; x_3].$$

На рис. 5.2 показаны графики многочленов параболического сплайна. Видно, как многочлен $\varphi_0(x) = 3,5x^2 - 3x$ в точке $x = 1$ плавно перетекает в $\varphi_1(x) = -2,5x^2 + 9x - 6$, а тот в свою очередь в точке $x = 2$ в многочлен $\varphi_2(x) = 0,5x^2 - 3x + 6$.

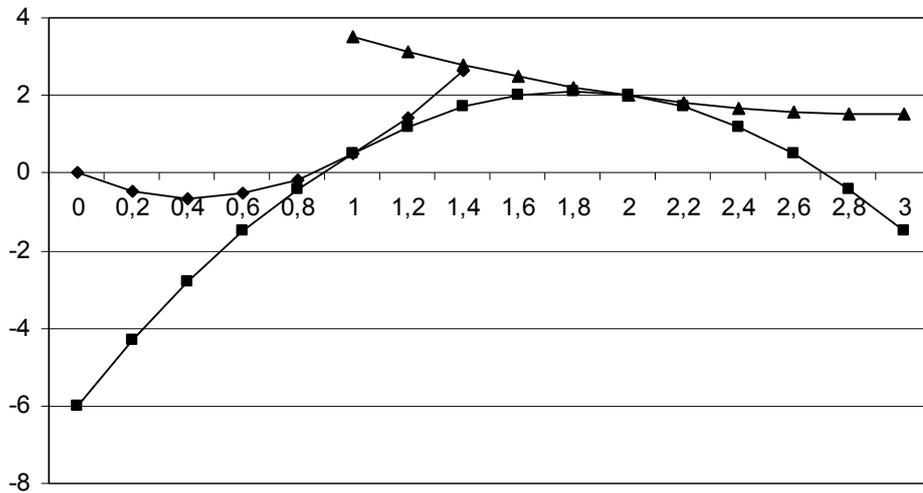


Рис. 5.2. Графики многочленов параболического сплайна $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

Представим в общем случае итерационную процедуру нахождения коэффициентов параболических многочленов.

1. Находятся значения h_K по формуле $h_K = x_{K+1} - x_K$ при $K = 0, 1, \dots, N - 1$.

2. Находятся значения z_K по формуле $z_K = \frac{y_{K+1} - y_K}{h_K}$ при $K = 0, 1, \dots, N - 1$.

3. Находятся значения коэффициентов a_K , b_K , c_K параболических полиномов при $K = 0, 1, \dots, N - 1$ по следующим формулам:

▪ если задано значение первой производной D в начале интервала интерполяции: $a_K = y_K$, $b_K = 2z_K - b_{K-1}$ (значение $b_0 = D$), $c_K = \frac{b_{K+1} - b_K}{2h_K}$;

▪ если задано значение первой производной D в конце интервала интерполяции: $a_K = y_K$, $b_K = 2z_K - b_{K+1}$ (значение $b_N = D$), $c_K = \frac{b_{K+1} - b_K}{2h_K}$.

Результаты нахождения коэффициентов параболических многочленов сплайна для рассмотренного выше примера (значения узловых точек: $\{0; 0\}$, $\{1; 0,5\}$, $\{2; 2\}$, $\{3; 1,5\}$) даны в таблице 5.3.

Таблица 5.3. Значения коэффициентов многочленов параболического сплайна

i	x_i	y_i	h_i	z_i	a_i	b_i	c_i
0	0	0	1	0,5	0	-3	3,5
1	1	0,5	1	1,5	0,5	4	-2,5
2	2	2	1	-0,5	2	-1	0,5
3	3	1,5				0	

Для получения приближенного значения в точке $x \neq x_i$ требуется сначала определить, к какому интервалу принадлежит $x \in [x_i; x_{i+1}]$, затем вычислить значение соответствующего многочлена $\varphi_i(x)$.

5.5. Интерполяция кубическим сплайном

Кубическим сплайном называют совокупность многочленов третьей степени вида

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты кубических полиномов, $i = 0, 1, \dots, N - 1$; x_i – абсциссы узловых точек, $i = 0, 1, \dots, N - 1$; N – число узловых точек.

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i находятся при решении системы линейных уравнений, удовлетворяющих трем условиям:

- равенство значений сплайна и аппроксимируемой функции в узлах (условие Лагранжа): $\varphi_i(x_i) = y_i, \varphi_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$;
- непрерывность первой и второй производной в узловых точках: $\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}), \varphi''_i(x_{i+1}) = \varphi''_{i+1}(x_{i+1})$;
- равенство нулю вторых производных на концах интервала $\varphi''_0(x_0) = 0, \varphi''_{N-1}(x_{N-1}) = 0$.

Первая и вторая производные кубического многочлена

$$\begin{aligned}\varphi'_i(x) &= b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2, \\ \varphi''_i(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_i).\end{aligned}$$

Таким образом, если имеется N узловых точек, то для интерполяции сплайном будут использованы $(N - 1)$ кубических многочленов. Поскольку каждый многочлен содержит четыре коэффициента, то общее число неизвестных $4(N - 1)$. Выполнение условия Лагранжа дает $2(N - 1)$ уравнений. Поскольку число внутренних узлов $(N - 2)$, то выполнение для них равенства первой производной дает $(N - 2)$ уравнений, столько же уравнений дает выполнение равенства второй производной. Еще два уравнения дает выполнение равенства нулю вторых производных на концах отрезка. Общее число уравнений

$$2(N - 1) + N - 2 + N - 2 + 2 = 2N - 2 + 2N - 2 = 4N - 4 = 4(N - 1),$$

что соответствует числу неизвестных коэффициентов.

Решая данную систему уравнений, можно определить их значения.

Рассмотрим пример нахождения сплайна, если даны следующие значения узловых точек: $\{0; 0\}, \{1; 0,5\}, \{2; 2\}, \{3; 1,5\}$.

Поскольку имеются четыре узловые точки, то сплайн состоит из трех кубических многочленов. Общее число неизвестных коэффициентов 12. Выполнение условий Лагранжа определит 6 уравнений системы, два уравнения будут получены при выполнении непрерывности первой производной, еще два уравнения получатся при выполнении непрерывности второй производной,

оставшиеся два уравнения получатся за счет равенства нулю второй производной на краях области определения.

В результате получается система, состоящая из 12 уравнений, решая которую, получим значения коэффициентов сплайна:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x_0) = y_0, \\ \varphi_0(x_1) = y_1, \\ \varphi_1(x_1) = y_1, \\ \varphi_1(x_2) = y_2, \\ \varphi_2(x_2) = y_2, \\ \varphi_2(x_3) = y_3, \\ \varphi'_0(x_1) = \varphi'_1(x_1), \\ \varphi'_1(x_2) = \varphi'_2(x_2), \\ \varphi''_0(x_1) = \varphi''_1(x_1), \\ \varphi''_1(x_2) = \varphi''_2(x_2), \\ \varphi''_0(x_0) = 0, \\ \varphi''_2(x_3) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0, \\ a_0 + b_0(1-0) + c_0(1-0)^2 + d_0(1-0)^3 = 0,5, \\ a_1 = 0,5, \\ a_1 + b_1(2-1) + c_1(2-1)^2 + d_1(2-1)^3 = 2, \\ a_2 = 2, \\ a_2 + b_2(3-2) + c_2(3-2)^2 + d_2(3-2)^3 = 1,5, \\ b_0 + 2c_0(1-0) + 3d_0(1-0)^2 = b_1, \\ b_1 + 2c_1(2-1) + 3d_1(2-1)^2 = b_2, \\ 2c_0 + 6d_0(1-0) = 2c_1, \\ 2c_1 + 6d_1(2-1) = 2c_2, \\ 2c_0 + 6d_0(0-0) = 0, \\ 2c_2 + 6d_2(3-2) = 0. \end{array} \right.$$

Значения четырех коэффициентов определены: $a_0 = 0$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 2$, $c_0 = 0$. Подставим их значения в систему и исключим четыре уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 + d_0 = 0,5, \\ 0,5 + b_1 + c_1 + d_1 = 2, \\ 2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1,5, \\ b_0 + 3d_0 = b_1, \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2, \\ 6d_0 = 2c_1, \\ 2c_1 + 6d_1 = 2c_2, \\ 2c_2 + 6d_2 = 0. \end{array} \right.$$

Из последних трех уравнений следует, что

$$6d_0 + 6d_1 = -6d_2 \text{ или } -d_2 = d_0 + d_1.$$

Подставим это соотношение в последнее уравнение:

$$c_2 = -3d_2 = -3(d_0 + d_1).$$

В результате получим систему, состоящую из 8 уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 0,5 - d_0, \\ b_1 + c_1 + d_1 = 1,5, \\ b_2 + c_2 + d_2 = -0,5, \\ c_1 = 3d_0, \\ c_2 = -3d_2, \\ b_1 = b_0 + 3d_0 = 0,5 - d_0 + 3d_0 = 0,5 + 2d_0, \\ b_2 = b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 0,5 + 2d_0 + 6d_0 + 3d_1 = 0,5 + 8d_0 + 3d_1, \\ 6d_0 + 6d_1 = -6d_2. \end{array} \right.$$

Подставим соотношения, полученные для b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , во второе и третье уравнение, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 + 2d_0 + 3d_0 + d_1 = 1,5, \\ 0,5 + 8d_0 + 3d_1 - 3d_2 + d_2 = -0,5, \\ d_2 = -d_0 - d_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5d_0 + d_1 = 1, \\ 8d_0 + 3d_1 - 2d_2 = -1, \\ d_2 = -d_0 - d_1. \end{array} \right.$$

Из первого уравнения следует: $d_1 = 1 - 5d_0$, из третьего уравнения видно, что $d_2 = -d_0 - d_1 = -d_0 - 1 + 5d_0 = 4d_0 - 1$.

Подставим эти выражения во второе уравнение и найдем значение d_0 :

$$8d_0 + 3(1 - 5d_0) - 2(4d_0 - 1) = -1 \Rightarrow 15d_0 = 6 \Rightarrow d_0 = 0,4.$$

$$\text{Тогда } d_1 = 1 - 5 \cdot 0,4 = -1; \quad d_2 = 4 \cdot 0,4 - 1 = 0,6;$$

$$c_1 = 3 \cdot 0,4 = 1,2; \quad c_2 = -3 \cdot 0,6 = -1,8; \quad b_0 = 0,5 - 0,4 = 0,1;$$

$$b_1 = 0,5 + 2 \cdot 0,4 = 1,3; \quad b_2 = 0,5 + 8 \cdot 0,4 + 3 \cdot (-1) = 0,7.$$

В результате получаются уравнения кубических многочленов сплайна:

$$\varphi_0(x) = 0,4x^3 + 0,1x,$$

$$\varphi_1(x) = -(x-1)^3 + 1,2(x-1)^2 + 1,3(x-1) + 0,5,$$

$$\varphi_2(x) = 0,6(x-2)^3 - 1,8(x-2)^2 + 0,7(x-2) + 2.$$

На рис. 5.3 показаны графики многочленов кубического сплайна. Видно, как многочлен $\varphi_0(x) = 0,4x^3 + 0,1x$ в точке $x = 1$ плавно перетекает в $\varphi_1(x) = -(x-1)^3 + 1,2(x-1)^2 + 1,3(x-1) + 0,5$, а тот в свою очередь в точке $x = 2$ в многочлен $\varphi_2(x) = 0,6(x-2)^3 - 1,8(x-2)^2 + 0,7(x-2) + 2$.

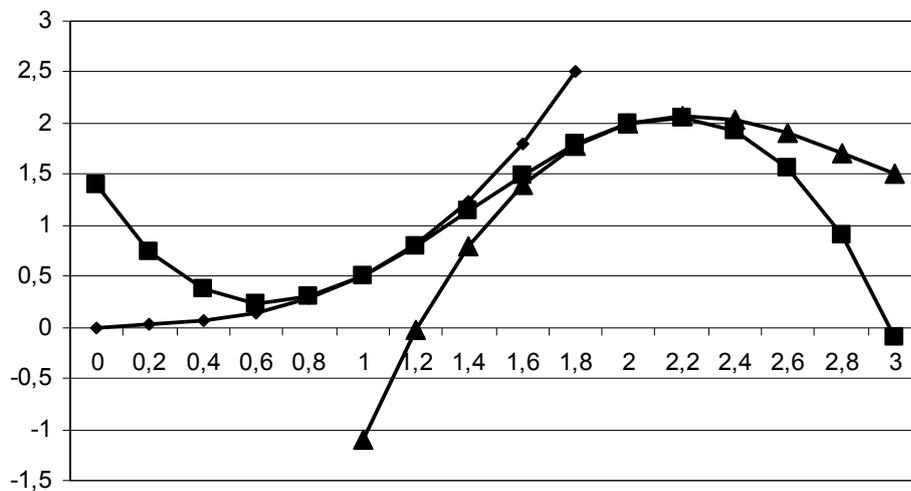


Рис. 5.3. Графики многочленов кубического сплайна $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

В общем случае итерационная процедура нахождения коэффициентов кубических многочленов следующая.

1. Находятся значения h_K по формуле $h_K = x_{K+1} - x_K$ при $K = 0, 1, \dots, N-1$.

2. Находятся значения g_K по формуле $g_K = \frac{y_{K+1} - y_K}{h_K}$ при

$K = 0, 1, \dots, N-1$.

3. Находятся значения u_K по формуле $u_K = 6(g_K - g_{K-1})$ при $K = 1, \dots, N-1$.

4. Находятся значения m_K при решении системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1, \\ h_{K-1}m_{K-1} + 2(h_{K-1} + h_K)m_K + h_Km_{K+1} = u_K, \quad K = 2, 3, \dots, N-2, \\ h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1}. \end{cases}$$

5. Принимается $m_0 = m_N = 0$.

6. Находятся значения коэффициентов a_K, b_K, c_K, d_K кубических полиномов при $K = 0, 1, \dots, N-1$ по следующим формулам:

$$a_K = y_K, \quad c_K = \frac{m_K}{2}, \quad d_K = \frac{m_{K+1} - m_K}{6h_K},$$

$$b_K = g_K - \frac{h_K(2m_K + m_{K+1})}{6}.$$

Результаты нахождения коэффициентов кубических многочленов сплайна для рассмотренного выше примера (значения узловых точек: $\{0; 0\}, \{1; 0,5\}, \{2; 2\}, \{3; 1,5\}$) даны в таблице 5.4.

Таблица 5.4. Значения коэффициентов многочленов кубического сплайна

i	x_i	y_i	h_i	g_i	u_i	m_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	0	1	0,5		0	0	0,1	0	0,4
1	1	0,5	1	1,5	6	0,5	0,5	1,3	1,2	-1
2	2	2	1	-0,5	-12	2	2	0,7	-1,8	0,6
3	3	1,5								

Для получения приближенного значения в точке $x \neq x_i$, также как и в случае с параболическим сплайном, требуется сначала определить, к какому интервалу принадлежит x , после чего вычислить значение соответствующего кубического многочлена $\varphi_i(x)$.

5.6. Метод наименьших квадратов

При проведении исследований часто получают совокупность узловых точек $\{x_1; y_1\}, \{x_2; y_2\}, \dots, \{x_N; y_N\}$, про которые априорно известно, что они определены с экспериментальной погреш-

ностью. Поэтому не имеет смысла добиваться выполнения условия Лагранжа, чтобы интерполирующая функция обязательно проходила бы через узловые точки. Достаточно того, чтобы ошибки интерполяции (отклонения или остатки) были бы минимальны.

Предположим, что интерполирующая функция имеет вид

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ – базисные функции, выбираемые исходя из предметной области исследования.

Погрешность интерполяции в точке x_i равна $|\varphi(x_i) - y_i|$.

Среднеквадратичная ошибка интерполяции σ в точках x_1, x_2, \dots, x_N

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varphi(x_i) - y_i]^2}.$$

Обозначим Q значение суммы:

$$Q = \sum_{i=1}^N [\varphi(x_i) - y_i]^2.$$

Задача интерполяции по методу наименьших квадратов сводится к нахождению значений коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_m , при которых величина Q будет иметь минимальное значение.

Для нахождения значений c_1, c_2, \dots, c_m требуется вычислить частные производные величины Q по этим коэффициентам, приравнять их к нулю и решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial c_1} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial c_2} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial c_m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - y_i)\varphi_1(x_i) = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - y_i)\varphi_2(x_i) = 0, \\ \dots \\ 2 \sum_{i=1}^n (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - y_i)\varphi_m(x_i) = 0. \end{cases}$$

Сократим на 2 левую часть уравнений, раскроем скобки и перенесем слагаемые, не зависящие от c_1, c_2, \dots, c_m , в правую часть уравнений. В результате получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (c_1 \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) \varphi_1(x_i)) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_1(x_i), \\ \sum_{i=1}^n (c_1 \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) \varphi_2(x_i)) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_2(x_i), \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n (c_1 \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) \varphi_m(x_i)) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_m(x_i). \end{cases}$$

В матричной форме такая система имеет вид

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1 \varphi_1) & (\varphi_1 \varphi_2) & \dots & (\varphi_1 \varphi_m) \\ (\varphi_1 \varphi_2) & (\varphi_2 \varphi_2) & \dots & (\varphi_2 \varphi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1 \varphi_m) & (\varphi_2 \varphi_m) & \dots & (\varphi_m \varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1 y) \\ (\varphi_2 y) \\ \dots \\ (\varphi_m y) \end{bmatrix},$$

где $(\varphi_j \varphi_k) = \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i)$, $(\varphi_j y) = \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) y_i$.

Введем обозначения:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} (\varphi_1 \varphi_1) & (\varphi_1 \varphi_2) & \dots & (\varphi_1 \varphi_m) \\ (\varphi_1 \varphi_2) & (\varphi_2 \varphi_2) & \dots & (\varphi_2 \varphi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1 \varphi_m) & (\varphi_2 \varphi_m) & \dots & (\varphi_m \varphi_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} (\varphi_1 y) \\ (\varphi_2 y) \\ \dots \\ (\varphi_m y) \end{bmatrix},$$

тогда получим матричное уравнение

$$\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Y},$$

где $\mathbf{\Gamma}$ – квадратная матрица, имеющая размер $m \times m$, называемая матрицей Грама.

Свойства матрицы Грама:

- 1) матрица Грама является квадратной;
- 2) она является симметричной.

Вектор-столбец неизвестных коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_m определяется по формуле

$$C = \Gamma^{-1} \cdot Y,$$

где Γ^{-1} – квадратная матрица, обратная матрице Грама.

Рассмотрим конкретный пример. Даны результаты измерений: $\{0; 0\}$, $\{1; 0,5\}$, $\{2; 2\}$, $\{3; 1,5\}$. Требуется по методу наименьших квадратов провести прямую, проходящую через начало координат. Уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $y = kx$. Тогда имеем: $m = 1$, $c_1 = k$, $\varphi_1(x) = x$. В данном случае

$$(\varphi_1 \varphi_1) = \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$(\varphi_1 y) = \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) y_i = \sum_{i=1}^n (x_i y_i).$$

Значение c_1 определяется по формуле $c_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Для при-

веденных результатов измерений

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14; \quad \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 0 + 0,5 + 4 + 4,5 = 9;$$

$$c_1 = \frac{9}{14} \approx 0,625.$$

Получаем уравнение прямой $y = 0,625x$, проходящей через начало координат. Задача решена.

Рассмотрим случай, когда результаты измерений $\{0; 0\}$, $\{1; 0,5\}$, $\{2; 2\}$, $\{3; 1,5\}$ требуется аппроксимировать произвольной прямой. В этом случае уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. Тогда имеем: $m = 2$, $c_1 = k$, $\varphi_1(x) = x$, $c_2 = b$, $\varphi_2(x) = 1$.

В данном случае $(\varphi_1\varphi_1) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $(\varphi_1\varphi_2) = \sum_{i=1}^n x_i$, $(\varphi_2\varphi_2) = n$,

$(\varphi_1y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $(\varphi_2y) = \sum_{i=1}^n y_i$. Матрица Грама имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Найдем решение методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 6 \cdot 6 = 56 - 36 = 20;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 36 - 24 = 12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 6 \cdot 9 = 56 - 54 = 2.$$

Получаем значения: $c_1 = 12 : 20 = 0,6$; $c_2 = 2 : 20 = 0,1$.

Уравнение прямой имеет вид $y = 0,6x + 0,1$. Задача решена.

Рассмотрим более сложный случай, когда результаты измерений $\{0; 0\}$, $\{1; 0,5\}$, $\{2; 2\}$, $\{3; 1,5\}$ требуется аппроксимировать параболой. В общем случае уравнение параболы принимает вид $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Тогда имеем: $m = 3$, $c_1 = a_0$, $\varphi_1(x) = 1$, $c_2 = a_1$, $\varphi_2(x) = x$, $c_3 = a_2$, $\varphi_3(x) = x^2$.

В данном случае $(\varphi_1\varphi_1) = n$, $(\varphi_2\varphi_2) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $(\varphi_3\varphi_3) = \sum_{i=1}^n x_i^4$,

$(\varphi_1\varphi_2) = \sum_{i=1}^n x_i$, $(\varphi_1\varphi_3) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $(\varphi_2\varphi_3) = \sum_{i=1}^n x_i^3$, $(\varphi_1y) = \sum_{i=1}^n y_i$,

$(\varphi_2y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $(\varphi_3y) = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$.

Для данных точек имеем: $n = 4$, $\sum_{i=1}^4 x_i = 6$, $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 14$,
 $\sum_{i=1}^4 x_i^3 = 36$, $\sum_{i=1}^4 x_i^4 = 98$, $\sum_{i=1}^4 y_i = 4$, $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 9$, $\sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i = 22$.

Матрица Грама принимает вид

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Найдем решение методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{vmatrix} = 80; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 9 & 14 & 36 \\ 22 & 36 & 98 \end{vmatrix} = -12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 6 & 9 & 36 \\ 14 & 22 & 98 \end{vmatrix} = 108; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 9 \\ 14 & 36 & 22 \end{vmatrix} = -20.$$

Получаем: $c_1 = -12 : 80 = -0,15$, $c_2 = 108 : 80 = 1,35$,
 $c_3 = -20 : 80 = -0,25$.

Уравнение параболы имеет вид $y = -0,15 + 1,35x - 0,25x^2$.

На рис. 5.4 показаны графики трех функций: $y = 0,625x$,
 $y = 0,6x + 0,1$, $y = -0,15 + 1,35x - 0,25x^2$, полученных методом наименьших квадратов.

Значение величины Q , определяющей погрешность интерполяции, составило:

- 0,71 – при аппроксимации прямой, проходящей через начало координат;
- 0,7 – при аппроксимации произвольной прямой;
- 0,45 – при аппроксимации параболой.

Увеличение степени полинома приводит, с одной стороны, к уменьшению суммарной ошибки Q , с другой стороны – к увеличению времени вычисления неизвестных коэффициентов

c_1, c_2, \dots, c_m . Для оценки приемлемого значения числа степени многочлена используют величину

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n (P_m(x_i) - y_i)^2}.$$

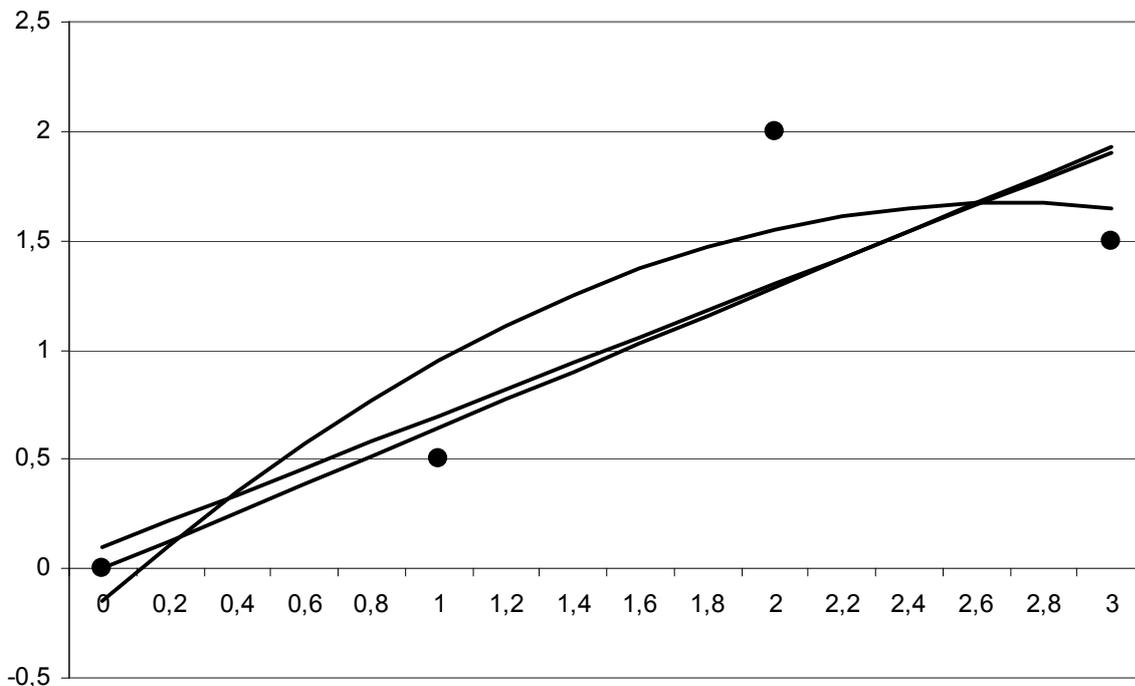


Рис. 5.4. Графики функций, полученных методом наименьших квадратов, для узловых точек $\{0;0\}$, $\{1;0,5\}$, $\{2;2\}$, $\{3;1,5\}$

За оптимальное значение степени многочлена следует принять то значение m , начиная с которого величина σ_m стабилизируется или начинает возрастать.

5.7. Интерполяция тригонометрическим полиномом

Если требуется провести интерполяцию данных, имеющих периодический характер, то в качестве базисных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ следует выбирать периодические функции. Одним из таких способов является интерполяция тригонометрическим полиномом.

Тригонометрический полином порядка M имеет вид

$$T_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^M (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Коэффициенты тригонометрического полинома a_j , b_j выбираются из условия минимизации величины $Q = \sum_{i=1}^N [T_M(x_i) - y_i]^2$,

то есть находятся по методу наименьших квадратов. Для нахождения коэффициентов a_j , b_j используют соотношения [3]:

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^n y_i \cos jx_i, \text{ где } j = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^n y_i \sin jx_i, \text{ где } j = 1, 2, \dots, M.$$

Пример. Дана функция $y = 5x$ на интервале $[-\pi; \pi]$. Требуется аппроксимировать ее тригонометрическими полиномами порядка 1, 2, 3. Узловые точки расположены равномерно на данном интервале.

Поскольку функция $y = 5x$ – нечетная, то коэффициенты при членах с косинусами равны нулю: $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, поэтому тригонометрический полином включает только члены с синусами. Расчет коэффициентов b_j по приведенной выше формуле дал следующие значения: $b_1 = 9,01891$, $b_2 = -4,18569$, $b_3 = 2,41661$. Уравнения тригонометрических полиномов имеют вид

$$T_1(x) = 9,01891 \sin x,$$

$$T_2(x) = 9,01891 \sin x - 4,18569 \sin 2x,$$

$$T_3(x) = 9,01891 \sin x - 4,18569 \sin 2x + 2,41661 \sin 3x.$$

Графики функции $y = 5x$ и тригонометрических полиномов приведены на рис. 5.5.

Видно, что с увеличением степени тригонометрического полинома его график имеет лучшее приближение к прямой $y = 5x$ (см. рис. 5.5).

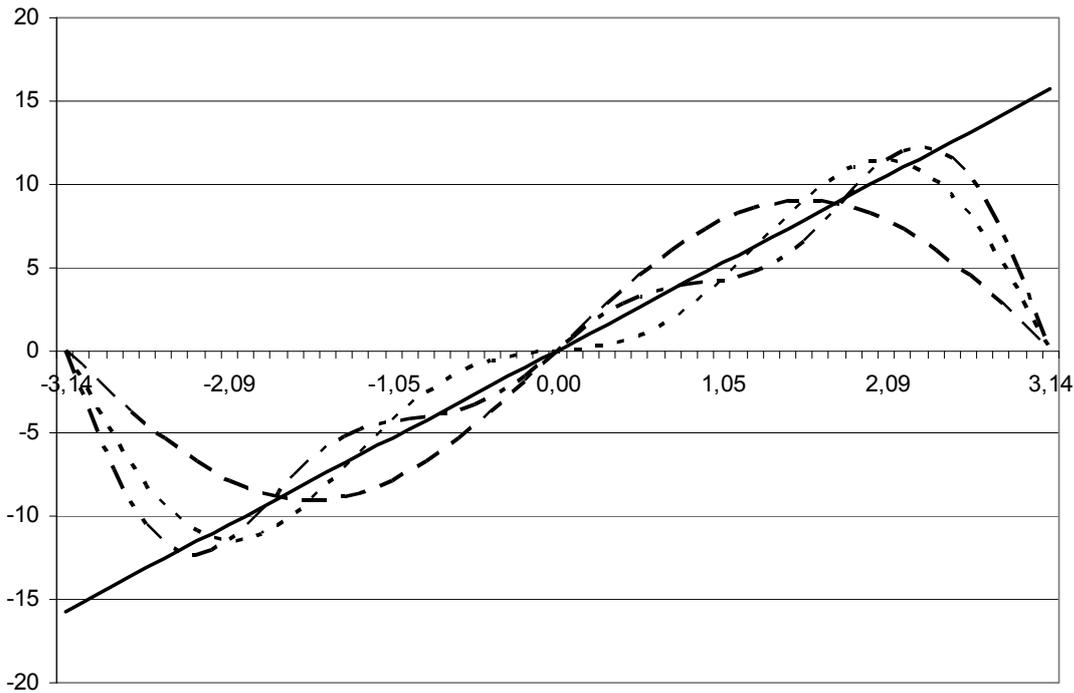


Рис. 5.5. Функция $y = 5x$ и тригонометрические приближения $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$

Значительные отклонения наблюдаются на концах интервала интерполяции, причем чем выше степень полинома, тем ближе к концам интервала начинаются эти отклонения.

5.8. Интерполяция кривой Безье

Кривые Безье появились сравнительно недавно. В 1960 годах Пьер Безье и Поль де Кастельжо, работая в автомобильных компаниях Рено и Ситроен, предложили использовать кривые при проектировании кузовов автомобилей.

Предположим, что имеется $n + 1$ опорных точек. Кривая Безье в параметрическом виде задается выражением [7]:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где P_i – функция компонентов векторов опорных точек; $b_{i,n}$ – базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна.

Базисные функции $b_{i,n}$ определяются выражениями

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

где $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ – число сочетаний из n по i ; n – степень полинома; i – порядковый номер опорной вершины.

Если кривую Безье строят по четырем опорным точкам ($n = 3$), то в параметрическом виде

$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3, \quad t \in [0;1].$$

В матричной форме кубическую кривую Безье можно записать в виде [7]

$$B(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Несмотря на сложный аналитический вид, итерационная процедура отыскания точек, принадлежащих кривой Безье, очень простая.

Зададим значение параметра $t = 0,25$. На рис. 5.6 показан процесс нахождения соответствующей точки.

Соединим точки P_0 и P_1 отрезком. Найдем координаты точки P_{01} , принадлежащей этому отрезку, из условия $\frac{|P_0P_{01}|}{|P_0P_1|} = t = 0,25$.

Повторив подобные действия для пар точек P_1 и P_2 , P_2 и P_3 , найдем точки P_{12} , P_{23} : $\frac{|P_1P_{12}|}{|P_1P_2|} = t = 0,25$, $\frac{|P_2P_{23}|}{|P_2P_3|} = t = 0,25$.

Теперь повторим все действия сначала, используя в качестве опорных точек P_{01} , P_{12} , P_{23} . В результате получим координаты точек P_{012} , P_{123} : $\frac{|P_{01}P_{012}|}{|P_{01}P_{12}|} = t = 0,25$, $\frac{|P_{12}P_{123}|}{|P_{12}P_{23}|} = t = 0,25$.

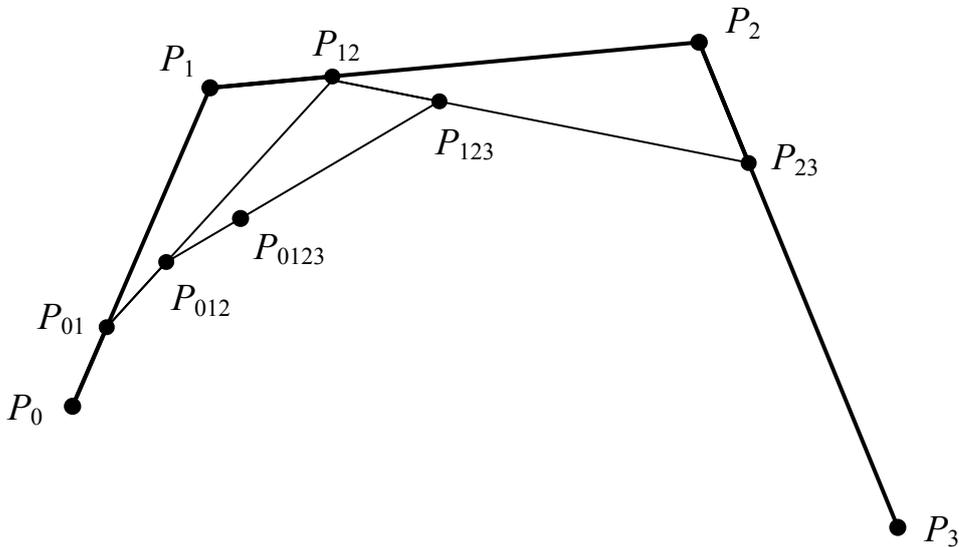


Рис. 5.6. Нахождение точки кривой Безье при $t = 0,25$

Повторив итерационную процедуру в последний раз для опорных точек P_{012} , P_{123} , получим координаты точки P_{0123} , которая принадлежит кривой Безье: $\frac{|P_{012}P_{0123}|}{|P_{012}P_{123}|} = t = 0,25$.

Выбрав другое значение параметра t , можно, действуя по описанному выше алгоритму, получить координаты другой точки, принадлежащей кривой Безье. На рис. 5.7 показан процесс определения координат точки при $t = 0,5$.

Множество точек, из которых состоит кривая Безье, можно получить, меняя параметр t в интервале от 0 до 1. На рис. 5.8 показана кривая Безье для четырех точек.

Кривая Безье обладает следующими свойствами:

- она непрерывна;
- располагается внутри фигуры, образованной отрезками, соединяющими опорные точки;
- изменение координат хотя бы одной опорной точки ведет к изменению формы всей кривой;

- первая и последняя опорные точки принадлежат кривой Безье;
- зависит от порядка опорных точек.

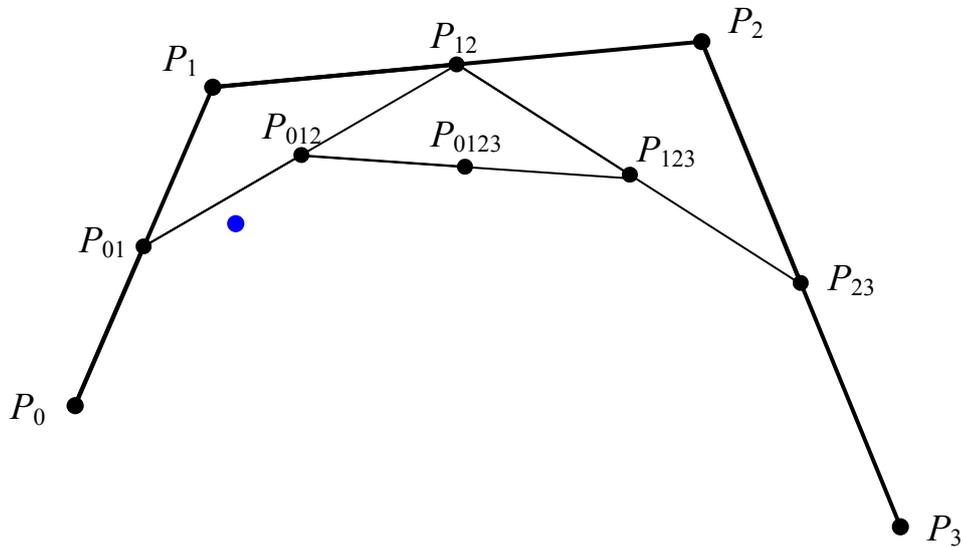


Рис. 5.7. Нахождение точки кривой Безье при $t = 0,5$

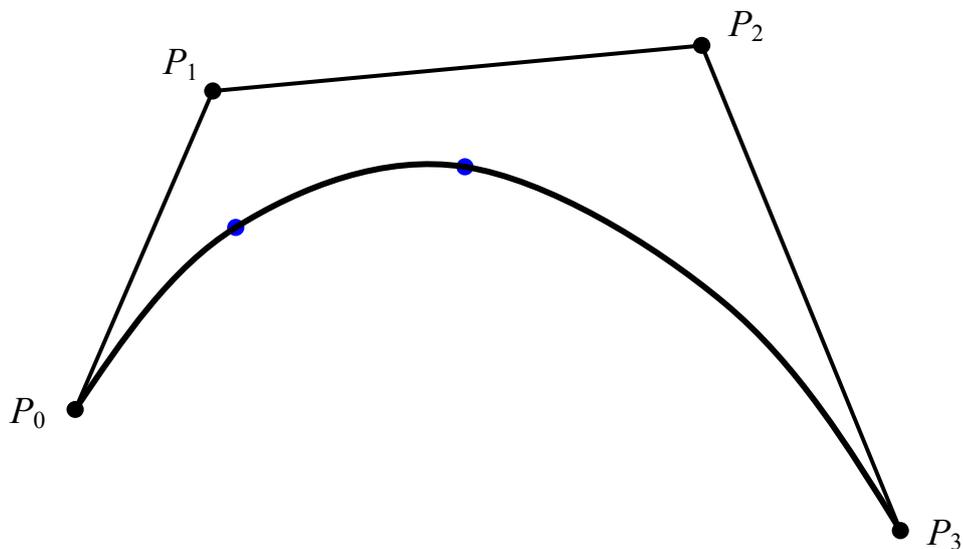


Рис. 5.8 Кривая Безье, построенная по четырем точкам

Благодаря простоте задания и преобразований, кривые Безье нашли широкое применение в компьютерной графике – это один из способов получения гладких линий. Математический алгоритм, лежащий в основе кривых Безье, может быть расширен на трехмерный случай для построения поверхностей Безье.

5.9. Вопросы и упражнения

1. Дайте определение понятию интерполяции.
2. Дайте определение понятию экстраполяции.
3. Сформулируйте условие Лагранжа в задачах интерполяции.
4. Определите коэффициенты интерполяционного полинома Ньютона для данных узловых точек: $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$, $\{4, 0; 0, 9\}$, $\{5, 0; 0, 7\}$.
5. Возможно ли построение интерполяционного полинома Ньютона, если у двух точек из совокупности одинаковые абсциссы, но разные ординаты?
6. Определите коэффициенты многочленов параболического сплайна для данных узловых точек: $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$. Значение первой производной многочлена сплайна в начале интервала интерполяции принять равным единице.
7. Определите коэффициенты многочленов параболического сплайна для данных узловых точек: $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$. Значение первой производной многочлена сплайна в конце интервала интерполяции принять равным нулю.
8. Найдите коэффициенты многочленов кубического сплайна для данных узловых точек $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$. Значение второй производной многочленов сплайна на концах интервала принять равным нулю.
9. Запишите уравнение прямой линии, проходящей через начало координат, угловой коэффициент которой найден по методу наименьших квадратов для данной совокупности точек: $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$, $\{4, 0; 0, 9\}$, $\{5, 0; 0, 7\}$. Чему равна максимальная ошибка интерполяции?
10. Запишите уравнение произвольной прямой линии, коэффициенты которой найдены по методу наименьших квадратов для данной совокупности точек: $\{1, 0; 3, 6\}$, $\{2, 0; 1, 8\}$, $\{3, 0; 1, 2\}$, $\{4, 0; 0, 9\}$, $\{5, 0; 0, 7\}$. Чему равна максимальная ошибка интерполяции?
11. Запишите уравнение параболы, коэффициенты которой найдены по методу наименьших квадратов для данной совокуп-

ности точек: $\{1,0;3,6\}$, $\{2,0;1,8\}$, $\{3,0;1,2\}$, $\{4,0;0,9\}$, $\{5,0;0,7\}$.
Чему равна максимальная ошибка интерполяции?

12. Возможно ли построение интерполяционной функции по методу наименьших квадратов, если у двух точек из совокупности одинаковые абсциссы, но разные ординаты?

13. Приведите примеры координат четырех точек, когда не удастся построить интерполяционную функцию по методу наименьших квадратов.

14. Определите коэффициенты тригонометрического полинома второго порядка для данных узловых точек: $\{-2,0;3,6\}$, $\{-1,0;1,8\}$, $\{0,0;1,2\}$, $\{1,0;0,9\}$, $\{2,0;0,7\}$. Чему равна максимальная ошибка интерполяции?

15. Постройте параметрическое уравнение кривой Безье по узловым точкам: $P_0 = (10;36)$, $P_1 = (20;18)$, $P_2 = (30;12)$, $P_3 = (40;29)$.

16. Постройте параметрическое уравнение кривой Безье по узловым точкам: $P_0 = (10;36)$, $P_1 = (30;12)$, $P_2 = (20;18)$, $P_3 = (40;29)$.

17. Постройте параметрическое уравнение кривой Безье по узловым точкам: $P_0 = (10;36)$, $P_1 = (30;12)$, $P_2 = (40;29)$.

Литература

1. Кнут Д.Э. Искусство программирования / Д.Э. Кнут ; пер. Ю.В. Козаченко. – М.: Вильямс, 2003. – 832 с.
2. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. – М.: Мир, 1989. – 360 с.
3. Мэтьюз Д.Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
4. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
5. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А.Е. Мудров. – Томск: РАСКО, 1991. – 272 с.
6. Соболев И.Д. Численные методы Монте-Карло / И.Д. Соболев. – М. : Наука, 1973. – 312 с.
7. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

Оглавление

Предисловие.....	3
1. СОРТИРОВКА ДАННЫХ.....	5
1.1. Сортировка подсчетом.....	6
1.2. Сортировка вставками.....	9
1.3. Сортировка выбором.....	11
1.4. Обменная сортировка «пузырьком».....	13
1.5. Сортировка методом Шелла.....	14
1.6. «Быстрая» сортировка.....	16
1.7. Сравнение алгоритмов сортировки.....	18
1.8. Вопросы и упражнения.....	20
2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.....	22
2.1. Метод половинного деления (дихотомии).....	24
2.2. Метод хорд (ложного положения).....	26
2.3. Метод Ньютона (касательных).....	29
2.4. Модифицированный метод Ньютона.....	32
2.5. Метод секущих.....	34
2.6. Метод Мюллера.....	36
2.7. Метод итераций.....	38
2.8. Эффективность численных методов решения уравнений.....	42
2.9. Вопросы и упражнения.....	43
3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ.....	45
3.1. Метод Крамера.....	45
3.2. Метод Гаусса.....	47
3.3. Итеративный метод Якоби.....	53
3.4. Итеративный метод Гаусса – Зейделя.....	54
3.5. Вопросы и упражнения.....	55
4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	57
4.1. Метод прямоугольников.....	58
4.2. Метод трапеций.....	64
4.3. Метод парабол (Симпсона или Ньютона – Симпсона).....	66
4.4. Метод Симпсона 3/8.....	70
4.5. Метод Буля.....	71
4.6. Сравнение различных методов по точности приближения.....	71
4.7. Численное интегрирование методом Гаусса – Лежандра.....	73
4.8. Численное решение интеграла методом Монте-Карло.....	79
4.9. Вопросы и упражнения.....	83
5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ.....	86
5.1. Интерполяция алгебраическим полиномом.....	86
5.2. Интерполяционный полином Лагранжа.....	88
5.3. Интерполяционный полином Ньютона.....	89

5.4. Интерполяция параболическим сплайном.....	91
5.5. Интерполяция кубическим сплайном	95
5.6. Метод наименьших квадратов	100
5.7. Интерполяция тригонометрическим полиномом	106
5.8. Интерполяция кривой Безье.....	108
5.9. Вопросы и упражнения.....	112
Литература	114