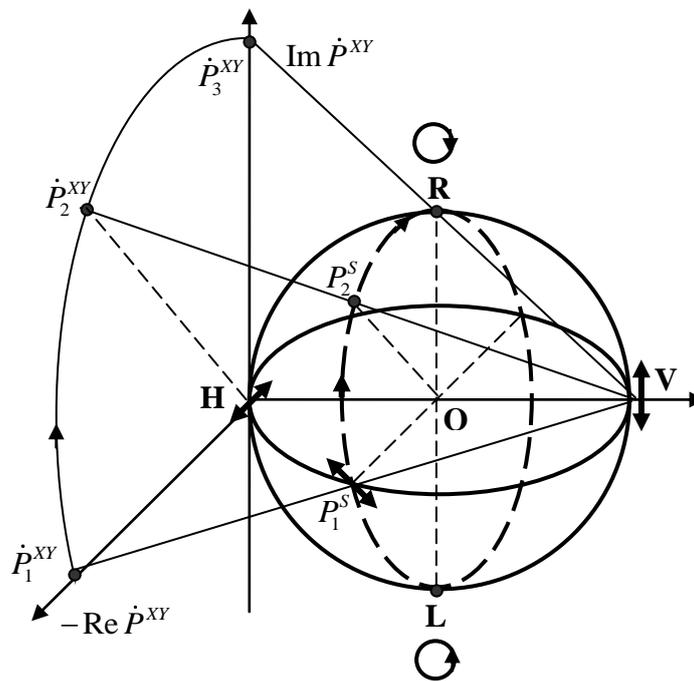


В.Н. ТАТАРИНОВ  
С.В. ТАТАРИНОВ  
Л.П. ЛИГТХАРТ

# ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯРИЗАЦИИ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ



В.Н.ТАТАРИНОВ, С.В.ТАТАРИНОВ,  
Л.П.ЛИГТХАРТ

**ВВЕДЕНИЕ  
В СОВРЕМЕННУЮ ТЕОРИЮ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ  
РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ**

*Под редакцией  
В.Н.ТАТАРИНОВА*

**ТОМ ПЕРВЫЙ**

**ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
ВОЛН И ЕЁ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Издание второе, стереотипное



**Профессор**  
**Владислав Александрович Потехин**

*Светлой памяти профессора  
Владислава Александровича Потехина  
посвящается эта книга*

УДК 621.396.96

ББК 32.845

T12

НАУЧНАЯ СЕРИЯ

**ПОЛЯРИЗАЦИЯ РАДИОВОЛН**

Редактор серии А.И.Козлов

**Редакционная коллегия:**

Н.В. Акиншин, Б.Г. Кутуза, А.И. Логвин, Д.С. Лукин,

В.А. Сарычев, В.Н. Татаринов, А.П. Трифонов, Д.И. Колядов

**Рецензенты:**

проф., докт. техн. наук А.И. Логвин, проф., докт. техн. наук Е.В. Масалов

**Татаринов В.Н., Татаринов С.В., Лигтхарт Л.П.**

Введение в современную теорию поляризации радиолокационных сигналов (Том 1. Поляризация плоских электромагнитных волн и её преобразования). – Томск: Изд. Томского университета, 2012. – 380 с.: ил. (Сер. Поляризация радиоволн; Вып.2. Ред. серии *А.И.Козлов*)

**ISBN 5-7511-1995-5**

*Книга посвящена подробному и систематическому изложению основных методов теории представления состояний поляризации плоских электромагнитных волн и её преобразований. Подробно рассмотрены методы представления и преобразования полностью поляризованных волн с использованием геометрических параметров эллипса поляризации, параметров Стокса, вектора Джонса, декартовой, круговой и обобщенной комплексных плоскостей, а также поляризационной сферы. Проанализированы понятие близости состояний поляризации и групповые свойства поляризационного отношения. Рассмотрены методы анализа частично поляризованных волн на основе использования законов интерференции и матриц когерентности (2x2), (3x3) и (4x4), методы разложения матриц когерентности с использованием полных систем матриц Паули и Дирака. Рассмотрены вопросы преобразования поляризационной структуры волн с использованием как матриц Джонса и Мюллера, так и матриц рассеяния точечных радиолокационных объектов.*

*Книга предназначена для радиоинженеров, аспирантов и студентов старших курсов радиотехнических специальностей, специализирующихся в области радиолокации.*



**Авторы, 2012**



**Издательство Томского  
университета, 2012**

## ***ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА***

Исследованию истории развития технологии использования поляризационной структуры электромагнитных волн с целью повышения информационной способности радиоэлектронных систем в бывшем Советском Союзе, а затем в Российской Федерации, посвящен ряд фундаментальных работ, опубликованных ведущими специалистами в области радиополяриметрии. Рассматривая этот вопрос, необходимо прежде всего отметить ретроспективный обзор проф. А.И.Козлова и проф. А.И.Логвина «Развитие радиополяриметрии в России» [1], статью проф. В.А.Сарычева «Сложные сигналы произвольной поляризационной и временной структуры и их применение в электросвязи» [2], а также книгу «Поляризация сигналов в сложных транспортных радиоэлектронных комплексах» [3] под редакцией А.И.Козлова и В.А.Сарычева, посвященную результатам исследований, выполненных в Академии транспорта Российской Федерации по проблеме повышения информационной способности радиоэлектронных комплексов за счет использования поляризационной структуры электромагнитных волн. Отдельным разделом в этой книге приводятся материалы, касающиеся жизни и деятельности действительного члена Академии транспорта, профессора Владислава Александровича Потехина – общепризнанного лидера отечественной научной школы радиолокационной поляриметрии.

Работы по исследованию поляризационной структуры электромагнитных волн в СССР начались в 40-е – 50-е годы 20-го века. Начиная со второй половины 50-х годов, ведущая роль в этих исследованиях принадлежала военной академии им. А.Ф.Можайского (Ленинград). Основные результаты исследований, проведенных в стенах академии и завершенных к середине 60-х годов, были опубликованы в монографиях «Поляризация радиолокационных сигналов» (Д.Б.Канарейкин, Н.Ф.Павлов, В.А. Потехин) [4] и «Морская поляриметрия» (Д.Б.Канарейкин, В.А.Потехин, И.Ф.Шишкин) [5]. Появление

этих монографий стимулировало новую волну интереса к исследованиям в данной области, а их пионерский характер был подтвержден переводом ряда глав монографии «Поляризация радиолокационных сигналов», посвященных статистической теории поляризации радиоволн, на английский язык с изданием в США под названием “Radar Polarization Effects” (New York, McMillan, 1974). К концу 60-х годов Академия им. А.Ф.Можайского становится ведущим центром бывшего Советского Союза в области радиолокационной поляриметрии. Становление этой области радиолокации в крупных научных центрах СССР, таких как Москва, Харьков, Томск, Тула, и др. связано с ведущими специалистами Академии и, прежде всего, с деятельностью В.А.Потехина.

Результаты исследований в области статистической теории поляризации и теории когерентности электромагнитного поля, определяющей поляризационно – когерентные свойства радиосигналов, были опубликованы в 1974 г. в монографиях «Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн» (С.И.Поздняк, В.А. Мелитицкий) [6] и «Вопросы классической теории частичной когерентности случайного электромагнитного поля» (В.А.Потехин, В.Н.Татаринев) [7]. В дальнейшем успешное сотрудничество Академии им. А.Ф.Можайского с Томским институтом систем управления и радиоэлектроники привело к тому, что ответственный редактор серии «Статистическая теория связи» Б.Р.Левин счел необходимым опубликовать в 1978 г. в качестве 10-го выпуска серии монографию В.А.Потехина и В.Н.Татаринова «Теория когерентности электромагнитного поля» [8]. А.И.Козлов и А.И.Логвин [1] отмечают, что в этой монографии «...вскрыты глубинные физические основы процесса поляризации электромагнитных волн, что может служить методологической основой для дальнейших углубленных исследований в этом направлении...», а В.А.Сарычев в своей статье [2] указывает, что монографии «Теория когерентности электромагнитного поля» и «Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн» в совокупности дают фундаментальный подход к задачам статистической радиополяриметрии.

Значительный вклад в создание общей теории поляризации электромагнитных волн внесла монография В.В.Богородского, Д.Б.Канарейкина и А.И. Козлова «Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов» [9], в которой был рассмотрен широкий круг вопросов, связанных как с общетеоретическими положениями поляризации электромагнитных волн, так и с поляризационными характеристиками широкого класса радиолокационных целей, включая искусственные и естественные объекты.

Исследования поляризационных свойств электромагнитных волн показали, что их использование приводит также к повышению эффективности систем связи (см. монографию А.П.Родимова и В.В.Поповского «Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех в линиях связи» [10]), а в качестве последних достижений в применении поляризационных свойств электромагнитных волн в электросвязи следует указать на использование в этой области сверхширокополосных сигналов, наделенных поляризационной структурой [2].

Таким образом, вплоть до распада СССР, лидирующее положение в мировой радиолокационной радиополяриметрии занимали работы и результаты советских ученых и специалистов. В рассматриваемый период на Западе существовала только одна серьезная научная школа, основанная проф. Дж. Хойненом (J.R.Huynen), защитившем свою Ph.-D диссертацию в Технологическом университете Делфта (Нидерланды) и затем опубликовавшем её в Роттердаме под названием «Феноменологическая теория радиолокационных целей» [11]. Данную книгу можно расценивать как один из фундаментальных вкладов в основание современной радиолокационной поляриметрии. Кроме указанной (единственной!) монографии, на Западе было опубликовано значительное число статей, посвященных различным аспектам радиолокационной поляриметрии. В качестве ведущих исследователей Запады в этой области необходимо упомянуть профессоров В.Бернера (США), К.Баума (США), Ш.Клауда (Великобритания), Е.Крогагера (Дания), З.Кжиш (Польша),

Е.Люнебурга (Германия), Л.Лигтхарта (Нидерланды), Е. Потье и Дж. Сайярда (Франция).

Но, как справедливо отмечает проф. В.А.Сарычев [2], сегодняшние реалии заключаются в том, что на Западе количество крупных научных центров в области радиополяриметрии возрастает, а в России как число таких центров, так и количество активно работающих в них ученых и специалистов заметно сократилось. Ведущие российские поляриметрические научные школы в настоящее время возглавляют А.И.Козлов, А.И.Логвин, В.А.Сарычев, В.Н.Татаринев [2].

В 2005 году издательство «Радиотехника» (Москва) выпустило в свет фундаментальную монографию А.И.Козлова, А.И.Логвина и В.А.Сарычева «Поляризационная структура радиолокационных сигналов» [12]. Эта монография представляет собой первый том научной серии «Поляризация радиоволн» (редактор серии А.И.Козлов, редакционная коллегия: Н.В.Акиншин, Б.Г.Кутуза, А.И.Логвин, Д.С.Лукин, В.А.Сарычев, В.Н.Татаринев, А.П.Трифонов, Д.В.Колядов) и является заметным событием для российских специалистов в области радиополяриметрии. Высокий научный уровень книги адресован прежде всего специалистам высшей квалификации, но, к сожалению, это делает ее малодоступной для начинающих исследователей, аспирантов, стажеров и молодых инженеров.

Отмечая, что опыт многолетнего международного сотрудничества в области радиолокационной поляриметрии выявил необходимость существования единого фундамента научных знаний и умений, а также единой научной терминологии в этой области, нетрудно понять насущную необходимость существования настольной книги, т.е. учебника и справочника по теории поляризации электромагнитных волн, пригодного для использования инженерами, аспирантами и студентами старших курсов радиотехнических и радиофизических специальностей. Предлагаемая вниманию читателей книга (ее первый том) была задумана ещё при жизни В.А.Потехина, но реальная действительность отодвинула время её подготовки почти на десять лет. В

значительной степени завершение работы над этой книгой было обусловлено активным сотрудничеством научных школ профессоров В.Н.Татарина (Россия) и Л.П.Лигтхарта (Нидерланды).

Материалы книги были использованы В.Н.Татаринным при подготовке и прочтении курса лекций «Радиолокационная поляриметрия» в Технологическом университете Делфта (Нидерланды, Делфт, 1994 г.) и в Варшавском Технологическом университете (Польша, Варшава, 1995 г.), а также В.Н.Татаринным и С.В. Татаринным при подготовке и прочтении курса лекций «Основы теории поляризации радиолокационных сигналов» в Национальной Академии наук и технологий Республики Вьетнам (Вьетнам, Ханой, 1995 г.) Книга публикуется на русском языке в Российской Федерации и на английском языке в Королевстве Нидерланды. Российское издание представляет собой второй том упомянутой выше научной серии «Поляризация радиоволн»

Авторы надеются, что данная книга будет полезна и необходима как специалистам, активно ведущим исследования в области радиолокационной поляриметрии, так и молодым ученым, которые считают необходимым получение достаточно высокого уровня теоретического образования для участия в этих исследованиях.

*Проф. В.Н.Татариннов*

## **ВВЕДЕНИЕ**

Все без исключения монографии, изданные более чем за 50 лет проведения исследований в области изучения и использования поляризационной структуры электромагнитных волн в радиолокации, представляют собой специальные издания, требующие от читателя достаточно высокого уровня знаний. В связи с этим возникла необходимость издания учебного пособия, способного обеспечить этот уровень как для инженеров, работающих в области радиолокации, так и для аспирантов и студентов старших курсов радиотехнических и радиофизических факультетов, желающих специализироваться в данной области.

Предлагаемая книга базируется на основных положениях электродинамики и оптики, а её содержание составляют необходимые сведения из области теории поляризации плоских электромагнитных волн и преобразований поляризации простыми (т.е. не дающими дифракционного изображения) приборами и радиолокационными объектами. Указанные материалы представлены на достаточном уровне математической и физической строгости.

Книга содержит пять глав.

В первой главе рассматриваются методы представления поляризационных параметров полностью поляризованных электромагнитных волн. Изложение ведется таким образом, чтобы продемонстрировать тесную взаимосвязь между всеми методами представления поляризационных параметров волн: геометрическим методом, методом параметров Стокса, методом вектора Джонса, методом поляризационного отношения в различных поляризационных базисах, методом представления поляризации волн на комплексных плоскостях различного типа и методом представления поляризационных параметров на поляризационной сфере. Глава завершается анализом вопроса близости состояний поляризации и рассмотрением групповых свойств поляризационного отношения. Последнее позволит в будущем определить понятие

поляризационных радиолокаторов как подкласса радиолокационных систем, использующих отношение сигналов.

Вторая глава посвящена рассмотрению методов анализа частично поляризованных плоских электромагнитных волн. С использованием комплексного аналитического сигнала вводятся физически обоснованные понятия матрицы когерентности и степени поляризации частично поляризованной волны, рассмотрена спектральная форма матрицы когерентности, введенная Н.Винером еще в 20-е годы прошлого века и уступившая место матрице когерентности квазимонохроматической волны в 50-е годы в связи с отсутствием технической возможности определения спектральных и взаимно-спектральных характеристик проекций случайного векторного процесса в реальном масштабе времени. Однако, в настоящее время, когда средства вычислительной техники предоставили инженерам и радиофизикам эту возможность, использование спектральной формы матрицы когерентности позволяет значительно расширить функциональные возможности поляризационных радиолокаторов в задачах дистанционного зондирования природных сред. Рассмотрены методы анализа  $(2 \times 2)$  матриц когерентности на основе использования общей формы матрицы когерентности, рассмотрены вопросы параметрического описания сумм некоррелированных и коррелированных потоков излучения на основе полных систем матриц Паули и Дирака, определена степень поляризации сумм таких потоков, проанализировано влияние электродинамической калибровки на структуру  $(3 \times 3)$  матрицы когерентности произвольно ориентированной волны и найдено выражение для степени поляризации этой волны, включающее в себя, как частный случай, известную формулу для степени поляризации волны, характеризуемой  $(2 \times 2)$  матрицей когерентности.

В третьей главе рассмотрено представление преобразований поляризационной структуры электромагнитных волн простыми приборами, входящими в состав радиолокационного канала. Основной анализ проведен с использованием аппарата матриц Джонса и Мюллера. Исследованы

характеристики основных приборов, используемых в волноводном тракте радиолокатора для формирования поляризации излучаемой волны и преобразования поляризации принимаемой волны:

- линейные, круговые и эллиптические поляризаторы;
- фазосдвигающие устройства для изменения угла эллиптичности эллипса поляризации;
- фазосдвигающие устройства с круговыми собственными поляризациями для изменения азимута эллипса поляризации;
- фазосдвигающие полуволновые устройства с линейными собственными поляризациями для изменения азимута эллипса поляризации;
- фазосдвигающие четвертьволновые устройства. Комбинации полуволнового и четвертьволнового устройств.

Рассмотрено соответствие матриц Джонса и Мюллера простых приборов матрицам Паули и матрицам Дирака, что позволяет установить физический смысл разложения матриц, характеризующих простые приборы, по полным системам линейно независимых матриц.

Четвертая глава посвящена анализу матрицы рассеяния, определяющей поляризационные свойства стабильных точечных радиолокационных объектов. Понятие «точечного» радиолокационного объекта вводится с использованием дифракционного интеграла Стрэттона-Чу. Рассмотрена теорема взаимности и связь понятия матрицы рассеяния с понятием эффективной поверхности рассеяния. Проанализированы матрицы рассеяния простейших радиолокационных объектов, таких как двухвибраторный объект, трехгранный уголкового отражатель, двугранный уголкового отражатель. Изучено понятие матрицы рассеяния мощности (матрица Грейвса) и введена величина поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности. Рассмотрены понятия собственных поляризаций радиолокационного объекта, а также поляризаций нулевого сигнала. Приведено геометрическое представление этих поляризаций как на комплексной плоскости, так и на поляризационной сфере. В заключение главы введены понятия

поляризационной и амплитудной передаточных функций радиолокационного объекта.

Заключительная, пятая глава книги посвящена анализу поляризационных инвариантов матриц рассеяния точечных радиолокационных объектов и вопросам их использования в задаче декомпозиции (разложения) матрицы рассеяния. В качестве первого примера декомпозиции рассмотрено разложение матрицы Грейвса с использованием поляризационных инвариантов. Затем введено понятие комплексной степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта, позволяющее максимально эффективно учесть как геометрические, так и электрофизические параметры этого объекта. Показано, что понятие комплексной степени поляризационной анизотропии позволяет ввести представление радиолокационных объектов как на комплексной плоскости радиолокационных объектов, так и на поляризационной сфере радиолокационных объектов. Введено и подробно проанализировано понятие поляризационной близости радиолокационных объектов, позволяющее определить объективный поляризационный контраст двух объектов при радиолокационном наблюдении. Для удобства использования понятия близости состояний поляризации рассмотрено упрощенное обоснование этого понятия, дающее ему четкую физическую трактовку.

Таким образом, в данной книге приводится обширный теоретический материал, связанный с проблемами, возникающими в радиолокации в случае использования поляризационной информации.

Возникает вопрос: а не является ли достаточным для инженера-разработчика или аспиранта изучение небольшого числа оригинальных работ, позволяющих ему либо сделать некоторые полезные выводы, либо обосновать предлагаемый технический вариант радиолокационной системы? Для ответа на этот вопрос авторы хотели бы привести цитату из книги Э.Ханта «Искусственный интеллект» (Пер. с англ. под ред. В.Ф.Стефанюка, «Мир», М. 1978, 560 с.) о том, что использование всего лишь нескольких статей напоминает ситуацию когда «...студенту предлагается прекрасный вид на

несколько деревьев (выбранных преподавателем), но не дается никакого понятия ни о самом лесе, ни о ботанике».

В связи с изложенным авторы надеются, что предлагаемая книга, содержащая основы теории «поляризованного леса» и «поляризационную ботанику», сможет служить в качестве руководства для получения базового образования в области теории поляризации электромагнитных волн применительно к задачам радиолокации.

## **ГЛАВА I**

### **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛНОСТЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

В первой главе книги рассмотрены основные методы представления поляризационной структуры полностью поляризованных плоских электромагнитных волн. Материал главы базируется на результатах основополагающих работ в области теории поляризации и когерентности электромагнитных волн, а также на сведениях из электродинамики и оптики.

#### **1.1 Понятие поляризации электромагнитных волн. Основные типы и состояния поляризации.**

Поперечные волны обладают уникальным свойством, присущим им по самой природе и известным под названием «поляризация волн». Поляризация является общим свойством векторных поперечных волн, в том числе - электромагнитных волн. Это свойство устанавливает характер изменения во времени пространственной взаимосвязи между направлением распространения волны и направлением вектора её электрической или магнитной напряженности, наблюдаемое в фиксированной точке пространства.

Физические результаты теории Максвелла показывают, что бегущая в пространстве электромагнитная волна представляет собой периодическое изменение (в пространстве и времени) взаимно перпендикулярных векторов электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей, изменяющихся в одинаковой фазе (т.е. когерентных) и ортогональных направлению распространения.

При этом необходимо отметить, что теория Максвелла утверждает только, что векторы электрической и магнитной напряженности поля лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, но не накладывает никаких ограничений ограничения на поведение указанных векторов в этой плоскости.

Рассматривая возможные варианты поведения вектора электрической напряженности поля, можно допустить следующее:

а) вектор  $\vec{E}$  расположен в фиксированном направлении, лежащим в данной плоскости;

б) направление вектора  $\vec{E}$  изменяется по некоторому закону;

в) направление вектора  $\vec{E}$  изменяется случайно и невозможно выделить какое-либо преимущественное направление его ориентации;

г) направление вектора  $\vec{E}$  изменяется случайно, но существует некоторое преимущественное направление его ориентации.

Все упомянутые случаи возможны, и представляют собой различные виды поляризации электромагнитной волны.

Для полного описания электромагнитного поля необходимо определить четыре вектора:

1) вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ ;

2) вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ ;

3) вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ ;

4) вектор электрического смещения  $\vec{D}$ .

Однако для анализа поляризационных свойств электромагнитного поля достаточно рассмотреть поведение вектора электрического поля. Основанием для этого служит тот факт, что при взаимодействии между электромагнитной волной и веществом, сила, действующая на электроны, определяется (с точностью до бесконечно малой поправки) вектором электрической напряженности поля.

Различают три основных вида поляризации волн:

- полностью поляризованные волны;
- абсолютно неполяризованные волны;
- частично поляризованные волны.

Полностью поляризованные и абсолютно неполяризованные волны представляют собой предельные состояния частично поляризованной волны;

соответствующие значениям её степени поляризации единица и нуль соответственно. (Понятие и количественное определение степени поляризации будут рассмотрены в дальнейшем).

Полностью поляризованные волны могут быть монохроматическими или могут обладать некоторым частотным спектром. Монохроматическая волна считается полностью поляризованной, если в течение длительного времени (по сравнению с периодом колебаний) её составляющие имеют постоянную разность фаз и постоянное соотношение амплитуд.

Состояние поляризации полностью поляризованных волн в общем случае является эллиптическим. Предельными случаями эллиптической поляризации являются линейная и круговая поляризации [4,8,9,13].

Если имеет место периодическая последовательность радиоимпульсов, то эту последовательность можно разложить в ряд Фурье, представляющий собой набор монохроматических волн, каждая из которых обязательно поляризована полностью. Если амплитудно-фазовые соотношения между пространственно ортогональными составляющими изменяются по спектру частот детерминировано, то последовательность радиоимпульсов будет полностью поляризована.

Если же полностью поляризованные состояния монохроматических составляющих спектра могут отличаться непредсказуемым образом, то результирующая волна будет поляризована частично. При абсолютной независимости (в статистическом смысле) последовательности полностью поляризованных состояний волна становится абсолютно неполяризованной [8,13]. У абсолютно неполяризованной волны её ортогональные составляющие статистически независимы.

Здесь необходимо отметить, что истинная мера поляризованности волны может быть определена лишь при её рассмотрении на бесконечно большом интервале измерений.

Действительно, если имеется частично поляризованная волна, статистическая связь пространственно-ортогональных составляющих которой

характеризуется некоторым интервалом временем корреляции, то, при анализе данной волны в пределах интервала корреляции можно сделать ошибочный вывод о полной поляризованности волны

В данной ситуации возникает вопрос: является ли частичная поляризованность или абсолютная неполяризованность некоторым внутренним свойством поля, не зависящим от способа измерения и устройства, реализующего этот способ? Если имеется оборудование, которое способно измерять поляризационные параметры волны за такие короткие интервалы, в течение которых разность фаз и соотношение амплитуд не изменяются, то результаты каждого цикла измерения будут указывать на полную поляризованность волны за время этого цикла. Однако, параметры эллипсов поляризации, полученные в результате ряда последовательных измерений, проведенных на значительном интервале времени, будут отличаться непредсказуемым образом.

Выше, при введении понятия поляризованной волны, было указано на необходимость сохранения разности фаз и отношения амплитуд на достаточно большом интервале времени. На языке теории когерентности электромагнитного поля это означает, что время измерений должно быть значительно больше интервала временной корреляции ортогональных составляющих волны. Только при этом условии можно корректно оценить меру взаимной статистической связи между ортогональными составляющими, которая и определяет вид поляризации электромагнитной волны.

Таким образом, будем считать, что истинные поляризационные свойства электромагнитного поля носят объективный характер, присущий самому электромагнитному полю и изначально не зависят от способа измерения. В процессе реальных измерений (тем более – на малых временных интервалах) измеренные параметры могут не соответствовать истинному состоянию изучаемого физического объекта (например, в задаче определения свойств радиолокационных объектов с использованием поляризационных параметров рассеянного поля).

Приступим теперь к анализу поляризационных свойств и параметров электромагнитного поля на примере полностью поляризованных плоских волн. Прежде всего, введем классификацию состояний поляризации волн.

Если колебания вектора электрического поля строго фиксированы в одном направлении, то волна называется линейно поляризованной. Эта волна может быть линейно поляризованной горизонтально, линейно поляризованной вертикально или иметь линейную поляризацию с произвольной ориентацией. Удобно представить линейно поляризованную волну как проекцию вектора электрического поля на плоскость, которая перпендикулярна направлению распространения волны  $OZ$ . В этом случае графическое представление линейно поляризованной волны есть вектор, ориентированный под углом  $\beta$  относительно положительного направления оси  $OX$ . Угол  $\beta$  мы будем называть азимутом линейно поляризованной волны или ориентационным углом (рис. 1.1).

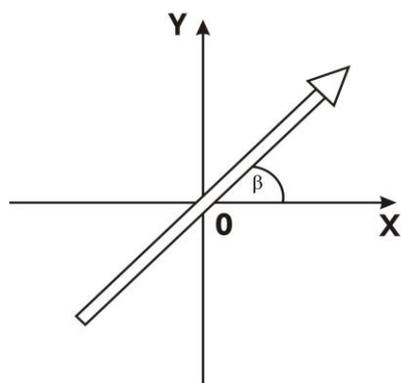


Рис.1.1

В случае, если линейно поляризованные по направлениям  $OY$  и  $OX$  волны (т.е. ортогонально поляризованные составляющие) имеют одинаковые амплитуды и совпадают по фазе, то результирующая волна также линейно поляризована по направлению с ориентацией  $\beta = 45^\circ$  (рис. 1.2). Если амплитуды равны, а сдвиг фаз составляет  $\pi$ , то результирующая волна является линейно поляризованной и имеет ориентационный угол  $\beta = -45^\circ$ . В

случае неравенства амплитуд ортогональных составляющих при фазовом сдвиге  $\Delta\varphi = n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) результирующая волна будет линейно поляризованной с азимутом  $\beta = \arctg E_y / E_x$ .

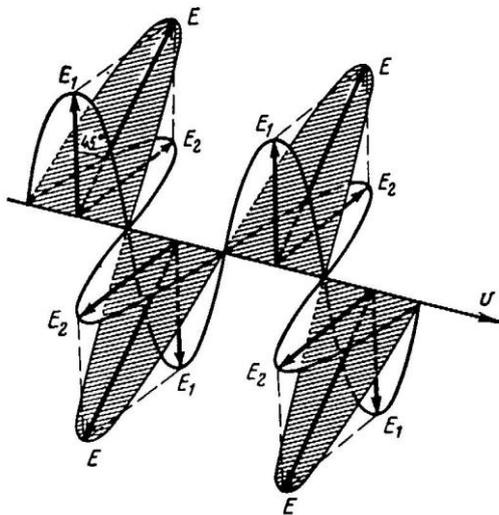


Рис.1.2

Предположим теперь, что имеется волна с равными амплитудами ортогональных составляющих а разность фаз составляет величину  $\Delta\varphi = 0.5\pi$ . Графическое построение, приведенное на Рис.1.3 показывает, что в данном случае конец электрического вектора описывает праввинтовую линию по поверхности кругового цилиндра, если смотреть против направления распространения волны. Проекция этой линии на плоскость  $XOY$  представляет собой окружность. Такое состояние поляризации результирующей волны называется круговой поляризацией с правым направлением вращения (по часовой стрелки) или просто правой круговой поляризацией.

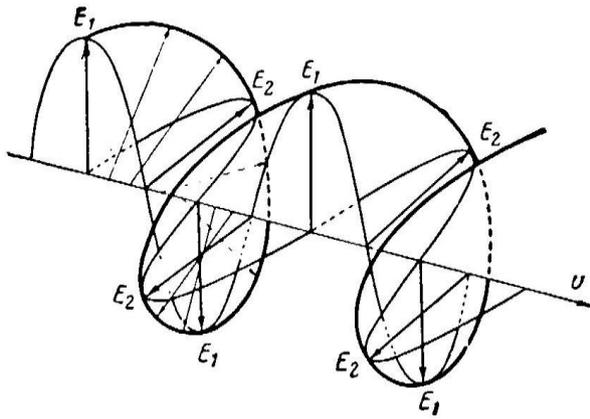


Рис.1.3

Относительно направления вращения поляризации отметим, что определение направления вращения, предполагающее наблюдение против направления распространения волны, общепринято в оптике [13,14]. (Здесь необходимо отметить, что определения института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике США прямо противоположны терминологии, принятой в оптике.) Нетрудно убедиться простым геометрическим построением, что при неравенстве амплитуд ортогональных составляющих (для фазового сдвига  $\Delta\varphi = 0.5\pi$ ) круговой цилиндр превратится в эллиптический, а проекция линии вращения конца электрического вектора на плоскость  $XOY$  будет представлять собой эллипс. Это и будет случай эллиптической поляризации. При этом форма эллипса может быть характеризована величиной эллиптичности, т.е. отношением его малой полуоси к большой полуоси.

Линейная, круговая и эллиптическая поляризации представляют собой три основных состояния полностью поляризованной волны. Более того, эллиптическая поляризация является общим случаем, предельными случаями которой являются линейная и круговая поляризационные состояния. Если эллиптичность равна нулю, то имеет место линейная поляризация, в этом случае смысл направления вращения поляризации не определен. Эллиптичность равная единице, означает круговую поляризацию, ориентация при этом не определена

Определив основные понятия, а также классификацию типов и состояний поляризации, приступим к математическому анализу поляризации с целью определения количественных критериев.

Основной анализ будет проведен для плоских монохроматических волн, изменение электрического вектора  $\vec{E}$  для которых являются синусоидальными во времени. Конечно, плоские монохроматические волны существуют на страницах книг, а реальное поле излучения, создаваемое антеннами *РЛС*, всегда ограничено в пространстве и почти всегда во времени (импульсный режим работы). Однако существуют два обстоятельства, позволяющие широко использовать плоскую монохроматическую волну в качестве основной модели при анализе состояний поляризации, а именно.

1. Аналитические результаты, полученные с использованием плоской монохроматической волны в качестве основной модели, удивительно точно совпадают с экспериментальными данными.
2. Ограниченные в пространстве и времени электромагнитные поля излучения *РЛС* в случае необходимости могут быть представлены как результат суперпозиции плоских монохроматических волн, полученных путем пространственно-временного спектрального разложения. При этом пространственное разложение в спектр плоских волн, характеризуемых направлениями их волновых векторов  $\vec{k}$ , автоматически выполняется антенной *РЛС*, так как её диаграмма направленности антенны в дальней зоне (зона Фраунгофера) есть пространственное преобразование Фурье поля в раскрыве антенны. Временное спектральное разложение может быть выполнено для каждого из направлений волновых векторов пространственного спектра. Таким образом, в итоге вновь имеет место плоская монохроматическая волна как основная модель для анализа поляризационных свойств радиолокационного сигнала.

## 1.2 Эллипс поляризации и параметры Стокса полностью поляризованной волны.

В данном параграфе поляризационные состояния полностью поляризованных плоских электромагнитных волн будут описаны математически с целью введения их количественных характеристик. Поскольку, как это уже указывалось, анализ проводится для случая монохроматических волны, то её пространственно ортогональные составляющие в декартовой (прямоугольной) системе координат можно записать в виде:

$$E_x = a \cos(\omega t + \varphi_x), E_y = b \cos(\omega t + \varphi_y), \quad (1.1)$$

где  $a, b$  – амплитуды, а  $\varphi_x, \varphi_y$  – фазовые углы ортогональных составляющих. Направление волнового вектора анализируемой волны будем считать совпадающим с положительным направлением оси  $OZ$  прямоугольной системы координат  $XYZ$ .

Рассмотрим теперь характер кривой, которую описывает конец электрического вектора волны в фиксированной точке пространстве. Эта кривая является геометрическим местом точек, координаты которой определяются соотношениями (1.1).

Поскольку проекционная картина (годограф) электрического вектора на плоскость  $XOY$  не зависит от частоты колебаний, то эту зависимость можно исключить из уравнений (1.1). Разлагая косинусы суммы в правой части выражений (1.1), разрешим эти выражения относительно  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ . С этой целью умножим первое уравнение на  $\sin \varphi_y$ , а второе уравнение на  $\sin \varphi_x$ .

$$\begin{aligned} \frac{E_x \cdot \sin \varphi_y}{a} &= \cos \omega t \cdot \cos \varphi_x \cdot \sin \varphi_y - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_x \cdot \sin \varphi_y; \\ \frac{E_y \cdot \sin \varphi_x}{b} &= \cos \omega t \cdot \cos \varphi_y \cdot \sin \varphi_x - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_y \cdot \sin \varphi_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вычитая второе соотношение (1.2) из первого, получим

$$\frac{E_x \cdot \sin \varphi_y}{a} - \frac{E_y \cdot \sin \varphi_x}{b} = \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_y - \varphi_x). \quad (1.3a)$$

Прделаем подобную операцию с выражениями (1.1) еще раз, умножая первое из них на  $\cos \varphi_Y$  а второе на  $\cos \varphi_X$ . Тогда

$$\frac{E_X \cdot \cos \varphi_Y}{a} - \frac{E_Y \cdot \cos \varphi_X}{b} = \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_Y - \varphi_X). \quad (1.3б)$$

Возведем выражения (1.3а,б) в квадрат и, суммируя результаты, получим:

$$\frac{E_X^2}{a^2} + \frac{E_Y^2}{b^2} - \frac{2E_X E_Y \cdot \cos \Delta\varphi}{ab} = \sin^2 \Delta\varphi, \quad (1.4)$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_Y - \varphi_X$ .

Таким образом, временная зависимость исключена из уравнения кривой, описываемой концом электрического вектора, а результирующее уравнение (1.4) представляет собой так называемое уравнение конического сечения [13]. Величиной, характеризующей форму кривой, определяемой коническим сечением (1.4), является его детерминант, который можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} 1/a^2 & -\cos \Delta\varphi \\ -\cos \Delta\varphi & 1/b^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 \cdot b^2} \cdot \sin^2 \Delta\varphi. \quad (1.5)$$

Поскольку детерминант (1.5) является положительным, данная кривая представляет собой эллипс, вписанный в прямоугольник, стороны которого имеют длины  $2a$  и  $2b$  соответственно (рис. 1.4). Таким образом, конец электрического вектора поля описывает эллипс, главные оси которого не совпадают с осями  $OX$  и  $OY$ . Этот эллипс называется эллипсом поляризации [4,8,13,14], а электромагнитная волна в этом случае называется эллиптически поляризованной волной. Как и в случае круговой

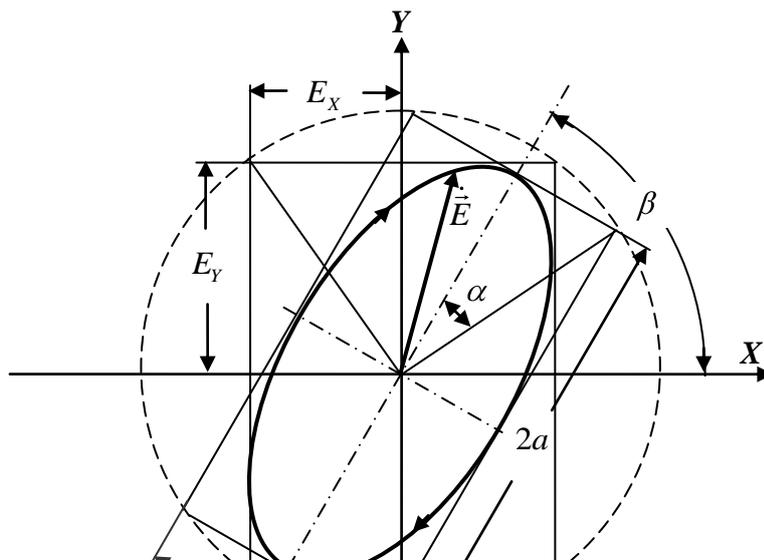


Рис.1.4.

поляризации, направление вращения вектора электрического поля (направление обхода эллипса) будем определять с точки зрения наблюдателя, рассматривающего волну против направления распространения. Тогда для эллиптически поляризованных волн с правым направлением вращения, вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке, а для левого направления вращения - против часовой стрелки. Как уже указывалось выше, эллиптическая поляризация является наиболее общим состоянием полностью поляризованных электромагнитных волн.

Для полного описания эллиптической поляризации необходимо знать:

1. ориентацию поляризационного эллипса в пространстве;
2. ориентацию собственной системы координат эллипса, образованной его полуосями, относительно выбранной опорной системы координат (которая обычно связана с облучателем антенны радара);
3. форму эллипса (эллиптичность);
4. направление обхода эллипса (направление вращения);
5. амплитуду  $A$  (размер) эллипса;
6. абсолютную временную фазу (т.е. угол между начальным положением электрического вектора в момент времени  $t = 0$ , и большой полуосью эллипса).

Ориентация эллипса в пространстве определяется указанием направления распространения плоской волны, которое определяется волновым

вектором  $\vec{k}$ . В нашем случае направление вектора  $\vec{k}$  совпадает с положительным направлением оси  $OZ$ .

Ориентация собственной системы координат эллипса относительно опорной системы координат определяется азимутом  $\beta$ , т.е. углом между большой полуосью эллипса и положительным направлением оси  $OX$ . Физически различимые значения азимута лежат в интервале  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ .

Форма эллипса (т.е. эллиптичность)  $K = b/a$  определяется отношением малой « $b$ » и большой « $a$ » полуосей эллипса.

Направление обхода эллипса поляризации принимает одно из значений  $\pm 1$  для правого и левого направления вращения поляризации. Математически удобно объединить направление обхода эллипса с величиной эллиптичности, приписывая последней положительное или отрицательное значение, в зависимости от направления вращения поляризации. Для правого направления вращения выберем знак плюс, а для левого – минус. Тогда физически различимые значения эллиптичности будут заключены в интервале  $-1 \leq K \leq 1$ . Для удобства введем понятие угла эллиптичности  $\alpha = \arctg K$ . Из условия  $-1 \leq K \leq 1$  следует, что величина угла эллиптичности заключена в интервале  $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ .

Амплитуда (размер) эллипса определяется длиной его полуосей  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Размер эллипса определяется только энергией волны и не связан с его геометрией. Поэтому всюду в дальнейшем, где только это возможно, будут рассматриваться только эллипсы с единичными амплитудами.

Абсолютная временная фаза также не связана с геометрическими параметрами эллипса, а регистрация абсолютной фазы в задачах радиолокационного наблюдения невозможна.

Таким образом, основной интерес для анализа представляют величина эллиптичности эллипса поляризации и его ориентация. Поскольку в реальной действительности как формирование поляризации излучения *РЛС*, так и

анализ поляризации рассеянных сигналов выполняются с использованием амплитудно-фазовых соотношений пространственно-ортогональных составляющих, заданных в опорной системе координат, то необходимо установить математическую связь между амплитудно-фазовыми соотношениями и параметрами поляризационного эллипса.

Искомую связь удобно характеризовать некоторыми параметрами, имеющими размерность интенсивности. Такие параметры были введены Стоксом в 1852 г. [13] в виде набора четырех величин :

$$S_0 = E_x^2 + E_y^2; S_1 = E_x^2 - E_y^2; S_2 = 2E_x E_y \cdot \cos \Delta\varphi; S_3 = 2E_x E_y \cdot \sin \Delta\varphi. \quad (1.6)$$

Усреднение (1.6) проводится на интервале времени, значительно превышающем период колебаний. Величины, определяемые выражением (1.6), называются параметрами Стокса [4,8,13,14]. Нетрудно видеть, что параметры Стокса связаны соотношением

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (1.7)$$

Параметр Стокса обычно объединяются в вектор, называемый вектором Стокса:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}.$$

Однако эта форма записи вектора Стокса весьма громоздка и для удобства целесообразно записывать этот вектор в виде строки, заключая его в фигурные скобки. Поэтому всюду далее вектор-строка в фигурных скобках будет обозначать вектор-столбец:

$$\vec{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3). \quad (1.8)$$

Нормируя элементы вектора (1.8) к величине  $S_0$ , получим нормированный вектор Стокса, отвечающий волне с единичной интенсивностью:

$$\vec{S}_N = (1, S_{1N}, S_{2N}, S_{3N}). \quad (1.9)$$

Связь нормированных параметров Стокса с геометрическими характеристиками эллипса поляризации определяется соотношениями [4,13,14]:

$$S_{1N} = \cos 2\alpha \cos 2\beta; S_{2N} = \cos 2\alpha \sin 2\beta; S_{3N} = \sin 2\alpha, \quad (1.10)$$

где  $\alpha, \beta$  – угол эллиптичности и угол ориентации эллипса поляризации соответственно.

Отметим, что выражение (1.7), которое после нормирования может быть записано в виде  $S_{1N}^2 + S_{2N}^2 + S_{3N}^2 = 1$ , представляет собой уравнение сферы единичного радиуса. Таким образом, параметры  $S_{1N}, S_{2N}, S_{3N}$  можно рассматривать как прямоугольные координаты некоторой точки  $P$  на этой сфере. Тогда величины  $2\alpha$  и  $2\beta$ , связанные с параметрами  $S_{1N}, S_{2N}, S_{3N}$  выражением (1.10), есть не что иное, как сферические угловые координаты точки  $P$  на единичной сфере (см. Рис.1.5). На этом рисунке прямоугольные координаты точки  $P$  (проекции радиуса  $OP$ ), т.е. отрезки определяют соответствующие значения нормированных параметров Стокса.

Таким образом, каждому возможному состоянию поляризации плоской полностью поляризованной волны соответствует одна точка на этой сфере и наоборот, поскольку указанные выше интервалы физически различных значений углов эллиптичности и углов ориентации лежат в пределах  $-0.5\pi \leq \beta \leq 0.5\pi$ ,  $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ . Отсюда следует, что, при удвоении углов  $\alpha$  и  $\beta$  точки, изображающие различные состояния поляризации, заполняют всю поверхность единичной сферы, но не перекрываются.

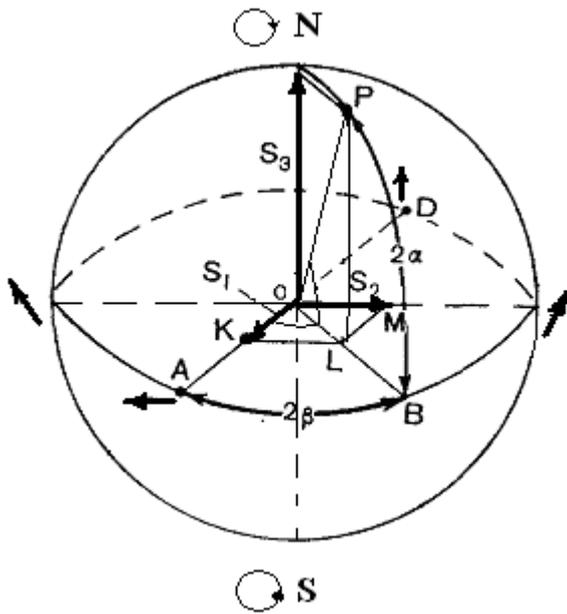


Рис.1.5

Поскольку угол эллиптичности  $\alpha$  принимает положительные или отрицательные значения в зависимости от направления вращения поляризации, то правая поляризация изображается точками сферы, лежащими выше экватора, а левая поляризация – точками сферы, лежащими ниже экватора.

Линейно поляризованные волны характеризуются разностью фаз  $\Delta\varphi = n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), что вызывает равенство нулю параметра Стокса  $S_{3N}$ . Это означает, что линейная поляризация изображается точками, принадлежащими экватору единичной сферы. Для правой и левой круговой поляризации  $a = b; \Delta\varphi = \pm\pi/2$ . Следовательно, правая круговая поляризация представляет собой северный полюс сферы ( $S_{1N} = S_{2N} = 0; S_{3N} = 1$ ), а левая круговая - южный полюс сферы ( $S_{1N} = S_{2N} = 0; S_{3N} = -1$ ).

Таким образом, предельные случаи эллиптической поляризации – линейные и круговые – изображаются точками, отвечающими экватору и полюсам сферы. Всем прочим точкам сферы соответствуют эллиптические поляризации. Если фиксировать значение угла ориентации эллипса ( $\beta = const$ ), то при изменении угла эллиптичности в пределах интервала  $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$  точка, изображающая эллипс с переменным углом

эллиптичности, будет перемещаться по дуге большого круга от южного полюса сферы к северному полюсу, т.е. по меридиану. Если же будет фиксировано значение угла эллиптичности ( $\alpha = const$ ), то при изменении угла ориентации в пределах интервала  $-0.5\pi \leq \beta \leq 0.5\pi$ , изображающая точка будет перемещаться по широтной линии сферы; значение широты при этом определяется удвоенным углом эллиптичности.

Таким образом, меридианы поляризационной единичной сферы соответствуют поляризационным эллипсам, имеющим фиксированную ориентацию и переменную эллиптичность, а широты соответствуют эллипсам с постоянной эллиптичностью, но с переменным азимутом.

Необходимо отметить, что поляризационная сфера наглядно демонстрирует неопределенность ориентации для случая круговой поляризации (поскольку в полюсах сферы сходятся в точку все меридианы, определяющие ориентацию эллипса поляризации) и неопределенность направления обхода эллипса поляризации (направления вращения) для линейных поляризаций, так как в бесконечно малой окрестности, отвечающей точке пересечения меридиана с экватором, осуществляется скачкообразный переход от правого направления вращения в верхней полусфере к левому направлению вращения в нижней полусфере.

Рассмотренное представление поляризации точками на сфере единичного радиуса было предложено Пуанкаре, а поляризационная сфера называется сферой Пуанкаре [4,13,14,15]. Строгое обоснование к использованию сферы Пуанкаре будет рассмотрено в дальнейшем.

### ***1.3 Представление плоской полностью поляризованной волны вектором Джонса.***

При решении задач, связанных с формированием и преобразованием поляризации излучения РЛС необходимо помнить о том, что электромагнитное поле относится к объектам природы, недоступным для непосредственного наблюдения и изучения.

В процессе радиолокационных измерений суждение о параметрах электромагнитного поля формируется на основе анализа измеряемых величин (напряжений, токов), которые детерминированным образом связаны с полем, т.е. с физическим объектом, параметры которого подлежат измерению. Так, в процессе измерений поле, рассеянное радарным объектом (т.е. поле дифракции на объекте), претерпевает процесс дифракции на антенне *РЛС*, в результате чего формируется диаграмма направленности антенны в режиме приема, определяющая угловые селективные свойства *РЛС*. Далее пространственно-временные зависимости, характеризующие анализируемую волну с учетом реакции антенны, преобразуются во временные сигналы, подверженные дальнейшим преобразованиям в приемном тракте радиолокатора. В конечном итоге измеряемой величиной является ток, протекающий через нагрузочное сопротивление детектора, а падение напряжения на этом сопротивлении обуславливает амплитуду отметки на индикаторе типа «А» или яркость светящейся точки на индикаторе кругового обзора.

Весь процесс преобразования поляризации электромагнитных волн в радиолокационном канале может быть зримо представлен только с использованием определенной математической модели поля и его преобразований. В качестве модели может служить некоторое математическое представление как самой электромагнитной волны, так и элементов радиолокационного канала, преобразующих эту волну. В связи с изложенным следует быть осторожным, т.е. не отождествлять представление электромагнитного поля и само поле. Выбор математической модели зависит от характера рассматриваемой задачи и определяется исследователем.

Рассмотрение начнем с анализа представления плоской однородной электромагнитной волны вектором Джонса [14,15,16].

Пусть имеется плоская однородная *TE* - волна, вектор электрической напряженности которой для случая произвольной эллиптической поляризации может быть записан в правой декартовой системе координат как

$$\vec{E}(z,t) = [E_x \cos(\omega t - \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{\lambda} + \varphi_x)]\vec{x} + [E_y \cos(\omega t - \frac{2 \cdot \pi \cdot z}{\lambda} + \varphi_y)]\vec{y}. \quad (1.11)$$

Здесь  $\vec{x}, \vec{y}$  - единичные орты, определяющие ориентацию электрических векторов линейно поляризованных волн

$$E_x \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z + \varphi_x) \text{ и } E_y \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z + \varphi_y).$$

Суперпозиция этих волн, имеющих различные фазы и амплитуды, приводит к эллиптической поляризации результирующей волны. При анализе поляризации волны и её преобразований в радиолокационном канале нет необходимости в использовании полного выражения (1.11). Прежде всего, не обязательно сохранять написание единичных ортов  $\vec{x}, \vec{y}$  для учета ориентации составляющих  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$ , а целесообразно учитывать эту ориентацию путем использования вектора - столбца

$$\dot{\vec{E}}(z,t) = \begin{Bmatrix} E_x \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_x) \\ E_y \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_y) \end{Bmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь и далее считается, что верхняя строка соответствует проекции вектора анализируемого поля на ось  $OX$ , а нижняя на ось  $OY$ .

Как гармоническая временная зависимость, так и постоянный фазовый набег, одинаковый для обеих составляющих, не несут информации о состоянии поляризации волны. В связи с этим, указанные величины могут быть исключены из рассмотрения. Учитывая изложенное, перепишем выражение (1.12) в виде, удобном для дальнейшего использования.

$$\dot{\vec{E}} = \begin{Bmatrix} E_x \exp j\varphi_x \\ E_y \exp j\varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{Bmatrix}. \quad (1.13)$$

Представление электромагнитной волны в форме (1.13) называется вектором Джонса [14,15,16]. Полная интенсивность волны, представленной вектором Джонса (1.13), равна сумме интенсивности проекций электрического вектора волны на ортогональные оси  $OX, OY$ :

$$J = \dot{\vec{E}}^+ \cdot \dot{\vec{E}} = \dot{E}_x^* \cdot \dot{E}_x + \dot{E}_y^* \cdot \dot{E}_y = E_x^2 + E_y^2, \quad (1.14)$$

где + означает эрмитово сопряжение.

Поскольку полная интенсивность волны не определяет её поляризационных свойств (т.е. не влияет на форму и ориентацию эллипса поляризации), то для удобства анализа целесообразно произвести нормировку к полной интенсивности и рассматривать волны с единичной интенсивностью. Вектор Джонса такой волны удовлетворяет условию  $\dot{\vec{E}}^+ \dot{\vec{E}} = 1$  и называется нормированным вектором Джонса.

Поскольку комплексные элементы вектора Джонса (1.13) могут независимо принимать любые возможные значения, это дает возможность получить все состояния поляризации электромагнитной волны. Отсюда следует полнота описания поляризации с использованием вектора Джонса, что в дальнейшем будет проиллюстрировано при рассмотрении представлений поляризации точками комплексной плоскости.

В качестве примеров рассмотрим векторы Джонса некоторых состояний поляризации, считая (как и всюду в дальнейшем), что анализируемая волна имеет единичную интенсивность. Так, линейно поляризованные волны, электрические векторы которых ориентированы либо вдоль оси  $OX$  либо вдоль оси  $OY$ , могут быть представлены векторами Джонса

$$\vec{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

и образуют пару ортогональных линейных поляризованных волн.

Если электрический вектор плоской волны линейно поляризован вдоль некоторого направления, составляющего угол  $\theta$  с положительным направлением оси  $OX$ , то вектор Джонса этой волны имеет вид:

$$\dot{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (1.16a)$$

Представление линейно поляризованной волны, которая ортогональна волне (1.16a), может быть получено путем замены величины угла ориентации  $\theta$  на угол ориентации  $\theta + \pi/2$ :

$$\dot{\vec{E}} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.16b)$$

Волна круговой поляризации характеризуется двумя равными проекциями электрического вектора на оси декартовой системы координат при наличии между колебаниями, ориентированными по этим осям, фазового сдвига  $\pm\pi/2$ . В зависимости от знака фазового сдвига могут быть получены волны круговой поляризации с правым или левым направлением вращения. Векторы Джонса для пары волн, поляризованных по левому и правому кругу, в декартовой системе координат имеют вид:

$$\dot{\vec{E}}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{E}}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

где приняты обозначения  $\dot{\vec{E}}_L$  для волны с левым (Left) направлением вращения и  $\dot{\vec{E}}_R$  для волны с правым (Right) направлением вращения. Эти обозначения будут использоваться и далее. Наличие множителя  $1/\sqrt{2}$  в выражениях (1.17) обусловлено принятой для удобства единичной интенсивностью волны.

Рассмотренные шесть векторов Джонса образуют три пары ортогонально поляризованных волн. Следовательно, векторы Джонса каждой из этих пар должны удовлетворять условию ортогональности, которое заключается в равенстве нулю скалярного произведения ортогональных векторов. Для действительных векторов это условие имеет вид  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$ , а для комплексных векторов (т.е. для векторов, имеющих комплексные элементы) это условие записывается в виде  $\dot{\vec{a}}^+ \cdot \dot{\vec{b}} = a_x^* \cdot b_x + a_y^* \cdot b_y = 0$ .

Поскольку эллиптическая поляризация имеет место в случае произвольного соотношения амплитуд ортогональных составляющих при

наличии между ними сдвига фаз, можно формально записать вектор Джонса эллиптически поляризованной волны в виде:

$$\dot{\vec{E}} = \begin{pmatrix} E_x \cdot \exp j\varphi_x \\ E_y \cdot \exp j\varphi_y \end{pmatrix}.$$

Однако, более целесообразной была бы запись вектора Джонса эллиптически поляризованной волны в терминах угла эллиптичности и угла ориентации эллипса поляризации. Но, прежде чем ввести такое представление, необходимо рассмотреть вопрос о преобразовании вектора Джонса при повороте системы координат.

Векторные свойства волны, поляризованной определенным образом, требуют ее рассмотрения в фиксированной системе координат. В радиолокационном канале может быть использовано несколько координатных систем, связанных с различными элементами канала. Так, в последовательности процессов формирования поляризации излучения *РЛС*, рассеянии сигнала радиолокационным объектом и приема рассеянного сигнала могут быть использованы следующие системы координат:

1. исходная система координат, связанная с волноводом, подводящим энергию к облучателю антенны *РЛС*;
2. система координат, связанная с устройством, осуществляющим преобразование исходной волны, которая обычно поляризована линейно. В случае наличия нескольких таких элементов, размещенных последовательно, с каждым из них может быть связана индивидуальная координатная система;
3. система координат, связанная с радиолокационным объектом;
4. системы координат, связанные с приемной антенной и элементами, осуществляющими преобразование поляризации рассеянной волны в процессе приема.

Простейшим видом преобразования вектора Джонса при переходе от одного элемента радиолокационного канала к другому является преобразование, осуществляемое при повороте декартовой системы координат.

Рассмотрим поворот прямоугольной системы координат в плоскости  $XOY$ , считая по-прежнему, что волновой вектор  $\vec{k}$  совпадает с положительным направлением оси  $OZ$ .

Пусть оси новой координатной системы  $X'OY'$  получаются поворотом системы координат  $XOY$  как жесткого целого на угол  $\theta$  против часовой стрелки. Тогда векторы Джонса, определенные в новой и старой системах координат, связаны соотношением:

$$\dot{\vec{E}}' = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{vmatrix} = \|R(\theta)\| \cdot \dot{\vec{E}}, \quad (1.18)$$

где матрица  $\|R \theta\|$  является оператором поворота на угол  $\theta$ . В случае двух последовательных поворотов на угол  $\theta_1$ , а затем на угол  $\theta_2$ , суммарное преобразование определяется произведением операторов поворота  $\|R \theta_1\|$  и  $\|R \theta_2\|$ :  $\|R(\theta_1 + \theta_2)\| = \|R(\theta_1)\| \cdot \|R(\theta_2)\|$ . Чтобы осуществить обратный переход из системы координат  $X'OY'$  в старую координатную систему необходимо умножить выражение (1.18) слева на матрицу  $\|R \theta\|^{-1}$ , обратную к оператору  $\|R \theta\|$ . Тогда

$$\|R(\theta)\|^{-1} \cdot \|R(\theta)\| \cdot \dot{\vec{E}} = \|R(\theta)\|^{-1} \cdot \|R(\theta)\| \cdot \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}, \quad (1.19)$$

так как по правилам матричного умножения  $\|R \theta\|^{-1} \cdot \|R \theta\| = \|\delta_{ji}\|$ , где  $\|\delta_{ji}\|$  есть единичная матрица. В явном виде обратную матрицу  $\|R \theta\|^{-1}$  можно записать как

$$\|R(\theta)\|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (1.20)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что операция поворота системы координат описывает процесс расщепления единичного вектора Джонса, ориентированного вдоль любой из осей исходной координатной системы. В случае, если вектор Джонса исходной волны ориентирован вдоль одной из осей

старой системы координат  $XOY$ , то расщепление происходит при переходе в новую систему координат  $X'OY'$ :

$$\begin{pmatrix} E'_X \\ E'_Y \end{pmatrix} = \|R(\theta)\| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E'_X \\ E'_Y \end{pmatrix} = \|R(\theta)\| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (I.21)$$

Проанализируем теперь выражение для интенсивности волны после преобразования исходного вектора Джонса оператором поворота  $\|R \theta\|$ . Поскольку в старой системе координат  $XOY$  интенсивность волны определяется скалярным произведением  $J_{XY} = \dot{\vec{E}}^+ \cdot \dot{\vec{E}}$ , то в новой системе координат интенсивность также определяется скалярным произведением

$$J_{X'Y'} = \dot{\vec{E}}'^+ \cdot \dot{\vec{E}}' = \left[ \|R(\theta)\| \cdot \dot{\vec{E}} \right]^+ \cdot \|R(\theta)\| \cdot \dot{\vec{E}}.$$

Учитывая известное соотношение  $\left[ \|A\| \cdot \|B\| \right]^+ = \|B\|^+ \cdot \|A\|^+$ , получим

$$J_{X'Y'} = \left\| \dot{\vec{E}} \right\|^+ \cdot \|R \theta\|^+ \cdot \|R \theta\| \cdot \left\| \dot{\vec{E}} \right\| = \left\| \dot{\vec{E}} \right\|^+ \cdot \left\| \dot{\vec{E}} \right\| = J_{XY}, \quad \text{откуда следует, что}$$

интенсивность волны является инвариантной по отношению к повороту системы координат.

Рассмотрим теперь вопрос об изменении поляризационных параметров, вызванном поворотом системы координат. Предположим, что исходная волна поляризована эллиптически с углом эллиптичности  $\alpha$ , а большая полуось эллипса ориентирована вдоль оси  $OX$ . Тогда  $\beta = 0$ , а вектор Стокса исходной волны с учетом соотношений (1.10) имеет вид

$$\vec{S}_{XY} = \{1; \cos 2\alpha; 0; \sin 2\alpha\}. \quad (I.22).$$

Определим элементы вектора Стокса после поворота системы координат. Поскольку интенсивность волны является инвариантной к повороту системы координат, то величина параметра  $S_0$  при повороте не изменится. Для определения параметров Стокса  $S_{1N}, S_{2N}, S_{3N}$  воспользуемся соотношениями

$$S_{1N} = \dot{E}_X^* \cdot \dot{E}_X - \dot{E}_Y^* \cdot \dot{E}_Y; S_{2N} = \dot{E}_X^* \cdot \dot{E}_Y + \dot{E}_Y^* \cdot \dot{E}_X; S_{3N} = j(\dot{E}_X^* \cdot \dot{E}_Y - \dot{E}_Y^* \cdot \dot{E}_X) \quad (I.23)$$

при условии  $\dot{E}_X^* \dot{E}_X + \dot{E}_Y^* \dot{E}_Y = 1$ . Нетрудно убедиться, что соотношения (1.23) полностью соответствуют выражениям для параметров Стокса (1.6), записанным с использованием амплитуд и фаз поляризационно ортогональных составляющих.

Используя выражения (1.18) и (1.23), найдем вектор Стокса в новой системе координат:

$$\vec{S}_{X'Y'} = \{1; \cos 2\alpha \cos 2\beta; -\cos 2\alpha \sin 2\beta; \sin 2\alpha\}. \quad (I.24)$$

Из выражения (1.24) следует, что величина угла эллиптичности является инвариантной к операции поворота..

Если волна в исходной системе координат была поляризована линейно с углом ориентации  $\beta = 0$ , то, после поворота системы координат на угол  $\beta$ , исходный вектор Стокса этой волны

$$\vec{S}_{XY} = \{1; 1; 0; 0\} \quad (I.25)$$

будет преобразован к виду

$$\vec{S}_{X'Y'} = \{1; \cos 2\beta; \sin 2\beta; 0\}. \quad (I.26).$$

Геометрическая интерпретации операции поворота может быть иллюстрирована с использованием сферы Пуанкаре (см. Рис. 1.6).

Так, волны, характеризуемые в исходной системе координат векторами Стокса (1.22) и (1.25) изображаются на сфере точками  $P_1$  и  $P_3$ . При этом точка  $P_1$  (эллиптически поляризованная волна) лежит на широте, определяемой углом эллиптичности  $\alpha$ , а долгота этой точки соответствует углу ориентации  $\beta = 0$  (большая полуось эллипса ориентирована горизонтально). Точка  $P_3$ , соответствующая линейно поляризованной волне, находится на экваторе и её долгота соответствует значению  $\beta = 0$ .

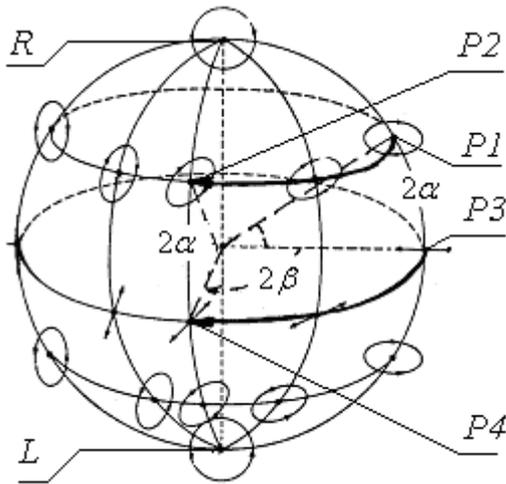


Рис.1.6.

После операции поворота системы координат эти волны характеризуются векторами Стокса (1.24) и (1.26) соответственно, что отвечает точкам сферы Пуанкаре  $P_2$  и  $P_4$ . Широта этих точек не изменяется, а долгота определяется углом поворота системы координат. Изложенное находится в полном соответствии с результатами подраздела 1.2. В этом подразделе было указано, что точка сферы Пуанкаре, которая представляет волну с постоянной эллиптичностью и изменяющейся ориентацией большой полуоси эллипса поляризации перемещается по линии постоянной широты. Перемещение по меридиану, которое характеризовало бы изменение эллиптичности эллипса поляризации, отсутствует в силу инвариантности угла эллиптичности к операции поворота системы координат.

Вернемся теперь к вопросу о представлении эллиптического состояния поляризации вектором Джонса, элементы которого определялись бы непосредственно через значения угла эллиптичности и угла ориентации. Предположим, что эллиптически поляризованная волна задана в собственной системе координат её эллипса поляризации  $X'OY'$ , ориентированной под углом  $\theta$  относительно исходной системы координат  $XOY$ . Поскольку рассматривается волна единичной интенсивности, то большая и малая полуоси эллипса поляризации равны соответственно  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  в силу условия

$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ . Тогда, при наличии фазового сдвига  $\pi/2$  между ортогональными составляющими волны, вектор Джонса эллиптически поляризованной волны в собственной системе координат её эллипса поляризации можно записать как

$$\dot{\vec{E}}_{X'Y'} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ j \sin \alpha \end{Bmatrix}. \quad (1.27)$$

Для перехода в исходную систему координат  $XOY$  необходимо умножить вектор (1.27) на обратную матрицу поворота  $\|R(\theta)\|^{-1}$ , определенную выражением (1.20). Поскольку угол поворота равен  $\beta$ , то

$$\dot{\vec{E}}_{XY} = \|R(\beta)\|^{-1} \cdot \dot{\vec{E}}_{X'Y'} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - j \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta + j \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \end{Bmatrix}. \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) представляет собой искомый вектор Джонса эллиптического состояния поляризации, пространственно - ортогональные составляющие которого выражены непосредственно через угол эллиптичности и азимут большой полуоси оси эллипса поляризации. Необходимо отметить, что вектор (1.28) соответствует случаю, когда электрический вектор поля в момент времени  $t = 0$  совпадает с осью  $OX'$ , что соответствует значению абсолютной фазы  $\varphi = 0$ .

Необходимо указать также на удобство представления (1.28), состоящее в том, что определение Стокса для этого вектора с использованием соотношений (1.23), непосредственно приводит к вектору Стокса в форме:

$$\vec{S}_N = \{1; \cos 2\alpha \cos 2\beta; \cos 2\alpha \sin 2\beta; \sin 2\alpha\}.$$

#### ***1.4 Понятие поляризационного базиса. Линейный, круговой, эллиптический базисы.***

В качестве элементарных состояний поляризации могут быть рассмотрены как ортогональные линейные поляризации, так и ортогональные круговые или эллиптические состояния поляризации.

Указанные элементарные состояния поляризации попарно образуют систему ортогональных нормированных векторов (ортонормальных векторов),

по направлению которых может быть разложен вектор Джонса произвольного состояния поляризации. Иначе говоря, каждая ортонормальная пара векторов Джонса образует некоторую базисную координатную систему, в которой может быть проведен анализ любого состояния поляризации электромагнитной волны. (Здесь необходимо указать, что все предыдущее рассмотрение производилось применительно к разложению анализируемой волны на два пространственно ортогональных линейных состояний поляризации.) В каждом из указанных случаев (линейная, круговая и эллиптическая поляризации) соответствующая пара ортогональных векторов Джонса называется поляризационным базисом разложения волны.

Понятие поляризационного базиса не является чисто теоретическим, поскольку в практике поляризационных измерений в антенной системе РЛС всегда реализуется тот или другой поляризационный базис. Так, облучатель антенны СВЧ-диапазона в виде двух ортогональных диполей или в виде квадратного волновода с разделением линейных вертикально и горизонтально поляризованных составляющих представляет собой техническую реализацию линейного поляризационного базиса. Две вложенных друг в друга спиральные антенны противоположного направления вращения реализуют круговой поляризационный базис. Круговой базис может быть также реализован с использованием эффекта двойного лучепреломления на основе комбинации четвертьволновых фазовых устройств с круглым волноводом.

Наиболее употребительными в практике радиолокационных измерений являются именно эти два вида поляризационных базисов, так как техническая реализация эллиптического ортогонального базиса в радиолокационных антеннах весьма затруднительна.

#### ***1.4.1. Линейный поляризационный базис и декартово поляризационное отношение***

В линейном поляризационном базисе любой вектор Джонса можно рассматривать как линейную суперпозицию

$$\dot{\vec{E}} = \dot{E}_x \cdot \vec{e}_x + \dot{E}_y \cdot \vec{e}_y, \quad (\text{I.29})$$

где векторы  $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  являются линейными ортогональными поляризациями и имеют значение базисных векторов, аналогично тому, как единичные векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  являются базисными векторами в представлении любого вектора

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{x} + a_y \cdot \vec{y}.$$

Если пара комплексных чисел  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$ , представляющих собой проекции электрического вектора анализируемой волны на направления единичных векторов  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ , принимает все возможные значения, то при этом будет сформировано полное пространство векторов Джонса, отвечающее всем возможным состояниям поляризации.

Линейно поляризованные ортогональные векторы  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  называются базисными линейными состояниями поляризации. Эти векторы характеризуются единичной амплитудой и нулевой начальной фазой; они ориентированы вдоль координатных осей  $OX, OY$ . Умножение базисного вектора  $\vec{e}_x$  на проекцию анализируемого поля  $\dot{E}_x$  изменяет амплитуду линейно поляризованного базисного колебания в  $|\dot{E}_x|$  раз, а его фазу на величину  $\varphi_x = \arg \dot{E}_x$ . Аналогично, умножение базисного колебания  $\vec{e}_y$  на проекцию  $\dot{E}_y$  амплитуду линейно поляризованного базисного колебания в  $|\dot{E}_y|$  раз, а его фазу на величину  $\varphi_y = \arg \dot{E}_y$ .

В случае, если линейно поляризованные базисные колебания ориентированы вдоль осей  $OX'$  и  $OY'$ , составляющими угол  $\theta$  с некоторой системой координат  $XOY$ , то базисными состояниями поляризации являются векторы Джонса.

$$\vec{e}_x' = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}; \vec{e}_y' = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

полученные поворотом системы исходных базисных векторов  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  на угол  $\theta$ .

Рассмотрим теперь соотношения между геометрическими параметрами эллипса поляризации и так называемым комплексным поляризационным отношением [14]. Поляризационное отношение иногда называют также комплексным фазором [17]. Метод, использующий поляризационное отношение, является одним из основных методов исследования поляризационных параметров. Этот метод зависит от выбора поляризационного базиса и будет детально рассмотрен в дальнейшем. Анализ, результаты которого приведены в настоящем параграфе, имеет краткую форму.

Отметим прежде всего, что поляризационное отношение, определенное в линейном (декартовом) поляризационном базисе, называется линейным (или декартовым) поляризационным отношением. Запишем декартово поляризационное отношение, используя вектор Джонса (1.28) волны с единичной интенсивностью:

$$\dot{P}_{xy} = \frac{\cos \alpha \sin \beta + j \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - j \sin \alpha \sin \beta}. \quad (1.30)$$

Выделим действительную и мнимую части отношения (1.30).

$$\begin{aligned} \dot{P}_{xy} &= \text{Re}[\dot{P}_{xy}] + j \text{Im}[\dot{P}_{xy}] = \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \beta + j \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - j \sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta + j \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + j \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= 0.5 \left[ \frac{\cos 2\alpha \sin 2\beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} + j \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Найдем теперь квадрат модуля поляризационного отношения  $|\dot{P}_{xy}|^2$  и величины  $1 - |\dot{P}_{xy}|^2, 1 + |\dot{P}_{xy}|^2$  в виде

$$|\dot{P}_{xy}|^2 = \dot{P}_{xy} \dot{P}_{xy}^* = \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad (1.32a)$$

$$1 - |\dot{P}_{XY}|^2 = \frac{\cos 2\alpha \cos 2\beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad (1.32б)$$

$$1 + |\dot{P}_{XY}|^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}. \quad (1.32в)$$

Нетрудно показать, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{Re} \dot{P}_{XY}}{1 - |\dot{P}_{XY}|^2}, \quad (1.33)$$

принимая во внимание, что

$$\operatorname{Re} \dot{P}_{XY} = 0.5 \cos 2\alpha \sin 2\beta / \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

и используя выражение (1.32а). Затем можно показать, что

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{Im} \dot{P}_{XY}}{1 + |\dot{P}_{XY}|^2}, \quad (1.34)$$

используя мнимую часть

$$\operatorname{Im} [\dot{P}_{XY}] = 0.5 \sin 2\alpha / \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

и выражение (1.32в). Выражения (1.33) и (1.34) позволяют определить как угол эллиптичности так и азимут эллипса поляризации, используя декартово поляризационное отношение.

#### **1.4.2. Круговой поляризационный базис.**

При решении целого ряда задач радиолокационных измерений целесообразно использовать в качестве базисных состояний ортогональные круговые поляризации правого и левого направления вращения. Прежде всего необходимо показать, каким образом суперпозиция двух волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения может создать любое желаемое состояние поляризации.

Рассмотрим суперпозицию волн левой и правой круговой поляризации, имеющих равные амплитуды  $E_1 = E_2$ . Восстанавливая

временную зависимость, запишем векторы Джонса двух волн, поляризованных по кругу с противоположным направлением вращения

$$\dot{\vec{E}}_1 = |E_1| \begin{vmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega \end{vmatrix}; \dot{\vec{E}}_2 = |E_2| \begin{vmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega \end{vmatrix},$$

считая, что абсолютные фазы этих двух волн совпадают в момент времени  $t = 0$ . Необходимо обратить внимание на тот факт, что векторы Джонса волн, поляризованных по кругу, записаны в декартовом поляризационном базисе. Из вида векторов Джонса в данном случае следует мы можем видеть, что суперпозиция

$$\dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 = \begin{vmatrix} 2|E| \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

приводит к линейно поляризованному колебанию, вектор электрического поля которого ориентирован вдоль оси  $OX$  (азимут равен нулю). В случае, если абсолютные фазы волн, поляризованных по кругу, не совпадают в момент времени  $t = 0$ , то результирующее поляризационное состояние будет представлять собой волну линейной поляризации с неравным нулю азимутом. Предполагая, что фазовый сдвиг между волнами круговой поляризации равен  $\xi$ , запишем суммарный вектор Джонса в линейном поляризационном базисе, разделив для удобства фазовый сдвиг пополам между суммируемыми волнами

$$\dot{\vec{E}}_\Sigma = \begin{vmatrix} \cos(\omega t - \xi/2) \\ \sin(\omega t - \xi/2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(\omega t + \xi/2) \\ -\sin(\omega t + \xi/2) \end{vmatrix} = 2 \cos \omega t \cdot \begin{vmatrix} \cos \xi/2 \\ -\sin \xi/2 \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Из выражения (1.35) следует, что вектор Джонса результирующей волны (после исключения временной зависимости) соответствует линейно поляризованной волне с азимутом, равным половине сдвига фаз между абсолютными фазами слагаемых волн.

В случае если амплитуды волн правой и левой круговой поляризации равны  $E_1$  и  $E_2$  при наличии сдвига фаз  $\xi$ , то суперпозиция этих волн имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\Sigma} &= \left\| \begin{matrix} E_1 \cdot \cos(\omega t - \xi/2) \\ E_1 \cdot \sin(\omega t - \xi/2) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} E_2 \cdot \cos(\omega t + \xi/2) \\ -E_2 \cdot \sin(\omega t + \xi/2) \end{matrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{matrix} \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cdot \cos \xi} \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \\ \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cdot \cos \xi} \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \end{matrix} \right\|. \end{aligned} \quad (1.36)$$

При выводе соотношения (1.36) были использованы следующие выражения:

$$a \cos \omega t \pm b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t \mp \psi), \quad \psi = \operatorname{arctg} b/a.$$

Из выражение (1.36), что суперпозиция двух волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения, имеющих относительный сдвиг фаз и различные амплитуды, дает в результате две ортогональных линейно поляризованных волны со сдвигом фаз и различными амплитудами, т.е. приводит к эллиптически поляризованной волне, как это было показано в предыдущей главе.

Если абсолютные фазы этих волн совпадают ( $\xi = 0$ ), то вектор Джонса результирующей волны принимает вид

$$\dot{E}_{\Sigma} = \left\| \begin{matrix} (E_1 + E_2) \cdot \cos \omega t \\ (E_1 - E_2) \cdot \sin \omega t \end{matrix} \right\|,$$

отвечающий эллиптически поляризованной волне, большая полуось эллипса поляризации которой совпадает с осью  $OX$  опорной системы координат.

Для волны с единичной интенсивностью  $E_1 + E_2 = \cos \alpha, E_1 - E_2 = \sin \alpha$ . Таким образом, при совпадении абсолютных фаз слагаемых волн круговой поляризации, угол эллиптичности результирующей волны определяется как  $\alpha = \operatorname{arctg} [ E_1 - E_2 / E_1 + E_2 ]$ .

Проведенный анализ показывает эффективность использования ортогональных волн круговой поляризации для синтеза желаемого поляризационного состояния. Этот анализ можно иллюстрировать геометрически. На Рис.1.7а изображена процедура синтеза линейно поляризованной волны из двух ортогональных волн круговой поляризации в

предположении, что в момент времени  $t = 0$  электрические векторы  $\vec{E}$  обеих волн совпадают, а их амплитуды равны .

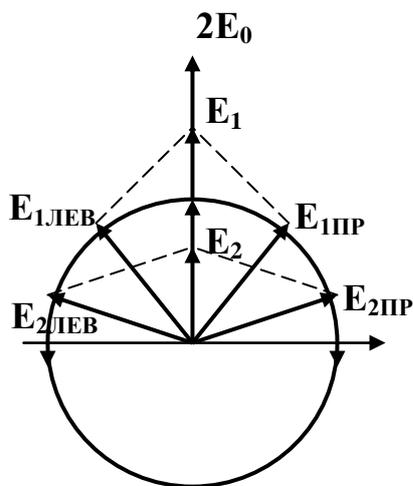


Рис.1.7а

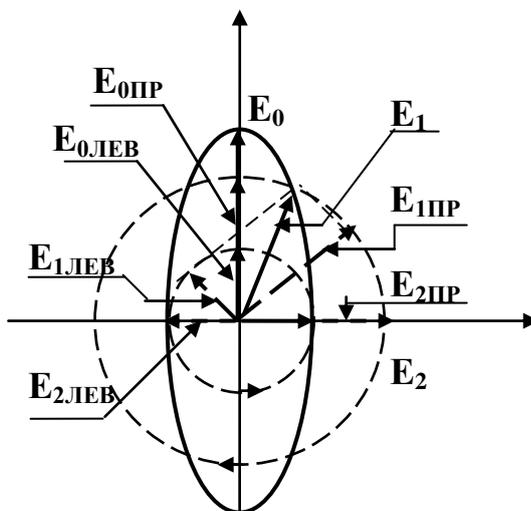


Рис.1.7.б

Векторное суммирование электрических векторов волн правого и левого направления вращения в моменты времени  $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  дает в результате линейно поляризованную вдоль вертикальной оси волну.

Если амплитуды волн поляризованных по правому и левому кругу неравны, но абсолютные фазы этих волн совпадают в момент времени  $t = 0$  (см. Рис. 1.7б), то векторное суммирование электрических векторов волн правого и левого направления вращения в моменты времени  $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  дает в результате эллиптически поляризованную волну, большая полуось эллипса которой ориентирована вдоль вертикальной оси. Необходимо отметить, что как для случая Рис.1.7а, так и для случая Рис.1.7.б направление вращения поляризации определено с точки зрения наблюдателя, рассматривающего волну против её направления распространения, т.е. на этих рисунках волна распространяется «от страницы» к читателю.

Нетрудно проверить простым геометрическим построением, что наличие фазового сдвига между ортогональными волнами круговой поляризации (что отображается несовпадением их электрических векторов в момент времени

$t = 0$ ) то эллипс поляризации результирующей волны будет иметь азимут  $\beta = 0.5\Delta\varphi_{RL}$ , где  $\Delta\varphi_{RL}$  - разность фаз поляризованных по кругу волн.

Поскольку возможен синтез волны с произвольной поляризацией из волн с ортогональными круговыми поляризациями, то возможно и обратное: волна с произвольным состоянием поляризации может быть разложена на сумму волн левой и правой круговых поляризаций, имеющих различные амплитуды и различные абсолютные временные фазы. В этом и состоит физический смысл кругового поляризационного базиса разложения. Для определения понятия кругового базиса запишем суперпозицию (1.29) в следующем виде:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{E}_L \dot{\vec{e}}_L + \dot{E}_R \dot{\vec{e}}_R, \quad (1.37)$$

где базисные векторы  $\dot{\vec{e}}_L$  и  $\dot{\vec{e}}_R$  определяются как

$$\dot{\vec{e}}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ -j \end{matrix} \right\|; \dot{\vec{e}}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ j \end{matrix} \right\|; \quad (1.38)$$

и соответствуют волнам с левой и правой круговой поляризацией, электрические векторы которых в момент времени  $t = 0$  совпадают с осью  $OX$ . Такой поляризационный базис называется синфазным круговым базисом [9]. Умножение любого базисного колебания  $\vec{e}_i (i = R, L)$  на соответствующую комплексную амплитуду  $\vec{E}_i$  приводит к тому, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $|\dot{E}_i|$ , а абсолютная фаза равна  $\arg \dot{E}_i$ . Это означает, что в момент времени  $t = 0$  электрический вектор составляет с осью  $OX$  угол  $\arg \dot{E}_i$ .

Здесь необходимо отметить еще раз, что в соотношении (1.37) при разложении произвольно поляризованной волны по базисным состояниям круговых поляризаций, эти базисные состояния заданы с использованием линейных поляризаций.

Преобразуем теперь координатную систему базисных векторов таким образом, чтобы базисные векторы имели вид

$$\left\| \begin{matrix} e_1 \\ 0 \end{matrix} \right\|; \left\| \begin{matrix} 0 \\ e_2 \end{matrix} \right\|$$

и для случая, когда в качестве таких единичных ортов используются круговые поляризации. Такое представление будет унифицировать системы базисных векторов. Для данного случая значения  $\dot{e}_i$  ( $i = 1, 2$ ) обозначали бы не линейные ортогональные поляризации (как в разделе 1.4.1) а ортогональные круговые поляризации. Такое преобразование можно произвести на основе следующих рассуждений.

Используя выражение (1.38) для базисного состояния круговой поляризации, перепишем уравнение (1.37) в виде, устанавливающим связь базисных векторов  $\vec{e}_X, \vec{e}_Y$  и  $\dot{e}_L, \dot{e}_R$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_X \\ \vec{e}_Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \dot{e}_L + \dot{e}_R \\ -j \cdot \dot{e}_L + j \cdot \dot{e}_R \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{e}_L \\ \dot{e}_R \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Из выражения (1.39) следует, что единичные векторы  $\vec{e}_X, \vec{e}_Y$  линейного поляризационного базиса представляют собой линейную комбинацию единичных векторов  $\dot{e}_L, \dot{e}_R$  кругового поляризационного базиса, а коэффициенты, определяющие эту комбинацию, составляют некоторую матрицу  $\|F\|$

$$\|F\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

которая удовлетворяет условию

$$\|F\|^{+} \cdot \|F\| = \|\delta_{jl}\|, \quad (1.41)$$

где  $+$  означает эрмитово сопряжение, а  $\|\delta_{jl}\|$  единичную матрицу.

Вообще говоря, коэффициенты линейного преобразования (1.39) должны удовлетворять таким условиям, чтобы сохранилась ортогональность базисных векторов после преобразования, что и выполняется в нашем случае. Этим условиям соответствует так называемое унитарное преобразование, матрица которого удовлетворяет условию (1.41).

Физический смысл унитарного преобразования состоит в сохранении полной энергии анализируемой волны при переходе от одного базиса к другому.

Необходимо обратить внимание на тот факт, что матрица перехода от базисных круговых поляризаций к линейным построена из ортонормальных векторов Джонса (1.38), представляющих круговые поляризации. Нетрудно видеть, что, если имеется только одна из круговых поляризаций ( $\dot{e}_L$ , или  $\dot{e}_R$ ), то для случая единичной интенсивности волны

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{e}_L \\ 0 \end{vmatrix} &= \frac{|\dot{e}_L|}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -j \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -j \end{vmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{e}_R \end{vmatrix} &= \frac{|\dot{e}_R|}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ j \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ j \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Умножив выражения (1.42) слева на матрицу, обратную матрице (1.40) (а из условия (1.41) следует, что матрица, обратная к некоторой унитарной матрице есть эрмитово сопряженная матрица), получим:

$$\begin{vmatrix} \dot{e}_L \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -j \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{e}_R \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ j \end{vmatrix}, \quad (1.43)$$

где матрица

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} = \|F\|^{-1} = \|F\|^+ \quad (1.44a)$$

является обратной матрицей к матрице (1.40). Тогда можно записать

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_L \\ \dot{E}_R \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{E}_X \\ \dot{E}_Y \end{vmatrix}. \quad (1.44б)$$

Выражения (1.43) описывают преобразование, которое придает базисным круговым поляризациям типовой вид. Эти соотношения описывают переход от представления базисных круговых поляризаций в линейном базисе к их описанию единичными круговыми векторами Джонса.

Тогда волна с произвольным состоянием поляризации, заданная своими проекциями в линейном базисе, может быть преобразована в круговой базис

умножением вектора Джонса этой волны на матрицу перехода (1.44а). Так, например, вектор Джонса (1.28) эллиптического состояния поляризации при переходе в круговой базис определяется как:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{RL} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta - j \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + j \sin \alpha \cos \beta \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \exp j\beta \\ \cos \alpha + \sin \alpha \exp -j\beta \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Элементы вектора (1.45) представляют собой проекции эллиптически поляризованной волны на единичные орты кругового поляризационного базиса. Таким образом, определена форма матрицы перехода от синфазного поляризационного базиса «горизонтальная поляризация – вертикальная поляризация» к синфазному круговому поляризационному базису «левый круг – правый круг». Рассмотрим теперь общий случай поляризационного базиса – эллиптический базис, поскольку предельными случаями этого базиса являются как линейный так и круговой поляризационные базисы.

### ***1.4.3. Эллиптический поляризационный базис.***

Анализ разложения эллиптически поляризационной волны в круговом ортогональном базисе показал, что единичными ортами этого базиса служат ортогональные круговые поляризации с противоположным направлением вращения. Линейный поляризационный базис характеризуется только пространственной ортогональностью единичных ортов. Линейная поляризация представляет собой предельный случай эллиптической поляризации при обращении в нуль малой полуоси, а получающийся при этом линейно поляризованный вектор поля ориентирован вдоль большой полуоси исходного эллипса. Если мысленно построить ортогональный линейный базис и предположить, что его единичные орты получены путем «сжатия» двух эллипсов в направлении их малых полуосей, то становится очевидным, что два ортогональных в пространстве эллипса должны иметь взаимно-перпендикулярные большие полуоси.

Однако интуитивно ясно, что пространственной ортогональности полуосей двух эллипсов недостаточно для того, чтобы векторы Джонса, отвечающие этим эллипсам, были ортогональны в «поляризованном» смысле. Действительно, если припомнить, что круговой поляризованный базис образован ортогональными круговыми поляризациями левого и правого направления вращения, а сами эти поляризации есть второе предельное состояние эллипса поляризации (при равенстве его полуосей), то становится ясным, что ортогональный эллиптический поляризованный базис должен быть образован двумя эллиптически поляризованными волнами единичной интенсивности, большие полуоси эллипсов поляризации которых перпендикулярны, а направления обхода эллипсов (направления вращения векторов электрического поля) противоположны (см. Рис.1.8).

Условие ортогональности векторов Джонса, отвечающих эллиптически поляризованным волнам, определяется выражением  $\dot{\vec{E}}^+ \cdot \dot{\vec{E}} = 0$ , что позволяет найти процедуру построить вектора Джонса, ортогонального к заданному вектору Джонса.

Определим эллиптически поляризованную волну единичной интенсивности вектором Джонса (1.28), который перепишем здесь для удобства:

$$\dot{\vec{e}}_1 = \left\| \begin{array}{l} \cos \beta \cdot \cos \alpha - j \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \sin \beta \cdot \cos \alpha + j \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \dot{m} \\ \dot{n} \end{array} \right\|.$$

Для построения вектора Джонса, ортогонального вектору  $\dot{\vec{e}}_1$ , заменим азимут главной полуоси  $\beta$  на  $\beta + \pi/2$  и изменим знак угла эллиптичности  $\alpha$  на противоположный, что означает изменение направления вращения электрического вектора. Тогда

$$\dot{\vec{e}}_2 = \left\| \begin{array}{l} -(\sin \beta \cdot \cos \alpha - j \cos \beta \cdot \sin \alpha) \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha + j \sin \beta \cdot \sin \alpha \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} -\dot{n}^* \\ \dot{m}^* \end{array} \right\|. \quad (1.46)$$

Таким образом, пара векторов Джонса, образующих эллиптический поляризованный базис, (в линейном представлении этих векторов) имеет вид

$$\dot{\vec{e}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{n} \end{pmatrix}; \dot{\vec{e}}_2 = \begin{pmatrix} -\dot{n}^* \\ \dot{m}^* \end{pmatrix}$$

и удовлетворяет условию ортогональности  $\dot{\vec{e}}_1^+ \cdot \dot{\vec{e}}_2 = 0$ .

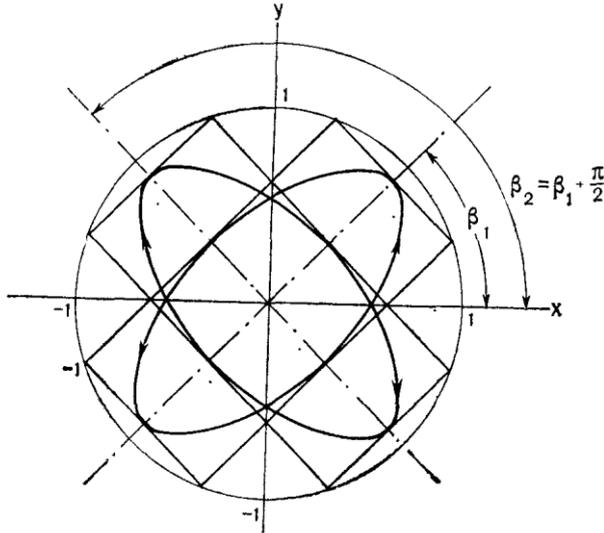


Рис.1.8

Базисные векторы не только ортогональны, но также ортонормальны, так как  $\dot{m}^* \cdot \dot{m} + \dot{n}^* \cdot \dot{n} = 1$ . Последнее непосредственно следует из выражения (1.28) для вектора Джонса, представляющее собой волну с единичной интенсивностью. Отметим еще раз, что ортогональные векторы Джонса (1.28) и (1.46), образующие эллиптический поляризационный базис, записаны пока в линейном поляризационном базисе и поэтому целесообразно перейти к их записи в типовом виде

$$\dot{\vec{e}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{e}_1; \dot{\vec{e}}_{2e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{e}_2,$$

где единицы означают единичные «эллиптические» векторы Джонса. Подобная форма уже использовалась, при определении понятия кругового поляризационного базиса.

Для перехода от линейного поляризационного базиса к эллиптическому поляризационному базису необходимо построить матрицы перехода,, аналогичные матрицам преобразования (1.40) и (1.44), которые связывают

линейный и круговой поляризационные базисы. Упомянутые матрицы были построены с использованием ортогональных векторов, отвечающих ортам кругового базиса. Аналогичным путем могут быть построены единичные орты эллиптического поляризационного базиса.

Прежде всего, необходимо пояснить процесс построения матрицы перехода, позволяющей получить представление эллиптических ортов в линейном базисе. Так, если необходимо получить это представление для первого эллиптического орта

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

то матрица преобразования должна иметь вид, который обеспечил бы запись вектора Джонса в линейном базисе в виде

$$\dot{E}_{XY}^{(1)} = \begin{vmatrix} \dot{m} \\ \dot{n} \end{vmatrix}.$$

Следовательно

$$\dot{E}_{XY}^{(1)} = \begin{vmatrix} \dot{m} \\ \dot{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{m} & o \\ \dot{n} & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (1.47).$$

Незаполненный столбец матрицы в данном случае ничего не определяет, так как вектор-столбец  $\dot{e}_1$  имеет нулевой нижний элемент. Этот столбец можно заполнить, определяя переход в линейный базис для второго эллиптического единичного орта

$$\dot{e}_2 = \dot{e}_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку орты  $\dot{e}_1$  и  $\dot{e}_2$  ортогональны, то в линейном базисе орту  $\dot{e}_2$  должен соответствовать вектор Джонса

$$\dot{E}_{XY}^{(2)} = \begin{vmatrix} -\dot{n}^* \\ \dot{m}^* \end{vmatrix},$$

ортогональный вектору Джонса  $\dot{E}_{XY}^{(1)}$ . Тогда

$$\dot{\vec{E}}_{XY}^{(2)} = \begin{vmatrix} \dot{m} - \dot{n}^* & 0 \\ \dot{n} & \dot{m}^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (1.48)$$

Таким образом, матрица перехода от эллиптического базиса, образованного ортогональными эллиптическими поляризациями, к линейному поляризационному базису определяется в виде

$$\|L\| = \begin{vmatrix} \dot{m} & -\dot{n}^* \\ \dot{n} & \dot{m}^* \end{vmatrix}, \quad (1.49)$$

а матрица

$$\|L\|^{-1} = \begin{vmatrix} \dot{m}^* & \dot{n}^* \\ -\dot{n} & \dot{m} \end{vmatrix} \quad (1.50)$$

является обратной к (1.49) и позволяет осуществить переход от представления в линейном базисе к представлению в эллиптическом базисе.

Конкретная форма матриц преобразования (1.49) и (1.50) определяется углом эллиптичности и азимутом поляризационного эллипса ортов эллиптического базиса. Используя вектор Джонса (1.28) и ортогональный к вектор (1.46) запишем эти матрицы в виде:

$$\|L\| = \begin{vmatrix} \cos \beta \cos \alpha - j \sin \beta \sin \alpha & -(\sin \beta \cos \alpha - j \cos \beta \sin \alpha) \\ \sin \beta \cos \alpha + j \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha + j \sin \beta \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad (1.51a)$$

$$\|L\|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \beta \cos \alpha + j \sin \beta \sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha - j \cos \beta \sin \alpha \\ -(\sin \beta \cos \alpha + j \cos \beta \sin \alpha) & \cos \beta \cos \alpha - j \sin \beta \sin \alpha \end{vmatrix}. \quad (1.51b)$$

Нетрудно видеть, что матрицы (1.51a,б) удовлетворяют условию унитарности  $\|L\|^{-1} = \|L\|^+$ . Рассмотрим теперь подробнее случай  $\beta = 0$ , для которого матрица (1.51б) принимает вид

$$\|L\|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -j \sin \alpha \\ -j \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}. \quad (1.52)$$

Эта матрица описывает преобразование линейно поляризованных волн в эллиптически поляризованные волны; при этом ориентация большой полуоси эллипса совпадает с ориентацией исходной линейной поляризации. Матрица (1.52) называется оператором эллиптичности [14,15] и будет подробно изучена

в дальнейшем. Для значения угла эллиптичности  $\alpha = \pi/4$  (круговая поляризация) матрица (1.52) будет выглядеть как

$$\|L(\alpha = \pi/4)\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{vmatrix} \quad (1.53)$$

и представляет собой еще одну форму матрицы перехода от линейного базиса к круговому поляризационному базису [9]. Определив матрицу

$$\|L(\alpha = \pi/4)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.54)$$

обратную к матрице (1.53), нетрудно видеть, что умножение единичных ортов кругового поляризационного базиса на матрицу (1.54) приводит к ортогональным векторам Джонса, заданным в линейном поляризационном базисе

$$\dot{\vec{E}}_{1XY} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{e}_L \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\dot{e}_L}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ j \end{vmatrix}; \quad \dot{\vec{E}}_{2XY} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{e}_R \end{vmatrix} = \frac{\dot{e}_R}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} j \\ 1 \end{vmatrix}$$

и соответствующим волнам круговой поляризации.

Таким образом, матрицы (1.54) и (1.53) представляют собой унитарные матрицы прямого и обратного перехода между линейным и круговым поляризационными базисами. Однако эти матрицы отличаются от матриц прямого и обратного перехода (1.40) и (1.44a), рассмотренными в подразделе 1.4.2, хотя и выполняют те же самые операции.

Чтобы найти объяснение этому различию, сравним векторы Джонса круговой поляризации в линейном базисе, полученные путем воздействия операторов перехода  $\|F\|$  и  $\|L \alpha = \pi/4\|$  на единичные векторы кругового поляризационного базиса. В результате использования оператора  $\|F\|$  векторы Джонса, отвечающие ортогональным волнам круговой поляризации будут записаны в линейном базисе как

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -j \end{vmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ j \end{vmatrix}, \quad (1.55a)$$

а в результате использования оператора  $\|L \alpha = \pi/4\|$  векторы Джонса волн, поляризованных по кругу, в линейном базисе принимают вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.55б)$$

Обратим внимание на тот факт, что пара ортогональных векторов Джонса (1.55б) связана преобразованием

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -n^* \\ m^* \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

а применение аналогичной операции к первому из пары векторов (1.55а) второго вектора не дает, хотя эта пара также отвечает двум ортогональным векторам. Однако, если вынести во втором из векторов (1.55а) величину  $j$ , то этот вектор можно переписать следующим образом:

$$\frac{\exp j\pi/2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что столбцовая часть этого вектора получена из первого вектора пары (1.55а) переходом (1.51). Перепишем пары векторов (1.55а,б) еще раз:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}; \quad \frac{\exp j\pi/2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этой записи следует, что абсолютные фазы первой пары отличаются от абсолютной фазы второй пары.

Таким образом, как матрицы  $\|F\|, \|F\|^{-1}$  так и матрицы  $\|L \alpha = \pi/4\|, \|L \alpha = \pi/4\|^{-1}$  описывают операцию перехода между линейным и круговым базисами, но абсолютные временные фазы волн круговой поляризации, образующих орты кругового поляризационного базиса, при этом различны.

Математический смысл данной ситуации заключается в том, что при переходе из одного базиса в другой основное значение имеет факт равенства единице

модуля детерминанта унитарной матрицы преобразования, а его аргумент может быть произвольным.

Обычная форма перехода от линейного поляризационного базиса, образованного синфазной парой горизонтальной и вертикальной линейных поляризаций к круговому поляризационному базису «правый круг – левый круг», может быть представлена матрицей вида:

$$\|\dot{Q}\| = \frac{\exp j\varphi}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \exp j\eta & \exp -j\eta \\ \exp -j\eta & \exp j\eta \end{vmatrix}. \quad (1.57)$$

Из выражения (1.57) следует, что, в зависимости от соотношения величин  $\varphi$  и  $\eta$ , существует бесконечное множество матриц, описывающих переход от линейного синфазного базиса в круговой базис. Отличие будет заключаться в абсолютных временных фазах круговых поляризаций. Рассмотренные матрицы  $\|F\|$  и  $\|L \pi/4\|$  соответствуют следующим случаям:

$$-\varphi = \eta = \frac{\pi}{4}; \|\dot{Q}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} = \|F\|^{-1},$$

$$\varphi = \eta = 0; \|\dot{Q}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} = \|L \pi/4\|.$$

Необходимо указать, что форма матрицы перехода зависит также от выбора направления вращения вектора электрического поля волны круговой поляризации, которая рассматривается как первый единичный орт кругового поляризационного базиса. Именно поэтому выше было указано, что матрица (1.57) описывает переход из линейного базиса в круговой базис вида «правый круг – левый круг». Если за первый орт кругового базиса принять левую круговую поляризацию, то матрица перехода примет вид:

$$\|\dot{Q}\| = \frac{\exp j\varphi}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \exp j\eta & -j \exp -j\eta \\ -j \exp -j\eta & \exp j\eta \end{vmatrix}. \quad (1.58)$$

Для случая  $\eta = \varphi = 0$  матрица (1.58) принимает вид [10]

$$\|\dot{Q}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{vmatrix} \quad (1.58a)$$

и соответствует переходу от синфазной пары «горизонтальная поляризация – вертикальная поляризация» в круговой базис вида «левый круг – правый круг». Выбор конкретной формы матриц перехода будет определяться в дальнейшем как физическим смыслом задачи, так и удобством анализа.

### ***1.5 Поляризационное отношение в линейном базисе и представление состояний поляризации на декартовой комплексной плоскости.***

Использование двухкомпонентного вектора Джонса эллиптически поляризованной волны единичной интенсивности дает возможность представления состояний поляризации точками на комплексной плоскости. Такое представление может быть использовано в случае, если опустить информацию о размере эллипса поляризации и об абсолютной временной фазе эллиптически поляризованной волны. Поскольку эти параметры не определяют геометрию эллипса поляризации.

Вообще говоря, информация об эллипсе поляризации, обладающем углом эллиптичности  $\alpha$  и азимутом  $\beta$ , может быть получена, если найти отношение составляющих вектора Джонса в линейном поляризационном базисе (как это было указано в подразделе 1.4.1):

$$\dot{P}^{XY} = \frac{\dot{E}_Y}{\dot{E}_X} = \frac{E_Y}{E} \exp j \varphi_Y - \varphi_X = |\dot{P}^{XY}| \exp j \arg \dot{P} . \quad (1.59)$$

Комплексное число  $\dot{P}^{XY}$  называется декартовым поляризационным отношением (или комплексным фазором) эллиптически поляризованной волны. Величины  $|\dot{P}^{XY}|$  и  $\arg \dot{P}^{XY}$  есть модуль и фаза поляризационного отношения соответственно. Используя вектор Джонса, записанный через угол эллиптичности и азимут поляризационного эллипса, ( см. подраздел 1.4.1), можно переписать выражение (1.59) в виде

$$\dot{P}^{XY} = \frac{tg \beta + j tg \alpha}{1 - j tg \alpha \cdot tg \beta} = \operatorname{Re} \dot{P}^{XY} + j \operatorname{Im} \dot{P}^{XY} . \quad (1.60)$$

Соотношение (1.60) свидетельствует о том, что эллиптическое состояние поляризации, характеризуемое углом эллиптичности  $\alpha$  и азимутом  $\beta$  может быть представлено единственным комплексным числом  $\dot{P}^{xy}$ . Поскольку каждому комплексному числу  $\dot{P}^{xy}$  можно сопоставить представляющую точку на комплексной плоскости  $\text{Re } \dot{P}^{xy} + j \text{Im } \dot{P}^{xy}$ , то комплексную плоскость можно рассматривать как пространство состояний поляризации.

Так как области определения углов эллиптичности и азимута заданы в пределах  $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  соответственно, то из выражения (1.60) следует, что соответствие между состояниями поляризации и точками комплексной плоскости является взаимно-однозначным. Рассмотрим это соответствие для некоторых состояний поляризации и точек комплексной плоскости

1. Пусть угол эллиптичности равен нулю, что соответствует линейным поляризациям волны. Тогда из уравнения (1.60) следует, что в случае  $\alpha = 0$  поляризационное отношение принимает вид  $P^{xy} = \text{tg } \beta$ . Таким образом, линейно-поляризованная волна горизонтальной ориентации (т.е. имеющая нулевой азимут) изображается началом координат комплексной плоскости. Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости соответствует азимуту  $\beta = 0.5\pi$  (вертикальная поляризация). Все линейные поляризации с азимутом, изменяющимся в пределах  $-0.5\pi \leq \beta \leq 0.5\pi$ , соответствуют точкам, лежащим на действительной оси комплексной плоскости  $\text{Re } \dot{P}^{xy} + j \text{Im } \dot{P}^{xy}$ . При этом линейные поляризации, ориентированные под углами  $\pm\pi/4$  изображаются точками  $\text{Re } \dot{P}^{xy} = \pm 1$ .

2. Представление круговых поляризаций на комплексной плоскости удобнее рассматривать, используя выражение (1.59), поскольку азимутальный угол  $\beta$  для круговых поляризаций не определен. Поскольку для круговых поляризаций  $|\dot{E}_x| = |\dot{E}_y|$ , а разность фаз

ортогональных составляющих есть  $\varphi_Y - \varphi_X = 0.5\pi$ , то из выражения (1.59) следует, что правая круговая поляризация изображается точкой комплексной плоскости  $+j$ , а левая круговая поляризация изображается точкой  $-j$ . Обе точки  $\pm j$  лежат на мнимой оси комплексной плоскости.

3. Все эллиптические поляризации соответствуют остальным точкам комплексной плоскости. Таким образом, за исключением действительной оси, точек  $\pm j$  и бесконечно удаленной точки, прочие точки отображают эллиптические состояния поляризации. При этом точки верхней полуплоскости соответствуют поляризациям с правым направлением вращения электрического вектора, а точки нижней полуплоскости отображают поляризации с левым направлением вращения. Действительная ось комплексной плоскости на всем интервале  $\pm\infty$  исключена из рассмотрения, поскольку для линейных поляризаций направление вращения не определено. Графическое изображение декартовой комплексной плоскости приведено на Рис. 1.9.

Если зафиксировать отношение амплитуд поляризационно-ортогональных составляющих  $|\dot{E}_Y|/|\dot{E}_X| = const$ , то из выражения (1.59) следует, что

$$\operatorname{Re} \dot{P}^{xy} = \frac{E_Y}{E_X} \cos \Delta\varphi; \operatorname{Im} \dot{P}^{xy} = \frac{E_Y}{E_X} \sin \Delta\varphi. \quad (1.61)$$

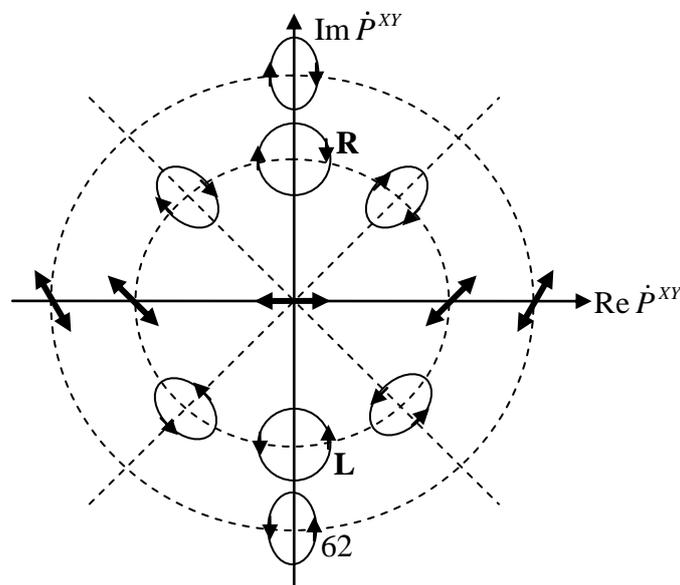


Рис. 1.9

Пара соотношений (1.61) представляет собой параметрическую форму записи уравнения окружности радиуса  $E_Y/E_X$ . Таким образом, геометрическим местом точек, отвечающих эллиптически поляризованным волнам, имеющим постоянное отношение амплитуд ортогональных составляющих, является семейство концентрических окружностей радиуса  $E_Y/E_X$  на комплексной плоскости. Пересечение этой окружности с действительной и мнимой осями дает изображение линейных поляризаций, имеющих азимут  $\pm 0.25\pi$  и круговых поляризаций соответственно, поскольку указанные поляризации имеют отношение модулей поляризационно-ортогональных составляющих, равное единице.

Геометрическим местом точек, изображающих на декартовой комплексной плоскости эллиптические поляризации, образованные линейно-поляризованными колебаниями с постоянной разностью фаз  $\arg \dot{P}^{XY} = const$ , являются прямые линии, проходящие через начало координат. Это непосредственно следует из выражения (1.59). Графическая иллюстрация дана на Рис. 1.10.

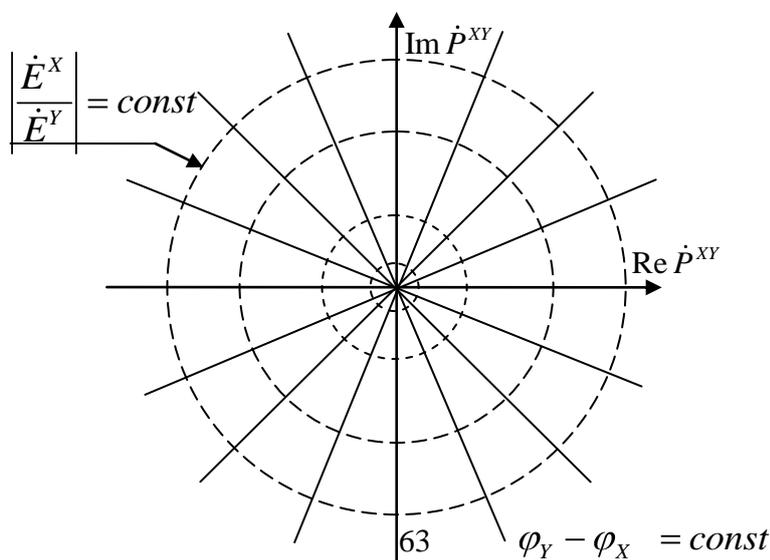


Рис. 1.10

Концентрические окружности, отвечающие эллиптически поляризованным волнам с постоянным отношением амплитуд ортогональных составляющих и прямые, соответствующие эллиптически поляризованным волнам с постоянным фазовым сдвигом между ортогональными составляющими, образуют два ортогональных семейства. В начале координат и в бесконечно удаленной точке разность фаз не определена, так как в этих точках обращаются в нуль составляющие  $\dot{E}_y$  и  $\dot{E}_x$  соответственно. Если при движении изображающей точки по прямой она проходит через начало координат или через бесконечно удаленную точку, то разность фаз между ортогональными составляющими скачкообразно изменяется на величину  $\pi$ .

Рассмотрим теперь вопрос о так называемых линиях постоянной эллиптичности и постоянного азимута, которые определяют геометрию декартовой комплексной плоскости [14]. Для решения этого вопроса необходимо обратить выражение

$$\dot{P}^{xy} = \frac{tg\beta + jtg\alpha}{1 - jtg\alpha tg\beta} = \text{Re } \dot{P}^{xy} + j \text{Im } \dot{P}^{xy} .$$

Перепишем для удобства выражения (1.33) и (1.34), определяющие геометрические функции азимутального угла и угла эллиптичности через действительную и мнимую части декартова поляризационного отношения:

$$tg\beta = \frac{2\text{Re } \dot{P}_{xy}}{1 - |\dot{P}_{xy}|^2}, \quad (1.33) \quad \sin 2\alpha = \frac{2\text{Im } \dot{P}_{xy}}{1 + |\dot{P}_{xy}|} \quad (1.34) .$$

Нетрудно показать, что эти выражения позволяют найти азимут  $\beta$  и угол эллиптичности  $\alpha$ . Подставляя величину  $|\dot{P}^{xy}|^2 = \text{Re}^2 \dot{P}^{xy} + \text{Im}^2 \dot{P}^{xy}$  в выражение (1.33), получим соотношение

$$2 \operatorname{Re} \dot{P}^{XY} + \operatorname{tg} 2\theta \left[ \operatorname{Re}^2 \dot{P}^{XY} + \operatorname{Im}^2 \dot{P}^{XY} - 1 \right] = 0,$$

которое после простейших преобразований принимает вид

$$\left[ \operatorname{Re} \dot{P}^{XY} + \operatorname{ctg} 2\beta \right]^2 + \operatorname{Im} \dot{P}^{XY} = \cos ec^2 2\beta. \quad (1.62a)$$

Подстановка квадрата модуля поляризационного отношения в выражение (1.34) приводит к соотношению

$$2 \operatorname{Im} \dot{P}^{XY} - \sin 2\alpha \left[ \operatorname{Re}^2 \dot{P}^{XY} + \operatorname{Im}^2 \dot{P}^{XY} + 1 \right] = 0,$$

или, после аналогичных преобразований, к соотношению

$$\operatorname{Re}^2 \dot{P}^{XY} + \left[ \operatorname{Im} \dot{P}^{XY} - \cos ec 2\alpha \right]^2 = \operatorname{ctg}^2 2\alpha. \quad (1.62b)$$

Для постоянного значения  $\beta$  уравнение (1.62a) описывает окружность радиуса  $|\cos ec 2\beta|$ , центр которой расположен на действительной оси комплексной плоскости в точке  $-\operatorname{ctg} 2\beta; 0$ . Эта окружность проходит через точки  $\pm j$ , отвечающие правой ( $R$ ) и левой ( $L$ ) круговым поляризациям, поскольку подстановка значений  $\operatorname{Re} \dot{P}^{XY} = 0; \operatorname{Im} \dot{P}^{XY} = \pm 1$  сводит выражение (1.62a) к тождеству. Кроме того, при замене  $\theta \rightarrow \theta \pm \pi/2$ , уравнение (1.62a) остается неизменным, т.к.

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{ctg} 2(\theta \pm \pi/2); \cos ec 2\theta = \cos ec 2(\theta \pm \pi/2).$$

Из изложенного следует, что на декартовой комплексной плоскости геометрическим местом точек  $\dot{P}^{XY}$ , соответствующих эллиптически поляризованным волнам, имеющих один и тот же азимут  $\theta$  (или ортогональный азимут  $\theta \pm \pi/2$ ), является окружность, проходящая через точки  $R$  и  $L$ , изображающие правую и левую круговые поляризации. Одна полная окружность, проходящая через точки  $R$  и  $L$ , соответствует двум постоянным значениям азимута, которые отличаются на  $\pi/2$  (Рис.1.11а). Если азимут  $\theta$  лежит в пределах  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , то нетрудно видеть, что точки  $R$  и  $L$  делят проходящую через них окружность на две дуги. Точки на дуге  $LNR$  соответствуют эллипсам поляризации, главные оси которых ориентированы под одним и тем же азимутом  $\theta$  и эллиптичность которых изменяется от  $-1$  в

точке  $L$  до  $+1$  в точке  $R$ . Эллиптичность принимает значение  $0$  в точке  $N$  (точка пересечения с действительной осью комплексной плоскости). Дуга  $LNR$  есть часть окружности радиуса  $\rho = \operatorname{cosec} 2\theta$  с центром в точке  $C -ctg 2\theta, 0$ . Точки на дуге  $LN_1R$  соответствуют эллипсам поляризации с ортогональным азимутом  $\beta = \theta - \pi/2$ .

Обсудим теперь линии постоянной эллиптичности, которые представляют собой геометрическое место точек на декартовой комплексной плоскости, изображающих эллипсы поляризации с одной и той же эллиптичностью (т.е. с одинаковым отношением осей и направлением обхода). Из выражения (1.62б) следует, что линия постоянной эллиптичности, соответствующая некоторому значению угла эллиптичности  $\alpha$ , представляет собой окружность радиуса  $|ctg 2\alpha|$  с центром в точке  $0; \operatorname{cosec} 2\alpha$ , расположенной на мнимой оси комплексной плоскости (см. Рис.1.11б). Внутри этой окружности заключена точка  $R$  или  $L$ , в зависимости от того, положительна или отрицательна эллиптичность. На Рис.1.11б приведен случай положительной эллиптичности. Изображенная на рисунке окружность радиуса  $l = ctg 2\alpha$  с центром в точке  $K 0, \operatorname{cosec} 2\alpha$  соответствует некоторому постоянному значению коэффициента эллиптичности  $tg \alpha$ . Рассмотрим теперь точки  $Q_2$  и  $Q_3$ , лежащие вблизи (слева и справа) от точки  $Q_1$ , которая является верхней точкой пересечения окружности с положительной мнимой полуосью.

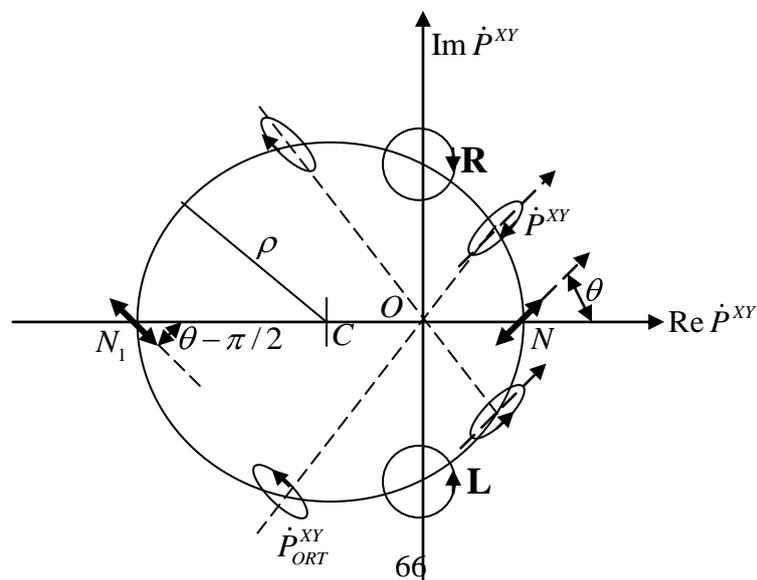


Рис. 1.11а

При перемещении по окружности от точки  $Q_2$  через точку  $Q$  (нижняя точка пересечения мнимой оси с окружностью) до точки  $Q_3$  форма эллипсов не изменяется, в то время как их азимут изменяется от величины  $-\pi/2$  через 0 до величины  $+\pi/2$ . Необходимо заметить, что линия постоянной эллиптичности обладает важным свойством: она представляет собой геометрическое место точек  $P$ , для которых отношение их расстояний до точки  $L$  (левая круговая поляризация) до точки  $R$  остается постоянным. Величина этого отношения определяется как [14]  $|PL/PR| = |tg \alpha + 0.25\pi|$ .

Рассмотрим теперь полное семейство кривых постоянного азимута и постоянной эллиптичности, которые представляют собой две системы ортогональных кривых на комплексной плоскости [14]. Изменение азимута эллипса поляризации в пределах  $-\pi/2 \leq \beta \leq +\pi/2$  дает полное семейство кривых постоянного азимута. Как было показано выше, каждая кривая есть дуга окружности, соединяющая точки  $R$  и  $L$ . Тот факт, что эти точки принадлежат всем кривым постоянного азимута объясняется тем, что азимут круговых поляризаций является неопределенным.

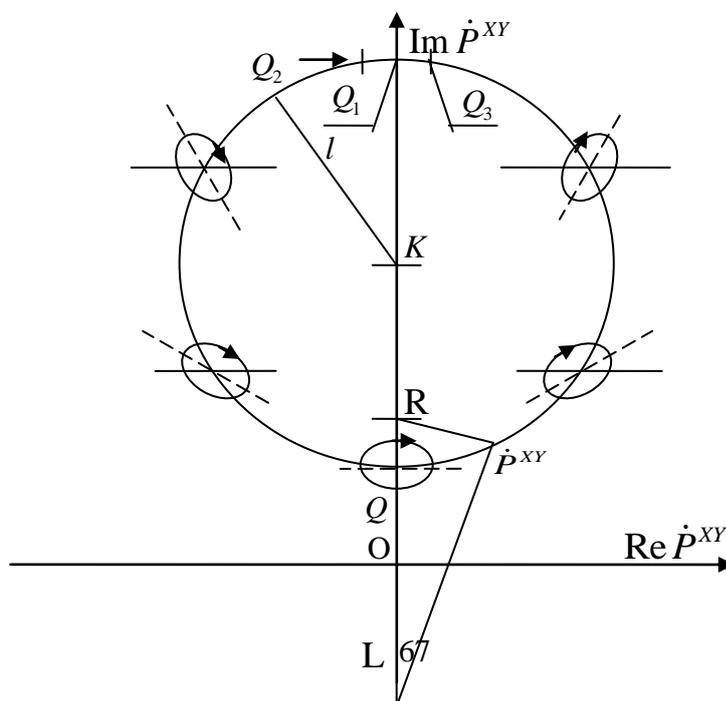


Рис. 1.11б

Семейство кривых постоянного азимута показано на Рис. 1.11в сплошными линиями. Стрелки на каждой кривой указывают направление, в котором увеличивается угол эллиптичности  $\alpha$ . На всех кривых стрелки направлены от  $L$  к  $R$ . Для значения азимута  $\beta = 0$  кривая постоянного азимута совпадает с отрезком мнимой оси, который проходит от  $L$  через начало координат к  $R$ . Кривая постоянного азимута, отвечающая значению  $\beta = -\pi/2$ , совпадает с дополнительным отрезком мнимой оси, проходящим от  $L$  через бесконечно удаленную точку до  $R$ .

Рассмотрим теперь полное семейство кривых постоянного азимута и постоянной эллиптичности, которые представляют собой две системы ортогональных кривых на комплексной плоскости [14]. Изменение азимута эллипса поляризации в пределах  $-\pi/2 \leq \beta \leq +\pi/2$  дает полное семейство кривых постоянного азимута. Как было показано выше, каждая кривая есть дуга окружности, соединяющая точки  $R$  и  $L$ . Тот факт, что эти точки принадлежат всем кривым постоянного азимута объясняется тем, что азимут круговых поляризаций является неопределенным.

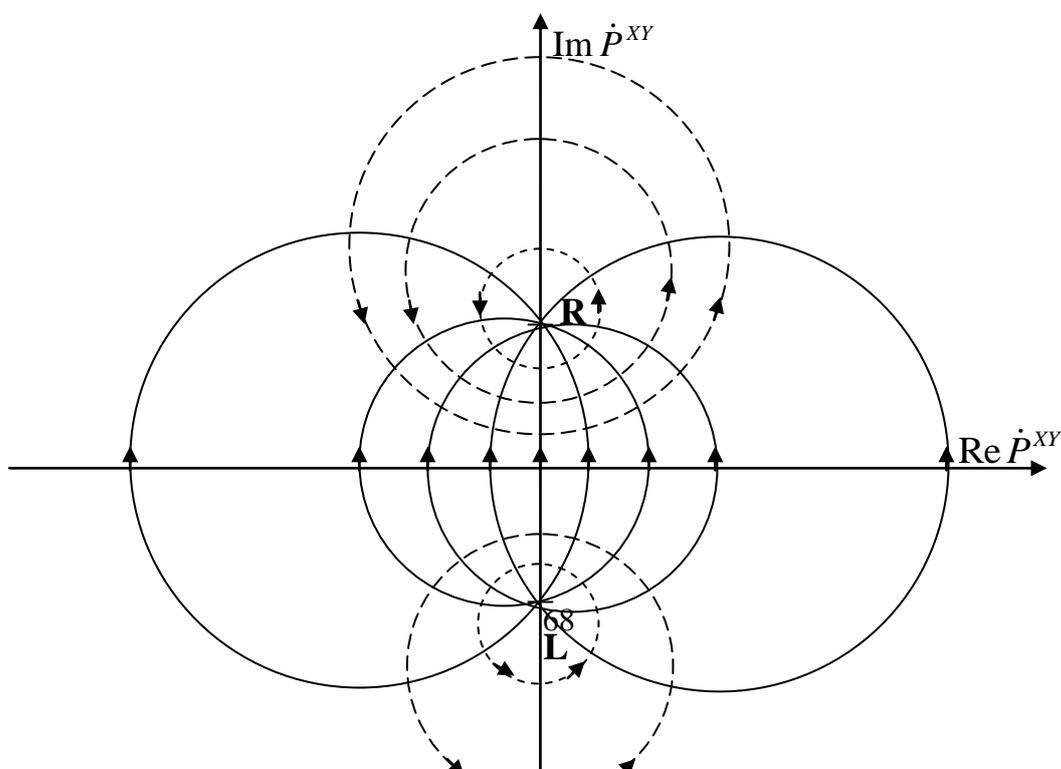


Рис. 1.11в

На Рис.1.11в изображено также семейство кривых постоянной эллиптичности (штриховые линии), которое определяется изменением угла эллиптичности в пределах  $-\pi/4 \leq \alpha \leq +\pi/4$ . Стрелки на кривых постоянной эллиптичности указывают направление увеличения значения азимута эллипса поляризации.

Рассмотрим теперь представление на декартовой комплексной плоскости пар ортогональных поляризаций, эллипсы которых характеризуются параметрами  $\beta, \alpha$  и  $\beta + 0.5\pi; -\alpha$ . Комплексное поляризационное отношение для состояния поляризации, ортогонального к некоторому заданному состоянию, характеризуемому выражением

$$\dot{P}^{XY} = \frac{tg \beta + jtg \alpha}{1 - jtg \alpha tg \beta}$$

можно получить, производя замену  $\beta \rightarrow \beta + 0.5\pi; \alpha \rightarrow -\alpha$  :

$$\dot{P}_{ORT}^{XY} = \frac{tg \beta + 0.5\pi + jtg -\alpha}{1 - jtg \beta + 0.5\pi tg -\alpha}.$$

Учитывая, что

$$tg \beta + 0.5 \cdot \pi = \sin \beta + 0.5 \cdot \pi / \cos \beta + 0.5 \cdot \pi = -1/tg \beta, tg -\alpha = -tg \alpha,$$

получим

$$\dot{P}_{ORT}^{XY} = -\frac{1 + jtg \beta tg \alpha}{tg \beta - jtg \alpha}. \quad (1.63)$$

Сравнивая выражения (1.60) and (1.62), можно найти условия, связывающие величины поляризационных отношений ортогонально поляризованных волн:

$$\dot{P}_{ORT} = -\frac{1}{\dot{P}^*} = -\frac{\dot{P}}{|\dot{P}|^2}; \dot{P} = -\frac{1}{\dot{P}_{ORT}^*}. \quad (1.64a)$$

Следовательно,

$$\dot{P} \cdot \dot{P}_{ORT}^* = \dot{P}^* \cdot \dot{P}_{ORT} = -1 \quad (1.64b)$$

где (\*) означает комплексное сопряжение. Подставляя  $\dot{P} = \dot{E}^Y / \dot{E}^X$  и  $\dot{P}_{ORT} = \dot{E}_{ORT}^Y / \dot{E}_{ORT}^X$  в выражение (1.64б), получим

$$\dot{E}^X \dot{E}_{ORT}^{X*} + \dot{E}^Y \dot{E}_{ORT}^{Y*} = \dot{E}^{X*} \dot{E}_{ORT}^X + \dot{E}^{Y*} \dot{E}_{ORT}^Y = 0,$$

или

$$\dot{E}_{ORT}^+ \dot{E}^- = \dot{E}^+ \dot{E}_{ORT}^-,$$

что и является условием ортогональности двух комплексных векторов Джонса, т.е. равенство нулю их скалярного произведения.

Если две точки комплексной плоскости  $\dot{P}$  и  $\dot{P}_{ORT}$  представляют ортогональные состояния поляризации, то, в соответствии с выражениями (1.64а,б), прямая линия, соединяющая эти точки, должна проходить через начало координат  $O$ . Кроме того, если окружность, проведенная через точки  $R$  и  $L$ , представляющие ортогональные круговые поляризации, проходит через точку  $\dot{P}$ , то она должна также проходить через точку  $\dot{P}_{ORT}$  (см. Рис. 1.11а), поскольку  $|OP| \times |OP_{ORT}| = |OR| \times |OL| = 1$ . Отсюда следует, что если на комплексной плоскости построить окружность, проходящую через точки  $R$  и  $L$ , то противоположные концы хорды, проведенной через начало координат, представляют точки, соответствующие ортогональным состоянием поляризации (см. Рис. 1.11а). Однако эта процедура довольно неудобна для построения на декартовой комплексной плоскости точки, изображающей поляризацию, ортогональную к некоторой заданной, поскольку в этом случае необходимо прежде всего построить с использованием трех точек ( $R, L, P$ ) некоторую окружность, проходящую через эти точки, а затем хорду, проходящую через точку  $P$  и начало координат комплексной плоскости.

Вторая точка пересечения этой хорды с построенной окружностью будет представлять точку, изображающую ортогональную поляризацию.

В связи с этим целесообразно воспользоваться более простой процедурой построения изображения поляризации, ортогональной к некоторой заданной поляризации. Как показано на Рис. 1.12, точка  $P$ , изображающая заданную поляризацию, прежде всего инвертируется относительно единичной окружности. Процессу инверсии  $\dot{P} \rightarrow \dot{P}_I$  отвечает замена  $\dot{P} \rightarrow 1/\dot{P}^*$ . Для геометрического построения инвертированной точки необходимо провести из точки  $P$  (см Рис.1.12) касательную к единичной окружности, а затем из точки касания  $T$  опустить перпендикуляр на прямую, соединяющую точку  $P$  с началом координат. Последняя операция – это инвертирование точки  $\dot{P}_I$  относительно начала координат  $\dot{P} \rightarrow \dot{P}_I$ . Этой операции инверсии отвечает замена  $1/\dot{P}^* \rightarrow -1/\dot{P}^*$ . Результатом этих двух операций является построение точки, изображающей поляризацию, ортогональную к заданной.

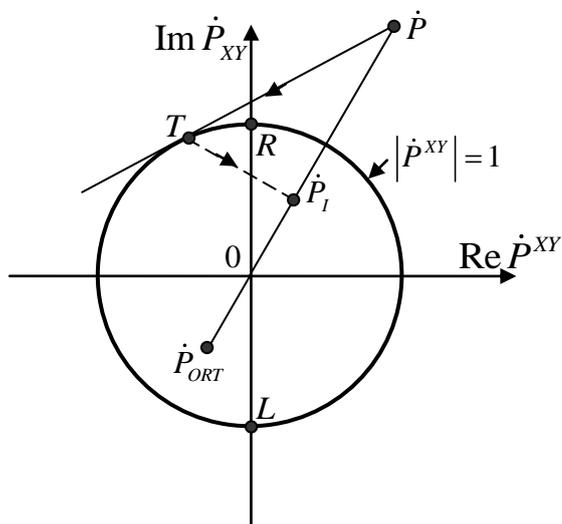


Fig. 1.12

**1.6. Круговое поляризационное отношение и представление состояний поляризации на круговой комплексной плоскости.**

Если в качестве базисных состояний используются правая и левая круговые поляризации, а поляризационное отношение образовано проекциям вектора Джонса волны на орты кругового базиса, то комплексная плоскость, точкам которой отвечают значения данного поляризационного отношения, называется круговой комплексной плоскостью [14].

Используя выражение (1.45) для вектора Джонса в круговом поляризационном базисе

$$\dot{\vec{E}}_{RL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot \exp j\beta \\ (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot \exp -j\beta \end{pmatrix},$$

запишем круговое поляризационное отношение

$$\dot{P}^{RL} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \exp -j2\beta . \quad (1.65a)$$

Соотношение (1.65) можно преобразовать к виду

$$\dot{P}^{RL} = \operatorname{tg} \alpha + 0.25\pi \exp -j2\beta , \quad (1.65b)$$

учитывая, что

$$\cos \alpha + \sin \alpha = 0.5\sqrt{2} \sin \alpha + 0.25 \cdot \pi ; \quad \cos \alpha - \sin \alpha = 0.5\sqrt{2} \cos \alpha + 0.25 \cdot \pi .$$

Принимая во внимание, что функции  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha + 0.25 \cdot \pi$  связаны дробно – линейным преобразованием

$$\operatorname{tg} \alpha + 0.25 \cdot \pi = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha},$$

можно определить коэффициент эллиптичности эллипса поляризации как

$$K = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 0.25\pi - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 0.25\pi + 1} = \frac{|\dot{P}^{RL}| - 1}{|\dot{P}^{RL}| + 1} . \quad (1.66a)$$

Из соотношения (1.65b) следует, что модуль кругового поляризационного отношения непосредственно связан с углом эллиптичности эллипса поляризации, а аргумент этого отношения представляет собой удвоенное значение азимутального угла эллипса:

$$\arg \dot{P}^{RL} = -2\beta . \quad (1.66b)$$

Поскольку каждому комплексному числу  $\dot{P}^{RL}$  может быть сопоставлена точка комплексной плоскости  $\dot{P}^{RL} = \text{Re } \dot{P}^{RL} + \text{Im } \dot{P}^{RL}$ , то эта комплексная плоскость может рассматриваться как еще один вариант пространства состояний поляризации. Это пространство, каждая точка которого взаимно-однозначно связана с множеством комплексных чисел, отвечающих значения поляризационного отношения в круговом поляризационном базисе, представляет собой так называемую круговую комплексную плоскость, в отличие от декартовой комплексной плоскости, использующей линейный поляризационный базис и линейное поляризационное отношение.

Свяжем с началом координат круговой комплексной плоскости точку  $\dot{P}^{RL} = 0$ . Эта точка соответствует круговой поляризации с левым направлением вращения (угол эллиптичности  $\alpha = -0.25\pi$ ). Тогда бесконечно удаленная точка будет соответствовать круговой поляризации с правым направлением вращения  $|\dot{P}^{RL}| = \infty; \alpha = 0.25\pi$ . Все линейные поляризации, имеющие нулевое значение угла эллиптичности, расположены на единичной окружности комплексной плоскости, поскольку  $|\dot{P}^{RL} \alpha = 0| = \text{tg } \pi/4 = 1$ . При этом аргумент кругового поляризационного отношения определяет ориентацию линейно-поляризованной волны в пределах  $-0.5\pi \leq \beta \leq 0.5\pi$ . (Этот эффект обсуждался при анализе представления линейно поляризованной волны с произвольной ориентацией её электрического вектора суммой двух колебаний, поляризованных по правому и левому кругу.

Все прочие точки круговой комплексной плоскости отображают эллиптические состояния поляризации. При этом точки внутри единичной окружности  $|\dot{P}^{RL}| < 1$  отображают все поляризации левого направления вращения  $-0.25\pi \leq \alpha < 0$ , а все точки вне этой окружности  $1 < |\dot{P}^{RL}| \leq \infty$  отображают поляризации правого направления вращения  $0 < \alpha \leq 0.25\pi$ .

Графическое изображение круговой комплексной плоскости приведено на Рис. 1.13.

Из выражений (1.65) и (1.66) следует, что линии постоянного азимута  $\beta = const$  представляют собой лучи, исходящие из начала координат и оканчивающиеся в бесконечно удаленной точке. При этом любая бесконечная прямая, проведенная через начало координат, содержит два луча, разделенные началом координат (левая круговая поляризация) и бесконечно удаленной точкой (правая круговая поляризация). Эти лучи представляют собой линии постоянных азимутов для ортогональных азимутальных углов. При переходе через начало координат или через бесконечно удаленную точку азимут скачкообразно изменяется на величину  $0.5\pi$ . Как уже отмечалось, ориентация для круговых поляризаций не определена.

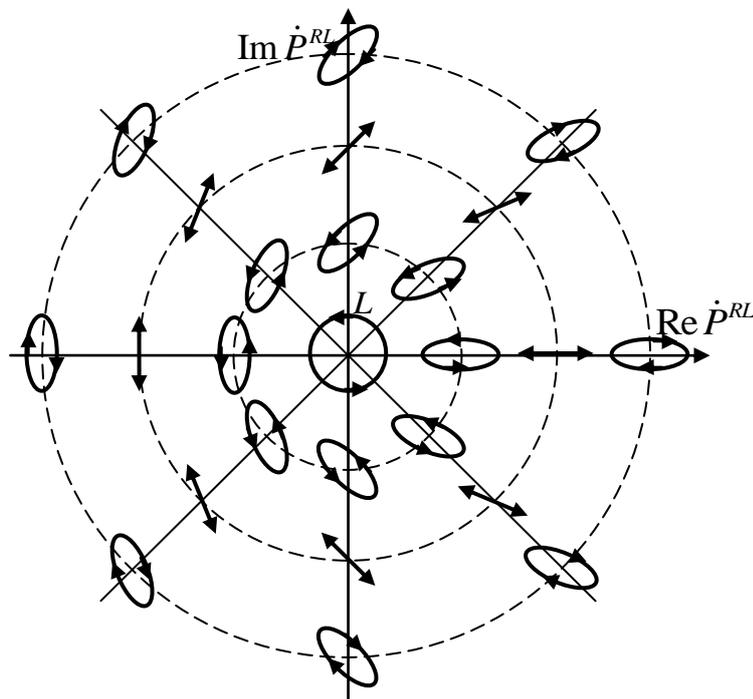


Fig. 1.13

Если построить на круговой комплексной плоскости семейство concentрических окружностей с центром в начале координат, то эти окружности будут представлять собой линии постоянной эллиптичности. При

этом семейство линий постоянной эллиптичности ортогонально семейству линий постоянного азимута (см. Рис.1.13).

Декартова и круговая комплексная плоскость представляют собой только два элемента из возможной группы представлений состояний поляризации точками комплексной плоскости. В общем случае комплексное поляризационное отношение может быть задано в произвольном эллиптическом поляризационном базисе, а его значениям могут быть сопоставлены точки некоторой комплексной плоскости, называемой обобщенной комплексной плоскостью. Эта плоскость и её свойства будут рассмотрены ниже.

В заключение настоящего подраздела необходимо указать, что в подразделах 1.1 – 1.6 были рассмотрены различные методы, которые могут быть использованы для представления состояний поляризации: геометрическое представление, представление вектором Джонса, представление параметрами Стокса, представление на сфере Пуанкаре, представление на комплексной плоскости. Однако, представления состояний поляризации с использованием параметров Стокса и сферы Пуанкаре не были достаточно обоснованы и их связь с другими методами представления не была проанализирована детально. В связи с этим следующий подраздел, посвященный математическому анализу связи между единичной сферой и комплексной плоскостью, будет логическим завершением методов представления состояния поляризации.

### ***1.7. Стереографическая проекция и сферическое представление состояний поляризации.***

Первоначальное определение поляризационной сферы (сферы Пуанкаре) было введено в подразделе 1.2 с использованием нормированного вектора Стокса

$$\vec{S} = 1; \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta; \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta; \sin 2\alpha ,$$

элементы которого связаны соотношением  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ , поскольку в данной главе рассматриваются только полностью поляризованные волны.

Анализ параметров Стокса для различных состояний поляризации позволил установить, что южный и северный полюсы сферы соответствуют левой и правой круговым поляризациям, а точки экватора сферы отвечают линейным поляризациям. Однако этот анализ носил скорее эвристический, нежели строгий математический характер. Для корректного обоснования концепции поляризационной сферы может быть использован метод стереографической проекции [18].

Стереографическая проекция использует сферическое изображение комплексных чисел вместо их изображения точками комплексной плоскости. Рассмотрим вопрос о сферическом изображении комплексных чисел. Для этого зададим в трёхмерном пространстве систему координат  $X_1, X_2, X_3$ , оси  $X_1$  и  $X_2$  которой совпадают с действительной и мнимой осями круговой комплексной плоскости ( $\text{Re } \dot{P}^{RL}$  и  $\text{Im } \dot{P}^{RL}$  соответственно) и введем в этом пространстве сферу  $S$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = X_3. \quad (1.67)$$

единичного диаметра, касающуюся круговой комплексной плоскости в точке  $\dot{P}^{RL} = 0$  (левая круговая поляризация). Точку сферы, касающуюся плоскости, примем за южный полюс. Каждой точке  $\dot{P}^{RL}$ , принадлежащей комплексной плоскости, поставим в соответствие точку  $P_S(X_1, X_2, X_3)$  пересечения со сферой луча (прямой линии), соединяющего северный полюс сферы  $N(0,0,1)$  с точкой  $\dot{P}^{RL}$  (см Рис.1.14а).

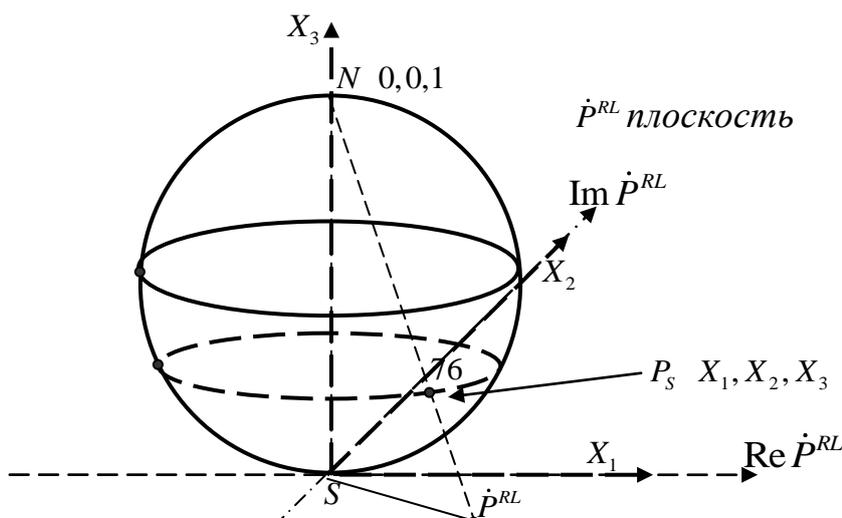


Fig. 1.14a

Соответствие  $\dot{P}^{RL} \rightarrow P_S(X_1, X_2, X_3)$  называется стереографической проекцией. Уравнения стереографической проекции, связывающей точку на комплексной плоскости с координатами её сферического изображения, имеют вид [18]:

$$X_1 = \frac{\operatorname{Re} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}; \quad X_2 = \frac{\operatorname{Im} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}; \quad X_3 = \frac{|\dot{P}^{RL}|^2}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}. \quad (1.68)$$

Здесь  $|\dot{P}^{RL}|^2 = \operatorname{Re}^2 \dot{P}^{RL} + \operatorname{Im}^2 \dot{P}^{RL}$ . Из последнего из уравнений (1.68) следует, что  $1 / (1 + |\dot{P}^{RL}|^2) = 1 - X_3$  и тогда первые два уравнения (1.68) позволяют найти формулы обратного отображения:

$$\operatorname{Re} \dot{P}^{RL} = \frac{X_1}{1 - X_3}; \quad \operatorname{Im} \dot{P}^{RL} = \frac{X_2}{1 - X_3}. \quad (1.69)$$

Выражения (1.68) и (1.69) свидетельствуют, что стереографическая проекция  $\dot{P}^{RL} \rightarrow P_S(X_1, X_2, X_3)$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками комплексной плоскости  $\dot{P}^{RL}$  и сферы  $S$ . При этом южному полюсу сферы соответствует начало координат круговой комплексной плоскости  $\dot{P}^{RL} = 0$  (отвечающее левой круговой поляризации), а северному полюсу сферы соответствует бесконечно удалённая точка  $\dot{P}^{RL} = \infty$ , (отвечающая правой круговой поляризации).

Таким образом, полная комплексная плоскость  $\dot{P}^{RL}$ , включающая точку  $\dot{P}^{RL} = \infty$ , отождествляется со сферой  $S$ , которая называется сферой комплексных чисел или сферой Римана [18]. При этом поверхность сферы имеет смысл

поляризационного пространства, каждая точка которого однозначно соответствует некоторому состоянию поляризации.

Рассмотрим теперь основные свойства этого пространства, которые графически иллюстрируются на Рис.1.14б. Прежде всего, отметим, что южный полюс, касающийся начала координат круговой комплексной плоскости, отвечает левой круговой поляризации, поскольку начало координат проецируется само в себя. Бесконечно удалённая точка плоскости проецируется на северный полюс сферы, который, таким образом, служит изображением правой круговой поляризации.

При диаметре сфере равном единице, единичная окружность на круговой комплексной плоскости, содержащая точки, отвечающие всем линейным поляризациям, проецируется на экватор.

За исключением полюсов экватора все остальные точки сферы являются отображением точек, отвечавших эллиптическим состояниям поляризации на круговой комплексной плоскости.

При этом точки нижней полусферы связаны отображением  $\dot{P} \rightarrow \dot{P}_s$  с точками, заключёнными внутри единичной окружности на комплексной плоскости и, следовательно, соответствуют поляризациям с левым направлением вращения. Соответственно, точки, лежащие вне единичной окружности и отвечающие правому направлению вращения поляризации, отображаются на верхнюю полусферу.

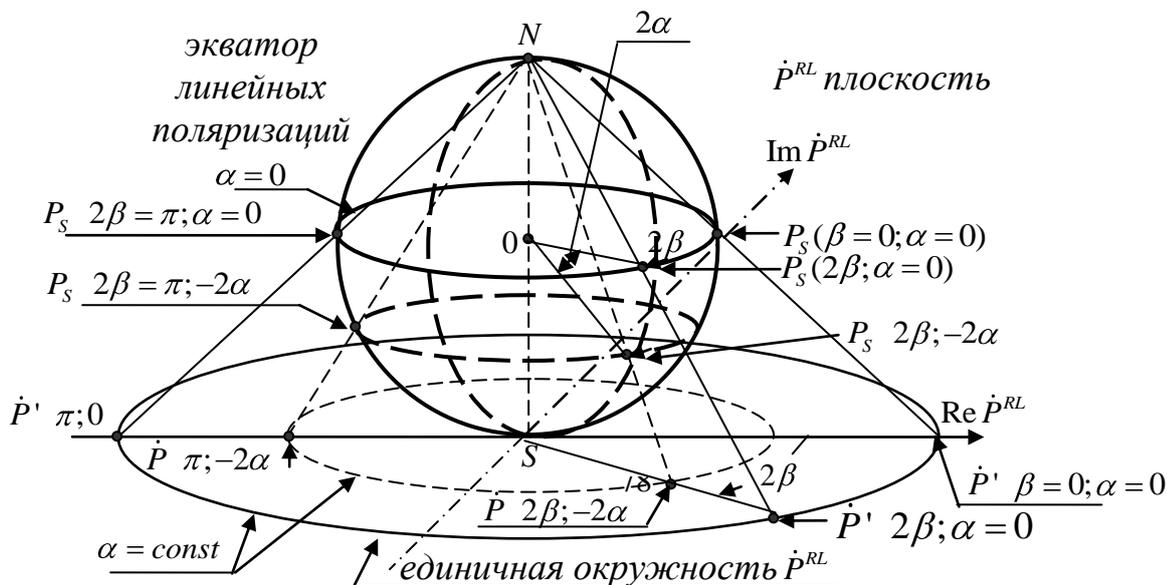


Рис.1.146

Рассмотрим теперь отображение линий постоянного азимута и постоянной эллиптичности круговой комплексной плоскости на поверхность сферы.

Как было указано в разделе 1.6, линией постоянного азимута является луч, исходящий из начала координат и заканчивающийся в бесконечно удалённой точке. Этот луч представляет собой половину бесконечной прямой проведённой через начало координат. Точкам второй половины прямой (второго луча) отвечают ортогональные азимуты.

Поскольку изображающая точка на круговой комплексной плоскости определяется соотношением  $\dot{P}^{RL} = \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 \exp -j2\beta$ , то каждому азимутальному углу  $\beta$  отвечает луч, ориентированный под углом  $2\beta$  на комплексной плоскости. Каждый луч постоянного азимута отображается на линию меридиана (долготы) сферы, заключённую между северным и южным полюсами. При этом, поскольку ориентация луча постоянного азимута определяется удвоенным азимутальным углом, то и угловая долгота соответствующего меридиана сферы равна удвоенному азимуту эллипса поляризации.

Вторая половина бесконечной прямой, проведённой через начало координат (луч ортогональных азимутот) отображается на меридиан, диаметрально противоположный первому. Таким образом, при переходе через полюса сферы азимут эллипса поляризации изменяется скачком на  $\pi/2$ . За начало отсчёта азимутот на сфере будем считать точку, соответствующую поляризации с нулевым азимутот. Азимут положителен, когда он отсчитывается по часовой стрелке  $0 \leq \beta \leq \pi/2$ , и отрицателен при отсчёте

против часовой стрелки  $-\pi/2 \leq \beta \leq 0$ . Направление определяется, глядя на сферу со стороны северного полюса вдоль полярной оси.

Линии постоянной эллиптичности, представляющие собой семейство концентрических окружностей на круговой комплексной плоскости, проецируется на сферу в виде семейства коаксиальных широтных окружностей. Их общей осью является полярная ось. Для определения соотношения между угловой широтой и углом эллиптичности воспользуемся рис.1.15 на котором изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через оба, полюса и произвольную точку  $P$  круговой комплексной плоскости [14].

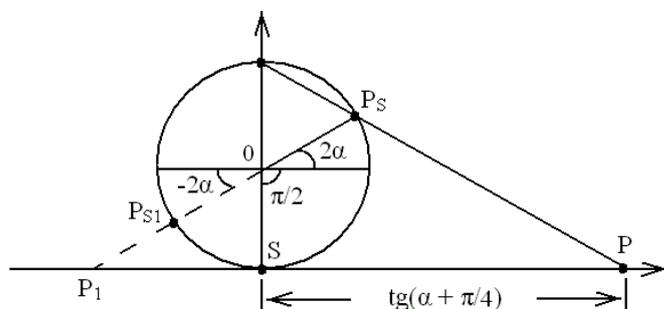


Рис. 1.15

Расстояние от начала координат до точки  $P$  на комплексной плоскости определяется модулем поляризационного отношения в круговом базисе и равно  $|\dot{P}^{RL}| = \operatorname{tg} \alpha + \pi/4$ . В силу равенства диаметра сферы единице, величина угла  $SNP$  равна  $\alpha + \pi/4$ , поскольку  $\operatorname{tg} SNP = |SP|/|SN|$ . Центральный угол  $SOP_S$  и вписанный угол  $SNP_S$  опираются на одну и ту же дугу  $\overset{\frown}{SP_S}$ , откуда угол  $SOP_S = 2\alpha + \pi/2$ . Поскольку широта точки  $P_S$  есть угол между радиус-вектором  $OP_S$ , соединяющим центр сферы с точкой  $P_S$ , и экваториальной плоскостью, то широта изображающей точки  $P_S$  равна  $2\alpha + \pi/2 - \pi/2 = 2\alpha$ , т.е. удвоенному углу эллиптичности. Широта положительна выше экватора ( $0 < \alpha \leq \pi/4$ ; правое направление вращения); равна нулю на экваторе ( $\alpha = 0$ ; линейные поляризации) и отрицательна ниже экватора ( $-\pi/4 \leq \alpha < 0$ ; левое

направление вращения). Точка нулевой эллиптичности в пределы изменения не входит, так как для линейных поляризации направление вращения не определено.

Проведённый анализ объясняет природу удвоения угла эллиптичности и азимута при изображении состояния поляризации на сфере.

Рассмотрим теперь точку  $P_{S1}$  диаметрально противоположную точке  $P_S$  на сфере и отвечающую точке  $\dot{P}_1$  на круговой комплексной плоскости (рис.1.15).

Нетрудно видеть, что угловая широта точка  $P_{S1}$  составляет величину  $-2\alpha$ , что означает левое направление вращения эллипса поляризации, изображаемого точкой  $P_{S1}$ . (Точка  $P_S$  отвечает правому направлению вращения). Этот факт очевиден, поскольку  $P_{S1}$ , находится в нижней полусфере, а  $P_S$  - в верхней. Поскольку луч  $S, +\infty$  является линией постоянного азимута  $\beta$ , то луч  $S, -\infty$  является линией ортогонального азимута  $\beta + \pi/2$ , а точки, отвечающие ему на поляризационной сфере, лежат на полуокружности  $SP_{S1}N$ . Таким образом, точка  $P_{S1}$  изображает эллиптическую поляризацию, азимут которой ортогонален азимуту эллипса, отвечающего точке  $P_S$  при противоположном направлении вращения поляризации.

Отсюда следует, что диаметрально противоположные точки на сфере представляют собой пары ортогональных поляризаций.

Рассмотрим теперь связь осей  $X_1, X_2, X_3$  рассматриваемого координатного пространства со значениями параметров Стокса, отвечающих каждой точке  $\dot{P}^{RL}$  круговой комплексной плоскости. Для этого воспользуемся соотношениями (1.68) и круговым поляризационным соотношением (1.65):

$$\dot{P}^{RL} = \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 \exp -j2\beta = \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 \cos 2\beta - j \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 \sin 2\beta.$$

Тогда, в соответствии с (1.68):

$$X_1 = \frac{\operatorname{Re} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2} = 0.5 \cos 2\alpha \cos 2\beta, \quad (1.70a)$$

$$X_2 = \frac{\text{Im} \dot{P}^{RL}}{1 + |P^{RL}|^2} = -0.5 \cos 2\alpha \sin 2\beta, \quad (1.70б)$$

$$X_3 = \frac{|\dot{P}^{RL}|^2}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2} = \sin^2 \alpha + \pi/4. \quad (1.70в)$$

Сместим сферу вниз на расстояние, равное её радиусу так, чтобы центр сферы совпал с началом системы координат  $X_1, X_2, X_3$ . При этом координаты  $X_1$  и  $X_2$  (см. выражения (1.70а,б)) не изменятся, а третья координата примет вид:

$$X_3' = X_3 - \frac{1}{2} = \sin^2 \alpha + \pi/4 - 0.5 = -0.5 \cos 2\alpha + \pi/2 = 0.5 \sin 2\alpha. \quad (1.70г)$$

Сравнивая выражения (1.70а), (1.70б) и (1.70г) с параметрами Стокса (1.24), нетрудно видеть, что параметры Стокса связаны с величинами  $X_1, X_2, X_3'$  соотношениями:

$$S_1 = 2X_1; \quad S_2 = 2X_2; \quad S_3 = 2X_3'. \quad (1.71)$$

При этом  $2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3'^2 = 1$ , что означает переход от сферы единичного диаметра (сферы Римана), к сфере единичного диаметра, смещённой вниз вдоль оси  $X_3$  на величину  $1$ . Именно эта сфера и является так называемой сферой Пуанкаре [4,13,14,15,16].

При этом прямоугольные координаты каждой точки  $P_S$  на поверхности сферы Пуанкаре определяются величинами (1.71), представляющими собой параметры Стокса  $S_1, S_2, S_3$  волны, изображаемой точкой  $P_S$ . Набор параметров  $S_1, S_2, S_3$ , отнесённых к координатным осям  $X_1, X_2, X_3$  образует ортогональное трёхмерное подпространство Стокса  $\{1, S_1, S_2, S_3\}$ .

Таким образом, использование стереографической проекции и преобразование координат позволяет реализовать переход от представления состояний поляризации точками круговой комплексной плоскости к представлению этих состояний точками, лежащими на поверхности сферы Пуанкаре.

В заключение необходимо указать, что использование круговой комплексной плоскости, как исходного представления для стереографической проекции, не является обязательным.

**1.8. Представление поляризации электромагнитных волн на обобщенной комплексной плоскости. Связь между обобщенной комплексной плоскостью и поляризационной сферой.**

Представление поляризации электромагнитных волн точками декартовой и круговой комплексных плоскостей – это только два элемента из множества возможных представлений поляризации точками комплексной плоскости. Это множество возможных представлений может быть получено путём изменения пар базисных поляризационных состояний. В общем случае мы можем выбрать два любые (в общем случае – эллиптические) ортогональные состояния поляризации, чтобы на их основе синтезировать все другие возможные состояния поляризации. Обобщенные базисные состояния  $\dot{e}_{1E}$  и  $\dot{e}_{2E}$  (см. подраздел 1.4.3 – эллиптически поляризованный базис) представляет собой два эллиптических ортогональных состояния поляризации, углы эллиптичности которых связаны соотношением  $\alpha_2 = -\alpha_1$ , а большие полуоси эллипсов поляризации ортогональны, т.е.  $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$ . Мы будем использовать обозначения  $\dot{e}_U$  и  $\dot{e}_V$  вместо  $\dot{e}_{1E}$ ,  $\dot{e}_{2E}$  для упрощения записи. Тогда комплексные величины  $\dot{E}_U = |\dot{E}_U| \exp j\varphi_U$  и  $\dot{E}_V = |\dot{E}_V| \exp j\varphi_V$  будут представлять собой проекции обобщённого вектора Джонса

$$\dot{E}^{U,V} = \left\| \begin{array}{l} |\dot{E}_U| \exp j\varphi_U \\ |\dot{E}_V| \exp j\varphi_V \end{array} \right\|. \quad (1.72)$$

Как было указано выше, поляризационное отношение

$$\dot{P}^{UV} = \frac{\dot{E}_V}{\dot{E}_U} = \frac{|\dot{E}_V|}{|\dot{E}_U|} \cdot \exp j(\varphi_V - \varphi_U), \quad (1.73)$$

его модуль и аргумент

$$\left| \dot{P}^{UV} \right| = \frac{|\dot{E}_V|}{|\dot{E}_U|}, \quad \arg \dot{P}^{UV} = \varphi_V - \varphi_U \quad (1.74)$$

определяют единственное комплексное число, которое однозначно описывает поляризационный эллипс [14]. Из результатов подраздела 1.4 следует, что соотношение (1.72) является обобщением соответствующих выражений для поляризационного отношения в декартовом базисе  $U, V \rightarrow X, Y$  и в круговом базисе  $U, V \rightarrow R, L$ . Если нулевое значение поляризационного отношения  $\dot{P}^{UV} = 0$  будет сопоставлено началу координат некоторой комплексной плоскости, а значение  $\dot{P}^{UV} = \infty$  будет сопоставлено бесконечно удалённой точке этой плоскости, то этим будет задана обобщённая комплексная плоскость, каждая точка которой отвечает некоторому состоянию поляризации, представленному в ортогональном эллиптическом поляризационном базисе  $(\dot{U}, \dot{V})$ .

Из результатов подраздела 1.4 следует, что различные представления на комплексной плоскости, которые получаются при изменении поляризационного базиса, тесно связаны. Пусть  $\dot{P}^{XY} = \dot{E}_Y / \dot{E}_X$  есть поляризационное отношение в декартовом поляризационном базисе, а матрица перехода

$$\|F\|^1 = \begin{vmatrix} \dot{f}_{11} & \dot{f}_{12} \\ \dot{f}_{21} & \dot{f}_{22} \end{vmatrix}$$

связывает декартов поляризационный базис  $\vec{X}, \vec{Y}$  с обобщённым эллиптическим базисом  $\dot{U}, \dot{V}$ . Тогда вектор Джонса в базисе  $\dot{U}, \dot{V}$  можно записать как

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_U \\ \dot{E}_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{f}_{11} & \dot{f}_{12} \\ \dot{f}_{21} & \dot{f}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{E}_X \\ \dot{E}_Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{f}_{11}\dot{E}_X + \dot{f}_{12}\dot{E}_Y \\ \dot{f}_{21}\dot{E}_X + \dot{f}_{22}\dot{E}_Y \end{vmatrix}, \quad (1.75)$$

а поляризационное отношение  $\dot{P}^{UV}$  примет вид

$$\dot{P}^{UV} = \frac{\dot{E}_V}{\dot{E}_U} = \frac{\dot{f}_{21}\dot{E}_X + \dot{f}_{22}\dot{E}_Y}{\dot{f}_{11}\dot{E}_X + \dot{f}_{12}\dot{E}_Y} = \frac{\dot{f}_{21} + \dot{f}_{22}\dot{P}^{XY}}{\dot{f}_{11} + \dot{f}_{12}\dot{P}^{XY}}. \quad (1.76)$$

Преобразование (1.76) представляет собой билинейное преобразование и относится к классу конформных преобразований [18]. Подробно это преобразование и его свойства будут рассмотрено в главе III. Из выражения (1.76) следует, что оно связывает две комплексные величины  $\dot{P}^{XY}$  и  $\dot{P}^{UV}$ , представленные на двух различных комплексных плоскостях. Одно из главных свойств конформного преобразования (это будет показано в главе III) состоит в том, что окружности на комплексной плоскости одной из переменных (например  $\dot{P}^{XY}$ ) отображаются в окружности на комплексной плоскости второй переменной (в данном случае  $\dot{P}^{UV}$ ). При этом прямая линия рассматривается как окружность бесконечного радиуса. Кроме того, конформное преобразование сохраняет величину и знак угла между пересекающимися кривыми. Таким образом, ортогональные семейства линий постоянного азимута и постоянной эллиптичности сохраняют свои ортогональные свойства при преобразовании от любой из комплексных плоскостей к другой комплексной плоскости  $(X, Y) \rightarrow (R, L)$ ;  $(X, Y) \rightarrow (\dot{U}, \dot{V})$ ;  $(R, L) \rightarrow (\dot{U}, \dot{V})$ ;  $(\dot{U}, \dot{V}) \rightarrow (\dot{U}_1, \dot{V}_1)$  и т.д.

Рассмотрим теперь связь между обобщенной комплексной плоскостью и поляризационной сферой. Прежде всего напомним, что поляризационная сфера (сфера Пуанкаре) была получена преобразованием координат и изменением масштаба из сферы Римана, связанной с круговой комплексной плоскостью  $\dot{P}^{RL}$  (см. подраздел 1.7). Поскольку это есть традиционное представление поляризационной сферы, оно будет для нас неизменным. Но в вопросах, связанных со стереографической проекцией, будет рассматриваться сферу Римана единичного диаметра. Если эта сфера расположена так, как это было указано в подразделе 1.7, т.е. касается своим южным полюсом начала координат плоскости  $\dot{P}^{RL}$  ( $\dot{P}^{RL} = 0$ ), что соответствует левой круговой поляризации), то при этом северный полюс сферы (правая круговая

поляризация) есть центр стереографической проекции, связывающей точки поверхности сферы Римана с точками комплексной плоскости.

Построим теперь декартову комплексную плоскость  $\dot{E}^Y / \dot{E}^X$ , касающуюся сферы Римана в точке, отображающей горизонтальную линейную поляризацию  $\dot{E}_x$ , а диаметрально противоположную точку  $\dot{E}_y$  (вертикальная линейная поляризация), будем рассматривать как центр новой стереографической проекции (Рис.1.16). Тогда каждую точку  $P_s$  на сфере можно спроецировать в точку на новой (декартовой) касательной плоскости. При этом будет получено представление поляризации, отвечающей каждой точке сферы, на декартовой комплексной плоскости  $\dot{P}^{xy}$ . В частности, северный и южный полюсы сферы (правая и левая круговая поляризации соответственно) будут отображены на точки  $\pm j$  мнимой оси плоскости  $\dot{P}^{xy}$ , а точки, отвечающие линейным поляризациям, имеющим азимут  $\pm\pi/4$ , отображаются на точки  $\pm 1$  действительной оси плоскости  $\dot{P}^{xy}$ . Меридианы сферы Римана, отвечающие линиям постоянного азимута, будут отображены на линии постоянного азимута плоскости  $\dot{P}^{xy}$ , а широтные линии сферы, отвечающие линиям постоянной эллиптичности, будут отображены на линии постоянной эллиптичности плоскости  $\dot{P}^{xy}$ .

Рассмотренный процесс стереографического соответствия декартовой комплексной плоскости и сферы Римана единичного диаметра можно продолжить. В этом случае будет реализован переход к стереографическому соответствию сферы Римана и обобщенной комплексной плоскости  $\dot{P}^{uv}$ , базисными состояниями которой является произвольная пара ортогональных эллиптических поляризаций  $\dot{U}, \dot{V}$ .

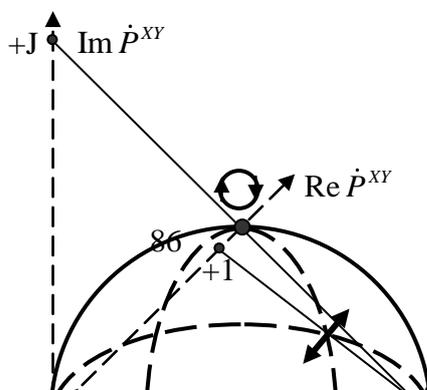


Рис.1.16

Комплексная плоскость  $\dot{P}^{UV}$  в данном случае будет связана стереографической проекцией сферы Римана, (которая находится в принятом ранее положении) на плоскость  $\dot{P}^{UV}$ , которая касается сферы в точке  $U$ , отвечающей первому базисному состоянию  $\dot{U}$ . В данном случае центром стереографической проекции будет диаметрально противоположная к точке  $U$  точка  $V$ , отвечающая ортогональному базисному состоянию  $\dot{V}$ . В соответствии с законами стереографической проекции линии постоянной долготы и широты на сферы Римана будут отображены в два ортогональных семейства окружностей обобщенной комплексной плоскости  $\dot{P}^{UV}$ . К сожалению, геометрическая иллюстрация к данной стереографической проекции является весьма сложной и привести её здесь не представляется возможным.

***1.9. Разложение произвольного состояния поляризации в ортогональном базисе и понятие близости состояний поляризации при представлении на комплексной плоскости.***

Как было показано в подразделе 1.8, обобщенная комплексная плоскость  $\dot{P}^{XY}$  может быть использована для представления поляризации электромагнитных волн при использовании произвольного эллиптического поляризационного базиса. При этом обобщенная комплексная плоскость  $\dot{P}^{UV}$  связана стереографической проекцией с поляризационной сферой, ось которой ( $N-S$ ) вертикально ориентирована в пространстве. Однако геометрическое отображение связи точек поляризационной сферы и обобщенной комплексной плоскости (в частности – соответствие линий постоянного азимута и постоянной эллиптичности) будет весьма сложным. Поэтому, во избежание усложнения картины отображения, в данном подразделе используется подробно рассмотренная стереографическая проекция сферы Римана на круговую комплексную плоскость.

Рассмотрим три точки на круговой комплексной плоскости (Рис.1.17). Из них две точки  $\dot{P}$ ,  $\dot{P}_{ORT}$  изображают ортогональные состояния поляризации единичных ортов некоторого эллиптического поляризационного базиса, а третья точка  $\dot{P}_1$  изображает некоторое произвольное состояние поляризации.

Произвольное состояние поляризации  $\dot{P}_1$ , обладающие единичной интенсивностью  $I$ , может быть разложено в ортогональном эллиптическом базисе  $\dot{P}$ ,  $\dot{P}_{ORT}$  на две составляющие с поляризациями  $\dot{P}$  и  $\dot{P}_{ORT}$ , интенсивности которых представляют собой доли  $I_1$  и  $I_2$  полной интенсивности  $I$ .

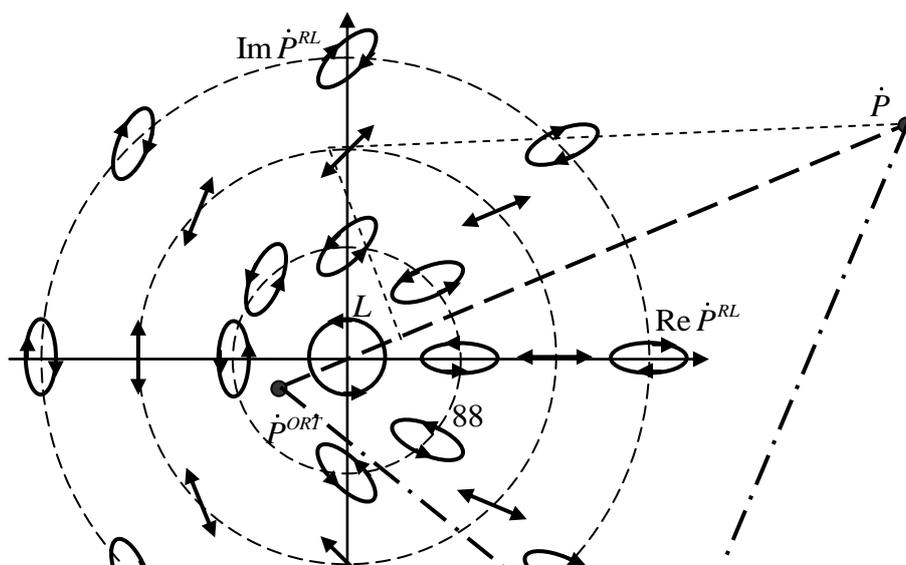


Рис.1.17

Следуя [14], запишем интенсивности  $I_1$  и  $I_2$  в виде

$$I_1 = \frac{q}{q + S^2}; \quad I_2 = \frac{S^2}{q + S^2}; \quad (1.77)$$

где

$$I_1 + I_2 = I = 1, \quad (1.77a)$$

$$q = \left| \dot{P} \right| / \left| \dot{P}_{ORT} \right|, \quad (1.77б)$$

а величина  $S$  определяется отношением расстояний между точками  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}_{ORT}$ :

$$S = \frac{S(\dot{P}_1, \dot{P})}{S(\dot{P}_1, \dot{P}_{ORT})} = \frac{\left| \dot{P}_1 - \dot{P} \right|}{\left| \dot{P}_1 - \dot{P}_{ORT} \right|}. \quad (1.78)$$

Каждое из этих расстояний определяется евклидовой метрикой на множестве чисел комплексной плоскости [18], в которой под расстоянием между точками  $\dot{P}_1 = \text{Re } \dot{P}_1 + i \text{Im } \dot{P}_1$  и  $\dot{P} = \text{Re } \dot{P} + i \text{Im } \dot{P}$  понимается величина

$$S(\dot{P}_1, \dot{P}) = \left| \dot{P}_1 - \dot{P} \right| = \sqrt{(\text{Re } \dot{P}_1 - \text{Re } \dot{P})^2 + (\text{Im } \dot{P}_1 - \text{Im } \dot{P})^2}. \quad (1.79a)$$

Расстояние между точками  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}_{ORT}$  определяется выражением

$$S(\dot{P}_1, \dot{P}_{ORT}) = \sqrt{(\text{Re } \dot{P}_1 - \text{Re } \dot{P}_{ORT})^2 + (\text{Im } \dot{P}_1 - \text{Im } \dot{P}_{ORT})^2}. \quad (1.79б)$$

Используя выражение (1.79 а, б), а также известные соотношения

$$\dot{P}_1^* \dot{P} + \dot{P}_1 \dot{P}^* = 2(\text{Re } \dot{P}_1 \text{ Re } \dot{P} + \text{Im } \dot{P}_1 \text{ Im } \dot{P}), \quad \dot{P}_{ORT} = -1/\dot{P}^* = -\dot{P}/\left| \dot{P} \right|^2,$$

определим расстояния

$$S(\dot{P}_1, \dot{P}) = \left[ |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 - \dot{P}_1^* P + \dot{P}_1 \dot{P}^* \right]^{0,5}, \quad (1.80a)$$

$$S(\dot{P}_1, \dot{P}_{ORT}) = \left[ |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 + \dot{P}_1^* \dot{P} + \dot{P}_1 \dot{P}^* \right]^{0,5} \cdot P^{-1}. \quad (1.80б)$$

Подставляя выражение (1.80a) в первое из соотношений (1.77) и учитывая, что

$$q = \frac{|\dot{P}|}{|\dot{P}_{ORT}|} = |\dot{P}|^2, \quad \text{найдем долю интенсивности, отвечающую орту } \dot{P}$$

ортогонального базиса:

$$I_1 = \frac{|\dot{P}_1|^2 |P|^2 + \dot{P}_1^* \dot{P} + \dot{P}_1 \dot{P}^* + 1}{|\dot{P}_1|^2 |P|^2 + |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 + 1}. \quad (1.81a)$$

Доля интенсивности, отвечающая орту  $\dot{P}_{ORT}$ , ортогональному к орту  $\dot{P}$ , определяется подстановкой выражения (1.80a) во второе из соотношений (1.77):

$$I_2 = \frac{S^2}{q + S^2} = 1 - I_1 = \frac{|P_1|^2 |P|^2 + \dot{P}_1^* P + \dot{P}_1 \dot{P}^* + 1}{|P_1|^2 |P|^2 + |P_1|^2 + |P_2|^2 + 1}. \quad (1.81б)$$

Рассмотрим теперь интерпретацию выражений (1.81a,б), предложенную Р. Аззамом и Н. Башара [14]. Указанные авторы ввели понятие меры «близости» двух состояний поляризации, отвечающих точкам  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}$  комплексной плоскости как долю интенсивности волны, характеризуемую состоянием  $\dot{P}_1$ , приходящуюся на состояние  $\dot{P}$ :

$$N(\dot{P}_1, \dot{P}) = I_1 = \frac{|P_1|^2 |\dot{P}|^2 + \dot{P}_1^* \dot{P} + \dot{P}_1 \dot{P}^* + 1}{|\dot{P}_1|^2 |\dot{P}|^2 + |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 + 1}. \quad (1.82)$$

Величина  $N$  была названа ими «функция близости» [14]. При этом было показано, что функция близости обладает следующими свойствами:

$$N(\dot{P}_1, \dot{P}) = N(\dot{P}, \dot{P}_1); \quad (1.83a)$$

$$N(\dot{P}, \dot{P}) = 1, \quad N(\dot{P}, -\frac{1}{\dot{P}^*}) = 0; \quad (1.83б)$$

$$N(\dot{P}_2, -\frac{1}{\dot{P}^*}) = 1 - N(\dot{P}_1, \dot{P}); \quad (1.83\text{в})$$

$$N(\dot{P}^*, \dot{P}_1^*) = N(\dot{P}, P_1); \quad (1.83\text{г})$$

$$N(\dot{P} \exp j\theta, \dot{P}_1 \exp j\theta) = N(\dot{P}, \dot{P}_1). \quad (1.83\text{д})$$

Все эти свойства могут быть доказаны с использованием выражения (1.82). Физический смысл свойств (1.83) состоит в следующем [14]:

- Близость состояний  $\dot{P}_1, \dot{P}$  и состояний  $\dot{P}, \dot{P}_1$  одинакова;
- Состояние  $\dot{P}$  наиболее близко само к себе ( $N=1$ ) и наиболее удалено от ортогонального состояния ( $N=0$ ). Функция близости лежит в пределах  $0 \leq N \leq 1$  для любых  $\dot{P}$  и  $\dot{P}_1$ .
- Состояние  $\dot{P}_1$  настолько близко к другому состоянию  $\dot{P}$ , насколько оно удалено от состояния, ортогонально состоянию  $\dot{P}$ . Таким образом функцию «удаленности» можно определить, как  $1 - N(\dot{P}, \dot{P}_1)$ .
- Близость состояний  $\dot{P}, \dot{P}_1$  и состояний  $\dot{P}^*, \dot{P}_1^*$  одинакова, если  $\dot{P}^*, \dot{P}_1^*$  получаются из  $\dot{P}, \dot{P}_1$  комплексным сопряжением, т. е. зеркальным отображением относительно мнимой оси комплексной плоскости.
- Близость состояний  $\dot{P}, \dot{P}_1$  и состояний  $\dot{P} \exp j\theta, \dot{P}_1 \exp j\theta$  одинакова, если состояния  $\dot{P} \exp j\theta, \dot{P}_1 \exp j\theta$  получены из  $\dot{P}, \dot{P}_1$  поворотом комплексной плоскости на угол  $\theta$  вокруг начала координат.

Анализ функции близости (удаленности) Аззама и Башары с точки зрения математической меры близости состояний поляризации, представленных точками на комплексной плоскости, проведен в следующем подразделе. При этом будет показано, что понятие близости (удаленности) тесно связано со сферической метрикой поляризационного пространства. В дальнейшем понятие

близости состояний поляризации будет рассмотрено с точки зрения проекционных свойств операторов преобразования поляризации, описывающих реальные микроволновые приборы.

### ***1.10. Сферическая метрика в поляризационном пространстве и близость состояний поляризации.***

Отметим прежде всего, что длина отрезка прямой, соединяющей две точки комплексной плоскости (см. выражения (1.79)) представляет собой евклидову метрику на множестве чисел комплексной плоскости, но эта величина не является истинной мерой близости двух состояний поляризации, представленных этими точками. В связи с этим следует рассмотреть вторую возможную метрику на множестве комплексных чисел. В качестве этой метрики рассмотрим расстояние между сферическими отображениями  $P_{S1}$ ,  $P_{S2}$  точек  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}_2$  в пространстве  $X_1, X_2, X_3$ , т. е. на сфере Римана. На этой сфере длина меньшей дуги большого круга, проходящего через центр сферы и точки  $P_{S1}$  и  $P_{S2}$ , представляет собой правильную меру близости соответствующих состояний поляризации. Учитывая, что анализ стереографической проекции, связывающей обобщенную комплексную плоскость и сферу Римана, является весьма громоздким и затруднительным для интерпретации, мы будем рассматривать стереографическую проекцию, связывающую сферу Римана и круговую комплексную плоскость.

Запишем выражение для сферической метрики [18], определяющей расстояние между сферическими изображениями  $P_{S1}$ ,  $P_{S2}$  точек  $\dot{P}_1^{RL}$  и  $\dot{P}_2^{RL}$  в пространстве  $X_1, X_2, X_3$ :

$$\rho_S(\dot{P}_{S1}, \dot{P}_{S2}) = \frac{|\dot{P}_1^{RL} - \dot{P}_2^{RL}|}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1^{RL}|^2} \sqrt{1 + |\dot{P}_2^{RL}|^2}}. \quad (1.84a)$$

Здесь  $|\dot{P}_1^{RL} - \dot{P}_2^{RL}|$  - евклидова метрика множества чисел на комплексной плоскости. Выражение (1.84а) предполагает, что бесконечно удаленная точка ( $\dot{P}_1^{RL} = \infty$ ) исключена из рассмотрения, что соответствует так называемой открытой комплексной плоскости [18].

Однако понятие сферической метрики может быть распространено и на полную комплексную плоскость, включающую точку  $\dot{P}^{RL} = \infty$ , которая отображается на северный полюс сферы Римана [18].

Определим расстояние между сферическими изображениями  $P_{S1}$  и  $P_{S2}$  точек круговой комплексной плоскости  $\dot{P}_1^{RL} = 0$  (начало координат, левая круговая поляризация) и  $\dot{P}_1^{RL} = \infty$  (бесконечно удаленная точка, правая круговая поляризация). Из изложенного следует, что указанным точкам отвечают южный и северный полюс сферы Римана соответственно.

Для определения расстояния перепишем выражение (1.84а) в виде

$$\rho_S(\dot{P}_{S1}, \dot{P}_{S2}) = \frac{|\dot{P}_1^{RL} - \dot{P}_2^{RL}| \sqrt{\operatorname{Re} \dot{P}_1^{RL} - \operatorname{Re} \dot{P}_2^{RL} + (\operatorname{Im} \dot{P}_1^{RL} - \operatorname{Im} \dot{P}_2^{RL})^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1^{RL}|^2} \sqrt{1 + |\dot{P}_2^{RL}|^2}}. \quad (1.84б)$$

Подставим в выражение (1.84б) величину  $\dot{P}_1^{RL} = \operatorname{Re} \dot{P}_1^{RL} + j \operatorname{Im} \dot{P}_1^{RL} = 0$  и найдем предел этого выражения при  $\dot{P}_2^{RL} \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\dot{P}_2^{RL} \rightarrow \infty} \rho_S(0, \dot{P}_{S2}) = \lim_{\dot{P}_2^{RL} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{|\dot{P}_2^{RL}|^2}{1 + |\dot{P}_2^{RL}|^2}} = \lim_{\dot{P}_2^{RL} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + 1/|\dot{P}_2^{RL}|^2}} = 1. \quad (1.84в)$$

Таким образом, расстояние между сферическими изображениями точек  $\dot{P}^{RL} = 0$  (левая круговая поляризация) и  $\dot{P}^{RL} = \infty$  (правая круговая поляризация) равно единице. Принимая во внимание, что указанные точки соответствуют ортогональным поляризациям, определим расстояние между сферическими изображениями произвольной пары ортогональных состояний поляризации  $P_{S1}$  и  $P_{S2}$ , которые на круговой комплексной плоскости изображаются точками  $\dot{P}^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$  соответственно. Учитывая соотношение

$$\dot{P}_{ORT}^{RL} = -1/\dot{P}^* = -\dot{P}/|\dot{P}|^2$$

связывающее поляризационные отношения ортогональных состояний поляризации, нетрудно показать, что при отображении

$$\begin{aligned} \dot{P}^{RL} \rightarrow \dot{P}_{S1} \rho_S P_{S1}, P_{S2} &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{P}^{RL} - \operatorname{Re} \dot{P}_{ORT}^{RL} \quad \operatorname{Im} \dot{P}^{RL} - \operatorname{Im} \dot{P}_{ORT}^{RL}}}{\sqrt{1 + |\dot{P}^{RL}|^2 \quad 1 + |\dot{P}_{ORT}^{RL}|^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|\dot{P}^{RL}|^2 \quad 1 + 1/|\dot{P}^{RL}|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}^{RL}|^2 \quad 1 + 1/|\dot{P}^{RL}|^2}} = 1. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Здесь учтено, что  $\operatorname{Re} \dot{P}_{ORT}^{RL} = -\operatorname{Re} \dot{P}^{RL} / |\dot{P}^{RL}|^2$ ;  $\operatorname{Im} \dot{P}_{ORT}^{RL} = -\operatorname{Im} \dot{P}^{RL} / |\dot{P}^{RL}|^2$ . Таким образом, расстояние между изображениями любой пары ортогональных поляризаций на сфере Римана равно единице. Учитывая, что при совмещении двух точек расстояние между ними равно нулю, можно утверждать, что для любых точек  $\dot{P}_1^{RL}$  и  $\dot{P}_2^{RL}$ , принадлежащих полной комплексной плоскости, расстояния между их сферическими изображениями  $P_{S1}$  и  $P_{S2}$  удовлетворяет условию:

$$0 \leq \rho_S(\dot{P}_{S1}, \dot{P}_{S2}) \leq 1. \quad (1.86)$$

Определение сферической метрики (т. е. расстояния между сферическими изображениями  $P_{S1}, P_{S2}$  точек комплексной плоскости  $\dot{P}_1^{RL}, \dot{P}_2^{RL}$ ) рассмотрим применительно к анализу понятия близости поляризации при представлении на комплексной плоскости. Для этого найдем расстояния (сферическую метрику) между сферическим изображением  $P_{0S}$  точки  $\dot{P}_0^{RL}$ , отвечающей произвольной поляризации, и сферическими изображениями  $P_{S1}$  и  $P_{S2}$  пары точек  $\dot{P}^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$ , отвечающих произвольному эллиптическому ортогональному поляризационному базису. Расстояние между сферическими изображениями точек  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}^{RL}$  определяется как

$$\begin{aligned}
\rho_S(P_{0S}, P_{S1}) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{P}_0^{RL} - \operatorname{Re} \dot{P}^{RL} \quad ^2 + \operatorname{Im} \dot{P}_0^{RL} - \operatorname{Im} \dot{P}^{RL} \quad ^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0^{RL}|^2} \sqrt{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{|\dot{P}_0|^2 + |\dot{P}|^2 - \dot{P}_0^* \cdot \dot{P} + \dot{P}_0 \cdot \dot{P}^*}}{\sqrt{|\dot{P}_0|^2 \cdot |\dot{P}|^2 + |\dot{P}_0|^2 + |\dot{P}|^2 + 1}}, \tag{1.87a}
\end{aligned}$$

а расстояние между сферическими изображениями точек  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
\rho_S(P_{0S}, P_{SORT}) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{P}_0^{RL} - \operatorname{Re} \dot{P}_{ORT}^{RL} \quad ^2 + (\operatorname{Im} \dot{P}_0^{RL} - \operatorname{Im} \dot{P}_{ORT}^{RL})^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0^{RL}|^2} \sqrt{1 + |\dot{P}_{ORT}^{RL}|^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{P}_0^{RL} + \operatorname{Re} \dot{P}^{RL} / |\dot{P}^{RL}|^2 \quad ^2 + \operatorname{Im} \dot{P}_0^{RL} + \operatorname{Im} \dot{P}^{RL} / |\dot{P}^{RL}|^2 \quad ^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0^{RL}|^2} \sqrt{1 + 1/|\dot{P}|^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{|\dot{P}_0|^2 |\dot{P}|^2 + \dot{P}_0^* \dot{P} + \dot{P}_0 \dot{P}^* + 1}}{\sqrt{|\dot{P}_0|^2 |\dot{P}|^2 + |\dot{P}_0|^2 + |\dot{P}|^2 + 1}}. \tag{1.87b}
\end{aligned}$$

Запишем теперь функцию «близости» двух состояний поляризации, отвечающих точкам  $\dot{P}_0$  и  $\dot{P}$  круговой комплексной плоскости [14]

$$N(\dot{P}_0^{RL}, \dot{P}^{RL}) = \frac{|\dot{P}_0^{RL}|^2 |\dot{P}^{RL}|^2 + \dot{P}_0^{RL*} \dot{P}^{RL} + \dot{P}_0^{RL} \dot{P}^{RL*} + 1}{|\dot{P}_0^{RL}|^2 |\dot{P}^{RL}|^2 + |\dot{P}_0^{RL}|^2 + |\dot{P}^{RL}|^2 + 1} \tag{1.88a}$$

и функцию удаленности этих же состояний поляризации

$$\begin{aligned}
N(\dot{P}_0^{RL}, -1/\dot{P}^{RL*}) &= 1 - N(\dot{P}_0^{RL}, \dot{P}^{RL}) = \\
&= \frac{|\dot{P}_0^{RL}|^2 + |\dot{P}^{RL}|^2 - (\dot{P}_0^{RL*} \dot{P}^{RL} + \dot{P}_0^{RL} \dot{P}^{RL*})}{|\dot{P}_0^{RL}|^2 |\dot{P}^{RL}|^2 + |\dot{P}_0^{RL}|^2 + |\dot{P}^{RL}|^2 + 1}. \tag{1.88б}
\end{aligned}$$

Сравним выражения (1.87a,б) для сферической метрики в поляризационном пространстве, представляющем собой поверхность сферы Римана с выражениями (1.88a,б). Нетрудно видеть, что функция «удаленности» состояний поляризации (1.88б) есть не что иное, как квадрат расстояния между

сферическими изображениями  $P_{0S}$  и  $P_{S1}$  точек комплексной плоскости  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}^{RL}$ . Естественно, что квадрат расстояния между сферическими изображениями двух точек есть мера их «удаленности» друг от друга. При этом из (1.88б) следует, что при «удаленности», равной нулю, «близость» состояний поляризации равна единице, что соответствует совмещению точек  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}^{RL}$  на комплексной плоскости. «Удаленность», равная единице отвечает ортогональности точек  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}^{RL}$ .

Из сопоставления выражений (1.87б) и (1.88а) следует, что функция «близости» двух состояний поляризации (1.88а) есть не что иное, как квадрат расстояния между сферическими изображениями  $P_{0S}$  и  $\dot{P}_{S2}$  точек комплексной плоскости  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$ . При этом «близость» состояний поляризации будет равна нулю в случае  $\dot{P}_{ORT}^{RL} = -1/\dot{P}_0^{RL*}$  и «близость» будет равна единице в случае совпадения точек  $\dot{P}_0^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$ , что будет означать равенство нулю расстояния между сферическими изображениями этих точек.

Здесь необходимо отметить, что, поскольку выбор ортогональных базисных состояний  $(\dot{P}_0^{RL}, \dot{P}_{ORT}^{RL})$  при представлении в комплексной плоскости произволен, то близость двух состояний поляризации не зависит от выбора поляризационного базиса, т. е. величина близости состояний поляризации является инвариантной к поляризационному базису. Это обусловлено тем фактом, что расстояние между сферическими изображениями двух точек инвариантно к поляризационному базису.

Выражение (1.88а) для близости состояний поляризации  $N \dot{P}_0^{RL}, \dot{P}^{RL}$  показывает, что когда состояние  $\dot{P}^{RL}$  фиксировано, а состояние  $\dot{P}_0^{RL}$  изменяется так, что расстояние между сферическими изображениями  $P_S, P_{0S}$  этих точек остается постоянным, то точка  $\dot{P}_0^{RL}$  перемещается по окружности с центром в точке  $\dot{P}^{RL}$ . Таким образом, для различных значений функции близости  $N \dot{P}_0^{RL}, \dot{P}^{RL}$  имеет место семейство коаксиальных окружностей. На

единичной сфере Римана это семейство превращается в коаксиальное семейство окружностей, в котором полярная ось есть диаметр единичной сферы, соединяющей ортогональные точки  $P_{1S}$ ,  $P_{2S}$ . Этот результат может быть использован для разложения произвольного состояния поляризации на два ортогональных состояния на сфере Римана.

Предположим теперь, что точки  $\dot{P}^{RL}$  и  $\dot{P}_{ORT}^{RL}$  совпадают с началом координат комплексной плоскости и с ее бесконечно удаленной точкой. В соответствии с проведенным анализом, близость произвольного состояния поляризации  $\dot{P}_0^{RL}$ , заданного в комплексной плоскости, к состоянию  $\dot{P}^{RL}$ , которое совпадает с началом координат, определяется выражением (1.88а) и, соответственно выражением (1.87б):

$$N \dot{P}_0^{RL}, 0 = \frac{1}{1 + |\dot{P}_0^{RL}|^2}. \quad (1.89)$$

Из (1.89) следует, что состояния, равноудаленные от состояния  $\dot{P}^{RL}$ , лежат на окружности с центром в начале координат. Здесь необходимо помнить, что, по определению Аззама и Башары [14]  $N \dot{P}_0^{RL}, 0$  есть доля интенсивности состояния  $\dot{P}_0^{RL}$ , приходящаяся на состояние  $\dot{P}^{RL} = 0$ .

Рассмотрим теперь обобщенную комплексную плоскость  $\dot{P}^{UV}$  и стереографическую проекцию, связывающую эту плоскость с единичной сферой. Пусть сфера единичного диаметра касается своим южным полюсом начала координат обобщенной комплексной плоскости – точки  $\dot{P}^{UV} = 0$ . Используя северный полюс как центр стереографической проекции, можно каждую точку  $\dot{P}_0^{UV}$  обобщенной комплексной плоскости соединить с северным полюсом прямой, которая пересекает сферу в единственной (одной и только одной) точке  $P_{0S}$ . Здесь необходимо напомнить еще раз, что точка  $P_{0S}$  есть действительная точка на сфере в трехмерном пространстве и эта точка не является комплексным числом. Из изложенного выше следует, что начало координат обобщенной комплексной плоскости  $\dot{P}^{UV}$  отображается на южный

полюс сферы ( $\dot{P}^{UV} = 0 = \dot{P}_1^{UV}$ )  $\rightarrow P_{S1}$  что следует из Рис.1.18. Бесконечно удаленная точка  $\dot{P}_{ORT}^{UV}$  обобщенной комплексной плоскости будет отображена при этом в северный полюс единичной сферы – точку  $P_{2S}$ , которая является центром стереографической проекции. (Здесь необходимо напомнить, что рассматривается обобщенная комплексная плоскость и поэтому северный и южный полюсы единичной сферы не являются круговыми поляризациями.) Нетрудно видеть, что Рис.1.18 изображает некоторый большой круг  $G$ , представляющий собой пересечение плоскости, в которой лежат точки  $\dot{P}^{UV} = 0$ ,  $P_{1S}$  и  $P_{2S}$ , с единичной сферой. Из элементарной тригонометрии следует, что величина вписанного угла определяется половиной центрального угла, опирающегося на дугу, стягиваемую вписанным углом.

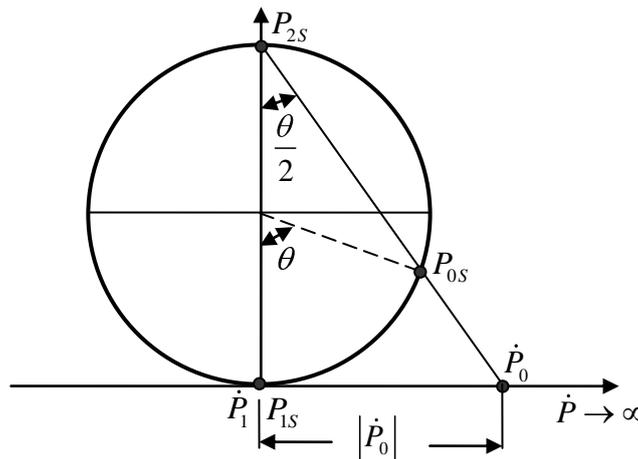


Рис.1.18

Тогда, если величина центрального угла, опирающегося на дугу ( $P_{1S}$ ,  $P_{0S}$ ) большого круга  $G$ , представляет собой величину  $\theta$ , то из Рис.1.18 следует (с учетом того, что диаметр сферы равен единице)

$$|\dot{P}_0^{UV}| = \operatorname{tg} \theta/2 . \quad (1.90)$$

Подстановка величины  $|\dot{P}_0^{UV}|$  из соотношения (1.90) в (1.89) приводит к соотношению

$$N(\dot{P}_0^{UV}, 0) = N(P_{s0}, P_{1s}) = \cos^2 \theta/2 . \quad (1.91)$$

Таким образом, доля интенсивности состояния поляризации, представленного точкой  $P_{0s}$  на единичной сфере, приходящаяся на орт  $P_{1s}$  (также лежащий на сфере) определяется квадратом косинуса половины центрального угла, стягиваемого меньшей из двух дуг большого круга, проходящего через точки  $P_{0s}$  и  $P_{1s}$ .

Доля интенсивности состояния  $P_{0s}$ , приходящаяся на ортогональное состояние  $P_{2s}$ , определяется величиной

$$N(\dot{P}_{0s}, \dot{P}_{1s}) = N\left(\dot{P}_{0s}, -\frac{1}{\dot{P}_1^*}\right) = 1 - N(P_{0s}, P_{1s}) = \sin^2 \theta/2 , \quad (1.92)$$

соответствующей сферическому расстоянию между точками  $P_{0s}$  и  $P_{2s}$ . Это можно также определить, используя известное соотношение  $\cos^2 \theta/2 + \sin^2 \theta/2 = 1$ .

Сравнивая выражения (1.91) и (1.92) со сферическими расстояниями  $\rho_s(P_{0s}, P_{1s})$  и  $\rho_s(P_{0s}, P_{2s})$  (см. выражение (1.87a,b)), нетрудно видеть, что функция «удаленности» (1.92) есть не что иное, как квадрат сферического расстояния в поляризационном пространстве между точками  $P_{0s}, P_{2s}$ , а функция близости есть квадрат сферического расстояния между точками  $P_{0s}, P_{1s}$ .

Продолжая анализ понятия близости состояний поляризации в поляризационном пространстве необходимо отметить, что выполнение условия  $N=1$  при совпадении поляризаций и  $N=0$  при ортогональности поляризаций, позволяет сделать вывод о том, что близость поляризаций определяется скалярным произведением некоторых векторов с нормой 1.

Поскольку каждому состоянию поляризации может быть сопоставлен нормированный вектор Стокса в 4-х мерном Стоксовом пространстве то скалярное произведение этих 4-х мерных векторов также может служить мерой

близости состояний поляризации. Запишем 4-векторы Стокса двух состояний поляризации:

$$\vec{S}^1 = 1; S_1^1; S_2^1; S_3^1, \quad (1.93a)$$

$$\vec{S}^2 = 1; S_1^2; S_2^2; S_3^2. \quad (1.93b)$$

С учетом соотношений (1.70 а, с) и (1.71), векторы (1.93) могут быть представлены в инвариантной относительно поляризационного базиса форме

$$\vec{S}^1 = \left\{ 1; \frac{2 \operatorname{Re} \dot{P}_1}{1 + |\dot{P}_1|^2}; \frac{2 \operatorname{Im} \dot{P}_1}{1 + |\dot{P}_1|^2}; \frac{|\dot{P}_1|^2 - 1}{|\dot{P}_1|^2 + 1} \right\}, \quad (1.94a)$$

$$\vec{S}^2 = \left\{ 1; \frac{2 \operatorname{Re} \dot{P}_2}{1 + |\dot{P}_2|^2}; \frac{2 \operatorname{Im} \dot{P}_2}{1 + |\dot{P}_2|^2}; \frac{|\dot{P}_2|^2 - 1}{|\dot{P}_2|^2 + 1} \right\}. \quad (1.94b)$$

Определяя скалярное произведение векторов (1.93)

$$\vec{S}^1 \cdot \vec{S}^2 = 1 + S_1^1 S_1^2 + S_2^1 S_2^2 + S_3^1 S_3^2,$$

получим, используя соотношения (1.94):

$$\begin{aligned} \vec{S}^1 \cdot \vec{S}^2 = & 1 + \frac{4 \operatorname{Re} \dot{P}_1 \operatorname{Re} \dot{P}_2}{1 + |\dot{P}_1|^2} \frac{1}{1 + |\dot{P}_2|^2} + \frac{4 \operatorname{Im} \dot{P}_1 \operatorname{Im} \dot{P}_2}{1 + |\dot{P}_1|^2} \frac{1}{1 + |\dot{P}_2|^2} + \\ & + \frac{|\dot{P}_1|^2 - 1}{1 + |\dot{P}_1|^2} \frac{|\dot{P}_2|^2 - 1}{1 + |\dot{P}_2|^2} = 2 \frac{|\dot{P}_1|^2 |\dot{P}_2|^2 + \dot{P}_1^* \dot{P}_2 + \dot{P}_1 \dot{P}_2^* + 1}{|\dot{P}_1|^2 |\dot{P}_2|^2 + |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 + 1} = 2N(\dot{P}_1, \dot{P}_2) \end{aligned} \quad (1.95)$$

Таким образом, из выражения (1.95) следует, что близость состояний поляризации определяется скалярным произведением 4-векторов Стокса, отвечающих этим состояниям.

### **1.11. Групповые свойства поляризационного отношения.**

В данном подразделе будут рассмотрены групповые свойства поляризационного отношения. Для этого рассмотрения будут использованы аксиомы Д.Родса [19], которые были заложены им в основу моноимпульсной

радиолокации. Аксиомы Родса позволили установить строгое определение моноимпульсного метода радиолокации, как последовательности некоторых преобразований отношения радиосигналов, принятых двумя антеннами и обработанных в двух каналах приема.

В классической схеме моноимпульсного радиолокатора [19] эти сигналы представляют собой процессы на выходах двух антенн, диаграммы направленности которых имеют либо угловой, либо пространственный разнос.

Однако, для моноимпульсной радиолокации как модуль, так и аргумент упомянутого отношения радиосигналов представляют собой функции некоторой угловой переменной (азимут или угол места). В отличие от этого, поляризационное отношение всегда есть функция двух переменных – угла эллиптичности поляризационного эллипса и его угла ориентации (азимута). Таким образом, обобщение аксиом Родса применительно к свойствам поляризационного отношения дает возможность найти ясную физическую интерпретацию поляризационных радиолокаторов, как систем, использующих отношение радиолокационных сигналов, принятых при использовании поляризационного разноса. Теперь необходимо сформулировать основные аксиомы, характеризующие поляризационное отношение:

- **Первая аксиома.** Информация о поляризационных свойствах электромагнитного поля извлекается в виде отношения двух сигналов, представленных в некотором поляризационном базисе.

Как это уже было продемонстрировано выше, поляризационное отношение, характеризующее плоскую электромагнитную волну, определяется углом эллиптичности поляризационного эллипса этой волны и его азимутальным углом в любом поляризационном базисе.

- **Вторая аксиома.** Одновременный переход от положительного значения угла эллиптичности поляризационного эллипса и положительного значения его азимута к отрицательным значениям угла эллиптичности и азимута приводит к замене поляризационного отношения на обратное отношение.

Здесь термин «обратное отношение» используется в смысле теории групп: предполагается, что произведение некоторого элемента группы и его обратного элемента дает единичный элемент.

Поскольку радиолокаторы, измеряющие поляризационное отношение двух сигналов, принятых в некотором ортогональном поляризационном базисе, представляют собой некоторый подкласс радиолокационных систем, использующих отношение сигналов, то можно ограничиться только аддитивными и мультипликативными операциями теоретико-числовыми операциями, поскольку в данном случае используются обычные арифметические групповые операции умножения и сложения. В этом случае в качестве элементов группы можно рассматривать только мультипликативные и аддитивные отношения.

В моноимпульсной радиолокации [19] мультипликативное  $r_m U$  и аддитивное  $r_a U$  отношения сигналов удовлетворяют следующим условиям:

$$r_m U = 1/r_m -U ; r_a U = -r_a -U ; . \quad (1.96)$$

Если некоторый элемент  $a_1$  группы  $A$  является мультипликативно обратным элементу  $a_2$  этой же группы, то он представляет собой обратную величину:  $a_1 = 1/a_2$ . Единичный элемент группы  $A$  в этом случае равен единице.

Если некоторый элемент  $b_1$  группы  $B$  является аддитивно обратным элементу  $b_2$  этой же группы, то, в этом случае, он является его отрицательной величиной  $b_1 = -b_2$ . Единичным элементом в этом случае является нуль. Физический смысл единичного элемента в моноимпульсной радиолокации заключается в том, что он равен отношению принятых сигналов для случая, когда цель находится на равносигнальном направлении.

Рассмотрим теперь как круговое, так и декартово поляризационные отношения с точки зрения их групповых свойств. Запишем, прежде всего, круговое поляризационное отношение:

$$\dot{P}^{RL} \alpha, \beta = \tan \alpha + \pi/4 \exp -j2\beta .$$

При одновременном переходе  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\beta \rightarrow \overleftarrow{\beta}$  вторая аксиома будет иметь в данном случае вид

$$\dot{P}^{RL} = \frac{1}{\dot{P}^{RL} - \alpha, -\beta}, \quad (1.97)$$

поскольку

$$\tan -\alpha + \pi/4 = \frac{1}{\tan \alpha + \pi/4}; \exp -j -2\beta = \frac{1}{\exp -j2\beta}.$$

Таким образом, круговое поляризационное отношение относится к классу мультипликативных отношений. Уравнение (1.97) может быть записано в виде

$\dot{W} = f \dot{Z} = \frac{1}{\dot{Z}}$ . Оно определено на полной комплексной плоскости  $f 0 = \infty$ ,

$f \infty = 0$ . Таким образом, функция  $f \dot{Z}$  является однозначной и однолистной функцией, отображающей полную комплексную плоскость  $\dot{Z}$  на полную комплексную плоскость  $\dot{W}$ . Следует также указать, что функция  $f \dot{Z}$  является непрерывной функцией на всей комплексной плоскости, исключая точку  $Z = 0$ .

Для геометрической интерпретации второй аксиомы можно использовать соотношение  $\arg \dot{W} = -\arg \dot{P}^{RL}$ ,  $|\dot{W}| = |\dot{P}^{RL}|^{-1}$ . Это соотношение позволяет рассмотреть преобразование, реализуемое этой функцией, как сумму двух преобразований:

$\dot{\xi} = \xi \dot{P}^{RL}$ , где  $|\dot{\xi}| = |\dot{P}^{RL}|$ ,  $\arg \dot{\xi} = -\arg \dot{P}^{RL}$  и  $\dot{W} = W \dot{\xi}$ , где  $|\dot{W}| = |\dot{\xi}|^{-1}$ ,  $\arg \dot{W} = \arg \dot{\xi}$ .

Первое преобразование есть зеркальное отображение относительно действительной оси, а второе преобразование есть инверсия относительно единичной окружности (fig. 1.19а,б).

Для декартова поляризационного отношения

$$\dot{P}^{XY} = \frac{\cos \alpha \sin \beta + j \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - j \sin \alpha \sin \beta}$$

при одновременном переходе  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\beta \rightarrow -\beta$  вторая аксиома имеет вид

$$\dot{P}^{XY} \alpha, \beta = -\dot{P}^{XY} -\alpha, -\beta, \quad (1.98)$$

поскольку  $\dot{P}^{XY} -\alpha, -\beta = -\frac{\cos \alpha \sin \beta + j \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - j \sin \alpha \sin \beta} = -\dot{P}^{XY} \alpha, \beta$ .

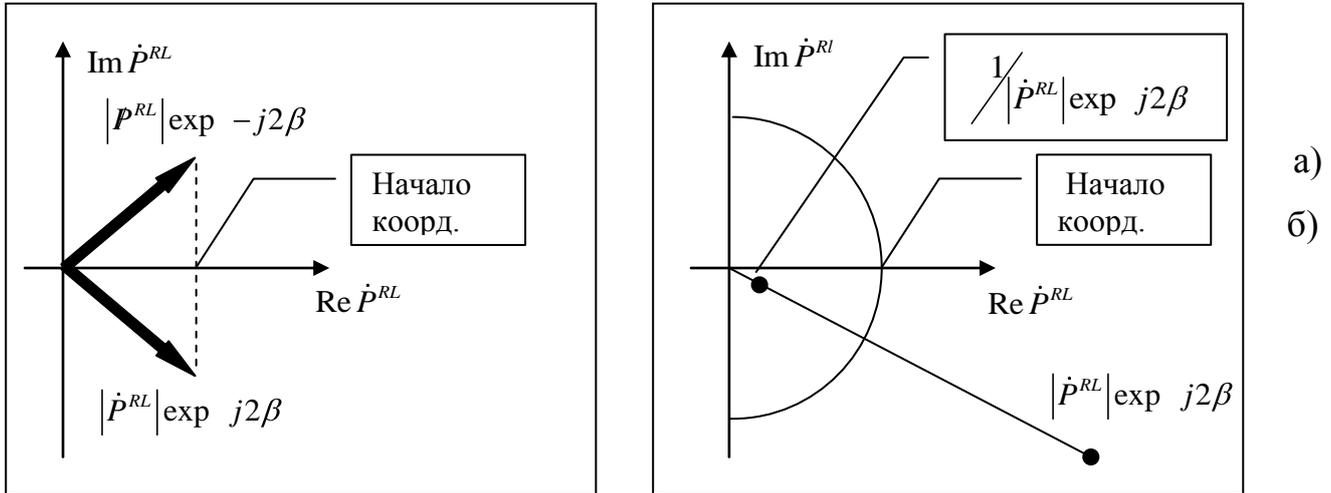


Рис. 1.19.

Таким образом, декартово поляризационное отношение обладает аддитивным свойством. Рис.1.20 демонстрирует преобразование аддитивного поляризационного отношения в его обратную величину на декартовой комплексной плоскости.

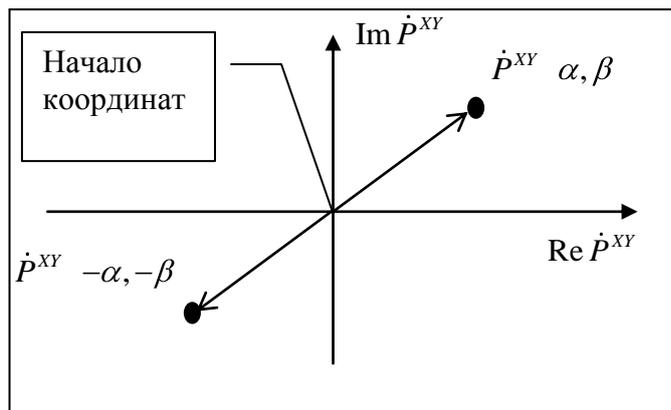


Рис.1.20

## **ГЛАВА 2**

### **ЧАСТИЧНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Во второй главе изложены методы описания и анализа поляризационных свойств плоских частично-поляризованных волн с использованием аппарата матриц когерентности. Здесь представлены как классические результаты Н. Винера, Е Вольфа, Г. Паррента, Ч. Фано, Р. Маратэя [20 - 32], так и оригинальные результаты В. А. Потехина, В. Н. Татарина, А. И. Козлова и др. [7,8,9].

Необходимо отметить, что первым, кто предложил использовать матричный аппарат в вопросах теории частичной поляризации, был Норберт Винер. В своих работах [21,22,23], опубликованных в период 1928-1930 годов, Н. Винер показал, что изучение состояния поляризации света сводится к изучению его матрицы когерентности. При этом Винер дал строгую интерпретацию белого света как стохастического явления и указал на связь матрицы когерентности с матрицей плотности в квантовой механике. Он также показал, что  $(2 \times 2)$  матрица когерентности может быть представлена разложением по полной системе линейно-независимых матриц, образованной путем дополнения системы матриц Паули единичной матрицей. Винер дал подробное описание действий при экспериментальном определении раскрывающих коэффициентов этих матриц. Однако работы Н. Винера

остались мало известными для специалистов в области оптики и ряд результатов, полученных Винером, был найден заново в 60-е годы XX века. Так, независимо от Винера, Е. Вольф [23-26] предложил использовать матрицу когерентности для описания частично-поляризованных волн. При этом Вольфом было найдено представление матрицы когерентности в виде суммы двух матриц, одна из которых соответствует абсолютно неполяризованной части анализируемой волны, а другая – его полностью поляризованной части. Это позволило определить степень поляризации волны через инварианты ее матрицы когерентности. Но, в отличие от Н. Винера, использовавшего спектральную форму матрицы когерентности, пригодную для описания полей со спектрами произвольной ширины, Е. Вольф проводил исследования в предположении о квазимонохроматичности волны.

В это же время публикуется статья У. Фано [32], в которой он повторяет уже сформированные Винером выводы о возможности разложения матрицы когерентности по полной системе (2x2) линейно независимых матриц, а также о соответствии матрицы когерентности матрице плотности в квантовой механике.

К настоящему времени теория матриц когерентности разработана достаточно подробно и ее основные результаты излагаются ниже.

### ***2.1. Комплексный аналитический сигнал.***

Если векторная амплитуда  $\vec{E}(t)$  плоской волны, представляющей собой решение векторного волнового уравнения

$$\nabla^2 \vec{E}(t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t) = 0, \quad (2.1)$$

в фиксированной точке пространства развивается как случайный процесс, то угол эллиптичности, угол ориентации и амплитуда эллипса поляризации этой волны будут изменяться во времени случайным образом. В соответствии с классификацией, приведенной в Главе I, такая волна относится к классу частично-поляризованных волн. Кроме того, необходимо принимать во

внимание факт поперечности плоской волны ( $\text{div} \vec{E} = 0$ ). В общем случае плоская волна, отвечающая уравнению (2.1), в декартовой системе координат  $XYZ$  может быть представлена случайной действительной векторной функцией

$$\vec{E}^{(R)}(t) = \begin{pmatrix} E_X^{(R)}(t) \\ E_Y^{(R)}(t) \\ E_Z^{(R)}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

проекции которой определяются выражениями

$$E_j^{(R)}(t) = a_j(t) \cos[\omega_0 t - \varphi_j(t)], \quad (j = x, y, z). \quad (2.3)$$

Здесь  $(R)$  означает вещественную часть,  $a_j$  - амплитуды проекций,  $\varphi_j$  - начальные фазы проекций, величина  $\xi_j(t) = [\omega_0 t - \varphi_j(t)]$  есть полная фаза, а  $\omega_0$  - несущая частота.

В случае анализа единичной изолированной плоской волны, направление распространения которой определяется волновым вектором  $\vec{k}$ , всегда существует возможность единственного поворота системы координат, используемой для анализа, в результате которого волновой вектор  $\vec{k}$  совмещается с одной из координатных осей (обычно с осью  $OZ$ ). При этом плоская волна полностью описывается двумерным случайным вектором

$$\vec{E}^{(R)}(t) = \begin{pmatrix} E_X^{(R)}(t) \\ E_Y^{(R)}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Однако в случае анализа углового спектра плоских волн, волновые векторы которых обладают произвольной ориентацией в некоторой системе координат, то одновременное выполнение упомянутого поворота системы координат для каждой из волн спектра невозможно. В данном случае необходимо использовать трехмерную векторную функцию

$$\vec{E}^{(R)}(\vec{k}, t) = \begin{pmatrix} E_X^{(R)}(\vec{k}, t) \\ E_Y^{(R)}(\vec{k}, t) \\ E_Z^{(R)}(\vec{k}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Случай анализа поляризационных свойств частично-поляризованных волн, характеризуемых вектором (2.5), будет рассмотрен позже, а в настоящей момент предполагается, что волновой вектор плоской частично-поляризованной волны ориентирован по оси  $OZ$ , а волна полностью описывается двумерным случайным вектором (2.4).

Считая, что действительные функции  $E_x^{(R)}(t)$  и  $E_y^{(R)}(t)$  интегрируемы в квадрате (т. е. обладают конечной мощностью)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_j^{(R)}(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.6)$$

перейдем к представлению проекций вектора поля электрической напряженности в форме комплексного аналитического сигнала [8,13]. Поскольку действительная функция  $E_j^{(R)}(t)$  удовлетворяет условию (2.6), то с использованием интегрального преобразования Гильберта [13,33] может быть найдена функция  $E_j^{(I)}(t)$ , которая называется сопряженной к  $E_j^{(R)}(t)$ :

$$E_j^{(I)}(t) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_j^{(R)}(t')}{t-t'} dt', \quad (2.7)$$

причем

$$E_j^{(R)}(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_j^{(I)}(t')}{t-t'} dt'. \quad (2.7a)$$

Здесь  $P$  означает главное значение интегралов (2.7) в смысле Коши в точке разрыва  $t-t'$ :

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{f(t')}{t-t'} dt' + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \right\}.$$

Образую на действительной оси  $t$  комплексную функцию

$$\dot{E}_j(t) = E_j^{(R)}(t) - iE_j^{(I)}(t). \quad (2.8)$$

Е. Титчмарш [33, теорема 95] доказал, что для того, чтобы комплексная функция  $\dot{E}_j(t)$  была пределом аналитической функции  $Z(t+ju)$  при  $u \rightarrow 0$ , необходимо и достаточно выполнения любого из двух следующих условий:

1. функции  $E_j^{(R)}(t)$  и  $E_j^{(I)}(t)$ , образующие функцию  $\dot{E}_j(t)$ , должны быть сопряженными;
2. преобразование Фурье  $S_j \omega$  над  $\dot{E}_j(t)$  тождественно равно нулю при  $\omega < 0$ , т. е. в области отрицательных частот.

(Здесь необходимо отметить, что выполнение одного из этих условий влечет за собой выполнение другого).

Учитывая изложенное, комплексную функцию  $\dot{E}_j(t)$  действительного переменного  $t$ , удовлетворяющую одному из указанных условий, будем называть комплексным аналитическим сигналом, соответствующим каждой из действительных проекций  $E_j^{(R)}(t)$  ( $j=x, y, z$ ) решения векторного волнового уравнения (2.1).

При этом величины  $a_j t$  и  $\varphi_j t$  (см. уравнение (2.3)) определяют модуль и аргумент аналитического сигнала  $\dot{E}_j(t) = a_j t \exp i\varphi_j t$ , причем огибающая и фаза любой из проекций решения уравнения (2.1) определяются, как

$$a_j t = \sqrt{[E_j^{(R)} t]^2 + [E_j^{(I)} t]^2}, \quad (2.9a)$$

$$\varphi_j t = \arctg \frac{E_j^{(I)} t}{E_j^{(R)} t}. \quad (2.10a)$$

Рассматривая спектральные свойства аналитического сигнала  $\dot{E}_j(t)$ , можно показать, что данный сигнал можно получить непосредственно, минуя вычисление сопряженной функции  $E_j^{(I)}(t)$ , если известна действительная функция  $E_j^{(R)}$  и её спектральная плотность  $\dot{G}_j^{(R)} \omega$ .

Пусть  $\dot{G}_j^{(I)} \omega$  есть спектральная плотность сопряженной функции  $E_j^{(I)}(t)$ :

$$\dot{G}_j^{(I)} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} E_j^{(I)} t \exp -j\omega t dt. \quad (2.11)$$

Преобразуем соотношение (2.11), используя представление сопряженной функции  $E_j^{(I)}(t)$  в виде преобразования Гильберта (2.7):

$$\dot{G}_j^I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_j^R(t')}{t-t'} dt' dt. \quad (2.12)$$

Переменные интегрирования в выражении (2.12) разделяются с использованием замены  $t-t'=u$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{G}_j^I(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_j^R(t') \exp(-j\omega t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-j\omega u)}{u} du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \dot{G}_j^R(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega u - j \sin \omega u}{u} du. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega u}{u} du = 0$ , преобразуем соотношение (2.13) к виду

$$\dot{G}_j^I(\omega) = j \dot{G}_j^R(\omega) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = j \dot{G}_j^R(\omega) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du. \quad (2.14)$$

Интеграл в выражении (2.14) представляет собой формулу обращения для функции знака  $\text{sign} \omega$ :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = \text{sign} \omega = \begin{cases} -1 & \text{для } \omega < 0 \\ 0 & \text{для } \omega = 0 \\ +1 & \text{для } \omega > 0 \end{cases}.$$

Таким образом, из (2.14) следует, что

$$\dot{G}_j^I(\omega) = j \dot{G}_j^R(\omega) \text{sign}(\omega). \quad (2.15)$$

В соответствии с теоремой линейности для преобразования Фурье, спектр комплексного аналитического сигнала  $\dot{E}_j(t)$ , определяемого выражением (2.8) запишем как

$$\dot{G}_j(\omega) = \dot{G}_j^R(\omega) - j \dot{G}_j^I(\omega). \quad (2.16)$$

Тогда, используя выражения (2.16) и (2.15) выпишем отдельно спектральную плотность аналитического сигнала для области положительных частот и для области отрицательных частот:

$$\dot{G}_j \omega \Big|_{\omega < 0} = \dot{G}_j^R \omega - j \left[ -j \dot{G}_j^R \omega \right] = 0, \quad (2.17a)$$

$$\dot{G}_j \omega \Big|_{\omega > 0} = \dot{G}_j^R \omega - j \left[ j \dot{G}_j^R \omega \right] = 2 \dot{G}_j^R \omega. \quad (2.17b)$$

Выражение (2.17) подтверждает, что преобразование Фурье комплексного аналитического сигнала тождественно равно нулю в области отрицательных частот  $\omega < 0$ , а в области положительных частот спектральные амплитуды удваиваются.

Подавляющее большинство радиолокационных сигналов, исключая сигналы без несущей частоты (сверхширокополосные) удовлетворяют условию узкополосности

$$\Delta\omega / \omega_0 \ll 1, \quad (2.18)$$

где  $\omega_0$  - центральная несущая частота радиолокационного сигнала, а  $\Delta\omega$  - полоса частот, занимаемая спектром сигнала. Необходимо отметить, что широко используемые понятия огибающей и фазы радиосигнала справедливы только для узкополосных сигналов[34].

Возвращаясь к выражению (2.3) для проекции  $E_j^{(R)}(t)$  решения векторного волнового уравнения (2.1), перепишем это выражение в виде

$$E_j^{(R)}(t) = \alpha t \cos \omega_0 t + \beta t \sin \omega_0 t, \quad (2.19)$$

где

$$\alpha t = a_j t \cos \varphi_j t, \quad \beta t = a_j t \sin \varphi_j t$$

медленно изменяющиеся (по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$ ) функции времени. Ширина спектра  $\Delta\omega$  сигнала (2.19) определяется именно этими функциями. В случае выполнения условия узкополосности случайная функция, сопряженная к (2.19) имеет вид (приближенный)

$$\begin{aligned} E_j^{(R)}(t) &= H \alpha t \cos \omega_0 t + \beta t \sin \omega_0 t \approx \\ &\approx -\alpha t \sin \omega_0 t + \beta t \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь для сокращения записи использовано обозначения интегрального преобразования Гильберта в виде

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = H \dots \quad (2.21)$$

В данном случае прямое преобразование Гильберта обозначается как  $-H \dots$ ; а обратное как  $H \dots$ :

$$E_j^{(I)}(t) = -H E_j^{(R)}(t) ; E_j^{(R)}(t) = H E_j^{(I)}(t) .$$

Из выражений (2.19) и (2.20) следует, что комплексный аналитический сигнал, отвечающий действительному узкополосному процессу  $E_j^{(R)}(t)$ , может быть представлен как

$$\begin{aligned} \dot{E}_j(t) &= \dot{E}_j^R(t) + j\dot{E}_j^I(t) = |\dot{E}_j(t)| \exp j\Phi_j t \exp -j\omega_0 t = \\ &= [\alpha_j t \cos \omega_0 t + \beta_j t \sin \omega_0 t] - j[\alpha_j t \sin \omega_0 t - \beta_j t \cos \omega_0 t], \quad (2.12) \end{aligned}$$

где  $|\dot{E}_j(t)| = \sqrt{\alpha_j^2(t) + \beta_j^2(t)}$  есть огибающая, а  $\Phi_j t = \arctg \frac{\beta_j t}{\alpha_j t}$  - фаза

комплексного аналитического сигнала.

## **2.2. Физическое обоснование к введению понятия матрицы когерентности и степени поляризации частично-поляризованной волны.**

Наиболее простой путь для введения абстрактных понятий теории частичной поляризации – это рассмотрение физических ситуаций, которые позволяют обосновать данные понятия.

Рассмотрим некоторый физический опыт, связанный с анализом плоской частично поляризованной волны при использовании поляризатора и некоторого фазового устройства (компенсатора) [8,13]. Пусть плоская частично – поляризованная волна задана вектором Джонса в линейном базисе.

$$\dot{\vec{E}} t = \left\| \begin{matrix} \dot{E}_X t \\ \dot{E}_Y t \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} E_X t \exp j\Phi_X t \\ E_Y t \exp j\Phi_Y t \end{matrix} \right\|. \quad (2.23)$$

Комплексные аналитические сигналы  $\dot{E}_X t$  и  $\dot{E}_Y t$  есть проекции частично – поляризованной волны на орты декартова поляризационного базиса. Эти

сигналы представляют собой случайные стационарные процессы с нулевым средним. Определим теперь интенсивность волны в плоскости её фронта в направлении, составляющем угол  $\theta$  с положительным ортом оси  $OX$  и покажем, что наблюдаемые при этом эксперименте величины, связанные с ортогональными составляющими комплексного вектора (2.23) могут характеризовать поляризационную структуру волны. Интенсивность волны в направлении  $\theta$  выделим соответствующим образом ориентированным поляризатором; кроме того, введем между компонентами фазовый сдвиг  $\varphi$  путем использования фазового устройства (компенсатора). Тогда комплексная амплитуда и интенсивность волны в выбранном направлении определяются в виде

$$\dot{\vec{E}}(t, \theta, \varphi) = \dot{E}_x(t) \cos \theta + \dot{E}_y(t) \sin \theta; \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} I(\theta, \varphi) &= \left\langle \dot{\vec{E}}(t, \theta, \varphi) \dot{\vec{E}}^*(t, \theta, \varphi) \right\rangle = \\ &= \left\langle \dot{E}_y(t) \dot{E}_x^*(t) \right\rangle \cos^2 \theta + \left\langle \dot{E}_y(t) \dot{E}_x^*(t) \right\rangle \sin^2 \theta + \\ &\quad + \left\langle \dot{E}_x(t) \dot{E}_y^*(t) \right\rangle \exp -j\varphi \cos \theta \sin \theta + \\ &\quad + \left\langle \dot{E}_y(t) \dot{E}_x^*(t) \right\rangle \exp j\varphi \cos \theta \sin \theta = B_{xx} \cos^2 \theta + B_{yy} \sin^2 \theta + \\ &\quad + \dot{B}_{xy} \exp -j\varphi \cos \theta \sin \theta + B_{yx} \exp j\varphi \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В выражении (2.25) (и всюду в дальнейшем) косые скобки означают статистическое усреднение, коэффициенты  $\dot{B}_{xy} = \dot{B}_{yx}^* = \left\langle \dot{E}_x(t) \dot{E}_y^*(t) \right\rangle$  характеризуют взаимную корреляцию проекций вектора (2.23), а величины  $B_{xx} = I_x = \left\langle \dot{E}_x(t) \dot{E}_x^*(t) \right\rangle$ ,  $B_{yy} = I_y = \left\langle \dot{E}_y(t) \dot{E}_y^*(t) \right\rangle$  представляют собой интенсивность этих проекций.

Используя введенные обозначения, перепишем выражение (2.25) в действительной форме

$$I(\theta, \varphi) = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + 2 \operatorname{Re} B_{xy} \exp j\varphi \cos \theta \sin \theta. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) называется законом интерференции для плоской квазимонохроматической, частично-поляризованной волны [8,13]. Нетрудно видеть, что постоянные коэффициенты в законе интерференции представляют собой элементы корреляционной (2x2) матрицы

$$\begin{aligned} \|\dot{B}_{jl}\| &= \left\langle \dot{\vec{E}}(t) \otimes \dot{\vec{E}}^+(t) \right\rangle = \\ &= \left\| \left\langle \begin{matrix} \dot{E}_X & t & \dot{E}_X^* & t \\ \dot{E}_Y & t & \dot{E}_Y^* & t \end{matrix} \right\rangle \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{XX} & \dot{B}_{XY} \\ \dot{B}_{YX} & B_{YY} \end{matrix} \right\|, \end{aligned} \quad (2.27)$$

определенной в совпадающие моменты времени. Матрица (2.27) называется матрицей когерентности плоской квазимонохроматической волны и относится к классу эрмитовых, неотрицательно определённых матриц [35]. Символ  $\otimes$  означает кронекеровское произведение. Модуль нормированного внедиагонального элемента матрицы когерентности

$$\dot{B}_{XY} = \dot{B}_{YX}^* = |\dot{B}_{XY}| \exp j\beta_{XY} = \dot{B}_{XY} / B_{XX} B_{YY}^{0.5} \quad (2.28)$$

служит количественной мерой степени корреляции (когерентности) проекций вектора (2.23), а аргумент  $\beta_{XY}$  - мерой их эффективной разности фаз.

Для введения параметра, характеризующего поляризационную структуру волны, рассмотрим вариации интенсивности  $I$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  при изменении ориентации поляризатора и запаздывания, вводимого компенсатором. Фиксируя ориентацию поляризатора  $\theta = \theta_0$  и используя запись закона интерференции (2.26) в виде

$$\begin{aligned} I(\theta_0, \varphi) &= B_{XX} \cos^2 \theta_0 + B_{YY} \sin^2 \theta_0 + \\ &+ 2 B_{XX} B_{YY}^{0.5} |\dot{B}_{XY}| \cos \theta_0 \sin \theta_0 \cos \beta_{XY} - \varphi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

видим, что интенсивность изменяется синусоидально между значениями:

$$I(\theta_0, \varphi)_{MAX}^{MIN} = B_{XX} \cos^2 \theta_0 + B_{YY} \sin^2 \theta_0 \pm 2 B_{XX} B_{YY}^{0.5} \cos \theta_0 \sin \theta_0. \quad (2.30)$$

Для количественной оценки изменений введем (по аналогии с оптическими интерференционными опытами [13]) видность картины интерференции:

$$W = \frac{I_{\theta_0, \varphi_{MAX}} - I_{\theta_0, \varphi_{MIN}}}{I_{\theta_0, \varphi_{MAX}} + I_{\theta_0, \varphi_{MIN}}} = \frac{|\dot{B}_{XY}| \sin^2 \theta_0}{B_{XX} \cos^2 \theta_0 + B_{YY} \sin^2 \theta_0}. \quad (2.31)$$

Для определения характера изменения интенсивности при фиксированном значении  $\varphi$  и переменном  $\theta$ , введем дополнительный угол  $\eta$ , характеризуемый тригонометрическими функциями

$$\cos \eta = B_{XX} - B_{YY} \left[ B_{XX} - B_{YY}^2 + 4\dot{B}_{XY}\dot{B}_{YX} \cos^2(\beta_{XY} - \varphi) \right]^{-0.5},$$

$$\sin \eta = 2|\dot{B}_{XY}| \cos(\beta_{XY} - \varphi) \left[ B_{XX} - B_{YY}^2 + 4\dot{B}_{XY}\dot{B}_{YX} \cos^2(\beta_{XY} - \varphi) \right]^{-0.5}$$

и преобразуем выражение (2.29) к виду

$$I(\theta, \varphi) = 0.5 (B_{XX} - B_{YY} + R \cos(2\theta - \eta)), \quad (2.32)$$

где

$$R = 0.5 \left[ B_{XX} - B_{YY}^2 + 4\dot{B}_{XY}\dot{B}_{YX} \cos^2(\beta_{XY} - \varphi) \right]^{0.5};$$

$$\eta = \arctg \left[ 2|\dot{B}_{XY}| \cos(\beta_{XY} - \varphi) \right] (B_{XX} - B_{YY})^{-0.5}.$$

Из (2.32) следует, что при изменении значения угла  $\theta$  условные экстремумы интенсивности (для  $\varphi = \varphi_0$ ) принимают значения

$$I(\varphi_0, \theta)_{MIN}^{MAX} = 0.5(B_{XX} + B_{YY}) \pm R. \quad (2.33)$$

Величина  $R$  достигает максима при значении запаздывания  $\varphi$ , вносимого компенсатором, которое обеспечивает выполнение условия  $\cos^2(\beta_{XY} - \varphi) = 1$ :

$$R_{MAX} = 0.5 \left[ B_{XX} - B_{YY}^2 + 4\dot{B}_{XY}\dot{B}_{YX} \right]^{0.5} = 0.5 Sp \|B_{jl}\| \left[ 1 - \frac{4 \det \|B_{jl}\|}{Sp^2 \|B_{jl}\|} \right]^{0.5},$$

где величина  $Sp \|B_{jl}\| = B_{XX} + B_{YY}$  есть след матрицы когерентности, а величина  $\det \|B_{jl}\| = B_{XX} B_{YY} - \dot{B}_{XY} \dot{B}_{YX}$  представляет собой ее детерминант. Тогда абсолютные экстремумы интенсивности (при изменении как  $\theta$ , так и  $\varphi$ ) можно записать в виде:

$$I(\theta, \varphi)_{MIN}^{MIN} = 0.5Sp \|B_{jl}\| \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{4 \det \|B_{jl}\|}{Sp^2 \|B_{jl}\|} \right]^{0.5} \right\}, \quad (2.34)$$

Подставляя значения (2.34) в выражение (2.31) для видности интерференционной картины, получим

$$W = \left[ 1 - \frac{4 \det \|B_{jl}\|}{Sp^2 \|B_{jl}\|} \right]^{0.5}. \quad (2.35)$$

Последнее соотношение дает количественную оценку степени когерентной связи между составляющими вектора (2.23), ассоциированного с электрическим вектором плоской, частично-поляризованной волны, определяемую через величины, имеющие размерность мощности.

Рассмотрим теперь физический смысл характеристики видности, используя понятия абсолютно неполяризованной и полностью поляризованной волн. Как указывалось выше, абсолютно неполяризованное состояние электромагнитной волны характеризуется отсутствием преимущественного направления ориентации её электрического вектора (изотропией в плоскости). Изотропия должна сохраняться и при введении произвольного фазового сдвига между составляющими вектора (2.23).

Из закона интерференции (2.29), который можно переписать в виде

$$I(\theta, \varphi) = 0.5 \{ B_{xx} + B_{yy} + B_{xx} - B_{yy} \cos 2\Theta + |\dot{B}_{xy}| B_{xx} B_{yy}^{0.5} \sin 2\theta \cos \beta_{xy} - \varphi \},$$

следует, что условие изотропии выполняется только в случае одновременного равенства нулю двух величин:  $B_{xx} - B_{yy} = 0$ ,  $|\dot{B}_{xy}| = 0$ , что означает равенство энергии составляющих вектора Джонса этого поля при некогерентности (некоррелированности) составляющих этого вектора. Отсюда следует, что матрица когерентности абсолютно неполяризованной волны должна иметь вид

$$\|B_{jl}^{NP}\| = 0.5I \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.5I \|\delta_{jl}\|, \quad (2.36)$$

где ( $NP$ ) означает неполяризованную (non polarized) составляющую,  $\delta_{jl}$  - символ Кронекера, а величина  $I$  есть полная интенсивность волны, определяемая как  $I = B_{xx} + B_{yy}$ .

Рассматривая случай монохроматического (полностью поляризованного) поля, комплексная амплитуда которого не зависит от времени, нетрудно убедиться в том, что его матрица когерентности имеет вид

$$\|B_{jl}^{FP}\| = \begin{vmatrix} E_x^2 & E_x E_y \exp j\Delta\varphi_{xy} \\ E_x E_y \exp -j\Delta\varphi_{xy} & E_y^2 \end{vmatrix}, \quad (2.37)$$

где  $\Delta\varphi_{xy} = \varphi_x - \varphi_y$ , а  $FP$  означает полностью поляризованную (fully polarized) составляющую. Из выражения (2.37) немедленно следует, что для полностью поляризованной волны

$$\det \|B_{jl}^{FP}\| = B_{xx} B_{yy} - \dot{B}_{xy} \dot{B}_{yx} = 0. \quad (2.38)$$

Таким образом, матрица когерентности полностью поляризованной волны есть вырожденная матрица. При этом модуль нормированного внедиагонального элемента матрицы когерентности (2.37) равен единице.

Для неполяризованной волны видность её интерференционной картины равна нулю, а для полностью поляризованной волны видность равна единице.

Представим теперь частично-поляризованную волну как аддитивную смесь абсолютно неполяризованной и полностью поляризованных составляющих. Тогда матрица когерентности этой волны должна допускать запись в виде суммы  $\|\dot{B}_{jl}\| = \|\dot{B}_{jl}^{NP}\| + \|\dot{B}_{jl}^{FP}\|$ . Будем искать это разложение в виде

$$\|\dot{B}_{jl}\| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D \\ D^* & C \end{vmatrix}, \quad (2.39)$$

следуя [8,13]. В выражении (2.39) величины  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ,  $C \geq 0$ , а детерминант второго слагаемого равен нулю в силу условия (2.38). Из (2.39) следует, что

$$A + B = B_{xx}; A + C = B_{yy}; \dot{D} = \dot{B}_{xy}; \dot{D}^* = \dot{B}_{yx}. \quad (2.40)$$

Подставляя соотношения (2.40) в (2.38), получим

$$B_{xx} - A \quad B_{yy} - A \quad - \dot{B}_{xy} \dot{B}_{yx} = 0. \quad (2.41)$$

Выражение (2.41) есть не что иное, как характеристическое (вековое) уравнение для матрицы когерентности  $\|\dot{B}_{jl}\|$ :

$$\det \|\dot{B}_{jl}\| - A \|\delta_{jl}\| = 0;$$

откуда и следует, что величина  $A$  представляет собой собственное число матрицы  $\|\dot{B}_{jl}\|$ . Корни уравнения (2.41) определяют два возможных значения  $A$ :

$$A_{1,2} = 0.5 Sp \|\dot{B}_{jl}\| \pm \left[ Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\| - 4 \det \|\dot{B}_{jl}\| \right]^{0.5}. \quad (2.42)$$

Учитывая условие неотрицательности величин  $B$  и  $C$  (величина  $A$  неотрицательна в силу эрмитовости матрицы  $\|\dot{B}_{jl}\|$ ), нетрудно видеть, что следует выбрать значение  $A$  со знаком «минус» перед радикалом. Тогда

$$\|\dot{B}_{jl}^{NP}\| = 0.5 Sp \|\dot{B}_{jl}\| - \left[ Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\| - 4 \det \|\dot{B}_{jl}\| \right]^{0.5} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2.43)$$

$$\|\dot{B}_{jl}^{FP}\| = \begin{vmatrix} B & \dot{B}_{XY} \\ \dot{B}_{YX} & C \end{vmatrix}, \quad (2.44)$$

где

$$B = 0.5 B_{XX} - B_{YY} + \left[ Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\| - 4 \det \|\dot{B}_{jl}\| \right]^{0.5},$$

$$C = 0.5 B_{YY} - B_{XX} + \left[ Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\| - 4 \det \|\dot{B}_{jl}\| \right]^{0.5}.$$

При этом полная интенсивность волны определяется следом матрицы  $\|\dot{B}_{jl}\|$ , а интенсивность ее полностью поляризованной части можно найти как след матрицы  $\|\dot{B}_{jl}^{FP}\|$ :

$$I_{FP} = Sp \|\dot{B}_{jl}^{FP}\| = Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\| - 4 \det \|\dot{B}_{jl}\|^{0.5}.$$

Определим степень поляризации частично-поляризованной волны в виде отношения интенсивности полностью поляризованной составляющей к полной интенсивности волны [8,13]

$$\gamma = \frac{Sp \|\dot{B}_{jl}^{FP}\|}{Sp \|\dot{B}_{jl}\|} = \left\{ 1 - \frac{4 \det \|\dot{B}_{jl}\|}{Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\|} \right\}^{0.5}. \quad (2.45)$$

Сравнивая выражения (2.35) и (2.45), видим, что характеристика видности, найденная через экстремумы закона интерференции, полностью соответствует степени поляризации, найденной в виде отношения полностью поляризованной составляющей волны к ее полной интенсивности.

Обратим теперь внимание на следующий факт: если сравнить выражения (2.34) для экстремумов интенсивности закона интерференции и соотношения (2.42) для собственных чисел матрицы  $\|\dot{B}_{jl}\|$ , то нетрудно видеть, что экстремумы закона интерференции есть не что иное, как собственные числа матрицы когерентности. Отсюда следует, что при построении разложения матрицы когерентности, вообще говоря, нет необходимости подбирать число  $A$  из физических соображений, так как

$$W \equiv \gamma = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \left\{ 1 - \frac{4 \det \|\dot{B}_{jl}\|}{Sp^2 \|\dot{B}_{jl}\|} \right\}^{0.5}. \quad (2.45a)$$

Таким образом, степень поляризации частично-поляризованной волны определяется с использованием инвариантов матрицы когерентности этой волны. При этом степень поляризации частично-поляризованной волны определяется максимальным значением модуля коэффициента корреляции проекций комплексного вектора, описывающего эту волну:

$$W \equiv \gamma \equiv R_{12}^{MAX}.$$

Отсюда следует, что степень поляризации, и максимальное значение модуля коэффициента корреляции являются равноценными характеристиками частично-поляризованных волн.

Проведенный анализ демонстрирует тесную связь между проблемой собственных чисел квадратных матриц и задачей введения безразмерных характеристик поляризационного состояния волны. В дальнейшем этот факт будет широко использован.

### 2.3 Спектральная форма матрицы когерентности.

В настоящем и последующих подразделах будет проведена некоторая формализация математического аппарата, используемого для анализа, что позволит построить более совершенную и компактную теорию (2x2) матриц когерентности (МК). Прежде всего необходимо рассмотреть спектральную форму матрицы когерентности. Здесь следует указать, что необходимость анализа спектральной формы МК обусловлена не только чисто теоретическими аспектами, но, прежде всего, развитием техники спектрального анализа, которая дает возможность получения частотных спектров ортогонально-поляризованных рассеянных сигналов в реальном масштабе времени. Таким образом, в настоящее время существует реальная возможность использования поляризационно-частотной информации.

Анализ проведем в декартовом поляризационном базисе, считая, что комплексные случайные функции  $\dot{E}_X^T(t)$  и  $\dot{E}_Y^T(t)$  представляют собой стационарные и стационарно связанные процессы, заданные на интервале времени  $T$ . Преобразование Фурье (спектр) функций  $\dot{E}_j^T(t)$  ( $j = X, Y$ ) имеет вид

$$\dot{S}_j^T \omega = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{E}_j^T(t) \exp -j\omega t dt. \quad (2.46)$$

Средняя мощность процессов  $\dot{E}_X^T(t)$ ,  $\dot{E}_Y^T(t)$  на частоте  $\omega$ , отнесенная к полосе частот  $\Delta f = 1/T$ , равна [34]

$$\begin{aligned} G_X^T \omega &= \frac{1}{T} \dot{S}_X^T \omega \dot{S}_X^{T*} \omega = \frac{1}{T} \left| \dot{S}_X^T \omega \right|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{E}_X^T t_1 \dot{E}_X^{T*} t_2 \exp[-j\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (2.47a)$$

$$G_Y^T \omega = \frac{1}{T} \dot{S}_Y^T \omega \dot{S}_Y^{T*} \omega = \frac{1}{T} \left| \dot{S}_Y^T \omega \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{E}_Y^T t_1 \dot{E}_Y^{T*} t_2 \exp[-j\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \quad (2.476)$$

а их взаимная мощность определяется как

$$\begin{aligned} \dot{G}_{XY}^T \omega &= \frac{1}{T} \dot{S}_X^T \omega \dot{S}_Y^{T*} \omega = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{E}_X^T t_1 \dot{E}_Y^{T*} t_2 \exp[-j\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (2.47B)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_{YX}^T \omega &= \frac{1}{T} \dot{S}_Y^T \omega \dot{S}_X^{T*} \omega = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{E}_Y^T t_1 \dot{E}_X^{T*} t_2 \exp[-j\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.47Г)$$

Совокупность реализаций  $\dot{G} \omega$  не стремится к определенному пределу даже при  $T \rightarrow \infty$ , а является случайной функцией. Усредним выражения (2.47) и запишем результаты усреднения в виде

$$F_{XX}^T \omega = \langle G_X \omega \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} B_{XX} t_1, t_2 \exp[-i\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \quad (2.48a)$$

$$F_{YY}^T \omega = \langle G_Y \omega \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} B_{YY} t_1, t_2 \exp[-i\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \quad (2.48б)$$

$$\dot{F}_{XY}^T \omega = \langle \dot{G}_{XY} \omega \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{B}_{XY} t_1, t_2 \exp[-i\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2, \quad (2.48B)$$

$$\dot{F}_{YX}^T \omega = \langle \dot{G}_{YX} \omega \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{B}_{YX} t_1, t_2 \exp[-i\omega t_1 - t_2] dt_1 dt_2. \quad (2.48Г)$$

Здесь

$$B_{XX} t_1, t_2 = \langle \dot{E}_X t_1 \dot{E}_X^* t_2 \rangle, \quad (2.49a)$$

$$B_{YY} t_1, t_2 = \langle \dot{E}_Y t_1 \dot{E}_Y^* t_2 \rangle \quad (2.49б)$$

есть автокорреляционные функции поляризационно-ортогональных составляющих  $\dot{E}_X(t)$  и  $\dot{E}_Y(t)$ , а

$$\dot{B}_{XY} t_1, t_2 = \langle \dot{E}_X t_1 \dot{E}_Y^* t_2 \rangle, \quad (2.49B)$$

$$\dot{B}_{YX}(t_1, t_2) = \langle \dot{E}_Y(t_1) \dot{E}_X^*(t_2) \rangle \quad (2.49\Gamma)$$

есть их взаимно-корреляционные функции.

Нетрудно видеть, что спектральные функции  $F_{jl}^T(\omega)$  ( $j, l = x, y$ ) и корреляционные функции  $B_{jl}(t_1, t_2)$  ( $j, l = x, y$ ) представляют собой элементы матриц, определенных с использованием правил (2.27):

$$\begin{aligned} \|F_{jl}^T(\omega)\| &= \left\langle \left\| \begin{array}{c} \dot{S}_X(\omega) \\ \dot{S}_Y(\omega) \end{array} \right\| \otimes \left\| \begin{array}{c} \dot{S}_X^*(\omega) \\ \dot{S}_Y^*(\omega) \end{array} \right\| \right\rangle = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \langle \dot{S}_X(\omega) \dot{S}_X^*(\omega) \rangle & \langle \dot{S}_X(\omega) \dot{S}_Y^*(\omega) \rangle \\ \langle \dot{S}_Y(\omega) \dot{S}_X^*(\omega) \rangle & \langle \dot{S}_Y(\omega) \dot{S}_Y^*(\omega) \rangle \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} F_{XX}^T(\omega) & \dot{F}_{XY}^T(\omega) \\ \dot{F}_{YX}^T(\omega) & F_{YY}^T(\omega) \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \|B_{jl}(t_1, t_2)\| &= \left\langle \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_X(t_1) \\ \dot{E}_Y(t_1) \end{array} \right\| \otimes \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_X^*(t_2) \\ \dot{E}_Y^*(t_2) \end{array} \right\| \right\rangle = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \langle \dot{E}_X(t_1) \dot{E}_X^*(t_2) \rangle & \langle \dot{E}_X(t_1) \dot{E}_Y^*(t_2) \rangle \\ \langle \dot{E}_Y(t_1) \dot{E}_X^*(t_2) \rangle & \langle \dot{E}_Y(t_1) \dot{E}_Y^*(t_2) \rangle \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{XX}(t_1, t_2) & \dot{B}_{XY}(t_1, t_2) \\ \dot{B}_{YX}(t_1, t_2) & B_{YY}(t_1, t_2) \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Элементы матриц (2.50) и (2.51) связаны интегральными преобразованиями (2.48). Для стационарных и стационарно связанных процессов  $B_{jl}(t_1, t_2) = B_{jl}(t_1 - t_2)$ ,  $j, l = x, y$ .

Перепишем выражения (2.48) в унифицированном виде

$$F_{jl}^T(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} B_{jl}^T(t_1 - t_2) \exp[-i\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2 \quad (2.52)$$

и произведем в выражении (2.52) замену переменных  $\tau = t_1 - t_2; t_2 = t_2$ . При этом связь между старыми и новыми пределами интегрирования определяется соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = T/2, \quad \tau = T \\ t_2 = -T/2, \quad t_2 = -T/2 \\ t_1 = T/2, \quad \tau = 0 \\ t_2 = -T/2, \quad t_2 = T/2 \end{array} \right\} 0 \leq \tau < T; (-T/2) \leq t' < -\tau + (T/2),$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = -T/2, \quad \tau = -T \\ t_2 = +T/2, \quad t_2 = +T/2 \\ t_1 = -T/2, \quad \tau = 0 \\ t_2 = -T/2, \quad t_2 = -T/2 \end{array} \right\} -T \leq \tau < 0; (-\tau - T/2) \leq t' < (T/2)$$

В результате замены переменных интегрирование по квадрату переходит в интегрирование по параллелограмму (рисунок 2.1). Выражение (2.52) в новых пределах приобретает вид

$$\begin{aligned} F_{jl}^T \omega &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2(-\tau+T/2)} \int_{-T/2} B_{jl} \tau \exp -j\omega\tau dt_2 d\tau + \\ &+ \frac{2}{T} \int_{-T}^0 \int_{\tau+T/2}^{T/2} B_{jl} \tau \exp -j\omega\tau dt_2 d\tau = \frac{2}{T} \int_0^T T - \tau B_{jl}(\tau) \exp -j\omega\tau d\tau + \\ &+ \frac{2}{T} \int_{-T}^0 T + \tau B_{jl}(\tau) \exp -j\omega\tau d\tau = 2 \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) B_{jl} \tau \exp -j\omega\tau d\tau. \quad (2.53) \end{aligned}$$

случае  $T \rightarrow \infty$  величина  $|\tau|/T \rightarrow 0$  и предел выражения (2.53) принимает вид

$$F_{jl} \omega = \lim_{T \rightarrow \infty} F_{jl}^T \omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_{jl} \tau \exp -j\omega\tau d\tau, \quad j, l = x, y. \quad (2.54)$$

Интеграл (2.54) существует, если корреляционная функция  $B_{jl} \tau$  абсолютно интегрируема, что для стационарного процесса с конечной дисперсией  $\sigma_{jl} = B_{jl}(0)$  всегда имеет место.

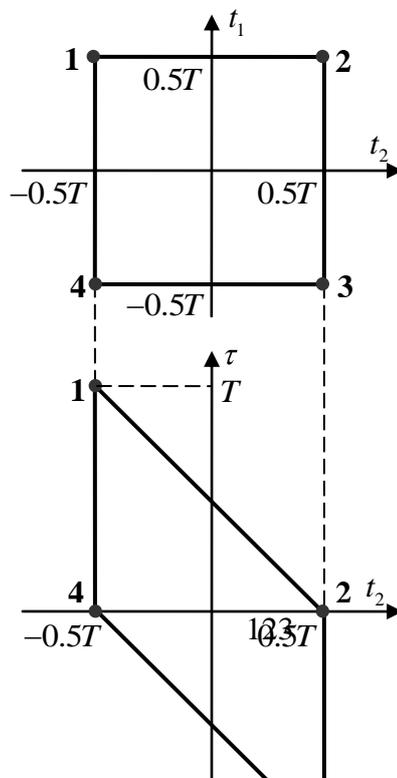


Рис.2.1

Выражения (2.54) для случаев  $j=l=x$  и  $j=l=y$  дают энергетический спектр поляризационно-ортогональных составляющих  $\dot{E}_x(t)$  и  $\dot{E}_y(t)$ . Этот спектр представляет собой усредненную картину распределения энергии процесса по частотам гармонических составляющих, но не учитывает их фазовой структуры. Энергетические спектры  $F_{xx}(\omega)$  и  $F_{yy}(\omega)$  представляют собой действительные функции.

Для случаев  $j=x; l=y$ , и  $j=y; l=x$ , выражения (2.54) дают взаимный энергетический спектр поляризационно-ортогональных составляющих  $\dot{E}_x(t)$  и  $\dot{E}_y(t)$  (или «энергию связи» этих составляющих). Взаимный энергетический спектр представляет собой комплексную функцию. Прямое преобразование Фурье (2.54) и обратное преобразование Фурье

$$B_{jl}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{jl}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (j,l=x,y) \quad (2.55)$$

в совокупности составляют теорему Винера-Хинчина [17,34] в приложении к частично поляризованным волнам.

В заключение подраздела отметим, что (2x2) матрица когерентности для совпадающих моментов времени, введенная соотношением (2.27) является частным случаем соотношения (2.55). Поскольку  $\tau=t_1-t_2$ , то для случая совпадающих моментов времени  $\tau=0$  и выражение (2.55) принимает вид

$$B_{jl}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{jl}(\omega) d\omega. \quad (2.56)$$

Соотношение (2.56) есть не что иное, как одно из возможных представлений теоремы Парсеваля.

#### **2.4 Общая форма (2x2) матрицы когерентности и ее использование для разложения закона интерференции.**

Ряд свойств (2x2) матрицы когерентности, такие как эрмитовость и неотрицательная определенность были просто постулированы в подразделе (2.2), а разложение  $MK$  на суммы  $MK$ , отвечающих абсолютно неполяризованной волне и полностью поляризованной волне было проделано на физическом уровне строгости. Однако все эти понятия должны быть обоснованы и доказаны. Это обоснование будет проведено с использованием результатов [8].

Будем полагать, что, за исключением отдельных, особо указанных случаев, рассматривается матрица когерентности квазимонохроматического поля  $\|B_{jl}(0)\|$ , определенная в совпадающие моменты времени выражениями (2.27) или (2.56).

Тот факт, что (2x2) матрица когерентности  $\|B_{jl}(0)\|$  представляет собой неотрицательно определенную матрицу, докажем, вводя линейную комбинацию вида

$$\dot{Y} t = \dot{S}_1^* \dot{E}_1(t) + \dot{S}_2^* \dot{E}_2(t) = \dot{S} \cdot \dot{E}(t), \quad (2.57)$$

представляющую собой скалярное произведение некоторого комплексного вектора  $\dot{S}$  и комплексного вектора Джонса  $\dot{E}_1(t)$ . Определим автокорреляционную функцию этой комбинации как

$$B_Y(\tau) = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j^* \dot{S}_l B_{jl}(\tau). \quad (2.58)$$

Записывая выражение (2.58) в спектральной форме, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_Y(\omega) \exp j\omega\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j^* \dot{S}_l \dot{F}_{jl}(\omega) \exp j\omega\tau d\omega, \quad (2.59)$$

где энергетический спектр

$$B_Y(\omega) = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j^* \dot{S}_l \dot{F}_{jl}(\omega) \quad (2.60)$$

есть действительная неотрицательная функция по определению. Отсюда следует, что квадратичная форма в правой части выражения (2.60) представляет собой неотрицательно определенную эрмитову форму. Матрица  $\|F_{jl}(\omega)\|$  этой формы также эрмитова и неотрицательно определенная. Используя условие  $\tau = 0$  применительно к выражению (2.59), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_Y(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j^* \dot{S}_l \int_{-\infty}^{\infty} F_{jl}(\omega) d\omega,$$

откуда, с учетом выражения (2.56), следует, что дисперсия процесса  $\dot{Y}(t)$  определяется величиной

$$G_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_Y(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j^* \dot{S}_l B_{jl}(0). \quad (2.61)$$

Выражение (2.61) показывает, что матрица когерентности  $\|B_{jl}(0)\|$ , найденная для совпадающих моментов времени, представляет собой эрмитову, неотрицательно определенную матрицу. В связи с этим ранг матрицы когерентности частично-поляризованной волны  $R \leq 2$ .

Предположим, что исследуемая (2x2) матрица  $\|B_{jl}(0)\|$  невырождена (т.е. имеет не равный нулю детерминант). Тогда для определения ее собственных значений можно записать вековое уравнение

$$\det \|B_{jl} - \lambda \delta_{jl}\| = \lambda^2 - Sp \|B_{jl}\| \lambda + \det \|B_{jl}\| = 0, \quad (2.62)$$

корни которого (собственные значения матрицы когерентности) определяются выражением

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ Sp \|B_{jl}\| \pm \sqrt{Sp^2 \|B_{jl}\| - 4 \det \|B_{jl}\|} \right]. \quad (2.63)$$

Собственным значениям  $A_1$  и  $A_2$  отвечают два (в общем случае комплексных) вектора  $\dot{m}^{(1)}$  и  $\dot{n}^{(1)}$ . Поскольку собственные векторы матрицы когерентности

$\|B_{jl}(0)\|$  образуют ее собственный базис, то вектор Джонса анализируемой ВОЛНЫ

$$\dot{\vec{E}}(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix}$$

может быть представлен разложением по направлениям этих векторов:

$$\dot{\vec{E}}(t) = \dot{E}_m(t)\dot{\vec{m}}^{(1)} + \dot{E}_n(t)\dot{\vec{n}}^{(1)}. \quad (2.64)$$

Здесь  $\dot{E}_m(t) = \sum_{j=1}^2 \dot{E}_j(t)\dot{m}_j^{(1)*}$ ;  $\dot{E}_n(t) = \sum_{j=1}^2 \dot{E}_j(t)\dot{n}_j^{(1)*}$  - скалярные произведения

вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$  с каждым из собственных векторов  $\dot{\vec{m}}^{(1)}$  и  $\dot{\vec{n}}^{(1)}$ . Вводя нормировку собственных векторов

$$\sum_{j=1}^2 \dot{m}_j^{(1)}\dot{m}_j^{(1)*} = \sum_{j=1}^2 \dot{n}_j^{(1)}\dot{n}_j^{(1)*} = 1,$$

получим

$$\langle |\dot{E}_m(t)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \langle \dot{E}_j(t)\dot{m}_j^{(1)*} \dot{E}_l(t)\dot{m}_l^{(1)} \rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 B_{jl}\dot{m}_j^{(1)*}\dot{m}_l^{(1)} = A_1; \quad (2.65a)$$

$$\langle |\dot{E}_n(t)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \langle \dot{E}_j(t)\dot{n}_j^{(1)*} \dot{E}_l(t)\dot{n}_l^{(1)} \rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 B_{jl}\dot{n}_j^{(1)*}\dot{n}_l^{(1)} = A_2; \quad (2.65б)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \langle \dot{E}_j(t)\dot{m}_j^{(1)*} \dot{E}_l(t)\dot{n}_l^{(1)*} \rangle = 0, \quad (2.65в)$$

поскольку, по определению собственных векторов  $\dot{\vec{m}}^{(1)}$  и  $\dot{\vec{n}}^{(1)}$ ,

$$\sum_{j=1}^2 B_{jl}(t)\dot{m}_j^{(1)} = A_1\dot{m}_l^{(1)}; \sum_{j=1}^2 B_{jl}(t)\dot{n}_j^{(1)} = A_2\dot{n}_l^{(1)}. \quad (2.65г)$$

Вводя обозначения  $\dot{\vec{m}} = \sqrt{A_1}\dot{\vec{m}}^{(1)}$ ,  $\dot{\vec{n}} = \sqrt{A_2}\dot{\vec{n}}^{(1)}$ , найдем элементы матрицы когерентности по обычному правилу

$$B_{jl} = \langle \dot{E}_j(t)\dot{E}_l^*(t) \rangle. \quad (2.66)$$

Учитывая выражения (2.64) и (2.65), запишем матрицу когерентности (2.66) в виде

$$\|B_{jl}\| = \|\dot{m}_j^* \dot{m}_l\| + \|\dot{n}_j^* \dot{n}_l\|. \quad (2.67)$$

Поскольку векторы  $\dot{\vec{m}}/|\dot{\vec{m}}|; \dot{\vec{n}}/|\dot{\vec{n}}|$  образуют ортонормированную пару, то выполняется условие

$$\frac{\dot{m}_j^* \dot{m}_l}{m^2} + \frac{\dot{n}_j^* \dot{n}_l}{n^2} = \delta_{jl}. \quad (2.68)$$

Используя соотношение (2.68), исключим из выражения (2.67) слагаемое  $\|\dot{n}_j^* \dot{n}_l\|$ :

$$\|B_{jl}\| = n^2 \|\delta_{jl}\| + \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \|\dot{m}_j^* \dot{m}_l\|, \quad (2.69)$$

Учитывая затем, что  $m^2 = A_1$ ;  $n^2 = A_2$ , получим окончательно

$$\|B_{jl}\| = A_2 \|\delta_{jl}\| + (1 - A_2 / A_1) \|\dot{m}_j^* \dot{m}_l\| \quad (j, l = 1, 2). \quad (2.70)$$

Выражение (2.70), представляющее собой сумму двух независимых матриц когерентности  $A_2 \|\delta_{jl}\|$  и  $(1 - A_2 / A_1) \|\dot{m}_j^* \dot{m}_l\|$ , назовем общей формой (2x2) матрицы когерентности частично поляризованной волны. При этом исходный комплексный вектор  $\dot{\vec{E}}(t)$  может быть представлен суммой двух независимых комплексных векторов

$$\dot{\vec{E}}(t) = \dot{\vec{E}}^{(1)} t + \dot{\vec{E}}^{(2)} t, \quad (2.71)$$

которым соответствуют матрицы когерентности

$$\|B_{jl}^1\| = A_2 \|\delta_{jl}\| \quad \text{и} \quad \|B_{jl}^2\| = (1 - A_2 / A_1) \|\dot{m}_j^* \dot{m}_l\|.$$

Рассмотрим теперь свойства матричных слагаемых в общей форме (2.70). Первое слагаемых этой формы представляет собой изотропный тензор. Оно не содержит никакого другого вектора или тензора, с которым можно было бы связать выделение некоторого преимущественного направления ориентации составляющей  $\dot{\vec{E}}^{(1)} t$  суммарного комплексного вектора. Отсюда следует вывод, что составляющая  $\dot{\vec{E}}^{(1)} t$  характеризует статистически изотропную

часть исследуемого комплексного вектора  $\dot{\vec{E}} t$ . Подтвердим этот факт анализом общей формы матрицы когерентности двумерного изотропного поля.

Пусть имеется некоторое двумерное изотропное случайное поле, описываемое комплексным вектором  $\dot{\vec{I}}$ . Зададим два произвольных комплексных вектора  $\dot{\vec{S}}, \dot{\vec{R}}$ , и рассмотрим корреляцию проекций комплексного вектора  $\dot{\vec{I}}$  на направления векторов  $\dot{\vec{S}}, \dot{\vec{R}}$ :

$$N = \left\langle \left[ \dot{\vec{S}} \cdot \dot{\vec{I}}^* \right] \left[ \dot{\vec{R}}^* \cdot \dot{\vec{I}} \right] \right\rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_l^* N_{jl}, \quad (2.72)$$

где величины  $N_{jl}$  представляют собой элементы матриц когерентности  $\|N_{jl}\|$  поля, характеризуемого комплексным вектором  $\dot{\vec{I}}$ .

Повернем систему векторов  $\dot{\vec{S}}, \dot{\vec{R}}$  как жесткое целое на произвольный угол в плоскости векторам  $\dot{\vec{I}}$ . При этом взаимная ориентация  $\dot{\vec{S}}$  и  $\dot{\vec{R}}$  не изменяется, что приводит к сохранению их скалярного произведения. В случае статистической изотропии поля вектора  $\dot{\vec{I}}$  величина  $N$  при поворотах не изменяется. Таким образом, требование инвариантности выражения (2.72) относительно поворотов системы векторов  $\dot{\vec{S}}$  и  $\dot{\vec{R}}$  является определяющим для статистически изотропного векторного поля [79]. Так как при повороте сохраняется лишь скалярное произведение  $\dot{\vec{S}} \cdot \dot{\vec{R}}^* = \dot{S}_j \dot{R}_j^*$ , величина  $N$  может зависеть только от этого произведения:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_l^* N_{jl} = N(\dot{\vec{S}} \cdot \dot{\vec{R}}^*). \quad (2.73)$$

Поскольку левая часть выражения (2.72) линейна по компонентам комплексных векторов  $\dot{\vec{S}}$  и  $\dot{\vec{R}}$ , то и правая часть может зависеть от скалярного произведения  $\sum_{j=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_j^*$  лишь линейно. Следовательно

$$N(\vec{S} \cdot \dot{\vec{R}}^*) = P \sum_{j=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_j^* . \quad (2.74)$$

Правая часть соотношения (2.74) может быть представлена в виде свертки

$$P \sum_{j=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_j^* = P \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{S}_j \dot{R}_l^* \delta_{jl} . \quad (2.75)$$

Сравнивая выражения (2.75) и (2.73) видим, учитывая соотношения (2.74), что матрица когерентности изотропного комплексного вектора  $\dot{\vec{I}}$  имеет вид

$$N_{jl} = P \delta_{jl} . \quad (2.76)$$

Выражение (2.76) подтверждает, что матрица  $B_{jl}^1 = A_2 \delta_{jl}$  представляет собой (2x2) матрицу когерентности составляющей  $\dot{\vec{E}}^{(1)}(t)$  суммарного комплексного вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$  и описывает изотропную составляющую суммарного вектора.

Рассмотрим теперь свойства матрицы  $\|B_{jl}^{(2)}\|$ . Нетрудно убедиться, что ее детерминант равен нулю, т. е.  $\|B_{jl}^{(2)}\|$  - матрица первого ранга. Гаральд Крамер [36] доказал, что распределение вероятностей некоторого двумерного вектора, характеризуемого матрицей когерентности первого ранга, вырождено и сосредоточено на направлении единственного собственного вектора этой матрицы. Данный случай соответствует полностью поляризованной волне эллиптической поляризации при комплексном собственном векторе или волне с линейной поляризацией при действительном собственном векторе.

Отсюда следует, что матрица  $\|B_{jl}^{(2)}\|$  описывает полностью поляризованную составляющую исследуемого вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$ . Физический смысл статистической изотропии и полной поляризованности составляющих комплексного вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$  рассмотрим, используя разложение закона интерференции (2.25) для плоской частично-поляризованной волны, который перепишем здесь для удобства:

$$I_{\theta, \varphi} = B_{11} \cos^2 \theta + B_{22} \sin^2 \theta +$$

$$+B_{12} \cos \theta \sin \theta \exp -j\varphi + B_{21} \cos \theta \sin \theta \exp j\varphi .$$

Если ввести обозначения  $a_1 = \cos \theta; a_2 = \sin \theta \exp -i\varphi$ , то закон интерференции принимает вид

$$I(\theta, \varphi) = a_1^2 B_{11} + a_2^2 B_{22} + a_1 a_2 B_{12} + a_1 a_2^* B_{21}, \quad (2.77)$$

откуда видно, что выражение (2.77) представляет собой развернутую запись эрмитовой формы

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 B_{jl} \dot{a}_j \dot{a}_l^*, \quad (2.78)$$

матрицей которой является эрмитова (2x2) матрица когерентности  $\|B_{jl}(0)\|$  плоской квазимонохроматической волны, определенная в совпадающие моменты времени.

Введем теперь понятие разложения закона интерференции на основе разложения матрицы когерентности  $\|B_{jl}(0)\|$ .

Разложением закона интерференции назовем запись эрмитовой формы (2.78), соответствующей этому закону, в виде суммы независимых слагаемых, каждое из которых представляет собой самостоятельный закон интерференции. Число слагаемых эрмитовых форм при этом определяется видом разложения матрицы когерентности. Рассмотрим разложение закона интерференции для случая представления матрицы когерентности ее общей формой (2.70). Подставляя (2.70) в эрмитову форму (2.78), получим

$$I(\theta, \varphi) = A_2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \delta_{jl} \dot{a}_j \dot{a}_l^* + (1 - A_2/A_1) \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \dot{m}_j \dot{m}_l^* \dot{a}_j \dot{a}_l^*. \quad (2.79)$$

Каждое из слагаемых выражения (2.79) имеет смысл самостоятельного закона интерференции. Анализируя свойства слагаемых этого разложения, нетрудно видеть, что вклад первого слагаемого в общую интенсивность равен

$$I^1 = A_2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \delta_{jl} \dot{a}_j \dot{a}_l^* = A_2 \quad (2.80)$$

и не зависит от угла ориентации поляризатора. Из выражения (2.80) следует, что видность для слагаемого  $\dot{I}^1$  суммарного закона интерференции  $\dot{I}^1(\theta, \varphi)$  равна нулю

$$W^{(1)} = \frac{I_{MAX}^{(1)} - I_{MIN}^{(1)}}{I_{MAX}^{(1)} + I_{MIN}^{(1)}} = 0,$$

что свидетельствует об абсолютной неполяризованности волны, соответствующей данному слагаемому.

Из соотношения  $I_1^{(1)} = A_2 = 0,5Sp \| A_2 \delta_{ji} \|$  следует, что поляризатор пропускает только половину мощности неполяризованной волны.

Для анализа второго слагаемого в разложении (2.79) закона интерференции запишем это слагаемое в действительной форме

$$I^{(2)}(\theta, \varphi) = (1 - A_2 / A_1) [m_1^2 a_1^2 + m_2^2 a_2^2 + 2 \operatorname{Re}(\dot{m}_1^* \dot{m}_2 \dot{a}_1 \dot{a}_2^*)]. \quad (2.81)$$

Введем, как и в подразделе 2.2, дополнительный угол  $\eta$ , характеризуемый функциями

$$\cos \eta = \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4m_1^2 m_2^2 \cos^2[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi]}};$$

$$\sin \eta = \frac{2m_1 m_2 \cos[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi]}{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4m_1^2 m_2^2 \cos^2[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi]}}$$

и преобразуем соотношение (2.81) к виду

$$I^{(2)}(\theta, \varphi) = (1 - A_2 / A_1) [0,5(m_1^2 + m_2^2 + R \cos(2\theta + \eta))]. \quad (2.82)$$

Здесь

$$R = 0,5 \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4m_1^2 m_2^2 \cos^2[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi]}, \quad (2.83a)$$

$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{2m_1 m_2 \cos[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi]}{m_1^2 - m_2^2}. \quad (2.83b)$$

Из (2.82) следует, что интенсивность  $I^{(2)}(\theta, \varphi)$  в зависимости от  $\theta$  (при  $\varphi = \text{const}$ ) изменяется синусоидально между значениями

$$I_{\varphi}^{(2)}(\theta)_{MAX} = (1 - A_2 / A_1) [0,5(m_1^2 + m_2^2) + R], \quad (2.84a)$$

$$I_{\varphi}^{(2)}(\theta)_{MIN} = (1 - A_2 / A_1)[0,5(m_1^2 + m_2^2) - R]. \quad (2.84b)$$

Экстремальные значения этих величин достигаются при значении угла  $\varphi$ , обеспечивающего равенство

$$\cos^2[\arg(\dot{m}_1^* \dot{m}_2) - \varphi] = 1. \quad (2.85)$$

В случае выполнения условия (2.85) абсолютные экстремумы величин (2.84) определяются как

$$\left. \begin{aligned} I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MAX} &= (1 - A_2 / A_1)(m_1^2 + m_2^2) \\ I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MIN} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.86)$$

Таким образом, видность слагаемого  $I^{(2)}(\theta, \varphi)$  закона интерференции (2.91) равна единице:

$$W^{(2)}(\theta, \varphi) = \frac{I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MAX} - I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MIN}}{I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MAX} + I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MIN}} = 1.$$

Видность, равная единице, наблюдается в законах интерференции полностью когерентных волн, что в данном случае имеет смысл полной поляризованности волны, отвечающей закону интерференции (2.81). Таким образом, второе слагаемое в разложении (2.79) закона интерференции частично поляризованной волны отвечает полностью поляризованной составляющей этой волны.

Учитывая, что  $m_1^2 + m_2^2 = A_1$ , перепишем (2.86) в виде

$$I^{(2)}(\theta, \varphi)_{MAX} = A_1 - A_2 = Sp \|B_{jl}^{(2)}\|, \quad (2.87)$$

откуда следует, что интенсивность полностью поляризованной волны при ориентации поляризатора, совпадающей с ориентацией вектора волны, передается на выход без изменения.

Поскольку тот же поляризатор передает на выход только половину мощности неполяризованной составляющей исследуемой волны независимо от его ориентации, то экстремальные значения суммарной интенсивности  $I = I^{(1)} + I^{(2)}$  можно представить, используя формулы (2.79), (2.80) и (2.87):

$$I(\theta, \varphi)_{MAX} = A_1; I(\theta, \varphi)_{MIN} = A_2. \quad (2.88)$$

Тогда видность суммарного закона интерференции

$$W = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}, \quad (2.89)$$

в соответствии с выражением (2.89) и условием

$$P_{\text{ПОЛН}} = Sp \| A_2 \delta_{jl} + \dot{m}_j^* \dot{m}_l (1 - A_2 / A_1) \| = A_1 + A_2,$$

представляет собой отношение интенсивности полностью поляризованной составляющей к полной интенсивности волны, т. е. степень поляризации плоской квазимонохроматической волны. Подставляя в (2.89) выражение (2.63) для собственных значений  $A_1; A_2$ , получим уже известное нам выражение для степени поляризации, представленное через инварианты матрицы когерентности  $\| B_{jl} \|$

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{4 \det \| B_{jl} \|}{Sp^2 \| B_{jl} \|} \right]^{0.5}.$$

## ***2.5 Разложение матрицы когерентности с использованием системы матриц Паули.***

Представление матрицы когерентности частично-поляризованной волны в виде суммы матриц, отвечающих ее абсолютно неполяризованной и полностью поляризованной составляющим, не является единственно возможной формой разложения.

Весьма эффективным для анализа частично поляризованных волн является разложение матриц когерентности с использованием полной системы линейно-независимых матриц Паули, дополненной единичной матрицей:

$$\hat{\sigma}_0 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|; \hat{\sigma}_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|; \hat{\sigma}_2 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|; \sigma_3 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -j \\ +j & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.90)$$

Алгебра этих матриц определяется следующими соотношениями [15]:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta$$

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta - \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2j \sigma_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \text{ (и циклические перестановки),}$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_0, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

$$\sigma_i \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_i = \sigma_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Если определить след первого матричного соотношения и воспользоваться третьим соотношением, то можно показать, что

$$Sp[\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j] = 2\delta_{ij}, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3). \quad (2.91)$$

Используя соотношение (2.91) можно построить процедуру определения раскрывающих коэффициентов при разложении матрицы когерентности частично-поляризованной волны по системе матриц Паули.

Рассматривая матрицу когерентности  $\|B_{XY}\|$  в линейном поляризационном базисе, запишем

$$\|B_{XY}\| = 0,5 \sum_{i=0}^3 S_i \hat{\sigma}_i. \quad (2.92)$$

Умножим обе стороны соотношения (2.92) на  $\hat{\sigma}_j$  и определим след от обеих сторон:

$$Sp[\|B_{XY}\| \hat{\sigma}_j] = Sp[0,5 \sum_{i=0}^3 S_i \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j], \quad (2.93)$$

а затем, используя выражение (2.91), получим соотношение

$$S_i = Sp[\|B_{XY}\| \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j], \quad (i, j = 0, 1, 2, 3), \quad (2.94)$$

определяющее коэффициенты разложения (2.92). Нетрудно видеть, что для значений индексов  $(i, j = 0, 1, 2, 3)$  коэффициенты разложения принимают вид параметров Стокса

$$\begin{aligned} S_0 &= Sp B_{jl} \hat{\sigma}_0 = B_{11} + B_{22}; & S_1 &= Sp B_{jl} \hat{\sigma}_1 = B_{11} - B_{22}; \\ S_2 &= Sp B_{jl} \hat{\sigma}_2 = B_{12} + B_{21}; & S_3 &= Sp B_{jl} \hat{\sigma}_3 = j B_{12} - B_{21}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Обратная операция, проведенная с использованием выражения (2.92) дает представление матрицы когерентности через параметры Стокса:

$$\|B_{jl}\| = 0,5 \begin{vmatrix} S_0 + S_1 & S_2 - jS_3 \\ S_2 + jS_3 & S_0 - S_1 \end{vmatrix}. \quad (2.96)$$

Рассмотрим теперь некоторые математические аспекты связи между параметрами Стокса и матрицами Паули.

Параметры Стокса частично-поляризованной волны могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle = B_{11} + B_{22} \\
 S_1 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle = B_{11} - B_{22} \\
 S_2 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle = B_{12} + B_{21} \\
 S_3 &= j \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle = j B_{12} - B_{21}
 \end{aligned}
 \tag{2.97}$$

и представляют собой средние значения некоторых эрмитовых операторов, описывающих изменения поляризации волны, производимые измерительным прибором. Эрмитовость операторов обусловлена требованием действительности наблюдаемых в эксперименте величин, а собственные векторы эрмитовых операторов, отвечающих некоторым физическим приборам, описывают частные состояния поляризации, которые пропускаются этим прибором без изменений. Из изложенного следует два вывода:

- возможно определение среднего значения эрмитова оператора (любой из матриц Паули) в виде некоторой действительной величины;
- возможно установление соответствия между эрмитовыми операторами Паули и некоторыми реальными физическими приборами.

Рассмотрим первый из этих выводов.

Математическое представление (2.92) соответствует оценке среднего значения оператора (матрицы Паули) путем проецирования матрицы когерентности на орты матричного базиса, образованного из матриц Паули. Однако возможен и другой подход:

Запишем соотношения (2.97) в виде

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \langle \vec{E}^+(t) \hat{\sigma}_0 \vec{E}(t) \rangle; & S_1 &= \langle \vec{E}^+(t) \hat{\sigma}_1 \vec{E}(t) \rangle; \\
 S_2 &= \langle \vec{E}^+(t) \hat{\sigma}_2 \vec{E}(t) \rangle; & S_3 &= \langle \vec{E}^+(t) \hat{\sigma}_3 \vec{E}(t) \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{2.98}$$

Нетрудно видеть, что после раскрытия векторно-матричных произведений в (2.98) будут получены соотношения (2.97). Соотношения типа (2.98) представляют собой так называемые средние значения эрмитовых операторов. Таким образом, параметры Стокса частично-поляризованной волны есть не что иное, как средние значения операторов Паули.

Используя запись матрицы когерентности в форме (2.96), найдем выражение для степени поляризации через параметры Стокса. Представление матриц когерентности в виде суммы матриц, отвечающих абсолютно неполяризованной и полностью поляризованной составляющих волны, может быть записано в виде

$$\|B_{jl}\| = \|B_{jl}^{(1)}\| + \|B_{jl}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} - A_2 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} - A_2 \end{vmatrix}, \quad (2.100)$$

где  $A_2 = 0,5[Sp \|B_{jl}\| - \sqrt{Sp^2 \|B_{jl}\| - 4 \det \|B_{jl}\|}]$ .

Учитывая запись (2.96), а также то обстоятельство, что детерминант и след матрицы когерентности, выраженные через параметры Стокса, имеют вид

$$\det \|B_{jl}\| = 0,25(S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2); \quad Sp \|B_{jl}\| = S_0,$$

запишем разложение (2.100) как

$$\|B_{jl}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S_0 - \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}S_0 + \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} & 0,5(S_2 - jS_3) \\ 0,5(S_2 + jS_3) & -\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \end{vmatrix}. \quad (2.101)$$

Нетрудно видеть, что второе матричное слагаемое, отвечающее полностью поляризованной составляющей волны, представляет собой вырожденную матрицу, т. к. ее детерминант равен нулю.

Интенсивность полностью поляризованной составляющей волны определяется следом второго матричного слагаемого:

$$P^{(FP)} = Sp \parallel B_{jl}^{(2)} \parallel = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} . \quad (2.102)$$

Следует отметить, что чисто формально выражение (2.102) может быть получено с использованием формы записи (2.96) и выражение (2.35) для степени поляризации, однако анализ, проведенный выше, является более наглядным.

Определим теперь векторы Стокса абсолютно неполяризованной и полностью поляризованной составляющих частично поляризованной волны. Для этого воспользуемся разложением каждого из матричных слагаемых в выражении (2.101) по системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей. Тогда для этих составляющих получим соответственно:

$$\vec{S}^{(1)} = S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 ; \quad (2.103a)$$

$$\vec{S}^{(2)} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 . \quad (2.103b)$$

Здесь для краткости использована запись вектора Стокса в виде вектора-строки. Таким образом, вектор Стокса абсолютно неполяризованный составляющей имеет только элемент  $S_0^{(1)}$ , равный разности полной интенсивности волны и интенсивности ее полностью поляризованной составляющей. Остальные параметры Стокса равны нулю, поскольку абсолютно неполяризованная волна не обладает каким-либо преимущественным направлением ориентации и преимущественным значением угла эллиптичности ее эллипса поляризации. Указанные параметры в данном случае изменяются непредсказуемым образом и их средние значения равны нулю.

Напомним (см. Гл. I), что нормированные параметры Стокса полностью поляризованной волны связаны с параметрами ее эллипса поляризации следующим образом:

$$S_{1N} = \cos 2\alpha \cos 2\beta; S_{2N} = \cos 2\alpha \sin 2\beta; S_{3N} = \sin 2\alpha .$$

Из изложенного следует, что параметры Стокса  $S_1, S_2, S_3$  с последующим нормированием их к полной интенсивности волны  $S_0$  позволяют установить

геометрические параметры эллипса поляризации полностью поляризованной составляющей частично-поляризованной волны.

В заключение подраздела приведем весьма важную теорему [5,8], известную под названием «Теорема Стокса», позволяющую определить параметры Стокса суммарного потока. В соответствии с этой теоремой параметры Стокса суммы независимых потоков излучения определяются аддитивной суммой параметров Стокса складываемых потоков. Доказательство не представляет труда: предположим, что имеется сумма статистически независимых флуктуирующих частично-поляризованных волн, распространяющихся в одном направлении. Тогда комплексный вектор суммарной волны есть сумма комплексных векторов слагаемых волн:

$$\dot{\vec{E}}^{(\Sigma)}(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{E}}^{(i)}(t). \quad (2.104)$$

Найдем матрицу когерентности волны (2.104), полагая, что слагаемые флуктуирующие волны представляют собой стационарные процессы. Это позволяет заменить условие статистической независимости более слабым условием некоррелированности. Тогда

$$\| B_{jl}^{(\Sigma)} \| = \left\langle \left[ \sum_{i=1}^N \dot{\vec{E}}^{(i)}(t) \right]^\dagger \otimes \left[ \sum_{i=1}^N \dot{\vec{E}}^{(i)}(t) \right] \right\rangle,$$

а после усреднения с учетом некоррелированности слагаемых получим

$$\| B_{jl}^{(\Sigma)} \| = \sum_{i=1}^N \| B_{jl}^{(i)} \|, \quad (2.105)$$

где  $\| B_{jl}^{(\Sigma)} \|$  - матрица когерентности слагаемых некоррелированных волн.

Разлагая суммарную матрицу когерентности (2.105) по системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей, видим, что:

$$S_0^\Sigma = \sum_{i=1}^N S_0^i; S_1^\Sigma = \sum_{i=1}^N S_1^i; S_2^\Sigma = \sum_{i=1}^N S_2^i; S_3^\Sigma = \sum_{i=1}^N S_3^i, \quad (2.106)$$

где  $S_j^i$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) есть параметры Стокса слагаемых волн.

## 2.6. Преобразование матрицы когерентности и параметров Стокса при изменении поляризационного базиса.

При анализе поляризационных свойств частично-поляризованных волн, который был проведен в предыдущих подразделах, использовался только декартов (линейный) поляризационный базис. Изменение вида поляризационного базиса не изменит физического смысла анализа и его результатов, но приведет к изменению конкретного представления элементов матриц когерентности и параметров Стокса.

Как будет показано ниже, определяющие значение для измерения параметров Стокса имеет три вида поляризационных базисов, а именно:

- линейный поляризационный базис  $0, \pi/2$ , который принимается за опорный (здесь углы  $0, \pi/2$  обозначают исходную ориентацию осей  $OX$  и  $OY$ );

- линейный поляризационный базис  $\pm\pi/4$ , оси которого повернуты на  $\pi/2$  относительно соответствующих осей опорного линейного поляризационного базиса;

- круговой поляризационный базис  $L, R$ , переход в который осуществляется из линейного опорного поляризационного базиса.

Переход из базиса в базис осуществляется с использованием унитарных операторов перехода, рассмотренных в гл. I. Так, переход из линейного базиса в круговой и обратно осуществляется с использованием операторов

$$\dot{Q}_{RL}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix}; \dot{Q}_{RL}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.107a)$$

а переход в базис  $\pm\pi/4$  и обратно с использованием операторов

$$Q^{(1)} \pm\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{vmatrix}; Q^{(-1)} \pm\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.107b)$$

Рассмотрим преобразование матрицы когерентности  $\|B_{jl}^{XY}\|$  при изменении поляризационного базиса.

При переходе из опорного декартова поляризационного базиса  $OXY$  в другой поляризационный базис, вектор Джонса в новом базисе определяется преобразованием

$$\dot{\vec{E}}'(t) = \dot{Q}\dot{\vec{E}}(t), \quad (2.108)$$

где  $\dot{Q}$  - унитарный оператор перехода,  $\dot{\vec{E}}(t)$  - вектор Джонса частично-поляризованной волны в исходном базисе.

Найдем матрицу когерентности волны (2.108):

$$\begin{aligned} \|B'_{jl}\| &= \langle \dot{\vec{E}}'(t) \otimes \dot{\vec{E}}^+(t) \rangle = \langle \dot{Q}\dot{\vec{E}}(t) \otimes \dot{\vec{E}}^+(t)Q^+ \rangle = \\ &= Q \langle \dot{\vec{E}}(t) \otimes \dot{\vec{E}}^+(t) \rangle Q^+ = Q \|B_{jl}^{XY}\| Q^+, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где  $\|B_{jl}^{XY}\|$  - матрица когерентности волны в исходном базисе.

Выражение (2.109) представляет собой правило преобразования матрицы когерентности при переходе в новый поляризационный базис.

Неизменными величинами при замене базиса остаются только инварианты матрицы когерентности – ее собственные числа и их комбинации (след  $Sp \|B_{jl}\| = A_1 + A_2$ , детерминант  $\det \|B_{jl}\| = A_1 A_2$ , степень поляризации

$\gamma = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \left[ 1 - \frac{4 \det \|B_{jl}\|}{Sp^2 \|B_{jl}\|} \right]^{0,5}$ ). Вид элементов матрицы в новом поляризационном базисе изменяется.

Рассмотрим преобразование матрицы когерентности  $\|B_{jl}^{XY}\|$  и ее представление через параметры Стокса при переходе из опорного линейного базиса в круговой поляризационный базис.

В соответствии с выражениями (2.109), (2.107) запишем матрицу когерентности в круговом базисе

$$\|B_{jl}^{RL}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{c|c} 1 & j \\ \hline j & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} B_{XX} & B_{XY} \\ \hline B_{YX} & B_{YY} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 1 & -j \\ \hline -j & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.110)$$

Заменим матрицу  $\|B_{jl}^{XY}\|$  в выражении (2.110) ее разложением (2.92) по системе матриц Паули:

$$\|B_{jl}^{RL}\| = 0,25 \left\| \begin{array}{c|c} 1 & j \\ \hline j & 1 \end{array} \right\| \left\| S_0 \hat{\sigma}_0 + S_1 \hat{\sigma}_1 + S_2 \hat{\sigma}_2 + S_3 \hat{\sigma}_3 \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 1 & -j \\ \hline -j & 1 \end{array} \right\|.$$

Производя в последнем равенстве умножение обеих сторон на операторы  $\dot{Q}_{RL}$  и  $\dot{Q}_{RL}^{(-1)}$  слева и справа соответственно, получим

$$\|B_{jl}^{RL}\| = 0,25 \{ S_0 \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_0 \dot{Q}_{RL}^{(-1)} + S_1 \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_1 \dot{Q}_{RL}^{(-1)} + S_2 \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_2 \dot{Q}_{RL}^{(-1)} + S_3 \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_3 \dot{Q}_{RL}^{(-1)} \}. \quad (2.111)$$

Раскроем произведения  $\dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_i \dot{Q}_{RL}^{(-1)}$ ,  $i = 0,1,2,3$ , после чего выражение (2.11) примет вид

$$\|B_{jl}^{RL}\| = 0,5 \left\{ S_0 \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\| + S_1 \left\| \begin{array}{c|c} 0 & -j \\ \hline j & 0 \end{array} \right\| + S_2 \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right\| + S_3 \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right\| \right\}. \quad (2.112)$$

Нетрудно видеть, что разложение (2.112) матрицы когерентности  $\|B_{jl}^{RL}\|$  в круговом базисе отличается от разложения (2.92) матрицы когерентности  $\|B_{jl}^{XY}\|$  в декартовом поляризованном базисе. Однако, если учесть, что все матрицы Паули подвергались тому же унитарному преобразованию, что и матрица  $\|B_{jl}^{XY}\|$  при переходе из декартова базиса в круговой, то можно ввести обозначения «круговых» матриц Паули:

$$\hat{\sigma}_1^{RL} = \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_1 \dot{Q}_{RL}^{(-1)}; \hat{\sigma}_2^{RL} = \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_2 \dot{Q}_{RL}^{(-1)}; \hat{\sigma}_3^{RL} = \dot{Q}_{RL} \hat{\sigma}_3 \dot{Q}_{RL}^{(-1)} \quad (2.113)$$

(матрица  $\hat{\sigma}_0$  инвариантна к преобразованиям базиса) и переписать (2.112) в унифицированном виде:

$$\|B_{jl}^{RL}\| = 0,5 \sum_{i=0}^3 S_i^{RL} \hat{\sigma}_i^{RL}. \quad (2.114)$$

Параметры Стокса  $S_i^{RL}$  в круговом базисе в этом случае будут определяться по тому же правилу (2.94), но с использованием трансформированных матриц  $\hat{\sigma}_i^{RL}$ ;  $i = 0, 1, 2, 3$  :

$$S_i^{RL} = Sp \left\| B_j^{RL} \right\| \hat{\sigma}_j^{RL} . \quad (2.115)$$

Поскольку матрица когерентности  $\| B_{jl}^{RL} \|$  частично-поляризованной волны в круговом базисе имеет вид

$$\| B_{jl}^{RL} \| = \left\langle \left\| \begin{matrix} \dot{E}_L(t) \\ \dot{E}_R(t) \end{matrix} \right\| \otimes \left\| \begin{matrix} \dot{E}_L^*(t) & \dot{E}_R^*(t) \end{matrix} \right\| \right\rangle = \left\| \left\langle \begin{matrix} \dot{E}_L(t) \dot{E}_L^*(t) & \dot{E}_L(t) \dot{E}_R^*(t) \\ \dot{E}_R(t) \dot{E}_L^*(t) & \dot{E}_R(t) \dot{E}_R^*(t) \end{matrix} \right\rangle \right\| ,$$

где  $\dot{E}_L(t), \dot{E}_R(t)$ , - элементы кругового вектора Джонса, то, в соответствии с (2.115) параметры Стокса волны в круговом базисе будут иметь вид:

$$\begin{aligned} S_0^{RL} &= \langle \dot{E}_L(t) \dot{E}_L^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_R(t) \dot{E}_R^*(t) \rangle = B_{11}^{RL} + B_{22}^{RL}; \\ S_1^{RL} &= j \{ \langle \dot{E}_L(t) \dot{E}_R^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_R(t) \dot{E}_L^*(t) \rangle \} = j \{ B_{12}^{RL} - B_{21}^{RL} \} \\ S_2^{RL} &= \langle \dot{E}_L(t) \dot{E}_R^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_R(t) \dot{E}_L^*(t) \rangle = B_{12}^{RL} + B_{21}^{RL}; \\ S_3^{RL} &= \langle \dot{E}_L(t) \dot{E}_L^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_R(t) \dot{E}_R^*(t) \rangle = B_{11}^{RL} - B_{22}^{RL} . \end{aligned} \quad (2.116)$$

Найдем теперь параметры Стокса частично-поляризованной волны в базисе  $\pm\pi/4$  .

Проводя рассуждения, аналогичные проделанным при анализе перехода из линейного опорного базиса  $0, \pi/2$  в круговой базис, нетрудно показать, что матрица когерентности частично-поляризованной волны  $\| B_{jl} \pm\pi/4 \|$  может быть представлена унифицированным разложением

$$\| B_{jl} \pm\pi/4 \| = 0.5 \sum_{i=0}^3 S_i \hat{\sigma}_i \pm\pi/4 ,$$

где

$$\hat{\sigma}_i \pm\pi/4 = Q \pm\pi/4 \hat{\sigma}_i Q^{-1} \pm\pi/4 ; i = 0, 1, 2, 3$$

есть матрицы Паули, преобразованные в базис  $\pm\pi/4$  из базиса  $0, \pi/2$ .  
Правило определения параметров Стокса будет идентичным правилам (2.94) и (2.115)

$$S_i \pm\pi/4 = Sp \left\| B_{ji} \pm\pi/4 \right\| \hat{\sigma}_i \pm\pi/4, \quad (2.117)$$

что и позволяет найти выражения для параметров Стокса в виде:

$$\begin{aligned} S_0 \pm\pi/4 &= B_{11} \pm\pi/4 + B_{22} \pm\pi/4; \\ S_1 \pm\pi/4 &= B_{12} \pm\pi/4 + B_{21} \pm\pi/4; \\ S_2 \pm\pi/4 &= B_{22} \pm\pi/4 - B_{11} \pm\pi/4; \\ S_3 \pm\pi/4 &= j\{B_{22} \pm\pi/4 - B_{11} \pm\pi/4\}; \end{aligned} \quad (2.118)$$

Для удобства анализа и сравнения перепишем здесь выражения (2.97) для параметров Стокса в декартовом опорном базисе  $0, \pi/2$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle = B_{11} + B_{22} \\ S_1 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle = B_{11} - B_{22} \\ S_2 &= \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle + \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle = B_{12} + B_{21} \\ S_3 &= j \langle \dot{E}_1(t) \dot{E}_2^*(t) \rangle - \langle \dot{E}_2(t) \dot{E}_1^*(t) \rangle = j B_{12} - B_{21} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Сравнивая соотношения (2.116), (2.117) и (2.119) можно сделать вывод, что каждая из групп параметров Стокса в любом из трех рассмотренных базисов содержит:

- сумму средних мощностей поля поляризационно-ортогональных составляющих; представляющих собой стационарные случайные процессы.
- разность средних мощностей поляризационно-ортогональных составляющих;
- действительную часть средней взаимной мощности случайных стационарных поляризационно-ортогональных составляющих;
- мнимую часть средней взаимной мощности поляризационно-ортогональных составляющих.

При этом полная мощность волны, будучи следом матрицы когерентности, инвариантна к преобразованию базиса, а остальные три параметра приведены в таблице 2.1 для сравнения:

Таблица 2.1

$S_i$	$0; \pi/2$	$\pm\pi/4$	$RL$
$S_1$	$B_{11} \ 0; \pi/2 - B_{11} \ 0; \pi/2$	$2\text{Re } B_{12} \ \pm\pi/4$	$-2\text{Im } B_{12}^{RL}$
$S_2$	$2\text{Re } B_{12} \ 0; \pi/2$	$B_{22} \ \pm\pi/4 - B_{11} \ \pm\pi/4$	$2\text{Re } B_{12}^{RL}$
$S_3$	$-2\text{Im } B_{12} \ 0; \pi/2$	$-2\text{Im } B_{12} \ \pm\pi/4$	$B_{22}^{RL} - B_{11}^{RL}$

Диагональ данной таблицы дает определение параметров Стокса при изменении поляризационного базиса:

- параметр  $S_1$  определяется как разность средних интенсивностей ортогональных составляющих волны в линейном опорном поляризационном базисе  $0, \pi/2$  ;

- параметр  $S_2$  определяется как разность средних интенсивностей ортогональных составляющих волны при анализе в линейном базисе  $\pm\pi/4$  , который повернут относительно опорного на  $\pi/4$  ;

- параметр  $S_3$  определяется как разность средних интенсивностей волн правой и левой круговой поляризации при анализе в круговом поляризационном базисе.

Таким образом, техника измерений значений параметров Стокса частично-поляризованных волн не представляет особых трудностей при наличии возможности для реализации указанных выше поляризационных базисов измерительной системы.

В заключение подраздела продемонстрируем инвариантность величины степени поляризации частично-поляризованной волны при преобразовании

поляризационного базиса. С этой целью запишем диагональную форму матрицу когерентности частично-поляризованной волны в исходном линейном поляризационном базисе  $0, \pi/2$

$$\|B_{jl}^{XY}\| = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}, \quad (2.120)$$

где  $A_1, A_2$  - собственные значения матрицы  $\|B_{jl}^{XY}\|$ , а величины  $Sp\|B_{jl}^{XY}\| = A_1 + A_2$ ,  $\det\|B_{jl}^{XY}\| = A_1 A_2$  есть её след и детерминант.

Степень поляризации волны определяется выражением (2.45):

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{4 \det\|B_{jl}^{XY}\|}{Sp^2\|B_{jl}^{XY}\|} \right]^{0.5} = \left[ 1 - \frac{2A_1 A_2}{(A_1 + A_2)^2} \right]^{0.5} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}.$$

Преобразуем теперь матрицу (2.120) вначале в круговой поляризационный базис  $RL$ , а затем в базис  $\pm\pi/4$ , повернутый на  $\pi/4$  относительно исходного базиса  $OXY$ :

$$\|B_{jl}^{RL}\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_1 + A_2 & -j(A_1 - A_2) \\ j(A_1 + A_2) & A_1 + A_2 \end{vmatrix}, \quad (2.121)$$

$$\|B_{jl}^{\pm\pi/4}\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_1 + A_2 & A_1 - A_2 \\ A_1 - A_2 & A_1 + A_2 \end{vmatrix}. \quad (2.122)$$

Нетрудно видеть, что как след, так и детерминант матрицы когерентности инвариантны к преобразованию поляризационного базиса:

$$Sp\|B_{jl}^{RL}\| = Sp\|B_{jl}^{\pm\pi/4}\| = Sp\|B_{jl}^{XY}\| = A_1 + A_2,$$

$$\det\|B_{jl}^{RL}\| = \det\|B_{jl}^{\pm\pi/4}\| = \det\|B_{jl}^{XY}\| = A_1 A_2.$$

Это обусловлено тем фактом, что комбинация инвариантов также представляет собой инвариант. В связи с изложенным, степень поляризации частично-поляризованной волны, определяемая выражением (2.45), является величиной, инвариантной к преобразованиям поляризационного базиса.

## **2.7. Особые базисы матрицы когерентности.**

Анализ частично-поляризованных волн, проведенный в предыдущих подразделах, был реализован с использованием конкретных поляризационных базисов. Были использованы в основном линейный поляризационный базис с различной ориентацией, а также круговой поляризационный базис. Кроме того, в подразделе 2.4 с целью построения общей формы (2x2) матрицы когерентности частично-поляризованная волна была представлена в специфической ортогональной системе координат, образованной собственными векторами матрицы когерентности.

Последний пример показывает, что при изучении частично-поляризованных волн выбор базиса может обеспечить физически ясный результата анализа и облегчить интерпретацию свойств волны. В связи с этим целесообразно рассмотреть некоторые частные случаи поляризационных базисов, обладающих особыми свойствами (как, например, базис, образованный собственными векторами матрицы когерентности). Также базисы называются особыми поляризационными базисами частично-поляризованной волны [5,10].

Напомним, что преобразование поляризационного базиса является унитарным линейным преобразованием, оператор которого  $\dot{Q}$  представляет собой в общем случае комплексную матрицу (2x2). Вектор Джонса частично-поляризованной волны в новом базисе определяется выражением  $\dot{E}'(t) = \dot{Q}\dot{E}(t)$ , а матрица когерентности волны в новом базисе в соответствии с соотношением (2.109) имеет вид  $\|B'_{jl}\| = \dot{Q}^+ \|B_{jl}\| \dot{Q}$ , где (+) - символ эрмитова сопряжения. Перейдем теперь к рассмотрению особых базисов матрицы когерентности.

### **2.7.1 Первый особый базис.**

Прежде всего необходимо отметить, что, в отличие от степени поляризации  $\gamma$ , величина модуля нормированного внедиагонального элемента матрицы когерентности

$$|\dot{b}_{XY}| = \frac{|\dot{B}_{XY}|}{\sqrt{B_{XX}} \sqrt{B_{YY}}} \quad (2.123)$$

зависит от выбора системы координат. Поскольку этот элемент определяет меру корреляции (когерентности) проекций вектора Джонса частично-поляризованной волны, его величина заключена в пределах  $0 \leq |\dot{b}_{XY}| \leq 1$ , и, как это будет показано, не может превысить величину степени поляризации волны. Подставим в выражение (2.45) для степени поляризации волны развернутые выражения для детерминанта и следа матрицы когерентности и возведем правую и левую части в квадрат:

$$\gamma^2 = 1 - \frac{(B_{XX} B_{YY} - \dot{B}_{XY} \dot{B}_{YX})}{\left[0.5 B_{XX} + B_{YY}\right]^2}.$$

Поскольку вследствие эрмитовости матрицы когерентности  $\dot{B}_{XY} \dot{B}_{YX} = |\dot{B}_{XY}|^2$ , то, учитывая соотношение (2.123), перепишем последнее выражение в виде

$$1 - \gamma^2 = \frac{B_{XX} B_{YY}}{\left[0.5 B_{XX} + B_{YY}\right]^2} \left[1 - |\dot{b}_{XY}|^2\right]. \quad (2.124)$$

Известно, что произведение любых двух положительных чисел не может превышать квадрата их среднеарифметического значения:

$$B_{XX} B_{YY} \leq \left[0.5 B_{XX} + B_{YY}\right]^2. \quad (2.125)$$

С учетом (2.125) из выражения (2.124) следует, что  $1 - \gamma^2 \leq 1 - |\dot{b}_{XY}|^2$ , т.е.

$$\gamma \geq \|\dot{b}_{XY}\|. \quad (2.126)$$

Знак равенства в (2.126) достигается тогда и только тогда, когда интенсивности ортогональных составляющих равны между собой, как это видно из соотношений (2.125) и (2.124). Система координат, в которой это условие выполняется, может быть найдена поворотом исходной системы координат  $XOY$  на некоторый угол  $\theta$  с использованием оператора

$$\|R \theta\| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

При этом повороте матрица когерентности  $\|B_{jl}\|$  трансформируется в матрицу

$$\|B'_{jl}\| = \begin{vmatrix} B'_{XX} & \dot{B}'_{XY} \\ \dot{B}'_{YX} & B'_{YY} \end{vmatrix}, \quad (2.127)$$

элементы которой определяются выражениями

$$\begin{aligned} B'_{XX} &= B_{XX} C_\theta^2 + B_{YY} S_\theta^2 + \dot{B}_{XY} + B_{YX} C_\theta S_\theta; \\ \dot{B}'_{XY} &= \dot{B}_{YY} - B_{XX} C_\theta S_\theta + B_{XY} C_\theta^2 - B_{YX} S_\theta^2; \\ \dot{B}'_{YX} &= \dot{B}_{YY} - B_{XX} C_\theta S_\theta + \dot{B}_{YX} C_\theta^2 - \dot{B}_{XY} S_\theta^2; \\ B'_{YY} &= B_{XX} S_\theta^2 + B_{YY} C_\theta^2 - \dot{B}_{XY} + B_{YX} C_\theta S_\theta. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Здесь введены обозначения  $\cos \theta \equiv C_\theta$ ;  $\sin \theta \equiv S_\theta$ , которые будут использоваться и в дальнейшем.

Выпишем отдельно диагональные элементы трансформированной матрицы когерентности, определяемые выражениями (128):

$$\left. \begin{aligned} B'_{XX} &= B_{XX} C_\theta^2 + B_{YY} S_\theta^2 + \dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX} C_\theta S_\theta \\ B'_{YY} &= B_{XX} S_\theta^2 + B_{YY} C_\theta^2 - \dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX} C_\theta S_\theta \end{aligned} \right\}. \quad (2.128a)$$

Нетрудно показать, что равенство элементов  $B'_{XX} = B'_{YY}$  в (2.128) достигается при повороте системы координат на угол

$$\theta = 0.5 \arctg \left[ \frac{B_{YY} B_{XX}}{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}} \right]. \quad (2.129)$$

Таким образом, всегда существует система координат, в которой интенсивности проекций вектора Джонса частично-поляризованной волны равны между собой и определяются как

$$B'_{XX} = B'_{YY} = 0.5 (B_{XX} + B_{YY}). \quad (2.129a)$$

Найдем теперь нормированный модуль коэффициента корреляции (степень когерентности)  $|\dot{b}'_{XY}|$  проекций вектора Джонса в системе координат, повернутой на угол  $\theta$ . Для этого перепишем второе из выражений (2.128) в виде

$$\dot{B}'_{XY} = 0.5 \dot{B}_{YY} - B_{XX} S_{2\theta} + \dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX} C_{2\theta} + \dot{B}_{XY} - B_{YX} \quad (2.129б)$$

Используя выражение (2.129), определим тригонометрические функции

$$\cos 2\theta = \frac{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}{\sqrt{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}^2 + B_{XX} - B_{YY}};$$

$$\sin 2\theta = \frac{B_{YY} - B_{XX}}{\sqrt{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}^2 + B_{XX} - B_{YY}},$$

подставим эти функции в выражение (2.129б) и, используя соотношение (2.129а), найдем нормированное значение внедиагонального элемента матрицы когерентности  $\|B'_{jl}\|$

$$\dot{b}'_{XY} = \frac{\dot{B}'_{XY}}{\sqrt{B'_{XX}} \sqrt{B'_{YY}}} = \frac{1}{B_{XX} + B_{YY}} \left\{ \frac{B_{YY} - B_{XX}}{\sqrt{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}^2 + B_{XX} - B_{YY}} + \frac{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}{\sqrt{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}}^2 + B_{XX} - B_{YY}} + \dot{B}_{XY} - \dot{B}_{YX} \right\}.$$

С учетом того, что определитель матрицы когерентности  $\|B'_{jl}\|$  равен  $\det \|B'_{jl}\| = B_{XX} B_{YY} - \dot{B}_{XY} \dot{B}_{YX}$ , а  $\dot{B}_{XY} \dot{B}_{YX} = |\dot{B}_{XY}|^2 = \text{Re}^2 \dot{B}_{XY} + \text{Im}^2 \dot{B}_{XY}$ , модуль нормированного внедиагонального элемента может быть найден в виде

$$\dot{b}'_{XY} = \frac{\sqrt{\dot{B}'_{XY} \dot{B}'_{XY*}}}{\sqrt{B'_{XX}} \sqrt{B'_{YY}}} = \left[ 1 - \frac{4 \det \|B_{jl}\|}{Sp^2 \|B_{jl}\|} \right]^{0.5} \quad (2.129в)$$

Таким образом, модуль нормированного коэффициента корреляции поляризационно ортогональных составляющих в системе координат, повернутой на угол

$$\theta = 0.5 \arctg \left[ \frac{B_{YY} B_{XX}}{\dot{B}_{XY} + \dot{B}_{YX}} \right]$$

относительно исходной системы координат, принимает максимально возможное значение, равное степени поляризации частично поляризованной волны.

Систему координат, обладающую указанными качествами, называют первым особым базисом частично-поляризованной волны [5].

### 2.7.2. Второй особый базис.

В подразделе 2.4 было доказано, что матрица когерентности представляет собой эрмитову, неотрицательно определенную матрицу. В связи с этим для всякой матрицы когерентности  $\|B_{jl}\|$  существует унитарное матричное преобразование  $\hat{P}$ , такое, что

$$\hat{P}^+ \|B_{jl}\| \hat{P} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \|B_{jl}^{(0)}\|, \quad (2.130)$$

где  $A_1, A_2$  неотрицательные собственные значения. Преобразование (2.130), как это неоднократно указывалось ранее, есть не что иное, как результат вычисления матрицы когерентности для вектора Джонса  $\vec{E}(t)$  после некоторого унитарного преобразования, совершаемого над исходным вектором  $\vec{E}(t)$ :

$$\|B_{jl}^{(0)}\| = \left\langle \left[ \hat{P} \vec{E}(t) \right]^+ \otimes \left[ \hat{P} \vec{E}(t) \right] \right\rangle = \hat{P}^+ \left\langle \vec{E}^+(t) \otimes \vec{E}(t) \right\rangle \hat{P} = \hat{P}^+ \|B_{jl}\| \hat{P}.$$

При этом можно считать, что оператор  $\hat{P}$  описывает гипотетическое устройство (прибор), который исключает корреляционную связь между проекциями исходного вектора Джонса без потерь энергии. Таким образом, преобразованная матрица когерентности (2.130) позволяет рассматривать частично-поляризованную волну после унитарного преобразования  $\hat{P}$  как сумму двух ортогонально-поляризованных, некоррелированных волн, обладающих интенсивностью

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0,5\langle I \rangle(1 + \gamma) \\ A_2 &= 0,5\langle I \rangle(1 - \gamma) \end{aligned} \right\}, \quad (2.131)$$

где  $\gamma$  - степень поляризации волны.

При выводе соотношений (2.131) в выражения для собственных чисел матрицы когерентности

$$A_{1/2} = 0,5Sp \| B_{jl} \| \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \det \| B_{jl} \|}{Sp^2 \| B_{jl} \|}} \right]$$

были подставлены величины

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{4 \det \| B_{jl} \|}{Sp^2 \| B_{jl} \|}}, \quad Sp \| B_{jl} \| = \langle I \rangle.$$

Систему координат, в которой частично-поляризованная волна представлена двумя некоррелированными (некогерентными) компонентами, называют вторым особым базисом матрицы когерентности частично-поляризованной волны [5,9]. Этот базис может эффективно использоваться при построении статистических моделей частично-поляризованных волн.

Столбцы унитарной матрицы  $\hat{P}$  преобразования (2.130) представляют собой собственные векторы матрицы когерентности  $\| B_{jl} \|$ :

$$\hat{P} = \left\| \begin{array}{cc} \dot{m}_1 & \dot{n}_1 \\ \dot{m}_2 & \dot{n}_2 \end{array} \right\|. \quad (2.132)$$

Таким образом, для построения матрицы (2.132) необходимо найти собственные векторы  $\dot{m}; \dot{n}$ , матрицы  $\| B_{jl} \|$ .

Запишем в развернутом виде системы уравнений (2.65г), определяющие собственные векторы матрицы когерентности:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} - A_1 \dot{m}_1 + \dot{b}_{12} \dot{m}_2 &= 0 \\ \dot{b}_{21} \dot{m}_1 + \dot{b}_{22} - A_1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.133a)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} - A_2 \dot{n}_1 + \dot{b}_{12} \dot{n}_2 &= 0 \\ \dot{b}_{21} \dot{n}_1 + \dot{b}_{22} - A_2 \dot{n}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.133б)$$

Системы однородных уравнений (2.133а,б) могут быть разрешены, поскольку соответствующие определители равны нулю:

$$\Delta_1 = b_{11} - A_1 \quad b_{22} - A_1 \quad -|b_{12}|^2 = 0,$$

$$\Delta_2 = b_{11} - A_2 \quad b_{22} - A_2 \quad -|b_{12}|^2 = 0.$$

Последнее нетрудно доказать, используя соотношения

$$b_{11} b_{22} - |b_{12}|^2 = A_1 A_2, \quad b_{11} + b_{22} = A_1 + A_2.$$

Используя системы уравнений (2.133а,б) образуем два отношения

$$\dot{r}_1 = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{A_1 - b_{11}}{b_{12}} = \frac{\dot{b}_{21}}{A_1 - b_{22}}, \quad (2.134а)$$

$$\dot{r}_2 = \frac{\dot{n}_2}{\dot{n}_1} = \frac{A_2 - b_{11}}{b_{12}} = \frac{\dot{b}_{21}}{A_2 - b_{22}}. \quad (2.134б)$$

Из свойства унитарности  $\hat{P}^+ \hat{P} = \|\delta_{jl}\|$  следует, что

$$|\dot{m}_1|^2 + |\dot{m}_2|^2 = 1; \quad |\dot{n}_1|^2 + |\dot{n}_2|^2 = 1; \quad (2.135а)$$

$$m_1^* \dot{n}_1 + \dot{m}_2^* \dot{n}_2 = 0; \quad \dot{n}_1^* \dot{m}_1 + \dot{n}_2^* \dot{m}_2 = 0. \quad (2.135б)$$

Использование уравнений (2.135а) совместно с уравнениями (2.134а,б) позволяет определить модули проекций собственных векторов

$$\begin{aligned} |m_1| &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{r}_1|^2}} = \frac{A_1 - b_{22}}{\sqrt{A_1 - b_{22}}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}; \\ |m_2| &= \frac{|\dot{r}_1|}{\sqrt{1 + |\dot{r}_1|^2}} = \frac{|b_{12}|}{\sqrt{A_1 - b_{22}}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}; \\ |n_1| &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{r}_2|^2}} = \frac{A_1 - b_{22}}{\sqrt{A_1 - b_{22}}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}; \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$|n_2| = \frac{|\dot{r}_2|}{\sqrt{1+|\dot{r}_2|^2}} = \frac{|b_{12}|}{\sqrt{A_1 - b_{22}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}}.$$

Аргументы проекций собственных векторов определяются с использованием (2.135б) и (2.134а,б):

$$\arg \dot{m}_1 = 0; \arg \dot{m}_2 = -\arg \dot{b}_{12}; \arg \dot{n}_2 = 0; \arg \dot{n}_1 = \arg \dot{b}_{12}. \quad (2.137)$$

Обозначив  $\arg \dot{b}_{12} = \varphi_{12}$ , запишем окончательно унитарную матрицу  $\hat{P}$  в виде

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{A_1 - b_{22}}{\sqrt{A_1 - b_{22}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}} & \frac{A_2 - b_{22} e^{i\varphi_{12}}}{\sqrt{A_2 - b_{22}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}} \\ \frac{|b_{12}| e^{-i\varphi_{12}}}{\sqrt{A_1 - b_{22}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}} & \frac{|b_{12}|}{\sqrt{A_2 - b_{22}^2 + |\dot{b}_{12}|^2}} \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

Нетрудно убедиться прямой проверкой, что матрица (2.138) удовлетворяет условию  $\hat{P}^+ \hat{P} = \|\delta_{jl}\|$ .

Форма столбцов матрицы  $\hat{P}$  свидетельствует о том, что собственные векторы  $\dot{m}$  и  $\dot{n}$  матрицы когерентности можно рассматривать как полностью поляризованные волны с ортогональными эллипсами поляризации. В полной поляризованности этих волн нетрудно убедиться, построив их матрицы когерентности на основе использования собственных векторы  $\dot{m}$  и  $\dot{n}$

$$\|F_{jl}^{(1)}\| = \dot{m}^+ \otimes \dot{m}; \|F_{jl}^{(2)}\| = \dot{n}^+ \otimes \dot{n}.$$

Детерминанты матриц  $\|F_{jl}^{(1)}\|$  и  $\|F_{jl}^{(2)}\|$  равны нулю, что и свидетельствует о полной поляризованности волн, отвечающих собственным векторам матрицы  $\|B_{il}\|$ .

## **2.8 Степень поляризации суммы некоррелированных потоков излучения.**

К сожалению, теорема Стокса для аддитивных потоков излучения не позволяет провести анализ возможного влияния различия в ориентации

собственных базисов матриц когерентности слагаемых потоков на степень поляризации суммарной волны. При проведении анализа автоматически предполагается, что ориентация собственных векторов матриц когерентности потоков совпадает. Однако однозначный ответ может быть получен только при проведении анализа в единой системе координат, позволяющей связать собственные базисы суммируемых и суммарного потоков. Такой анализ может быть проведен с использованием методов, развитых выше при получении общей формы матрицы когерентности [8].

Предположим, что заданы две некоррелированные частично-поляризованные волны с совпадающими волновыми векторами. Каждая из этих волн обладает (2x2) матрицей когерентности ранга  $R=2$ . Обозначим матрицы когерентности слагаемых волн как  $\|B_{ji}^{(1)}\|$  и  $\|B_{ji}^{(2)}\|$ , а матрицу когерентности суммарной волны как  $\|B_{ji}\|$ .

Комплексные векторы суммируемых и суммарного потоков определяются как

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}^1 t &= \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_1^1 t \\ \dot{E}_2^1 t \end{array} \right\|; & \dot{\vec{E}}^2 t &= \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_1^2 t \\ \dot{E}_2^2 t \end{array} \right\|; \\ \dot{\vec{E}} t &= \dot{\vec{E}}^1 t + \dot{\vec{E}}^2 t + \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_1^1 t + \dot{E}_1^2 t \\ \dot{E}_2^1 t + \dot{E}_2^2 t \end{array} \right\| \end{aligned}$$

соответственно.

Системы собственных векторов матриц когерентности слагаемых волн примем за базисные системы координат. В общем случае эти координатные системы ориентированы произвольно одна относительно другой.

Примем также условия нормирования базисов в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \dot{a}_j^1 \dot{a}_j^{1*} = \sum_{j=1}^2 \dot{b}_j^1 \dot{b}_j^{1*} = 1; \\ \sum_{j=1}^2 \dot{a}_j^2 \dot{a}_j^{2*} = \sum_{j=1}^2 \dot{b}_j^2 \dot{b}_j^{2*} = 1; \sum_{j=1}^2 \dot{a}_j \dot{a}_j^* = \sum_{j=1}^2 \dot{b}_j \dot{b}_j^* = 1; \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

где  $\dot{\vec{a}}^1; \dot{\vec{b}}^1; \dot{\vec{a}}^2; \dot{\vec{b}}^2; \dot{\vec{a}}; \dot{\vec{b}}$  - системы собственных векторов (в общем случае комплексных) матриц когерентности  $\|B_{jl}^{(1)}\|$ ,  $\|B_{jl}^{(2)}\|$  слагаемых волн и матрицы когерентности  $\|B_{jl}\|$  суммарной волны соответственно (См. Рис. 2.2).

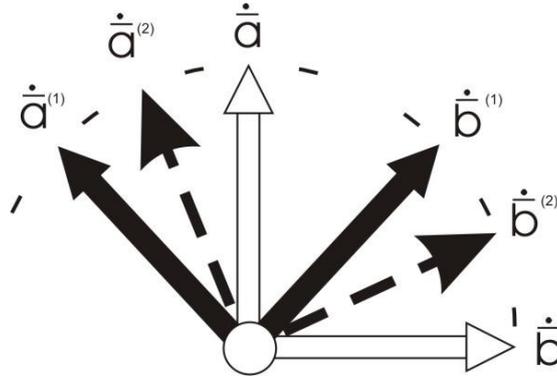


Рис. 2.2

Представим комплексные векторы  $\dot{\vec{E}}^1 t$  и  $\dot{\vec{E}}^2 t$  суммируемых потоков проекциями на собственные векторы отвечающих этим потокам матриц когерентности:

$$\dot{\vec{E}}^1 t = E_a^1 t \dot{\vec{a}}^1 + E_b^1 t \dot{\vec{b}}^1; \quad (2.140a)$$

$$\dot{\vec{E}}^2 t = E_a^2 t \dot{\vec{a}}^1 + E_b^2 t \dot{\vec{b}}^2, \quad (2.140б)$$

где

$$\dot{\vec{E}}_a^1 t = \sum_{j=1}^2 E_j^1 t \dot{a}_j^{1*}; \quad \dot{\vec{E}}_b^1 t = \sum_{j=1}^2 E_j^1 t \dot{b}_j^{1*};$$

$$\dot{\vec{E}}_a^2 t = \sum_{j=1}^2 E_j^2 t \dot{a}_j^{2*}; \quad \dot{\vec{E}}_b^2 t = \sum_{j=1}^2 E_j^2 t \dot{b}_j^{2*};$$

Выражения (2.140а,б) позволяют записать комплексный вектор суммарного потока  $\dot{\vec{E}} t$  проекциями на орты собственного базиса  $\dot{\vec{a}}; \dot{\vec{b}}$  его матрицы когерентности  $\|B_{jl}\|$  с использованием представления комплексных векторов слагаемых волн  $\dot{\vec{E}}^1 t$  и  $\dot{\vec{E}}^2 t$  в собственных базисах  $\dot{\vec{a}}^1, \dot{\vec{b}}^1$  и  $\dot{\vec{a}}^2, \dot{\vec{b}}^2$  матриц когерентности  $\|B_{jl}^{(1)}\|$ ,  $\|B_{jl}^{(2)}\|$  этих волн:

$$\dot{\vec{E}} \ t = \dot{E}_a \ t \ \dot{\vec{a}} + \dot{E}_b \ t \ \dot{\vec{b}}, \quad (2.141)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{E}_a \ t = & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ E_j^1 \ t \ \dot{a}_j^{1*} \right] \dot{a}_l^1 \ a_l^* + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ E_j^2 \ t \ \dot{a}_j^{2*} \right] \dot{a}_l^2 \ a_l^* + \\ & + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \dot{E}_j^1 \ t \ \dot{b}^{1*} \right] \dot{b}_l^1 \ a_l^* + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \dot{E}_j^2 \ t \ \dot{b}_j^{2*} \right] \dot{b}_l^2 \ a_l^*, \end{aligned} \quad (2.142a)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_b \ t = & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ E_j^1 \ t \ \dot{a}_j^{1*} \right] \dot{a}_l^1 \ \dot{b}_l^* + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ E_j^2 \ t \ \dot{a}_j^{2*} \right] \dot{a}_l^2 \ \dot{b}_l^* + \\ & + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \dot{E}_j^1 \ t \ \dot{b}^{1*} \right] \dot{b}_l^1 \ \dot{b}_l^* + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \dot{E}_j^2 \ t \ \dot{b}_j^{2*} \right] \dot{b}_l^2 \ \dot{b}_l^*. \end{aligned} \quad (2.142б)$$

Учитывая, что, по определению собственных векторов, для матриц  $\| B_{jl} \|$ ,  $\| B_{jl}^{(1)} \|$ ,  $\| B_{jl}^{(2)} \|$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 B_{jl} \dot{a}_j &= A_1 \dot{a}_l; \quad \sum_{j=1}^2 B_{jl} \dot{b}_j = A_2 \dot{b}_l, \\ \sum_{j=1}^2 B_{jl}^1 \dot{a}_j^1 &= A_1^1 \dot{a}_l^1; \quad \sum_{j=1}^2 B_{jl}^2 \dot{b}_j^1 = A_2^1 \dot{b}_l^1, \\ \sum_{j=1}^2 B_{jl}^2 \dot{a}_j^2 &= A_1^2 \dot{a}_l^2; \quad \sum_{j=1}^2 B_{jl}^2 \dot{b}_j^2 = A_2^2 \dot{b}_l^2 \end{aligned}$$

и используя условия нормировки (2.139), видим, что для суммарной волны

$$\langle | E_a |^2 \rangle = A_1; \quad \langle | E_b |^2 \rangle = A_2,$$

а для слагаемых волн

$$\begin{aligned} \langle | E_a^1 |^2 \rangle &= A_1^1; \quad \langle | E_b^1 |^2 \rangle = A_2^1 \\ \langle | E_a^2 |^2 \rangle &= A_1^2, \quad \langle | E_b^2 |^2 \rangle = A_2^2. \end{aligned}$$

Здесь  $A_i^k$ ,  $i, k = 1, 2$  - собственные значения матриц когерентности слагаемых волн. Принимая во внимание некоррелированность слагаемых волн, запишем собственные значения  $A_{1,2}$  матрицы когерентности суммарной волны в виде

$$\begin{aligned} \langle |E_a|^2 \rangle = A_1 = & A_1^1 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{a}_l^1 \dot{a}_l^{*1} \dot{a}_j^1 \dot{a}_j^{*1} + A_1^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{a}_l^2 \dot{a}_l^{*2} \dot{a}_j^2 \dot{a}_j^{*2} + \\ & + A_2^1 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{b}_l^1 \dot{b}_l^{*1} \dot{a}_j^1 \dot{a}_j^{*1} + A_2^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{b}_l^2 \dot{b}_l^{*2} \dot{a}_j^2 \dot{a}_j^{*2}, \end{aligned} \quad (2.143a)$$

$$\begin{aligned} \langle |E_b|^2 \rangle = A_2 = & A_1^1 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{a}_l^1 \dot{b}_l^{*1} \dot{a}_j^1 \dot{b}_j^{*1} + A_1^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{a}_l^2 \dot{b}_l^{*2} \dot{a}_j^2 \dot{b}_j^{*2} + \\ & + A_2^1 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{b}_l^1 \dot{b}_l^{*1} \dot{b}_j^1 \dot{b}_j^{*1} + A_2^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{b}_l^2 \dot{b}_l^{*2} \dot{b}_j^2 \dot{b}_j^{*2}. \end{aligned} \quad (2.143б)$$

Таким образом, собственные числа матрицы когерентности суммарной волны выражены в виде взвешенных сумм собственных чисел матриц когерентности слагаемых волн. Весовыми коэффициентами являются квадраты скалярных произведений собственных векторов, которые, в соответствии с условиями нормировки (2.139) равны квадратам косинусов углов, определяющим ориентацию систем собственных векторов  $\dot{a}^1, \dot{b}^1$ ;  $\dot{a}^2, \dot{b}^2$  матриц когерентности слагаемых волн относительно системы собственных векторов  $\dot{a}, \dot{b}$  матрицы когерентности суммарной волны. Перепишем (2.143) в более компактном виде

$$A_1 = A_1^1 K_1^a + A_1^2 K_2^a + A_2^1 K_3^a + A_2^2 K_4^a; \quad (2.144a)$$

$$A_2 = A_1^1 K_1^b + A_1^2 K_2^b + A_2^1 K_3^b + A_2^2 K_4^b. \quad (2.144б)$$

Из геометрических соображений и с учетом того, что весовые коэффициенты есть квадраты косинусов, следует

$$\left. \begin{aligned} K_1^a = K_3^b = K_1; K_3^a = K_1^b = K_3; \\ K_2^a = K_4^b = K_2; K_4^a = K_2^b = K_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

Нетрудно показать, что при любой ориентации систем собственных векторов слагаемых волн относительно системы собственных векторов суммарной волны выполняются тождества  $K_1 + K_3 \equiv 1; K_2 + K_4 \equiv 1$ . Отсюда полная мощность суммарной волны определяется как

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$

чего и следовало ожидать.

Определим теперь общую форму матрицы когерентности суммарного потока. Полагая, что  $\dot{\vec{A}} = \sqrt{A_1} \dot{\vec{a}}, \dot{\vec{B}} = \sqrt{A_2} \dot{\vec{b}}$ , в соответствии с методикой построения общей формы матрицы когерентности (см. подраздел 2.4) получим

$$\|B_{jl}\| = \|\dot{A}_j \dot{A}_l^* + \dot{B}_j \dot{B}_l^*\|. \quad (2.146)$$

Используя соотношение  $\dot{A}_j \dot{A}_l^* / A^2 + \dot{B}_j \dot{B}_l^* / B^2 = \delta_{jl}$  и выражения (2.144), (2.145) запишем окончательно общую форму матрицы когерентности суммарной волны

$$\begin{aligned} \|B_{jl}\| = & \left[ K_3 A_1^1 + K_4 A_1^2 + K_1 A_2^1 + K_2 A_2^2 \right] \|\delta_{jl}\| + \\ & + \left[ 1 - \frac{K_3 A_1^1 + K_4 A_1^2 + K_1 A_2^1 + K_2 A_2^2}{K_1 A_1^1 + K_2 A_1^2 + K_3 A_2^1 + K_4 A_2^2} \right] \|\dot{A}_j \dot{A}_l^*\|. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Степень поляризации суммарного потока излучения определим, используя собственные числа  $A_1, A_2$  его матрицы когерентности, определенные соотношениями (2.144). Тогда, с учетом (2.145), запишем:

$$\gamma_\Sigma = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\left[ A_1^1 - A_2^1 \right] K_1 - K_3 + \left[ A_1^{(2)} - A_2^2 \right] (K_2 - K_4)}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2}. \quad (2.148)$$

Преобразуем выражение (2.148) к виду взвешенной суммы

$$\gamma_\Sigma = \frac{\left[ A_1^1 + A_2^1 \right] K_1 - K_3}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2} \gamma_1 + \frac{\left[ A_1^{(2)} + A_2^2 \right] (K_2 - K_4)}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2} \gamma_2, \quad (2.149)$$

где величины

$$\gamma_1 = \frac{A_1^1 - A_2^1}{A_1^1 + A_2^1}; \gamma_2 = \frac{A_1^{(2)} - A_2^2}{A_1^{(2)} + A_2^2}$$

представляют собой степень поляризации суммируемых потоков, а коэффициенты

$$\frac{\left[ A_1^1 + A_2^1 \right] K_1 - K_3}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2}, \frac{\left[ A_1^{(2)} + A_2^2 \right] K_2 - K_4}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2}$$

учитывают как относительную мощность суммируемых волн, так и взаимную ориентацию систем собственных векторов матриц когерентности этих волн.

В случае если собственные векторы матриц когерентности слагаемых волн попарно совпадают с собственными векторами матрицы когерентности суммарной волны, то  $K_1 = K_2 = 1$ ,  $K_3 = K_4 = 0$  и выражение (2.149) превращается во взвешенную сумму вида

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{A_1^1 + A_2^1}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2} \gamma_1 + \frac{A_1^{(2)} + A_2^2}{A_1^1 + A_2^1 + A_1^{(2)} + A_2^2} \gamma_2, \quad (2.150)$$

весовые коэффициенты которой определяются только величиной относительной мощности слагаемых волн.

### ***2.9. Параметрическое описание суммы коррелированных потоков излучения с использованием системы матриц Дирака.***

Рассмотрим теперь обобщение параметрического описания плоских частично-поляризованных волн на случай коррелированных потоков излучения. До настоящего момента рассматривались только некоррелированные аддитивные потоки излучения, для которых была справедлива теорема Стокса.

Наличие корреляционной связи между потоками излучения (волнами) приводит к необходимости использования для описания суммарного потока (4x4) матрицы когерентности

$$\| M_{jl} \| = \left\langle \left\| \begin{matrix} \dot{E}_1^{1*} & t \\ \dot{E}_2^{1*} & t \\ \dot{E}_1^{2*} & t \\ \dot{E}_2^{2*} & t \end{matrix} \right\| \otimes \left\| \begin{matrix} \dot{E}_1^1 & t \\ \dot{E}_2^1 & t \\ \dot{E}_1^2 & t \\ \dot{E}_2^2 & t \end{matrix} \right\| \right\rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} & \dot{m}_{13} & \dot{m}_{14} \\ \dot{m}_{21} & \dot{m}_{22} & \dot{m}_{23} & \dot{m}_{24} \\ \dot{m}_{31} & \dot{m}_{32} & \dot{m}_{33} & \dot{m}_{34} \\ \dot{m}_{41} & \dot{m}_{42} & \dot{m}_{43} & \dot{m}_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.151)$$

где

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_1^1(t) \\ \dot{E}_2^1(t) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{E}_1^2(t) \\ \dot{E}_2^2(t) \end{vmatrix}$$

есть векторы Джонса суммируемых потоков,  $\|M_{11}\|, \|M_{22}\|$  - (2x2) матрицы когерентности, отвечающие этим потокам,  $\|M_{12}\|, \|M_{21}\|$  - (2x2) – матрицы, характеризующие взаимные когерентные свойства потоков.

Для построения параметрической системы описания суммы коррелированных потоков воспользуемся разложением (4x4) матрицы когерентности (2.151) по полной системе из 16 линейно-независимых матриц Дирака [37] разбив эти матрицы на 4 группы:  $\|\hat{D}_{0i}\|; \|\hat{D}_{1i}\|; \|\hat{D}_{2i}\|; \|\hat{D}_{3i}\|$ , где  $i = 0, 1, 2, 3$ :

$$\hat{D}_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \hat{D}_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\hat{D}_{02} = \begin{vmatrix} 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{D}_{03} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\hat{D}_{10} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{D}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \hat{D}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\hat{D}_{20} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{vmatrix}; \hat{D}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\
\hat{D}_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\hat{D}_{30} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \hat{D}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \\
\hat{D}_{32} &= \begin{vmatrix} 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & -j & 0 \end{vmatrix}; \hat{D}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Основными свойствами системы матриц Дирака являются следующие:

1.  $\|D_{ij}\|^2 = \|\delta_{ij}\|$ ;
2. Матрицы  $\|D_{ij}\|$  линейно-независимы;
3. Любая (4x4) матрица с постоянными элементами может быть записана в виде

$$\|M_{ij}\| = 0.25 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 S_{ij} \|D_{ij}\| \quad (i,j=0,1,2,3). \quad (2.152)$$

где коэффициенты разложения определяются по правилу

$$S_{ij} = Sp \left[ \|D_{ij}\| \|M\| \right] \quad (2.153)$$

и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
C_{00} &= m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44} ; C_{01} = 2 \operatorname{Re} m_{12} + 2 \operatorname{Re} m_{34} ; \\
C_{02} &= -[2 \operatorname{Im} m_{12} + 2 \operatorname{Im} m_{34}] ; C_{03} = m_{11} - m_{22} + m_{33} - m_{44} ; \\
C_{10} &= 2 \operatorname{Re} m_{13} + 2 \operatorname{Re} m_{24} ; C_{11} = 2 \operatorname{Re} m_{14} + 2 \operatorname{Re} m_{23} ; \\
C_{12} &= -[2 \operatorname{Im} m_{23} - 2 \operatorname{Im} m_{14}] ; C_{13} = 2 \operatorname{Re} m_{13} - 2 \operatorname{Re} m_{24} ; \\
C_{20} &= -[2 \operatorname{Im} m_{13} + 2 \operatorname{Im} m_{24}] ; C_{21} = -[2 \operatorname{Im} m_{14} - 2 \operatorname{Im} m_{23}] ; \\
C_{22} &= 2 \operatorname{Re} m_{23} - 2 \operatorname{Re} m_{14} ; C_{23} = -2 \operatorname{Im} m_{14} - 2 \operatorname{Im} m_{23} ; \\
C_{30} &= (m_{11} + m_{22}) (m_{33} + m_{44}) ; C_{31} = 2 \operatorname{Re} m_{12} - 2 \operatorname{Re} m_{34} ; \\
C_{32} &= -[2 \operatorname{Im} m_{12} - 2 \operatorname{Im} m_{34}] ; C_{33} = (m_{11} - m_{22}) (m_{33} - m_{44}) ;
\end{aligned} \right\} \quad (2.154)$$

Параметры  $C_{ij}$   $i, j, = 0, 1, 2, 3$  могут быть разделены на четыре группы:

- Группа параметров  $C_{0j}$   $i, j, = 0, 1, 2, 3$  представляет собой сумму параметров Стокса слагаемых потоков;

- Группа параметров  $C_{3j}$   $i, j, = 0, 1, 2, 3$  определяет преимущественный поток излучения, представляет собой разность параметров Стокса слагаемых потоков;

- Вторая и третья группы параметров  $C_{2j}$ ,  $C_{3j}$   $i, j, = 0, 1, 2, 3$  определяются взаимными корреляционными связями потоков и могут быть названы взаимными параметрами Стокса двух коррелированных потоков излучения. Для случая независимых потоков излучения параметры второй и третьей группы равны нулю.

16 величин, определяемых выражениями (2.154), называются обобщенными параметрами Стокса суммы двух коррелированных потоков излучения [8]. Элементы  $(4 \times 4)$  матрицы когерентности  $\|M\|$  могут быть представлены через обобщенные параметры Стокса в соответствии с выражением (2.152):

$$\begin{aligned}
m_{11} &= 0,25 [ C_{00} + C_{03} + C_{30} + C_{33} ]; & m_{12} &= 0,25 [ C_{01} + C_{31} - i C_{02} + C_{32} ]; \\
m_{13} &= 0,25 [ C_{01} + C_{13} - i C_{20} + C_{23} ]; & m_{14} &= 0,25 [ C_{11} - C_{22} - i C_{12} + C_{21} ]; \\
m_{21} &= 0,25 [ C_{01} + C_{31} + i C_{02} + C_{32} ]; & m_{22} &= 0,25 [ C_{00} + C_{30} - C_{03} - C_{33} ]; \\
m_{23} &= 0,25 [ C_{11} + C_{22} - i C_{21} - C_{12} ]; & m_{24} &= 0,25 [ C_{10} - C_{13} - i C_{20} - C_{23} ]; \\
m_{31} &= 0,25 [ C_{10} + C_{13} + i C_{20} + C_{23} ]; & m_{32} &= 0,25 [ C_{11} + C_{22} + i C_{21} - C_{12} ]; \\
m_{33} &= 0,25 [ C_{00} + C_{03} - C_{30} - C_{33} ]; & m_{34} &= 0,25 [ C_{01} - C_{31} - i C_{02} - C_{32} ]; \\
m_{41} &= 0,25 [ C_{11} - C_{22} + i C_{12} + C_{21} ]; & m_{42} &= 0,25 [ C_{10} - C_{13} + i C_{20} - C_{23} ]; \\
m_{43} &= 0,25 [ C_{01} - C_{31} + i C_{02} - C_{32} ]; & m_{44} &= 0,25 [ C_{00} + C_{03} - C_{03} - C_{30} ].
\end{aligned}$$

Теперь, используя обобщенные параметры Стокса, найдем степень поляризации суммы коррелированных потоков излучения.

### ***2.10. Степень поляризации суммы коррелированных потоков излучения.***

Запишем закон интерференции для суммы двух коррелированных потоков излучения, описываемой четырехмерным комплексным вектором

$$\dot{\vec{E}}_{\Sigma} \ t = \left\| \begin{array}{l} \dot{E}_1^1 \ t \\ \dot{E}_2^1 \ t \\ \dot{E}_1^2 \ t \\ \dot{E}_2^2 \ t \end{array} \right\|,$$

при тех же условиях определения закона интерференции, что и в подразделе 2.2 (т. е. выделяя интенсивность суммарной волны в направлении  $\theta$  при введении дополнительного фазового сдвига  $\varphi$  между поляризационными компонентами):

$$\begin{aligned}
I_{\Sigma} \theta, \varphi &= m_{11} \cos^2 \theta + m_{13} \cos^2 \theta + m_{12} \exp -i\varphi \cos \theta \sin \theta + \\
&+ m_{14} \exp -i\varphi \cos \theta \sin \theta + m_{31} \cos^2 \theta + m_{33} \cos^2 \theta + m_{32} \exp -i\varphi \cos \theta \sin \theta + \\
&+ m_{34} \exp -i\varphi \cos \theta \sin \theta + m_{21} \exp i\varphi \cos \theta \sin \theta + m_{23} \exp i\varphi \cos \theta \sin \theta + \\
&+ m_{22} \sin^2 \theta + m_{24} \sin^2 \theta + m_{41} \exp i\varphi \cos \theta \sin \theta + \\
&+ m_{43} \exp i\varphi \cos \theta \sin \theta + m_{42} \sin^2 \theta + m_{44} \sin^2 \theta = \\
&= \left[ m_{11} + m_{33} + 2 \operatorname{Re} m_{13} \right] \cos^2 \theta + \left[ m_{22} + m_{44} + 2 \operatorname{Re} m_{24} \right] \sin^2 \theta + \\
&+ \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[ m_{12} \exp (-i\varphi) \right] + 2 \operatorname{Re} \left[ m_{34} \exp (-i\varphi) \right] + \right. \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left[ m_{14} \exp (-i\varphi) \right] + 2 \operatorname{Re} \left[ m_{32} \exp (-i\varphi) \right] \left. \right\} \cos \theta \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{2.155}$$

Часть выражения (2.155), заключенную в фигурные скобки, можно переписать как

$$\begin{aligned}
\dots &= \cos \varphi \left[ 2 \operatorname{Re} m_{12} + 2 \operatorname{Re} m_{34} + 2 \operatorname{Re} m_{14} + 2 \operatorname{Re} m_{32} \right] + \\
&+ \sin \varphi \left[ 2 \operatorname{Im} m_{12} + 2 \operatorname{Im} m_{34} + 2 \operatorname{Im} m_{14} + 2 \operatorname{Im} m_{32} \right]
\end{aligned}$$

или, с учетом соотношений (2.154) записать с использованием обобщенных параметров Стокса:

$$\dots = \cos \varphi \left[ C_{01} + C_{11} \right] + \sin \varphi \left[ C_{02} + C_{21} \right]. \tag{2.156}$$

Вводя дополнительный угол

$$\delta = \operatorname{arctg} \left[ \frac{C_{02} + C_{21}}{C_{01} + C_{11}} \right]$$

для которого

$$\begin{aligned}
\cos \delta &= \left[ C_{01} + C_{11} \right] \left[ C_{01} + C_{11} \right]^2 + \left[ C_{02} + C_{21} \right]^2 \right]^{-0,5}; \\
\sin \delta &= \left[ C_{02} + C_{21} \right] \left[ C_{01} + C_{11} \right]^2 + \left[ C_{02} + C_{21} \right]^2 \right]^{-0,5}
\end{aligned}$$

преобразуем (2.156) к виду

$$\dots = \left[ C_{01} + C_{11} \right]^2 + \left[ C_{02} + C_{21} \right]^2 \right]^{0,5} \cos \varphi - \delta. \tag{2.157}$$

Используя выражение (2.157) и учитывая (2.154), соотношение (2.155) после несложных преобразований запишем как

$$I_{\Sigma}(\theta, \varphi) = 0,5 \left\{ [C_{00} + C_{10}] + [C_{03} + C_{13}] \cos 2\theta + \left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos \varphi - \delta \sin 2\theta \right\}. \quad (2.158)$$

Теперь введем дополнительный угол

$$\eta = \arctg \frac{\left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos \varphi - \delta}{C_{03} + C_{13}};$$

$$\cos \eta = \frac{C_{03} + C_{13}}{C_{03} + C_{13} + \left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos^2 \varphi - \delta};$$

$$\sin \eta = \frac{\left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos \varphi - \delta}{C_{03} + C_{13} + \left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos^2 \varphi - \delta},$$

и преобразуем закон интерференции к наиболее удобной для анализа форме

$$I_{\Sigma}(\theta, \varphi) = 0,5 [C_{00} + C_{10}] + R \cos(2\theta - \eta), \quad (2.159)$$

где

$$R = \frac{\left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5}}{C_{03} + C_{13} + \left[ (C_{01} + C_{11})^2 + (C_{02} + C_{21})^2 \right]^{0,5} \cos^2 \varphi - \delta}. \quad (2.160)$$

Фиксируя значение фазового сдвига  $\varphi$ , найдем условные экстремумы интенсивности (2.159) при изменении угла ориентации поляризатора:

$$\left. \begin{aligned} I_{\Sigma MAX}(\varphi_0) &= 0,5 [C_{00} + C_{10} + R], \\ I_{\Sigma MIN}(\varphi_0) &= 0,5 [C_{00} + C_{10} - R], \end{aligned} \right\} \quad (2.161)$$

которые наблюдаются при значениях аргумента  $2\theta - \eta = 0$  и  $2\theta - \eta = \pi$ . Из выражения (2.160) следует, что условные экстремумы интенсивности переходят в абсолютные для значений фазового сдвига  $\varphi$ , вводимого компенсатором, которое обеспечивает выполнение равенства

$$R = R_{MAX} = C_{03} + C_{13}^2 + C_{01} + C_{11}^2 + C_{02} + C_{21}^2^{0,5}$$

в случае  $\cos^2 \varphi - \delta = 1$ . Итак, абсолютные экстремумы закона интерференции суммы двух коррелированных частично-поляризованных потоков излучения, представленные через обобщенные параметры Стокса, определяются как:

$$I_{\Sigma}^{MAX} = 0,5 \left\{ C_{00} + C_{10} + \left[ C_{03} + C_{13}^2 + C_{01} + C_{11}^2 + C_{02} + C_{21}^2 \right]^{0,5} \right\},$$

$$I_{\Sigma}^{MIN} = 0,5 \left\{ C_{00} + C_{10} - \left[ C_{03} + C_{13}^2 + C_{01} + C_{11}^2 + C_{02} + C_{21}^2 \right]^{0,5} \right\},$$

что позволяет найти видность суммарного закона интерференции, представляющую собой степень поляризации суммы двух коррелированных потоков излучения [8]:

$$W_{\Sigma} = \gamma_{\Sigma} = \frac{C_{03} + C_{13}^2 + C_{01} + C_{11}^2 + C_{02} + C_{21}^2^{0,5}}{C_{00} + C_{10}}. \quad (2.162)$$

Из анализа соотношений (2.154), определяющих структуру обобщенных параметров Стокса следует, что:

- обобщенный параметр  $C_{00} = S_0^1 + S_0^2$ , т. е. представляет собой сумму параметров Стокса  $S_0^i$   $i=1,2$  суммируемых потоков, а параметр  $C_{10}$  имеет смысл взаимной мощности одноименных компонент двумерных комплексных амплитуд суммируемых потоков  $C_{10} \equiv S_0^m$ , который мы обозначим как  $S_0^3$ ;

- суммы обобщенных параметров  $C_{03} + C_{13}$ ;  $C_{01} + C_{11}$ ;  $C_{02} + C_{21}$ , можно рассматривать как сумму параметров Стокса суммируемых потоков плюс «взаимные» параметры Стокса суммируемых потоков, обусловленные корреляционной связью:

$$C_{03} + C_{13} = S_1^1 + S_1^2 + S_1^3, \quad \text{где } S_1^3 \equiv C_{13};$$

$$C_{01} + C_{11} = S_2^1 + S_2^2 + S_2^3, \quad \text{где } S_2^3 \equiv C_{11};$$

$$C_{02} + C_{21} = S_3^1 + S_3^2 + S_3^3, \quad \text{где } S_3^3 \equiv C_{21}.$$

Учитывая изложенное, выражение (2.162) можно переписать в виде

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{\left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 S_1^i \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^3 S_2^i \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^3 S_3^i \right]^2 \right\}^{0,5}}{\sum_{i=1}^3 S_0^i}. \quad (2.163)$$

Последнее соотношение позволяет интерпретировать результирующую волну (поток излучения) как сумму трех волн (потоков); две из которых характеризуются обычными векторами Стокса  $\dot{S}^1 = S_0^1, S_1^1, S_2^1, S_3^1$ ,  $\dot{S}^2 = S_0^2, S_1^2, S_2^2, S_3^2$ , а третья представляет собой волну (поток) взаимной когерентности, характеризуемую вектором взаимных параметров Стокса  $\dot{S}^3 = S_0^3, S_1^3, S_2^3, S_3^3$ . Взаимные параметры Стокса определяются выражениями (2.154).

**2.11. Произвольно ориентированная плоская частично поляризованная волна и (3x3)матрица когерентности. Общая форма (3x3) матрицы когерентности. Степень поляризации произвольно ориентированной волны.**

В данной главе были рассмотрены проблемы анализа плоских, частично-поляризованных волн на основе использования (2x2) матрицы когерентности. Использование (2x2) матрицы когерентности возможно только для изолированной плоской волны, поскольку только в этом случае всегда может быть найдено такое преобразование системы координат, после которого волновой вектор  $\vec{k}$  будет совпадать с одной из осей декартовой системы координат (обычно вдоль оси  $OZ$ ). В этом случае электрический вектор волны будет представлен своими проекциями  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$  на оси  $OX$  и  $OY$ .

Однако при рассеянии волн на сложных радиолокационных объектах, обладающих случайным распределением рассеивающих центров,

электрический вектор рассеянного поля в дальней зоне будет представлять собой случайную функцию положения, определяемого некоторым радиус-вектором. В этом случае электрический вектор будет развиваться в каждой точке трехмерного пространства как случайный во времени процесс.

Локальная аппроксимация рассеянного поля плоской волной в некоторой точке с определением матрицы когерентности в этой точке не дает возможности правильного определения поляризационных свойств рассеянного поля. Попытка определения некоторой (3x3) матрицы когерентности, как локальной характеристики поля, также не позволяет учесть структуру рассеянного поля.

В этой связи, целью настоящего подраздела является корректное определение понятия (3x3) матрицы когерентности и степени поляризации плоской волны с произвольной ориентацией её волнового вектора в трехмерном пространстве [8].

Представим частично-поляризованное квазимонохроматическое поле как случайный процесс, развивающийся в пространстве и во времени, используя трехмерную декартову систему координат

$$\dot{\vec{E}}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \dot{E}_1(\vec{x}, t) \\ \dot{E}_2(\vec{x}, t) \\ \dot{E}_3(\vec{x}, t) \end{pmatrix}.$$

Будем полагать, что данное случайное поле статистически однородно и имеет нулевое среднее значение  $\langle \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t) \rangle = 0$ . Представляя анализируемое поле суперпозицией плоских волн вида  $\exp(j\vec{k} \cdot \vec{x})$  с использованием интеграла Фурье-Стилтьеса, запишем пространственно-временное спектральное разложение

$$\dot{E}_j(\vec{x}, t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int \exp[j\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}] d\dot{E}_j(\vec{k}, \omega) \quad (2.164)$$

для каждой декартовой координаты  $j=1,2,3$ .

Определим теперь корреляционный тензор случайного электромагнитного поля в виде

$$\|B_{jl} \vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2\| = \left\langle \dot{\vec{E}}^+ \vec{x}_1, t_1 \otimes \dot{\vec{E}} \vec{x}_2, t_2 \right\rangle \quad (2.165)$$

и предположим, что случайное поле  $\dot{\vec{E}}_{x,t}$  является статистически однородным и эргодичным. В этом случае выражение (2.165) можно переписать как

$$\dot{B}_{jl} \vec{r}, \tau = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int \exp \left[ j \omega \tau + \vec{k} \cdot \vec{r} \right] dF_{jl} \vec{k}, \omega, \quad (2.166)$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ ,  $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ , а  $\|dF_{jl} \vec{k}, \omega\| = \left\| \langle d\dot{\vec{E}}_j^* \vec{k}, \omega d\dot{\vec{E}}_l \vec{k}, \omega \rangle \right\|$ .

Если все элементы  $B_{jl} r, \tau$  корреляционного тензора  $\|B_{jl} r, \tau\|$  удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int \|B_{jl} \vec{r}, \tau\| d\vec{r} d\tau < \infty,$$

то можно перейти от интеграла Фурье-Стилтьеса (2.166) к пространственно-временному спектральному разложению в форме интеграла Фурье

$$\|B_{jl} \vec{r}, \tau\| = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int \|f_{jl} \vec{k}, \omega\| \exp \left[ j \omega \tau + \vec{k} \cdot \vec{r} \right] d\vec{k} d\omega, \quad (2.167a)$$

$$\|f_{jl} \vec{k}, \omega\| = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int \|B_{jl} \vec{r}, \tau\| \exp \left[ -j \omega \tau + \vec{k} \cdot \vec{r} \right] d\vec{r} d\tau. \quad (2.167b)$$

экспоненциальная функция  $\exp j \omega \tau + \vec{k} \cdot \vec{r}$  в выражении (2.167a)

представляет собой плоскую волну корреляции, удовлетворяющую обобщенному волновому уравнению [8,13], а матричная спектральная

плотность мощности  $\|f_{jl}(\vec{k}, \omega)\|$  есть матричная «амплитуда волны

корреляции». Выражение (2.167) может быть упрощено для случая, когда рассеянное случайное поле является квазимонохроматическим.

Перепишем выражение (2.167) в виде

$$\|B_{jl} \vec{r}, \tau\| = \int_{-\infty}^\infty \int \left[ \int_0^\infty \|f_{jl} \vec{k}, \omega\| \exp j \omega \tau d\omega \right] \exp \left[ j \vec{k} \cdot \vec{r} \right] d\vec{k}. \quad (2.168)$$

Интеграл в квадратных скобках представляет собой временное спектральное разложение матричной спектральной плотности мощности

$\exp\{j\vec{k} \cdot \vec{r}\}$ . Если время задержки  $\tau$  невелико, то этот интеграл может быть упрощен. Перепишем его в виде

$$\int_0^{\infty} \left\| f_{jl}(\vec{k}, \omega) \right\| \exp\left[ j(\omega - \omega_0)\tau \right] d\omega, \quad (2.169)$$

где  $\omega_0$  — средняя частота рассеянного поля. Поскольку рассеянное поле является квазимонохроматическим, оно удовлетворяет условию  $|\tau| \ll \Delta\omega^{-1}$ , где  $\Delta\omega$  — ширина спектра рассеянного поля. Нетрудно видеть, что  $|\omega - \omega_0|\tau \ll 1$  для всех частот спектральной полосы квазимонохроматического поля. Таким образом, можно воспользоваться аппроксимацией  $\exp\{j(\omega - \omega_0)\tau\} \approx 1$  и переписать интеграл (2.169) в виде

$$\int_0^{\infty} \left\| f_{jl}(\vec{k}, \omega) \right\| \exp\left[ j(\omega - \omega_0)\tau \right] d\omega \approx \int_0^{\infty} \left\| f_{jl}(\vec{k}, \omega) \right\| d\omega. \quad (2.170)$$

Учитывая результат (2.170), преобразуем выражение (2.168) к виду

$$\begin{aligned} \left\| B_{jl}(\vec{r}, \tau) \right\| &\approx \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp\left[ j\vec{k} \cdot \vec{r} \right] \left[ \int_0^{\infty} \left\| f_{jl}(\vec{k}, \omega) \right\| d\omega \right] d\vec{k} = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \left\| M_{jl}(\vec{k}) \right\| \exp\left[ j\vec{k} \cdot \vec{r} \right] d\vec{k}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Таким образом, пространственно-временное спектральное разложение преобразовано в пространственное спектральное разложение, в котором матрица

$$\left\| M_{jl}(\vec{k}) \right\| = \int_0^{\infty} \left\| f_{jl}(\vec{k}, \omega) \right\| d\omega$$

есть не что иное, как (3x3) матрица когерентности плоской, произвольно — ориентированной частично-поляризованной волны. Следовательно, (3x3) матрица когерентности представляет собой элемент пространственного

спектрального разложения корреляционного тензора случайного электромагнитного поля.

Теперь необходимо найти разложение (3x3) матрицы когерентности на матричные слагаемые, соответствующие полностью поляризованной и абсолютно неполяризованной составляющим частично-поляризованной произвольно – ориентированной волны. Ключевой проблемой для построения этого разложения является определение собственных чисел (3x3) матрицы когерентности и определение её общей формы. Проблема собственных чисел (3x3) матрицы когерентности тесно связана с электродинамическими свойствами рассеянного поля (в отличие от проблемы собственных чисел (2x2) матрицы когерентности).

Тот факт, что в дальней зоне рассеянное электромагнитное поле удовлетворяет условию соленоидальности (так называемый случай кулоновской калибровки, отвечающей поперечным колебаниям)

$$\operatorname{div} \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.172)$$

является хорошо известным.

Из соотношения (2.172) следует [8], что

$$\sum_{j=1}^3 k_j M_{jl} \vec{k} = 0. \quad (2.173)$$

Поскольку общая связь между матрицей размера (NxN) и её N-мерным собственным вектором имеет вид

$$\sum_{j=1}^n S_j M_{jl} = A_l,$$

то из уравнения (2.173) следует, что волновой вектор  $\vec{k}$  произвольно-ориентированной частично поляризованной волны является собственным вектором (3x3) матрицы когерентности этой волны. Этот собственный вектор соответствует нулевому собственному значению  $A=0$  (3x3) матрицы когерентности этой волны.

Для определения двух оставшихся собственных значений запишем вековое (характеристическое) уравнение для (3x3) матрицы когерентности

$$A^3 - A^2 Sp \parallel M_{jl} \vec{k} \parallel + A \sum_{i=1}^3 m_i \vec{k} = 0, \quad (2.174)$$

$m_i \vec{k}$  ( $i=1,2,3$ ) представляют собой главные миноры (3x3) матрицы когерентности  $\parallel M_{jl} \vec{k} \parallel$ . Принимая во внимание, что свободный член этого уравнения равен нулю, и учитывая условие

$$\prod_{i=1}^3 A_i = \det \parallel M_{jl} \vec{k} \parallel = 0,$$

нетрудно получить

$$A_{1/2} = 0,5 Sp \parallel M_{jl} \vec{k} \parallel \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4 \sum_{l=1}^3 \parallel m_l \vec{k} \parallel}{Sp^2 \parallel M_{jl} \vec{k} \parallel} \right)^{0.5} \right]. \quad (2.175)$$

Таким образом, матрица  $\parallel M_{jl} \vec{k} \parallel$  имеет три собственных вектора  $\dot{\vec{a}}, \dot{\vec{b}}, \dot{\vec{k}}$ , которым отвечают три собственных значения. Два собственных значения  $A_1$  и  $A_2$ , отличающиеся от нуля, соответствуют собственным векторам  $\dot{\vec{a}}$  и  $\dot{\vec{b}}$ . Собственный вектор  $\dot{\vec{k}}$  соответствует собственному значению  $\lambda_3 = 0$ . Этот собственный вектор определяет направление распространения волны. Следовательно, указанные собственные векторы формируют собственный базис (3x3) матрицы когерентности  $\parallel M_{jl} \vec{k} \parallel$ .

Разложим теперь электрический вектор  $\dot{\vec{E}}_{k,t}$  произвольно ориентированной частично поляризованной плоской волны в собственном базисе  $\dot{\vec{a}}, \dot{\vec{b}}, \dot{\vec{k}}$  (3x3) матрицы когерентности  $\parallel M_{jl} \vec{k} \parallel$ , используя равенство  $\vec{k} \cdot \vec{E}_{k,t} = 0$ :

$$\dot{\vec{E}}_{\vec{k},t} = \dot{\vec{E}}_a \vec{k},t \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{E}}_b \vec{k},t \dot{\vec{b}}.$$

Здесь  $\dot{E}_a \vec{k}, t = \sum_{i=1}^3 E_i \vec{k}, t \dot{a}_i^*$ ,  $\dot{E}_b \vec{k}, t = \sum_{i=1}^3 E_i \vec{k}, t \dot{b}_i^*$ . Нетрудно показать, что

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^3 \dot{E}_i \vec{k}, t \dot{a}_i^* \right|^2 \right\rangle = A_1 \vec{k}, \quad \left\langle \left| \sum_{i=1}^3 \dot{E}_i \vec{k}, t \dot{b}_i^* \right|^2 \right\rangle = A_2 \vec{k},$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^3 \dot{E}_i \vec{k}, t \dot{a}_i^* \dot{E}_i \vec{k}, t \dot{b}_i^* \right\rangle = 0.$$

Введем запись собственных векторов  $\dot{A} \vec{k}, \dot{B} \vec{k}$  в виде

$$\dot{A} \vec{k} = \dot{a} \sqrt{A_1 \vec{k}}, \quad \dot{B} \vec{k} = \dot{b} \sqrt{A_2 \vec{k}}.$$

С использованием этих обозначений можно получить общую форму (3x3) матрицы когерентности:

$$\| M_{jl} \vec{k} \| = \left\| \dot{A}_j^* \vec{k} \dot{A}_l \vec{k} \right\| + \left\| \dot{B}_j^* \vec{k} \dot{B}_l \vec{k} \right\|, \quad j, l = 1, 2, 3. \quad (2.176)$$

Учитывая, что

$$\frac{K_j K_l}{K^2} + \frac{\dot{A}_j^* \dot{A}_l}{A^2} + \frac{\dot{B}_j^* \dot{B}_l}{B^2} = \delta_{jl},$$

где  $\delta_{jl}$  - символ Кронекера, преобразуем выражение (2.176) для общей формы (3x3) матрицы когерентности к виду

$$\| M_{jl} \vec{k} \| = |B|^2 \left\| \delta_{jl} - \frac{K_j K_l}{K^2} \right\| + \dot{A}_j^* \dot{A}_l \left\| 1 - \frac{|B|^2}{|A|^2} \right\|. \quad (2.177)$$

Первое матричное слагаемое этого выражения представляет собой тензорную функцию волнового вектора  $\vec{k}$  и инвариантно относительно вращений и отображений [8]. Следовательно, это слагаемое удовлетворяет условию статистической изотропии и, в связи с этим, соответствует неполяризованной составляющей частично поляризованной произвольно ориентированной плоской волны.

Второе матричное слагаемое в выражении (2.177) соответствует полностью поляризованной составляющей этой волны, поскольку это слагаемое имеет ранг, равный единице.

Определим теперь мощность полностью поляризованной составляющей

$$\begin{aligned}
 P_1 &= Sp \left\| A_j^* \dot{A}_l \left( 1 - |B|^2 / |A|^2 \right) \right\| = \\
 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \left( 1 - |B|^2 / |A|^2 \right) = |A|^2 - |B|^2 \quad (2.178)
 \end{aligned}$$

и полную мощность произвольно ориентированной плоской волны

$$P_0 = Sp \left\| |B|^2 \delta_{jl} - K_j K_l / K^2 + \dot{A}_j^* \dot{A}_l \left( 1 - |B|^2 / |A|^2 \right) \right\| = |A|^2 + |B|^2. \quad (2.179)$$

Принимая во внимание уравнение (2.175), можно определить степень поляризации произвольно ориентированной частично поляризованной волны, обладающей (3x3) матрицей когерентности, в виде

$$\gamma = \frac{P_1}{P_0} = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A|^2 + |B|^2} = \left[ 1 - \frac{4 \sum_{l=1}^3 m_l \vec{k}}{Sp^2 \| M_{jl} \vec{k} \|} \right]^{0.5}, \quad (2.180)$$

где  $m_j$  ( $j=1,2,3$ ) главные миноры (3x3) матрицы когерентности  $\| M_{jl} \vec{k} \|$ .

Выражение (2.180) представляет собой обобщенное выражение для степени поляризации частично поляризованной волны [8], включающее в себя известное выражение (2.45)

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{4 \det B_{jl}}{Sp^2 B_{jl}} \right]^{0.5}$$

как частный случай, соответствующий ориентации волнового вектора волны вдоль оси  $OZ$ .

### **ГЛАВА 3**

## **ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРОСТЫМИ ПРИБОРАМИ**

Третья глава монографии посвящена изложению теории представлений преобразований поляризации структуры электромагнитных волн простыми приборами, не дающими дифракционного изображения. Использование излагаемого формализма позволит в дальнейшем ввести матричное описание как радиолокационного объекта, так и элементов радиолокационного канала, с учетом их поляризационных свойств.

### ***3.1 Простые приборы как элементы радиолокационного канала.***

В процессе радиолокационных измерений электромагнитная волна проходит последовательно ряд элементов радиолокационного канала, каждый из которых тем или иным образом изменяет состояние поляризации. В состав радиолокационного канала входят элементы, формирующие поляризацию излучаемого сигнала и преобразующие поляризацию рассеянного сигнала, антенное устройство, среда распространения, радиолокационный объект.

Из всех этих элементов только волноводные устройства принадлежат к тому классу приборов, для которых поляризация является основным свойством волны, подлежащим преобразованию. Остальные элементы оказывают воздействие не только на вид и форму поляризации, но и на распределение комплексной амплитуды поля в пространстве, что обусловлено процессами дифракции и рассеяния. Так, пространственное ограничение фронта плоской волны апертурой антенны определяет диаграмму направленности, представляющей собой дифракционное изображение поля в раскрыве антенны.

Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде сопровождается рассеянием на неоднородностях коэффициента преломления. Рассеяние волн радиолокационной целью происходит также в соответствии с законами дифракции. С точки зрения теории сигналов процесс дифракции можно рассматривать как преобразование пространственного спектра. В процессе дифракции происходит также и преобразование поляризации.

Таким образом, все элементы радиолокационного канала можно распределить на два класса:

1. Простые поляризационные приборы, не вносящие изменений в пространственный спектр волны, т.е. не дающие дифракционного изображения.
2. Элементы, преобразующие пространственный спектр поля в соответствии с законами дифракции.

К первому классу можно отнести различного вида поляризаторы, устройства вращения плоскости поляризации, фазосдвигающие устройства.

Второй класс элементов следует рассматривать одновременно и как поляризационные приборы, и как системы, создающие дифракционное изображение. При воздействии этих элементов на падающую волну одновременно изменяется и состояние поляризации и распределение комплексной амплитуды поля по направлениям волновых векторов плоских волн пространственного спектра.

В настоящей главе рассматривается взаимодействие волны с простыми поляризационными приборами, изменяющими состояние поляризации. При

этом используются следующие упрощающие предположения:

1. Радиолокационный сигнал представляется плоской однородной монохроматической волной.

2. Взаимодействие между радиолокационным сигналом и поляризационным прибором происходит без изменения частоты сигнала.

3. Основное внимание уделяется только тем характеристикам прибора, которые связывают входные и выходные состояния поляризации преобразуемой волны. Электродинамические аспекты, собственно и определяющие изменение состояния поляризации, строго и подробно не рассматриваются.

При построении математического, описания принципов действия простых приборов и эффектов преобразования состояния поляризации использованы способы представления состояний поляризации, изложенные в первой главе настоящей книги.

### ***3.2 Формализм матрицы Джонса.***

Рассмотрим плоскую волну, падающую на некоторый простой прибор. Будем считать при этом, что в результате взаимодействия волны с прибором на его выходе появляется только одна плоская волна, волновой вектор которой  $\vec{k}$  параллелен волновому вектору входной волны.

Входную и выходную волны будем задавать в системе координат  $XOY$ , которая служит началом отсчёта при поляризационных измерениях и называется опорным базисом. Выбор опорного базиса может быть произведён с учётом способа технической реализации антенного устройства. Так, например, его можно связать с выходным фланцем прямоугольного волновода, связывающего антенну с приемопередающим устройством, или с поляризационным разделителем устройства формирования поляризации излучения радара.

Входную и выходную волны зададим векторами Джонса  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  в

опорном базисе. При этом основной задачей является установление математической формы соотношений, связывающих входной и выходной векторы Джонса.

Кроме опорного базиса необходимо задать ещё одну систему координат, которая связывается непосредственно с физической средой или элементом, осуществляющим процесс формирования и преобразования поляризации электромагнитной волны.

Назовём эту систему собственной системой координат прибора, преобразующего поляризацию, и обозначим как  $X_0OY_0$ . Рассматривая физический смысл ортов собственной системы координат, отметим следующее: формирующие и преобразующие поляризацию элементы изменяют любую форму поляризации плоских волн поступающего на них излучения, за исключением двух определённых форм. Две формы поляризации, не испытывающие изменений, называются собственными поляризациями преобразующего устройства и определяются собственными векторами этого устройства.

Пара этих векторов и образует ортогональный собственный базис (собственную систему координат) устройства. В зависимости от того, какие формы поляризации остаются неизменными – линейные, круговые или эллиптические, собственный базис устройства будет линейным, круговым или эллиптическим. Аналитическое обоснование понятий собственных поляризаций будет введено в дальнейшем.

Неизменность формы поляризации означает сохранение угла эллиптичности и азимута эллипса поляризации, но не означает сохранения амплитуды волны (размер эллипса) и её абсолютной временной фазы.

Таким образом, если падающую волну разложить в собственном базисе устройства, то формы поляризации по каждому из ортов сохраняются, но их амплитуды и абсолютные фазы изменяются. Суммирование этих волн приведёт в результате к отличию эллиптичности и азимута эллипса поляризации выходящей волны по сравнению с входящей.

Основываясь на изложенном, получим общий закон преобразования поляризации падающей волны простым прибором. Рассмотрение проведём в линейном базисе, как наиболее употребительном, поскольку у большинства простых приборов, используемых в радиолокации, собственные поляризации линейны, а опорный базис также чаще всего является линейным.

Пусть в опорном базисе  $XOY$  задан исходный вектор Джонса  $\dot{\vec{E}}$  характеризуемый определённым (фиксированным) отношением амплитуд его проекций и некоторой разностью фаз между ними. Эти величины определяют параметры эллипса поляризации входной волны. Поскольку ориентация опорного базиса относительно собственного базиса прибора в общем случае произвольна, переведём исходный вектор  $\dot{\vec{E}}$  в собственный базис прибора, используя оператор поворота  $\|R(\theta)\|$ :

$$\dot{\vec{E}}_0 = \|R(\theta)\| \dot{\vec{E}} = \begin{vmatrix} C_\theta & S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{01} \\ \dot{E}_{02} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь и далее использованы обозначения

$\cos\theta \equiv C_\theta; \sin\theta \equiv S_\theta$   $\theta$  - угол между положительными направлениями полуосей  $OX, OX_0$ .

Поскольку по каждому из ортов собственной системы координат изменяется только амплитуда и абсолютная фаза эллипса поляризации (который в данном случае вырожден в линию), это означает, что математическое описание преобразования вектора Джонса от входа к выходу простого прибора при рассмотрении в собственном базисе может быть введено на основе использования диагональной матрицы

$$\dot{\vec{E}}_0^{OUT} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{01}^{OUT} \\ \dot{E}_{02}^{OUT} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{k}_1 & 0 \\ 0 & \dot{k}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{E}_{01}^{INP} \\ \dot{E}_{02}^{INP} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{k}_1 \dot{E}_{01}^{INP} \\ \dot{k}_2 \dot{E}_{02}^{INP} \end{vmatrix}; \quad (3.2)$$

где  $\dot{k}_1$  и  $\dot{k}_2$  - комплексные коэффициенты передачи, отвечающие ортам собственного базиса.

Завершая процедуру преобразований, необходимо произвести обратный

переход из собственного базиса прибора в опорный. Тогда выходной вектор Джонса можно записать в виде

$$\dot{\vec{E}}_0^{OUT} = \|R(\theta)\|^{-1} \begin{vmatrix} \dot{k}_1 & 0 \\ 0 & \dot{k}_2 \end{vmatrix} \|R(\theta)\| \dot{\vec{E}}_0^{INP}. \quad (3.3)$$

Перемножив матричные операторы, входящие в выражение (3.3), получим

$$\|D_{jl}(\dot{k}_i, \theta)\| = \begin{vmatrix} \dot{k}_1 C_\theta^2 + \dot{k}_2 S_\theta^2 & (\dot{k}_1 - \dot{k}_2) C_\theta S_\theta \\ (\dot{k}_1 - \dot{k}_2) C_\theta S_\theta & \dot{k}_1 S_\theta^2 + \dot{k}_2 C_\theta^2 \end{vmatrix}, (j, l = 1, 2), \quad (3.4)$$

Используя результат перемножения, выражение (3.3) можно записать в компактном виде

$$\dot{\vec{E}}_0^{OUT} = \|D_{jl}(\dot{k}_i, \theta)\| \dot{\vec{E}}_0^{INP}. \quad (3.5)$$

Полученное линейное матричное преобразование вектора Джонса падающей волны и представляет собой закон взаимодействия этой волны с простым прибором. Квадратная матрица  $\|D_{jl}(\dot{k}_i, \theta)\|$ , определяемая соотношением (3.4.), называется матрицей Джонса простого прибора [8, 14, 15, 16, 32].

Физический смысл воздействия матрицы Джонса на некоторую входную волну заключается в следующем: вектор Джонса входной волны, заданной в опорном базисе *РЛС*, переводится в собственный базис прибора. Ортогональные составляющие, ориентированные по ортам собственного базиса, приобретают амплитудные изменения и дополнительные фазовые сдвиги. Затем вектор Джонса на выходе прибора переводится в опорный базис *РЛС*, в котором и определяются поляризационные параметры излучения.

В случае, если на пути волны помещено несколько последовательно расположенных простых приборов, то описание их воздействия на эту волну (при одинаковом виде собственных поляризаций) можно построить, исходя из следующих соображений:

1. Выходная волна каждого из приборов является входной волной последующего.
2. При одинаковой форме собственных поляризаций приборов вектор

Джонса при переходе от одного прибора к другому подвергается лишь воздействию оператора поворота, переводящего этот вектор из собственного базиса предыдущего прибора в собственный базис последующего.

3. Если собственные поляризации последовательно расположенных приборов различны, то, в соответствии с результатами Главы 1, необходимо произвести преобразование вектора Джонса из собственного поляризационного базиса предыдущего прибора в поляризационный базис последующего прибора.

Предполагая собственные поляризации приборов одинаковыми, последовательность преобразований входного вектора Джонса для случая двух приборов можно записать в виде:

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \|R(\theta_2)\|^{-1} \left\| \begin{matrix} \dot{k}_1'' & 0 \\ 0 & \dot{k}_2'' \end{matrix} \right\| \|R(\Delta\theta)\| \left\| \begin{matrix} \dot{k}_1' & 0 \\ 0 & \dot{k}_2' \end{matrix} \right\| \|R(\theta_1)\| \dot{\vec{E}}_{INP}. \quad (3.6)$$

На первый взгляд из выражения (3.6) не выделяются матрицы Джонса отдельных приборов, однако, если промежуточную волну перевести из собственного базиса первого прибора в опорный базис обратным оператором поворота  $\|R^{-1}(\theta_1)\|$ , а затем из опорного базиса перевести её в собственный базис второго прибора оператором поворота  $\|R(\theta_2)\|$ , то нетрудно показать, что

$$\|R(\Delta\theta)\| = \left\| \begin{matrix} C_{\theta_2} & S_{\theta_2} \\ -S_{\theta_2} & C_{\theta_2} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} \end{matrix} \right\|. \quad (3.7)$$

Используя выражение (3.7), перепишем соотношение (3.6.) в вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{OUT} &= \|R(\theta_2)\|^{-1} \left\| \begin{matrix} \dot{k}_1'' & 0 \\ 0 & \dot{k}_2'' \end{matrix} \right\| \|R(\theta_2)\| \|R(\theta_1)\|^{-1} \left\| \begin{matrix} \dot{k}_1' & 0 \\ 0 & \dot{k}_2' \end{matrix} \right\| \|R(\theta_1)\| \dot{\vec{E}}_{INP} = \\ &= \|D_2(\dot{k}_i'', \theta_2)\| \|D_1(\dot{k}_i', \theta_1)\| \dot{\vec{E}}_{INP}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из выражения (3.8.) следует, что последовательность из двух приборов  $D_1$  и  $D_2$  можно заменить одним составным прибором  $D_\Sigma$ , матрица Джонса которого получена путём перемножения матриц Джонса отдельных приборов. При этом как матрицы Джонса отдельных приборов, так и матрицы Джонса составного

прибора заданы в опорном базисе.

Аналогично можно построить составную матрицу Джонса для любого числа последовательно расположенных приборов путём простого перемножения необходимого числа заданных в едином базисе матриц Джонса отдельных приборов. Не следует только забывать о соблюдении необходимого порядка в расположении матричных сомножителей, который заключается в том, что матрица Джонса первого из приборов, воздействующих на волну, должна стоять крайней справа в цепи перемножаемых матриц, а матрицы Джонса последующих приборов располагаются слева от неё в порядке следования. Крайняя левая матрица при этом будет матрицей Джонса последнего прибора.

Перейдём теперь к рассмотрению матриц Джонса конкретных устройств формирования и преобразования поляризации потока излучения *РЛС*. Прежде всего, проанализируем фазосдвигающие устройства, на основе которых может быть разработан целый ряд поляризационных элементов *РЛС*.

### ***3.3 Представление преобразования вектора Джонса фазосдвигающим устройством.***

В процессах формирования поляризационной структуры поля излучения *РЛС*, рассеяния волны целью и ее преобразовании приёмной антенной возможно введение относительного фазового сдвига между ортогональными составляющими вектора электрической напряжённости. Физические эффекты, вызывающие появление фазового сдвига, могут быть различными и поэтому целесообразно ввести формализованное представление операции введения фазового сдвига. Однако, поскольку чисто формальное рассмотрение может привести к ряду недоразумений, рассмотрим вопрос о построении представления преобразования вектора Джонса фазосдвигающим устройством на конкретном примере. В качестве этого примера возьмём фазосдвигающую диэлектрическую пластину, обладающую способностью к преобразованию

поляризации падающей на неё волны. Эффект фазосдвигающей пластины, которую часто называют просто фазовой пластиной или компенсатором, известен из оптики [13,14,15]. Исторически фазовая пластина явилась первым реальным устройством формирования и преобразования поляризации, нашедшим применение в радиолокационной технике.

Рассмотрим прохождение плоской волны через слой анизотропного диэлектрика толщиной  $\Delta Z$ , расположенный в плоскости  $XOY$ . Собственные оси анизотропного диэлектрика, лежащие в плоскости  $XOY$  называются его оптическими осями. Собственные поляризации, отвечающие оптическим осям анизотропного диэлектрика, являются линейными.

Будем считать, что оптические оси совпадают по направлениям с осями  $OY$  и  $OX$ . Из этих двух осей та, которой отвечает наибольший коэффициент преломления (для вектора  $\dot{\vec{E}}$ , направленного по этой оси) называется медленной осью или осью наименьшей скорости, поскольку больший показатель преломления означает меньшую фазовую скорость волны. Обозначим эту ось  $\vec{e}_S$ . Перпендикулярная к ней ось  $\vec{e}_F$  называется осью наибольшей скорости или просто быстрой осью. Показатели преломления, соответствующие этим осям, обозначим  $n_S$  и  $n_F$ ; причем  $n_F < n_S$ .

Рассмотрим действие пластины на бегущую электромагнитную волну, волновой вектор которой ориентирован по оси  $OZ$ , а ортогональные составляющие вектора электрического поля направлены по осям  $OX$  и  $OY$  совпадая с осями наименьшей и наибольшей скорости. Будем считать при этом, что исходный относительный фазовый сдвиг между ортогональными составляющими равен нулю.

Вектор Джонса такой волны в линейном базисе имеет вид

$$\dot{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{pmatrix} \exp j\omega t . \quad (3.9)$$

Линейный базис выбран в силу того, что собственные поляризации данного прибора линейны. Пренебрегая потерями на отражение волны от пластины,

рассмотрим волну внутри пластины, т.е. в пространстве,  $0 \leq Z \leq \Delta Z$ , где  $\Delta Z$  - толщина пластины.

Поскольку необходимо провести анализ в некотором объёме, а не в фиксированном сечении, введем замену  $\omega t \rightarrow \omega t - kz$ . Поскольку волновое число зависит от показателя преломления ( $k = n\omega/c$ ), то величина волнового числа различна для направлений  $\vec{e}_S$  и  $\vec{e}_F$ . Учитывая этот факт, выражение для вектора Джонса внутри пластины можно записать в виде

$$\dot{\vec{E}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{E}_X \exp[-j \frac{n_S \cdot \omega z}{c}] \\ \dot{E}_Y \exp[-j \frac{n_F \cdot \omega z}{c}] \end{pmatrix} \exp j\omega t . \quad (3.10)$$

За время прохождения через пластину фаза линейно-поляризованной составляющей получит задержку относительно фазы, которая существовала до пластинки (в рассматриваемом случае фазы составляющих до пластинки равны). Для медленной оси задержка по фазе проекции  $\dot{E}_X$  относительно вакуума равна

$$\Delta\varphi_S = n_S \frac{\omega\Delta Z}{c};$$

а фазовая задержка проекции  $\dot{E}_Y$ , ориентированной по быстрой оси определяется в виде

$$\Delta\varphi_F = n_F \frac{\omega\Delta Z}{c},$$

что и позволяет найти относительную фазовую задержку, вносимую пластиной между ортогональными составляющими  $\dot{E}_X$  и  $\dot{E}_Y$ :

$$\Delta\varphi_{XY} = \Delta\varphi_S - \Delta\varphi_F = (n_S - n_F) \frac{\omega\Delta Z}{c} = (n_S - n_F) \frac{2\pi\Delta Z}{\lambda},$$

где  $\lambda$  - длина волны в вакууме.

Перейдём теперь к построению формализованного представления данного эффекта.

Будем рассматривать вектор Джонса (3.10) в выходной плоскости фазовой

пластины, записав его в виде

$$\dot{\vec{E}}_1 = \left\| \begin{array}{c} E_x \exp[-jn_s \frac{2\pi\Delta z}{\lambda}] \\ E_y \exp[-jn_F \frac{2\pi\Delta z}{\lambda}] \end{array} \right\| \exp j\omega t .$$

Для приведения к общему началу отсчёта исключим один из фазовых множителей и введём относительную разность фаз  $\Delta\varphi_{XY}$ :

$$\dot{\vec{E}}_1 = \left\| \begin{array}{c} E_x \exp[-j\Delta\varphi_{XY}] \\ E_y \end{array} \right\| \exp[ j \omega t - \varphi_Y ] .$$

Абсолютную фазу, одинаковую для обеих составляющих и не влияющую на поляризационные параметры волны, можно исключить из рассмотрения. Тогда окончательно запишем вектор Джонса в выходной плоскости фазовой пластины как

$$\dot{\vec{E}}_1 = \left\| \begin{array}{c} E_x \exp[-j\Delta\varphi_{XY}] \\ E_y \end{array} \right\| . \quad (3.11)$$

Сравнивая выражение (3.11) с выражением (3.9) для входного вектора Джонса, можно сделать вывод, что выходной вектор Джонса (3.11) получен путём умножения входного вектора Джонса на диагональную матрицу

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp -j\Delta\varphi_{XY} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| . \quad (3.12)$$

Матрица (3.12) называется оператором фазосдвигающего устройства, заданным в собственной системе координат прибора, преобразующего поляризацию волны, (в данном случае - в собственной системе координат анизотропного диэлектрика). Единичные значения модулей диагональных элементов означают, что данное фазосдвигающее устройство не вносит потерь, т.е. не изменяет амплитуд линейно-поляризованных колебаний, ориентированных по собственным осям.

В случае, если модули коэффициентов передачи составляющих  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  в направлениях  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_F$  меньше единицы и различны, оператор (3.12) имеет вид

$$\|S\| = \begin{vmatrix} k_1 \exp -j\Delta\varphi_{XY} & 0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

где  $k_1 \neq k_2 < 1$ .

В оптике устройства, имеющие различные коэффициенты пропускания по собственным осям, называют дихроичными [14]. Влияние дихроизма и его роль будут рассмотрены ниже.

С точки зрения удобства анализа и использования ряда специальных свойств матриц, имеющих равный единице детерминант примем два предложения:

1. Будем считать, что фазосдвигающие устройства не вносят потерь  $k_1 = k_2 = 1$ .

2. Разделим формально относительный фазовый сдвиг  $\Delta\varphi_{XY}$  на две части и отнесём их с противоположными знаками к направлениям быстрой и медленной осей:

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \exp -j0.5\Delta\varphi_{XY} & 0 \\ 0 & \exp j0.5\Delta\varphi_{XY} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

считая, что составляющая электрического вектора, направленная по оси  $\vec{e}_F$  приобретает положительный фазовый сдвиг  $0.5\Delta\varphi_{XY}$ , а составляющая, ориентированная по оси  $\vec{e}_S$  - отрицательный сдвиг  $-0.5\Delta\varphi_{XY}$ . Суммарный относительный фазовый сдвиг составляет величину  $\Delta\varphi_{XY}$ .

В данном случае, как это видно из выражения (3.14), определитель оператора фазосдвигающего устройства равен единице. В дальнейшем будем пользоваться в зависимости от степени удобства решения задач, как формой записи (3.14), так и формой записи (3.12).

Отметим теперь, что при определении представления оператора фазосдвигающего устройства было принято, что между составляющими  $\dot{E}_X$  и  $\dot{E}_Y$  волны на входе устройства взаимный фазовый сдвиг отсутствует. Это обстоятельство ни в коей мере не ограничивает общность найденного

представления, поскольку при наличии некоторого фазового сдвига между составляющими на входе, этот сдвиг просто увеличится после прохождения волны через фазовое устройство.

Задание входной волны в собственном базисе прибора упрощает анализ его функционирования. Однако на практике входную волну необходимо задавать в опорном базисе, ориентация которого в общем случае не совпадает с ориентацией собственного базиса поляризационного устройства. В связи с этим необходимо рассмотреть случай произвольной взаимной ориентации опорного базиса, в котором задана исходная волна и собственной системы координат прибора.

Физический смысл действия фазосдвигающего устройства в оптике интерпретируется следующим образом: волна (в общем случае поляризованная эллиптически) на входе устройства расщепляется на две волны, электрические векторы которых ориентированы по осям  $\vec{e}_S$  и  $\vec{e}_F$ . При этом составляющая, распространяющаяся вдоль оси, показатель преломления для которой равен единице, называется обыкновенной волной, а составляющая, распространяющаяся вдоль оси, показатель преломления для которой отличается от единицы, называется необыкновенной волной. В результате необыкновенная волна приобретает дополнительный фазовый сдвиг, и суммирование волн на выходе фазосдвигающего устройства приводит в результате к различию выходных и входных поляризационных параметров. Существенным моментом в данной интерпретации является факт расщепления входной волны на две составляющие, которые ориентированы по осям  $\vec{e}_S$  и  $\vec{e}_F$ .

Математически операция расщепления исходной волны описывается оператором поворота  $\|R \theta\|$ . При этом происходит переход из исходной (опорной) системы координат, в собственную систему координат фазосдвигающего устройства, образованную векторами  $\vec{e}_S$  и  $\vec{e}_F$ .

Воздействие прибора на волну, заданную в собственном базисе описывается оператором (1.14). Выходная волна должна быть переведена вновь

в опорную систему координат обратным оператором поворота  $\|R(\theta)\|^{(-1)}$ . Таким образом, последовательность операций в данном случае принимает вид

$$\dot{\vec{E}}_2 = \|R(\theta)\|^{(-1)} \|S\| \|R(\theta)\| \dot{\vec{E}}_1. \quad (3.15)$$

Произведение матричных операторов в выражении (1.15) и представляет собой общую форму матрицы Джонса фазосдвигающего устройства

$$\|D_\varphi\| = \|R(\theta)\|^{(-1)} \|S\| \|R(\theta)\|. \quad (3.16)$$

Напомним, что проведённый анализ основывался на представлении фазосдвигающего устройства бесконечно протяжённой одноосной двупреломляющей пластиной определённой толщины.

Реализация подобных устройств не вызывает затруднений в оптическом диапазоне, где могут быть использованы пластины конечной толщины, вырезанные из двупреломляющих кристаллов (например- исландский шпат) при соответствующей ориентации электрического вектора входной волны относительно оптической оси кристалла. При этом размеры апертуры прибора (входного зрачка) во много раз превышают длину волны, что и позволяет достаточно корректно использовать приближение бесконечно протяжённой фазовой пластины и плоской волны.

В радиолокационной технике, использующей волны сверхвысокочастотного диапазона, преобразование поляризации удобнее всего осуществлять на этапе канализации энергии от генератора к антенне по следующим причинам:

1. Устройства преобразования и формирования поляризации в данном случае могут быть выполнены на основе стандартных волноводных узлов, что упрощает их техническую реализацию.

2. В процессе канализации энергии по волноводному тракту не происходит изменения спектра пространственных частот, что позволяет использовать понятие простого прибора для анализа и синтеза преобразующих поляризацию устройств.

Поскольку в процессе формирования радиолокационного сигнала с

заданной поляризацией должны использоваться две поляризационно-ортогональные составляющие, то фазосдвигающие устройства сверхвысокочастотного диапазона выполняются на таких волноводных структурах, в которых могут распространяться обе эти составляющие. К таким структурам относятся, например, круглые волноводы с волной основного типа. В случае, если радиус  $r$  круглого волновода удовлетворяет условию  $\lambda/3.42 < r < \lambda/2.615$  то внутри такого волновода может распространяться только поперечная электрическая волна типа  $TE_{11}$ . Поперечность данной волны и является основным фактором, позволяющим перенести качественные и количественные соотношения, описывающие закономерности преобразования поляризационной структуры неограниченной плоской волны простыми приборами, на волноводные поляризационные устройства.

Структура поля волны  $TE_{11}$  в круглом волноводе изображена на рис. 3.1а, где сплошными стрелками изображены силовые линии электрического поля, а пунктирными - магнитного поля. Напряжённость поля, как обычно, изображается концентрацией силовых линий.

Электрическое поле волны  $TE_{11}$  концентрируется в основном в диаметральной плоскости волновода. Ориентацию вектора  $\dot{\vec{E}}$  в этой плоскости можно сопоставить с ориентацией электрического вектора линейно-поляризованной плоской волны. Таким образом, волну, структура которой изображена на рис.3.1а, будем считать линейно-поляризованной вдоль оси  $OY$ .

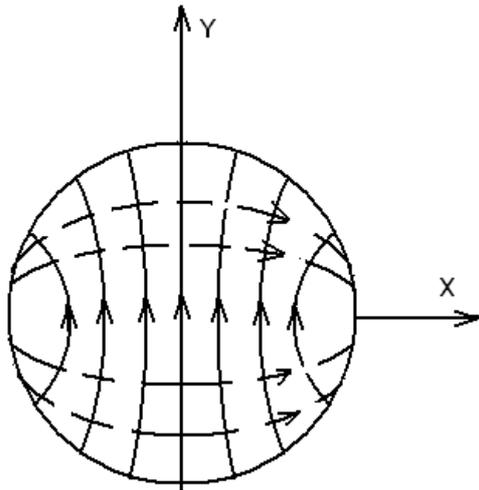


Рис.3.1а

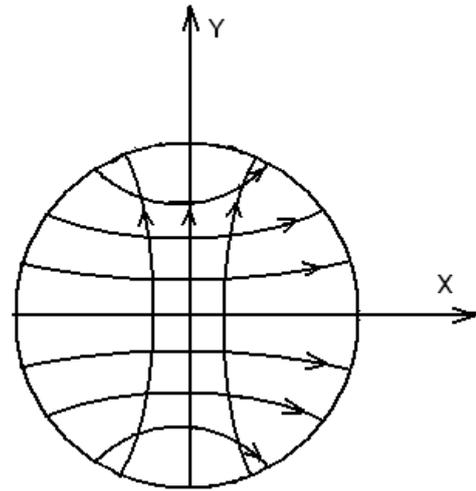


Рис.3.1б

При выполнении условия отсутствия отражений от нагрузки любая волна эллиптической поляризации, поступающая в круглый волновод, может быть представлена суммой двух волн типа  $TE_{11}$ , которые будем считать линейно-поляризованными вдоль осей  $OX$  и  $OY$  (рис.3.1б), определяя их ориентацию в двух диаметральных взаимно перпендикулярных плоскостях. Амплитуды этих волн и фазовый сдвиг между ними определяется поляризационными параметрами исходной волны, поступающей в круглый волновод. Две выделенные диаметральных взаимно-перпендикулярные плоскости можно использовать в качестве базисных плоскостей и, создав различные условия распространения волн  $TE_{11}$  в этих плоскостях, получить эквивалент одноосной двупреломляющей среды. (Здесь следует заметить, что проводимое рассмотрение носит чисто качественный характер и является достаточно далёким от строгого электродинамического анализа распространения волн в волноводе, содержащем неоднородности).

Различные условия распространения вдоль указанных плоскостей, вызывающие изменение фазы одной из линейно-поляризованных волн по отношению к другой, могут быть созданы при помощи диэлектрических или металлических пластин, размещаемых в диаметральной плоскости волновода и согласованных с последним путём придания им определённой геометрической

формы.

Так, размещение в плоскости  $Y$  диэлектрической пластины (рис.3.2а) приводит к уменьшению фазовой скорости составляющей  $\dot{E}_y$ , ориентированной по пластине. Конечно, диэлектрическая пластина оказывает влияние на ортогональную составляющую  $\dot{E}_x$ , но значительно меньше, чем на  $\dot{E}_y$ . Однако нас интересует лишь конечный эффект, заключающийся в появлении взаимного фазового сдвига, поскольку изменение абсолютной временной фазы каждой из составляющих интереса не представляет. Поэтому, для удобства анализа, целесообразно отнести взаимный фазовый сдвиг полностью к направлению, совпадающему с пластиной и считать это направление осью наименьшей скорости.

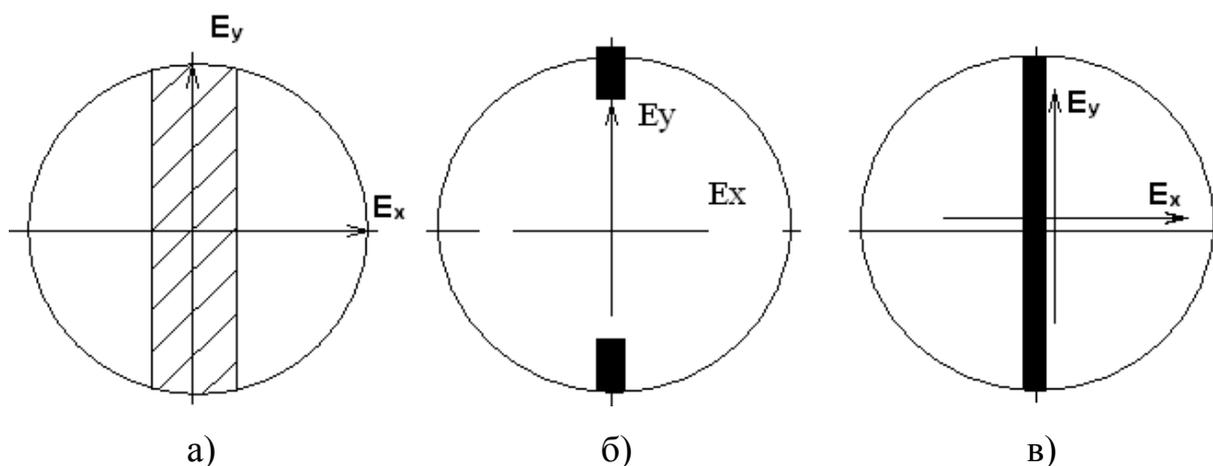


Рис 3.2

Для изменения фазовой скорости одной из составляющих могут быть использованы также металлические пластины и штыри. Так, размещение двух диаметрально противоположных металлических ребер в круглом волноводе (рис.3.2б) приводит к тому, что для составляющей  $\dot{E}_y$ , параллельной ребрам, они служат шунтирующей ёмкостью и понижают её фазовую скорость. Для составляющей  $\dot{E}_x$ , перпендикулярной плоскости ребер, последние являются шунтирующей индуктивностью и увеличивают её фазовую скорость. Таким

образом, в данном случае сечение, проходящее через ребра, содержит ось наибольшей скорости.

В случае использования тонких проводящих штырей (рис.3.2в) ось наибольшей скорости лежит в плоскости, содержащей эти штыри, так как они ускоряют параллельную им составляющую  $\dot{E}_y$  в силу индуктивного характера их проводимости для этой составляющей.

Итак, использование как диэлектрических, так и металлических пластин приводит к тому, что одна из собственных осей искусственно созданной двупреломляющей среды совпадает с плоскостью, в которой лежит пластина. Собственные поляризации такой среды линейны.

При рассмотрении физики действия фазосдвигающих устройств с линейными собственными поляризациями было указано, что затухание волн, электрические векторы которых ориентированы по собственным осям, может быть различным.

Так, в реальных устройствах, составляющая поля, ориентированная по пластине, испытывает большее затухание, нежели составляющая поля, перпендикулярная пластине, поскольку силовые линии электрического поля первой волны сконцентрированы, в основном, в диэлектрике. Отсюда следует, что реальные фазовые устройства формирования и преобразования поляризации обладают дихроизмом. Реальные потери в диэлектрических пластинах невелики, но их влияние приводит к невозможности формирования эллипса поляризации излучения с высокой точностью.

### ***3.4 Трансформация матрицы Джонса при изменении системы базисных векторов.***

Прежде чем продолжить анализ некоторых конкретных видов простых приборов, преобразующих поляризацию радиолокационных сигналов, необходимо рассмотреть вопрос о трансформации матрицы Джонса при

изменении системы базисных векторов.

В первой главе было введено понятие поляризационного базиса и было показано, что возможно использование трёх основных видов базиса: линейного, кругового и эллиптического.

Как было установлено выше, вид матрицы Джонса простого прибора тесно связан с формой записи преобразования, осуществляемого этим прибором в его собственной системе координат, а последняя, в принципе, может быть образована как линейными (линейное фазосдвигающее устройство), так и круговыми (или эллиптическими) собственными поляризациями.

Рассмотрим простейший случай трансформации матрицы Джонса, определённой в линейном базисе, при переходе от одной пары ортогональных линейных поляризаций, образующих исходный базис, к другой паре базисных линейных состояний поляризации. Данный переход совершается как на входе, так и на выходе прибора. Поскольку вид базисных векторов в данном случае не изменяется, имеет место простой поворот систем координат на входе и выходе прибора.

В случае произвольной взаимной ориентации опорного базиса и собственной системы координат прибора следующая процедура была использована выше:

$$\dot{\vec{E}}_2 = \|R(\theta)\|^{(-1)} \|S\| \|R(\theta)\| \dot{\vec{E}}_1. \quad (3.17)$$

Смысл операторной последовательности (3.17) заключается в том, что оператор  $\|R(\theta)\|$  переводит вектор Джонса входной волны в собственную систему координат устройства (в которой оператор Джонса имеет диагональный вид), а обратный оператор  $\|R(\theta)\|^{(-1)}$  переводит вектор Джонса на выходе прибора в опорную систему координат.

Произведение трёх операторов в выражении (3.17) представляет собой общий вид матрицы Джонса простого прибора. Физический смысл процедуры (3.17) понятен, так как отправной величиной является вектор Джонса входного

воздействия. Однако если рассматривать матрицу Джонса некоторого простого прибора при отсутствии воздействия на входе, то возникают следующие два вопроса:

– является ли процедура умножения матрицы Джонса слева и справа на обратный и прямой операторы поворота общей для определения вида любой матрицы Джонса при повороте системы координат входа и выхода?

– возможно ли формальное проведение этой процедуры без задания входного воздействия?

Итак, пусть имеется некоторый простой прибор, характеризуемый матрицей Джонса  $\|D_1\|$ , связывающей входной и выходной векторы Джонса  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , заданные в системах координат входа и выхода  $XOY$  и  $X'OY'$ , представляющих опорный базис. Ориентация опорного базиса в общем случае произвольна относительно собственной системы координат прибора.

Повернём одновременно системы координат  $XOY$  и  $X'OY'$  входа и выхода вокруг оси  $OZ$  на угол  $\theta'$  против часовой стрелки. Указанный поворот эквивалентен переходу от пары базисных линейных состояний поляризации, ориентированных по ортам совпадающих координатных систем  $XOY$  и  $X'OY'$ . Повороту на угол  $\theta'$  соответствуют следующие преобразования входного и выходного векторе Джонса:

$$\dot{E}'_1 = \|R(\theta')\| \dot{E}_1, \quad \dot{E}'_2 = \|R(\theta')\| \dot{E}_2,$$

что позволяет переписать выражение  $\dot{E}_2 = \|D_1\| \dot{E}_1$  в виде

$$\|R(\theta')\| \dot{E}_2 = \|D_1\| \|R(\theta')\| \dot{E}_1. \quad (3.18)$$

Умножим левую и правую часть выражения (3.18) на обратный оператор поворота слева:

$$\|R(\theta')\|^{(-1)} \|R(\theta')\| \dot{E}_2 = \|R(\theta')\|^{(-1)} \|D_1\| \|R(\theta')\| \dot{E}_1.$$

Поскольку произведение прямого и обратного операторов поворота в левой части последнего соотношения есть единичный оператор, то

$$\dot{E}_2 = \|R(\theta')\|^{(-1)} \|D_1\| \|R(\theta')\| \dot{E}_1.$$

Таким образом, произведение операторов

$$\|D \theta'\| = \|R(\theta')\|^{(-1)} \|D_1\| \|R(\theta')\| \quad (3.19)$$

есть не что иное, как матрица Джонса простого прибора, трансформированная в результате согласованного поворота систем координат входа и выхода, соответствующего по смыслу переходу от одной пары базисных линейных поляризаций в другой линейный базис. Из выражения (3.19) следует, что умножение матрицы Джонса слева и справа на обратный и прямой операторы поворота является общей процедурой определения трансформированной матрицы Джонса при повороте систем координат входа и выходы. Кроме того, отсюда же видно, что определение вида преобразованной матрицы Джонса может быть проведено формально, без задания воздействия на входе прибора.

Перейдём теперь к рассмотрению наиболее общего изменения входных и выходных базисных состояний, а именно - заменим каждую пару ортогональных линейных поляризаций  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$  и  $\dot{E}'_x, \dot{E}'_y$ , образующих входную и выходную системы координат, парами ортогональных эллиптических поляризаций  $\dot{E}_u, \dot{E}_v$  и  $\dot{E}'_u, \dot{E}'_v$  соответственно.

В соответствии с результатами главы 1 замена базисных состояний

$$\dot{E}_x, \dot{E}_y \rightarrow \dot{E}_u, \dot{E}_v ; \dot{E}'_x, \dot{E}'_y \rightarrow \dot{E}'_u, \dot{E}'_v$$

заключается в преобразовании декартовых векторов Джонса на входе и выходе прибора в векторы Джонса, определённые в заданном эллиптическом базисе. Напомним, что эллиптический базис считается заданным, если известен угол эллиптичности и азимут хотя бы одного из эллиптических ортов.

Матрица преобразования  $\|L\|^{-1}$  от линейного базиса к эллиптическому и обратная к ней матрица  $\|L\|$ , описывающая переход от эллиптического к линейному базису, заданы общими выражениями (1.46), позволяющими записать векторы Джонса на входе и выходе устройства в эллиптическом базисе как

$$\dot{\vec{E}}_{UV} = \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}_{XY}; \quad \dot{\vec{E}}'_{UV} = \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_{XY}.$$

При этом, в силу согласованности перехода, на входе и выходе используется одна и та же матрица преобразования. Обозначим матрицу Джонса, заданную в линейном базисе, символом  $\|D_{XY}\|$ . Преобразование вектора Джонса, заданного в линейном базисе, имеет вид  $\dot{\vec{E}}'_{XY} = \|D_{XY}\| \dot{\vec{E}}_{XY}$ .

Умножив обе части этого выражения на матрицу  $\|L\|^{-1}$ , переведём выходной вектор Джонса в эллиптический базис:

$$\|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_{XY} = \|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \dot{\vec{E}}_{XY}. \quad (3.20)$$

Однако переход в эллиптический базис должен осуществляться согласованно как на выходе, так и на входе прибора. В связи с этим проведём некоторые формальные преобразования, позволяющие построить этот согласованный переход.

Выражение (3.20) не изменится, если ввести в последовательность  $\|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \dot{\vec{E}}_{XY}$  единичную матрицу  $\|\delta_{jl}\| = \|L\| \|L\|^{-1}$ . Тогда, поскольку произведение  $\|L\| \|L\|^{-1}$  равно единичной матрице, перепишем выражение (3.20) в виде:

$$\begin{aligned} \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_{XY} &= \|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \|\delta_{jl}\| \dot{\vec{E}}_{XY} = \|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \|L\| \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}_{XY} = \\ &= \{\|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \|L\|\} \{\|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}_{XY}\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Выделение в правой части данного соотношения группы операторов в скобках позволяет в явной форме увидеть, что согласованный переход входного и выходного векторов Джонса в эллиптический базис даёт не только запись этих векторов в эллиптическом базисе

$$\dot{\vec{E}}_{UV} = \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}_{XY}; \quad \dot{\vec{E}}'_{UV} = \|L\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_{XY}$$

но и позволяет выделить некоторую последовательность операторов

$$\|D_{UV}\| = \|L\|^{-1} \|D_{XY}\| \|L\|, \quad (3.22)$$

которая представляет собой алгоритм перехода от записи матрицы Джонса в

линейном базисе к записи в эллиптическом базисе. Сравнивая выражения (3.19) и (3.22) нетрудно видеть, что они имеют общую структуру. Отсюда следует, что преобразование матрицы Джонса при переходе от одного базиса к другому заключается в умножении этой матрицы слева и справа на прямой и обратный унитарные операторы перехода. Таким образом, в эллиптическом базисе преобразование, производимое оператором Джонса, записывается в стандартном виде:

$$\dot{\vec{E}}'_{UV} = \|D_{UV}\| \dot{\vec{E}}_{UV}.$$

Выражение для преобразования матрицы Джонса при переходе из эллиптического базиса в линейный имеет вид

$$\|D_{XY}\| = \|L\| \|D_{UV}\| \|L\|^{-1}, \quad (3.23)$$

как это нетрудно показать.

В заключение отметим, что вопрос о преобразовании матрицы Джонса при переходе к круговому базису отдельно не рассматривается, поскольку этот базис является частным случаем эллиптического  $\alpha = \pi/4$ . Вообще говоря, линейный базис также является частным случаем эллиптического  $\alpha = 0$  и в принципе можно было бы не рассматривать отдельно преобразование матрицы Джонса при переходе от одной пары ортогональных линейных поляризаций к другой паре базисных линейных состояний.

### ***3.5 Идеальный поляризатор как предельный случай дихроичного прибора.***

Упомянутое выше явление дихроизма (т.е. различие в поглощении по собственным осям прибора) является нежелательным фактором для простых приборов, реализующих операцию фазового сдвига между ортогональными составляющими волны. Однако в некоторых случаях явление дихроизма используется, как положительное качество. Так, действие целого ряда простых приборов-поляризаторов основано именно на использовании различия

коэффициентов поглощения по собственным осям. В зависимости от вида собственных поляризаций (линейные, круговые, эллиптические) различают линейные, круговые и эллиптические поляризаторы.

Рассмотрим прежде всего линейный поляризатор, как предельный случай дихроичного прибора.

Пусть имеется некоторая изотропно-преломляющая и изотропно-поглощающая среда, запаздывание и затухание плоской волны в которой не зависит от ориентации электрического вектора этой волны. При этом участок среды толщиной  $l$  действует как изотропное фазосдвигающее и поглощающее устройство и характеризуется матрицей Джонса

$$\|P\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp\left[j\frac{2\pi l(n-jk)}{2\lambda}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-j\frac{2\pi l(n-jk)}{2\lambda}\right] \end{array} \right\|. \quad (3.24)$$

Явление поглощения в среде, описываемой матрицей (3.24) учтено обычным путем, т.е. введением комплексного показателя преломления  $n - jk$  вместо действительного показателя преломления  $n$ .

Величина  $k$  есть не что иное, как коэффициент поглощения среды. При этом амплитуда вектора электрической напряжённости поля и его интенсивность затухают в зависимости от расстояния  $l$  в соответствии с выражениями

$$A(l) = A(0)\exp -\alpha l / 2, \quad I(l) = A^2(l) = A^2(0)\exp -\alpha l .$$

Здесь  $A(0)$  - амплитуда на входе среды,  $\alpha = 4\pi k / \lambda$ .

В силу изотропии преломления и поглощения эллипс поляризации после прохождения такой среды не изменяется по сравнению с эллипсом поляризации входной волны.

Отметим тот факт, что матрица Джонса изотропной среды имеет диагональный вид в силу отсутствия выделенного направления. Математически этот факт выражается тем, что вращение среды в плоскости, перпендикулярной

волновому вектору падающей волны не приводит к изменению вида матрицы (3.24), которая при любых поворотах сохраняет диагональную форму.

Представим теперь, что затухание линейно-поляризованной волны, проходящей через некоторую изотропно преломляющую среду, зависит от величины угла между некоторой осью, в направлении которой поглощение максимально, и вектором электрической напряжённости поля. Такая среда называется линейной одноосной дихроичной средой.

Направление, в котором поглощение максимально (при совпадении вектора электрического поля с этим направлением) называется осью гашения (поглощения) дихроичной среды.

Направление, перпендикулярное оси гашения характеризуется минимальным поглощением и называется осью пропускания.

Указанные два направления образуют собственную систему координат дихроичной среды. Если ориентировать ось пропускания по орту  $OX$  и обозначить коэффициенты поглощения по направлению осей гашения и пропускания как  $k_{MAX}, k_{MIN}$  соответственно, то матрица Джонса дихроичной среды примет вид

$$\|T\| = \exp \left[ -j \left( \frac{2\pi l n}{\lambda} + \frac{2\pi l k_{MIN}}{\lambda} \right) \right] \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp \left[ -\frac{2\pi l (k_{MAX} - k_{MIN})}{\lambda} \right] \end{vmatrix}. \quad (3.25)$$

Здесь вынесены за пределы матрицы фазовый множитель, описывающий изотропное преломление и множитель  $\exp -2\pi l k_{MIN} / \lambda$ . Величина  $k_{MAX} - k_{MIN}$  в показателе экспоненты является мерой дихроизма среды. В частности, если  $k_{MAX} - k_{MIN} = 0$ , то нетрудно видеть, что матрица (3.25) превращается в единичную матрицу, характеризующую изотропную среду. В случае если коэффициенты поглощения, соответствующие осям гашения и пропускания удовлетворяют условиям

$$k_{MAX} \gg 1, k_{MAX} \rightarrow \infty, k_{MIN} \approx 0$$

соответственно, то матрица Джонса (3.25) может быть записана в виде

$$\|T\| = \exp\left[-j\frac{2\pi nl}{\lambda}\right] \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Прибор, характеризуемый матрицей Джонса (3.26) называется идеальным линейным поляризатором (проектором). Такой прибор полностью пропускает или полностью гасит (поглощает) падающую линейно-поляризованную волну в зависимости от того, параллельна или перпендикулярна к оси пропускания ориентация электрического вектора этой волны.

Матрицу Джонса поляризатора, ось пропускания которого ориентирована по оси  $OY$ , можно получить путём рассуждений, проведённых выше. В случае произвольной ориентации собственных осей поляризатора относительно опорного базиса следует воспользоваться процедурой определения вида матрицы Джонса при повороте системы координат, рассмотренной в предыдущем параграфе:

$$\|T(\theta)\| = \|R(\theta)\|^{-1} \|T\| \|R(\theta)\| = \begin{vmatrix} C_\theta^2 & C_\theta S_\theta \\ C_\theta S_\theta & S_\theta^2 \end{vmatrix}. \quad (3.27)$$

Общий множитель  $\exp -j2\pi nl / \lambda$  здесь опущен. Из выражения (3.27) нетрудно получить частные случаи матрицы Джонса поляризатора, ось пропускания которого ориентирована по оси  $OX$   $\theta = 0^\circ$  и по оси  $OY$   $\theta = \pi/2$

$$\|T(\theta = 0^\circ)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \|T(\theta = 0.5\pi)\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь структуру волны, прошедшей через линейный поляризатор, Будем считать, что входной вектор Джонса задан в системе координат  $XOY$ , а ось пропускания поляризатора ориентирована под углом  $\theta$  относительно оси  $OX$ .

Пусть на входе поляризатора задана линейно-поляризованная волна единичной амплитуды с азимутом  $\beta$ . Выходной вектор Джонса в данном случае определяется выражением

$$\vec{E}_{OUT} = \|T \theta\| \begin{vmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_\theta^2 C_\beta + C_\theta S_\theta S_\beta \\ C_\theta S_\theta S_\beta + S_\theta^2 S_\beta \end{vmatrix}. \quad (3.28)$$

Проводя несложные тригонометрические преобразования, запишем выходной вектор Джонса в наиболее удобной форме, позволяющей установить смысл воздействия поляризатора на падающую линейно-поляризованную волну:

$$\vec{E}_{OUT} = \cos(\theta - \beta) \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}.$$

Из данного выражения следует, что волна на выходе поляризатора поляризована линейно по оси пропускания поляризатора и имеет амплитуду, определяемую косинусом разности азимутов входной и выходной волн. Таким образом, амплитуда выходной волны (выходного вектора) есть не что иное, как проекция входного вектора на ось пропускания поляризатора. Отсюда следует, что линейный поляризатор осуществляет операцию проецирования входной волны на ось пропускания. Поэтому поляризатор называют проектором, а отвечающую ему матрицу Джонса - проекционным оператором. Проекционные операторы изучаются в математике и обладают рядом свойств, которым полностью удовлетворяет матрица Джонса линейного поляризатора.

В частности, детерминант проекционного оператора равен нулю, что свидетельствует о принадлежности его к классу вырожденных операторов. Кроме того, при возведении проекционного оператора в квадрат его вид не изменяется.

Нетрудно установить прямой проверкой, что для матрицы Джонса поляризатора эти условия выполняются:  $\det \|T \theta\| = 0$ ;  $\|T \theta\|^2 = \|T \theta\|$ .

В случае если на входе поляризатора имеется эллиптически-поляризованная волна, то, как сейчас будет показано, выходная волна поляризована линейно по оси пропускания, но амплитуда её зависит не только от разностей азимутов, но и от величины угла эллиптичности входной волны.

Запишем вектор Джонса входной волны единичной амплитуды через угол эллиптичности и азимут эллипса поляризации:

$$\dot{\vec{E}}_{INP} = \begin{vmatrix} C_\beta C_\alpha & -jS_\beta S_\alpha \\ S_\beta C_\alpha & +jC_\beta S_\alpha \end{vmatrix}.$$

Тогда, произведя операции перемножения и простейшие преобразования, получим

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{OUT} &= \|T \ \theta\| \dot{\vec{E}}_{INP} = \\ &= C_\alpha C_{(\theta-\beta)} \sqrt{1 + tg^2 \alpha tg^2 (\theta - \beta)} \exp j\psi \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь  $\psi = arctg \ tg \alpha tg (\theta - \beta)$  - обобщённая фаза выходной линейно-поляризованной волны.

Из выражения (3.29) следует, что при наличии на входе поляризатора эллиптически поляризованной волны выходная волна поляризована линейно по оси пропускания поляризатора, а её амплитуда определяется как углом эллиптичности, так и азимутом эллипса поляризации волны на входе.

В случае если волна на входе поляризована по кругу, то, в силу неопределённости её азимута, выражением (3.29) пользоваться неудобно. Поэтому целесообразно эффект на выходе поляризатора для волны круговой поляризации определить в виде

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|T \ \theta\| \begin{vmatrix} 1 \\ \pm j \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} C_\theta^2 & \pm jC_\theta S_\theta \\ C_\theta S_\theta & \pm jS_\theta^2 \end{vmatrix} = \frac{\exp \pm j\theta}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix},$$

где показатель экспоненты  $\exp \pm j\theta$  представляет собой обобщённую фазу. Таким образом, в случае, если входная волна поляризована по кругу, то амплитуда выходной волны уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз независимо от ориентации поляризатора.

Технически линейные поляризаторы сантиметрового диапазона волн представляют собой прямоугольные волноводы. При этом ось пропускания ориентирована перпендикулярно к широкой стенке волновода. В метровом диапазоне поляризатором является линейный вибратор.

Итак, анализ дихроичного прибора, обладающего линейными

собственными поляризациями, показал, что в предельном случае этот прибор является линейным поляризатором, пропускающий без потерь волну, поляризованную по оси пропускания и поглощающий волну, поляризованную по оси гашения.

Если собственные поляризации дихроичного прибора являются эллиптическими, то в идеальном случае такой прибор будет представлять собой эллиптический поляризатор, пропускающий без потерь волну, эллипс поляризации которой отвечает собственной поляризации оси пропускания и поглощающий волну, отвечающую оси гашения. Поскольку собственный базис ортогонален, состояния поляризации пропускаемой и поглощаемой волн также ортогональны. Поскольку эллиптическое состояние поляризации является наиболее общим, то следует ожидать, что частными случаями эллиптического поляризатора будут линейный и круговой поляризаторы.

Проведём анализ матрицы Джонса идеального эллиптического поляризатора, считая, что азимут большой полуоси эллипса поляризации, отвечающего оси пропускания, ориентирован по орту  $OX$  опорной системы координат. Тогда матрица Джонса в собственном базисе поляризатора, который, естественно, является эллиптическим, имеет вид

$$\|T_{UV}\| = \begin{vmatrix} \dot{U} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.31a)$$

В случае если азимут эллипса поляризации оси пропускания ориентирован по орту  $OY$  опорной системы координат, то матрица Джонса записывается как

$$\|T_{UV}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{V} \end{vmatrix}. \quad (3.31б)$$

Форма матриц (3.31а,б) свидетельствует о том, что из вектора Джонса любой волны, заданной в эллиптическом базисе, на выходе поляризатора имеется только та эллиптически-поляризованная проекция, которая отвечает соответствующей оси пропускания:

$$\begin{vmatrix} \dot{\vec{E}}_U \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\vec{E}}_U \\ \dot{\vec{E}}_V \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\vec{E}}_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{V} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\vec{E}}_U \\ \dot{\vec{E}}_V \end{vmatrix}.$$

Целесообразно было бы определить матрицу Джонса поляризатора таким образом, чтобы она имела вид, удобный для использования в любом базисе.

Прделаем это следующим образом:

Преобразуем оператор (3.31а) в соответствии с правилом преобразования матрицы Джонса при переходе из эллиптического базиса в линейный:

$$\|T_{XY}\| = \|L\| \|T_{UV}\| \|L\|^{-1},$$

где  $\|L\|$  и  $\|L\|^{-1}$  есть унитарные матрицы прямого и обратного перехода от линейного поляризационного базиса к эллиптическому базису.

Тогда матрица Джонса эллиптического поляризатора в линейном базисе имеет вид:

$$\begin{aligned} \|T_{XY}^{EP} \alpha, \beta\| &= \\ &= \begin{vmatrix} (C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)(C_\beta C_\alpha + jS_\beta S_\alpha); & (C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)(S_\beta C_\alpha - jC_\beta S_\alpha) \\ (C_\beta C_\alpha + jS_\beta S_\alpha)(S_\beta C_\alpha + jC_\beta S_\alpha); & (S_\beta C_\alpha + jC_\beta S_\alpha)(S_\beta C_\alpha - jC_\beta S_\alpha) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Вынося элемент  $(C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)(C_\beta C_\alpha + jS_\beta S_\alpha) = \dot{A}$  за пределы матрицы, получим

$$\begin{aligned} \|T_{XY}^{EP} \alpha, \beta\| &= \\ &= \dot{A} \begin{vmatrix} 1; & \frac{(S_\beta C_\alpha - jC_\beta S_\alpha)}{(C_\beta C_\alpha + jS_\beta S_\alpha)} \\ \frac{(S_\beta C_\alpha + jC_\beta S_\alpha)}{(C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)} & \frac{(S_\beta C_\alpha + jC_\beta S_\alpha)(S_\beta C_\alpha - jC_\beta S_\alpha)}{(C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)(C_\beta C_\alpha + jS_\beta S_\alpha)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Поскольку поляризационное отношение для эллиптически поляризованной волны, характеризуемой параметрами  $\alpha, \beta$ , имеет в линейном базисе вид

$$\dot{P}^{XY} = (S_\beta C_\alpha + jC_\beta S_\alpha)(C_\beta C_\alpha - jS_\beta S_\alpha)^{-1},$$

то элементы матрицы Джонса (3.33) идеального эллиптического поляризатора можно записать, используя поляризационное отношение, характеризующее

эллипс поляризации, отвечающий оси пропускания:

$$T = \dot{A} \begin{vmatrix} 1 & \dot{P}^* \\ \dot{P} & \dot{P}\dot{P}^* \end{vmatrix}. \quad (3.34)$$

Форма записи матрицы Джонса в виде (3.34) является весьма удобной, так как после подстановки в эту форму выражение для поляризационного отношения, заданного в используемом базисе, необходимый оператор будет найден без особого труда. Так, например, поскольку поляризационное отношение для эллиптически поляризованной волны в круговом базисе имеет вид

$$\dot{P}^{RL} = tg(\alpha + \pi/4) \exp -j2\beta$$

то матрица Джонса эллиптического поляризатора (с точностью до постоянного множителя) в круговом базисе записывается как

$$\begin{aligned} \|T^{RL}\| &= \begin{vmatrix} 1 & \dot{P}_{RL}^* \\ \dot{P}_{RL} & \dot{P}_{RL}\dot{P}_{RL}^* \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(\alpha + \pi/4)} \begin{vmatrix} \cos^2(\alpha + \pi/4); & \frac{1}{2} \cos 2\alpha \exp j2\beta \\ \frac{1}{2} \cos 2\alpha \exp -j2\beta & \sin^2(\alpha + \pi/4) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.34a)$$

Здесь, как и ранее,  $\alpha$  и  $\beta$  — это угол эллиптичности и азимут эллипса поляризации, отвечающего оси пропускания.

Поскольку для круговых поляризаций  $\alpha = \pm\pi/4$ , то матрицы Джонса кругового поляризатора в собственном базисе определяются как:

$$\|T_{RL}^L\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \|T_{RL}^R\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

При этом ось пропускания кругового идеального поляризатора отвечает левой или правой круговой поляризации соответственно.

### ***3.6 Представление преобразований поляризации на комплексной плоскости.***

При решении инженерных задач математический формализм матриц

Джонса необходимо сопровождать визуальными геометрическими построениями, иллюстрирующими процессы формирования и преобразования поляризационной структуры радиосигналов. К таким представлениям относится изображение поляризации электромагнитных волн на сфере Пуанкаре и на комплексной плоскости.

Очевидно, что воздействие простого прибора на электромагнитную волну должно, в общем случае, привести к перемещению точки, изображающей поляризацию входной волны на сфере, в положение, соответствующее поляризации выходной волны. Однако, если представление поляризации волны точкой на сфере Пуанкаре может быть построено без особого труда, то процедура, определяющая траекторию перемещения изображающей точки из исходной позиции (входная волна) до конечной (выходная волна) на основе простейших соображений построена быть не может. Конечно, для каждого конкретного прибора, при заданных конкретных параметрах можно, зная входной и выходной векторы Джонса, определить исходную и конечную точки траектории. Но в процессе анализа и проектирования устройств, формирующих и преобразующих поляризацию радиолокационных сигналов, приходится иногда анализировать целый ряд вариантов. При этом желательно владеть не только способом построения конечных точек траектории, но и знать общие законы перемещения изображающей точки.

Эти законы могут быть установлены на основе построения представлений преобразования поляризации на комплексной плоскости, связанной со сферой Пуанкаре стереографической проекцией [18].

Напомним, что уравнения стереографической проекции были определены соотношениями (1.68). Они имеют вид

$$X_1 = \frac{\operatorname{Re} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}; \quad X_2 = \frac{\operatorname{Im} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}; \quad X_3 = \frac{|\dot{P}^{RL}|^2}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}$$

и взаимно-однозначно связывают точки комплексной плоскости (в данном случае – точки круговой комплексной плоскости) с точками, лежащими на

поверхности сферы единичного диаметра (сферы Римана). В Главе 1 было также показано, что переход от сферы Римана к сфере Пуанкаре, имеющей единичный радиус, может быть реализован с использованием уравнений (1.70а-г). Новые уравнения стереографической проекции, взаимно – однозначно связывающие точки комплексной плоскости с точками, лежащими на поверхности сферы Пуанкаре, имеют вид:

$$X = \frac{2\operatorname{Re} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}, \quad Y = \frac{2\operatorname{Im} \dot{P}^{RL}}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2}, \quad Z = 2 \left\{ \frac{|\dot{P}^{RL}|^2}{1 + |\dot{P}^{RL}|^2} - \frac{1}{2} \right\}.$$

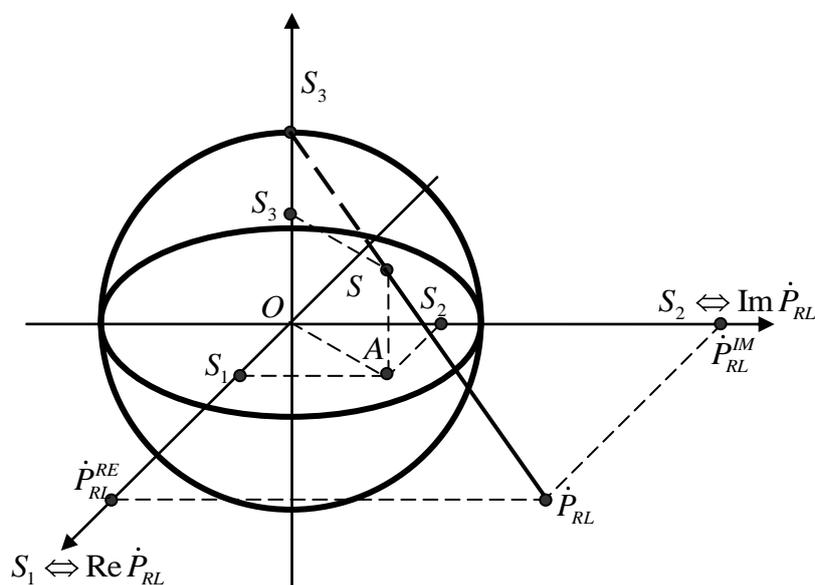


Рис. 3.3

Рис.3.3 демонстрирует связь между точками круговой комплексной плоскости  $\dot{P}^{RL}$  с точками, лежащими на поверхности сферы Пуанкаре. По сравнению с Рис.1.14а (см Гл.1), который демонстрирует связь точек комплексной плоскости и сферы Римана, круговая комплексная плоскость на Рис. 3.3 совпадает с экваториальной плоскостью сферы Пуанкаре.

Отображение состояний поляризации точками комплексной плоскости было рассмотрено в Главе 1 с использованием линейного и кругового поляризационных базисов. При этом было показано, что произвольное

эллиптическое состояние поляризации, характеризуемое некоторым углом эллиптичности  $\alpha$  и азимутом  $\beta$  может быть представлено комплексным числом  $\dot{P}$  (комплексным поляризационным отношением). Поскольку каждому комплексному числу  $\dot{P}$  может быть сопоставлена единственная точка комплексной плоскости  $\text{Re}\dot{P} + j\text{Im}\dot{P}$ , то эта плоскость представляет собой пространство состояний поляризации. В зависимости от используемого поляризационного базиса комплексная плоскость может быть декартовой, круговой или обобщенной.

Возвратимся теперь к вопросам преобразования поляризации плоских волн простыми приборами.

Если имеется некоторый простой прибор, характеризуемый матрицей Джонса  $\|d_{jl}\|$  ( $j, l = 1, 2$ ) то в линейном поляризационном базисе выходной вектор Джонса имеет вид

$$\dot{\mathbf{E}}_{OUT} = \left\| \begin{array}{l} \dot{d}_{11}\dot{\mathbf{E}}_X^{INP} + \dot{d}_{12}\dot{\mathbf{E}}_Y^{INP} \\ \dot{d}_{21}\dot{\mathbf{E}}_X^{INP} + \dot{d}_{22}\dot{\mathbf{E}}_Y^{INP} \end{array} \right\|,$$

а соответствующее ему комплексное поляризационное отношение определяется как

$$\dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{21}\dot{\mathbf{E}}_X^{INP} + \dot{d}_{22}\dot{\mathbf{E}}_Y^{INP}}{\dot{d}_{11}\dot{\mathbf{E}}_X^{INP} + \dot{d}_{12}\dot{\mathbf{E}}_Y^{INP}} = \frac{\dot{d}_{21} + \dot{d}_{22}\dot{P}_{INP}}{\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP}}. \quad (3.35)$$

Здесь  $\dot{P}_{INP} = \dot{\mathbf{E}}_Y^{INP} / \dot{\mathbf{E}}_X^{INP}$ ,  $\dot{P}_{OUT} = \dot{\mathbf{E}}_Y^{OUT} / \dot{\mathbf{E}}_X^{OUT}$  есть поляризационные отношения для входного и выходного векторов Джонса соответственно.

Выражение (3.35) связывает поляризационные отношения входной и выходной волн дробно-линейным преобразованием, коэффициентами которого являются элементы матрицы Джонса простого прибора. Отметим сразу же, что выражение (3.35) обратимо. Это выражение позволяет определить параметры эллипса поляризации входной волны при известной поляризации волны на выходе прибора. Обращённое выражение имеет вид:

$$\dot{P}_{INP} = (-\dot{d}_{21} + \dot{d}_{11}\dot{P}_{OUT})(-\dot{d}_{22} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{OUT})^{-1}.$$

При рассмотрении дробно-линейного преобразования (3.35) в общем случае полагают, что детерминант матрицы Джонса отличен от нуля ( $\dot{d}_{11}\dot{d}_{22} - \dot{d}_{21}\dot{d}_{12} \neq 0$ ), так как в случае, если он равен нулю, функция (3.35) сводится к постоянной

$$\dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{12}} = \frac{\dot{d}_{21}}{\dot{d}_{11}}.$$

Физический смысл последнего выражения заключается в том, что оно соответствует прибору, отражающему все возможные поляризации входной волны  $\dot{P}_{INP}$ , в единственную поляризацию выходной волны, имеющую поляризационное отношение  $\dot{P}_{OUT}$ . Этим свойством обладает идеальный поляризатор (в общем случае - эллиптический), матрица Джонса которого имеет равный нулю детерминант.

В случае отсутствия дихроизма матрицы Джонса простых приборов унитарны, и имеют детерминант, модуль которого равен единице.

Продолжим анализ дробно-линейного преобразования (3.35), считая, что  $\det[d_{jl}] = 0$ .

В случае если элемент  $\dot{d}_{12}$  матрицы Джонса обращается в нуль, преобразование сводится к линейному отображению

$$\dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{11}} \dot{P}_{INP} + \frac{\dot{d}_{21}}{\dot{d}_{11}}. \quad (3.36)$$

Геометрический смысл соотношения (3.36) заключается в растяжении (сжатии) с поворотом и сдвигом. Последовательность построений при изображении этого преобразования на декартовой комплексной плоскости сводится к следующим операциям:

Представим, прежде всего, что комплексные плоскости  $\dot{P}_{INP}$  и  $\dot{P}_{OUT}$ , отвечающие входному и выходному поляризационным отношениям, наложены друг на друга так, что их координатные оси совпадают и пусть точка  $\dot{P}_{INP}$  изображает поляризацию исходной волны (3.36).

Поскольку отношение двух комплексных чисел  $\dot{d}_{22}/\dot{d}_{11}$  есть комплексное число  $a \exp j\varphi$ , то первая из операций в выражении (3.36) есть просто умножение величины  $\dot{P}_{INP}$  на число  $a \exp j\varphi$ . При этом модуль результата есть произведение модулей сомножителей, а аргумент есть сумма аргументов сомножителей. Если  $|a| > 1$ , имеет место растяжение, если  $|a| < 1$  - сжатие. Изменение аргумента есть поворот точки на угол  $\varphi$ .

Вторая операция состоит в суммировании комплексных чисел  $a\dot{P}_0 \exp j\varphi$  и  $\dot{d}_{21}/\dot{d}_{11}$ , т.е. в определении проекций результирующего поляризованного отношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{P}_{OUT} &= \operatorname{Re}\{a \exp j\varphi \dot{P}_{INP}\} + \operatorname{Re} \dot{d}_{21}/\dot{d}_{11} ; \\ \operatorname{Im} \dot{P}_{OUT} &= \operatorname{Im}\{a \exp j\varphi \dot{P}_{INP}\} + \operatorname{Im} \dot{d}_{21}/\dot{d}_{11} . \end{aligned}$$

Результирующая точка  $\dot{P}_{OUT}$  в соответствии с законом стереографической проекции может быть отображена на единичную сферу. Если элементы матрицы Джонса прибора изменяются, то точка  $\dot{P}_{OUT}$  опишет некоторую траекторию на сфере.

Необходимо отметить, что в ряде случаев элементы  $\dot{d}_{12}$  и  $\dot{d}_{21}$  обращаются в нуль одновременно, что отвечает представлению матрицы Джонса в собственной системе координат. При этом  $\dot{P}_{OUT} = \dot{d}_{22}/\dot{d}_{11} \dot{P}_{INP}$  и преобразование (3.36) сводится к простому повороту с растяжением (сжатием). Физически такое преобразование реализуется при помощи фазосдвигающего устройства, собственный базис которого совпадает с опорной системой координат.

В общем случае, если ни один из элементов матрицы Джонса не равен нулю, дробно-линейное преобразование (3.35) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\dot{d}_{21} + \dot{d}_{22} \dot{P}_{INP}}{\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12} \dot{P}_{INP}} = \frac{\dot{d}_{12} (\dot{d}_{21} + \dot{d}_{22} \dot{P}_{INP})}{\dot{d}_{12} (\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12} \dot{P}_{INP})} = \frac{\dot{d}_{12} (\dot{d}_{21} + \dot{d}_{22} \dot{P}_{INP}) + \dot{d}_{11} \dot{d}_{22} - \dot{d}_{11} \dot{d}_{22}}{\dot{d}_{12} (\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12} \dot{P}_{INP})} =$$

$$= \frac{\dot{d}_{22}(\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP}) + \dot{d}_{21}\dot{d}_{12} - \dot{d}_{11}\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{12}(\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP})} = \frac{\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{12}} - \frac{\dot{d}_{11}\dot{d}_{22} - \dot{d}_{21}\dot{d}_{12}}{\dot{d}_{12}(\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP})}. \quad (3.37)$$

Поскольку принято условие  $\det \|\dot{d}_{jl}\| = 1$ , то выражение (3.37) можно упростить

$$\dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{12}} - \frac{1}{\dot{d}_{12}(\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP})};$$

и рассматривать его как последовательность простых преобразований (отображений)

$$\dot{\xi} = \dot{d}_{12}\dot{P}_{INP} + \dot{d}_{11}; \quad \dot{W} = \frac{1}{\dot{\xi}}; \quad \dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{22}}{\dot{d}_{11}} - \left( \frac{1}{\dot{d}_{12}} \right) \dot{W}. \quad (3.38)$$

Первое и третье из отображений (3.38) сводятся к растяжению (сжатию) с поворотом и сдвигу. Выясним смысл второго преобразования:

Пусть имеются две плоскости комплексных переменных  $\dot{\xi}$  и  $\dot{W}$ , наложенные одна на другую. Тогда отображение  $\dot{W} = 1/\dot{\xi}$  означает переход от комплексного числа  $\dot{\xi}$  к числу  $1/\dot{\xi}$ . Способ геометрического построения точки  $1/\dot{\xi}$  по данной точке  $\dot{\xi}$  заключается в следующем:

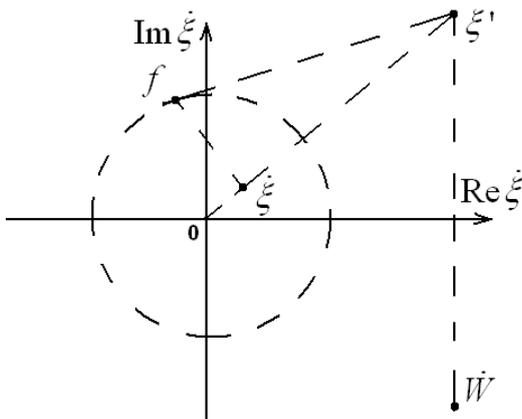


Рис.3.4

Проведём на комплексной плоскости  $\dot{\xi}$  единичную окружность и пусть  $|\dot{\xi}| < 1$  (рис.3.3). Из точки  $\dot{\xi}$  проведём перпендикуляр к лучу  $O\xi$  до пересечения с

окружностью  $|\dot{\xi}|=1$ . В точке  $f$  пересечения перпендикуляра и окружности построим касательную к окружности до пересечения с лучом  $O\xi$  в точке  $\dot{\xi}$ .

В случае если  $|\dot{\xi}| > 1$ , построение производится в обратном порядке, т.е. вначале из точки  $|\dot{\xi}| > 1$  проводится касательная к окружности, а из точки пересечения опускается перпендикуляр на луч  $O\xi$ . Переход от комплексного числа  $\dot{\xi}$  к числу  $1/\dot{\xi}$ , произведённый в соответствии с изложенным, называется инверсией относительно единичной окружности, а точки  $\dot{\xi}$  и  $\dot{\xi}'$  симметричными относительно этой окружности. Теперь остаётся построить точку  $\dot{W}$ , симметричную  $\dot{\xi}'$  относительно действительной оси. Эта операция соответствует изменению знака аргумента числа  $\dot{\xi}'$  на обратный.

Итак, отображение вида  $\dot{W} = 1/\dot{\xi}$  сводится к двум операциям:

- 1) инверсия относительно единичной окружности, при которой аргумент не изменяется, а модуль изменяется на обратную величину;
- 2) отражение относительно действительной оси, при которой модуль не изменяется, а аргумент меняет знак.

Используя изложенное, можно в соответствии с выражениями (3.38) произвести геометрические построения, описывающие переход от поляризационного отношения входной волны  $\dot{P}_{INP}$  к поляризационному отношению выходной волны  $\dot{P}_{OUT}$ .

Завершая изложение вопросов геометрических построений, связанных с дробно-линейным преобразованием, укажем, что ранее рассмотренную операцию вида  $\dot{P} = -1/\dot{P}^*$ , которая используется при определении геометрического представления пары ортогональных поляризаций, не следует отождествлять с изложенной выше последовательностью операций. При определении поляризации, ортогональной к некоторой заданной, вначале проводят инверсию относительно единичной окружности, определяя точку, отвечающую величине  $1/\dot{P}^*$ , а затем завершают построение инверсией

относительно начала координат с целью построения точки, отвечающей величине  $-1/\dot{P}^*$ .

Отметим, теперь, что дробно-линейное преобразование обладает рядом некоторых специфических свойств, использование которых является весьма полезным в задачах построения и визуализации преобразований поляризации простыми приборами.

Первым из таких свойств является так называемое круговое свойство. Это свойство заключается в том, что произвольное дробно-линейное преобразование (в случае  $\det[d_{jl}] \neq 0$ ) отображает любую окружность на плоскости комплексного переменного  $\dot{P}_{INP}$  в окружность на плоскости  $\dot{P}_{OUT}$ . Это свойство можно сформулировать и по-другому: произвольное дробно-линейное преобразование отображает любую окружность плоскости  $\dot{P}_{INP}$  в окружность плоскости  $\dot{P}_{OUT}$ . При рассмотрении, проводимом на комплексной плоскости, прямые линии считаются окружностями бесконечного радиуса. Свойство отображения "окружность в окружность", представляет собой чрезвычайно важную особенность дробно-линейных преобразований. Рассмотрим это свойство применительно к кривым постоянного азимута и постоянной эллиптичности (рис.3.5). Здесь сплошные кривые отвечают эллипсам поляризации, имеющим постоянный азимут, а штриховые - постоянную эллиптичность (декартова комплексная плоскость).

Если эллипс поляризации волны на входе простого прибора имеет постоянный азимут и переменный угол эллиптичности, то точка  $\dot{P}_{OUT}$ , изображающая волну на выходе прибора, будет перемещаться по окружности, которая всегда будет проходить через точки

$$a' = \frac{-j\dot{d}_{22} + \dot{d}_{21}}{-j\dot{d}_{12} + \dot{d}_{11}}; \quad b' = \frac{j\dot{d}_{22} + \dot{d}_{21}}{j\dot{d}_{12} + \dot{d}_{11}},$$

изображающие отклик прибора на поляризованные по кругу волны ( $\dot{P}_{INP} = \pm j$ ).

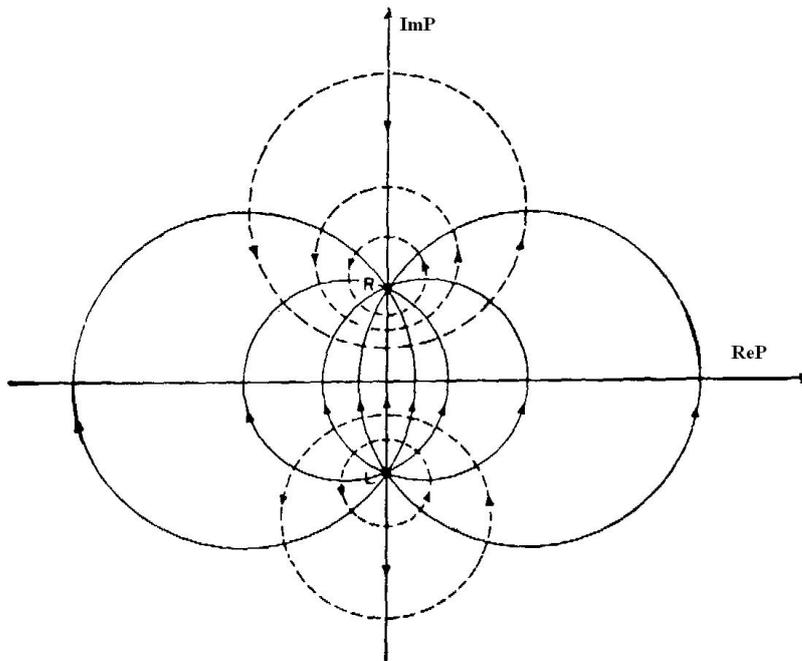


Рис.3.5

Произведём для примера геометрические построения, отвечающие нескольким простейшим преобразованиям, совершаемым над волнами, изображающие точки которых лежат на окружности постоянного азимута.

Рассмотрим преобразование вида  $\dot{P}_1 = 1/\dot{P}_0$ , соответствующее матрице Джонса, у которой элементы  $\dot{d}_{11} = \dot{d}_{22} = 0$ , а  $\dot{d}_{12} = \dot{d}_{21} = 1$ . Способ перехода от комплексного числа  $\dot{P}_0$  к числу  $\dot{P}_1$  рассмотрен выше, поэтому нетрудно построить изображение любой точки, лежащей на окружности. Произведём построение для четырёх точек (две точки, изображающие исходные круговые поляризации, определяемые пересечением окружности  $R_o$  с осью  $Im\dot{P}_0$  и две точки, изображающие линейные поляризации входной волны, определяемые пересечениями окружности  $R_o$  с осью  $Re\dot{P}_0$ ) и одной произвольной точки  $C$ , лежащей на окружности  $R_o$  (рис.3.6).

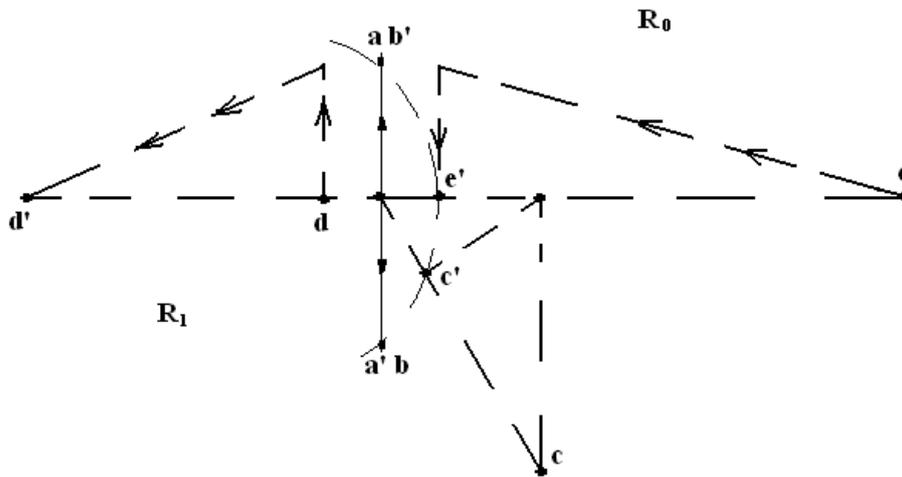


Рис.3.6

Простейшие построения, описанные выше, дают следующие соответствия входа и выхода:

$$a \rightarrow b, \quad b \rightarrow a, \quad c \rightarrow c', \quad d \rightarrow d', \quad e \rightarrow e'.$$

Если теперь провести через любые из трёх полученных после преобразования точек окружность, то можно наглядно убедиться в том, что, действительно, все точки, изображающие поляризации преобразованных входных волн, отвечающих окружности  $R_0$ , лежат на окружности  $R_1$ .

Рассмотрим еще один пример, связанный с построением отображения вида  $\dot{P}_1 = \dot{P}_0 \exp j\varphi_0$  при заданном значении угла  $\varphi_0$ . Такое преобразование, как было указано выше, осуществляется идеальным (не вносящим потерь) фазосдвигающим устройством при рассмотрении в его собственном базисе.

Поскольку в данном случае вектор Джонса на выходе устройства определяется как

$$\begin{pmatrix} \dot{E}'_X \\ \dot{E}'_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp -j0.5\Delta\varphi_0 & 0 \\ 0 & \exp j0.5\Delta\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_X \\ \dot{E}_Y \end{pmatrix},$$

то поляризационное отношение для выходной волны определяется как

$$\dot{P}'_{XY} = \frac{\dot{E}'_Y \exp j0.5\Delta\varphi_0}{\dot{E}'_X \exp -j0.5\Delta\varphi_0} = \dot{P}_{XY} \exp j\Delta\varphi_0,$$

где  $\dot{P}'_{XY}$  есть поляризационное отношение для входной волны, а  $\Delta\varphi_0$  -

дополнительный фазовый сдвиг между ортогональными составляющими, вносимый фазосдвигающим устройством. Таким образом, данное преобразование сводится к простому повороту (Рис.3.7).

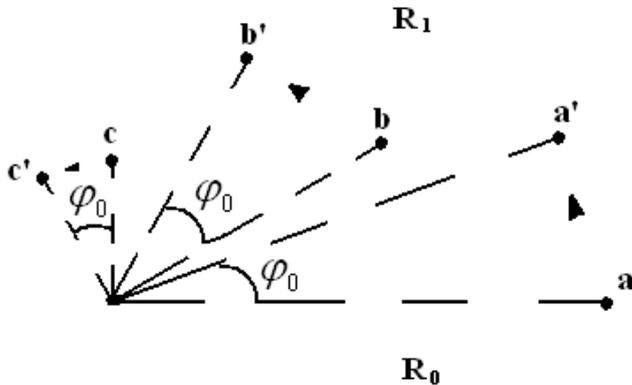


Рис.3.7

Задав три точки на некоторой окружности  $R_0$ , можно убедиться в том, что после поворотов  $a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c'$ , окружность  $R_0$  отображается на некоторую окружность  $R_1$ .

Необходимо отметить ещё одно важное свойство дробно-линейного преобразования [18]. Если в выражении (3.35) разделить числитель и знаменатель на любой из элементов матрицы Джонса, то, как можно увидеть, дробно-линейное преобразование определяется всего тремя комплексными параметрами. Так, выполнив для определённости деление на  $\dot{d}_{11}$ , получим

$$\dot{P}_1 = (\dot{a} + b\dot{P}_0)(1 + c\dot{P}_0)^{-1}, \quad (3.39)$$

где  $\dot{a} = \dot{d}_{21} / \dot{d}_{11}; \dot{b} = \dot{d}_{22} / \dot{d}_{11}; \dot{c} = \dot{d}_{12} / \dot{d}_{11}$ .

Это обстоятельство позволяет осуществить следующую операцию: если на плоскости  $\dot{P}_0$  заданы три различные точки  $\dot{P}_{01}, \dot{P}_{02}, \dot{P}_{03}$ , а на плоскости  $\dot{P}_1$  три различные точки  $\dot{P}_{11}, \dot{P}_{12}, \dot{P}_{13}$ , то можно найти отображение, преобразующее  $\dot{P}_{0N}$  в  $\dot{P}_{1N}$   $N = 1, 2, 3$ , т.е. определить коэффициенты дробно-линейного преобразования (элементы матрицы Джонса). Искомая операция при конечных (не равных  $\infty$ )  $\dot{P}_{0N}$  и  $\dot{P}_{1N}$  осуществляются отображением

$$\frac{\dot{P}_1 - \dot{P}_{11} \quad \dot{P}_{13} - \dot{P}_{12}}{\dot{P}_1 - \dot{P}_{12} \quad \dot{P}_{13} - \dot{P}_{11}} = \frac{\dot{P}_0 - \dot{P}_{01} \quad \dot{P}_{03} - \dot{P}_{02}}{\dot{P}_0 - \dot{P}_{02} \quad \dot{P}_{03} - \dot{P}_{01}}. \quad (3.40)$$

Применительно к простым приборам это свойство можно сформулировать следующим образом: если известен отклик простого прибора на три различные поляризации падающей волны, то его отклик на все другие поляризации полностью определён. Кроме того, всегда можно найти элементы преобразования, которое отображает состояние поляризации падающих волн из круговой области на плоскости  $\dot{P}$  в заданную круговую область на плоскости  $\dot{P}_1$ . При этом выражение (3.40) обеспечивает необходимое отображение, если заданы три точки на каждой из окружностей, ограничивающих эти области. По сути дела, изложенное свидетельствует о возможности синтеза простого прибора, осуществляющего необходимое нам преобразование поляризации.

Возможна и ещё одна трактовка этого свойства, связанная с определением характеристик радиолокационного объекта, в случае, если этот объект можно считать простым прибором, характеризуемым некоторой матрицей Джонса. Если облучить объект последовательно тремя поляризациями  $\dot{P}_{0N}$  ( $N = 1,2,3$ ) и определить его отклики  $\dot{P}_{1N}$  ( $N = 1,2,3$ ) на каждую из поляризаций  $\dot{P}_{0N}$ , то можно найти элементы дробно-линейного преобразования (т.е. элементы матрицы Джонса), совершаемого радиолокационным объектом, т.е. определить его поляризационные параметры.

Рассмотрим ещё одно важное свойство дробно-линейного преобразования, имеющее важное значение для теории представления преобразований поляризации простыми приборами. Это свойство заключается в том, что дробно-линейное преобразование всегда имеет две фиксированные (инвариантные) точки  $\dot{P}_0^1$  и  $\dot{P}_0^2$ , которые при определённых условиях могут совпадать.

Применительно к простым приборам это свойство трактуется следующим образом: каждый простой прибор имеет две собственные поляризации (т.е. поляризации, которые не изменяются при прохождении через этот прибор),

которые соответствуют двум инвариантным точкам дробно-линейного преобразования. Математическое определение поляризационного отношения для входных волн, отвечающих собственным поляризациям, можно ввести на основе общей записи (3.35) дробно-линейного преобразования, используя условие неизменности состояния поляризации на выходе прибора по сравнению с состоянием поляризации на входе. Это условие можно записать в виде  $\dot{P}_1 = \dot{P}_0 = \dot{P}$ .

Тогда

$$\dot{P} = (\dot{d}_{21} + \dot{d}_{22}\dot{P})(\dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P})^{-1},$$

откуда можно получить уравнение

$$\dot{d}_{12}\dot{P}^2 + (\dot{d}_{11} + \dot{d}_{22})\dot{P} - \dot{d}_{21} = 0;$$

корни, которого и представляют собой поляризационные отношения для собственных поляризаций:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{1,2} &= \frac{1}{2\dot{d}_{12}} (\dot{d}_{11} - \dot{d}_{22}) \pm \left[ (\dot{d}_{22} - \dot{d}_{11})^2 + 4\dot{d}_{12}\dot{d}_{21} \right]^{0.5} = \\ &= \frac{1}{2\dot{d}_{12}} \left( (\dot{d}_{11} - \dot{d}_{22}) \pm (\dot{d}_{11} + \dot{d}_{22}) \left[ 1 - \frac{4\det D}{Sp^2 D} \right]^{0.5} \right), \end{aligned}$$

где  $\det D = \dot{d}_{11}\dot{d}_{22} - \dot{d}_{12}\dot{d}_{21}$ ,  $SpD = \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22}$ .

Собственные поляризации совпадают при выполнении условия  $[1 - 4\det D / Sp^2 D] = 0$ . Если это условие не выполняется, то собственные поляризации различны. При совмещении плоскостей  $P_0$  и  $P_1$  любая окружность, проходящая через инвариантные точки  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}_2$ , преобразуется в другую окружность, проходящую через эти же точки.

### ***3.7 Представление преобразований поляризационной структуры на поляризационной сфере.***

Для визуализации представления преобразований поляризационной

структуры сигналов будем использовать взаимосвязь представлений поляризации на комплексной плоскости и на поляризационной сфере. Удобство использования поляризационной сферы по сравнению с комплексной плоскостью заключается в том, что на ней можно отобразить поведение функций на всей комплексной плоскости, включая точку на бесконечности. Принимая точку сферы, диаметрально противоположную точки касания плоскости и сферы за центр стереографической проекции, можно спроецировать все точки комплексной плоскости на сферу. Точка касания и противоположная ей точка образуют поляризационный базис. (Напомним, что при введении понятия поляризационной сферы была использована круговая комплексная плоскость. Последнее обусловило тот факт, что полюса сферы отвечают круговым поляризациям левого и правого направления вращения.)

Рассмотрим простой пример, демонстрирующий представление преобразований поляризации на сфере.

Зададим поляризационную сферу единичного диаметра, полярная ось которой ориентирована вертикально (рис.3.8). Из результатов Главы 1 следует, что уравнения стереографической проекции, связывающие точки, лежащие на поверхности сферы единичного диаметра, с точками комплексной плоскости, касающейся сферы, без особых трудностей трансформируются в модифицированные уравнения стереографической проекции, связывающие комплексную плоскость и сферу Пуанкаре. Поэтому, все рассуждения, проведенные для случая использования поляризационной сферы единичного диаметра, будут справедливы и для сферы Пуанкаре.

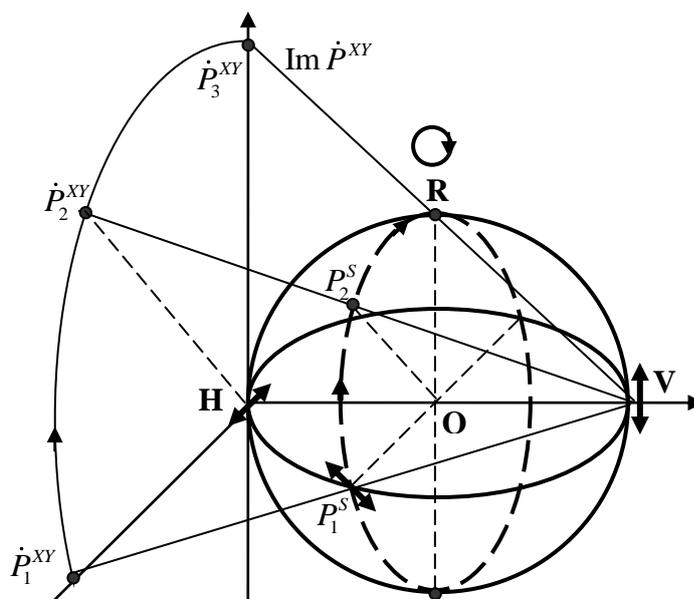


Рис.3.8

Пусть декартова комплексная плоскость ориентирована вертикально и касается поляризационной сферы единичного диаметра в точке  $H$ , отвечающей горизонтальной поляризации и лежащей на экваторе сферы. Тогда диаметрально противоположная ей точка  $V$  (вертикальная поляризация) представляет собой центр стереографической проекции, связывающей поляризационную сферу с вертикально ориентированной декартовой комплексной плоскостью. Отметим, что точки  $H, V$  образуют ортогональный (линейный) поляризационный базис.

Предположим, что этот базис представляет собой собственную систему координат фазосдвигающего устройства, вносящего переменный фазовый сдвиг между поляризационно-ортогональными составляющими входной волны. Пусть на входе этого прибора имеют место линейно-поляризованные волны с изменяющимся азимутом. Будем полагать, что комплексные плоскости  $\dot{P}_0$  (состояние поляризации на входе прибора) и  $\dot{P}_1$  (состояние поляризации на выходе) совмещены, а поляризация входной волны линейная с азимутом  $(-45^\circ)$ . В этом случае входная волна изображается точкой  $\dot{P}_1^{XY}$  ( $\text{Re } \dot{P}_1^{XY} = -1; \text{Im } \dot{P}_1^{XY} = 0$ ), а поляризация выходной волны определяется поворотом  $\dot{P}_{OUT}^{XY} = \dot{P}_{XY} \exp j\Delta\varphi_0$ , где  $\Delta\varphi_0$  - переменный фазовый сдвиг, вносимый устройством. Примем для определенности, что фазовый сдвиг, вносимый прибором, изменяется в интервале значений  $0^\circ - 90^\circ$ . Тогда, при

изменении фазового сдвига точка, отвечающая выходной волне, будет перемещаться по единичной окружности комплексной плоскости от точки  $\dot{P}_1^{XY}$  ( $\text{Re } \dot{P}_1^{XY} = -1; \text{Im } \dot{P}_1^{XY} = 0$ ) к точке  $\dot{P}_3^{XY}$  ( $\text{Re } \dot{P}_3^{XY} = 0; \text{Im } \dot{P}_3^{XY} = 1$ ), что соответствует изменению угла эллиптичности эллипса поляризации выходной волны в интервале  $0 - \pi/4$ , т.е. от линейной поляризации до круговой. Нетрудно видеть, что в рассматриваемой ситуации (фазовое устройство с линейными собственными поляризациями, линейно поляризованная входная волна) угол эллиптичности выходной волны равен половине фазового сдвига, вносимого фазовым устройством.

Принимая точку  $V$  сферы (вертикальная поляризация) за центр стереографической проекции, отобразим результат воздействия фазосдвигающего устройства на поверхность поляризационной сферы. Тогда точки  $\dot{P}_1^{XY}, \dot{P}_2^{XY}, \dot{P}_3^{XY}$  отображаются в точки  $P_1^S, P_2^S, P_3^S$  определяемые как пересечение лучей  $V\dot{P}_1^{XY}, V\dot{P}_2^{XY}, V\dot{P}_3^{XY}$  с поверхностью сферы. Все множество точек дуги  $\dot{P}_1\dot{P}_3$  единичной окружности декартовой комплексной плоскости отобразится в точки дуги  $P_1^S R$  меридиана сферы. Поскольку меридианы поляризационной сферы представляют собой кривые постоянного азимута, то при передвижении точки по указанной дуге происходит только изменение угла эллиптичности эллипса поляризации выходной волны в интервале  $0 - \pi/4$ . Нетрудно видеть, что перемещение изображающей точки на поляризационной сфере можно трактовать как поворот вокруг диаметра  $HV$  соединяющего точки, отвечающие собственным поляризациям прибора, преобразующего поляризацию волны.

Изложенное выше позволяет сформулировать общее правило визуализации процесса преобразования состояния поляризации волн фазовыми приборами на поляризационной сфере:

1. Определяются (или задаются) собственные поляризации прибора, изображаемые диаметрально-противоположными точками поляризационной

сферы.

2. Из точки изображающей состояние поляризации входной волны на поверхности сферы (например, точка  $P_1^S$  на рис. 3.8), опускается перпендикуляр на диаметр, соединяющий собственные поляризации ( $HV$  на рис. 3.8).

3. Производится поворот точки, изображающей поляризацию входной волны вокруг диаметра, соединяющего собственные поляризации, на угол  $\varphi$ , равный запаздыванию, вносимому фазовым устройством.

В заключение отметим, что в общем случае фазовое устройство изменяет как эллиптичность, так и азимут поляризации входной волны.

Рассмотренная методика визуализации представления преобразований на поляризационной сфере, будет широко использоваться в дальнейшем.

### ***3.8 Фазосдвигающее устройство, реализующее операцию изменения эллиптичности.***

При анализе действия фазосдвигающего устройства было указано, что в общем случае это устройство изменяет как азимут, так и угол эллиптичности падающей на него волны. Рассмотрим теперь, при каких условиях это устройство изменяет только угол эллиптичности входной волны, оставляя неизменным угол ориентации эллипса поляризации. Анализ проведём вначале графическим методом на сфере Пуанкаре, основываясь на результатах, полученных в предыдущем параграфе, а затем найдём аналитическое выражение для матрицы Джонса такого устройства.

Известно, что геометрическим местом точек, отвечающих состояниям поляризации с постоянным азимутом и переменным углом эллиптичности, являются меридианы сферы Пуанкаре. Если задать некоторую исходную точку, соответствующую состоянию поляризации входной волны, то действие фазосдвигающего устройства, осуществляющего только операцию изменения

эллиптичности, сводится к перемещению этой точки на угол  $\varphi$  в меридиональной плоскости. При этом осью вращения служит диаметр сферы Пуанкаре, соединяющий точки, изображающие собственные поляризации прибора и, естественно, перпендикулярный к меридиональной плоскости, в которой происходит перемещение точки.

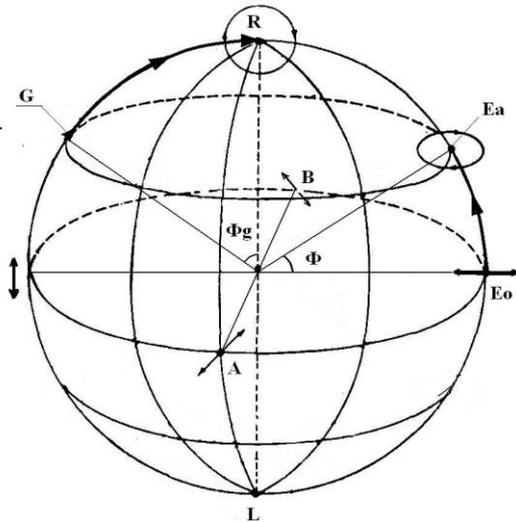


Рис.3.9а

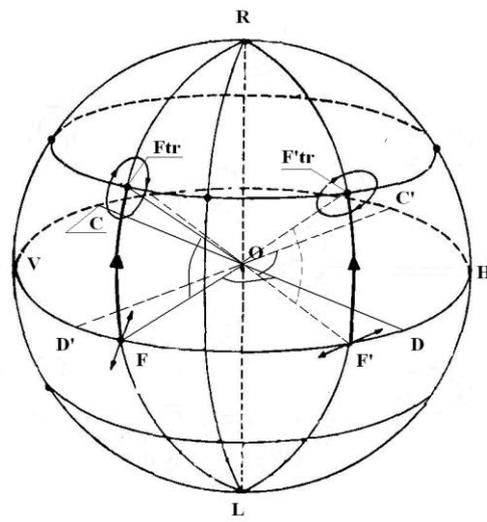


Рис.3.9.б

Предположим, что собственный базис прибора образован парой ортогональных линейных поляризаций с азимутом  $\pm 45^\circ$  (рис.3.9а), а фазовый сдвиг  $\Phi$ , вносимый прибором, является переменным. Тогда, если входная волна поляризована линейно и имеет горизонтальную ориентацию (точка  $E_0$  на рис. 3.9а) то поворот на угол  $\Phi$  происходит вокруг оси  $AB$  и состояние поляризации выходной волны отображается точкой  $E_A$ , перемещающейся по меридиану сферы. Диаметр  $AB$ , соединяющий собственные поляризации, перпендикулярен к меридиональной плоскости, соединяющий точки  $E_0$  и  $E_A$ .

Если входная волна поляризована эллиптически (например, точка  $G$  на меридиане, проходящем через вертикальную линейную поляризацию), а фазовый сдвиг равен  $\Phi_g$ , то точка, изображающая выходную поляризацию есть точка  $R$  на этом же меридиане, т.е. северный полюс поляризационной сферы. Поворот произведён вокруг оси  $AB$ , поскольку она перпендикулярна меридиональной плоскости, в которой лежит точка  $G$ . Из изложенного следует,

что операция изменения эллиптичности при неизменном азимуте может быть реализована только прибором, имеющим линейные собственные поляризации, поскольку поворот точки вокруг любой оси, не лежащей в экваториальной плоскости сферы, приведет к смещению изображающей точки с исходного меридиана, т.е. к изменению азимута эллипса поляризации.

Таким образом, рассмотрено два частных случая использования фазосдвигающего устройства, реализующего операцию изменения угла эллиптичности эллипса поляризации входного сигнала.

Аналогично можно рассмотреть геометрическое построение для точек, лежащих на любом меридиане сферы (см.рис.3.9б). Так, например, если взять меридиан, отвечающий исходной наклонной линейной поляризации (точка  $F$ ), то осью вращения будет служить диаметр  $CD$ , соединяющий изображающие точки собственных линейных поляризаций прибора. При этом угол  $FOD$  в экваториальной плоскости равен  $\pi/2$ , что отвечает, как и ранее, ориентации  $45^\circ$  собственного линейного базиса фазового устройства относительно меридиональной плоскости входных поляризаций. (Не следует забывать, что долгота на поляризационной сфере определяется удвоенным азимутальным углом эллипса поляризации).

Перейдём теперь к аналитическому рассмотрению устройства, реализующего операцию изменения эллиптичности.

Преобразуем матрицу Джонса (3.18) фазосдвигающего устройства к виду

$$\begin{aligned} \|D_\varphi\| &= \|R(\theta)\|^{-1} \begin{vmatrix} \exp -j0.5\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \exp j0.5\Delta\varphi \end{vmatrix} \|R(\theta)\| = \\ &= \begin{vmatrix} \cos 0.5\Delta\varphi - j \cos 2\theta \sin 0.5\Delta\varphi & -j \sin 2\theta \sin 0.5\Delta\varphi \\ -j \sin 2\theta \sin 0.5\Delta\varphi & \cos 0.5\Delta\varphi + j \cos 2\theta \sin 0.5\Delta\varphi \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Выше, с использованием геометрических построений было показано, что для реализации операции изменения эллиптичности при сохранении азимутального угла необходима ориентация собственного базиса фазового устройства под углом  $45^\circ$  к плоскости поляризации входной волны.

Предполагая, что эта волна ориентирована по одному из ортов опорного базиса, в котором задана матрица (3.18), примем  $\theta = \pi/4$  и получим

$$\|D_\varphi\| = \begin{vmatrix} \cos 0.5\Delta\varphi & -j\sin 0.5\Delta\varphi \\ -j\sin 0.5\Delta\varphi & \cos 0.5\Delta\varphi \end{vmatrix}. \quad (3.42)$$

Рассмотрим воздействие оператора (3.42) на линейно-поляризованную волну, ориентированную по орту  $OY$  опорного базиса:

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \begin{vmatrix} \cos 0.5\Delta\varphi & -j\sin 0.5\Delta\varphi \\ -j\sin 0.5\Delta\varphi & \cos 0.5\Delta\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j\sin 0.5\Delta\varphi \\ \cos 0.5\Delta\varphi \end{vmatrix}. \quad (3.43)$$

Вектор Стокса выходной волны имеет вид

$$\vec{S} = 1 \quad \cos \Delta\varphi \quad 0 \quad \sin \Delta\varphi. \quad (3.44)$$

Поскольку элементы вектора Стокса определяются как  $S_1 = \cos 2\alpha \cos 2\beta$ ,  $S_2 = \cos 2\alpha \sin 2\beta$ ,  $S_3 = \sin 2\alpha$ , то можно записать соотношения  $\cos 2\alpha \cos 2\beta = \cos \Delta\varphi$ ,  $\cos 2\alpha \sin 2\beta = 0$ ,  $\sin 2\alpha = \sin \Delta\varphi$ , из которых следует, что вектор Стокса (3.44) отвечает эллиптически поляризованной волне с азимутом  $\beta = \pi/2$ ,  $\cos 2\beta = 1$ ,  $\sin 2\beta = 0$  и углом эллиптичности  $\alpha = \Delta\varphi/2$ . (При этом на сфере Пуанкаре изображающая точка перемещается на удвоенный угол эллиптичности  $2\alpha = \Delta\varphi$ ).

Если линейно-поляризованная волна ориентирована по одному из ортов системы координат  $X'OY'$ , составляющей угол  $\theta$  с опорной системой координат, то собственный базис прибора, изменяющего эллиптичность, должен быть ориентирован под углом  $45^\circ$  относительно положительного направления орта  $OX'$ . При этом волна на выходе прибора определяется выражением (3.43) (в базисе  $X'OY'$ ), а для записи этой волны в опорном базисе необходимо воздействовать на вектор (3.43) обратным оператором поворота  $\|R(\theta)\|^{-1}$ .

Тогда

$$\dot{\vec{E}}_{OUT}^{X'OY'} = \|R(\theta)\|^{-1} \dot{\vec{E}}_{OUT}^{X'OY'} = \begin{vmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -jS_\alpha \\ C_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -C_\alpha S_\theta - jS_\alpha C_\theta \\ C_\theta C_\alpha - jS_\alpha S_\theta \end{vmatrix}.$$

Если входная волна поляризована эллиптически и записана в собственной системе координат эллипса поляризации, то волна на выходе прибора определяется как

$$\dot{\vec{E}}_{out} = \begin{vmatrix} \cos 0.5\Delta\varphi & -j\sin 0.5\Delta\varphi \\ -j\sin 0.5\Delta\varphi & \cos 0.5\Delta\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_\alpha \\ jS_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha - 0.5\Delta\varphi) \\ j\sin(\alpha - 0.5\Delta\varphi) \end{vmatrix},$$

откуда видно, что произошло изменение угла эллиптичности на величину  $0.5\Delta\varphi$ . Итак, фазосдвигающее устройство, собственный базис которого ориентирован под углом  $45^\circ$  к плоскости поляризации входной волны, и вводящее фазовый сдвиг величиной  $\Delta\varphi$ , осуществляет операцию изменения угла эллиптичности входной волны на величину  $\alpha = 0.5\Delta\varphi$  без изменения азимута входной волны. Матрица Джонса этого устройства называется оператором эллиптичности [15,16] и записывается в виде

$$\|D \ \alpha\| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -j\sin \alpha \\ -j\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}. \quad (3.45a)$$

Здесь необходимо отметить, что оператор (3.45a) получен, исходя из распределения фазового сдвига между ортами собственного базиса, принятого в выражении (3.41).

Если оператор фазосдвигающего устройства записать в виде

$$\begin{vmatrix} \exp j0.5\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \exp -j0.5\Delta\varphi \end{vmatrix},$$

то оператор эллиптичности примет вид

$$\|D \ \alpha\| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & j\sin \alpha \\ j\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}. \quad (3.45b)$$

Операторы (3.45a,б) равноправны.

При записи оператора эллиптичности нельзя задавать значение угла  $\alpha$  большее, чем  $\pi/4$ , поскольку величина угла эллиптичности строго определена в интервале  $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ . Однако, в действительности может иметь место последовательное двух приборов, которым соответствуют операторы

эллиптичности  $\|D \alpha_1\|, \|D \alpha_2\|$ . При этом возможен случай, когда  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi/4$ . Этот случай требует дополнительного анализа. Зададим произведение двух операторов

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha_1 & j \sin \alpha_1 \\ j \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha_2 & j \sin \alpha_2 \\ j \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{array} \right\| = \\ & = \left\| \begin{array}{cc} \cos \pi/4 + \alpha' & j \sin \pi/4 + \alpha' \\ j \sin \pi/4 + \alpha' & \cos \pi/4 + \alpha' \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где  $\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 - \pi/4$  (см. Рис.3.10а).

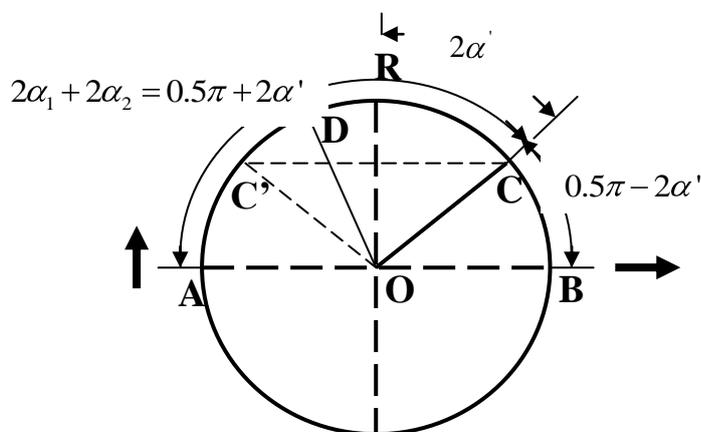


Рис.3.10а

Считая входную волну вертикально поляризованной, определим вектор Джонса выходной волны:

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos \pi/4 + \alpha' & j \sin \pi/4 + \alpha' \\ j \sin \pi/4 + \alpha' & \cos \pi/4 + \alpha' \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} j \sin \pi/4 + \alpha' \\ \cos \pi/4 + \alpha' \end{array} \right\|.$$

Изображающая точка при этом перемещается по траектории  $ADC$  (рис.3.10а). При этом точка  $C$  представляет поляризационный эллипс, имеющий горизонтальную ориентацию, поскольку после прохождения полюса сферы Пуанкаре ориентация эллипса изменяется скачкообразно на величину  $0.5\pi$ , но здесь необходимо отметить, что оператор эллиптичности не может изменять азимут эллипса поляризации.

Для пояснения этой ситуации введем точку  $C'$  сферы Пуанкаре,

расположенную на дуге  $A\check{C}'R$  и обладающую широтой  $\pi/2 - 2\alpha'$ , которая равна широте точки  $C$ . Эллипсы поляризации, соответствующие обоим этим точкам, обладают углом эллиптичности, равным величине  $\pi/4 - \alpha'$ . Однако, ориентация эллипсов поляризации, отвечающих точкам  $C'$  и  $C$  различается на величину  $\pi/2$  (вертикальная для точки  $C'$  и горизонтальная для точки  $C$ ). Отсюда следует, что последовательное воздействие двух операторов эллиптичности на исходную линейно поляризованную волну в случае  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4 + \alpha'$  может быть представлено в виде последовательности двух операций:

1) изменение угла эллиптичности входной волны на величину  $\pi/4 - \alpha'$ ; при этом изображающая точка перемещается по сфере Пуанкаре от точки  $A$  в точку  $C'$  по меридиану сферы на удвоенный угол эллиптичности (см. Рис.3.10б);

2) поворот эллипса поляризации на угол  $90^\circ$  вокруг полярной оси сферы  $RL$ ; при этом изображающая точка перемещается от точки  $C'$  в точку  $C$  вдоль широтной линии сферы  $\pi/2 - 2\alpha'$  на угол  $180^\circ$ , (см Рис.3.10б).

Описанную ситуацию можно иллюстрировать с использованием анализа параметров Стокса. Определим векторы Стокса  $\vec{S}_1$  и  $\vec{S}_2$  волн на выходе двух фазовых устройств, изменяющих угол эллиптичности входной волны. При этом первый прибор изменяет угол эллиптичности на величину  $(\pi/4 + \alpha')$ , а второй – на величину  $(\pi/4 - \alpha')$ . Волна на входе устройства предполагается линейно поляризованной вдоль оси  $OY$ . При заданных условиях векторы Стокса выходных волн можно записать в виде:

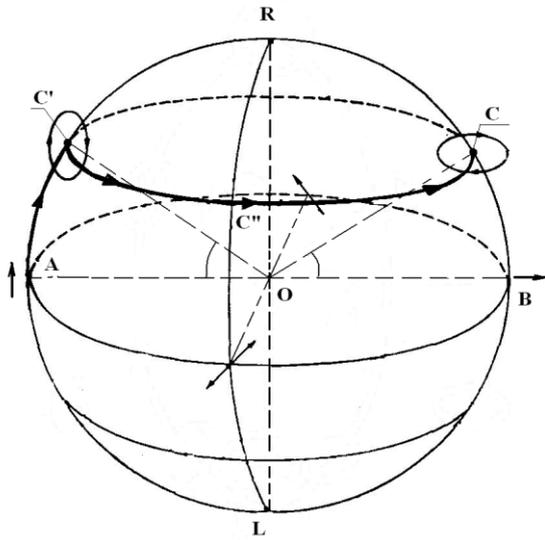


Рис.3.106

$$\vec{S}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ \cos^2 0.25\pi + \alpha' & -\sin^2 0.25\pi + \alpha' \\ 0 \\ 2\cos 0.25\pi + \alpha' & \sin 0.25\pi + \alpha' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\sin 2\alpha' & 0 & \cos 2\alpha' \end{vmatrix}; \quad (3.47a)$$

$$\vec{S}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ \cos^2 0.25\pi - \alpha' & -\sin^2 0.25\pi - \alpha' \\ 0 \\ 2\cos 0.25\pi - \alpha' & \sin 0.25\pi - \alpha' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \sin 2\alpha' & 0 & \cos 2\alpha' \end{vmatrix}. \quad (3.47b)$$

Из выражений (3.47) следует, что ориентация эллипса поляризации волны на выходе устройства, обладающего матрицей Джонса  $\|D \ 0.25\pi - \alpha'\|$ , совпадает с азимутом входной линейно поляризованной волны, а ориентация эллипса поляризации волны на выходе устройства, которому соответствует матрица Джонса  $\|D \ 0.25\pi + \alpha'\|$ , отличается на величину  $\pi/2$  от азимута входной линейно поляризованной волны. Это следует из изменения знака параметра Стокса  $S_1$  в выражении (3.47б) по сравнению с выражением (3.47а).

Таким образом, выражение (3.46), описывающее два последовательно

расположенных фазовых устройства (операторы эллиптичности) при условии  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi/4$ , может быть представлено в виде произведения оператора эллиптичности и оператора поворота. Этот вывод обусловлен так называемой «теоремой эквивалентности» [38], в соответствии с которой несколько последовательно размещенных фазосдвигающих устройств могут быть заменены одним фазовым устройством плюс оператор дополнительного поворота.

### ***3.9 Изменение азимута эллипса поляризации.***

Анализ изменения угла эллиптичности волны с использованием фазосдвигающего устройства, обладающего линейными собственными поляризациями, показал, что, при представлении преобразования поляризации на сфере Пуанкаре, изображающая точка перемещается по круговой траектории, а осью вращения служит диаметр сферы, соединяющий точки собственных поляризаций прибора.

Рассмотрим теперь использование фазосдвигающих устройств для изменения азимута эллипса поляризации без изменения значения угла эллиптичности.

#### ***3.9.1. Фазосдвигающее устройство с круговыми собственными поляризациями.***

Если принять за ось вращения полярную ось сферы Пуанкаре, то перемещение точек, изображающих состояние поляризации, будет происходить по широте. Так как широтные окружности соответствуют кривым постоянной эллиптичности, то вращение вокруг полярной оси отображает операцию изменения азимута эллипса поляризации.

Предположим, что левая и правая круговые поляризации представляют собой собственные поляризации некоторого гипотетического прибора, осуществляющего изменение азимута эллипса поляризации при сохранении угла эллиптичности. Тогда, в соответствии с изложенным выше, можно воспользоваться для графического изображения действия этого прибора круговой комплексной плоскостью. На круговой комплексной плоскости линии постоянной эллиптичности представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а линии постоянного азимута есть прямые, проходящие через начало координат. Отсюда следует, что операция изменения азимута эллипса поляризации при сохранении угла эллиптичности на круговой комплексной плоскости есть не что иное, как простой поворот на угол  $\delta$  (рис. 3.11). В базисе, образованном собственными круговыми поляризациями прибора, этой операции соответствует умножение кругового поляризационного отношения входной волны на величину  $\exp j\delta$  :

$$\dot{P}_1^{RL} = \dot{P}_0^{RL} \exp j\delta . \quad (3.48)$$

Операция типа (3.48) реализуется в линейном поляризационном базисе с использованием линейного фазосдвигающего устройства, производящего поворот изображающей точки на декартовой комплексной плоскости. Следовательно, в круговом базисе эта операция также может быть реализована фазосдвигающим устройством. Однако следует помнить, что элементы матрицы Джонса, определяющей дробно-линейное преобразование, совершаемое над поляризационным отношением входной волны, так и само это отношение должны быть заданы в круговом базисе.

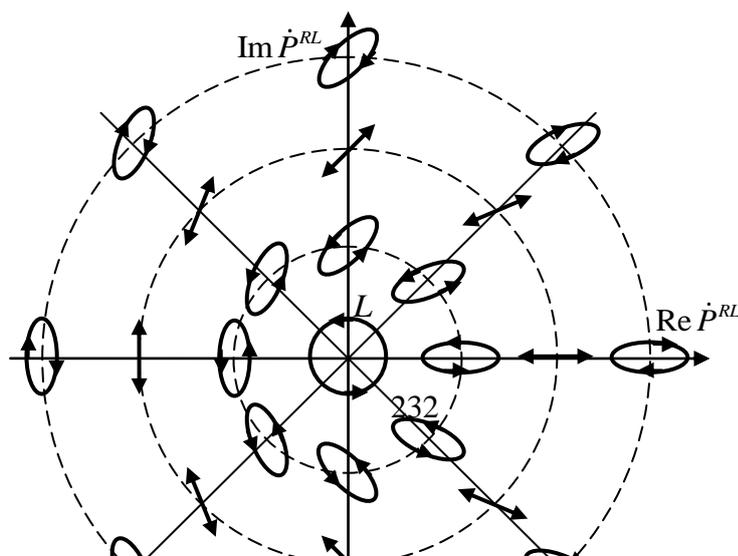


Рис.3.11

Отличие линейного фазосдвигающего устройства от подобного устройства, обладающего круговыми собственными поляризациями, заключается в том, что последнее вводит фазовый сдвиг между двумя круговыми поляризациями. Эту операцию трудно представить наглядно, но, тем не менее, она имеет физический смысл, поскольку существуют реальные среды, обладающие круговыми собственными поляризациями. Это так называемые оптически активные среды [13], а также гиротропные среды [38]. В радиолокации широко используются ферриты, которые являются гиротропными средами. При распространении волн в ферритах левая и правая круговые поляризации не изменяют своего вида, но их фазовая скорость различна (эффект кругового двойного лучепреломления).

Таким образом, в круговом собственном базисе оператор фазосдвигающего устройства, осуществляющего изменение азимута эллипса поляризации при сохранении угла эллиптичности должен иметь стандартный вид

$$\|D_{\delta}^{RL}\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp -j0.5\delta & 0 \\ 0 & \exp j0.5\delta \end{array} \right\|, \quad (3.49)$$

где  $\delta$  - величина фазового запаздывания, вводимого данным устройством между левой и правой круговыми поляризациями.

При воздействии оператора (3.49) на вектор Джонса входной волны, заданный в круговом базисе, выходной вектор можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1^L \\ \dot{E}_1^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp -j0.5\delta & 0 \\ 0 & \exp j0.5\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_0^L \\ \dot{E}_0^R \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Из последнего выражения следует, что круговое поляризационное отношение для выходной волны связано соотношением поворота (3.48) с поляризационным отношением для входной волны.

Матрица Джонса (3.49) представляет собой оператор изменения азимута эллипса поляризации в круговом базисе. Определим теперь, какому оператору в линейном базисе соответствует диагональная матрица (3.49), описывающая эффект двойного кругового лучепреломления. Для этого воспользуемся соотношением  $\|D_{xy}\| = \|L\| \|D_{uv}\| \|L\|^{-1}$ .

Матрицы  $\|L\|$  и  $\|L\|^{-1}$  возьмём в виде, отвечающем синфазному круговому базису (см. гл.1), для которого в момент времени  $t=0$  электрические векторы волн левой и правой круговой поляризации параллельны оси  $OX$ :

$$\|L\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}; \quad \|L\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix}.$$

После перемножения матриц получим оператор

$$\|D_{xy}\| = \begin{pmatrix} \cos \delta/2 & \sin \delta/2 \\ -\sin \delta/2 & \cos \delta/2 \end{pmatrix}, \quad (3.51a)$$

определенный в линейном поляризационном базисе.

Из выражения (3.51a) следует, что эффект двойного кругового лучепреломления соответствует повороту на угол  $\delta/2$  против часовой стрелки, если смотреть по направлению распространения волны.

В случае, если матрицы перехода  $\|L\|$  и  $\|L\|^{-1}$  имеют вид

$$\|L\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix}; \quad \|L\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix},$$

(несинфазный базис) то поворот в декартовой системе координат осуществляется на угол  $\delta/2$  по часовой стрелке; при этом перемножение матриц приводит к оператору вида

$$\|D'_{xy}\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \delta/2 & -\sin \delta/2 \\ \sin \delta/2 & \cos \delta/2 \end{array} \right\|. \quad (3.51б)$$

Таким образом, прибор, обладающий круговыми собственными поляризациями, осуществляет операцию изменения азимута эллипса поляризации при сохранении угла эллиптичности. При этом угол поворота большой полуоси эллипса определяется половиной величины фазового сдвига, вводимого прибором между волнами круговой поляризации, на которые расщепляется входная волна.

### ***3.9.2 Полуволновое устройство с линейными собственными поляризациями.***

Рассмотренные выше фазосдвигающие устройства позволяют изменять либо угол эллиптичности, либо азимут эллипса поляризации путём варьирования фазового сдвига при фиксированном положении собственной системы координат. При этом для изменения азимута использовалось устройство с круговыми собственными поляризациями.

Возможна, однако, ситуация, когда операция изменения азимута эллипса поляризации может быть осуществлена фазосдвигающим устройством, обладающим линейными собственными поляризациями и вносящим фиксированный фазовый сдвиг. В этом случае величина угла поворота эллипса поляризации будет определяться переменным углом ориентации собственного базиса устройства относительно ориентации электрического вектора входной волны. Проведём рассмотрение этого эффекта на сфере Пуанкаре для случая линейной поляризации входной волны с целью определения необходимой величины фазового сдвига, вносимого устройством.

Действие линейного фазосдвигающего устройства на сфере Пуанкаре отображается поворотом изображающей точки вокруг диаметра, соединяющего точки собственных поляризаций. Величина угла поворота равна при этом фазовому сдвигу, вносимому данным устройством.

Пусть входная волна поляризована линейно с азимутом  $90^0$ . Зададим на

сфере Пуанкаре точки  $P_{01}$ ,  $P_{02}$ , отвечающие линейные собственным поляризациям устройства и диаметр, их соединяющий (рис 3.12).

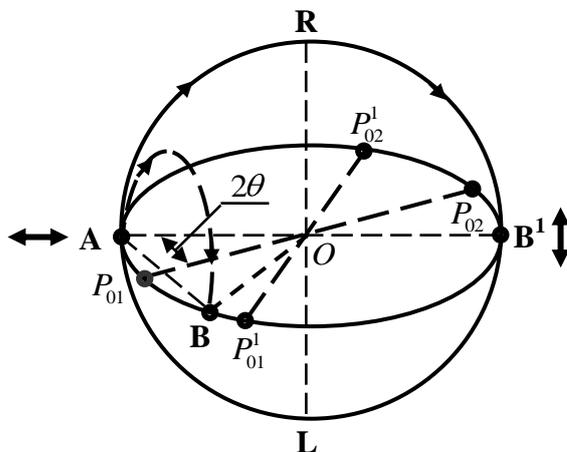


Рис.3.12

Ориентация диаметра  $P_{01}P_{02}$ , лежащего в экваториальной плоскости сферы, определяется углом  $2\theta$ . Тогда, как видно из этого рисунка, для того, чтобы волна на выходе фазосдвигающего устройства была поляризована линейно, но имела другой азимут, необходимо произвести поворот точки, изображающей поляризацию входной волны на угол, равный  $180^0$  вокруг диаметра  $P_{01}P_{02}$ . Поскольку этот диаметр совпадает с гипотенузой равнобедренного треугольнике  $AOB$ , где  $A$  и  $B$  есть точки отвечающие входной и выходной волне соответственно, то долгота точки  $B$  на сфере Пуанкаре определяется углом  $4\theta$ . Перемещение изображающей точки при этом происходит по дуге  $\overset{\frown}{AB}$  малого круга, лежащей в плоскости, перпендикулярной диаметру  $P_{01}P_{02}$ . Если ориентация диаметра изменяется и он занимает, например, положение  $P_{01}^1P_{02}^1$  определяемое углом  $2\theta^1$ , то долгота точки  $B^1$ , отвечающей поляризации выходной волны в данном случае будет определяется углом  $4\theta^1$ . Если выбрать конкретное значение величины угла  $2\theta^1 = \pi/2$ , то перемещение точки на сфере будет происходить по дуге  $\overset{\frown}{ARB^1}$  большого круга. Осью вращения  $P_{01}^1P_{02}^1$  будет при этом диаметр соединяющий точки линейных поляризаций  $\pm 45^0$ . В результате поворота вокруг этой оси на  $180^0$  исходная точка, отвечающая

горизонтальной поляризации, перейдет в точку, отвечающую вертикальной линейной поляризации (см. Рис.3.12).

В случае, если входная волна поляризована линейно, но имеет произвольный азимут то поворот изображающей точки будет происходить (как и в рассмотренных случаях) по некоторой дуге, лежащей в плоскости, перпендикулярной диаметру, соединяющему точки собственных поляризаций устройства. Долгота точки, отвечающей выходной волне, при этом по-прежнему будет равна  $4\theta$ , где  $2\theta$  - угол между электрическим вектором входной волны и первой собственной поляризацией ( $P_{01}$ ) фазосдвигающего устройства.

Итак, линейное фазосдвигающее устройство, с фазовым сдвигом, равным  $180^\circ$ , осуществляет операцию поворота электрического вектора линейно-поляризованной волны. Определим теперь матрицу Джонса прибора, осуществляющего рассмотренную операцию.

Поскольку величина угла поворота изображающей точки на сфере Пуанкаре равна фазовому сдвигу, вносимому устройством, а поворот производится на  $180^\circ$ , то подставляя  $\Delta\varphi_{xy} = \pi$  в общую формулу (3.18) матрицы Джонса фазосдвигающего устройства, получим:

$$\|D_\theta\| = \exp -j0.5\pi \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix}.$$

Опуская множитель  $\exp -j0.5\pi$ , входящий в обобщённую фазу, получим окончательно матрицу Джонса устройства, осуществляющего операцию изменения азимута, в виде

$$\|D_\theta\| = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix}. \quad (3.52)$$

Нетрудно видеть, что матрица (3.52) есть результат матричного произведения

$$\|D_\theta\| = \|R(\theta)\|^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \|R \theta\|,$$

где  $\|R \theta\|, \|R \theta\|^{-1}$  есть прямой и обратный операторы перехода из опорного

базиса в собственный базис прибора, вносящего фазовый сдвиг  $180^\circ$  и характеризуемого в собственном базисе матрицей

$$\|D\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Поскольку данное устройство вводит между ортогональными составляющими фазовый сдвиг  $180^\circ$ , что эквивалентно половине длины волны, будет называть это устройство полуволновым.

Как видно из проведённого анализа, действие полуволнового устройства на линейно-поляризованную волну заключается в изменении азимута поляризации этой волны, поскольку при этом изображающая точка перемещается по экватору сферы Пуанкаре.

Рассмотрим теперь результат воздействия полуволнового устройства на эллиптически поляризованную волну, характеризуемую вектором Джонса (1.29):

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \begin{vmatrix} C_{2\theta} & S_{2\theta} \\ S_{2\theta} & -C_{2\theta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_\alpha C_\beta - jS_\alpha S_\beta \\ C_\alpha S_\beta + jS_\alpha C_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_\alpha C_\gamma + jS_\alpha S_\gamma \\ C_\alpha S_\gamma - jS_\alpha C_\gamma \end{vmatrix}, \quad (3.53a)$$

где  $\gamma = 2\theta - \beta$  - угол взаимной ориентации собственного базиса устройства и большой полуоси эллипса. Выражение (3.53) можно переписать в виде

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \begin{vmatrix} C_{(-\alpha)} C_\gamma - jS_{(-\alpha)} S_\gamma \\ C_{(-\alpha)} S_\gamma + jS_{(-\alpha)} C_\gamma \end{vmatrix}. \quad (3.53б)$$

Таким образом, после прохождения эллиптически поляризованной волны через полуволновое устройство её азимут изменяется на величину  $\gamma$ , а угол эллиптичности меняет знак при сохранении абсолютной величины. Физически это означает изменение направления вращения вектора электрического поля выходной волны на противоположное по сравнению с входной волной.

Рассмотрим теперь эффект действия полуволнового устройства на сфере Пуанкаре. Как уже упоминалось, точка, изображающая волну на выходе фазосдвигающего устройства, определяется путём поворота точки, изображающей исходную волну, на угол  $\Delta\varphi$  (в данном случае  $\Delta\varphi = 180^\circ$ )

вокруг диаметра, соединяющего точки собственных поляризаций данного устройства. Поскольку собственные поляризации полуволнового устройства линейны, этот диаметр лежит в плоскости экватора сферы Пуанкаре.

Если входная волна поляризована линейно, то действие устройства изображается перемещением по дуге  $\overset{\frown}{AB}$  малого круга, перпендикулярного диаметру  $P_{01}P_{02}$ , соединяющему точки собственных поляризаций (рис 3.12). В случае эллиптической поляризации входной волны поворот на  $180^\circ$  вокруг диаметра  $P_{01}P_{02}$  обязательно приводит к перемещению изображающей точки в противоположное полушарие (рис.3.13), что и свидетельствует об изменении направления вращения эллипса поляризации при сохранении абсолютного значения угла эллиптичности.

Наиболее интересный случай имеет место в случае, если собственный базис устройства и большая полуось эллипса составляют угол  $45^\circ$ . При этом диаметр  $P_{01}P_{02}$ , соединяющий точки собственных поляризаций устройства на сфере Пуанкаре, перпендикулярен плоскости, содержащей

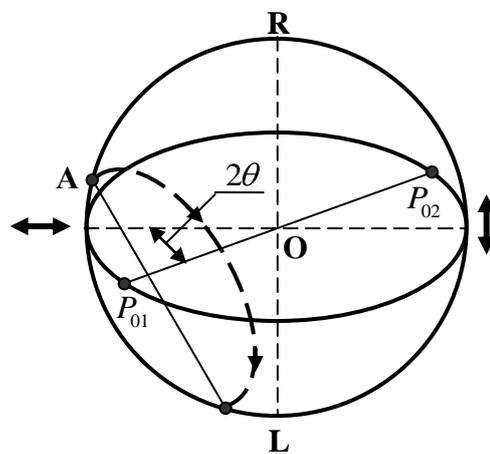


Рис.3.13

меридиан, на котором лежат точки, отвечающие эллиптическим поляризациям с одинаковым азимутом. Изобразим вид сбоку на этот меридиан (рис.3.14).

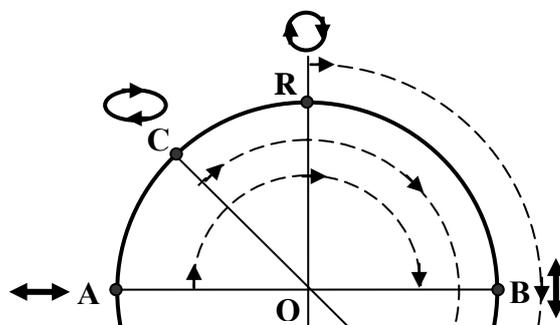


Рис. 3.14

Тогда, как видно из этого рисунка, воздействие полуволнового устройства на любую поляризацию, представленную точкой на этом меридиане, заключается в том, что поляризация выходной волны ортогональна поляризации входной волны: линейная наклонная поляризация переходит в ортогональную ей линейную, правая круговая поляризация переходит в левую круговую, у произвольной эллиптической поляризации изменяется азимут эллипса поляризации на  $\pi/2$ , а угол эллиптичности эллипса поляризации при сохранении абсолютной величины меняет знак.

### ***3.10 Четвертьволновое устройство. Комбинация полуволнового и четвертьволнового устройств.***

Итак, операции изменения угла эллиптичности или азимута эллипса поляризации входной волны могут быть реализованы с использованием фазосдвигающих устройств, обладающих круговыми или линейными собственными поляризациями.

В случае использования прибора, обладающего круговыми собственными поляризациями, может изменяться фазовый сдвиг, что даёт возможность изменения азимута эллипса поляризации входной волны, а в случае

использования прибора, обладающего линейными собственными поляризациями, изменение фазового сдвига при некоторой определённой ориентации собственного базиса устройства относительно азимута эллипса поляризации входной волны (например  $\pi/4$ ), либо изменение ориентации собственного базиса при фиксированном фазовом сдвиге (например  $\Delta\varphi = \pi$ ) дают возможность осуществления изменения эллиптичности или азимута соответственно.

Однако переменный фазовый сдвиг может быть реализован только в двухканальных радиолокационных системах при формировании поляризации излучения электрическим способом. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения возможности осуществления операции изменения эллиптичности с использованием фазосдвигающих устройств, вносящих фиксированный фазовый сдвиг. Эту операцию (как для фиксированного азимута эллипса поляризации, так и для любого, наперёд заданного) можно реализовать с использованием комбинации четвертьволнового и полуволнового устройств.

Проведём прежде всего анализ четвертьволнового фазосдвигающего устройства с линейными собственными поляризациями. Так называемое четвертьволновое фазосдвигающее устройство вносит фазовый сдвиг величиной в четверть длины волны ( $\Delta\varphi = \pi/2$ ) между линейными ортогональными состояниями поляризациями, заданными в собственном базисе устройства. Вид матрицы Джонса такого устройства в собственном базисе следует из выражения (3.18) при значении  $\theta = 0$ :

$$\|D_{\lambda/4}^0\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp -j\pi/4 & 0 \\ 0 & \exp j\pi/4 \end{array} \right\|. \quad (3.54)$$

Матрица (3.54) унитарна, но её использование неудобно с физической точки зрения, поскольку, при реализации фазосдвигающих устройств на основе волноводных структур, физический фазовый сдвиг связывается обычно с одним из ортов собственного базиса устройства, а именно с тем, по которому ориентирована ось наименьшей или наибольшей скорости. Однако, если

произвести формальную операцию вынесения коэффициента  $\exp -j\pi/4$  из матрицы (3.54), то её запись приобретает вид

$$\|D_{\lambda/4}^0\| = \exp -j\pi/4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{vmatrix},$$

где фазовый сдвиг полностью отнесён к оси наибольшей скорости (в данном случае орт  $OY$  собственной системы координат фазосдвигающего устройства.)

Фазовый сдвиг  $\exp -j\pi/4$  входит в абсолютную временную фазу волны и поэтому его можно опустить.

Поскольку в подавляющем большинстве радаров высокочастотный сигнал передается в антенну по прямоугольному волноводу, основная мода в котором эквивалентна плоской линейно-поляризованной волне с электрическим вектором, перпендикулярным широкой стенке волновода, рассмотрим действие четвертьволнового устройства для случая линейной поляризации входной волны.

Пусть четвертьволновое устройство расположено в секции круглого волновода, соединённой с прямоугольным волноводом соответствующим переходом (рис.3.15). Будем полагать, что ось наименьшей скорости ориентирована по орту  $X$   $\theta$  собственной системы координат, составляющей угол  $\theta$  с положительным направлением оси  $OX$  опорной системы координат, связанной с прямоугольным волноводом.

Поскольку угол  $\theta$  является переменным параметром, целесообразно записать матрицу Джонса четвертьволнового устройства в опорной системе координат  $XOY$ , в которой задан вектор Джонса входной волны и

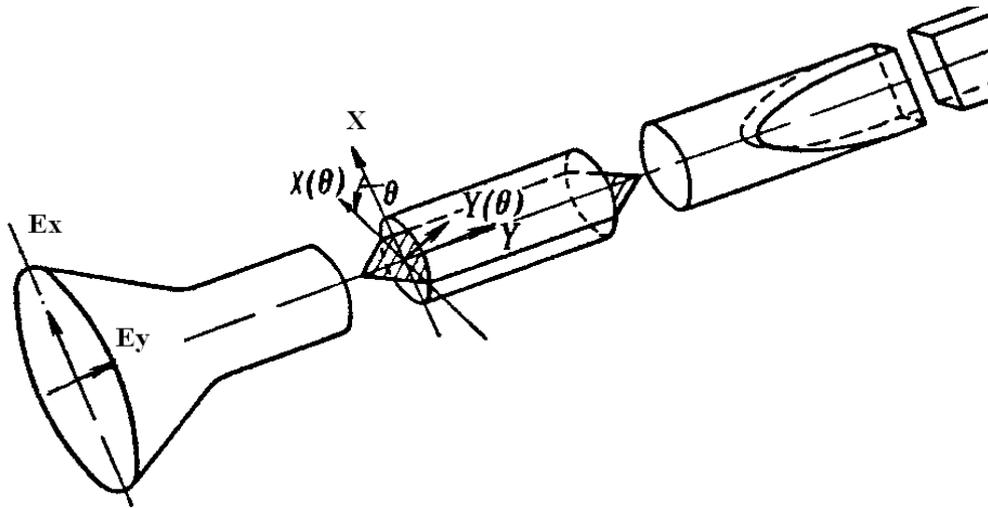


Рис.3.15

в которой необходимо анализировать поляризацию излучения *РЛС*:

$$\begin{aligned} \|D_{\lambda/4}^S\| &= \|R(\theta)\|^{-1} \|D_{\lambda/4}^0\| \|R(\theta)\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta + j \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (1 - j) \\ \cos \theta \sin \theta (1 - j) & \sin^2 \theta + j \cos^2 \theta \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Определим вектор Джонса волны в опорной системе координат на выходе четвертьволнового устройства, считая, что входная волна поляризована линейно по оси *OY*:

$$\dot{\vec{E}} = \|D_{\lambda/4}^S\| \begin{array}{c} \|0\| \\ \|1\| \end{array} = \left\| \begin{array}{c} \cos \theta \sin \theta - j \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta + j \cos^2 \theta \end{array} \right\|. \quad (3.56)$$

Данное выражение есть не что иное, как запись вектора Джонса с использованием угла эллиптичности и азимута эллипса поляризации, которые в данном случае определяются только углом ориентации собственной системы координат четвертьволнового устройства:  $\alpha = 0; \beta = 0$ .

Отсюда следует, что большая полуось эллипса поляризации, имеющего угол эллиптичности  $\theta$ , ориентирована по оси наименьшей скорости. В случае использования диэлектрической пластины большая полуось ориентирована по пластине. Вектор Стокса волны на выходе определяется выражением:

$$\vec{S}_{0,25\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos^2 2\theta & -2\cos 2\theta \sin 2\theta & \sin 2\theta \\ \cos^2 2\theta & 1 & 2\cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin 2\theta \\ 2\cos 2\theta \sin 2\theta & -2\cos 2\theta \sin 2\theta & 1 & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определяя параметры Стокса  $S_1, S_2, S_3$  для различных значений угла  $\theta$ , можно найти положение точек, изображающих; поляризацию выходной волны на сфере Пуанкаре.

Вычислительные операции в данном случае несложны, но для построения изображающей точки на сфере Пуанкаре при линейной поляризации входных волн можно выбрать ещё более простой путь, поскольку точки, изображающая поляризацию входной волны, поворачивается на угол, равный фазовой задержке  $\Delta\varphi$ , вокруг диаметра, соединяющего собственные поляризации устройства. В нашем случае  $\Delta\varphi = \pi/2$ , что ещё более упрощает построение.

Пример визуализации процесса преобразования горизонтально-поляризованной волны четвертьволновым устройством приведён на Рис. 3.16 для двух различных значений угла ориентации собственного базиса относительно опорной системы координат.

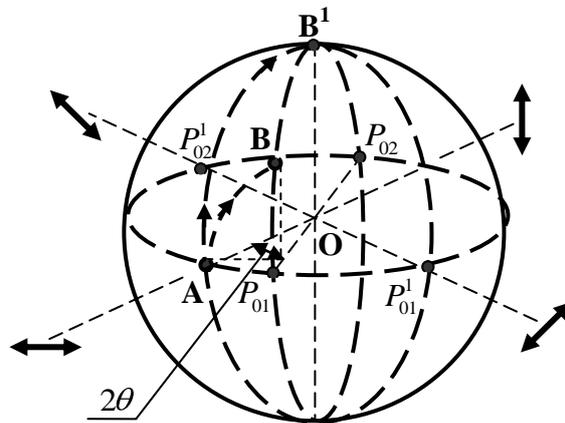


Рис.3.16

Построение заключается в повороте точки  $A$ , изображающей поляризацию входной волны, на угол  $\pi/2$  вокруг диаметра собственных поляризаций, который лежит в экваториальной плоскости сферы. Последнее обусловлено

тем, что собственные поляризации фазовой пластины линейны. Для произвольного значения угла  $2\theta$ , определяющего ориентацию диаметра собственных поляризаций фазового устройства относительно точки отсчета азимута эллипса поляризации на сфере Пуанкаре (точка  $A$  – горизонтальная поляризация), построение проводится следующим образом:

1. Из точки  $A$  опускается перпендикуляр на диаметр  $P_{01}P_{02}$ , соединяющий собственные поляризации фазового устройства;
2. Точка  $A$  перемещается на угол  $\pi/2$  по дуге малого круга  $\check{A}B$  в плоскости, перпендикулярной диаметру  $P_{01}P_{02}$  в точку  $B$ . Нетрудно видеть, что угол эллиптичности эллипса поляризации выходной волны определяется половиной угла  $P_{01}\hat{O}B$ , а азимут эллипса поляризации определяется половиной угла  $A\hat{O}P_{01}$ , т.е. величиной  $\theta$ .

Как видно из рисунка 3.16, в случае  $2\theta = \pi/2$  (диаметр собственных поляризаций фазового устройства совпадает с диаметром линейных поляризаций  $\theta = \pm 45^\circ$ ), исходная линейная поляризация преобразуется в круговую поляризацию. При этом исходная точка  $A$  перемещается на угол  $\pi/2$  по дуге большого круга  $\check{A}B^1$  в плоскости, перпендикулярной диаметру  $P_{01}^1P_{02}^1$  в точку  $B^1$ . Отсюда следует весьма важный вывод о том, что при ориентации четвертьволновой пластинки под углом  $45^\circ$  относительно электрического вектора входной линейно-поляризованной волны на выходе формируется излучение с круговой поляризацией. Данному случаю соответствует матрица Джонса

$$D_{\lambda/4}(\theta = \pi/4) = 0.5 \begin{vmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{vmatrix}, \quad (3.57)$$

которую нетрудно получить из матрицы (3.55), подставив в неё значение  $\theta = \pi/4$ .

Предположим теперь, что ориентация четвертьволнового устройства постоянна и задана некоторым углом  $\theta$  в опорной системе координат, а азимут входной

линейно-поляризованной волны является переменным. Введём координатную систему  $X''OY''$ , в которой входная волна  $\vec{E}_0$  линейно-поляризована вдоль оси  $OX''$ . Взаимная ориентация координатных систем  $XOY$  и  $X''OY''$  определяется углом  $\theta_1$ , между положительными направлениям осей  $OX$  и  $OX''$ . Переведём вектор Джонса входной волны в опорную систему координат  $XOY$ , используя обратный оператор поворота  $\|R(\theta_1)\|^{-1}$ . Тогда на входе четвертьволнового устройства, матрица Джонса которого определена в опорной системе координат выражением (3.55), имеется волна вида  $\dot{E}_{INP}^S = \|R(\theta)\|^{-1} \dot{E}_0$ , а волна на выходе устройства определяется как

$$\dot{E}_{OUT}^S = \|D_{\lambda/4}^S\| \dot{E}_{INP}^S = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta - \theta_1 & \cos \theta + j \sin \theta - \theta_1 \sin \theta \\ \cos \theta - \theta_1 & \sin \theta - j \sin \theta - \theta_1 \cos \theta \end{array} \right\|. \quad (3.58)$$

Нетрудно видеть, что выражение (3.58) представляет собой вектор Джонса выходной волны, записанный с использованием параметров её эллипса поляризации

$$\cos \theta - \theta_1 \equiv \cos \alpha; \sin \theta - \theta_1 \equiv \sin \alpha; \cos \theta \equiv \cos \beta; \sin \theta \equiv \sin \beta.$$

При этом азимут эллипса поляризации определяется величиной угла  $\theta \equiv \beta$ , что свидетельствует об ориентации большой полуоси эллипса по оси наименьшей скорости четвертьволнового устройства, как и ранее. Величина угла эллиптичности  $\alpha \equiv \theta - \theta_1$ , определяется взаимной ориентацией электрического вектора входной волны и оси наименьшей скорости. Таким образом, если положение оси наименьшей скорости устройства является фиксированным, а азимут входной линейно-поляризованной волны изменяется, то на выходе данного устройства будет иметь место волна, обладающая постоянным азимутом и переменным углом эллиптичности её эллипса поляризации.

Изображение данной ситуации на сфере Пуанкаре (рис.3.17) показывает, что действительно, при фиксированном положении диаметра собственных поляризаций  $P_{01}P_{02}$  четвертьволнового устройства, точки  $B_1, B_2, B_3,$

изображающие состояние поляризации выходных волн, лежат на меридиане сферы, плоскость которого проходит через этот диаметр, т.е. находятся на кривой постоянного азимута.

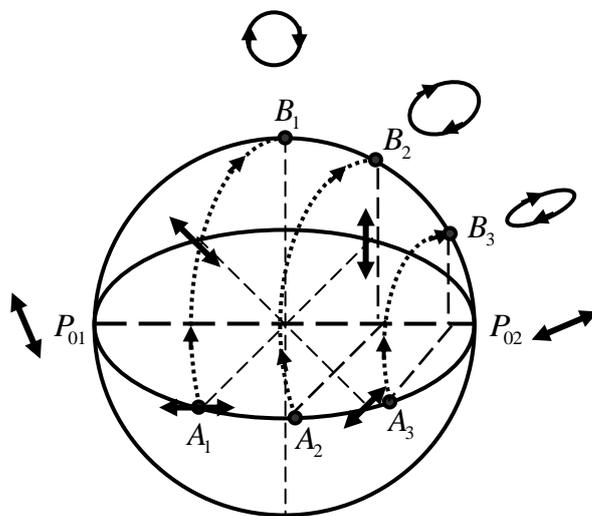


Рис.3.17

Эти точки получены вращением точек  $A_1, A_2, A_3$  вокруг диаметра собственных поляризаций  $P_{01}P_{02}$  четвертьволнового устройства на угол  $90^\circ$ .

Таким образом, если перед четвертьволновой пластиной расположить устройство, изменяющее азимут входной волны, то в совокупности будет получено устройство, реализующее операцию изменения эллиптичности. Как уже известно, для изменения азимута может быть использовано как фазосдвигающее устройство с круговыми собственными поляризациями, так и полуволновое устройство, обладающее линейными собственными поляризациями (полуволновое устройство).

Рассмотрим теперь подробно комбинацию полуволнового и четвертьволнового устройств. Анализ проведём для типовой ситуации, когда на вход устройства, формирующего поляризацию излучения РЛС, поступает по прямоугольному волноводу линейно-поляризованная волна. Будем считать

при этом, что широкая стенка волновода ориентирована по орту  $OX$  опорной системы координат. Тогда последовательность операторов, описывающих преобразование состояния поляризации исходной волны, можно записать в виде:

$$\dot{\vec{E}}_{OUT}^S = \|R(\theta)\|^{-1} \|D_{\lambda/4}^0\| \|R(\theta)\| \|R(\theta_1)\|^{-1} \|D_{\lambda/2}^0\| \|R(\theta_1)\| \dot{\vec{E}}_{INP}^S, \quad (3.59)$$

где  $\theta_1, \theta$  - ориентация осей наименьшей скорости полуволнового и четвертьволнового устройств соответственно, заданная в опорной системе координат. При этом выполняются следующие преобразования:

- 1) переход из опорного базиса в собственную систему координат полуволнового устройства;
- 2) введение фазового сдвига величиной  $180^\circ$ ;
- 3) обратный переход в опорный базис;
- 4) переход из опорного базиса в собственную систему координат четвертьволнового устройства;
- 5) введение фазового сдвига величиной  $90^\circ$ ;
- 6) обратный переход в опорный базис.

Количество преобразований можно уменьшить, объединив операции перехода 3) и 4):  $\|R(\theta)\| \|R(\theta)\|^{-1} = \|R(\theta - \theta_1)\|$ , совершая тем самым переход из собственной системы координат полуволнового устройства непосредственно в собственную систему координат четвертьволнового устройства. Перемножая операторы и воздействуя результирующей матрицей на входной вектор  $\dot{\vec{E}}_{INP}^S$ , получим вектор Джонса на входе четвертьволнового устройства, заданный в собственной системе координат этого устройства:

$$\dot{\vec{E}}_{INP}' = \left\| \begin{array}{cc} \cos(2\theta_1 - \theta) & \sin(2\theta_1 - \theta) \\ \sin(2\theta_1 - \theta) & -\cos(2\theta_1 - \theta) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \sin(2\theta_1 - \theta) \\ -\cos(2\theta_1 - \theta) \end{array} \right\|.$$

Тогда на выходе четвертьволнового устройства будет иметь место эллиптически поляризованная волна, также определенная в собственной системе координат прибора

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}'_{OUT} &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & j \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \sin(2\theta_1 - \theta) \\ -\cos(2\theta_1 - \theta) \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \sin(2\theta_1 - \theta) \\ -j \cos(2\theta_1 - \theta) \end{array} \right\| \equiv \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \left\| \begin{array}{c} j \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (3.60)$$

угол эллиптичности которой определяется величиной  $\alpha = 2\theta_1 - \theta$ . При этом полуоси эллипса поляризации совпадают с осями собственного базиса четвертьволнового устройства. Множитель  $\exp -j\pi/2$  можно отнести к абсолютной временной фазе выходной волны и опустить. Нетрудно видеть, что результат (3.60) неотличим от результата, который можно было бы получить путём использования оператора эллиптичности

$$\dot{\vec{E}}'_{OUT} = \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & j \sin \alpha \\ j \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} j \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{array} \right\|.$$

Таким образом, последовательность операторов

$$\left\| D_{\lambda/4}^0 \right\| \left\| R(\theta) \right\| \left\| R_{\theta_1} \right\|^{-1} \left\| D_{\lambda/2}^0 \right\| \left\| R(\theta_1) \right\|$$

можно заменить оператором эллиптичности, а всю цепочку матриц в выражении (3.59) можно представить в виде

$$\dot{\vec{E}}'_{OUT} = \left\| \begin{array}{cc} \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & j \sin \alpha \\ j \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (3.61)$$

Из выражения (3.61) следует, что система, содержащая два последовательно расположенных фазосдвигающих устройства (в данном случае - полуволновое и четвертьволновое) эквивалентна системе, содержащей одно фазосдвигающее устройство и расположенное за ним устройство вращения плоскости поляризации. Этот факт и отвечающая ему теорема эквивалентности уже упоминались выше.

Итак, комбинация полуволнового и четвертьволнового устройств при условии произвольной ориентации оси наименьшей скорости полуволнового устройства преобразует исходную линейно-поляризованную волну в эллиптически-поляризованную. Необходимо отметить, что, в силу некоммутативности операции перемножения матриц, перемена устройств

местами к данному результату не приведёт.

### 3.11 Соответствие матриц Паули матрицам Джонса простых приборов

Как было указано в гл. 2 соотношения (2.98), представляющие собой средние значения эрмитовых операторов Паули, определяют наблюдаемые величины на выходе некоторых физических приборов, описываемых этими операторами. Отсюда следует, что матрицам Паули должны соответствовать реальные физические приборы.

Поскольку операторы Джонса простых приборов представляют собой  $(2 \times 2)$  - матрицы, то, естественно, эти матрицы допускают разложение в форме (2.92). Так, разложение матриц Джонса фазосдвигающего устройства (в собственном базисе)

$$\|D_\varphi^0\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp j\varphi/2 & 0 \\ 0 & \exp -j\varphi/2 \end{array} \right\|$$

и устройства поворота плоскости поляризации, обладающего круговыми собственными поляризациями

$$\|D_\theta\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right\|$$

может быть записано в соответствии с (2.92) как

$$\|D_\varphi^0\| = \|\hat{\sigma}_0\| \cos \varphi/2 + j\|\hat{\sigma}_1\| \sin \varphi/2, \quad (3.62a)$$

$$\|D_\theta\| = \|\hat{\sigma}_0\| \cos \theta + j\|\hat{\sigma}_3\| \sin \theta. \quad (3.62б)$$

В этой связи, в Стоксовом подпространстве  $S_1, S_2, S_3$  фазосдвигающее устройство обеспечивает вращение на угол  $\varphi$  относительно оси  $S_1$ , а устройство вращения плоскости поляризации обеспечивает вращение на угол  $2\theta$  относительно оси  $S_3$  [15].

Зададим величины  $\varphi$  and  $\theta$  в выражении (3.62) как  $\pi$  and  $\pi/2$  соответственно. Тогда

$$\|D^0 \varphi = \pi\| = j\|\hat{\sigma}_1\|, \quad \|D \theta = \pi/2\| = j\|\hat{\sigma}_3\|. \quad (3.63)$$

Выражение (3.63) свидетельствует, что матрица Паули  $\|\hat{\sigma}_1\|$  соответствует фазосдвигающему устройству, обеспечивающему вращение на угол  $\pi$  в пространстве параметров Стокса относительно оси  $S_1$ . Аналогично, матрица  $\|\hat{\sigma}_3\|$  соответствует физическому прибору, изменяющему азимут эллипса поляризации, и обеспечивающему вращение на угол  $\pi$  относительно оси  $S_3$ .

Рассмотрим теперь матрицу Джонса оператора эллиптичности. Как это было уже указано выше, оператор эллиптичности представляет собой фазосдвигающее устройство, собственный базис которого ориентирован под углом  $45^\circ$ , а его матрица Джонса имеет вид

$$\|D_\alpha\| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & j \sin \alpha \\ j \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Разложение оператора эллиптичности в соответствии с выражением (2.92) имеет вид

$$\|D_\alpha\| = \|\hat{\sigma}_0\| \cos \alpha + j\|\hat{\sigma}_2\| \sin \alpha. \quad (3.64)$$

Выражение (3.64) свидетельствует, что матрица Паули  $\|\hat{\sigma}_2\|$  соответствует оператору эллиптичности для величины угла эллиптичности  $\alpha = \pi/2$ .

Установим теперь физический смысл коммутативных соотношений для матриц Паули [15], т.е.

$$\|\hat{\sigma}_i\| \|\hat{\sigma}_l\| = j\|\hat{\sigma}_k\| \quad \text{или} \quad (j\|\hat{\sigma}_i\|)(j\|\hat{\sigma}_l\|) = -j\|\hat{\sigma}_k\|. \quad (3.65)$$

Из выражений (3.65) следует, что два устройства, описываемые матрицами  $\|\hat{\sigma}_i\|$  и  $\|\hat{\sigma}_l\|$ , воздействуют на проходящую волну как один прибор  $\|\hat{\sigma}_k\|$ . Из этого выражения следует также, что вращение на угол  $\pi$  относительно оси  $S_i$  пространства параметров Стокса с последующим вращением на подобный угол относительно оси  $S_l$  является эквивалентным одному вращению на угол  $\pi$  относительно третьей оси этого пространства.

Третье соотношение коммутативности, а именно  $\|\hat{\sigma}_i\|^2 = \|\hat{\sigma}_0\|$ , указывает

на то обстоятельство, что двойное применение оператора  $\|\hat{\sigma}_i\|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , который вызывает вращение на угол  $2\pi$  относительно оси  $S_i$ , эквивалентно умножению на единичную матрицу.

### 3.12. Преобразование матрицы когерентности и вектора Стокса простыми приборами. Матрица Мюллера.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании матрицы когерентности частично поляризованной некоторым простым прибором, характеризуемым (2x2) оператором Джонса. Анализ будет проведен для случая квазимонохроматического поля, что позволяет исключить частотную зависимость и произвести оценки на средней частоте сигнала.

Зададим частично поляризованную плоскую квазимонохроматическую волну вектором Джонса

$$\dot{\vec{E}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{E}_1(t) \\ \dot{E}_2(t) \end{pmatrix}.$$

При прохождении этой волны через простой прибор, действие которого описывается эрмитовым оператором  $\|L\|$ , вектор Джонса выходной волны имеет вид

$$\dot{\vec{E}}^{(1)}(t) = \|L\| \dot{\vec{E}}(t),$$

а матрица когерентности выходной волны может быть определена как

$$\|F_{ji}^{(1)}\| = \overline{\dot{\vec{E}}^{(1)}(t) \otimes \dot{\vec{E}}^{(1)+}(t)} = \overline{\{\|L\| \dot{\vec{E}}(t)\} \otimes \{\|L\| \dot{\vec{E}}(t)\}^+}, \quad (3.66)$$

где линия верху означает статистическое усреднение, а символ (+) означает эрмитово сопряжение. Используя известные свойства кроненкерского произведения [35], можно переписать выражение (3.66) в виде

$$\|F_{ji}^{(1)}\| = \overline{\|L\| \{\dot{\vec{E}}(t) \otimes \dot{\vec{E}}^+(t)\} \|L\|^+},$$

откуда следует, что матрица когерентности выходной волны имеет вид

$$\|F_{jl}^{(1)}\| = \|L\| \|F_{jl}\| \|L\|^+ = \begin{vmatrix} F_{11}^{(1)} & \dot{F}_{12}^{(1)} \\ \dot{F}_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad (3.67)$$

где  $\|F_{jl}\|$  есть матрица когерентности входной волны.

Выражение (3.67) представляет собой правило преобразования матрицы когерентности частично поляризованной плоской волны простым прибором, характеризуемым (2x2) матрицей Джонса.

Для определения процесса преобразования вектора Стокса частично поляризованной волны простым прибором более удобным является другой метод, который и будет рассмотрен ниже.

Запишем матрицу когерентности плоской частично поляризованной волны в виде 4-мерного вектора столбца [8,15]:

$$\|\vec{F}_{jl}\| = \overline{\dot{E}(t) \otimes \dot{E}^*(t)} = \begin{vmatrix} F_{11} \\ \dot{F}_{12} \\ \dot{F}_{21} \\ F_{22} \end{vmatrix}, \quad (3.68)$$

т.е. как усредненное кронекеровское произведение комплексного вектора волны на комплексно сопряженный вектор (вместо умножения на эрмитово сопряженный вектор).

Можно найти некоторое унитарное преобразование вектора (3.68), после которого все элементы преобразованного вектора будут представлять собой действительные величины. Матрица этого преобразования имеет вид [15]

$$\|T\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -j & j & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.69)$$

Нетрудно видеть, что в результате умножения 4-вектора (3.68) на унитарный оператор (3.69) будет получен 4-вектор Стокса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -j & j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|F_{11}\| \\ \|\dot{F}_{12}\| \\ \|\dot{F}_{21}\| \\ \|F_{22}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} + F_{22} \\ F_{11} - F_{22} \\ \dot{F}_{12} + \dot{F}_{21} \\ -j(\dot{F}_{12} - \dot{F}_{21}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|S_0\| \\ \|S_1\| \\ \|S_2\| \\ \|S_3\| \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Определим теперь правило преобразования вектора Стокса простым прибором. Прежде всего, найдем для этого 4-мерный вектор-столбец  $\|\vec{F}_{jl}^{(1)}\|$ , описывающий частично поляризованную волну на выходе прибора

$$\|\vec{F}_{il}^{(1)}\| = \overline{\|L\|\dot{E}(t)\} \otimes \|L\|^* \dot{E}^*(t)}. \quad (3.71)$$

Принимая во внимание свойство кронекеровского произведения

$$\|A\|\|B\| \otimes \|C\|\|D\| = \|A\|\|C\| \otimes \|B\|\|D\|, \quad (3.72)$$

перепишем выражение (3.71) в виде

$$\|\vec{F}_{jl}^{(1)}\| = \left[ \|L\| \otimes \|L\|^* \right] \|\vec{F}_{jl}\|, \quad (3.73)$$

а затем, используя унитарную матрицу (3.69), запишем вектор Стокса выходной волны :

$$\begin{aligned} \vec{S}_i^{(1)} = \|T\|\|\vec{F}_{jl}^{(1)}\| &= \|T\| \left[ \|L\| \otimes \|L\|^* \right] \|\vec{F}_{jl}\| = \|T\| \left[ \|L\| \otimes \|L\|^* \right] \|T\|^{-1} \|T\|\|\vec{F}_{jl}\| = \\ &= \|T\| \left[ \|L\| \otimes \|L\|^* \right] \|T\|^{-1} \vec{S}_i. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Здесь был использован формализм единичной матрицы  $\|\delta_{jl}\| = \|T\|\|T\|^{-1}$ , который позволил получить искомый результат. Обратный оператор  $\|T\|^{-1}$  имеет вид

$$\|T\|^{-1} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Выражение (3.74) может быть переписано в виде

$$\|S_i^1\| = \|M_{il}\|\|S_l\|, \quad (3.76)$$

определяющем правило преобразования вектора Стокса входной волны

простым прибором. Матрица преобразования  $\|M_{il}\|$ , все элементы которой являются действительными,

$$\|M_{il}\| = \|T\| \left[ \|L\| \otimes \|L\|^* \right] \|T\|^{-1} \quad (3.77)$$

представляет собой так называемую матрицу Мюллера простого прибора [8,15,16]. Выражение (3.77) позволяет найти матрицы Мюллера простых различных приборов. Так, например, для фазового прибора, характеризуемого матрицей Джонса (в собственном базисе)

$$\|L \ \delta\| = \left\| \begin{array}{cc} \exp i0.5\delta & 0 \\ 0 & \exp -i0.5\delta \end{array} \right\|,$$

матрица Мюллера имеет вид

$$\|M \ \delta\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{array} \right\|. \quad (3.78)$$

Для произвольно ориентированного линейного поляризатора, характеризуемого матрицей Джонса

$$\|L \ \theta\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{array} \right\|,$$

матрица Мюллера определяется как

$$\|M \ \theta\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (3.79)$$

Матрица Мюллера оператора вращения, имеющего матрицу Джонса

$$\|R \ \beta\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{array} \right\|,$$

имеет вид

$$\|M(\beta)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ 0 & -\sin 2\beta & \cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.79a)$$

Для оператора эллиптичности

$$\|R \ \alpha\| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & j \sin \alpha \\ j \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

матрица Мюллера может быть определена как

$$\|M \ \alpha\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & 0 & \cos 2\alpha \end{vmatrix}. \quad (3.79b)$$

Таким образом, с использованием полученного правила, можно определить матрицы Мюллера простых всевозможных приборов.

### ***3.13 Соответствие матриц Дирака матрицам Мюллера простых приборов.***

В подразделе 3.11 было установлено, что каждому из операторов Паули соответствует некоторый простой прибор, а во второй главе монографии было показано, что полная система матриц Дирака может быть использована для анализа сумм частично поляризованных потоков излучения, характеризуемых эрмитовыми  $4 \times 4$  матрицами когерентности. С этой целью полная система матриц Дирака была использована для разложения  $4 \times 4$  матрицы когерентности.

Для установления соответствия между матрицами Паули и простыми приборами (см. подраздел 3.11) полная система матриц Паули была использована для разложения матриц Джонса некоторых простых приборов [15]. Аналогичная методика, использующая полную систему матриц Дирака

для разложения  $4 \times 4$  матриц, может быть применена к матрицам Мюллера простых приборов [8]. Это может быть записано в виде

$$\|M\| = C_{jl} \|D_{jl}\|, \text{ где } C_{jl} = 0.25 Sp \left[ \|D_{jl}\| \|M\| \right], \quad (3.80)$$

где  $\|M\|$  - матрица Мюллера некоторого простого прибора, а величины  $C_{jl}$  представляют собой коэффициенты разложения. В отличие от Главы 2. эти коэффициенты не нормированы с целью удобства. Запишем теперь разложение матрицы Мюллера (3.78) фазосдвигающего устройства в собственном базисе для случая ориентации «быстрой оси»  $0^0$ :

$$\begin{aligned} \|M \ \delta\| &= 0,5 \begin{vmatrix} 1 + \cos \delta & 0 \\ 0 & 1 - \cos \delta \end{vmatrix} D_{00} + 0,5 \begin{vmatrix} 1 + \cos \delta & 0 \\ 0 & 1 - \cos \delta \end{vmatrix} D_{30} = \\ &= D_{00} \cos^2(0.5\delta) + D_{30} \sin^2(0.5\delta). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия  $0.5\delta = \pi/2$ , матрица Дирака  $\|D_{30}\|$  соответствует фазовому устройству, вводящему фазовый сдвиг величиной  $\pi$  между ортогональными компонентами входной волны (т.е. полуволновому устройству). В случае произвольной ориентации  $\theta$  «быстрой оси» полуволнового устройства, его матрица Мюллера имеет вид

$$\|M \ \pi\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а её разложение по системе матриц Дирака записывается как

$$\begin{aligned} \|M \ \pi\| &= \sin^2 2\theta \|D_{03}\| + \cos 2\theta \sin 2\theta \|D_{11}\| + \\ &+ \cos 2\theta \sin 2\theta \|D_{22}\| + \cos^2 2\theta \|D_{30}\|. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Из выражения (3.82) следует, что матрица Дирака  $\|D_{30}\|$  соответствует полуволновому устройству, имеющему ориентацию «быстрой оси»  $0^0$  (сравнить с (3.81)), а матрица Дирака  $\|D_{03}\|$  соответствует этому же полуволновому устройству в случае ориентации его «быстрой оси»  $45^0$ .

Аналогично, используя матрицы Мюллера различных простых приборов,

можно установить физический смысл каждой из матриц Дирака.

Из приведенных примеров следует, что использование системы матриц Дирака описать свойства простых приборов более детально по сравнению с разложением, использующим систему матриц Паули.

### ***3.14 Преобразование вектора Стокса плоской волны антенной с ограниченной апертурой.***

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании поляризационной структуры электромагнитного поля в случае, когда нельзя пренебречь дифракционными эффектами. В данном подразделе будет показано, что при использовании некоторых ограничений метод матрицы Мюллера может быть использован для описания преобразований поляризации плоских волн антенной с ограниченной апертурой [39]. При анализе будут использованы следующие упрощающие предположения:

- падающее на антенну поле будем считать плоской волной, волновой вектор которой совпадает с нормалью к апертуре антенны;
- поляризационные базисы, в которых рассматриваются падающая и дифрагированная волны, совпадают.

Ортогональные составляющие  $\dot{E}'_x, \dot{E}'_y$  распределения комплексного вектора в дальней зоне дифракционного изображения связаны с ортогональными составляющими  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$  падающей на антенну плоской волны соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{E}'_x &= a_0 \left[ \dot{f}_x \dot{E}_x + \dot{f}_{yx} \dot{E}_y \right], \\ \dot{E}'_y &= a_0 \left[ \dot{f}_{xy} \dot{E}_x + \dot{f}_y \dot{E}_y \right], \end{aligned} \quad (3.83)$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{E}'_x \\ \dot{E}'_y \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} \dot{f}_x & \dot{f}_{yx} \\ \dot{f}_{xy} & \dot{f}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{pmatrix}. \quad (3.83a)$$

Здесь величины  $\dot{E}_X, \dot{E}_Y, \dot{f}_X, \dot{f}_Y, \dot{f}_{XY}, \dot{f}_{YX}$  есть функции углов, определяющих положение точки наблюдения в пространстве дифракционного изображения. Функции  $\dot{f}_X, \dot{f}_Y, \dot{f}_{XY}, \dot{f}_{YX}$  представляют собой нормированные диаграммы направленности антенны для основных и кросс – поляризованных составляющих соответственно, а величина  $a_0$  есть коэффициент усиления антенны. Следуя подразделу 3.12, определим матрицу Мюллера дифракционно - ограниченной антенны как функцию угловых координат:

$$\begin{aligned} & \|M(\theta, \varphi)\| = \\ & = \|T\| \left\{ \left\| \begin{array}{cc} \dot{f}_X(\theta, \varphi) & \dot{f}_{XY}(\theta, \varphi) \\ \dot{f}_{YX}(\theta, \varphi) & \dot{f}_Y(\theta, \varphi) \end{array} \right\| \otimes \left\| \begin{array}{cc} \dot{f}_X^*(\theta, \varphi) & \dot{f}_{XY}(\theta, \varphi) \\ \dot{f}_{YX}(\theta, \varphi) & \dot{f}_Y(\theta, \varphi) \end{array} \right\| \right\} \|T\|^{-1}. \quad (3.84) \end{aligned}$$

Подставляя в соотношение (3.84) операторы  $\|T\|$  и  $\|T\|^{-1}$ , найдём элементы матрицы Мюллера в виде:

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X \dot{f}_X^* + \dot{f}_{YX} \dot{f}_{YX}^* + \dot{f}_{XY} \dot{f}_{XY}^* + \dot{f}_Y \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{12} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X \dot{f}_X^* - \dot{f}_{YX} \dot{f}_{YX}^* + \dot{f}_{XY} \dot{f}_{XY}^* - \dot{f}_Y \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{13} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X^* \dot{f}_{YX} + \dot{f}_X \dot{f}_{YX}^* + \dot{f}_{XY}^* \dot{f}_Y + \dot{f}_{XY} \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{14} &= a_0^2 / 2 \left[ i \dot{f}_X \dot{f}_{YX}^* - \dot{f}_X^* \dot{f}_{YX} - i \dot{f}_{XY}^* \dot{f}_Y - \dot{f}_{XY} \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{21} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X \dot{f}_Y^* + \dot{f}_{YX} \dot{f}_{YX}^* - \dot{f}_{XY} \dot{f}_{XY}^* + \dot{f}_Y \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{22} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X \dot{f}_X^* - \dot{f}_{YX} \dot{f}_{YX}^* - \dot{f}_{XY} \dot{f}_{XY}^* - \dot{f}_Y \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{23} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X^* \dot{f}_{YX} + \dot{f}_X \dot{f}_{YX}^* - \dot{f}_{XY}^* \dot{f}_Y + \dot{f}_{XY} \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{24} &= a_0^2 / 2 \left[ i \dot{f}_X \dot{f}_{YX}^* - \dot{f}_X^* \dot{f}_{YX} - i \dot{f}_{XY} \dot{f}_Y^* - \dot{f}_{XY}^* \dot{f}_Y \right]; \\ M_{31} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_X \dot{f}_{XY}^* + \dot{f}_X \dot{f}_{XY} + \dot{f}_{YX}^* \dot{f}_Y + \dot{f}_{YX} \dot{f}_Y^* \right]; \\ M_{32} &= a_0^2 / 2 \left[ \dot{f}_{XY} \dot{f}_X^* + \dot{f}_X \dot{f}_{XY}^* - \dot{f}_Y \dot{f}_{YX}^* + \dot{f}_{YX} \dot{f}_Y^* \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{33} &= a_0^2/2 \left[ \dot{f}_X^* \dot{f}_Y + \dot{f}_X \dot{f}_Y^* + \dot{f}_{XY} \dot{f}_{YX}^* + \dot{f}_{YX} \dot{f}_{XY}^* \right]; \\
M_{34} &= a_0^2/2 \left[ i \dot{f}_X \dot{f}_Y^* - \dot{f}_X^* \dot{f}_Y - i \dot{f}_{YX} \dot{f}_{XY}^* - \dot{f}_{XY} \dot{f}_{YX}^* \right]; \\
M_{41} &= a_0^2/2 \left[ i \dot{f}_X^* \dot{f}_{XY} - \dot{f}_X \dot{f}_{XY}^* + i \dot{f}_{YX}^* \dot{f}_Y - \dot{f}_{YX} \dot{f}_Y^* \right]; \\
M_{42} &= a_0^2/2 \left[ i \dot{f}_X^* \dot{f}_{XY} - \dot{f}_X \dot{f}_{XY}^* + i \dot{f}_{YX} \dot{f}_Y^* - \dot{f}_{YX}^* \dot{f}_Y \right]; \\
M_{43} &= a_0^2/2 \left[ i \dot{f}_X^* \dot{f}_Y - \dot{f}_X \dot{f}_Y^* - i \dot{f}_{YX} \dot{f}_{XY}^* - \dot{f}_{YX}^* \dot{f}_{XY} \right]; \\
M_{44} &= a_0^2/2 \left[ \dot{f}_X^* \dot{f}_Y + \dot{f}_X \dot{f}_Y^* - \dot{f}_{YX}^* \dot{f}_{XY} + \dot{f}_{YX} \dot{f}_{XY}^* \right].
\end{aligned}$$

Если антенна обладает фазовым центром, то диаграммы направленности  $f_X(\theta, \varphi)$  и  $f_Y(\theta, \varphi)$  представляют собой вещественные функции. Тогда, записывая функции  $\dot{f}_{XY}(\theta, \varphi)$  и  $\dot{f}_{YX}(\theta, \varphi)$  в виде

$$\dot{f}_{XY} = \Phi_{XY} + i\Psi_{XY}, \dot{f}_{YX} = \Phi_{YX} + i\Psi_{YX}$$

и используя выражения для элементов матрицы Мюллера  $\|M_{il}\| (i, l = 1, 4)$  найдём распределение элементов вектора Стокса в дифракционном изображении:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_0^2} S_0^1 &= \frac{f_X^2 + f_Y^2 + |f_{XY}|^2 + |f_{YX}|^2}{2} S_0 + \frac{f_X^2 - f_Y^2 + |f_{XY}|^2 - |f_{YX}|^2}{2} S_1 + \\
&+ f_X \Phi_{YX} + f_Y \Phi_{XY} S_2 + f_X \Psi_{YX} - f_Y \Psi_{XY} S_3; \\
\frac{1}{a_0^2} S_1^1 &= \frac{f_X^2 - f_Y^2 + |f_{XY}|^2 - |f_{YX}|^2}{2} S_0 + \frac{f_X^2 + f_Y^2 - |f_{XY}|^2 - |f_{YX}|^2}{2} S_1 + \\
&+ f_X \Phi_{YX} - f_Y \Phi_{XY} S_2 + f_X \Psi_{YX} - f_Y \Psi_{XY} S_3; \\
\frac{1}{a_0^2} S_2^1 &= f_X \Phi_{XY} + f_Y \Phi_{YX} S_0 + f_X \Phi_{XY} - f_Y \Phi_{YX} S_1 + \\
&+ \Phi_{XY} \Psi_{YX} + \Phi_{YX} \Psi_{XY} + f_X f_Y S_2 + \Phi_{XY} \Psi_{YX} - \Phi_{YX} \Psi_{XY} S_3; \\
\frac{1}{a_0^2} S_3^1 &= f_Y \Psi_{YX} + f_X \Psi_{XY} S_0 - f_X \Psi_{XY} - f_Y \Psi_{YX} S_1 + \\
&+ \Phi_{XY} \Psi_{YX} - \Phi_{YX} \Psi_{XY} S_2 + f_X f_Y - \Phi_{XY} \Phi_{YX} - \Psi_{XY} \Psi_{YX} S_3.
\end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют определить характер искажений вектора Стокса принимаемой плоской волны для любой точки дифракционного изображения в рамках справедливости принятых ограничений. Так, в главном направлении, где  $f_x = f_y = 1, f_{xy} = f_{yx} = 0$ , матрица Мюллера имеет вид  $\|M_{il}^0\| = a_0^2 \|\delta_{il}\|$ , что указывает на неискажённую передачу поляризационных параметров принимаемой волны. Для случая идеальной антенны (при отсутствии кросс-поляризации) матрица Мюллера представляет собой единичную матрицу для всех направлений наблюдения.

Однако реальные антенны практически всегда обладают кросс-поляризационной диаграммой направленности [39], что приводит к искажениям при измерении поляризационных параметров исследуемой волны. Так, в частности, при измерении степени поляризации возникают ошибки, обусловленные возникновением частичной поляризации неполяризованной части принимаемого излучения.

Следуя [39], найдём степень паразитной частотной поляризации, возникающей при прохождении неполяризованной составляющей исследуемой волны через антенну. Поскольку вектор Стокса неполяризованной составляющей волны на входе антенны имеет вид  $S_0, 0, 0, 0$ , то распределение элементов вектора Стокса в дифракционном изображении определяется уравнениями:

$$S_0^1 = a_0^2 / 2 \left[ f_x^2 + f_y^2 + |f_{xy}|^2 + |f_{yx}|^2 \right] S_0;$$

$$S_1^1 = a_0^2 / 2 \left[ f_x^2 - f_y^2 + |f_{yx}|^2 - |f_{xy}|^2 \right] S_0;$$

$$S_2^1 = a_0^2 / 2 \left( f_x \Phi_{xy} + f_y \Phi_{yx} \right);$$

$$S_3^1 = a_0^2 / 2 \left( f_y \Psi_{yx} - f_x \Psi_{xy} \right).$$

Отсюда следует, что степень паразитной поляризации неполяризованной составляющей характеризуется величиной

$$\mu = \frac{\left[ S_1^{1\ 2} + S_2^{1\ 2} + S_3^{1\ 2} \right]^{0.5}}{S_0} \quad (3.85)$$

и отличается от нуля.

В заключении подраздела укажем, что для синфазных антенн паразитная поляризация линейна, а матрица Мюллера антенны имеет вид

$$\|M\| = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{vmatrix}.$$

В частности, данная форма матрицы Мюллера соответствует симметричным параболоидам вращения, создающим паразитную линейную поляризацию.

### ***3.15. Понятие Стоксова пространства в задаче преобразования поляризации плоских волн простыми приборами.***

Рассмотрим набор параметров Стокса  $\|S_i\|$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  как гипотетическое четырёхмерное Стоксово пространство. Если выделить из 4-мерного Стоксова пространства трёхмерное Стоксово подпространство  $S_1, S_2, S_3$ , то все операции с использованием сферы Пуанкаре можно интерпретировать, как вращение в этом подпространстве. Использование понятия Стоксова пространства  $S_0, S_1, S_2, S_3$  позволяет ввести очень простую интерпретацию измерения интенсивности волны в виде скалярного произведения 4-мерных векторов, заданных в этом пространстве [15]. С этой целью рассмотрим закон интерференции для волны, прошедшей через ряд последовательно расположенных простых приборов.

Запишем закон интерференции частично-поляризованной волны, определяющий её интенсивность после прохождения через поляризатор, ориентированный под углом  $\theta$  и фазовый прибор, вводящий фазовый сдвиг  $\delta$ :

$$I(\theta, \delta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_{il} \dot{a}_i \dot{a}_l^*, \quad (3.86)$$

где коэффициенты квадратичной формы определяются как  $a_1 = \cos \theta, a_2 = \sin \theta \exp -j\delta$ , а величины  $F_{il}$  представляют собой элементы матрицы когерентности входной волны.

Интенсивность  $I(\theta, \delta)$  можно рассматривать как след матрицы когерентности  $\|F_{il}^1\|$  волны на выходе последовательно расположенных поляризатора и компенсатора:

$$I(\theta, \delta) = Sp \|F_{il}^1\|, \quad (3.87)$$

где матрица  $\|F_{il}^1\| = \|A\| \|F_{il}\| \|A\|^+$  есть результат воздействия оператора

$$\begin{aligned} \|A\| &= \|L \theta \| \|L \delta \| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta \exp j0.5\delta & \sin \theta \cos \theta \exp -j0.5\delta \\ \sin \theta \cos \theta \exp -j0.5\delta & \sin^2 \theta \exp j0.5\delta \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (3.88)$$

характеризующего последовательно расположенные компенсатор и поляризатор. Тогда

$$\begin{aligned} I(\theta, \delta) &= Sp \|A\| \|F_{il}\| \|A\|^+ = Sp \|A\| \|A\|^+ \|F_{il}\| = \\ &= Sp \left\{ \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \exp -j\delta \\ \cos \theta \sin \theta \exp j\delta & \sin^2 \theta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{array} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Последнее соотношение позволяет интерпретировать наблюдаемую интенсивность как скалярное произведение двух векторов в 4-мерном Стоксовом пространстве.

Разложим теперь оператор  $\|A\| \|A\|^+$  по системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей:

$$\begin{aligned} \|A\| \|A\|^+ &= \\ &= \|\hat{\sigma}_0\| + \cos 2\theta \|\hat{\sigma}_1\| + \sin 2\theta \cos \delta \|\hat{\sigma}_2\| - \sin 2\theta \sin \delta \|\hat{\sigma}_3\|. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Из выражения (3.90) следует, что набор параметров: 1;

$\cos 2\theta; \sin 2\theta \cos \delta; -\sin 2\theta \sin \delta$ , представляющих собой раскрывающие коэффициенты разложения оператора  $\|A\| \|A\|^+$  по системе матриц Паули, можно интерпретировать как некоторые «параметры Стокса» комбинации приборов, используемых при измерениях. Эти параметры образуют «аппаратный» вектор Стокса

$$\|S_i^A\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \cos \delta \\ \sin 2\theta \sin \delta \end{array} \right\|. \quad (3.91)$$

Запишем теперь вектор Стокса волны на входе прибора в виде

$$\|S_i\| = \left\| \begin{array}{c} S_0/2 \\ S_1/2 \\ S_2/2 \\ S_3/2 \end{array} \right\|, \quad (3.92)$$

где из соображений удобства коэффициент 0.5 внесён в элементы вектора Стокса, что не изменяет свойств разложения  $\|F_{ii}\| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \|\hat{\sigma}_i\|$ .

Определим скалярное произведение векторов (3.91) и (3.92):

$$\vec{S}_i^A \cdot \vec{S}_i = \frac{S_0}{2} + \frac{S_1 \cos 2\theta}{2} + \frac{S_2 \sin 2\theta \cos \delta}{2} - \frac{S_3 \sin 2\theta \sin \delta}{2} \quad (3.93)$$

и заменим в этом выражении параметры Стокса  $S_i$  их представлением через элементы матрицы когерентности. Тогда, после несложных преобразований, выражение (3.93) примет вид

$$\begin{aligned} \vec{S}_i^A \cdot \vec{S}_i &= F_{11} \cos^2 \theta + F_{22} \sin^2 \theta + \\ &+ \cos \theta \sin \theta F_{12} \exp j\delta + \cos \theta \sin \theta F_{12} \exp -j\delta. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Выражение (3.94) представляет собой развёрнутую форма закона интерференции (3.86). Сравнивая (3.94) с результатом вычислений (3.89), видим, что

$$S_i^A S_i = Sp \|A\|^+ \|A\| \|F_{ii}\| = I(\theta, \delta).$$

Таким образом, интенсивность волны на выходе нескольких последовательно расположенных простых приборов может быть найдена как скалярное произведение “аппаратного” векторов Стокса совокупности приборов и анализируемой волны в Стоксовом пространстве  $S_0, S_1, S_2, S_3$  .

#### ***ГЛАВА 4***

### ***МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СТАБИЛЬНЫХ ТОЧЕЧНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ***

В настоящей главе рассмотрены вопросы описания поляризационных свойств радиолокационных объектов (*РЛО*) с использованием матрицы рассеяния (*МР*). Рассматривается случай точечного *РЛО*, параметры которого

не изменяются во времени, а положение в пространстве остается стабильным за весь период наблюдения. Такие *РЛО* называются стабильными. При этом также предполагается, что излучение *РЛС* является когерентным.

Одним из первых исследователей *МР* стабильного РЛО был Г.Синклер . Он показал, что радиолокационный объект изменяет состояние поляризации радиолокационного сигнала и описал эти преобразования для случая стабильного объекта (2x2) матрицей рассеяния [40]. Исследования Синклера продолжили Рамзей [41], Кенно [42] и Десчемпс [43], которые также внесли значительный вклад в развитие теории матрицы рассеяния. В дальнейшем Кенно [44] и Коупленд [45] разработали концепцию оптимальных поляризаций радарного объекта и первую практическую схему классификации радарных объектов. Р.Хойнен [46] продолжил исследования Кенно и разработал феноменологическую теорию радарных объектов, которая в завершённом виде была представлена в его диссертации [11], защищенной в 1970 году в Технологическом университете Делфта (Нидерланды) В период 60-х и 70-х годов XX века значительный вклад в развитие радарной поляриметрии и теории матрицы рассеяния внесли российские специалисты В.А. Потехин, Д. Б. Канарейкин, В. В. Богородский, А.И. Козлов, В.Н.Татаринов, В.А.Мелитицкий, С.И.Поздняк [4,5,6,7,8,9]. В семидесятые годы XX века В.Бёрнер инициировал критический анализ работ Кенно и Хойнена и опубликовал ряд основополагающих статей [47,48,49] в области гражданской и военной радиолокации.

Среди европейских исследователей, внесших значительный вклад в развитие теории матрицы рассеяния точечного объекта и ее разложений необходимо упомянуть Д. Сайярда, Ш.Клауда, Е.Потье, Е.Люнебурга, Е.Крогагера, З.Чижа [50,51,52,53,54,55,56 и др.].

Однако необходимо указать, что данная глава не является изложением конкретных результатов исследований, проведенных упомянутыми учеными, но представляет собой физически обоснованное описание основных вопросов,

связанных с преобразованием поляризации электромагнитных волн простыми (точечными) радиолокационными объектами.

#### ***4.1 Матрица рассеяния стабильного точечного радарного объекта.***

В общем случае при рассеянии электромагнитных волн радиолокационными объектами имеет место преобразование поляризации волн. Основное содержание настоящей главы посвящено анализу поляризационных свойств стабильных точечных *РЛО*. Краткое определение понятия «стабильный» объект дано выше, однако корректное определение понятия «точечный» объект требует более подробного изложения.

##### ***4.1.1 Понятие простого «точечного» радиолокационного объекта в задачах радиолокации.***

Вопросам определения рассеивающих свойств радиолокационных объектов (*РЛО*) простой и сложной формы, а также протяженных целей посвящено значительное количество публикаций. Так, рассеивающие свойства *РЛО* простой формы подробно рассмотрены в тематическом выпуске "Proceedings of the IEEE" v. 53, № 8, 1965 [57] и в монографии П. Я. Уфимцева [58]. Тематические выпуски журналов "Proc. of the IEEE", v. 77, № 5, 1989 [59] и "IEEE Trans. on Antennas and Propagation", № 5, 1989 [60] посвящены вопросам определения рассеивающих свойств сложных объектов. При этом сложные *РЛО* определены как тела нерегулярной формы, в отличие от простых объектов, которые обычно представляют собой тела вращения.

Сложные (протяженные) *РЛО* могут быть представлены в виде с комбинации "точечных" рассеивателей ("точечных" *РЛО*). Необходимо отметить, что понятие "блестящей" точки, или центра вторичного излучения, определяемого первой зоной Френеля, хорошо известно и широко используется в радиолокации при определении радиолокационного поперечного, сечения (эффективной поверхности рассеяния или *ЭПР*) *РЛО*. Понятие "блестящей" точки естественным образом связывается с понятием "точечного" *РЛО*, но

определение "точечного" *РЛО* в задачах, посвященных статистическим проблемам радиолокации сложных объектов, имеет весьма нечеткую формулировку. Так, Ф. А. Басалов и Р. В. Островитянов [61] полагают, что определение "точечного" *РЛО* имеет чисто геометрический характер и связано только с соотношениями размеров *РЛО* и пространственным разрешением *РЛС*. В то же время Е. А. Штагер [62] использует понятие "локального" рассеивателя, который может объединять в своем составе несколько "простых" (или "точечных") рассеивающих центров. В итоге авторы [61,62] предлагают считать *РЛО* "точечным", если его геометрические размеры (независимо от формы *РЛО* и соотношения между его размерами и длиной волны *РЛС*) много меньше интервала разрешения, обеспечиваемого *РЛС* как по дальности, так и по угловым координатам.

Из изложенного следует, что исследование вопросов, связанных с определением поляризационных параметров электромагнитных волн, рассеянных сложным *РЛО*, обладающим некоторым количеством случайно расположенных центров вторичного рассеяния, требует более четкой формулировки и физического обоснования как "точечного", так и "сложного" *РЛО*. Учитывая, что точное определение рассеивающих свойств радарных объектов на основе полного решения дифракционной задачи (включая как внутреннюю, связанную с определением распределения токов на *РЛО*, так и внешнюю, связанную с определением поля дифракции) в данной книге не используется, ограничимся при обосновании определений только внешней задачей дифракции.

Для корректного определения упомянутых понятий воспользуемся выражением для радиолокационного поперечного сечения в виде

$$\sigma = \frac{\pi}{\lambda^2} \left| \int i z \exp \left\{ j 2 k_0 z \cos \frac{\beta}{2} \right\} dz \right|, \quad (4.1)$$

которое справедливо как для двухпозиционной, так и для однопозиционной радиолокации [63]. Выражение (4.1) представляет собой одну из форм

интеграла Стрэттона-Чу [64] для случая дифракции волн на объекте произвольной формы.

Здесь  $\beta$  - угол двухпозиционного рассеяния, а ось  $OZ$  совпадает с биссектрисой этого угла (см. рис. 4.1) .

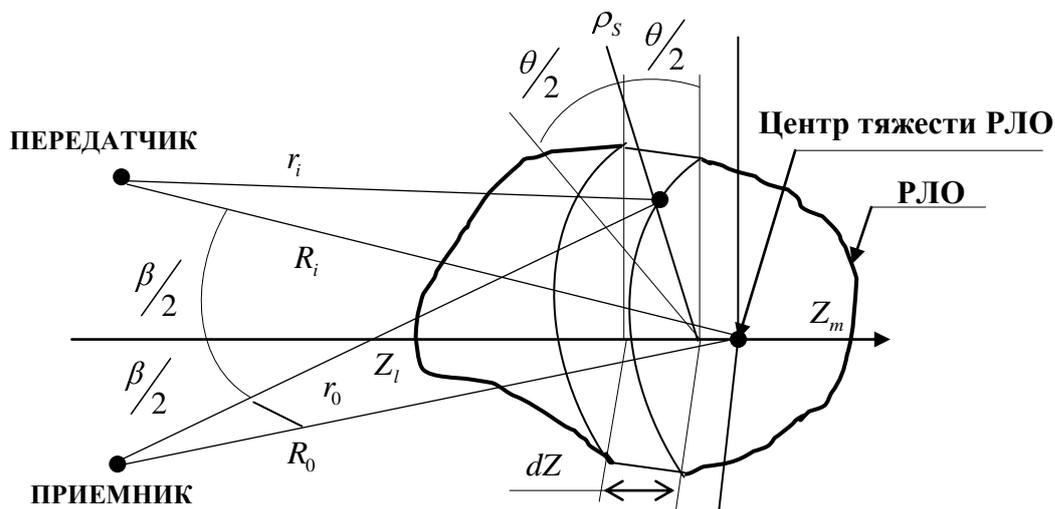


Рис. 4.1

Подынтегральная функция  $\dot{I} z$  является результатом интегрирования по "пояску"  $dz$  на первом этапе определения общего решения дифракционной задачи [63]. "Поясок"  $dz$  есть элемент поверхности РЛО, заключенный между двумя параллельными плоскостями, которые перпендикулярны оси  $OZ$ . Векторная функция  $\dot{I} z$  связана с электрическим и магнитным векторами падающей волны [63].

Вообще говоря, соотношение (4.1) кажется простым и напоминает хорошо известное выражение физической оптики (М. Борн, Е. Вольф [13]). Но, к сожалению, функция  $\dot{I} z$  не известна точно, за исключением небольшого числа частных случаев. Эта функция представляет собой сложное выражение, зависящее от геометрии поверхности, геометрии падающего и отраженного лучей и явлений, связанных с распространением поверхностных волн [58,63]. Свойство непрерывности функции  $\dot{I} z$  имеет большое значение для

определения эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) сложного объекта, поскольку интеграл (4.1) может быть разбит на сумму интегралов, каждый из которых берется внутри той области значений  $z$ , в пределах которой подынтегральное выражение непрерывно. Каждый из этих интегралов может быть интерпретирован как "простой" (или "единичный") центр вторичного излучения [63], обусловленный областью стационарной фазы. Вклад каждого центра вторичного излучения в полный дифракционный интеграл (4.1) зависит от размеров области стационарной фазы, т.е. области вблизи рассматриваемого центра излучения, в пределах которой суммарная фаза подынтегрального выражения

$$\dot{I} z \exp j2k_0 z \cos \beta / 2$$

отличается не более чем на  $\pi/2$  от ее значения в центре области вторичного излучения.

В случае если РЛО имеет такую геометрию, что он обладает только одной областью (центром) вторичного излучения, то это и будет одноточечный (или просто точечным) объектом. При этом единственная область вторичного излучения должна иметь фиксированный фазовый центр. Область объекта, которая определяет характер рассеянного поля, может представлять собой как идеально проводящую поверхность, так и включать в себя диэлектрические материалы, что может обуславливать электрическую анизотропию этой области [63]. Свойство электрической анизотропии области вторичного излучения ("точечного" рассеивателя) определяет связь между векторами электрической напряженности  $\dot{\vec{E}}_I$  падающей и  $\dot{\vec{E}}_S$  рассеянной волн в форме матричного уравнения, которое для случая однопозиционной радиолокации имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{1S} \\ \dot{E}_{2S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_{1I} \\ \dot{E}_{2I} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где матрица  $\|\dot{S}_{jl}\|$   $j, l = 1, 2$  есть матрица обратного рассеяния «точечного» рассеивающего объекта, или просто «матрица рассеяния». Вопросы, связанные

с определением «сложного» радиолокационного объекта и описанием его поляризационных свойств, будут рассмотрены во втором томе книги.

Рассмотрим случай, когда система координат радиолокационного объекта совпадает с опорной системой координат *РЛС*. Тогда, если поляризация излучения параллельна первому орту опорного базиса

$$\dot{\vec{E}}_I = \begin{Bmatrix} \dot{E}_{1I} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

то проекции вектора Джонса рассеянной волны будут определяться элементами первого столбца матрицы  $\|\dot{S}_{ji}\|$ :

$$\begin{Bmatrix} \dot{E}_{1S} \\ \dot{E}_{2S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \dot{E}_{1I} \\ S_{21} \dot{E}_{1I} \end{Bmatrix}. \quad (4.3a)$$

Составляющая  $\dot{E}_{2S}$ , которая не присутствовала в излученном сигнале, называется кросс-поляризованной составляющей. Иногда в литературе эффект появления кросс-поляризованной составляющей называют деполяризацией излученной волны. Однако в физике и оптике [8,13] под деполяризацией полностью поляризованной электромагнитной волны понимается переход части энергии этой волны в неполяризованную составляющую. При этом волна становится частично поляризованной. При радиолокации стабильных объектов как излучаемая, так и рассеянная волны поляризованы полностью, т.е. эффекта деполяризации не наблюдается. Поэтому, в дальнейшем, применительно к изменению состояния поляризации при рассеянии стабильными объектами, термин «деполяризация» не используется.

Если поляризация излучения параллельна второму орту опорного базиса

$$\dot{\vec{E}}_I = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{E}_{2I} \end{Bmatrix},$$

то компоненты рассеянной волны определяются элементами второго столбца матрицы рассеяния:

$$\begin{Bmatrix} \dot{E}_{1S} \\ \dot{E}_{2S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{12} \dot{E}_{2I} \\ S_{22} \dot{E}_{2I} \end{Bmatrix}. \quad (4.3b)$$

#### 4.1.2 Теорема взаимности. Связь понятий матрицы рассеяния и эффективной поверхности рассеяния .

Как было указано выше, основное внимание в данной книге уделяется наиболее распространенному методу радиолокационного наблюдения, при котором передающая и приемная антенны совмещены, т.е. однопозиционной радиолокации.

Из теоремы взаимности [4,9] следует, что замена передающей антенны приемной и наоборот влечет за собой транспонирование матрицы рассеяния радарного объекта:

$$\|S_{jl} \vec{n}_I, \vec{n}_S\| = \|S_{jl} -\vec{n}_S, \vec{n}_I\|, \quad (4.4a)$$

где  $(\vec{n}_I, \vec{n}_S)$  - единичные орты, характеризующие направление распространения излучаемой и рассеянной волн соответственно. Поскольку в однопозиционном случае для передачи и приема используется одна антенна, то  $\vec{n}_S = -\vec{n}_I$  и выражение (4.4a) примет вид

$$\|S_{jl} \vec{n}_I, \vec{n}_S\| = \|S_{jl} \vec{n}_I, \vec{n}_S\|. \quad (4.4b)$$

Последнее обуславливает симметрию однопозиционной матрицы обратного рассеяния, т. е. равенство её внедиагональных элементов

$$\dot{S}_{12} = \dot{S}_{21}. \quad (4.5)$$

Таким образом, при однопозиционной радиолокации радарный объект может быть characterized тремя комплексными числами  $\dot{S}_{11}, \dot{S}_{12}, \dot{S}_{22}$ .

Рассмотрим теперь связь понятия матрицы рассеяния с хорошо известным понятием эффективной поверхности рассеяния (ЭПР). Как известно [65] элементы матрицы рассеяния  $\sigma_{jl}$  связаны с ЭПР соотношением:

$$\sigma_{jl} = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \left| \frac{\dot{E}_j^S}{\dot{E}_I^I} \right|^2, \quad (4.6)$$

где  $R$  – расстояние от антенны до объекта.

Если определить модуль каждого из элементов матрицы рассеяния как предел

$$|\dot{S}_{jl}| = \sqrt{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} R \left| \frac{\dot{E}_j^S}{\dot{E}_l^I} \right|, \quad (4.7)$$

то станет ясно, что квадрат модуля этого элемента есть ЭПР, которая может быть измерена при облучении цели волной, поляризованной параллельно орту  $\dot{e}_{lI}$  и приеме на антенну с поляризацией, параллельной орту  $\dot{e}_{jS}$ .

Величина, определяемая выражением (4.7) имеет размерность длины и не зависит от дальности до цели.

#### 4.1.3 Преобразования элементов однопозиционной матрицы рассеяния при изменении поляризационного базиса.

Преобразование вектора Джонса волны, излучаемой радиолокатором и осуществляемое матрицей рассеяния (см. уравнение (4.2)), по форме напоминает преобразование вектора Джонса, осуществляемое матрицей Джонса простого прибора (см. Главу 3). Однако использование подобной аналогии возможно только при рассеянии волн «вперед», т. е. по направлению волнового вектора падающей на объект волны. В этом случае закономерность преобразования элементов матрицы рассеяния «вперед» при изменении поляризационного базиса будет аналогична преобразованию элементов матрицы Джонса, рассмотренному в Главе 3. Данный факт обусловлен сохранением ориентации ортов координатной системы как для падающей, так и для рассеянной волн (см. рис. 4.2).

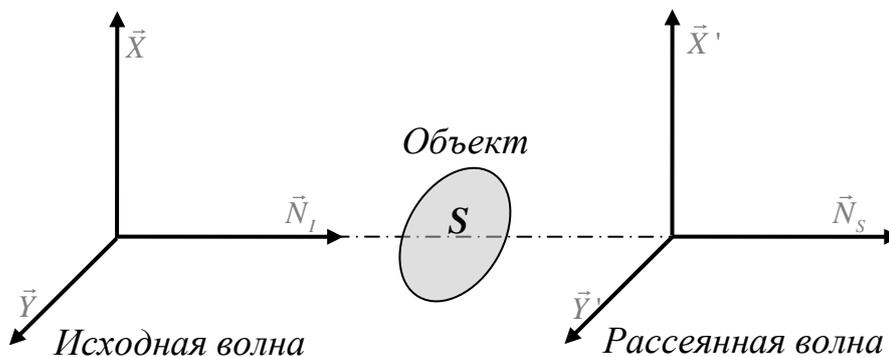


Рис. 4.2

На данном рисунке как система координатных ортов  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{N}_I$ , связанная с падающей на объект волной, так и система координатных ортов  $\vec{X}', \vec{Y}', \vec{N}_S$ , связанная с рассеянной «вперед» волной, образуют правую тройку векторов. При этом направление вращения вектора электрического вектора, определяемое знаком смешанного произведения  $j\vec{N} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{E}}^*$ , не изменится, поскольку знак смешанного произведения (плюс для правой тройки векторов, минус для левой тройки векторов) не изменяется.

При обратном рассеянии ситуация усложняется (рис. 4.3) [66]. Поскольку система координатных ортов  $\vec{X}', \vec{Y}', \vec{N}_S$ , связанная с рассеянной назад волной, образует левую тройку векторов, то смешанное произведение  $j\vec{N} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{E}}^*$  приобретает знак «минус». Это видно также из того, что нормаль к фронту рассеянной волны меняет знак на обратный:  $\vec{N}_S = -\vec{N}_I$ .

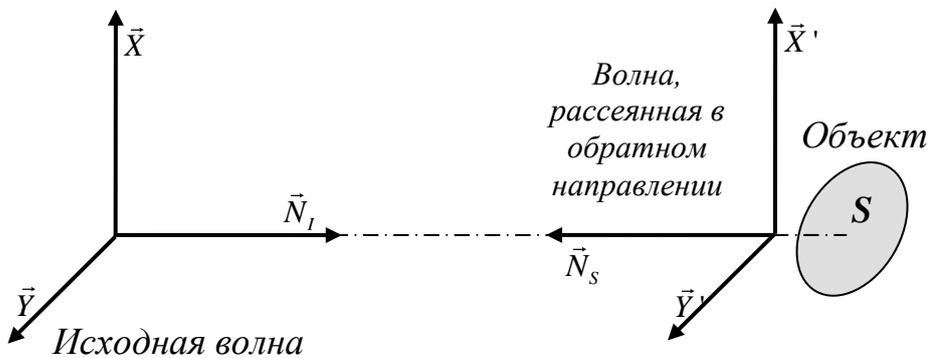


Рис. 4.3

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, размещенного у радиолокатора, направление вращения вектора электрического поля изменяется на противоположное. Данное обстоятельство отображается комплексным сопряжением вектора Джонса рассеянной волны:  $\dot{\vec{E}} \rightarrow \dot{\vec{E}}^*$ . В используемом

исходном поляризованном базисе  $[\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2]$  любому вектору-столбцу рассеянного поля  $\dot{\vec{E}}_s$  может быть сопоставлен такой вектор-столбец излучаемого поля  $\dot{\vec{E}}_I$ , что

$$\dot{\vec{E}}_s = \dot{\vec{E}}_I^*. \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) должно соблюдаться и при переходе в новый поляризованный базис  $[\dot{\vec{e}}'_1, \dot{\vec{e}}'_2]$ , т. е.

$$\dot{\vec{E}}'_s = \dot{\vec{E}}'_I^*. \quad (4.9)$$

Вектор-столбец излучаемого поля  $\vec{E}_I$  при переходе в новый поляризованный базис преобразуется в соответствии с выражением

$$\dot{\vec{E}}'_I = \|\dot{Q}\| \dot{\vec{E}}_I, \quad (4.10)$$

где  $\|\dot{Q}\|$  - матрица перехода в новый базис. Подставляя выражение (4.10) в (4.9), получим  $\dot{\vec{E}}'_s = \|\dot{Q}\| \dot{\vec{E}}_I^* = \|\dot{Q}^*\| \dot{\vec{E}}_I^*$ , а затем, используя соотношение (4.8), получим закон преобразования вектора Джонса рассеянной волны при переходе в новый поляризованный базис:

$$\dot{\vec{E}}'_s = \|\dot{Q}^*\| \dot{\vec{E}}_s. \quad (4.11)$$

Обратное преобразование от вектора Джонса в новом базисе  $[\dot{\vec{e}}'_1, \dot{\vec{e}}'_2]$  к вектору Джонса в старом базисе  $[\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2]$  реализуется с использованием соответствующих обратных матриц. При этом вектор Джонса излучаемой волны определяется выражением

$$\dot{\vec{E}}_I = \|\dot{Q}\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_I = \|\dot{Q}^*\|^+ \dot{\vec{E}}'_I, \quad (4.12)$$

а вектор Джонса рассеянной волны имеет вид

$$\dot{\vec{E}}_s = \|\dot{Q}^*\|^{-1} \dot{\vec{E}}'_s = \|\tilde{Q}^*\|^+ \dot{\vec{E}}'_s. \quad (4.12)$$

В выражениях (4.12) и (4.13) было использовано условие унитарности матриц перехода:  $\|\dot{Q}\|^{-1} = \|\dot{Q}\|^+$ . Подставляя выражение (4.12) и (4.13) в соотношение (4.2) получим равенство

$$\|\tilde{Q}\| \dot{E}'_s = \|\dot{S}_{jl}\| \|\dot{Q}\|^+ \dot{E}'_I, \quad (4.14)$$

где  $\|\dot{S}_{jl}\|$  есть матрица обратного рассеяния, записанная в исходном поляризационном базисе. Умножим теперь обе части уравнения (4.14) на матрицу  $\|\dot{Q}^*\|$  слева и приведем это уравнение к виду

$$\dot{E}'_s = \|\dot{Q}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| \|\dot{Q}\|^+ \dot{E}'_I. \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) можно рассматривать как преобразованное к новому поляризационному базису уравнение (4.2), если ввести обозначение

$$\|\dot{S}'_{jl}\| = \|\dot{Q}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| \|\dot{Q}\|^+, \quad (4.16)$$

определяющее матрицу обратного рассеяния в новом поляризационном базисе.

В частном случае поворота линейного поляризационного базиса на угол  $\beta$  матрица рассеяния в новом базисе имеет вид

$$\|\dot{S}'_{jl}\|_{\beta} = \|Q\|_{\beta} \|\dot{S}_{jl}\| \|\tilde{Q}\|_{\beta} = \begin{vmatrix} C_{\beta} & S_{\beta} \\ -S_{\beta} & C_{\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_{\beta} & -S_{\beta} \\ S_{\beta} & C_{\beta} \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

а в случае, когда изменяется только эллиптичности единичных ортов поляризационного базиса (без изменения ориентации)

$$\|\dot{S}'_{jl}\|_{\alpha} = \|\dot{Q}^*\|_{\alpha} \|\dot{S}_{jl}\| \|\dot{Q}\|_{\alpha}^+ = \begin{vmatrix} C_{\alpha} & jS_{\alpha} \\ jS_{\alpha} & C_{\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_{\alpha} & jS_{\alpha} \\ jS_{\alpha} & C_{\alpha} \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

Если имеет место переход от линейного поляризационного базиса к круговому базису, то данный переход реализуется выражением (4.18) для значения угла эллиптичности  $\alpha = \pi/4$ :

$$\|\dot{S}'_{jl}\|_{\alpha=\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

## **4.2 Матрицы рассеяния простейших радиолокационных объектов.**

Из проведенного в подразделе 4.1 анализа следует, что между формализмом матрицы рассеяния и формализмом матрицы Джонса, изложенным в третьей главе, существует определенная связь. Ясно, в частности, что должны иметь место некоторые поляризации излучаемой волны, которые не изменяются при рассеянии (т.е. собственные поляризации объекта). В зависимости от физических свойств радиолокационного объекта эти поляризации могут быть линейными, круговыми или эллиптическими. Формальный аппарат определения собственных поляризаций должен сводиться к нахождению собственных чисел матрицы рассеяния и отвечающих им собственных векторов.

Однако процедура диагонализации матрицы рассеяния ( $MP$ ), направленная на определение ее собственных чисел, не является однозначно определенной для  $MP$  произвольных радиолокационных объектов, характеризуемых тремя комплексными числами. Проще всего обстоит дело с симметричными объектами, представляющими собой тела вращения, для которых  $MP$  путем некоторого поворота всегда может быть приведена к диагональному виду. Учитывая то обстоятельство, что телом вращения может быть аппроксимировано значительное число рассеивающих объектов, рассмотрим подробно  $MP$  такого тела и ее представления.

### **4.2.1 Двухвибраторная модель радиолокационного объекта.**

Радиолокационный объект, в плоскости симметрии которого лежит визирная линия, имеет  $MP$ , которая может быть приведена к диагональному виду. При этом в общем случае данный объект представляет некоторую физическую среду, характеризуемую главными значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  тензора поляризуемости.

Проведем анализ некоторых свойств  $MP$  симметричного объекта. Пусть собственная система координат (собственный базис)  $X'OY'$  объекта образован линейными поляризациями и ориентирован под углом  $\theta$  к системе координат

антенны РЛС  $XOY$  (рис. 4.4). Предположим, что относительный фазовый сдвиг между ортогональными составляющими поля в системе координат  $X'OY'$  объектом не вносится. Тогда в собственном базисе объекта его  $MP$  имеет вид действительной диагональной матрицы

$$\|S_{jl}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad (4.20)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - главные значения тензора поляризуемости объекта.

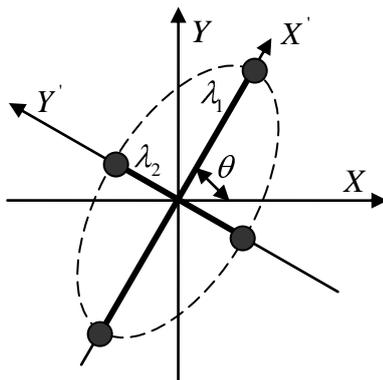


Рис.4.4а

Как было показано в подразделе 4.1.3, преобразование  $(2 \times 2)$  матрицы рассеяния при повороте поляризационного базиса без изменения эллиптичности определяется выражением

$$\|\dot{S}_{jl}\|_{\beta} = \|Q\|_{\beta} \|\dot{S}_{jl}^0\| \|\tilde{Q}\|_{\beta}, \quad (4.21)$$

где  $\|Q\|_{\beta}$  и  $\|\tilde{Q}\|_{\beta}$  представляют собой прямой и обратный операторы поворота.

Данное преобразование учитывает изменение направления вращения электрического вектора рассеянного поля. В этом случае рассеянное поле, определенное в опорном базисе, можно записать как

$$\dot{\vec{E}}_s = \|\dot{S}_{jl}\| \dot{\vec{E}}_l = \|Q\|_{\beta} \|\dot{S}_{jl}^0\| \|\tilde{Q}\|_{\beta} \dot{\vec{E}}_l. \quad (4.22)$$

Запишем теперь  $MP$  симметричного объекта с действительными собственными поляризациями в развернутом виде

$$\begin{aligned} \|\dot{S}_{jl}\| &= \left\| \begin{array}{cc} C_\beta & S_\beta \\ -S_\beta & C_\beta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} C_\beta & -S_\beta \\ S_\beta & C_\beta \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} C_\beta^2 \lambda_1 + S_\beta^2 \lambda_2 & -C_\beta S_\beta \lambda_1 + C_\beta S_\beta \lambda_2 \\ -C_\beta S_\beta \lambda_1 + C_\beta S_\beta \lambda_2 & S_\beta^2 \lambda_1 + C_\beta^2 \lambda_2 \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь, как и ранее,  $C_\beta \equiv \cos \beta$ ,  $S_\beta \equiv \sin \beta$ .

Из выражения (4.23) следует, что  $MP$  может быть представлена в виде суммы

$$\|\dot{S}_{jl}\| = \lambda_1 \left\| \begin{array}{cc} C_\beta^2 & -C_\beta S_\beta \\ -C_\beta S_\beta & S_\beta^2 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{cc} S_\beta^2 & C_\beta S_\beta \\ C_\beta S_\beta & C_\beta^2 \end{array} \right\|. \quad (4.24)$$

Сравнивая слагаемые этой суммы с матрицей Джонса поляризатора (см. Гл. 3), нетрудно видеть, что  $MP$  симметричного объекта, не вносящего дополнительного фазового сдвига, может быть представлена суммой двух матриц, отвечающих поляризаторам, ориентированным по осям  $OX$ ,  $OY$  и имеющим коэффициенты передачи  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. При рассмотрении в собственной системе координат разложение (2.24) переходит в разложение, имеющее вид

$$\|\dot{S}'_{jl}\| = \lambda_1 \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (4.24a)$$

Естественно, что данные поляризаторы функционируют в режиме отражения, а не пропускания.

Из представлений (4.24) и (4.24a) следует практический вывод: любой симметричный объект может быть представлен суммой двух ортогональных вибраторов (поскольку последние в радиодиапазоне эквивалентны отражательным поляризаторам), электрические длины которых определяются собственными числами  $MP$ , а ориентация соответствует ориентации собственных векторов (собственных поляризаций)  $MP$ . Фазовые центры этих вибраторов совмещены.

В случае если электрические свойства объекта таковы, что он вносит дополнительный фазовый сдвиг между ортогональными составляющими падающей волны, то его МР в собственном базисе имеет вид [4,67]

$$\|\dot{S}'_{jl}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 \exp j\varphi_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \exp j\varphi_2 \end{vmatrix} = \exp j\varphi_2 \begin{vmatrix} \lambda_1 \exp j\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Опуская абсолютный фазовый множитель  $\exp j\varphi_2$  и разделив для удобства взаимный сдвиг  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  поровну между собственными числами, получим

$$\begin{aligned} \|S'_{jl}\| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 \exp j0.5\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \lambda_2 \exp -j0.5\Delta\varphi \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \exp j0.5\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \exp -j0.5\Delta\varphi \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} \exp j0.5\Delta\varphi & 0 \\ 0 & \exp -j0.5\Delta\varphi \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из выражения (4.25) следует, что объект, вносящий дополнительный фазовый сдвиг между ортогональными составляющими также может быть представлен суммой двух ортогональных вибраторов. При этом их фазовые центры разнесены вдоль линии визирования на расстояние  $2\Delta Z$  обеспечивающее (при заданной длине) волны фазовый сдвиг величиной  $\Delta\varphi = 2k\Delta Z$ . Данная ситуация изображена на Рис.4.б. Здесь приведен случай, когда собственная система координат радиолокационного объекта совпадает с опорной координатной системой ( $\theta = 0$ ). Формально последняя операция описывается

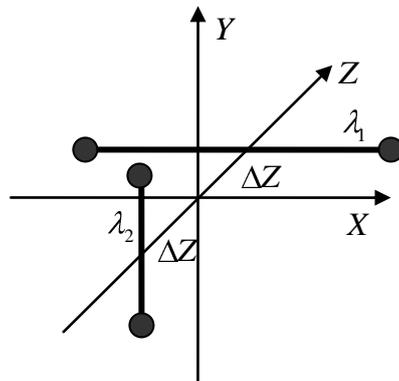


Рис.4.4б

матрицей Джонса дихроичного фазосдвигающего устройства (см. Гл.3), собственные оси которого совпадают с осями пропускания поляризаторов.

#### **4.2.2 Трехгранный уголкоый отражатель.**

Проведенный выше анализ дает представление о так называемом случае вырождения  $MP$ , которое имеет место при равенстве нулю одного из ее собственных чисел (при этом детерминант матрицы обращается в нуль). Теперь рассмотрим ситуацию, имеющую место при равенстве модулей собственных чисел  $MP$ . В случае действительных собственных чисел условие  $\lambda_1 = \lambda_2$  свидетельствует о том, что объект представляет собой сферу. При этом матрица рассеяния является единичной с некоторым масштабным множителем

$$\|S_{jl}\| = \lambda \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = \lambda \|\delta_{jl}\|. \quad (4.26)$$

Зависимость от ориентации в данном случае не имеет места. Математически это объясняется тем, что при  $\lambda_1 = \lambda_2$  матрица (4.26) имеет бесчисленное множество пар собственных векторов, из которых всегда можно выбрать пару, совпадающую с собственной системой координат радара. Отсутствие зависимости от ориентации подтверждается вычислением произведения

$$\lambda \|Q\|_{\beta} \|\delta_{jl}\| \|Q\|_{\beta}^{-1} = \lambda \|\delta_{jl}\|.$$

Единичная форма матрицы (4.26) свидетельствует о том, что изменение поляризации излучаемой волны не происходит (за исключением изменения масштаба). Радиолокационные объекты, обладающие такой матрицей рассеяния, называются поляризационно-изотропными. При этом объекты могут обладать бесконечно большой проводимостью (идеально отражающие объекты). К поляризационно-изотропным объектам следует отнести сферу, плоскую металлическую пластину больших размеров и металлический трехгранный уголкового отражатель (*УО*). Металлические трехгранные *УО* представляют собой самый распространенный тип широкоугольных моноэлектрических отражателей, используемых в радиолокации. Эти отражатели просты по конструкции, обеспечивают значительные *ЭПР* при минимальных размерах и обладают слабой направленностью [67]. Трехгранный *УО* состоит из трех взаимно перпендикулярных металлических (или металлизированных) граней. Наиболее часто используются треугольные и квадратные грани. Внутренние поверхности граней при условии, что они велики по сравнению с длиной волны, образуют систему из трех зеркал. При падении на них плоской волны, направление распространения которой характеризуется волновым вектором  $\vec{k}$ , после трехкратного отражения формируется плоская волна, распространяющаяся в направлении, обратном направлению падения [67]. Рассмотрение этого эффекта в рамках геометро-оптического приближения приведено на Рис.4.5а. На этом рисунке изображен процесс трехкратного отражения плоской линейно поляризованной волны.

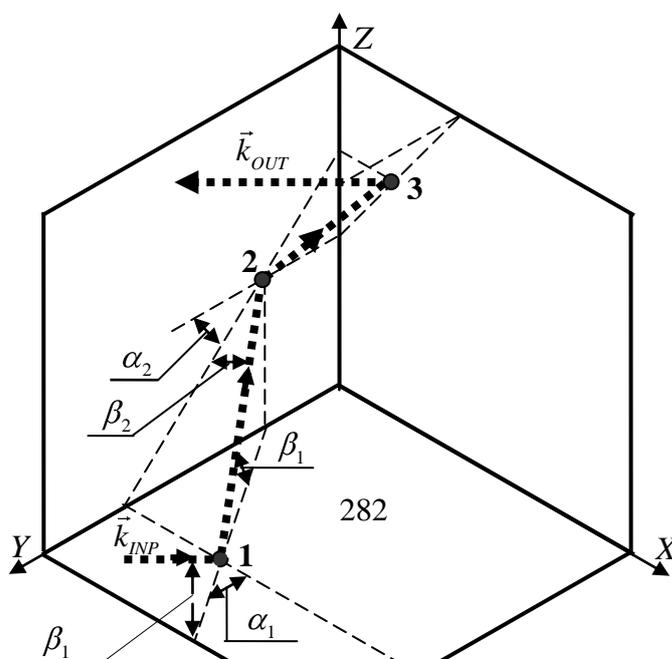


Рис 4.5а

Пусть волна падает на плоскость  $XOY$  в точку  $I$  под углом  $\beta_1$  так, что плоскость первого отражения составляет с осью  $OX$  угол  $\alpha_1$ . Далее волна падает на плоскость  $YOZ$  в точку  $2$  под углом  $\beta_2$ ; при этом плоскость второго отражения составляет с осью  $OY$  угол  $\alpha_2$ . Далее волна падает на плоскость  $XOZ$  в точку  $3$  под углом  $\beta_3$ , причем плоскость третьего отражения составляет угол  $\alpha_3$  с осью  $OZ$ .

В результате, после трехкратного отражения, волна останется линейно поляризованной с тем же углом ориентации, т.е. оказывается поляризованной параллельно падающей волне. Таким образом, трехгранный отражатель с взаимно-перпендикулярными гранями ведет себя как плоская металлическая пластина при нормальном падении.

На основании геометро-оптического рассмотрения процесса трехкратного отражения можно обосновать форму матрицы рассеяния трехгранного отражателя, как поляризационно-изотропного объекта.

Пусть в пределах основного лепестка диаграммы рассеяния, отвечающей трехкратному отражению от граней, на  $YO$  падает плоская, линейно-поляризованная волна (рис.4.5б). Вектор Джонса падающей волны можно представить в виде векторной суммы составляющих, параллельных ребрам отражателя, и, следовательно, осям координатной системы  $XYZ$ :

$$\vec{E}_I = E_{XI} \vec{e}_X + E_{YI} \vec{e}_Y + E_{ZI} \vec{e}_I. \quad (4.27)$$

Каждая из этих составляющих перпендикулярна одной из граней  $YO$  и параллельна двум другим. Поэтому в соответствии с законами отражения,

каждая из векторных составляющих отражается от одной грани с коэффициентом отражения  $K = 1$ , а от двух других граней с коэффициентом отражения  $K = -1$ . Таким образом, с точностью до некоторого постоянного комплексного коэффициента, одинакового для всех трех составляющих, выполняется равенство

$$\vec{E}_S = E_{XS} \vec{e}_X + E_{YS} \vec{e}_Y + E_{ZS} \vec{e}_Z = E_{XI} \vec{e}_I + E_{YI} \vec{e}_Y + E_{ZI} \vec{e}_Z. \quad (4.28)$$

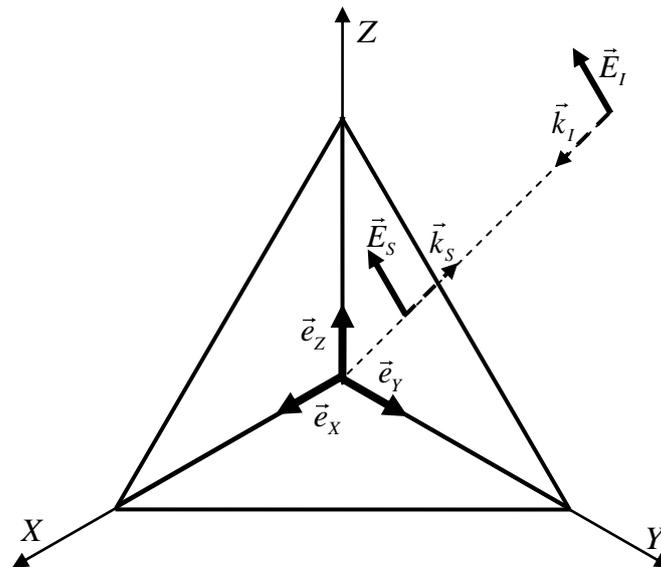


Рис. 4.5б

Отсюда следует, что трехгранный  $УО$  может рассматриваться как поляризационно-изотропный объект, а его матрица рассеяния в линейном базисе имеет вид (4.26). При этом величина  $\lambda$  (в общем случае комплексная) и представляет собой вышеупомянутый постоянный коэффициент.

Рассмотрение только процесса отражения линейно-поляризованной волны не снижает общности, так как произвольно поляризованная волна может быть разложена в линейном поляризационном базисе. Учитывая этот факт, нетрудно убедиться, например, в том, что трехкратное отражение волны круговой поляризации от граней  $УО$  приводит к тому, что электрический вектор волны, рассеянной в обратном направлении, будет иметь для наблюдателя, размещенного у антенны  $РЛС$ , обратное направление вращения, по сравнению с направлением вращения вектора поля излучаемой антенной

волны. Это обстоятельство является чрезвычайно важным и будет подробно проанализировано при введении понятия поляризаций нулевого сигнала.

Подводя итоги анализа отражающих свойств трехгранного  $УО$ , отметим, что его максимальная эффективная поверхность рассеяния при распространении волны параллельно оси симметрии, зависит от формы его граней. Так, для грани в виде прямоугольного треугольника с гипотенузой величиной  $a$  ЭПР определяется величиной  $4\pi a^4 / 3\lambda^2$ , для грани в виде квадрата со стороной  $a$  как  $12\pi a^4 / \lambda^2$  и для полукруглой грани радиуса  $a$  ЭПР принимает значение  $16\pi a^4 / 3\lambda^2$  [67].

#### **4.2.3 Двугранный уголкового отражатель**

Рассмотрим теперь матрицу рассеяния двугранного уголкового отражателя, представляющего собой конструкцию из двух металлических пластин, соединенных под прямым углом. Электромагнитная волна, падающая на такой отражатель, отражается в обратном направлении при выполнении следующих условий:

- 1) линия, соединяющая  $РЛС$  с серединой ребра  $УО$ , должна лежать в пределах его угла раскрытия;
- 2) ребро  $УО$  должно быть перпендикулярно направлению падения волны.

Последнее обусловлено узкой диаграммой рассеяния двугранного  $УО$  в плоскости ребра; в плоскости, нормальной к ребру, двугранные  $УО$  обладают достаточно широкой диаграммой рассеяния [67]. При этом в пределах главного лепестка, имеющего максимум в направлении биссектрисы двугранного угла, падающая волна претерпевает двукратное отражение. Максимальная ЭПР данного  $УО$  равна ЭПР пластины с площадью, равной видимой площади отражателя:  $S_{\varphi=0} = \sqrt{2}ab$ ,  $S_{\varphi=45^\circ} = ab$ . Здесь  $a$ ,  $b$  – стороны пластины,

образующей грань  $VO$ ;  $\varphi$  - угол между биссектрисой  $VO$  и направлением падения волны.

Рассмотрим теперь поляризационные свойства двугранного  $VO$ . Пусть на этот  $VO$  падает плоская, линейно-поляризованная волна, электрический вектор которой нормален к плоскости падения (рис. 4.6а).

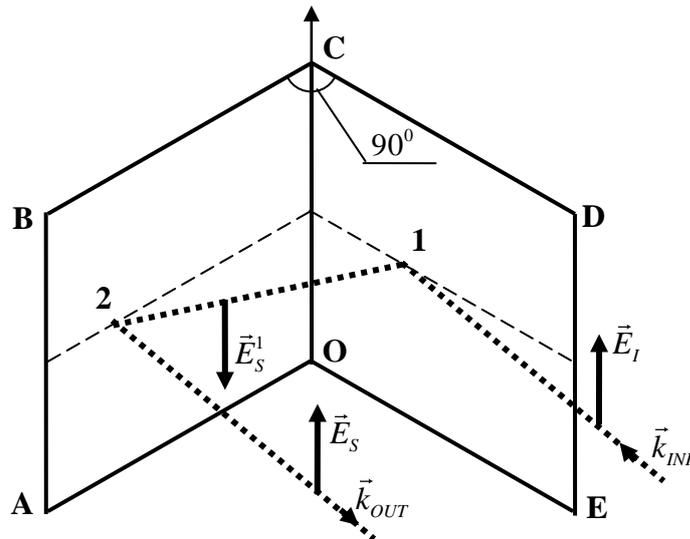


Рис.4.6а

При этом волна испытывает последовательное двукратное отражение от обеих граней с коэффициентом отражения  $K = \exp j\pi = -1$ ; тогда суммарное изменение фазы волны составит  $2\pi$  и, с точностью до постоянного коэффициента, векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_s$  будут равны и одинаково направлены, т. е.

$$\vec{E}_s = \vec{E}_1. \quad (4.29)$$

В случае если электрический вектор падающей линейно-поляризованной волны лежит в плоскости падения (рис. 4.6б) то этот вектор может быть представлен векторной суммой

$$\vec{E}^I = E_1^I \vec{e}_1 + E_2^I \vec{e}_2 = \vec{E}_1^I + \vec{E}_2^I, \quad (4.30)$$

где  $E_1^I \vec{e}_1, E_2^I \vec{e}_2$  есть проекции вектора Джонса на единичные орты  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , совпадающие с гранями 1 и 2 двугранного  $VO$ . Каждая из векторных

составляющих разложения (4.30) перпендикулярна к одной из граней отражателя и параллельна другой. Тогда для составляющей  $\vec{E}_1^I$  коэффициент отражения от грани 1 равен  $K_1 = -1$ , а от грани 2  $K_2 = 1$  соответственно, для составляющей  $\vec{E}_2^I$  коэффициенты отражения равны:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = -1$ . Таким образом (см. Рис. 4.6б)

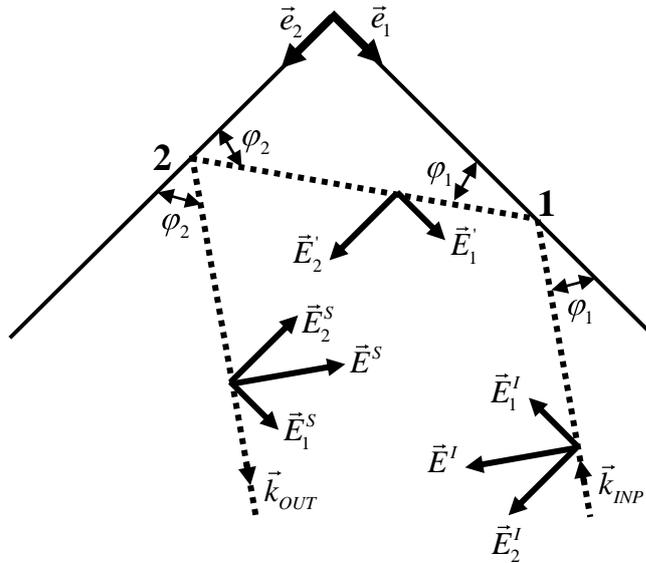


Рис. 4.6б

$$\dot{E}_1^S = E_1^I \exp j\pi, \quad \dot{E}_2^S = E_2^I \exp j\pi,$$

откуда следует, что

$$\dot{E}^S = \dot{E}^I \exp j\pi. \quad (4.31)$$

Зададим теперь линейный поляризационный базис, считая, что орт  $\vec{e}_x$  перпендикулярен к плоскости падения волны, а орт  $\vec{e}_y$  параллелен ей:

$$\dot{E}^I = \begin{vmatrix} \vec{E}_x \exp j\Delta\varphi/2 \\ \vec{E}_y \exp -j\Delta\varphi/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{vmatrix}. \quad (4.32)$$

Составляющие отраженной волны в этом же базисе определим, используя соотношения (4.29) и (4.31):

$$\dot{\vec{E}}^s = \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_x^I \\ \dot{E}_y^I \exp j\pi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_x^I \\ -\dot{E}_y^I \end{array} \right\|. \quad (4.33)$$

Из выражений (4.32) и (4.33) следует, что в линейном базисе, орт  $\vec{e}_x$  которого параллелен ребру  $YO$ , а второй ортогонален ему, матрица рассеяния двугранного  $YO$ , с точностью до постоянного множителя может быть записана в виде

$$S = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|. \quad (4.34)$$

Таким образом,  $MP$  двугранного  $YO$  идентична матрице Джонса линейной полуволновой фазовой пластины, определенной в собственной системе координат. Как было указано в главе II, полуволновая фазовая пластина при произвольной ориентации вектора линейно-поляризованной волны относительно собственного базиса пластины вызывает поворот этого вектора на удвоенный угол ориентации. Исходя из формального сходства матрицы рассеяния двугранного  $YO$  и матрицы Джонса пластины  $\lambda/2$ , следует ожидать подобного эффекта и для случая произвольной ориентации линейно-поляризованной волны относительно грани  $YO$ .

Для рассмотрения этого эффекта предположим, что в линейном поляризационном базисе, орт  $\vec{e}_x$  которого параллелен ребру  $YO$ , а орт  $\vec{e}_y$  лежит в плоскости падения волны, задана линейно поляризованная волна, ориентированная под углом  $\theta$  к орту  $\vec{e}_x$ :

$$\vec{E}^I = \left\| \begin{array}{c} E \cos \theta \\ E \sin \theta \end{array} \right\|.$$

Тогда, используя матрицу рассеяния (4.34), найдем вектор Джонса рассеянной волны

$$\vec{E}^s = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} E \cos \theta \\ E \sin \theta \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} E \cos \theta \\ -E \sin \theta \end{array} \right\|. \quad (4.35)$$

Из выражения (4.35) следует, что вектор  $\vec{E}^S$  отраженной волны ориентирован под углом  $(-\theta)$  относительно орта  $\vec{e}_x$ , что и свидетельствует о повороте вектора линейно-поляризованной волны в на угол  $2\theta$ . Геометрическое пояснение дано на рисунке 4.6в.

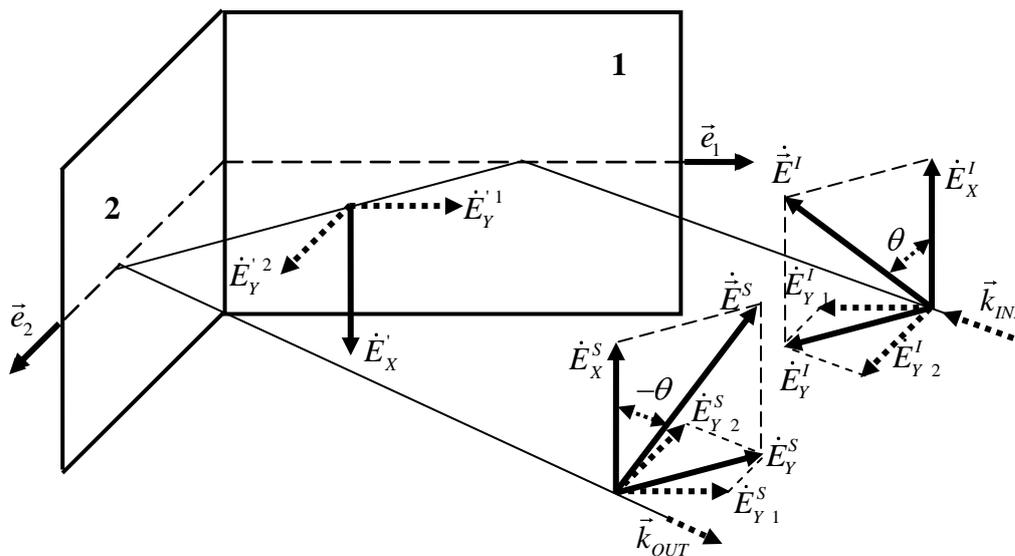


Рис.4.6в

Анализ данной операции может быть проведен и в системе координат, связанной с *РЛС*. При этом матрица рассеяния двугранного *УО* может быть получена поворотом поляризационного базиса (см. §4.1), с учетом изменения направления вращения

$$\|S'\| = \|R(\theta) \|S\| R(a)\|^{-1},$$

откуда, после несложных вычислений, получим

$$\|S'\| = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{vmatrix} \quad (4.36)$$

и, при ориентации вектора Джонса излучаемой волны по оси *OX*, найдем

$$\vec{E}^s = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{vmatrix}. \quad (4.37)$$

Выражения (4.36) и (4.37) дополнительно подчеркивают идентичность  $MP$  двугранного  $UO$  и матрицы Джонса полуволновой фазовой пластины; при этом (4.36) есть не что иное, как общая форма записи оператора преобразования для случая произвольной взаимной ориентации двугранного  $UO$  и вектора падающей волны.

В заключение необходимо указать, что если двугранный  $UO$  облучается эллиптически поляризованной волной, большая полуось которой ориентирована произвольно относительно ребра  $UO$ , то произойдет поворот эллипса поляризации (без изменения угла эллиптичности) на удвоенный угол взаимной ориентации ребра  $UO$  и большой полуоси эллипса. Полученные результаты, при всей их простоте, позволяют решить одну из ключевых задач поляризационной радиолокации – задачу декомпозиции матрицы рассеяния радиолокационного объекта с целью выделения некоторого поляризационного параметра, в достаточной степени характеризующего свойства объекта и допускающего непосредственное измерение и отображение на индикаторе  $PLC$ .

Однако прежде всего необходимо подробно рассмотреть физический смысл собственного базиса матрицы рассеяния и ее собственных чисел.

### ***4.3. Собственные поляризации радиолокационного объекта.***

Напомним, прежде всего, что в настоящей главе рассматриваются радиолокационные объекты, сохраняющие свои поляризационные свойства на интервале времени наблюдения этих объектов. Данное ограничение не является очень жестким, поскольку продолжительность интервала наблюдения обычно сравнима с длительностью импульса излучения радиолокатора. Для случая

распределенных в пространстве радиолокационных объектов соответствующее обобщение будет сделано позже.

Как было указано выше, некоторая симметрическая матрица рассеяния  $\dot{S}_{12} = \dot{S}_{21}$  может быть преобразована к диагональному виду некоторым конгруэнтным преобразованием, которое сохраняет симметрию матрицы рассеяния. Преобразование матрицы рассеяния к диагональному виду представляет собой специальный случай перехода из одного поляризационного базиса в другой базис. Этот переход имеет вид

$$\|S'_{jl}\| = \|\dot{Q}^* \| \|\dot{S}_{jl}\| \|\dot{Q}\|^+, \quad (4.38)$$

где  $\|\dot{Q}\|$  - некоторая унитарная матрица.

Если рассматривать матрицу рассеяния, записанную в форме (4.13), то нетрудно видеть, что операторы  $\|\dot{Q}^*\|$  и  $\|\dot{Q}\|^+$  определены в виде

$$\|\dot{Q}^*\| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \|Q \theta\|; \quad \|\dot{Q}\|^+ = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \|Q \theta\|^{-1}$$

и операция диагонализации может быть выполнена следующим образом:

$$\|S'_{jl}\| = \|R \theta\| \left[ \|R \theta\|^{-1} \|S_{jl}\| \|R \theta\| \right] \|R \theta\|^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}. \quad (4.39)$$

Из выражения (4.39) следует, что коэффициенты отражения для кросс-поляризованных составляющих в данном случае равны нулю. Поляризационный базис, в котором матрица рассеяния имеет диагональный вид, называется собственным базисом радиолокационного объекта.

Собственный базис радиолокационного объекта определяет две ортогональные поляризации облучающей волны, для которых кросс-поляризованные составляющие в рассеянной волне отсутствуют. Эти две поляризации совпадают с единичными ортами собственного базиса радиолокационного объекта и называются собственными поляризациями данного объекта.

Возвращаясь к рассмотренному примеру (4.39) и учитывая материалы Главы 3, нетрудно видеть, что операторы  $\|\dot{Q}^*\|$  и  $\|\dot{Q}\|^+$  построены с использованием собственных векторов матрицы рассеяния и для рассматриваемого случая эти векторы представляют собой линейные ортогональные поляризации.

Собственные числа матрицы рассеяния (в случае отсутствия дополнительного фазового сдвига) определяют величину коэффициентов отражения на собственных поляризациях. В дальнейшем наибольший коэффициент отражения будет сопоставляться с первым собственным значением  $\dot{\lambda}_1$  матрицы рассеяния.

Собственная поляризация, отвечающая первому собственному значению матрицы рассеяния, называется первой собственной поляризацией. Собственная поляризация, отвечающая второму собственному значению матрицы рассеяния  $\dot{\lambda}_2$ , называется второй собственной поляризацией [4].

#### ***4.4 Матрица рассеяния мощности. Степень поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности.***

Экстремальный характер коэффициентов отражения при соответствии поляризаций облучающего сигнала собственным поляризациям объекта рассмотрим на примере анализа плотности потока мощности отраженной волны с использованием понятия матрицы рассеяния мощности, впервые введенной Грейвсом (матрица Грейвса) [68].

Запишем плотность потока мощности рассеянной волны в виде

$$I = \dot{\vec{E}}_s^+ \dot{\vec{E}}_s, \quad (4.40)$$

где (+), как и ранее, означает эрмитово сопряжение. Выражение (4.40) справедливо для любой поляризации облучающей волны  $\dot{\vec{E}}_l$ , однако, учитывая, что предметом анализа являются объекты, обладающие линейными собственными поляризациями, целесообразно, для иллюстрации

экстремального характера отражения на собственных поляризациях, выбрать поляризацию облучающей волны линейной. Учитывая, что  $\dot{\vec{E}}_S = \|\dot{S}_{jl}\| \dot{\vec{E}}_I$ , преобразуем выражение (4.40):

$$I = \left[ \|\dot{S}_{jl}\| \dot{\vec{E}}_I \right]^+ \left[ \|\dot{S}_{jl}\| \dot{\vec{E}}_I \right] = \tilde{\vec{E}}_I^* \left[ \|\dot{S}_{jl}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| \right] \dot{\vec{E}}_I = \tilde{\vec{E}}_I^* \|G_{jl}\| \dot{\vec{E}}_I. \quad (4.41)$$

Соотношение (4.41) представляет собой эрмитову форму, матрицей которой является матрица Грейвса, или матрица рассеяния мощности [4,68]:

$$\|G_{jl}\| = \|\dot{S}_{jl}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| = \begin{vmatrix} \dot{S}_{11}^* \dot{S}_{11} + \dot{S}_{12}^* \dot{S}_{21} & \dot{S}_{11}^* \dot{S}_{12} + \dot{S}_{12}^* \dot{S}_{22} \\ \dot{S}_{21}^* \dot{S}_{11} + \dot{S}_{22}^* \dot{S}_{21} & \dot{S}_{21}^* \dot{S}_{12} + \dot{S}_{22}^* \dot{S}_{22} \end{vmatrix}. \quad (4.42)$$

Используя запись матрицы рассеяния в виде, предусматривающем наиболее общий случай, (т. е. наличие дополнительного фазового сдвига)

$$\|\dot{S}_{jl}\| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

получим

$$\begin{aligned} \|G_{jl}\| &= \|\dot{S}_{jl}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1^* & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1^2 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos^2 \theta \dot{\lambda}_1^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}_2^2 & \cos \theta \sin \theta (\dot{\lambda}_1^2 - \dot{\lambda}_2^2) \\ \cos \theta \sin \theta (\dot{\lambda}_1^2 - \dot{\lambda}_2^2) & \sin^2 \theta \dot{\lambda}_1^2 + \cos^2 \theta \dot{\lambda}_2^2 \end{vmatrix}. \quad (4.43) \end{aligned}$$

Из последнего выражения следуют два весьма важных вывода:

1. Матрица рассеяния мощности приводится к диагональному виду теми же операторами поворота, что и матрица рассеяния объекта;
2. Собственные числа матрицы рассеяния мощности определяются квадратами модулей коэффициентов отражения для собственных поляризаций объекта.

Полагая поляризацию облучающей волны линейной и ориентированной под углом  $\theta_1$  к положительному направлению оси  $OX$  системы координат  $PLC$

(ориентация собственного базиса  $MP$  определяется углом  $\theta$ ), раскроем эрмитову форму (4.41), подставляя в нее выражение (4.43) для матрицы Грейвса и вектор

$$\dot{E}_i \theta_1 = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{vmatrix}.$$

Производя перемножение и переход к тригонометрическим функциям двойных углов, получим

$$\begin{aligned} I_{\Delta\theta} &= \begin{vmatrix} C_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos^2 \theta \lambda_1^2 + \sin^2 \theta \lambda_2^2 & \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & \sin^2 \theta \lambda_1^2 + \cos^2 \theta \lambda_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cos 2\theta \cos 2\theta_i (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \sin 2\theta \sin 2\theta_i (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos 2\Delta\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь угол  $\Delta\theta = \theta - \theta_1$  определяет взаимную ориентацию собственного базиса объекта и вектора облучающей волны. По своей структуре итоговое выражение (4.44) напоминает известный из главы 2 закон интерференции для частично-поляризованного поля. При этом ясно, что плотность потока мощности рассеянной волны изменяется синусоидально между значениями

$$I_{MAX} = \lambda_1^2, I_{MIN} = \lambda_2^2,$$

отвечающих экстремальным значениям  $\cos 2\Delta\theta = \pm 1$ , что соответствует ориентации вектора линейной поляризации  $0^\circ$  и  $90^\circ$  относительно оси собственного базиса объекта, по которой ориентирован собственный вектор отвечающий максимальному собственному числу  $\lambda_1$ .

Итак, экстремальные значения мощности рассеянной волны определяются квадратами собственных чисел матрицы рассеяния и достигаются при совпадении поляризации облучающей волны с собственными векторами  $MP$ . Вообще говоря, свойства эрмитовых форм и не позволяли ожидать другого результата, но анализ физики явления всегда необходим.

Поскольку эрмитова форма (4.44) соответствует закону интерференции, целесообразно воспользоваться для количественной характеристики этого закона параметром видности:

$$W = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (4.45)$$

Поскольку  $Sp \|G_{jl}\| = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ ,  $\det \|G_{jl}\| = \lambda_1^2 \lambda_2^2$  то нетрудно показать, что

$$W = \mu_p = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \left[ 1 - \frac{4 \det \|G_{jl}\|}{Sp^2 \|G_{jl}\|} \right]^{0.5}. \quad (4.45a)$$

Сравнивая выражения (2.45), (2.45a) и (4.45), (4.45a), нетрудно видеть их абсолютное соответствие, учитывая, что собственные числа матрицы когерентности имеют размерность мощности.

Это соответствие, вытекающее из формальных свойств эрмитовых форм, имеет глубокий физический смысл. Из него следует, что, в силу квадратичности собственных значений матрицы, может быть введена некоторая инвариантная мера, характеризующая поляризационные свойства объекта, идентичная по смыслу степени поляризации частично-поляризованной волны.

Поэтому целесообразно назвать этот параметр степенью поляризационной анизотропии по мощности, поскольку он характеризует анизотропию рассеяния мощности некоторым радиолокационным объектом [4,9]. В случае поляризационно-изотропного объекта, характеризуемого условием  $\lambda_1 = \lambda_2$ , степень анизотропии равна нулю (т. е. интенсивность не изменяется в зависимости от ориентации  $\theta$ ), а для объекта типа линейного вибратора  $\lambda_2^2 = 0$  (анизотропный объект) степень анизотропии равна единице.

Итак,

$$0 \leq \mu_p \leq 1. \quad (4.46)$$

Поскольку величина собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  определяется как геометрией радиолокационного объекта, так и его электрическими свойствами, степень поляризационной анизотропии по мощности является более содержательной

характеристикой, чем ЭПР на фиксированной поляризации. Однако, как следует из проведенного анализа, для определения величины  $\mu_p$  необходимо найти экстремумы плотности потока мощности рассеянной волны, что означало непрерывное изменение ориентации линейной поляризации излучения до её совпадения с первой и второй собственными поляризациями объекта. Последнее требует, естественно, значительного времени анализа. Поэтому, предполагая, что степень поляризационной анизотропии является одним из параметров объекта, определяемых поляризационной РЛС, необходимо в дальнейшем найти алгоритмы измерения, требующие минимальных затрат времени.

Наконец, в заключение настоящего подраздела, рассмотрим соображения, ведущие к обоснованию принципов декомпозиции матриц рассеяния. Перепишем итоговое выражение (4.44) в виде

$$I(\Delta\theta) = Sp \|G_{jl}\| [1 + \mu_p \cos 2\Delta\theta] \quad (4.45)$$

и, произведя простейшие преобразования, представим его как сумму двух слагаемых

$$\begin{aligned} I(\Delta\theta) &= I_1(\Delta\theta) + I_2 = \\ &= 0,5 Sp \|G_{jl}\| \mu_p [1 + \cos 2\Delta\theta] + Sp \|G_{jl}\| [1 - \mu_p] . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Анализируя свойства слагаемых, можно считать, что первое из них представляет закон интерференции для абсолютно анизотропного объекта, так как

$$I_{MAX1} = Sp \|G_{jl}\| \mu_p, \quad I_{MIN1} = 0$$

и, соответственно

$$W = \frac{I_{MAX1} - I_{MIN1}}{I_{MAX1} + I_{MIN1}} = 1.$$

Второе слагаемое представляет собой закон интерференции для поляризационно-изотропного объекта, поскольку величина  $I_2$  не зависит от  $\Delta\theta$ . Следовательно  $I_{MAX2} = I_{MIN2}$  и  $W_2 = 0$ .

Изложенное свидетельствует о том, что исходная эрмитова форма (4.41) допускает представление

$$I = \dot{\vec{E}}_i^+ \parallel G_{jl}^1 \parallel \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_i^+ \parallel G_{jl}^2 \parallel \dot{\vec{E}}, \quad (4.47)$$

где матрица Грейвса радиолокационного объекта разложена на сумму матриц Грейвса

$$\parallel G_{jl} \parallel = \parallel G_{jl}^1 \parallel + \parallel G_{jl}^2 \parallel,$$

отвечающих поляризационно-изотропной и анизотропной составляющим радарного объекта.

#### 4.5 Поляризации нулевого сигнала радиолокационного объекта

В случае использования для излучения и приема сигналов одного и того же поляризационного устройства возможно существование таких поляризаций излучения, при которых отраженная от объекта волна поляризована так, что напряжение на входе приемника радиолокатора оказывается равным нулю. Такие поляризации называются поляризациями нулевого сигнала [4,5.9,11]. Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий понятие поляризаций нулевого сигнала. Анализ проведем в круговом поляризационном базисе.

Пусть имеет место поляризационно-изотропный объект (сфера, трехгранный  $UO$ ), характеризуемый в линейном базисе матрицей рассеяния  $\parallel S_{jl}^{XY} \parallel = \lambda \parallel \delta_{jl} \parallel$ . Преобразование данной матрицы в круговой поляризационный базис с учетом изменения направления вращения (см. подраздел 4.1) осуществляется с использованием выражения

$$\parallel S_{jl}^{RL} \parallel = \frac{1}{2} \parallel \begin{matrix} 1 & j \\ j & 1 \end{matrix} \parallel \parallel \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \parallel \parallel \begin{matrix} 1 & j \\ j & 1 \end{matrix} \parallel = j\lambda \parallel \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \parallel. \quad (4.48)$$

Тогда, при облучении данного объекта волной круговой поляризации, излучаемой соответствующей антенной, вектор Джонса рассеянной волны для случая правой круговой поляризации излучения имеет вид

$$\dot{\vec{E}}_s = j\lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = j\lambda \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (4.49a)$$

а для левой круговой поляризации излучения

$$\dot{\vec{E}}_s = j\lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = j\lambda \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (4.49б)$$

Из выражений (4.49а,б) следует, что в данных случаях волна, рассеянная поляризационно-изотропным объектом, поляризована ортогонально падающей волне и, соответственно, не может быть принята совмещенной антенной.

Таким образом, правая и левая круговые поляризации являются парой поляризаций нулевого сигнала поляризационно-изотропных объектов. Именно это свойство и легло в основу метода подавления мешающих отражений от гидрометеоров [4,5,9]. Естественно, что подавлены в данном случае будут отражения, обусловленные сферическими гидрометеорами и часть отражений от несферических гидрометеоров. Последнее обусловлено тем фактом, что *MP* несферического гидрометеора может быть разложена на сумму *MP* поляризационно-изотропной и анизотропной составляющих и подавлена будет часть отражений, обусловленная поляризационно-изотропной составляющей объекта.

Рассмотрим проблему поляризации нулевого сигнала в терминах матрицы рассеяния.

Из проведенного выше анализа следует, что сигнал на входе приемника отсутствует в связи с изменением направления вращения электрического вектора волны круговой поляризации при рассеянии на поляризационно-изотропном объекте. При этом имеет место преобразование исходного вектора Джонса, записанного в круговом базисе, в ортогональный вектор

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \dot{e}_R \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \dot{e}_L \\ 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \dot{e}_L \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{e}_R \end{vmatrix}.$$

С использованием матрицы рассеяния эта операция может быть записана как

$$\left\| \begin{array}{c} \vec{e}_L^S \\ 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vec{e}_R^I \end{array} \right\|; \quad \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vec{e}_R^S \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \vec{S}_{12} \\ S_{12} & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \vec{e}_L^I \\ 0 \end{array} \right\| \quad (4.50a)$$

или

$$\dot{\vec{E}}_{ORT} = \left\| S_{jl}^Z \right\| \dot{\vec{E}}^I, \quad (4.50b)$$

где  $\left\| S_{jl}^Z \right\|$  - специальная форма матрицы рассеяния для случая поляризации нулевого сигнала, переводящая исходный вектор Джонса в ортогональный вектор.

Вид матрицы  $\left\| S_{jl}^Z \right\|$  в выражении (4.50a) отвечает простейшему объекту – поляризационно-изотропной цели без фазового сдвига. Естественно, что для любого объекта, отличающегося от поляризационно-изотропного, поляризации нулевого сигнала отличаются от круговой и существует некоторая матрица  $\left\| S_{jl}^Z \right\|$ , преобразующая волну, поляризация которой отвечает поляризации нулевого сигнала, в волну с поляризацией, ортогональной исходной.

Найдем общий вид матрицы  $\left\| S_{jl}^Z \right\|$ , исходя из теории инвариантов  $MP$ . Основными инвариантами  $MP$  являются её собственные числа. Ранее было указано, что детерминант и след матрицы, которые представляют собой комбинации собственных чисел, также являются инвариантами. Для матрицы Грейвса инвариантами являются детерминант, след и степень анизотропии по мощности, представляющие собой комбинации собственных чисел. След матрицы Грейвса, определяемый выражением

$$Sp \left\| G_{jl} \right\| = P = |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 + 2|S_{12}|^2,$$

представляет собой полную энергию рассеянной волны (полная ЭПР радиолокационного объекта).

Нетрудно установить связь этих инвариантов с диагональной формой  $MP$ , которую последняя приобретает в собственном базисе, и со специальной формой  $MP$  для поляризаций нулевого сигнала. Обе эти формы получаются путем применения к  $MP$  некоторого конгруэнтного преобразования

$$\|S'_{jl}\| = \|\tilde{Q}\| \|S_{jl}\| \|Q\|, \quad (4.51)$$

где  $\|Q\|$  есть ортогональная матрица, т. е. унитарная матрица с определителем, равным единице. Естественно, что матрицы  $\|Q\|$ , переводящие исходную  $MP$  в диагональную форму и в форму, отвечающую поляризациям нулевого сигнала, различны. Существенным является тот факт, что при общем конгруэнтном преобразовании (4.51) инвариантны величины  $\det \|S_{jl}\|$  и  $Sp \|S_{jl}\|$  (или  $\det \|G_{jl}\|$ ;  $Sp \|G_{jl}\|$ ).

В собственном базисе радарного объекта, как было показано выше,  $MP$  и матрица Грейвса имеют вид

$$\|S_0\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad \|G_{jl}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

соответственно, а для поляризации нулевого сигнала  $MP$  записывается как

$$\|S_{jl}^Z\| = \begin{vmatrix} 0 & B \\ B & A \end{vmatrix} \quad (4.53a)$$

или в виде

$$\|S_{jl}^Z\| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.53b)$$

поскольку поляризация волны, рассеянной целью, будет ортогональна поляризации падающей волны только в случаях если  $S_{11} = 0$  или  $S_{22} = 0$  [9]. Из свойства инвариантности детерминанта и следа при общем конгруэнтном преобразовании (4.51) следует инвариантность этих величин при конкретных преобразованиях, образующих формы вида (4.52) и (4.53). Отсюда

$$\det \|S_{jl}\| = \det \|S_{jl}^Z\| = \det \|S_0\| = \det \|S_{jl}^Z\| = \lambda_1 \lambda_2 = -B^2, \quad (4.54)$$

$$Sp \|G_{jl}\| = |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 + 2|S_{12}|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = |A|^2 + 2|B|^2. \quad (4.55)$$

Из выражения (4.54) следует, что

$$B = j\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (4.56)$$

а решение уравнения (4.55) с использованием (4.56) дает величину

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2} = \lambda_1 - \lambda_2. \quad (4.57)$$

Тогда, подставляя результаты (4.56) и (4.57) в формулу (4.53) получаем общий вид  $MP$  для поляризаций нулевого сигнала:

$$\|S_{jl}^z\| = \begin{vmatrix} 0 & j\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ j\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad (4.58a)$$

$$\|S_{jl}^z\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & j\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ j\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.58b)$$

С точки зрения теории преобразований поляризационного базиса формы (4.58) можно получить, используя конгруэнтное преобразование (4.51), матрица  $\|Q\|$  которого определяется соответствующими параметрами поляризационного эллипса поляризации нулевого сигнала. Тогда, после осуществления преобразования вида

$$\|Q\| \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \|\tilde{Q}\| = \|S_{jl}^z\|$$

будет получено выражение (4.58).

#### **4.6 Геометрическое представление поляризационных свойств радиолокационных объектов**

Из материалов первой и третьей глав монографии следует, что преобразование поляризационных свойств радиолокационных сигналов рассеивающими объектами должно соответствующим образом отображаться как на комплексной плоскости, так и на поляризационной сфере. Рассмотрим теперь вопросы геометрической интерпретации собственных поляризаций радиолокационного объекта и поляризаций нулевого сигнала.

#### 4.6.1 Поляризационное отношение для собственных поляризаций и поляризаций нулевого сигнала радиолокационного объекта

Комплексное поляризационное отношение является математическим объектом, отображаемым на одной из комплексных плоскостей, а именно: на декартовой комплексной плоскости, на круговой комплексной плоскости или на обобщенной комплексной плоскости. При анализе соответствия точек комплексной плоскости и сферы единичного диаметра было показано, что точки комплексной плоскости однозначно связаны с точками поверхности сферы единичного диаметра уравнениями стереографической проекции. Было также показано, что широко используемая сфера Пуанкаре единичного радиуса связана с комплексной плоскостью модифицированными уравнениями стереографической проекции. Используя эти представления, рассмотрим теперь вопросы геометрической интерпретации собственных поляризаций радарного объекта и поляризаций нулевого сигнала. Напомним, прежде всего, что математическим объектом, отображаемым на комплексной плоскости, является комплексное поляризационное отношение  $\dot{P} = \dot{E}_2 / \dot{E}_1$ . Учитывая традиционное использование сферы Пуанкаре, мы полагаем, что комплексная плоскость является круговой. Исходя из того, что элементы матрицы рассеяния представляют собой коэффициенты дробно-линейного преобразования

$$\dot{P}_S = \frac{\dot{S}_{21} + \dot{S}_{22} \dot{P}_0}{\dot{S}_{11} + \dot{S}_{12} \dot{P}_0}, \quad (4.59)$$

связывающего поляризационные отношения  $\dot{P}_0$  и  $\dot{P}_S$  для зондирующего и рассеянного сигналов соответственно, найдем эти отношения, отвечающие собственным поляризациям РЛО и поляризациям нулевого сигнала.

При любом дробно-линейном преобразовании существуют две особые точки, которые не меняют своего положения на комплексной плоскости (фикспункты преобразования) [4,18]. Физически эти точки соответствуют в нашем случае собственным поляризациям радарного объекта. Используя выражение (4.59) можно найти поляризационные отношения, отвечающие

собственным поляризациям, исходя из условия  $\dot{P}_S = \dot{P}_0 = \dot{P}_E$ , которое физически означает отсутствие изменения поляризации облучающей волны в случае ее соответствия одной из собственных поляризаций объекта. Однако уравнение (4.59) для собственных поляризаций должно быть переписано в виде

$$\dot{P}_E^* = \frac{\dot{S}_{21} + \dot{S}_{22}\dot{P}_E}{\dot{S}_{11} + \dot{S}_{12}\dot{P}_E}, \quad (4.60)$$

поскольку левая часть отвечает рассеянной волне, а изменение направления распространения отображается переходом к комплексно сопряженной величине.

Решение уравнения (4.60) найдено в работе [4], где показано, что собственные поляризации объекта отображаются на комплексной плоскости точками  $\dot{P}_E^1$  и  $\dot{P}_E^2$ , симметричными относительно начала координат и переходящими в результате преобразования (4.60) в сопряженные точки  $\dot{P}_E^{*1}$  и  $\dot{P}_E^{*2}$ . При определении поляризационных отношений, отвечающих поляризациям нулевого сигнала, необходимо учитывать, что основным признаком, определяющим поляризации нулевого сигнала, является ортогональность поляризаций излучаемой волны и волны, отраженной от объекта. При этом сигнал от цели в точке расположения РЛС присутствует, но вследствие ортогональности вектора Джонса излученного сигнала (характеризующего поляризацию антенны) и вектора Джонса рассеянного сигнала этот сигнал не проходит в приемный тракт РЛС. Тогда, используя условие ортогональности  $\dot{P}_{ORT} = -1/\dot{P}_I^*$ , связывающее поляризационные отношения излучаемой и рассеянной волн, преобразуем выражение (4.59) в уравнение для определения нулевых поляризаций:

$$\left(-\frac{1}{\dot{P}_Z}\right)^* = \frac{\dot{S}_{12} + \dot{S}_{22}\dot{P}_Z}{\dot{S}_{11} + \dot{S}_{12}\dot{P}_Z}. \quad (4.61a)$$

Учитывая изменение направления распространения рассеянной волны, отображаемое комплексным сопряжением левой части (4.61a), перепишем

уравнение (4.61a) для определения поляризационных отношений волн, отвечающих поляризациям нулевого сигнала в виде

$$-\frac{1}{\dot{P}_Z} = \frac{\dot{S}_{12} + \dot{S}_{22}\dot{P}_Z}{\dot{S}_{11} + \dot{S}_{12}\dot{P}_Z}. \quad (4.61b)$$

Решения уравнения (4.61b) определяют поляризационные отношения для сигнала в том базисе, в котором задана матрица рассеяния и имеют вид:

$$\dot{P}_Z^{1,2} = \frac{1}{\dot{S}_{22}} \left[ -\dot{S}_{12} \pm \sqrt{\dot{S}_{12}^2 - \dot{S}_{11}\dot{S}_{22}} \right]^{1/2}. \quad (4.62)$$

Для установления факта ортогональности или неортогональности поляризаций нулевого сигнала достаточно вычислить произведение  $\dot{P}_Z^1 \dot{P}_Z^{2*}$ , поскольку условие ортогональности двух состояний поляризации, обладающих поляризационными отношениями  $\dot{P}, \dot{P}_{ORT}$ , имеет вид  $\dot{P} \dot{P}_{ORT}^* = -1$ . Нетрудно убедиться прямым вычислением с использованием (4.62), что в общем случае произведение  $\dot{P}_Z^1 \dot{P}_Z^{2*}$  условию ортогональности не удовлетворяет. Только в случае, когда поляризации нулевого сигнала представляют собой пару круговых поляризаций (правый и левый круг), это условие будет выполнено. Данный факт будет иллюстрирован ниже.

В то же время, собственные поляризации, в отличие от поляризаций нулевого сигнала, всегда удовлетворяют условию ортогональности  $\dot{P}_E^1 \dot{P}_E^{*2} = -1$ .

Поскольку преобразование поляризации волны радиолокационным объектом имеет наиболее простой вид, когда анализ проводится в собственной системе координат объекта, найдем поляризационные отношения для поляризаций нулевого сигнала для этого случая. Исходя из условия ортогональности векторов Джонса рассеянного и зондирующего сигналов и учитывая, что в собственном базисе

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_S^1 \\ \dot{E}_S^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{E}_0^1 \\ \dot{E}_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1 \dot{E}_0^1 \\ \dot{\lambda}_2 \dot{E}_0^2 \end{vmatrix},$$

можно записать выражение

$$\dot{\lambda}_1 \dot{E}_0^1 = -\dot{\lambda}_2 \dot{E}_0^2,$$

из которого следует

$$\dot{P}_Z^{1,2} = \pm j \dot{\lambda}_1 / \dot{\lambda}_2^{1/2} \quad (4.63)$$

Комплексное уравнение (4.63) равносильно двум действительным:

$$|\dot{P}_Z^{1,2}| = |\dot{\lambda}_1| / |\dot{\lambda}_2|^{1/2}, \quad (4.64a)$$

$$\arg \dot{P}_Z^{1,2} = 0,5 \arg \dot{\lambda}_1 - \arg \dot{\lambda}_2. \quad (4.64b)$$

Как следует из уравнений (4.64), в собственном базисе радиолокационного объекта поляризации нулевого сигнала характеризуются равными модулями их поляризационных отношений, а аргументы отношений отличаются на величину  $\pi$ .

При изображении на комплексной плоскости поляризационных отношений для поляризаций нулевого сигнала, определенных в собственном базисе радиолокационного объекта, изображающие точки (как это следует из выражения (4.63)) будут расположены на прямой, проходящей через начало координат; при этом начало координат делит отрезок, соединяющий данные точки, пополам. Если собственные значения матрицы рассеяния являются действительными, то изображающие точки располагаются на мнимой оси.

#### ***4.6.2. Геометрическое представление собственных поляризаций и поляризаций нулевого сигнала***

Приступая к изложению основных положений, связанных с геометрическим представлением собственных и нулевых поляризаций, напомним два свойства стереографической проекции:

- 1) окружности в плоскости отображаются в окружности на поляризационной сфере единичного диаметра (прямая линия есть вырожденная окружность);

- 2) углы между пересекающимися кривыми сохраняются (т. е. отображение является изогональным).

Каждая точка поляризации сферы соответствует конкретному виду эллипса поляризации, обладающего некоторым углом эллиптичности и ориентацией, независимо от базиса, в котором определен соответствующий вектор Джонса. Используя преобразованные уравнения стереографической проекции, можно от поляризации сферы единичного диаметра перейти к поляризации сферы единичного радиуса (сфера Пуанкаре), как это было продемонстрировано ранее.

В первой главе было показано, что при отображении комплексной плоскости на сферу Пуанкаре ортогональные поляризации изображаются на сфере двумя диаметрально противоположными точками. Так, в частности, ортогональные линейные поляризации изображаются диаметрально противоположными точками экваториального большого круга. В качестве начала отсчета углов эллиптичности  $\alpha$ , азимута  $\beta$ , и  $\gamma = \arctg |\dot{P}|$  обычно используется точка  $H$ , расположенная на экваториальном большом круге и соответствующая горизонтальной линейной поляризации.

Таким образом, собственные поляризации радиолокационного объекта в силу их ортогональности будут изображаться диаметрально противоположными точками на сфере Пуанкаре. В частности, линейные собственные поляризации – противоположными точками диаметра экваториального большого круга. В общем случае собственные поляризации изображаются диаметрально противоположными точками большого круга, плоскость которого составляет угол  $\varphi = \arg \dot{P}$  (угол  $NHM$ ) с экваториальной плоскостью (рис 4.7). При этом длина дуги  $2\gamma$  от точки  $H$  до точки  $M$ , соответствующей эллиптической поляризации, обладающей модулем поляризационного отношения  $|\dot{P}|$ , будет характеризовать величину отношения амплитуд ортогональных компонент. Напомним, что оси  $\text{Re } \dot{P}_{xy}$  при отображении комплексной плоскости на сферу Пуанкаре соответствует

экваториальная окружность сферы, в силу чего и становится очевидной правомочность выбранного отсчёта угла  $\varphi = \arg \dot{P}$ .

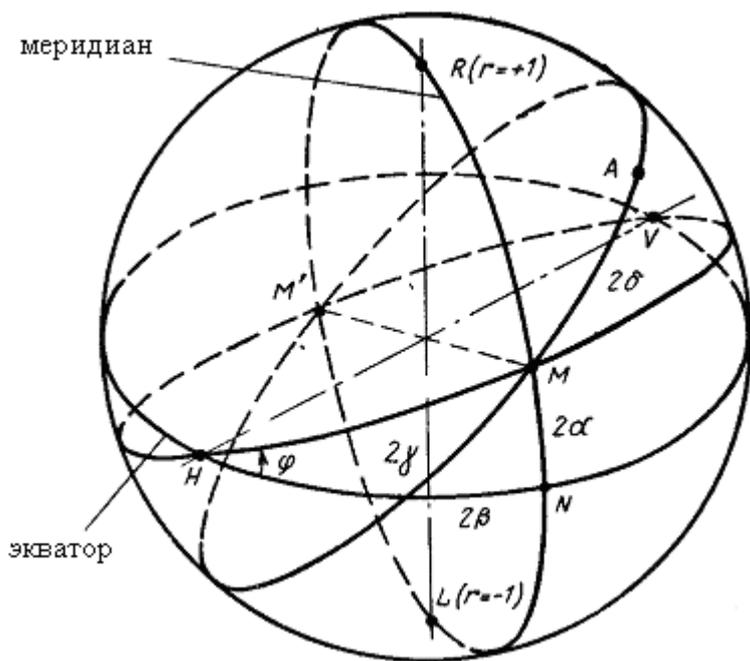


Рис.4.7

Как указывалось выше, поляризационные отношения для поляризаций нулевого сигнала, определённые в собственном базисе, будут отображаться на комплексной плоскости точками, находящимися на одной прямой, проходящей через начало координат. При этом начало координат делит отрезок прямой между этими точками пополам, в силу равенства модулей этих отношений. Для действительных собственных значений точки, соответствующие  $\dot{P}_Z^1$  и  $\dot{P}_Z^2$  расположены на оси  $\text{Im } \dot{P}_{XY}$  на равном расстоянии от начала координат, модули их равны  $|\dot{\lambda}_1|/|\dot{\lambda}_2|^{1/2}$  а фазовые углы составляют  $\pm\pi/2$  соответственно. Как видно из соотношений (4.64) при постоянном модуле поляризационных отношений  $\dot{P}_Z^{1,2}$  и переменном аргументе ( $\dot{\lambda}_i$  имеют комплексный характер) указанные точки, а вместе с ними и соединяющий их отрезок прямой, будут перемещаться из положения, занимаемого ими на оси  $\text{Im } \dot{P}_{XY}$  против часовой

стрелки или по часовой стрелке, вокруг начала координат на угол, определяемый знаком и величиной второго слагаемого в правой части (4.61б).

Таким образом, точки, соответствующие поляризационным отношениям для нулевых поляризаций, определённым в собственном базисе, будут описывать окружность в комплексной плоскости с центром в начале координат. Следовательно, изображающие точки нулевых поляризаций в линейном собственном базисе (вертикальная и горизонтальная поляризации) будут описывать на сфере Пуанкаре окружность вокруг диаметра сферы, соединяющего точки  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 4.8).

При этом, поскольку длина дуги, соединяющей точку  $H$  с изображающей точкой нулевой поляризации, остается постоянной, а радиус сферы единичен, радиус этой окружности  $r$  будет определяться как [4]

$$r = \sin 2\gamma_0 = \sin 2\arctg \left| \dot{P}_z \right| . \quad (4.65)$$

Иными словами, геометрическим местом точек сферы Пуанкаре, соответствующих нулевым поляризациям в собственном базисе радиолокационного объекта, является окружность, полученная в результате сечения сферы плоскостью, ортогональной диаметру сферы, соединяющему точки собственных поляризаций, и выполненному на расстоянии

$$\mu' = \cos 2\arctg \left| \dot{P}_z \right| . \quad (4.66)$$

от центра сферы.



3. Если заданы только точки  $O_1$  и  $O_2$ , отвечающие нулевым поляризациям, по ним всегда можно найти положение точек  $D_1$  и  $D_2$ . Для этого достаточно провести через заданные точки большой круг (этот круг будет единственным, если точки  $O_1$  и  $O_2$  не являются концами диаметра сферы) и поделить дуги  $\check{O}_1O_2$  пополам. Точки деления будут отвечать собственным поляризациям объекта. Отметим здесь же, что точки  $O_1$  и  $O_2$  являются концами диаметра сферы Пуанкаре только для случая поляризационно изотропного объекта и представляют собой круговые поляризации, являющиеся поляризациями нулевого сигнала для данного объекта. В этом (и только в этом) случае поляризации нулевого сигнала ортогональны.

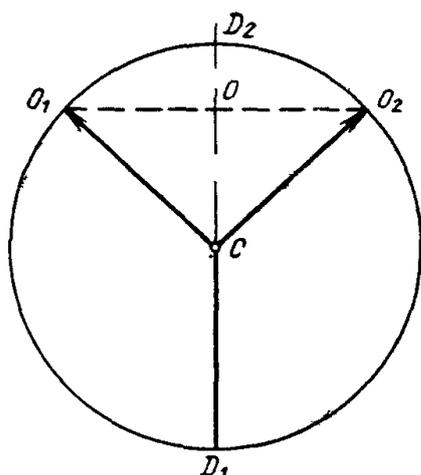


Рис.4.9

Таким образом, геометрическое представление поляризационных свойств РЛ объекта определено, если известно положение:

- 1) либо двух точек, отвечающих поляризациям нулевого сигнала;
- 2) либо одной из точек, отвечающих поляризация нулевого сигнала, и одной из точек, отвечающих собственным поляризациям объекта.

#### 4.7 Представление поляризационной зависимости энергетических величин на сфере Пуанкаре

Рассмотрим теперь геометрические построения на сфере Пуанкаре, позволяющие получить наглядное представление зависимости мощности рассеянного сигнала от поляризационных свойств объекта и поляризации зондирующего сигнала [4]. Последняя, естественно, определяется поляризационными характеристиками антенны радиолокатора.

Зависимость плотности потока мощности рассеянной волны от поляризации облучающей волны определяется эрмитовой формой (4.41). В собственном базисе это выражение принимает вид

$$I = \tilde{\vec{E}}_s^* |G| \vec{E}_s = |\dot{\lambda}_1 E_1^I|^2 + |\dot{\lambda}_2 E_2^I|^2. \quad (4.67)$$

Если фиксировать плотность потока мощности облучающей волны, то плотность потока мощности рассеянной волны будет прямо пропорциональна ЭПР объекта.

Докажем, что ЭПР объекта определяется квадратом расстояния  $AO$  (рис. 4.10) между серединой хорды  $O_1O_2$ , соединяющей точки поляризаций нулевого сигнала, и точкой  $A$  на поверхности сферы Пуанкаре, изображающей поляризацию облучающей волны.

Напомним, что расстояние от центра сферы Пуанкаре до середины хорды  $O_1O_2$ , соединяющей точки нулевых поляризаций определяется выражением

$\mu' = \cos 2 \arctg \left| \dot{P}_z \right|$ . Учитывая, что

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos \arctg x = 1 + x^2^{-1/2},$$

$$\sin \arctg x = x 1 + x^2^{-1/2}$$

перепишем это выражение в виде



Таким образом, расстояние от центра сферы Пуанкаре до середины хорды, соединяющей точки поляризаций нулевого сигнала, представляет собой геометрический образ степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта.

Продолжая анализ геометрического представления поляризационной зависимости энергетических величин, рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через диаметр собственных поляризаций  $D_1D_2$  и точку  $A$  (см. рис. 4.11) [4]. Используя теорему косинусов, из треугольника  $AOC$  получим, учитывая что  $AO$  есть радиус единичной сферы:

$$AC^2 = 1 + \mu'^2 + 2\mu' \cos 180^\circ - \alpha = 1 - \mu'^2 + 2\mu' \cos \delta, \quad (4.70)$$

где  $\mu' = OC$ ,  $\delta$  - угловое расстояние на сфере между точками  $D_1$  и  $A$ , определяющее модуль поляризационного коэффициента облучающей волны в собственном базисе объекта согласно равенству

$$\left| \dot{P}_1 \right| = \left| \frac{\dot{E}_2'}{\dot{E}_1'} \right| = \operatorname{tg} \delta / 2,$$

откуда

$$\cos \delta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \delta / 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta / 2} = \frac{|E_1'|^2 - |E_2'|^2}{|E_1'|^2 + |E_2'|^2}.$$

Выражение (4.70), записанное для сферы единичного радиуса, в случае произвольного радиуса будет иметь вид

$$AC^2 = R^2 + OC^2 + 2 OC R \cos \delta. \quad (4.71)$$

Для удобства выберем радиус сферы Пуанкаре, равным сумме модулей собственных значений МР [4]:

$$R = |\dot{\lambda}_1| + |\dot{\lambda}_2|. \quad (4.72)$$

Тогда, в силу пропорционального увеличения сторон треугольника  $AOC$  отрезок  $OC$  определяется как

$$OC = \mu' \left( |\dot{\lambda}_1| + |\dot{\lambda}_2| \right) = \left| \dot{\lambda}_1 \right| - \left| \dot{\lambda}_2 \right|. \quad (4.73)$$

Используя выражения (4.72) и (4.73), перепишем формулу (4.71) в

$$AC^2 = |\dot{\lambda}_1|^2 + |\dot{\lambda}_2|^2 + |\dot{\lambda}_1|^2 - |\dot{\lambda}_2|^2 + |\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2| |\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2| \frac{|\dot{E}_{1I}|^2 - |\dot{E}_{2I}|^2}{|\dot{E}_{1I}|^2 + |\dot{E}_{2I}|^2} =$$

$$= \frac{4 \left[ |\dot{\lambda}_1|^2 |\dot{E}_{1I}|^2 + |\dot{\lambda}_2|^2 |\dot{E}_{2I}|^2 \right]}{|\dot{E}_{1I}|^2 - |\dot{E}_{2I}|^2}. \quad (4.74)$$

Плотность потока мощности облучающей волны примем единичной:

$$P_I = |\dot{E}_{1I}|^2 + |\dot{E}_{2I}|^2 = 1$$

Тогда, сравнивая выражения (4.67) и (4.74) видим, что квадрат длины отрезка  $AC$  с точностью до постоянного множителя может служить геометрической интерпретацией ЭПР объекта при любой поляризации облучающей волны:

$$AC^2 = 4 \left[ |\dot{E}_{1S}|^2 + |\dot{E}_{2S}|^2 \right] = 4 \left[ |\dot{\lambda}_1 \dot{E}_{1I}|^2 + |\dot{\lambda}_2 \dot{E}_{2I}|^2 \right] = P_S = k\sigma. \quad (4.75)$$

При этом зависимость ЭПР объекта от поляризации излучения радиолокатора представляет собой зависимость величины  $(AC)^2$  от положения точки  $A$  на сфере Пуанкаре.

Проведенный анализ демонстрирует не только удобство геометрической интерпретации поляризационных свойств радиолокационных объектов на сфере Пуанкаре, но и поясняет физический смысл

эффектов, обуславливаемых степенью поляризационной анизотропии объекта при рассеянии радиолокационных сигналов, а именно:

- изменение степени поляризационной анизотропии при фиксированной поляризации излучения РЛС приводит к изменению полной мощности рассеянной волны;

- изменение поляризационных свойств излучения РЛС при фиксированной степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта приводит к изменению полной мощности рассеянной волны.

Последнее обстоятельство является наиболее важным для задач поляризационной радиолокации, поскольку формирование потока излучения с

поляризацией, изменяющейся по заданному закону, особых технических трудностей не представляет. Использование такого рода сигналов в задачах определения поляризационных параметров радиолокационных объектов будет рассмотрено в дальнейшем.

#### **4.8 Поляризационная и амплитудная передаточные функции радиолокационного объекта.**

В заключение рассмотрим метод разделения информации об эллипсе поляризации рассеянной волны и об его полной комплексной амплитуде, следуя [14].

Запишем вектор Джонса волны, излучаемой радиолокатором, в виде

$$\dot{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{E}_1^0 \\ \dot{E}_2^0 \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

где  $\dot{E}_1^0, \dot{E}_2^0$  - комплексные амплитуды проекций комплексного вектора  $\dot{\vec{E}}$  на орты используемого базиса. Для ортонормальных базисных векторов интенсивность излучаемой волны определяется соотношением

$$\dot{\vec{E}}_0^+ \dot{\vec{E}}_0 = \dot{E}_1^{0*} \dot{E}_1^0 + \dot{E}_2^{0*} \dot{E}_2^0 = |\dot{E}_1^0|^2 + |\dot{E}_2^0|^2, \quad (4.77)$$

поскольку поляризационное отношение  $\dot{P}_0$  в используемом базисе есть  $\dot{P}_0 = \dot{E}_2^0 / \dot{E}_1^0$ , то

$$\dot{\vec{E}}_0 = \dot{E}_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{P}_0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Перепишывая выражение (4.78) в виде

$$\dot{\vec{E}}_0 = \frac{\dot{E}_1^0 \sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{P}_0 \end{pmatrix},$$

нетрудно видеть, что величина

$$\dot{A}_0 = \dot{E}_1^0 \sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}$$

есть не что иное, как полная комплексная амплитуда эллиптически поляризованной волны, поскольку

$$\dot{\vec{E}}_0^+ \dot{\vec{E}}_0 = \dot{A}_0 \dot{A}_0^* = \dot{E}_1^0 \dot{E}_1^{0*} (1 + |\dot{P}_0|^2) = |\dot{E}_1^0|^2 + |\dot{E}_2^0|^2.$$

Тогда вектор Джонса (4.78) излучаемой волны можно представить в виде

$$\dot{\vec{E}}_0 = \frac{\dot{A}_0}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{P}_0 \end{array} \right\|. \quad (4.79)$$

Выражение (4.79) представляет собой форму записи, в которой информация об эллипсе поляризации, содержащаяся в поляризационном отношении  $\dot{P}_0$ , отделена от информации о полной комплексной амплитуде эллиптически поляризованной волны, содержащейся в величине  $\dot{A}_0$ .

Используя матричное уравнение  $\dot{\vec{E}}_s = \left[ \dot{S}_{jl} \right] \dot{\vec{E}}_0$ , где  $\left[ \dot{S}_{jl} \right]$  - матрица рассеяния, рассмотрим влияние процесса рассеяния на преобразование поляризации падающей волны, характеризуемой поляризационным отношением  $\dot{P}_0$  и полной комплексной амплитудой  $\dot{A}_0$ .

Вектор Джонса рассеянной волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_s &= \frac{\dot{A}_0}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}} \left\| \begin{array}{cc} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{P}_0 \end{array} \right\| = \frac{\dot{A}_0}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}} \left\| \begin{array}{cc} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{S}_{11} + \dot{S}_{12} \dot{P}_0 \\ \dot{S}_{21} + \dot{S}_{22} \dot{P}_0 \end{array} \right\| = \\ &= \frac{\dot{A}_0}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2}} \left\| \begin{array}{c} \dot{S}_{11} + \dot{S}_{12} \dot{P}_0 \\ \dot{S}_{21} + \dot{S}_{22} \dot{P}_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{P}_s \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Здесь величина

$$\dot{P}_s = \frac{\dot{S}_{22} \dot{P}_0 + \dot{S}_{21}}{\dot{S}_{12} \dot{P}_0 + \dot{S}_{11}} \quad (4.81)$$

представляет собой поляризационное отношение для рассеянной волны, которое описывает только поляризационные свойства этой волны.

Перепишем выражение (4.8) в виде

$$\dot{\vec{E}}_S = \frac{\dot{A}_0 \dot{S}_{11} + \dot{S}_{12} \dot{P}_0 \sqrt{1 + |\dot{P}_S|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_0|^2} \sqrt{1 + |\dot{P}_S|^2}} \left\| \vec{1} \right\| \left\| \dot{P}_S \right\|.$$

Тогда, используя обозначение

$$\dot{A}_S = \dot{A}_0 \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\frac{1 + |\dot{P}_S|^2}{1 + |\dot{P}_0|^2}} \dot{S}_{11} + \dot{S}_{12} \dot{P}_0 \\ \dot{P}_S \end{array} \right], \quad (4.82)$$

можно записать итоговое выражение для вектора Джонса рассеянной волны в виде

$$\dot{\vec{E}}_S = \frac{\dot{A}_S}{\sqrt{1 + |\dot{P}_S|^2}} \left\| \vec{1} \right\| \left\| \dot{P}_S \right\|. \quad (4.83)$$

Таким образом, векторы Джонса излучаемой волны (4.79) и рассеянной волны (4.83) записаны в стандартной форме.

В выражении (4.83) величина  $\dot{A}_S$ , определяемая соотношением (4.82), представляет собой полную комплексную амплитуду рассеянной эллиптически поляризованной волны. Нетрудно видеть, что полная комплексная амплитуда рассеянной волны представляет собой произведение полной амплитуды излучаемой волны на величину

$$\dot{F} \dot{P} = \sqrt{\frac{1 + |\dot{P}_S|^2}{1 + |\dot{P}_0|^2}} \dot{S}_{12} \dot{P}_0 + \dot{S}_{11}, \quad (4.84)$$

которую можно интерпретировать как передаточную функцию радиолокационного объекта для комплексной амплитуды излучаемой волны, т.

$$\text{е. } \dot{A}_S = \dot{F} \dot{P} \dot{A}_0.$$

Таким образом, информация об эллипсе поляризации рассеянной волны отделена от информации о ее полной амплитуде. Как видно из проведенного анализа, обязательным при этом является осуществление операции нормирования вектора Джонса эллиптически поляризованной волны к его проекции на один из ортов используемого базиса.

Дробно-линейное преобразование (4.81), описывающее преобразование поляризации отношения излучаемой волны, можно интерпретировать как поляризационную передаточную функцию радиолокационного объекта. Необходимо отметить, что преобразование (4.81) является конформным [14,18], а функция (4.84), определяющая преобразование полной амплитуды, не является аналитической функцией и преобразование  $\dot{A}_s = \dot{F} \dot{P} \dot{A}_0$  не относится к классу конформных.

В комплексной передаточной функции  $\dot{F} \dot{P}$  можно выделить модуль (передаточную функцию амплитуды) и аргумент (передаточную функцию фазы):

$$\begin{aligned} \dot{F} \dot{P} &= \left[ 1 + \frac{|\dot{S}_{22}\dot{P}_0 + \dot{S}_{21}|^2}{|\dot{S}_{12}\dot{P}_0 + \dot{S}_{11}|^2} \right]^{-1} \left[ 1 + |\dot{P}_0|^{-1} \right]^{0.5} S_{12}\dot{P}_0 + \dot{S}_{11} = \\ &= \left[ \frac{|\dot{S}_{12}\dot{P}_0 + \dot{S}_{11}|^2 + |\dot{S}_{22}\dot{P}_0 + \dot{S}_{21}|^2}{1 + |\dot{P}_0|} \right]^{0.5} \exp \left[ j \arg \dot{S}_{12}\dot{P}_0 + S_{11} \right] = \\ &= |\dot{F} \dot{P}| \exp \left[ j \arg \dot{F} \dot{P} \right]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Разделение амплитудных и поляризационных передаточных свойств радиолокационного объекта, возможность которого следует из проведенного анализа, может быть реализовано технически в радиолокационных системах. Однако при этом первостепенную важность имеет вопрос определения поляризационных свойств РЛО, так или иначе связанный с амплитудно-фазовыми параметрами рассеянной волны.

## ***ГЛАВА 5.***

### ***ИНВАРИАНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОТОЧЕЧНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ***

В пятой Главе в сжатой форме рассмотрена система инвариантных поляризационных параметров применительно как к одноточечным радиолокационным объектам, так и к процессу преобразования поляризационных параметров радиоволн в процессе их рассеяния этими объектами. Подробный анализ данного вопроса приведен в ряде работ В.Н.Татарина [69,70], В.А.Хлусова [71], В.Н.Татарина, В.А.Потехина и Е.В.Масалова [72,73], В.Н.Татарина и В.А.Хлусова [74,75], В.Н.Татарина, С.В.Татарина, Л.П.Лигтхарта [76,77,78], а также в работах С.В.Татарина [80,81,82]. Полная система поляризационных инвариантов матрицы рассеяния предложена для

использования в исследовании поляризационных свойств радиолокационных объектов. Введены понятия комплексной плоскости радиолокационных объектов (КПРО), поляризационной сферы радиолокационных объектов (ПСРО), а также подробно рассмотрено понятие близости (удаленности) состояний поляризации применительно к одноточечным радиолокационным объектам. Детально рассмотрено также отображение поляризационных инвариантов радиолокационных объектов в поляризационной структуре рассеянного электромагнитного поля.

### *5.1. Декомпозиция матрицы Грейвса с использованием поляризационных инвариантов.*

Напомним, прежде всего, что в подразделе 4.4 было введено понятие степени поляризационной анизотропии одноточечного радиолокационного объекта по мощности как значение функции видности эрмитовой формы (4.44), определенного соотношением (4.45)

$$W = \mu_p = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \left[ 1 - \frac{4 \det \| G_{ji} \|}{Sp^2 \| G_{ji} \|} \right]^{0.5},$$

где квадраты значений собственных чисел исходной матрицы рассеяния  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$ , а также след  $Sp \| G_{ji} \| = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$  и детерминант  $\det \| G_{ji} \| = \lambda_1^2 \lambda_2^2$  представляют собой инварианты матрицы Грейвса  $\| G_{ji} \|$ . Поскольку комбинации инвариантов некоторой матрицы также представляют собой инварианты, то степень поляризационной анизотропии по мощности одноточечного радиолокационного объекта  $\mu_p \in [0, 1]$  есть инвариант. Эрмитова форма (закон интерференции) (4.44) была записана в виде  $I(\Delta\theta) = Sp \| G_{ji} \| [1 + \mu_p \cos 2\Delta\theta]$

с использованием величины  $\mu_p$ . После некоторых преобразований этот закон интерференции был представлен в виде суммы

$$I \Delta\theta = I_1 \Delta\theta + I_2 = \\ = 0,5 Sp \|G_{jl}\| \mu_p [1 + \cos 2\Delta\theta] + Sp \|G_{jl}\| [1 - \mu_p],$$

где первое слагаемое представляет собой закон интерференции для абсолютно анизотропного объекта (вырожденный объект), а второе слагаемое есть закон интерференции для поляризационно-изотропного объекта. Степень поляризационной анизотропии по мощности  $\mu_p$  в этом выражении представляет собой весовой коэффициент, определяющий вклад анизотропной части. Эта интерпретация позволяет определить декомпозицию (разложение) матрицы Грейвса в виде суммы

$$\|G_{jl}\| = \|G_{jl}^1\| + \|G_{jl}^2\|,$$

слагаемые которой соответствуют поляризационно-изотропной и анизотропной составляющим радиолокационного объекта соответственно. В явном виде эти слагаемые могут быть найдены с использованием полной формы матрицы Грейвса (4.43)

$$\|G_{jl}\| = \|\dot{S}_{jl}^*\| \|\dot{S}_{jl}\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta \lambda_1^2 + \sin^2 \theta \lambda_2^2 & \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & \sin^2 \theta \lambda_1^2 + \cos^2 \theta \lambda_2^2 \end{array} \right\|.$$

После простейших преобразований эта запись может быть представлена в виде

$$\|G_{jl}\| = \|G_{jl}^1\| + \|G_{jl}^2\| = \left\| \begin{array}{cc} \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ \cos \theta \sin \theta (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \theta \end{array} \right\| = \\ = \lambda_2^2 \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{array} \right\| = \\ = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \left\{ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{array} \right\| \right\}. \quad (5.1)$$

Из выражения (5.1) следует, что матрица Грейвса (4.43) может быть представлена в виде суммы матриц рассеяния поляризационно изотропного

объекта (трехгранный уголкоый отражатель) и анизотропного объекта (диполь, проектор или вырожденный объект). При этом степень поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности  $\mu_p \in 0,1$  есть весовой коэффициент при матрице Грейвса, рассеяния, отвечающей анизотропной части радиолокационного объекта.

Найдем теперь декомпозицию матрицы Грейвса (4.43), используя полную систему матриц Паули. Раскрывающие коэффициенты этого разложения могут быть найдены как:

$$S_{GK} = Sp \|\hat{\sigma}_k\| \|G_{jl}\|, \quad (5.2)$$

где  $\|\hat{\sigma}_k\|$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  есть матрицы Паули. Используя выражения (4.43) и (5.2), можно записать раскрывающие коэффициенты разложения

$$S_{G0} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2; S_{G1} = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos 2\theta; S_{G2} = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin 2\theta; S_{G3} = 0. \quad (5.3)$$

Раскрывающие коэффициенты (5.3) позволяют представить матрицу Грейвса (4.43) в виде

$$\begin{aligned} \|G_{jl}\| &= 0.5 \sum_{k=0}^{k=3} S_{Gk} \|\hat{\sigma}_k\| = \\ &= 0.5 \left\{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \cos 2\theta \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \sin 2\theta \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= 0.5 \left\{ \begin{vmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \cos 2\theta & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \sin 2\theta \\ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \sin 2\theta & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \cos 2\theta \end{vmatrix} \right\} = \\ &= 0.5 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mu_p \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix} \right\}. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Из выражения (5.4) следует, что матрица Грейвса (4.43) представлена в виде взвешенной суммы матриц рассеяния поляризационно изотропного объекта (трехгранный уголкоый отражатель) и некоторого оператора вращения. Нетрудно видеть, что матрица оператора вращения эквивалентна матрице рассеяния двугранного уголкового отражателя (4.37). Таким образом, выражение (5.4) есть декомпозиция матрицы Грейвса в виде взвешенной

суммы матриц рассеяния трехгранного и двугранного уголкового отражателей, а степень поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности есть весовой коэффициент данной декомпозиции.

В Главе 4 было указано (см. Подраздел 4.4), что матрица Грейвса и матрица когерентности обладают одинаковыми свойствами. В подразделе 2.5 было указано, что параметры Стокса представляют собой раскрывающие коэффициенты разложения матрицы когерентности по системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей. Принимая во внимание это обстоятельство, можно считать, что коэффициенты (5.3) представляют собой элементы гипотетического вектора Стокса, соответствующего матрице Грейвса радиолокационного объекта (вектор Стокса радиолокационного объекта).

$$\vec{S}_G = \left\| \begin{array}{c} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos 2\theta \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin 2\theta \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (5.5)$$

После нормирования к величине  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  соотношения (5.6а) могут быть записаны в виде

$$\vec{S}_{GN} = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \cos 2\theta \\ \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \sin 2\theta \\ 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \mu_p \cos 2\theta \\ \mu_p \sin 2\theta \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (5.6)$$

Таким образом, проведенный анализ еще раз демонстрирует сходство понятий степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности и степени поляризации частично поляризованной волны. Так, степень поляризации частично поляризованной волны определяет отличие этой волны от абсолютно неполяризованной волны, или степень анизотропии по отношению к абсолютно неполяризованной волне, обладающей изотропным (однородным) угловым распределением её электрического вектора. В свою

очередь, степень поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности определяет отличие этого объекта от трехгранного углового отражателя, т.е. поляризационно изотропного объекта.

В заключение необходимо указать, что физический смысл поляризационной анизотропии является одинаковым как для разложения (5.1), так и для разложения (5.4).

### **5.2. Комплексная степень поляризационной анизотропии точечного радиолокационного объекта.**

При анализе представления на сфере Пуанкаре зависимости мощности рассеянного сигнала от поляризации было введено еще одно понятие степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта (см. подраздел 4.7, выражение (4.68)):

$$\mu' = \frac{|\dot{\lambda}_1| - |\dot{\lambda}_2|}{|\dot{\lambda}_1| + |\dot{\lambda}_2|}, \mu' \in [0, 1].$$

Данная величина определена на интервале  $(0, 1)$  и фазовые свойства собственных значений матрицы рассеяния радиолокационного объекта здесь не учитываются, как и в случае определения степени анизотропии радиолокационного объекта по мощности. Однако влияние этих свойств может быть существенным и, в этой связи, необходимо провести анализ наиболее значащего инварианта матрицы рассеяния радиолокационного объекта – комплексной степени поляризационной анизотропии.

Для определения данного параметра воспользуемся записью матрицы рассеяния в декартовом поляризационном базисе при условии произвольной взаимной ориентации собственной системы координат матрицы рассеяния объекта и опорной системы координат:

$$\|\dot{S}_{jl}\| = \begin{vmatrix} C_\beta & -S_\beta \\ S_\beta & C_\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_\beta & S_\beta \\ -S_\beta & C_\beta \end{vmatrix} =$$

$$= 0.5 \left\| \begin{array}{cc} \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \cos 2\beta & (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) \sin 2\beta \\ (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) \sin 2\beta & \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \cos 2\beta \end{array} \right\|.$$

Здесь

$\beta$  - угол взаимной ориентации координатных систем;

$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 \exp i\varphi/2$ ,  $\dot{\lambda}_2 = \lambda_2 \exp -i\varphi/2$  - собственные числа матрицы рассеяния;

$\lambda_1, \lambda_2$  - модули собственных чисел;

$\varphi$  - разность аргументов собственных чисел.

Разложим матрицу рассеяния  $\|S_{jl}\|$ , используя систему матриц Паули:

$$\|S_{jl}\| = 0.5 \left\{ S_0^S \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + S_1^S \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\| + S_2^S \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| + S_3^S \left\| \begin{array}{cc} 0 & i \\ -i & 0 \end{array} \right\| \right\}, \quad (5.7)$$

где величины

$$S_0^S = Sp \|\hat{\sigma}_0\| \|S_{jl}\| = \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2;$$

$$S_1^S = Sp \|\hat{\sigma}_1\| \|S_{jl}\| = \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \cos 2\theta;$$

$$S_2^S = Sp \|\hat{\sigma}_2\| \|S_{jl}\| = \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \sin 2\theta;$$

$$S_3^S = Sp \|\hat{\sigma}_3\| \|S_{jl}\| = 0 \quad (5.8)$$

представляют собой раскрывающие коэффициенты разложения. Перепишем выражение (5.7), используя коэффициенты разложения (5.8):

$$\|S_{jl}\| = 0.5 \left\{ \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \left\| \begin{array}{cc} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{array} \right\| \right\}. \quad (5.9)$$

После нормирования выражение (5.9) примет вид

$$\begin{aligned} \|S_{jl}\| &= 0.5 \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \left\{ \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + \frac{\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2}{\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2} \left\| \begin{array}{cc} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{array} \right\| \right\} = \\ &= 0.5 \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \left\{ \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + \mu \left\| \begin{array}{cc} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{array} \right\| \right\}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

где комплексная величина

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2}{\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2} \quad (5.11)$$

представляет собой инвариантный поляризационный параметр. Поскольку собственные числа матрицы рассеяния представляют собой максимальное и минимальное значения некоторой квадратичной формы, то выражение (5.11) можно рассматривать как аналог функции видности Майкельсона в оптике (см. Главу 2). Это выражение указывает на анизотропию преобразования полной комплексной амплитуды при рассеянии волны радиолокационным объектом. Назовем параметр  $\dot{\mu}$ , определяемый выражением (5.11) и характеризующий поляризационные свойства объекта, «комплексная степень поляризационной анизотропии» (*КСПА*) радиолокационного объекта. *КСПА* представляет собой весовой коэффициент в разложении (5.10) матрицы рассеяния радиолокационного объекта. Из этого выражения следует, что матрица рассеяния  $\|S_{jl}\|$  может быть представлена в виде взвешенной суммы некоторого изотропного объекта (т.е. трехгранного уголкового отражателя) и двугранного уголкового отражателя, вес которого определяется величиной  $\dot{\mu}$ .

Определим модуль *КСПА* в виде

$$|\dot{\mu}| = \sqrt{\dot{\mu}\dot{\mu}^*} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}}. \quad (5.12)$$

Аргумент *КСПА*, его действительная и мнимая части определяются соотношениями

$$\arg \dot{\mu} = \operatorname{arctg} \left( \frac{2\lambda_1\lambda_2 S_\varphi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right), \quad (5.13)$$

$$\operatorname{Re} \dot{\mu} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}; \quad \operatorname{Im} \dot{\mu} = \frac{2\lambda_1\lambda_2 S_\varphi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}, \quad (5.14)$$

где величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  есть модули собственных чисел, а величина  $\varphi = \arg \dot{\lambda}_1 - \arg \dot{\lambda}_2$  представляет собой разность аргументов этих чисел, которая соответствует фазовому сдвигу между поляризационно-

ортогональными составляющими, обусловленному электрофизическими свойствами объекта. Величины (5.12), (5.13), (5.14) представляют собой инварианты матрицы рассеяния. Таким образом, величина *КСПА* полностью описывает поляризационные свойства радиолокационного объекта. Эта величина инвариантна к вращениям объекта в плоскости, перпендикулярной линии визирования. Величина *КСПА* может быть измерена и отображена на экране индикатора радиолокатора одновременно с полной *ЭПР* радиолокационного объекта. Необходимо упомянуть еще раз, что полная *ЭПР* объекта также представляет собой инвариант матрицы рассеяния.

5.3. Геометрическое представление степени поляризационной анизотропии на комплексной плоскости радиолокационных объектов.

Как было показано в Главе 1, поляризационные состояния плоских волн могут быть представлены на комплексной плоскости (декартовой, круговой или обобщенной). Введенное в предыдущем подразделе понятие комплексной степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта позволяет представить на комплексной плоскости не только поляризационные свойства электромагнитных волн, но и поляризационные свойства радиолокационных объектов. Этот аспект следует рассмотреть более подробно.

Из выражений (5.12), (5.13) и (5.14) следует, что величина комплексной степени поляризационной анизотропии  $\dot{\mu}$  может быть представлена на комплексной плоскости  $\dot{\mu} = \text{Re } \dot{\mu} + \text{Im } \dot{\mu}$  [80] (см. Рис 5.1). Точки этой комплексной плоскости связаны с поляризационными свойствами радиолокационных объектов, поскольку величина  $\dot{\mu}$  является инвариантом матрицы рассеяния радиолокационного объекта. Так, начало координат комплексной плоскости  $\dot{\mu}$ , т.е.  $\dot{\mu} = 0$ , соответствует радиолокационному объекту, матрица рассеяния которого обладает действительными собственными

числами  $\lambda_1 = \lambda_2$  (т.е. разность аргументов собственных чисел равна нулю).

Это следует из необходимости одновременного выполнения условий

$$\operatorname{Re} \dot{\mu} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_\varphi} = 0, \quad \operatorname{Im} \dot{\mu} = \frac{2\lambda_1 \lambda_2 S_\varphi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_\varphi} = 0.$$

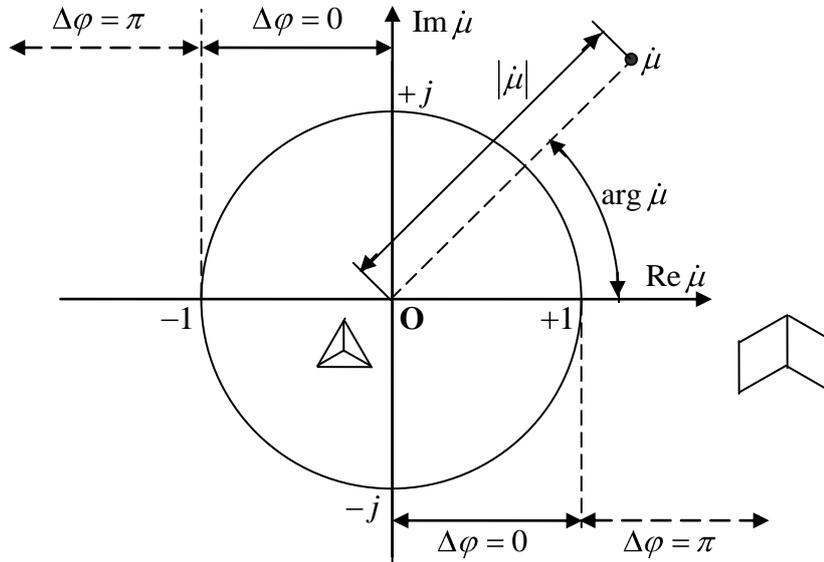


Рис.5.1

Физическим аналогом этой точки (т.е. начала координат) является поляризационно изотропный объект (трехгранный уголкоый отражатель, сфера, металлическая плоскость), обладающий матрицей рассеяния

$$\|S_{jl}\| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости радиолокационных объектов характеризуется следующими значениями собственных чисел матрицы рассеяния:  $\lambda_1 = \lambda_2, \varphi = \pm\pi$ . Матрица рассеяния для этого случая может быть определена предельным переходом

$$\lim \operatorname{Re} \dot{\mu} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi; \lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_\varphi} = \infty,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \operatorname{Im} \dot{\mu} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi; \lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \frac{2\lambda_1 \lambda_2 S_{\Delta\varphi}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_{\Delta\varphi}} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \operatorname{tg} \varphi/2 = \infty$$

и имеет вид

$$\|S_{jl}\| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, физическим аналогом бесконечно удаленной точки является двугранный уголкового отражатель.

Точки мнимой оси комплексной плоскости радиолокационных объектов соответствуют объектам, для которых  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 0$ , т.е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . При этом точки, принадлежащие положительной мнимой полуоси, представляют радиолокационные объекты, характеризуемые разностью аргументов собственных чисел матриц рассеяния этих объектов  $\varphi > 0$ . Мнимая отрицательная полуось ( $\operatorname{Im} \dot{\mu} < 0$ ) соответствует объектам, характеризуемым величинами  $\varphi < 0$ . Точки  $\pm j$  соответствуют объектам, вносящим фазовый сдвиг  $\varphi = \pm \pi/2$ . Указанные соответствия определяются условием

$$\operatorname{Im} \dot{\mu} \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 = \frac{\sin \Delta\varphi}{1 + \cos \Delta\varphi} = \operatorname{tg} \Delta\varphi/2.$$

Точки действительной оси комплексной  $\dot{\mu}$  - плоскости соответствуют объектам, не вносящим фазовый сдвиг:

$$\varphi = 0; \operatorname{Im} \dot{\mu} = 2\lambda_1 \lambda_2 S_{\varphi} / (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_{\varphi}) = 0.$$

Однако данный случай усложняется тем фактом, что радиолокационный объект, соответствующий бесконечно удаленной точке, представляет собой двугранный уголкового отражатель. Данное противоречие может быть разрешено с учетом равенства  $\sin \varphi = 0$ , которое справедливо как для случая  $\varphi = 0$ , так и для случая  $\varphi = \pi$ . В связи с этим, точки действительной оси комплексной  $\dot{\mu}$  - плоскости должны определяться с использованием условий ( $\cos 0 = 1, \cos \pi = -1$ ):

$$\operatorname{Re} \dot{\mu} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \pm 2\lambda_1\lambda_2}.$$

Таким образом, на интервале  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 0$ ;  $\Re \in$  величина  $\lambda_2$  уменьшается от значения  $\lambda_1 = \lambda_2$  в начале координат до величины  $\lambda_2 = 0$  в точке  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 1$  (горизонтально ориентированный диполь). Эта точка соответствует «вырожденному радиолокационному объекту» (линейно протяженный объект, диполь, т.е. в общем случае поляризатор). Фазовый сдвиг в данной точке есть неопределенная величина. Он изменяется скачкообразно на величину  $\pi$  при переходе через точку  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 1$ . Затем, величина  $\lambda_2$  увеличивается от значения  $\lambda_2 = 0$  (в точке  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 1$ ) до величины  $\lambda_1 = \lambda_2$  в бесконечно удаленной точке. В этом случае фазовый сдвиг для точек, принадлежащих лучу ( $\operatorname{Re} \dot{\mu} = 1$ ;  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = \infty$ ) равен  $\pi$ .

Подобный анализ может быть проделан и для отрицательной полуоси  $\operatorname{Re} \dot{\mu}$ . При этом переход через точку  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = -1$  будет сопровождаться скачкообразным изменением ориентации объекта на величину  $\pi/2$ . Точка  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = -1$  соответствует вырожденному объекту  $\lambda_1 = 0$  (вертикально ориентированный диполь). Точка  $\operatorname{Re} \dot{\mu} = -\infty$  соответствует двугранному уголкового отражателю.

Единичная окружность комплексной  $\dot{\mu}$  - плоскости определяется условием

$$|\dot{\mu}| = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_\varphi}}.$$

Из данного условия следует, что единичная окружность комплексной  $\dot{\mu}$  - плоскости представляет собой геометрическое место точек, изображающих радиолокационные объекты, вносящие фазовый сдвиг  $\varphi = \pm\pi/2$ . Необходимо отметить еще раз, что фазовый сдвиг является неопределенным в точках, отвечающих вырожденным объектам ( $\operatorname{Re} \dot{\mu} = \pm 1$ ). Объекты, вносящие

фазовый сдвиг  $\varphi = \pm\pi/2$ , характеризуются только величиной аргумента степени анизотропии

$$\arg \mu = \operatorname{arctg} \left( \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right),$$

что следует из выражений (5.13) и (5.14).

Нетрудно видеть, что кривые, отвечающие постоянной величине модуля *КСПА*, представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат комплексной плоскости. Лучи, проходящие через начало координат, представляют собой линии постоянного значения аргумента *КСПА*. Эти два класса кривых образуют ортогональное семейство.

Таким образом, комплексная  $\mu$ -плоскость обладает свойствами, эквивалентными свойствам круговой комплексной плоскости (см. Гл.1, подраздел 1.6). Однако, в то время как точки круговой комплексной плоскости представляют поляризационные состояния плоских электромагнитных волн, точки комплексной  $\mu$ -плоскости предназначены для представления инвариантных поляризационных параметров матриц рассеяния радиолокационных объектов независимо от поляризационных свойств волн, облучающих эти объекты.

#### ***5.4. Преобразование комплексной плоскости радиолокационных объектов в комплексную плоскость поляризационного отношения рассеянных волн.***

Измерение поляризационных параметров рассеянных волн является основной задачей радиолокационных поляриметрических систем (радиолокационных поляриметров) [4,5,9]. Эти измерения составляют содержание первого этапа задачи классификации радиолокационных объектов. Вторым этапом этой задачи является решение обратной задачи, позволяющее определить параметры объекта, недоступные для непосредственного наблюдения и измерения. Обычно решение обратной задачи требует

значительного интервала времени и большого объема вычислений. В этой связи можно сформулировать главную цель, преследуемую при создании перспективного поляризационного радиолокатора: данная система должна непосредственно измерять и отображать в реальном масштабе времени поляризационные параметры наблюдаемого объекта, а не поляризационные параметры рассеянной волны, требующие дополнительной обработки для вычисления параметров объекта. В этом случае вычисления, связанные с решением обратной задачи, не требуются. Ниже будет показано, что решение этой проблемы может быть найдено с использованием поляризационно-энергетических инвариантов матрицы рассеяния радиолокационного объекта.

Анализируя подобие, существующее между  $\dot{\mu}$  - плоскостью и круговой комплексной плоскостью, можно сделать вывод, что целесообразно выбрать круговой поляризационный базис для представления как излучаемой, так и рассеянной волн. Матрица рассеяния (5.9) в круговом поляризационном базисе может быть найдена с использованием оператора (1.54). При этом будет учтено изменение направления вращения поляризации при обратном рассеянии. Таким образом, матрица рассеяния в круговом базисе определяется выражением

$$\begin{aligned} \|S_{jl}^{RL}\| &= 0.25 \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \left\{ \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \begin{vmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 0.5 j \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \exp j 2\theta - \pi/2 & \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 & \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \exp -j 2\theta - \pi/2 \end{vmatrix}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Представим волну, излучаемую радиолокатором, в круговом поляризационном базисе  $(\dot{e}_R, \dot{e}_L)$ . Круговое поляризационное отношение для этой волны определяется как  $\dot{P}_{RL}^1 = \dot{E}_R / \dot{E}_L$ , круговое поляризационное отношение для рассеянной волны имеет вид

$$\dot{P}_{RL}^S = \frac{\dot{S}_{21}^{RL} + \dot{S}_{22}^{RL} \dot{P}_{RL}^1}{\dot{S}_{11}^{RL} + \dot{S}_{22}^{RL} \dot{P}_{RL}^1} = \frac{1 + \dot{\mu} \exp\{-j(2\theta - \pi/2)\} \dot{P}_{RL}^1}{\dot{\mu} \exp\{-j(2\theta - \pi/2)\} + \dot{P}_{RL}^1}. \quad (5.16)$$

Выражение (5.16) дает возможность установить некоторые специфические состояния поляризации излучаемой волны, для которых поляризационное отношение рассеянной волны будет иметь уникальную форму. Так, если  $\dot{P}_{RL}^1 = \infty$  (правая круговая поляризация), то выражение (5.16) можно переписать как

$$\dot{P}_{RL}^S = \lim_{\dot{P}_{RL}^1 \rightarrow \infty} \frac{1 + \dot{\mu} \exp\{-j(2\theta - \pi/2)\} \dot{P}_{RL}^1}{\dot{\mu} \exp\{-j(2\theta - \pi/2)\} + \dot{P}_{RL}^1} \times \exp\{-j[2\theta - \arg(\dot{\mu}) - \pi/2]\}. \quad (5.17)$$

Если собственная система координат объекта совпадает с опорной системой координат, т.е.  $\theta = 0$ , то

$$\dot{P}_{RL}^S = |\dot{\mu}| \exp\{-j[\arg(\dot{\mu}) + \pi/2]\}. \quad (5.18)$$

Сравним теперь соотношения (5.17) и (5.18) с выражением для кругового поляризационного отношения  $\dot{P}_{RL}$ . Напомним для удобства определение формы кругового поляризационного отношения. Запишем прежде всего вектор Джонса эллиптически поляризованной волны в декартовом поляризационном базисе

$$\dot{E}_{XY} = \begin{vmatrix} \cos\alpha \cos\beta - j \sin\alpha \sin\beta \\ \cos\alpha \sin\beta + j \sin\alpha \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Затем преобразуем этот вектор Джонса из декартова базиса в круговой поляризационный базис, используя переход:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{RL} &= 0.5 \begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha \cos\beta - j \sin\alpha \sin\beta \\ \cos\alpha \sin\beta + j \sin\alpha \cos\beta \end{vmatrix} = \\ &= 0.5 \begin{vmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha \exp i\beta \\ \cos\alpha + \sin\alpha \exp -i(\beta - \pi/2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Запишем теперь круговое поляризационное отношение

$$\begin{aligned} \dot{P}_{RL} &= \frac{\dot{E}_R}{\dot{E}_L} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \exp -i 2\beta - \pi/2 = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 \exp -i 2\beta - \pi/2. \end{aligned}$$

Сравнение соотношений (5.17) и (5.18) с выражением для кругового поляризационного отношения  $\dot{P}_{RL}$  показывает, что модуль кругового поляризационного отношения для рассеянной волны (величина которого может быть измерена) при условии излучения правой круговой поляризации равен модулю комплексной степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта (эта величина для прямых измерений недоступна):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi/4) = |\dot{\mu}|. \quad (5.19)$$

Аргумент поляризационного отношения для рассеянной волны  $\dot{P}_{RL}^S$  (случай  $\theta = 0$ ) определяется как

$$\arg \dot{\mu} + \pi/2 = -2\beta + \pi/2, \text{ или } \arg \dot{\mu} = -2\beta. \quad (5.20)$$

Последнее выражение показывает, что величина аргумента *КСПА* определяет ориентацию эллипса поляризации в собственной системе координат рассеивающего объекта. Если  $\theta \neq 0$ , то эллипс поляризации рассеянной волны будет дополнительно повернут на угол  $2\theta$ .

Таким образом, отображение комплексной  $\dot{\mu}$ -плоскости радиолокационных объектов на круговую комплексную плоскость поляризационного отношения рассеянных волн может быть выполнено следующим образом:

1. Случай  $\theta = 0$ :

Комплексная  $\dot{\mu}$  - плоскость накладывается на круговую комплексную плоскость  $\dot{P}_{RL}^S$ , а затем  $\dot{\mu}$  - плоскость поворачивается на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. После этого вращения все точки  $\dot{\mu}$  - плоскости будут совмещены с точками  $\dot{P}_{RL}^S$  - плоскости. Эти точки будут представлять собой поляризационные состояния рассеянных волн.

2. Случай  $\theta \neq 0$ .

В данном случае необходимо к перечисленным операциям добавить дополнительное вращение на угол  $-2\theta$  (т.е. против часовой стрелки). Однако, взаимная ориентация собственной системы координат объекта

относительно опорной системы координат, как правило, неизвестна. Следовательно, целесообразным является измерение только величины

$$|\dot{\mu}| = \operatorname{tg}(\alpha + \pi/4) = \left| \dot{P}_{RL}^S \right|.$$

Как это следует из изложенного, существует возможность прямого измерения поляризационного инварианта  $|\dot{\mu}|$  радиолокационного объекта без каких-либо дополнительных вычислений после процесса измерения. Техническая возможность отдельных измерений величин  $\theta$ ,  $\operatorname{Re} \dot{\mu}$ ,  $|\dot{\mu}|$  может быть реализована в радиолокационных системах, использующих модуляцию поляризации излучаемого сигнала.

5.5. Представление поляризационной анизотропии радиолокационных объектов на поляризационной сфере

*Соответствие между круговой комплексной плоскостью и сферой Римана, имеющей единичный диаметр, было подробно рассмотрено в первой Главе настоящей книги. При этом было показано, что уравнения стереографической проекции*

$$X_1 = \frac{\operatorname{Re} \dot{P}_{RL}}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2}; \quad X_2 = \frac{\operatorname{Im} \dot{P}_{RL}}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2}; \quad X_3 = \frac{\left| \dot{P}_{RL} \right|^2}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2}$$

*взаимно-однозначно связывают точки круговой комплексной плоскости  $\dot{P}_{RL} = \operatorname{Re} \dot{P}_{RL} + \operatorname{Im} \dot{P}_{RL}$  с декартовыми координатами  $X_1, X_2, X_3$  точки  $S$ , лежащей на поверхности сферы Римана. Переход от круговой комплексной плоскости к сфере Пуанкаре, имеющей единичный радиус, может быть реализован с использованием модифицированных уравнений стереографической проекции*

$$X = \frac{2 \operatorname{Re} \dot{P}_{RL}}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2}, \quad Y = \frac{2 \operatorname{Im} \dot{P}_{RL}}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2}, \quad Z = 2 \left\{ \frac{\left| \dot{P}_{RL} \right|^2}{1 + \left| \dot{P}_{RL} \right|^2} - \frac{1}{2} \right\}.$$

*Принимая во внимание результаты подраздела 5.3, свяжем комплексную  $\dot{\mu}$ -плоскость радиолокационных объектов со сферой единичного радиуса, используя модифицированные уравнения стереографической проекции.*

Введем сферу  $S_T$  единичного радиуса, определив ей в трёхмерном пространстве  $S_1, S_2, S_3$  (Рис. 5.2), полагая при этом, что оси  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  трехмерного пространства  $S_1, S_2, S_3$  совпадают с действительной и мнимой осями  $\text{Re } \dot{\mu}, \text{Im } \dot{\mu}$  комплексной плоскости  $\dot{\mu} = \text{Re } \dot{\mu} + \text{Im } \dot{\mu}$  соответственно. В соответствии с изложенным выше, все точки сферы  $S_T$  взаимно-однозначно связаны с соответствующими точками комплексной  $\dot{\mu}$ -плоскости радиолокационных объектов [81].

Предположим теперь, что некоторый радиолокационный объект определен на  $\dot{\mu}$ -плоскости точкой  $\dot{\mu}_T = \mu_R + i\mu_I$ , где  $\mu_R, \mu_I$  есть действительная и мнимая части  $\dot{\mu}_T$ . Свяжем точку  $\dot{\mu}_T$  с северным полюсом сферы лучом, который пересекает поверхность сферы в точке  $S_T$ . Проекции  $S_{T1}, S_{T2}, S_{T3}$  точки  $S_T$  на оси  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$  определяются модифицированными уравнениями стереографической проекции

$$S_{T1} = \frac{2 \text{Re } \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1}, \quad S_{T2} = \frac{2 \text{Im } \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1}, \quad S_{T3} = 2 \left\{ \frac{|\dot{\mu}|^2}{1 + |\dot{\mu}|^2} - \frac{1}{2} \right\} = \frac{|\dot{\mu}|^2 - 1}{|\dot{\mu}|^2 + 1}. \quad (5.21)$$

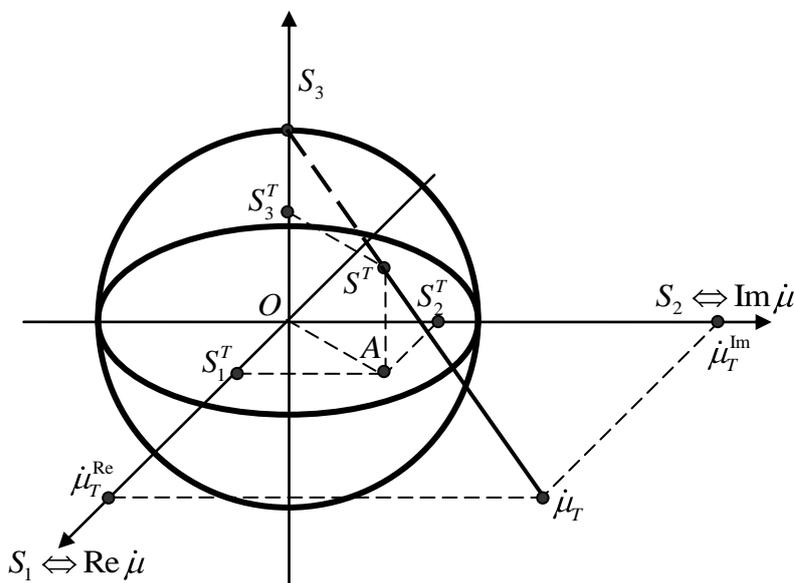


Рис.5.2

Нетрудно видеть, что величины  $S_{T1}, S_{T2}, S_{T3}$  удовлетворяют уравнению сферы единичного радиуса

$$S_{T1}^2 + S_{T2}^2 + S_{T3}^2 = 1. \quad (5.22)$$

Таким образом, все точки комплексной плоскости радиолокационных объектов взаимно-однозначно соответствуют точкам поверхности сферы  $S_T$ . Назовем эту сферу единичной сферой радиолокационных объектов.

Кроме того, каждой точке сферы радиолокационных объектов можно сопоставить вектор

$$\vec{S}_T = \left\{ 1 \frac{2 \operatorname{Re} \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \frac{2 \operatorname{Im} \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \frac{|\dot{\mu}|^2 - 1}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \right\}, \quad (5.23)$$

который можно назвать вектором Стокса радиолокационного объекта. Южный полюс сферы соответствует поляризационно-изотропному объекту (трехгранный УО, сфера, металлическая пластина), обладающему матрицей рассеяния

$$\|S_{jl}\| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и вектором Стокса

$$\vec{S}_T = 1; 0; 0; -1 .$$

Северный полюс соответствует двугранному уголкового отражателю, обладающему матрицей рассеяния

$$\|S_{jl}\| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

и вектором Стокса

$$\vec{S}_T = 1; 0; 0; 1 .$$

Представление отображения других объектов на единичной сфере радиолокационных объектов рассмотрим для случая  $\theta = 0$ . Как было показано в подразделе 5.4, круговое поляризационное отношение  $\dot{P}_{RL} = \operatorname{tg}(\alpha + \pi/4) \exp -i2\beta$  может быть связано с величиной комплексной степени поляризационной анизотропии  $\dot{\mu} = |\dot{\mu}| \exp i \arg \dot{\mu}$ . Таким образом, возникает возможность введения понятия поляризационного эллипса радиолокационного объекта, который может быть связан с любым точечным объектом, характеризуемым КСПА  $\dot{\mu}$ . В соответствии с выражениями (5.19) и (5.20)  $\operatorname{tg}(\alpha + \pi/4) = |\dot{\mu}|$ ,  $\arg \dot{\mu} = -2\beta$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \operatorname{tg} \alpha_T + \pi/4 \exp -i2\beta_T = \\ &= \operatorname{tg} \alpha_T + \pi/4 \cos 2\beta_T - j \operatorname{tg} \alpha_T + \pi/4 \sin 2\beta_T, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где  $\alpha_T, \beta_T$  представляют собой угол эллиптичности и угол ориентации поляризационного эллипса радиолокационного объекта.

После подстановки действительной и мнимой части из выражения (5.24) в выражение (5.23) для вектора Стокса радиолокационного объекта получим

$$\begin{aligned} \vec{S}_T &= \left\{ 1 \frac{2 \operatorname{Re} \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \frac{2 \operatorname{Im} \dot{\mu}}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \frac{|\dot{\mu}|^2 - 1}{|\dot{\mu}|^2 + 1} \right\} = \\ &= \left\{ 1 \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_T + \pi/4 \cos 2\beta_T}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_T + \pi/4} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_T + \pi/4 \sin 2\beta_T}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_T + \pi/4} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \pi/4 - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \pi/4 + 1} \right\} = \\ &= 1 \cos 2\alpha_T \cos 2\beta_T \cos 2\alpha_T \sin 2\beta_T \sin 2\alpha_T = \\ &= 1 S_{T1} S_{T2} S_{T3} . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Из выражения (5.25) следует, что параметры поляризационного эллипса радиолокационного объекта определяют элементы вектора Стокса этого объекта. Используя выражение (5.25), можно сопоставить всем точкам единичной сферы радиолокационных объектов реальные объекты.

Так, точки экватора сферы соответствуют линейным поляризаторам (диполям), имеющим различную ориентацию, поскольку для этих объектов

величина  $\alpha_T = 0$ . Матрица рассеяния и вектор Стокса этих объектов имеют вид

$$\|S_{jl}^T\| = \begin{vmatrix} \cos^2 \beta_T & \cos \beta_T \sin \beta_T \\ \cos \beta_T \sin \beta_T & \sin^2 \beta_T \end{vmatrix},$$

$$\vec{S}_T = 1; \cos 2\beta_T; \sin 2\beta_T; 0$$

соответственно.

В частности, для горизонтально ориентированного поляризатора (диполя)

$$\|S_{jl}^H\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{S}_T^H = 1; 1; 0; 0 ;$$

для вертикально ориентированного поляризатора (диполя)

$$\|S_{jl}^V\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \vec{S}_T^V = 1; -1; 0; 0 ;$$

а для ориентаций поляризатора (диполя)  $\pm\pi/4$

$$\|S_{jl}^{\pm\pi/4}\| = \begin{vmatrix} 0.5 & \pm 0.5 \\ \pm 0.5 & 0.5 \end{vmatrix}, \quad \vec{S}_T^{\pm\pi/4} = 1; \pm 1; 0; 0 .$$

Все прочие точки единичной сферы радиолокационных объектов соответствуют объектам, эллипс поляризации которых характеризуется как углом эллиптичности, так и углом ориентации.

### **5.6. Близость состояний поляризации радиолокационных объектов на комплексной плоскости. Понятие поляризационного контраста радиолокационных объектов.**

Рассмотрим теперь понятие близости состояний поляризации радиолокационных объектов, используя определение «поляризационного эллипса радиолокационного объекта», которое было введено выше. С этой целью на комплексной плоскости радиолокационных объектов зададим некоторый объект, характеризуемый произвольным значением комплексной степени поляризационной анизотропии  $\dot{\mu}_T$ , а также два дополнительных

объекта. Величины комплексной степени поляризационной анизотропии этих объектов  $\dot{\mu}_1, \dot{\mu}$  связаны условием ортогональности:

$\dot{\mu}_1 = \dot{\mu}_{ORT} = -1/\dot{\mu}^* = -\dot{\mu}/|\dot{\mu}|^2$ . Разложим теперь радиолокационный объект  $\dot{\mu}_T$  по ортам некоторой ортогональной системы, образованной объектами  $\dot{\mu}, \dot{\mu}_{ORT}$ . В качестве такой ортогональной системы объектов могут быть использованы:

- система из двух ортогональных диполей;
- система, сформированная двугранным и трехгранным уголковыми отражателями;
- система, сформированная двумя объектами, представляющими собой эллиптические поляризаторы, которые характеризуются ортогональными эллипсами поляризации собственных векторов их матриц рассеяния.

Матрица рассеяния радиолокационного объекта, характеризуемого комплексной степенью поляризационной анизотропии  $\dot{\mu}_T$ , в собственной системе координат имеет диагональный вид

$$\|S_{jl}^T\| = \begin{vmatrix} \dot{\lambda}_{1T} & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_{2T} \end{vmatrix},$$

где собственные числа  $\dot{\lambda}_{1T}, \dot{\lambda}_{2T}$ , как это уже указывалось, представляют собой экстремальные значения коэффициента отражения. В этой связи полная мощность волны, рассеянной объектом, определяется как

$$|\dot{\lambda}_{1T}|^2 + |\dot{\lambda}_{2T}|^2 \equiv \lambda_{1T}^2 + \lambda_{2T}^2 = I.$$

Ранее было показано, что матрица рассеяния точечного объекта может быть представлена в виде суммы матриц рассеяния двух ортогональных радиолокационных объектов. В этом случае полная мощность волны, рассеянной объектом, может быть представлена в виде суммы мощностей волн, рассеянных каждым из объектов, образующих ортогональную систему. Поскольку комплексная степень поляризационной анизотропии  $\dot{\mu}_T$  некоторого

объекта подобна поляризации отношению, то можно найти части полной мощности волны, рассеянной этим объектом, которые будут соответствовать мощности рассеяния, обусловленной каждым из объектов ортогональной системы, характеризуемых величинами КСПА  $\dot{\mu}, \dot{\mu}_{ORT}$ . Для определения этих частей воспользуемся результатами подраздела 1.9, а именно, выражениями (1.77):

$$I_1 = \frac{q}{q + S^2}, I_2 = \frac{S^2}{q + S^2},$$

где  $I_1, I_2$  есть части полной мощности  $I$ , которые соответствуют ортогональным объектам, характеризуемым величинами КСПА  $\dot{\mu}, \dot{\mu}_{ORT}$ . Будем полагать, без ограничения общности, что полная мощность рассеянной волны единична:  $I_1 + I_2 = I = 1$ . Следуя подразделу 1.9, определим величины  $q$  и  $S$  в виде:

$$q = |\dot{\mu}| / |\dot{\mu}_{ORT}|, S = \frac{S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu})}{S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_{ORT})} = \frac{|\dot{\mu}_T - \dot{\mu}|}{|\dot{\mu}_T - \dot{\mu}_{ORT}|}, \quad (5.26)$$

где расстояния  $|\dot{\mu}_T - \dot{\mu}|, |\dot{\mu}_T - \dot{\mu}_{ORT}|$  определяются евклидовой метрикой на множестве точек комплексной плоскости. Использование евклидовой метрики позволяет определить расстояние между точками  $\dot{\mu}_T = \text{Re } \dot{\mu}_T + i \text{Im } \dot{\mu}_T$ ,  $\dot{\mu} = \text{Re } \dot{\mu} + i \text{Im } \dot{\mu}$ :

$$S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) = |\dot{\mu}_T - \dot{\mu}| = \sqrt{(\text{Re } \dot{\mu}_T - \text{Re } \dot{\mu})^2 + (\text{Im } \dot{\mu}_T - \text{Im } \dot{\mu})^2}, \quad (5.27a)$$

а также расстояние между точками

$$\dot{\mu}_T = \text{Re } \dot{\mu}_T + i \text{Im } \dot{\mu}_T, \quad \dot{\mu}_{ORT} = \text{Re } \dot{\mu}_{ORT} + i \text{Im } \dot{\mu}_{ORT} :$$

$$\begin{aligned} S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_{ORT}) &= |\dot{\mu}_T - \dot{\mu}_{ORT}| = \\ &= \sqrt{(\text{Re } \dot{\mu}_T - \text{Re } \dot{\mu}_{ORT})^2 + (\text{Im } \dot{\mu}_T - \text{Im } \dot{\mu}_{ORT})^2}. \end{aligned} \quad (5.27b) \text{ Принимая}$$

во внимание соотношения

$$\dot{\mu}_{ORT} = -1/\dot{\mu}^* = -\dot{\mu}/|\dot{\mu}|^2, \quad \dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu} \dot{\mu}_T^* = 2(\text{Re } \dot{\mu}_T \text{Re } \dot{\mu} + \text{Im } \dot{\mu}_T \text{Im } \dot{\mu}),$$

можно получить искомые расстояния:

$$S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) = \left[ |\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}|^2 - \dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu}_T \dot{\mu}^* \right]^{0,5}, \quad (5.28a)$$

$$S(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_{ORT}) = \left[ |\dot{\mu}_T|^2 \cdot |\dot{\mu}|^2 + \dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu}_T \dot{\mu}^* + 1 \right]^{0,5} |\dot{\mu}|^{-1}. \quad (5.28b)$$

Используя выражения (5.26) и (5.28a), можно найти часть полной мощности волны, рассеянной объектом  $\dot{\mu}_T$ , которая соответствует радиолокационному объекту  $\dot{\mu}$ :

$$I_1 = \frac{|\dot{\mu}_T|^2 |\dot{\mu}|^2 + \dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu}_T \dot{\mu}^* + 1}{|\dot{\mu}_T|^2 |\dot{\mu}|^2 + |\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}|^2 + 1}. \quad (5.29a)$$

Часть полной мощности волны, рассеянной объектом  $\dot{\mu}_T$ , которая соответствует ортогональному радиолокационному объекту  $\dot{\mu}_{ORT}$ , может быть определена в виде

$$I_2 = \frac{S^2}{q + S^2} = 1 - I_1 = \frac{|\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}|^2 - (\dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu}_T \dot{\mu}^*)}{|\dot{P}_1|^2 |\dot{P}|^2 + |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}_2|^2 + 1}. \quad (5.29b)$$

Рассмотрим теперь интерпретацию выражения (5.29a,b), следуя концепции «меры близости» состояний поляризации двух объектов, соответствующих точкам  $\dot{\mu}_T$  и  $\dot{\mu}$  на комплексной плоскости радиолокационных объектов. В соответствии с результатами подраздела 1.9, часть полной мощности  $I$ , которая соответствует объекту  $\dot{\mu}$  (один из двух ортогональных объектов  $\dot{\mu}$ ,  $\dot{\mu}_{ORT}$ ), определяется выражением

$$N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) = I_1 = \frac{|\dot{\mu}_T|^2 |\dot{\mu}|^2 + \dot{\mu}_T^* \dot{\mu} + \dot{\mu}_T \dot{\mu}^* + 1}{|\dot{\mu}_T|^2 |\dot{\mu}|^2 + |\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}|^2 + 1} \quad (5.30)$$

и эта величина может быть названа «поляризационная близость двух радиолокационных объектов». Поляризационная близость обладает свойствами, которые подобны свойствам функции близости состояний поляризации плоских электромагнитных волн, рассмотренным в Главе 1 (см. подраздел 1.9):

- Поляризационная близость радиолокационных объектов  $(\dot{\mu}_T, \dot{\mu})$  совпадает с их поляризационной близостью для случая  $(\dot{\mu}, \dot{\mu}_T)$  :

$$N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) = N(\dot{\mu}, \dot{\mu}_T); \quad (5.31a)$$

- Поляризационное состояние радиолокационного объекта  $\dot{\mu}_T$  является наиболее близким к самому себе ( $N = 1$ ) и максимально удалено от ортогонального состояния ( $N = 0$ ):

$$N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T) = 1; N(\dot{\mu}_T, -1/\dot{\mu}_T^*) = 0. \quad (5.31b)$$

Таким образом, поляризационная близость радиолокационных объектов заключена в пределах  $0 \leq N \leq 1$ ;

- Поляризационное состояние радиолокационного объекта  $\dot{\mu}_T$  настолько близко к поляризационному состоянию объекта  $\dot{\mu}$ , насколько оно удалено от состояния  $\dot{\mu}_{ORT}$ , которое является ортогональным к состоянию  $\dot{\mu}$ . Таким образом, значение «поляризационной удаленности» радиолокационных объектов может быть определено как

$$N(\dot{\mu}_T, -1/\dot{\mu}^*) = 1 - N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) = R \dot{\mu}_T, \dot{\mu}; \quad (5.31c)$$

Определение «поляризационной удаленности» радиолокационных объектов  $R \dot{\mu}_T, \dot{\mu}$  позволяет ввести понятие радиолокационного контраста двух радиолокационных объектов. Понятие радиолокационного контраста связано с возможностью выделения радиолокационного объекта на фоне других радиолокационных объектов (например – на фоне подстилающей поверхности) с использованием его поляризационных свойств. Прямое использование расстояния между двумя объектами, представленными на комплексной плоскости (т.е. евклидова метрика) не позволяет обосновать приемлемую меру различия поляризационных свойств этих объектов. Однако, использование выражения (5.31) в виде

$$R \dot{\mu}_T, \dot{\mu} = 1 - N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}) \quad (5.32)$$

дает нормированную величину различия поляризационных свойств объектов, поскольку, в соответствии с выражениями (5.31a,b), два радиолокационных

объекта будут неразличимы, если близость их состояний поляризации есть единица ( $N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T) = 1$ ). В этом случае поляризационный контраст радиолокационных объектов равен нулю:  $R(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T) = 1 - N(\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T) = 0$ . Два радиолокационных объекта будут абсолютно различимы (разрешены по поляризации), если их поляризационная близость равна нулю:  $N(\dot{\mu}_T, -1/\dot{\mu}_T^*) = 0$ . В данном случае поляризационный контраст объектов будет максимальным:  $R(\dot{\mu}_T, -1/\dot{\mu}_T^*) = 1 - N(\dot{\mu}_T, -1/\dot{\mu}_T^*) = 1$ . Все другие случаи, отвечающие произвольным состояниям поляризации двух радиолокационных объектов дают значения величины поляризационного контраста в пределах  $0 < R(\dot{\mu}_{T1}, \dot{\mu}_{T2}) < 1$ . Таким образом, в общем виде величина поляризационного контраста заключена в пределах  $0 \leq R(\dot{\mu}_{T1}, \dot{\mu}_{T2}) \leq 1$ . Необходимо обратить внимание на тот факт, что предлагаемое понятие поляризационного контраста является инвариантным к выбору поляризационного базиса.

Анализ концепций поляризационной близости (удаленности) и поляризационного контраста радиолокационных объектов, проведенный выше с позиции математической меры близости состояний поляризации, основывался на использовании комплексной плоскости радиолокационных объектов. Ниже будет показано, что эти концепции тесно связаны со сферической метрикой в поляризационном пространстве. С этой целью будет использовано представление радиолокационных объектов на сфере Римана единичного диаметра.

### ***5.7 Близость состояний поляризации радиолокационных объектов в трехмерном поляризационном пространстве.***

В Главе I было указано (см. подраздел 1.10), что евклидова метрика, определенная на множестве точек комплексной плоскости, не является непосредственной мерой близости состояний поляризации, представленных

двумя точками комплексной плоскости. Аналогично, евклидова метрика не может также определять близость состояний поляризации двух объектов, представленных точками на комплексной плоскости радиолокационных объектов. В связи с этим необходимо рассмотреть в качестве метрики расстояние между сферическими отображениями  $\mu_S^1, \mu_S^2$  двух точек  $\dot{\mu}_1, \dot{\mu}_2$ , лежащих на комплексной плоскости. Точки  $\mu_S^1, \mu_S^2$  принадлежат пространству  $X_1, X_2, X_3$ , т.е. эти точки определены на сфере Римана. Из результатов подраздела 1.10 следует, что длина малой дуги на этой сфере, представляющая собой часть дуги большого круга, включающей центр сферы и точки  $\dot{\mu}_1, \dot{\mu}_2$ , является корректной мерой близости состояний поляризации соответствующих радиолокационных объектов. Поскольку в подразделе 1.10 была рассмотрена стереографическая проекция сферы Римана на круговую комплексную плоскость, то все точки комплексной плоскости радиолокационных объектов связаны с соответствующими точками поверхности сферы Римана уравнениями

$$\mu_{S1} = \frac{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T}{1 + |\dot{\mu}_T|^2}; \quad \mu_{S2} = \frac{\operatorname{Im} \dot{\mu}_T}{1 + |\dot{\mu}_T|^2}; \quad \mu_{S3} = \frac{|\dot{\mu}_T|^2}{1 + |\dot{\mu}_T|^2}.$$

Здесь величины  $\mu_{S1}, \mu_{S2}, \mu_{S3}$  есть координаты точки  $\mu_S$ , расположенной на поверхности сферы Римана. Эта точка представляет собой сферическое отображение радиолокационного объекта  $\dot{\mu}_T$ , который определен на комплексной плоскости радиолокационных объектов.

Запишем теперь выражение для сферической метрики [18], определяющее расстояние между сферическими отображениями  $\mu_S^1, \mu_S^2$  точек  $\dot{\mu}_T^1, \dot{\mu}_T^2$ , расположенных на комплексной плоскости радиолокационных объектов. Это расстояние определяется в трехмерном пространстве  $X_1, X_2, X_3$  как

$$\rho_S(\mu_S^1, \mu_S^2) = \frac{|\dot{\mu}_T^1 - \dot{\mu}_T^2|}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^1|^2} \sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^2|^2}}, \quad (5.33a)$$

где  $|\dot{\mu}_T^1 - \dot{\mu}_T^2|$  - евклидова метрика на множестве точек комплексной плоскости радиолокационных объектов.

В соответствии со свойствами сферической метрики бесконечно удаленная точка комплексной плоскости ( $\dot{\mu}_T = \infty$ ) будет отображена на северный полюс сферы Римана.

Определим расстояния между сферическими отображениями  $\mu_S^1, \mu_S^2$  двух точек комплексной плоскости радиолокационных объектов, а именно:  $\dot{\mu}_T^1 = 0$  (начало системы координат, соответствующее трехгранному уголкового отражателю) и  $\dot{\mu}_T^2 = \infty$  (бесконечно удаленная точка, соответствующая двугранному уголкового отражателю). Известно, что южный и северный полюсы сферы Римана отображаются в точки  $\dot{\mu}_T^1 = 0$  и  $\dot{\mu}_T^2 = \infty$  соответственно.

Перепишем выражение (5.33a) в виде:

$$\rho_S(\mu_S^1, \mu_S^2) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T^1 - \operatorname{Re} \dot{\mu}_T^2 + (\operatorname{Im} \dot{\mu}_T^1 - \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^2)^2}}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^1|^2} \sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^2|^2}}. \quad (5.33b)$$

После подстановки  $\dot{\mu}_T^1 = 0$  можно найти предел этого выражения при условии  $\dot{\mu}_T^2 \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\dot{\mu}_T^2 \rightarrow \infty} \rho_S(0, \mu_S^2) = \lim_{\dot{\mu}_T^2 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|\dot{\mu}_T^2|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^2|^2}} = \lim_{\dot{\mu}_T^2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + |\dot{\mu}_T^2|^{-2}}} = 1. \quad (5.33c)$$

Таким образом, расстояние между сферическими отображениями радиолокационных объектов  $\dot{\mu}_T^1 = 0$  (трехгранный УО) и  $\dot{\mu}_T^2 = \infty$  (двугранный УО) равно единице. Поскольку данные объекты образуют ортогональную пару, можно определить расстояние между сферическими отображениями  $\mu_S^1$  и  $\mu_S^{1ORT}$ , любой пары ортогональных объектов  $\dot{\mu}_T^1$  и  $\dot{\mu}_T^{1ORT}$ , представленных на комплексной плоскости. Затем, принимая во

внимание соотношению  $\dot{\mu}_T^{ORT} = -1/\dot{\mu}_T^* = -\dot{\mu}_T/|\dot{\mu}_T|^2$ , нетрудно показать, что отображение  $\dot{\mu}_T \rightarrow \mu_S^1, \dot{\mu}_T^{ORT} \rightarrow \mu_S^2$  дает

$$\begin{aligned} \rho_S(\mu_S^1, \mu_S^2) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T - \operatorname{Re} \dot{\mu}_T^{ORT} + (\operatorname{Im} \dot{\mu}_T - \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^{ORT})^2}}{\sqrt{1+|\dot{\mu}_T|^2} \sqrt{1+|\dot{\mu}_T^{ORT}|^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|\dot{\mu}_T|^2 + 1 + 1/|\dot{\mu}_T|^2}}{\sqrt{1+|\dot{\mu}_T|^2} \sqrt{1+1/|\dot{\mu}_T|^2}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Здесь были использованы свойства

$$\operatorname{Re} \dot{\mu}_T^{ORT} = -\operatorname{Re} \dot{\mu}_T / |\dot{\mu}_T|^2, \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^{ORT} = -\operatorname{Im} \dot{\mu}_T / |\dot{\mu}_T|^2.$$

Таким образом, сферическое расстояние между изображениями любой пары радиолокационных объектов (удаленность объектов), обладающих ортогональными поляризациями, равно единице. В случае совпадения изображающих точек расстояние между ними равно нулю. Для произвольной пары точек  $\dot{\mu}_T^1$  и  $\dot{\mu}_T^2$ , расположенных на комплексной плоскости радиолокационных объектов, расстояние между их сферическими изображениями  $\mu_S^1$  и  $\mu_S^2$  удовлетворяет условию:

$$0 \leq \rho_S(\mu_S^1, \mu_S^2) \leq 1. \quad (5.35)$$

Рассмотрим теперь понятие расстояния между сферическими изображениями  $\mu_S^1, \mu_S^2$  точек  $\dot{\mu}_T^1, \dot{\mu}_T^2$  комплексной плоскости радиолокационных объектов применительно к анализу близости поляризационных свойств радиолокационных объектов при их изображении точками этой плоскости (см. подраздел 5.6).

С этой целью найдем сферические расстояния между сферическим изображением  $\mu_S^0$  точки  $\dot{\mu}_T^0$ , которая соответствует произвольному радиолокационному объекту, и сферическими изображениями  $\mu_S^1, \mu_S^2$  пары точек  $\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T^{ORT}$ , соответствующих произвольной паре радиолокационных объектов, обладающих ортогональными состояниями поляризации.

Расстояние между сферическим изображением произвольного объекта  $\mu_S^0$  и сферическим изображением  $\mu_S^1$  (одного из пары объектов  $\dot{\mu}_T, \dot{\mu}_T^{ORT}$ ) определим в виде

$$\begin{aligned} \rho_S(\mu_S^0, \mu_S^1) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T^0 - \operatorname{Re} \dot{\mu}_T^2 + \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^0 - \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^2}}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^0|^2} \sqrt{1 + |\dot{\mu}_T|^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T|^2 - \dot{\mu}_T^{0*} \dot{\mu}_T + \dot{\mu}_T^0 \dot{\mu}_T^*}}{\sqrt{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T|^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (5.36a)$$

Расстояние между сферическими изображениями  $\mu_S^0$  и  $\mu_S^2$  определяется как:

$$\begin{aligned} \rho_S(\mu_S^0, \mu_S^2) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T^0 - \operatorname{Re} \dot{\mu}_T^{ORT^2} + (\operatorname{Im} \dot{\mu}_T^0 - \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^{ORT})^2}}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^0|^2} \sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re} \dot{\mu}_T^0 + \operatorname{Re} \dot{\mu}_T / |\dot{\mu}_T|^2 + \operatorname{Im} \dot{\mu}_T^0 + \operatorname{Im} \dot{\mu}_T / |\dot{\mu}_T|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{\mu}_T^0|^2} \sqrt{1 + 1/|\dot{\mu}_T|^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T|^2 + \dot{\mu}_T^{0*} \dot{\mu}_T + \dot{\mu}_T^0 \dot{\mu}_T^* + 1}}{\sqrt{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T|^2 + |\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T|^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (5.36b)$$

Близость состояний поляризации (5.30) для радиолокационных объектов, характеризуемых величинами  $\dot{\mu}_T^0$  и  $\dot{\mu}_T^{ORT}$ , имеет вид

$$N(\dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T^{ORT}) = \frac{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 + \dot{\mu}_T^{0*} \dot{\mu}_T^{ORT} + \dot{\mu}_T^0 \dot{\mu}_T^{ORT*} + 1}{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 + |\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 + 1}, \quad (5.37a)$$

а удаленность состояний поляризации этих объектов записывается как

$$\begin{aligned} N(\dot{\mu}_T^0, -1/\dot{\mu}_T^*) &= 1 - N(\dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T^{ORT}) = \\ &= \frac{|\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 - (\dot{\mu}_T^{0*} \dot{\mu}_T^{ORT} + \dot{\mu}_T^0 \dot{\mu}_T^{ORT*})}{|\dot{\mu}_T^0|^2 |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 + |\dot{\mu}_T^0|^2 + |\dot{\mu}_T^{ORT}|^2 + 1}. \end{aligned} \quad (5.37b)$$

Сравнивая выражения (5.37а,б) с соотношениями (5.36а,б) для сферических расстояний на сфере Римана, нетрудно видеть, что функция удаленности состояний поляризации радиолокационных объектов (5.37б) представляет собой квадрат расстояния между сферическими изображениями  $\mu_S^0, \mu_S^1$  точек  $\dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T$  комплексной плоскости радиолокационных объектов. Это вполне естественно, что квадрат расстояния между двумя точками сферических изображений представляет собой меру их удаленности друг от друга. Из выражения (5.37б) следует, что если величина удаленности состояний поляризации радиолокационных объектов равна нулю, то близость состояний поляризации этих объектов будет равна единице, что соответствует совпадению точек, изображающих эти объекты на комплексной плоскости. В случае если величина удаленности равна единице, это соответствует ортогональности поляризационных состояний радиолокационных объектов.

Напомним также, что близость состояний поляризации двух радиолокационных объектов не зависит от выбора поляризационного базиса, т.е. величина близости является инвариантной к поляризационному базису, как это было показано в Главе 1. Данное свойство обусловлено тем фактом, что расстояние между сферическими изображениями двух объектов на сфере Римана является инвариантным к выбору поляризационного базиса.

Выражение (5.37а) для близости состояний поляризации двух радиолокационных объектов  $N \dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T$  демонстрирует следующее: когда точка  $\dot{\mu}_T$  фиксирована, а точка  $\dot{\mu}_T^0$  перемещается таким образом, что расстояние между сферическими изображениями точек  $\dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T$  не изменяется, то точка  $\dot{\mu}_T^0$  перемещается по кругу, центром которого является точка  $\dot{\mu}_T$ . Таким образом, для различных значений близости состояний поляризации радиолокационных объектов  $N \dot{\mu}_T^0, \dot{\mu}_T$  будет иметь место семейство коаксиальных окружностей. На сфере Римана это семейство будет отображено набором коаксиальных окружностей, осью которых будет диаметр единичной

сферы, соединяющий ортогональные точки  $\mu_S^1, \mu_S^2$ . Этот результат может быть использован в задаче представления радиолокационного объекта, обладающего произвольным поляризационным состоянием, системой двух радиолокационных объектов, имеющих ортогональные состояния поляризации, представленные на сфере Римана.

Предположим теперь, что точки  $\dot{\mu}_T$  и  $\dot{\mu}_T^{ORT}$ , изображающие радиолокационные объекты на комплексной плоскости, совпадают с началом координат и бесконечно удаленной точкой соответственно. Близость произвольного состояния поляризации  $\dot{\mu}_T^0$  к состоянию поляризации  $\dot{\mu}_T$ , совпадающему с началом координат, может быть найдена с использованием уравнения (5.37а) в виде:

$$N \dot{\mu}_T^0, 0 = \frac{1}{1 + |\dot{\mu}_T^0|^2}. \quad (5.38)$$

Из выражения (5.38) следует, что состояния поляризации, которые являются равноотстоящими от состояния  $\dot{\mu}_T = 0$ , лежат на окружности с центром в начале координат.

Поскольку южный полюс сфер Римана касается комплексной плоскости радиолокационных объектов в начале координат  $\dot{\mu}_T = 0$ , то, используя северный полюс сферы Римана в качестве центра стереографической проекции, можно соединить каждую точку  $\dot{\mu}_T^0$  комплексной плоскости радиолокационных объектов с северным полюсом сферы прямой, пересекающей поверхность сферы в единственной точке  $\mu_S^0$ . Здесь необходимо напомнить еще раз, что точка  $\mu_S^0$  есть точка в действительном трехмерном пространстве и не является комплексным числом. В данной ситуации начало координат комплексной плоскости радиолокационных объектов  $\dot{\mu}_T = 0$  отображается в южный полюс сферы ( $\dot{\mu}_T \rightarrow \mu_S^1$ ), что следует из Рис. 5.3.

Бесконечно удаленная точка  $\dot{\mu}_T^{ORT}$  комплексной плоскости радиолокационных объектов отображается на северный полюс сферы Римана,

представляющий собой центр стереографической проекции. Здесь необходимо напомнить, что южный и северный полюсы сферы Римана отвечают радиолокационным объектам в виде трехгранного и двугранного уголкового отражателей соответственно. Нетрудно видеть, что на Рис. 5.3 изображен большой круг, представляющий сечение сферы Римана плоскостью, включающей точки  $\mu_S^1, \mu_S^0, \mu_S^2$ . Из элементарной тригонометрии следует, что величина некоторого вписанного угла определяется половиной центрального угла, соответствующего дуге, стягиваемой вписанным углом.

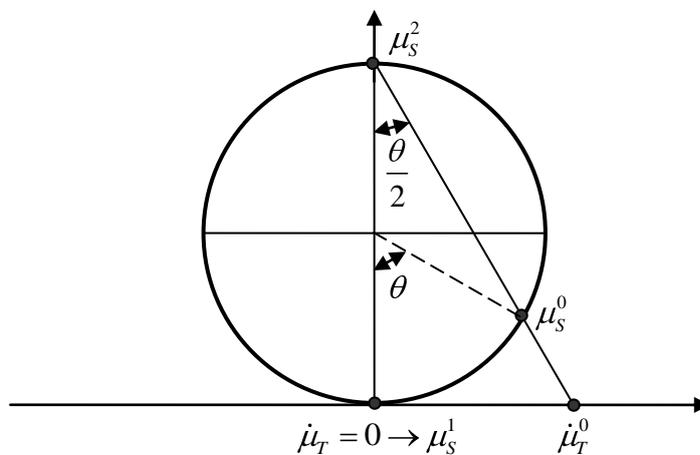


Рис. 5.3

Тогда, если величина центрального угла определяется дугой  $(\mu_S^1, \mu_S^0)$ , то из треугольника  $\mu_S^1, \mu_S^2, \dot{\mu}_T^0$  (см Рис.5.3) следует, что

$$|\dot{\mu}_T^0| = \operatorname{tg} \theta/2, \quad (5.39)$$

поскольку диаметр сферы Римана есть единица. Подстановка величины  $|\dot{\mu}_T^0|$  из уравнения (5.39) в выражение (5.38) дает значение близости состояний поляризации радиолокационных объектов

$$N(\dot{\mu}_T^0, 0) = N(\mu_S^1, \mu_S^0) = \cos^2 \theta/2. \quad (5.40)$$

Таким образом, интенсивность проекции состояния поляризации, представленного точкой  $\mu_S^0$  на сфере Римана, на базисное состояние поляризации  $\mu_S^1$ , определяется квадратом значения косинуса половины

центрального угла. Этот центральный угол стягивает меньшую из двух дуг большого круга, проходящего через точки  $\mu_S^0$  and  $\mu_S^1$ .

Удаленность состояний поляризации радиолокационных объектов может быть определена как

$$\begin{aligned} R \dot{\mu}_T^0, 0 &= 1 - N \dot{\mu}_T^0, 0 = \\ &= 1 - N \mu_S^0, \mu_S^1 = R \mu_S^0, \mu_S^1 = \sin^2 \theta / 2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

и определяется квадратом сферического расстояния между точками  $\mu_S^0$  и  $\mu_S^1$ . Эта величина может быть найдена также с использованием условия единичной интенсивности анализируемой волны и известного выражения  $\cos^2 \theta / 2 + \sin^2 \theta / 2 = 1$ .

### 5.8. Упрощенное обоснование понятия близости состояний поляризации

В подразделе 1.9 было показано, что произвольное состояние поляризации волны, характеризуемой поляризационным отношением  $\dot{P}_1$  и обладающей единичной интенсивностью  $I$ , может быть разложено в ортогональном эллиптическом базисе  $\dot{P}, \dot{P}_{ORT}$  на две составляющие  $\dot{E}, \dot{E}_{ORT}$ , характеризуемые поляризационными отношениями  $\dot{P}$  и  $\dot{P}_{ORT}$ . Интенсивность этих составляющих представляет собой доли  $I_1$  и  $I_2$  полной интенсивности волны  $I$ . Следуя Аззаму и Башаре [14], величины  $I_1$  и  $I_2$  были определены соотношениями (1.77)

$$I_1 = \frac{q}{q + S^2}; \quad I_2 = \frac{S^2}{q + S^2};$$

где

$$I_1 + I_2 = I = 1, q = \left| \dot{P} \right| / \left| \dot{P}_{ORT} \right|,$$

а величина  $S$  определяется отношением расстояний между точками  $\dot{P}_1$  и  $\dot{P}_{ORT}$ :

$$S = \frac{S(\dot{P}_1 \dot{P})}{S(\dot{P}_1 \dot{P}_{ORT})} = \frac{|\dot{P}_1 - \dot{P}|}{|\dot{P}_1 - \dot{P}_{ORT}|}.$$

Данные результаты основаны на анализе состояния поляризации волн и соответствующих им интенсивностей при представлении на комплексной плоскости. Величины  $I_1$  и  $I_2$  определяют функцию близости состояний поляризации  $I_1 = N$  и функцию удаленности состояний поляризации  $I_2 = 1 - N$  соответственно [14]. Физический смысл близости и удаленности состояния поляризации некоторой волны, характеризуемой комплексным вектором  $\dot{E}_1$ , от состояний поляризации единичных ортов  $\dot{E}$ ,  $\dot{E}_{ORT}$  некоторого ортогонального базиса состоит в том, что эти величины представляют собой интенсивность проекций волны  $\dot{E}_1$  на орты данного базиса (Рис.5.4).

Физически выделение проекции комплексного вектора некоторой волны на заданное направление (в общем случае также характеризуемое комплексным вектором) реализуется с использованием специального класса приборов, называемых поляризаторами. С точки зрения математики эти приборы представляют собой так называемые проекторы, а их матрицы Джонса обладают специальными проекционными свойствами (см Главу 3).

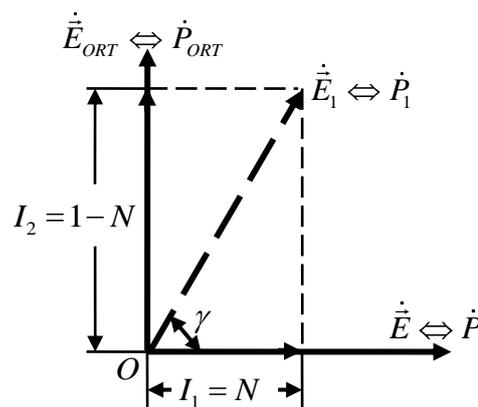


Рис.5.4

Использование проекционных свойств поляризаторов позволяет провести упрощенный анализ понятия близости (удаленности) состояний поляризации.

### 5.8.1. Амплитудная передаточная функция простого прибора. Квадрат модуля амплитудной передаточной функции.

Рассмотрим метод разделения информации об эллипсе поляризации рассеянной волны и об его полной комплексной амплитуде, следуя [14]. Этот метод уже был использован для анализа поляризационно – амплитудных передаточных функций радиолокационного объекта в четвертой главе (см подраздел 4.8). Запишем двухкомпонентный вектор Джонса некоторой исходной волны в виде

$$\dot{\vec{E}}_1 = \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_1^1 \\ \dot{E}_1^2 \end{array} \right\|, \quad (5.42)$$

где  $\dot{E}_1^1, \dot{E}_1^2$  - комплексные амплитуды проекций комплексного вектора  $\dot{\vec{E}}_1$  на орты используемого базиса. Для ортонормальных базисных векторов интенсивность излучаемой волны определяется соотношением

$$\dot{\vec{E}}_1^+ \dot{\vec{E}}_1 = \dot{E}_1^{1*} \dot{E}_1^1 + \dot{E}_1^{2*} \dot{E}_1^2 = |\dot{E}_1^1|^2 + |\dot{E}_1^2|^2.$$

Поскольку поляризационное отношение  $\dot{P}_1$  в используемом базисе имеет вид  $\dot{P}_1 = \dot{E}_1^2 / \dot{E}_1^1$ , то вектор (5.42) можно записать как

$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{E}_1^1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{P}_1 \end{array} \right\|. \quad (5.43)$$

Переписывая выражение (5.43) в виде

$$\dot{\vec{E}}_1 = \frac{\dot{E}_1^1 \sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \dot{P}_1 \end{array} \right\|,$$

нетрудно видеть, что величина

$$\dot{A}_1 = \dot{E}_1^1 \sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}$$

есть не что иное, как полная комплексная амплитуда эллиптически поляризованной волны, поскольку

$$\dot{\vec{E}}_1^+ \dot{\vec{E}}_1 = \dot{A}_1 \dot{A}_1^* = \dot{E}_1^1 \dot{E}_1^{1*} (1 + |\dot{P}_1|^2) = |\dot{E}_1^1|^2 + |\dot{E}_1^2|^2.$$

Учитывая это, вектор Джонса (5.43) можно представить в виде

$$\dot{\vec{E}}_1 = \frac{\dot{A}_1}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}} \left\| \begin{matrix} 1 \\ \dot{P}_1 \end{matrix} \right\|. \quad (5.44)$$

В выражении (5.44) информация об эллипсе поляризации, содержащаяся в поляризационном отношении  $\dot{P}_1$ , отделена от информации о полной комплексной амплитуде эллиптически поляризованной волны, содержащейся в величине  $\dot{A}_1$ .

Влияние простого прибора на волну  $\dot{\vec{E}}_1$  описывается преобразованием

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \left\| \dot{d}_{jl} \right\| \dot{\vec{E}}_1, \quad (5.45)$$

где  $\left\| \dot{d}_{jl} \right\|$  - матрица Джонса прибора. Чтобы рассмотреть воздействие прибора на поляризационное отношение входной волны  $\dot{P}_1$  и её полную комплексную амплитуду  $\dot{A}_1$  по отдельности, подставим выражение (5.42) в соотношение (5.45). Тогда вектор Джонса волны на выходе прибора можно записать в виде

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \frac{\dot{A}_1}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}} \left\| \begin{matrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{21} & \dot{d}_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ \dot{P}_1 \end{matrix} \right\| = \frac{\dot{A}_1}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}} \left\| \begin{matrix} \dot{d}_{11} + \dot{d}_{12} \dot{P}_1 \\ \dot{d}_{21} + \dot{d}_{22} \dot{P}_1 \end{matrix} \right\|, \quad (5.46a) \text{ или}$$

$$\dot{\vec{E}}_{OUT} = \frac{\dot{A}_{OUT}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_{OUT}|^2}} \left\| \begin{matrix} 1 \\ \dot{P}_{OUT} \end{matrix} \right\|, \quad (5.46.б)$$

где величина

$$\dot{P}_{OUT} = \frac{\dot{d}_{22} \dot{P}_1 + \dot{d}_{21}}{\dot{d}_{12} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}} \quad (5.47)$$

представляет собой поляризационное отношение для волны на выходе прибора, которое описывает только поляризационные свойства этой волны, а выражение

$$\dot{A}_{OUT} = \frac{\sqrt{1 + |\dot{P}_{OUT}|^2}}{\sqrt{1 + |\dot{P}_1|^2}} \dot{d}_{11} + \dot{d}_{12} \dot{P}_1 \dot{A}_1 \quad (5.48)$$

дает закон преобразования комплексной амплитуды входной волны при прохождении через простой прибор. Это выражение можно переписать как

$$\dot{A}_{OUT} = \dot{F} \dot{P}_1 \dot{A}_1, \quad (5.49)$$

откуда следует, что полная комплексная амплитуда волны на выходе прибора представляет собой произведение полной амплитуды входной волны на величину

$$\dot{F} \dot{P}_1 = \sqrt{\frac{1 + |\dot{P}_{OUT}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2}} \dot{d}_{12} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}, \quad (5.50)$$

которую можно интерпретировать как передаточную функцию простого прибора для комплексной амплитуды входной волны [14].

Таким образом, воздействие простого прибора на амплитуду и фазу входной волны зависит от состояния поляризации этой волны.

Дробно-линейное преобразование (5.47), описывающее преобразование поляризационного отношения излучаемой волны, можно интерпретировать как поляризационную передаточную функцию простого прибора. Подставляя соотношение (5.47) в выражение (5.50) для передаточной функции, получим окончательно:

$$\dot{F} \dot{P}_1 = \left[ \frac{|\dot{d}_{12} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}|^2 + |\dot{d}_{22} \dot{P}_1 + \dot{d}_{21}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2} \right]^{0.5} \frac{\dot{d}_{12} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}}{|\dot{d}_{12} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}|}. \quad (5.51a)$$

Модуль этой функции

$$|\dot{F} \dot{P}_1| = \left[ \frac{|\dot{d}_{12}\dot{P}_1 + \dot{d}_{11}|^2 + |\dot{d}_{22}\dot{P}_1 + \dot{d}_{21}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2} \right]^{0.5} \quad (5.51б)$$

характеризует полную амплитуду эллиптически поляризованного колебания на выходе прибора, а её аргумент

$$\arg \dot{F} \dot{P}_1 = \arg \dot{d}_{12}\dot{P}_1 + \dot{d}_{11} \quad (5.51в)$$

определяет фазу этого колебания, т.е. положение электрического вектора в определенный момент времени.

Воздействие простого прибора на интенсивность входной волны описывается квадратом модуля амплитудной передаточной функции

$$|\dot{F} \dot{P}_1|^2 = \frac{|\dot{d}_{12}\dot{P}_1 + \dot{d}_{11}|^2 + |\dot{d}_{22}\dot{P}_1 + \dot{d}_{21}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2}. \quad (5.51г)$$

Рассмотрим теперь проблему собственных поляризаций простого прибора в задаче определения собственных значений передаточной функции комплексной амплитуды и синтеза матрицы Джонса этого прибора.

**5.8.2. Собственные поляризации простого прибора. Собственные значения передаточных функций комплексной амплитуды и интенсивности.**

Как было отмечено в подразделе 3.6, любое дробно – линейное преобразование обладает двумя фиксированными (инвариантными) точками  $(\dot{P}_1^E, \dot{P}_2^E)$ , которые при определенных условиях могут совпадать.

Применительно к преобразованиям поляризации плоских волн простыми приборами это свойство можно трактовать следующим образом: каждый простой прибор обладает двумя поляризациями, которые не изменяются при прохождении волны через этот прибор. Эти поляризации соответствуют упомянутым инвариантным точкам дробно – линейного преобразования и

называются собственными поляризациями прибора. Математическое определение поляризационного отношения волн, отвечающих собственным поляризациям, вводится на основе общей записи дробно – линейного преобразования (3.35) с использованием условия неизменности состояния поляризации выходной волны по сравнению с состоянием поляризации входной волны:  $\dot{P}_{INP} = \dot{P}_{OUT} = \dot{P}^E$ . Тогда

$$\dot{P}^E{}^2 = \dot{d}_{21} + \dot{d}_{22}\dot{P}^E \quad \dot{d}_{11} + \dot{d}_{12}\dot{P}^E{}^{-1},$$

откуда можно получить квадратное уравнение

$$\dot{d}_{12} \dot{P}^E{}^2 + \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22} \dot{P}^E - \dot{d}_{21} = 0,$$

корни которого представляют собой поляризационные отношения для собственных поляризаций прибора:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{1,2}^E &= \frac{1}{2\dot{d}_{12}} \left[ \dot{d}_{22} - \dot{d}_{11} \pm \left[ (\dot{d}_{22} - \dot{d}_{11})^2 + 4\dot{d}_{12}\dot{d}_{21} \right]^{0.5} \right] = \\ &= \frac{1}{2\dot{d}_{12}} \left\{ \dot{d}_{22} - \dot{d}_{11} \pm \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22} \sqrt{1 - \frac{4 \det \|D\|}{Sp^2 \|D\|}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Здесь  $\det \|D\| = \dot{d}_{11}\dot{d}_{22} - \dot{d}_{12}\dot{d}_{21}$ ;  $Sp \|D\| = \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22}$ .

Собственные поляризации совпадают при выполнении условия  $1 - 4 \det \|D\| / Sp^2 \|D\| = 0$ . Если это условие не выполняется, то собственные поляризации различны.

Связанные с собственными поляризациями собственные значения передаточной функции комплексной амплитуды можно определить, подставляя значения  $\dot{P}_{INP} = \dot{P}_{OUT} = \dot{P}^E$  в выражение (4.84), которое для рассматриваемого случая может быть записано в виде

$$\dot{F} \dot{P}_{INP} = \left( \frac{1 + \dot{P}_{OUT} \dot{P}_{OUT}^*}{1 + \dot{P}_{INP} \dot{P}_{INP}^*} \right)^{0.5} \dot{d}_{12} \dot{P}_{INP} + \dot{d}_{11}.$$

Тогда

$$\dot{F}_{1,2}^E = \dot{F} \dot{P}_{1,2}^E = \dot{d}_{12} \dot{P}_{1,2}^E + \dot{d}_{11}. \quad (5.53)$$

Подставляя выражения (5.52) для собственных поляризаций в уравнение (5.53), получим собственные значения передаточной функции комплексной амплитуды в виде

$$\dot{F}_{1,2}^E = 0,5 \dot{d}_{22} + \dot{d}_{11} \pm \left[ (\dot{d}_{22} - \dot{d}_{11})^2 + 4\dot{d}_{12}\dot{d}_{21} \right]^{0,5}. \quad (5.54)$$

Решим теперь обратную задачу, т.е. найдем элементы матрицы Джонса простого прибора, используя известные собственные поляризации  $\dot{P}_{1,2}^E$  и собственные значения передаточной функции комплексной амплитуды  $\dot{F}_{1,2}^E$ . Используя выражение (5.53), запишем два линейных уравнения

$$\dot{F}_1^E = \dot{d}_{12}\dot{P}_1^E + \dot{d}_{11}; \quad \dot{F}_2^E = \dot{d}_{12}\dot{P}_2^E + \dot{d}_{11},$$

позволяющие найти элементы  $\dot{d}_{11}$  и  $\dot{d}_{12}$ :

$$\dot{d}_{12} = \dot{F}_1^E - \dot{F}_2^E \dot{P}_1^E - \dot{P}_2^E^{-1}, \quad (5.55a)$$

$$\dot{d}_{11} = \dot{F}_2^E \dot{P}_1^E - \dot{F}_1^E \dot{P}_2^E \dot{P}_1^E - \dot{P}_2^E^{-1}. \quad (5.55b)$$

Из выражения (5.54) следует, что

$$\dot{F}_1^E + \dot{F}_2^E = \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22}.$$

Используя это выражение и соотношения (5.55), запишем уравнение

$$\dot{d}_{12} \dot{P}_1^E + \dot{P}_2^E + 2\dot{d}_{11} = \dot{d}_{11} + \dot{d}_{22},$$

решение которого дает элемент  $\dot{d}_{22}$ :

$$\dot{d}_{22} = \dot{F}_1^E \dot{P}_1^E - \dot{F}_2^E \dot{P}_2^E \dot{P}_1^E - \dot{P}_2^E^{-1}. \quad (5.55b)$$

Из выражений (5.52) для собственных поляризаций прибора следует, что

$$\dot{d}_{21} = -\dot{d}_{12} \dot{P}_1^E \dot{P}_2^E, \text{ т. е.}$$

$$\dot{d}_{21} = - \dot{P}_1^E \dot{P}_2^E \dot{F}_1^E - \dot{F}_2^E \dot{P}_1^E - \dot{P}_2^E^{-1}. \quad (5.55г)$$

Таким образом, использование собственных поляризаций и собственных значений передаточной функции комплексной амплитуды позволяет определить все элементы матрицы Джонса простого прибора.

### 5.8.3. Матрица Джонса идеального эллиптического поляризатора.

Идеальный эллиптический поляризатор обладает ортогональными собственными эллиптическими поляризациями  $\dot{P}^E$  и  $\dot{P}_{ORT}^E$ . Отвечающие этим поляризациям собственные значения передаточной функции комплексной амплитуды (или просто – собственные значения)  $\dot{F}^E$  и  $\dot{F}_{ORT}^E$  равны единице и нулю соответственно. В данной ситуации волна, поляризация которой совпадает с собственной поляризацией прибора  $\dot{P}^E$ , пропускается без потерь  $\dot{F}^E = 1$ , а волна, поляризация которой совпадает со второй собственной поляризацией прибора  $\dot{P}_{ORT}^E$ , гасится полностью  $\dot{F}^E = 0$ . Подставляя эти собственные значения и собственные поляризации в выражения (5.55) для элементов матрицы Джонса и учитывая условие ортогональности  $\dot{P}^E \dot{P}_{ORT}^E = -1$ , найдем матрицу Джонса идеального эллиптического поляризатора в виде

$$\|D\| = 1 + \dot{P}^E \dot{P}^{E*} \begin{vmatrix} 1 & \dot{P}^{E*} \\ \dot{P}^E & \dot{P}^E \dot{P}^{E*} \end{vmatrix}. \quad (5.56)$$

Нетрудно видеть, что детерминант этой матрицы равен нулю  $\det \|D\| = 0$ , а её квадрат равен самой матрице  $\|D\|^2 = \|D\|$ . Выполнение этих условий свидетельствует о том, что матрица Джонса идеального поляризатора представляет собой проектор. Физически действие проектора можно пояснить следующим образом: некоторая входная волна, характеризуемая комплексным вектором  $\dot{E}_1$  и обладающая эллипсом поляризации с определенными значениями угла эллиптичности и угла ориентации, может быть представлена суммой двух ортогональных эллиптически поляризованных волн (с различными амплитудами) в ортогональном эллиптическом поляризационном

базисе, образованном собственными поляризациями поляризатора. При этом волна, эллипс поляризации которой совпадает с осью пропускания, будет пропущена без потерь, а волна, поляризация которой совпадает с осью гашения, будет полностью погашена. Амплитуда волны, пропущенной без потерь, определяется проекцией комплексного вектора  $\dot{\vec{E}}_1$  на комплексный вектор  $\dot{\vec{E}}^E$ , отвечающий поляризации оси пропускания. Подробнее эта операция будет рассмотрена ниже.

Найдем теперь элементы оператора Джонса (5.56) в явном виде, подставив в это выражение поляризационное отношение для волны, отвечающей оси пропускания

$$\dot{p}^E = \frac{\cos \alpha_E \sin \beta_E + j \sin \alpha_E \cos \beta_E}{\cos \alpha_E \cos \beta_E - j \sin \alpha_E \sin \beta_E}.$$

Здесь  $\alpha_E$  и  $\beta_E$  - угол эллиптичности и азимут собственной поляризации, отвечающей оси пропускания, а поляризационное отношение определено в декартовом поляризационном базисе. В итоге оператор Джонса можно записать как

$$\|D\| = \begin{vmatrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{21} & \dot{d}_{22} \end{vmatrix}, \quad (5.57)$$

где

$$\dot{d}_{11} = \cos^2 \alpha_E \cos^2 \beta_E + \sin^2 \alpha_E \sin^2 \beta_E; \quad (5.58a)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{12} = & \cos \alpha_E \cos \beta_E - j \sin \alpha_E \sin \beta_E \times \\ & \times \cos \alpha_E \sin \beta_E - j \sin \alpha_E \cos \beta_E; \end{aligned} \quad (5.58б)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{21} = \dot{d}_{12}^* = & \cos \alpha_E \cos \beta_E + j \sin \alpha_E \sin \beta_E \times \\ & \times \cos \alpha_E \sin \beta_E + j \sin \alpha_E \cos \beta_E; \end{aligned} \quad (5.58в)$$

$$\dot{d}_{22} = \cos^2 \alpha_E \sin^2 \beta_E + \sin^2 \alpha_E \cos^2 \beta_E. \quad (5.58г)$$

Принимая  $\alpha_E = 0$ , можно получить матрицу Джонса идеального линейного поляризатора в виде

$$\|D_{LIN}\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos^2 \beta_E & \cos \beta_E \sin \beta_E \\ \cos \beta_E \sin \beta_E & \sin^2 \beta_E \end{array} \right\|, \quad (5.59)$$

что согласуется с результатами Главы 3.

Матрица Джонса идеального эллиптического поляризатора в круговом поляризационном базисе может быть найдена подстановкой кругового поляризационного отношения

$$\dot{P}_{RL}^E = \operatorname{tg} \alpha_E + \pi/4 \exp -j2\beta_E,$$

отвечающего оси пропускания, в выражение (5.56):

$$\|D_{RL}\| = \left\| \begin{array}{cc} C_{\alpha_E + \pi/4}^2 & 0.5S_{2\alpha_E + \pi/4} \exp j2\beta_E \\ 0.5S_{2\alpha_E + \pi/4} \exp -j2\beta_E & S_{\alpha_E + \pi/4}^2 \end{array} \right\|, \quad (5.60)$$

где  $\alpha_E$  и  $\beta_E$ , как и ранее, определяют угол эллиптичности и азимут эллиптического состояния собственной поляризации, отвечающей оси пропускания.

#### ***5.8.4. Разложение эллиптически поляризованной волны в ортогональном базисе, образованном осями пропускания двух идеальных ортогональных эллиптических поляризаторов. Простейшее обоснование к введению понятия близости (удаленности) состояний поляризации.***

Как уже было указано выше, комплексный вектор волны на выходе идеального эллиптического поляризатора представляет собой проекцию комплексного вектора эллиптически поляризованной входной волны, характеризуемой углом эллиптичности  $\alpha$  и азимутом  $\beta$ , на комплексный вектор, отвечающий оси пропускания этого поляризатора. Величина комплексной амплитуды выходной волны определяется значением передаточной функции (5.49), которая, в свою очередь, зависит как от величин элементов матрицы Джонса идеального эллиптического поляризатора, так и от параметров эллипса поляризации входной волны, характеризуемой некоторым поляризационным отношением. Интенсивность выходной волны (проекции)

определяется квадратом модуля комплексной амплитуды, а функция передачи интенсивности, зависящая от параметров эллипсов поляризации входной волны и оси пропускания, определяется выражением (5.51г).

В соответствии с результатами Аззама и Башары [14], величина близости состояний поляризации двух эллиптически поляризованных волн определяется интенсивностью (квадратом модуля) проекции комплексного вектора одной из волн на комплексный вектор второй волны, как это уже упоминалось. Однако анализ разложения эллиптически поляризованной волны в ортогональном базисе, необходимый для введения данного понятия, проводился в [14] на комплексной плоскости и является весьма громоздким.

Ниже будет показано, что анализ разложения эллиптически поляризованной волны в ортогональном базисе, образованном осями пропускания двух идеальных ортогональных эллиптических поляризаторов, является несложным и дает простейшее обоснование для введения понятия близости (удаленности) состояний поляризации.

Зададим ортогональный эллиптический базис, образованный эллипсами поляризации ортогонально поляризованных волн, характеризуемых поляризационными отношениями  $\dot{P}^E$  и  $\dot{P}_{ORT}^E$ . Предположим, что указанные волны соответствуют осям пропускания двух ортогональных эллиптических поляризаторов, обладающих матрицами Джонса  $\|D\|$  и  $\|D_{ORT}\|$  соответственно. Матрица Джонса  $\|D\|$  определяется соотношением (5.56), которое перепишем здесь для удобства:

$$\|D\| = 1 + \dot{P}^E \dot{P}^{E*}{}^{-1} \left\| \begin{array}{c} 1 & \dot{P}^{E*} \\ \dot{P}^E & \dot{P}^E \dot{P}^{E*} \end{array} \right\|.$$

Запишем теперь матрицу Джонса эллиптического поляризатора, ось пропускания которого ортогональна к оси пропускания поляризатора (5.56):

$$\|D_{ORT}\| = 1 + \dot{P}_{ORT}^E \dot{P}_{ORT}^{E*}{}^{-1} \left\| \begin{array}{c} 1 & \dot{P}_{ORT}^{E*} \\ \dot{P}_{ORT}^E & \dot{P}_{ORT}^E \dot{P}_{ORT}^{E*} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \dot{d}_{11}^{ORT} & \dot{d}_{12}^{ORT} \\ \dot{d}_{21}^{ORT} & \dot{d}_{22}^{ORT} \end{array} \right\|. \quad (5.61)$$

Принимая во внимание условия

$$\dot{P}_{ORT}^E = -\frac{1}{\dot{P}^{E*}} = -\frac{\dot{P}^E}{|\dot{P}^E|^2}; \dot{P}_{ORT}^{E*} = -\frac{\dot{P}^{E*}}{|\dot{P}^E|^2}; \dot{P}_{ORT}^E \cdot \dot{P}_{ORT}^{E*} = \frac{1}{|\dot{P}^E|^2}$$

$$1 + |\dot{P}_{ORT}^E|^2 = \frac{1 + |\dot{P}^E|^2}{|\dot{P}^E|^2}; 1 + |\dot{P}_{ORT}^E|^2^{-1} = \frac{|\dot{P}^E|^2}{1 + |\dot{P}^E|^2},$$

получим

$$\|D_{ORT}\| = 1 + |\dot{P}^E|^2^{-1} \left\| \begin{array}{cc} |\dot{P}^E|^2 & -\dot{P}^{E*} \\ -\dot{P}^E & 1 \end{array} \right\|. \quad (5.62)$$

Зададим теперь эллиптически поляризованную волну, характеризующую поляризационным отношением  $\dot{P}_1$  и пропустим её через систему ортогональных эллиптических поляризаторов  $\|D\|, \|D_{ORT}\|$ . Тогда комплексные векторы волн на выходе этих поляризаторов будут представлять собой проекции комплексного вектора входной волны, характеризующейся поляризационным отношением  $\dot{P}_1$  на собственные векторы осей пропускания ортогональной системы эллиптических поляризаторов, характеризующихся поляризационными отношениями  $\dot{P}^E$  и  $\dot{P}_{ORT}^E$ . Таким образом, волна  $\dot{P}_1$  разложена в ортогональном эллиптическом базисе, орты которого являются осями пропускания поляризаторов, характеризующихся поляризационными отношениями  $\dot{P}^E, \dot{P}_{ORT}^E$ .

Найдем теперь интенсивность проекций комплексного вектора входной волны на собственные оси поляризаторов, т.е. интенсивность волн на выходах поляризаторов, используя функцию передачи интенсивности (5.51г). Тогда, для проекции волны, характеризующейся поляризационным отношением  $\dot{P}_1$ , на орт  $\dot{P}^E$  получим

$$|\dot{P} \cdot \dot{P}_1|^2 = I_1 = \frac{|\dot{d}_{12}\dot{P}_1 + \dot{d}_{11}|^2 + |\dot{d}_{22}\dot{P}_1 + \dot{d}_{21}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2}. \quad (5.63)$$

Здесь величины  $\dot{d}_{11}, \dot{d}_{12}, \dot{d}_{21}, \dot{d}_{22}$  есть элементы матрицы Джонса (5.56) идеального эллиптического поляризатора, ось пропускания которого

характеризуется поляризационным отношением  $\dot{P}^E$ . Подставляя значения элементов матрицы Джонса (5.56) в соотношение (5.63), после несложных преобразований получим

$$I_1 = \frac{|\dot{P}^E|^2 |\dot{P}_1|^2 + \dot{P}^E \dot{P}_1^* + \dot{P}^{E*} \dot{P}_1 + 1}{|\dot{P}^E|^2 |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}^E|^2 + |\dot{P}_1|^2 + 1}. \quad (5.64a)$$

Нетрудно видеть, что выражение (5.64a) есть не что иное, как близость состояний поляризации  $\dot{P}^E$  и  $\dot{P}_1$ , т.е.

$$I_1 = N. \quad (5.64b)$$

Интенсивность проекции волны, характеризуемой поляризационным отношением  $\dot{P}_1$ , на орт  $\dot{P}_{ORT}^E$  определяется выражением

$$|\dot{F} \dot{P}_1|^2 = I_2 = \frac{|\dot{d}_{12}^{ORT} \dot{P}_1 + \dot{d}_{11}^{ORT}|^2 + |\dot{d}_{22}^{ORT} \dot{P}_1 + \dot{d}_{21}^{ORT}|^2}{1 + |\dot{P}_1|^2}, \quad (5.65)$$

где  $\dot{d}_{11}^{ORT}, \dot{d}_{12}^{ORT}, \dot{d}_{21}^{ORT}, \dot{d}_{22}^{ORT}$  есть элементы матрицы Джонса (5.61) идеального эллиптического поляризатора, ось пропускания которого характеризуется поляризационным отношением  $\dot{P}_{ORT}^E$ . Подставляя эти величины в выражение (5.65), получим

$$I_2 = \frac{|\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}^E|^2 - \dot{P}^E \dot{P}_1^* - \dot{P}^{E*} \dot{P}_1}{|\dot{P}^E|^2 |\dot{P}_1|^2 + |\dot{P}^E|^2 + |\dot{P}_1|^2 + 1}. \quad (5.66a)$$

Сравнивая выражения (5.64a,б) и (5.66a), видим, что

$$I_2 = 1 - I_1 = 1 - N = D. \quad (5.66b)$$

Отсюда следует, что выражение (5.64a) определяет удаленность состояний поляризации  $\dot{P}^E$  и  $\dot{P}_1$ , или близость поляризаций  $\dot{P}_{ORT}^E$  и  $\dot{P}_1$ .

Таким образом, проведенный анализ позволяет ввести понятия близости и удаленности состояний поляризации с использованием простых методов анализа, имеющих ясный физический смысл.

Геометрическая интерпретация понятия близости (удаленности) состояний поляризации в трехмерном поляризационном пространстве абсолютно идентична интерпретации, рассмотренной в подразделе 5.7.

### ***5.8.5 Использование понятия Стоксова пространства для определения близости состояний поляризации***

Как было показано в Главе 3, комплексный вектор волны на выходе идеального эллиптического поляризатора представляет собой проекцию комплексного вектора эллиптически поляризованной входной волны, характеризуемой геометрическими параметрами  $\alpha, \beta$ , на единственный комплексный собственный вектор, соответствующий оси пропускания поляризатора. Интенсивность этой проекции определяется квадратом её комплексной амплитуды  $I$ , в соответствии с результатами подраздела 5.8.4, определяет близость состояния поляризации входной волны к состоянию поляризации единственного собственного вектора эллиптического поляризатора. Для аналитического определения близости состояний поляризации в этом подразделе были использованы передаточные функции комплексной амплитуды и мощности, отвечающие эллиптическому поляризатору.

Однако, ещё более простая возможность определения близости состояний поляризации может быть рассмотрена с использованием понятия Стоксова пространства в задаче преобразования поляризации плоских волн простыми приборами (см. подраздел 3.15, Глава 3).

В соответствии с результатами этого подраздела, интенсивность волны на выходе некоторого простого прибора (или последовательности простых приборов) может быть определена как скалярное произведение двух векторов Стокса в 4 – мерном Стоксовом пространстве. При этом один из векторов Стокса представляет собой так называемый «аппаратный» вектор Стокса, характеризующий поляризационные свойства прибора. Этот вектор

определяется разложением матрицы Джонса простого прибора по системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей. Второй вектор Стокса соответствует волне на входе прибора.

Запишем аппаратный вектор Стокса идеального эллиптического поляризатора в виде

$$\vec{S}^E = S_0^E \quad S_1^E \quad S_2^E \quad S_3^E . \quad (5.67)$$

Элементы этого вектора определяются разложением матрицы Джонса идеального эллиптического поляризатора

$$\|D\| = (1 + |\dot{P}^E|^2) \left\| \begin{array}{cc} 1 & \dot{P}^{E*} \\ \dot{P}^E & |\dot{P}^E|^2 \end{array} \right\|$$

по системе матриц Паули  $\hat{\sigma}_k; (k = 0, 1, 2, 3)$ :

$$\begin{aligned} S_0^E &= Sp[\hat{\sigma}_0 \|D\|] = 1; \quad S_1^E = Sp[\hat{\sigma}_1 \|D\|] = (1 - |\dot{P}^E|^2) / (1 + |\dot{P}^E|^2); \\ S_2^E &= Sp[\hat{\sigma}_2 \|D\|] = (\dot{P}^E + \dot{P}^{E*}) / (1 + |\dot{P}^E|^2) = 2 \operatorname{Re} \dot{P}^E / (1 + |\dot{P}^E|^2); \\ S_3^E &= Sp[\hat{\sigma}_3 \|D\|] = j(\dot{P}^E - \dot{P}^{E*}) / (1 + |\dot{P}^E|^2) = 2 \operatorname{Im} \dot{P}^E / (1 + |\dot{P}^E|^2), \end{aligned} \quad (5.68)$$

где  $\dot{P}^E$  есть поляризационное отношение, характеризующее собственный вектор эллиптического поляризатора.

Вектор Стокса входной волны, в соответствии с выражением (1.94), имеет вид

$$\vec{S}^{INP} = S_0^{INP} \quad S_1^{INP} \quad S_2^{INP} \quad S_3^{INP} , \quad (5.69)$$

а его элементы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S_0^{INP} &= 1; \quad S_1^{INP} = (1 - |\dot{P}^{INP}|^2) / (1 + |\dot{P}^{INP}|^2); \\ S_2^{INP} &= (\dot{P}^{INP} + \dot{P}^{INP*}) / (1 + |\dot{P}^{INP}|^2) = 2 \operatorname{Re} \dot{P}^{INP} / (1 + |\dot{P}^{INP}|^2) \\ S_3^{INP} &= j(\dot{P}^{INP} - \dot{P}^{INP*}) / (1 + |\dot{P}^{INP}|^2) = 2 \operatorname{Im} \dot{P}^{INP} / (1 + |\dot{P}^{INP}|^2), \end{aligned} \quad (5.70)$$

где  $\dot{P}^{INP}$  есть поляризационное отношение, характеризующее входную волну.

Определим теперь интенсивность выходной волны (т.е. квадрат проекции её комплексного вектора на комплексный собственный вектор поляризатора) как

скалярное произведение векторов Стокса (5.67) и (5.69), нормированных к параметру  $S_0$ :

$$P^{OUT} = \vec{S}^E \cdot \vec{S}^{INP} = 1 + S_1^E S_1^{INP} + S_2^E S_2^{INP} + S_3^E S_3^{INP}. \quad (5.71)$$

Подставляя в выражение (5.71) элементы нормированных векторов Стокса, определяемых соотношениями (5.68) и (5.70), после простейших преобразований получим

$$P^{OUT} = 2 \frac{|\dot{P}^E|^2 |\dot{P}^{INP}|^2 + \dot{P}^{E*} \dot{P}^{INP} + \dot{P}^E \dot{P}^{INP*} + 1}{|\dot{P}^E|^2 |\dot{P}^{INP}|^2 + |\dot{P}^E|^2 + |\dot{P}^{INP}|^2 + 1}, \quad (5.72)$$

откуда следует, что интенсивность волны на выходе эллиптического поляризатора определяется близостью состояний поляризации входной волны и комплексного собственного вектора поляризатора:

$$P^{OUT} = 2N. \quad (5.73a)$$

Здесь, как и ранее величина  $N$  обозначает близость состояний поляризации. Нетрудно также показать, что интенсивность этой же волны на выходе эллиптического поляризатора, собственный вектор которого ортогонален к собственному вектору поляризатора, рассмотренного выше, определяется как

$$P^{OUT} = 2(1 - N) = 2D, \quad (5.73б)$$

где величина  $D$  есть удаленность состояний поляризации.

### ***5.9. Связь понятий близости состояний поляризации и степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта***

Понятие комплексной степени поляризационной анизотропии радарного объекта, введенное в подразделе 5.2, тесно связано с разложением матрицы рассеяния ( $MP$ ) объекта по системе матриц Паули. Так, в собственном базисе

$MP$ , обладающей собственными числами  $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2$ , это разложение принимает форму

$$\|\dot{S}_{jl}\| = 0.5 \left\{ \dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right\}, (j, l = 1, 2). \quad (5.74)$$

Здесь матрицы  $\hat{\sigma}_0$  и  $\hat{\sigma}_1$  образуют ортогональный базис разложения  $MP$ , а величины  $\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2$  и  $\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2$  представляют собой комплексные значения проекций  $MP$  на орты базиса  $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1$ . При облучении объекта волной круговой поляризации модуль отношения этих величин есть не что иное как модуль кругового поляризационного отношения для рассеянной волны (см. подраздел 5.4):

$$|\dot{\mu}| = \left| \frac{\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2}{\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2} \right| = \left[ \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 C_{\Delta\varphi}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_{\Delta\varphi}} \right]^{0.5} = \operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right). \quad (5.75)$$

Как показано в подразделах 5.3 и 5.5, величина  $\dot{\mu}$  может быть представлена как на комплексной плоскости ( $KП$ ) радиолокационных объектов, так и на поляризационной сфере ( $ПС$ ), связанной с указанной плоскостью стереографической проекцией. При этом начало координат  $KП$  (южный полюс сферы) соответствует трехгранному  $УО$ , а бесконечно удаленная точка плоскости (северный полюс сферы) отвечает двугранному  $УО$ . Рассматривая отношение собственных чисел  $MP$   $\dot{P} = \dot{\lambda}_2 / \dot{\lambda}_1$  в качестве поляризационного отношения, характеризующего объект, можно записать для матриц рассеяния  $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \|\dot{S}_{jl}\|$  соответствующие им поляризационные отношения  $P_0 = 1; P_1 = -1; \dot{P}_s = \dot{\lambda}_2 / \dot{\lambda}_1$ . При этом нетрудно видеть, что величины  $P_0$  и  $P_1$  отвечают ортогональным поляризациям, поскольку удовлетворяют условию ортогональности  $P_0 P_1 = -1$ .

Производя разложение радарного объекта, характеризуемого поляризационным отношением  $\dot{P}_s$ , в ортогональном базисе, характеризуемом величинами  $P_0; P_1$ ,

определим близость состояния поляризации  $\dot{P}_S$  к состояниям поляризации  $P_0; P_1$ , используя выражение (1.82) для близости состояний поляризации:

$$N_{12} = \left| \dot{P}_1 \right|^2 \left| \dot{P}_2 \right|^2 + \dot{P}_1^* \dot{P}_2 + \dot{P}_2^* \dot{P}_1 + 1 / \left| \dot{P}_1 \right|^2 \left| \dot{P}_2 \right|^2 + \left| \dot{P}_1 \right|^2 + \left| \dot{P}_2 \right|^2 + 1 .$$

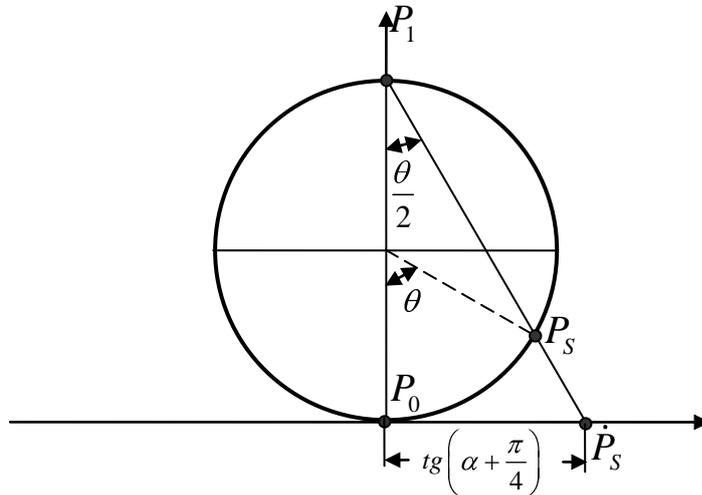


Рис.5.5

Тогда близость состояний поляризации для пар  $\dot{P}_S, P_0$  и  $\dot{P}_S, P_1$  может быть найдена в виде

$$N_{\dot{P}_S, P_0} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 C_{\Delta\varphi}}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}; N_{\dot{P}_S, P_1} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 C_{\Delta\varphi}}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}. \quad (5.76)$$

Второе из соотношений (5.76) представляет собой удаленность состояния поляризации  $\dot{P}_S$  от состояния  $P_0$ , поскольку  $N_{\dot{P}_S, P_1} = 1 - N_{\dot{P}_S, P_0}$ . Из Рис.5.5, на котором изображена стереографическая проекция большого круга сферы единичного диаметра на круговую комплексную плоскость, следует, что

$$\operatorname{tg} \theta/2 = \operatorname{tg} \alpha + \pi/4 = |\dot{\mu}|. \quad (5.77)$$

Тогда

$$N_{\dot{P}_S, P_0} = \cos^2 \theta/2; D_{\dot{P}_S, P_0} = N_{\dot{P}_S, P_1} = 1 - N_{\dot{P}_S, P_0} .$$

Из выражения (5.77) следует, что  $\theta/2 = \alpha + \pi/4$ , где величина угла эллиптичности  $\alpha$  может быть найдена с использованием измеряемого значения коэффициента эллиптичности  $K = \operatorname{tg} \alpha$  как  $\alpha = \operatorname{arctg} K$ . Тогда

$$\begin{aligned} \theta/2 &= \operatorname{arctg} K + \pi/4; \cos(\theta/2) = \cos(\operatorname{arctg} K + \pi/4); \\ \sin(\theta/2) &= \sin(\operatorname{arctg} K + \pi/4). \end{aligned} \quad (5.78)$$

используя выражения (5.78), запишем

$$N \dot{P}_s, P_0 = \cos^2 \theta/2 = 0.5 \left[ 1 - \frac{2K}{1+K^2} \right] = 0.5 (1 - S_{3N}); \quad (5.79)$$

$$D \dot{P}_s, P_0 = \sin^2 \theta/2 = 0.5 \left[ 1 + \frac{2K}{1+K^2} \right] = 0.5 (1 + S_{3N}). \quad (5.80)$$

В выражениях (5.79), (5.80) величина  $S_{3N}$  представляет собой третий нормированный параметр Стокса, измерение которого может быть реализовано при проведении экспериментальных исследований без особых трудностей, поскольку при использовании кругового поляризационного базиса величины  $K$  и  $S_{3N}$  связаны с измеряемой величиной модуля кругового поляризационного отношения простейшими дробно – линейными преобразованиями

$$K = \frac{|\dot{P}_{RL}| - 1}{|\dot{P}_{RL}| + 1}; S_{3N} = \frac{|\dot{P}_{RL}|^2 - 1}{|\dot{P}_{RL}|^2 + 1},$$

как это неоднократно указывалось выше.

## ***ЛИТЕРАТУРА***

1. А.И.Козлов, А.И.Логвин. Развитие радиополяриметрии в России. «Зарубежная радиоэлектроника», №7, 1999.

2. В.А.Сарычев. Сложные сигналы произвольной поляризационной и временной структуры и их использование в электросвязи. «Электросвязь», №7, 2003.
3. Поляризация сигналов в сложных транспортных радиоэлектронных комплексах. Сборник статей под ред. А.И.Козлова и В.А.Сарычева, Изд. «Хронограф», С-т Петербург, 1994, 460 стр.
4. Д.Б.Канарейкин, Н.Ф.Павлов, В.А.Потехин. Поляризация радиолокационных сигналов. «Сов. Радио», М., 1966, 440 стр.
5. Д.Б.Канарейкин, В.А.Потехин, И.Ф.Шишкин. Морская поляриметрия. «Судостроение», Л., 1968, 328 стр.
6. С.И.Поздняк, В.А.Мелитицкий, Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. «Сов. Радио», М., 1974, 480 стр.
7. В.А.Потехин, В.Н.Татаринов. Вопросы классической теории когерентности случайного электромагнитного поля. Изд. Томского госуниверситета, Томск, 1974, 240 стр.
8. В.А.Потехин, В.Н.Татаринов. Теория когерентности электромагнитного поля. «Связь». М., 1978, 208 стр.
9. В.В.Богородский, Д.Б.Канарейкин, А.И.Козлов. Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов. «Гидрометеиздат», Л., 1981, 280 стр.
10. А.П.Родимов, В.В.Поповский. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех в линиях связи. «Радио и связь», М., 1984, 260 стр.
11. J.R.Huynen. Phenomenological theory of radar targets. Drukkerij Bronder – offset n.v., Rotterdam, 1970, 219 pp.
12. А.И.Козлов, А.И.Логвин, В.А.Сарычев. Поляризационная структура радиолокационных сигналов. Научная серия «Поляризация радиоволн», том 1. «Радиотехника», М., 2005, 704 стр.
13. М.Борн, Е.Вольф. Основы оптики. Пер. с англ. под ред. Г.П.Мотулевич. «Наука», М., 1970, 855 стр.

14. Р.Аззам, Н.Башара. Эллипсометрия и поляризованный свет. Пер. с англ. под ред. А.В.Ржанова и К.К.Свиташева. «Мир», М., 1981, 583 стр.
15. Э.О'Нейл. Введение в статистическую оптику. Пер. с англ. под ред. П.Ф.Паршина. «Мир», М., 1966, 254 стр.
16. У.Шерклифф. Поляризованный свет. Пер. с англ. под ред. Н.Д.Жевандрова. «Мир», М., 1965, 264 стр.
17. Д. Гудмен. Статистическая оптика. Пер. с англ. под ред. Г.В.Скороцкого. «Мир», М., 1988, 528 стр.
18. М.Шабат. Введение в комплексный анализ. «Наука», М., 1968, 560 стр.
19. Д.Родс. Введение в моноимпульсную радиолокацию. Пер. с англ. под ред. Л.Д.Бахраха. «Сов. Радио», М., 1966, 155 стр.
20. N.Wiener. Journ. Math. Phys., 1928, v.7, p. 109.
21. N.Wiener. Journ. Franclin Inst., 1929, v.207, p. 525.
22. N.Wiener. Harmonical analysis. Acta Math., 1930, v.55, p. 117.
23. E.Wolf. Nuovo Cimento, 1954, v.12, p. 884.
24. E.Wolf. Nuovo Cimento, 1959, v.13, p. 1165.
25. E.Wolf, L.Mandel. The coherent properties of optical fields. Rev. Mod. Phys. 1965, v.37(2), p. 237.
26. E.Wolf. Proc. Roy. Soc. (London), 1955, v.230, p. 246.
27. J.Parrent, M.Beran. A mutual coherence of a radiation. Nuovo Cimento, 1963, v.27, p. 1049.
28. J.Parrent. The propagation of a mutual coherence. Nuovo Cimento, 1959, v. 23, p.787.
29. U.Fano. Phys. Rev. 1954, v. 93, 121.
30. A.Marathay. The operator formalism in the partial coherence theory. Journ. Opt. Soc. Amer. 1965, v. 55, p.969.
31. A.Marathay. An extension of the commutative problems in the partial coherence theory. Journ. Opt. Soc. Amer. 1966, v. 56, № 5.

32. R.Jones. A new method for optical systems calculation, parts I, II, III. Journ. Opt. Soc. Amer. 1941, v. 31, p.488; Journ. Opt. Soc. Amer. 1941, v. 31, p.493; Journ. Opt. Soc. Amer. 1941, v. 31, p.500.
33. Е Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Пер. с англ. под ред. Д.А.Райкова. «Гостехиздат», М.-Л., 1948, 479 стр.
34. Б.Р.Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, т.1. «Сов. Радио», М., 1966, 728 стр.
35. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. «Гостехиздат», М., 1954, 492 стр.
36. Г Крамер. Математические методы статистики. Пер. с англ. под ред. А.Н.Колмогорова. «Иностран. Литература», М.-Л., 1948, 632 стр.
37. Г.Арфкен. Математические методы в физике. Пер. с англ. под ред. В.В.Чепкунова. «Атомиздат», М., 1970, 712 стр.
38. М.М.Горшков. Эллипсометрия. «Сов. Радио», М., 1974, 200 стр.
39. Н.А.Есепкина, Д.В.Корольков, Ю.Н.Парийский. Радиотелескопы и радиометры. «Наука», М., 1973, 416 стр.
40. G.Sinclair. The transmission and reception of elliptically polarized waves. Proc. IRE, 1950, v.38, p.148-151.
41. V.H.Ramsey. Transmission between elliptically polarized antennas. Proc. IRE, 1951, v.39(5), p.535-540.
42. E.M. Kennaugh. Effects of the type of polarization on echo characteristics. Ohio State University, Antenna Laboratory, Columbus, OH, Reports 389-4; 35 p., and 389-9; 39 p.
43. G.A. Deschamps. Geometrical representation of the polarization of a plane electromagnetic wave. Proc. IRE, 1951, v.39, p. 540-544.
44. E.M. Kennaugh. Polarization properties of radar reflections. M.Sc.Thesis, Dept. of Electrical Engineering, the Ohio State University, Columbus, 1952.
45. J.R.Copeland. Radar targets classification by polarization properties. Proc. IRE, 1960, v.48(7), p. 1290-1296.

46. J.R.Huynen. Radar targets sorting based upon polarization signature analysis. Sci.Rep. № 4/LMSD 288216, Lockheed Missiells and Space Division, Sunnyvale, CA (AF 19/604)5550: declassified 1970.
47. W.M.Boerner, M.B.El-Arimi, C-Y Chan, P.M.Mastoris. Polarization dependence in electromagnetic inverse problems. IEEE Trans. Antennas and propagation, 1981, v. AP-29(2), p. 262-271.
48. W.M.Boerner (editor). Inverse methods in electromagnetic imaging. Proc. of NATO advanced research workshop on inverse method. NATO ACI Series C. Math. and Phys. Sci. D.Reidel Publ. Co. Dordrecht, the Netherlands, 1985.
49. W.M.Boerner (editor). Inverse methods in electromagnetic imaging. Proc. of NATO advanced research workshop on inverse method. NATO ACI Series C. Math. and Phys. Sci. D.Reidel Publ. Co. Dordrecht, Boston, 1992.
50. J.Saillard, E.Pottier, W.M.Boerner. Proc. Radar polarimetry, JIPR-1, University of Nantes, France, March 1990.
51. J.Saillard, E.Pottier, W.M.Boerner. Proc. Radar polarimetry, JIPR-2, University of Nantes, France, March 1992.
52. J.Saillard, E.Pottier, S.R.Cloudé. Proc. Radar polarimetry, JIPR-3, University of Nantes, France, March 1995.
53. S.R.Cloudé, E.Pottier. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry. IEEE Trans. on geoscience's and remote sensing, v.34, № 2, 1996, p.498-518.
54. E.Krogager. Aspects of polarimetric radar imaging. Doctoral (Dr. Sci. Techn) Thesis. Technical University of Denmark, Electromagnetic Institute. Lyngly, DK, 1993, 258 p.
55. E.Luneburg. Radar polarimetry: A revisitation of basis concepts in direct and inverse electromagnetic scattering. Pitman Research notes in matematics. Series № 361, p. 257-273, Addison – Wesley Longman Co. 1996.
56. Z.H.Czyz. Polarization properties of non-symmetrical scattering matrix – a geometrical interpretation. IEEE Trans. AES, 1991, v. 27(5), p. 771-783.
57. Proceedings of the IEEE, v. 53, № 8, 1965.

58. П.Я.Уфимцев. Метод краевых волн в физической теории дифракции. «Сов. Радио», М., 1962, 243 стр.
59. Proceedings of the IEEE, v. 77, № 5, 1985.
60. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, № 5, 1989.
61. Р.В.Островитянов, Ф.А.Басалов. Статистическая теории радиолокации протяженных целей. «Радио и связь», М., 1982, 232 стр.
62. Е.А.Штагер. Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. «Радио и связь», М., 1986, 184 стр.
63. R.E.Kell. On the derivation of bistatic RCS from monostatic measurements. Proc. of the IEEE, v. 53, № 5, 1965, p. 983-988.
64. J.A.Stratton, L.J.Chu. Diffraction theory of electromagnetic waves. Phys. Rev. v. 56, 1939, p. 308-316.
65. Д.Р.Менцер. Дифракция и рассеяние радиоволн. Пер. с англ. под ред. Л.А.Вайнштейна. «Сов. Радио», М., 1958, 148 стр.
66. W.M.Boerner, H.Mott, E. Luneburg and other. Polarimetry in remote sensing – the basis and applied concepts. Chapter 5, 3-rd Edition, ASPRS Publishing, Bethesda, MD, 1997, 94 p.
67. В.О.Кобак. Радиолокационные отражатели. «Сов. Радио», М., 1975, 248 стр.
68. D.Grawes. Radar polarization matrix of power scattering. Proc. IRE, v. 44, № 2, 1956, p. 248-252.
69. V.Tatarinov. 15 Years of Development of Siberian Scientific Polarization School. Proc. of the 3-rd International Workshop on Radar Polarimetry, Nantes, France, March 21 – 23, 1995, pp. 348 – 353.
70. V.Tatarinov. Polarization Invariants of the Scattering Matrix and Stability of their Statistical Characteristics in the Aperture Synthesis Problem. Proc. of the European Conference synthetic Aperture Radar, March 26 – 28, 1996, Königswinter, Germany, pp. 113 – 115.
71. В.А.Хлусов. Кандидатская диссертация, Томск, 1989.

72. В.Н.Татаринов, В.А.Потехин, Е.В.Масалов. Представление матрицы рассеяния. Известия ВУЗов СССР, «Физика», № 17, 10 стр. Деп. ВИНТИ 12.01.83, № 207.
73. В.Н.Татаринов, В.А.Потехин, Е.В.Масалов. Поляризационный контраст искусственных навигационных знаков при использовании псевдонеполаризованного излучения РЛС. Труды IV Всесоюзной научно-технической конференции водного транспорта. М., 1984, с. 194- 198.
74. В.Н.Татаринов, В.А.Хлусов. Полная модель обратного рассеяния взаимных сред. Доклады всесоюзной конференции «Методы и средства дистанционного зондирования атмосферы в интересах авиации», Киев, 1991.
75. В.Н.Татаринов, В.А.Хлусов. Измерение инвариантных поляризационных параметров рассеяния взаимных сред. Доклады всесоюзной конференции «Методы и средства дистанционного зондирования атмосферы в интересах авиации», Киев, 1991.
76. V.Tatarinov, S.Tatarinov, L.Lighthart. Polarization properties of complex radar objects. Proc. of the 4-th international workshop on radar polarimetry, Nantes, France, 1998, p. 419-428.
77. V.Tatarinov, S.Tatarinov. An investigation of speckle-effect in radar image of polarization invariants of complex radar targets. Abstracts of the international workshop on radar polarimetry. Tomsk, Russia, 1997, p. 32.
78. V.Tatarinov, S.Tatarinov, L.Lighthart. Averaged polarization-frequency properties of complex radar targets. Proc. of the 4-th international workshop on radar polarimetry, Nantes, France, 1998, p. 412-418.
79. А.М.Монин, А.М.Яглом. Статистическая гидромеханика, т.2. «Наука», М. 1967, 580 стр.
80. С.В.Татаринов. Комплексная плоскость радиолокационных объектов. Труды Всероссийской конференции «Научная сессия ТУСУР - 2005», Томск, 2005.

81. С.В.Татаринов. Представление радиолокационных объектов на поляризационной сфере. Труды Всероссийской конференции «Научная сессия ТУСУР - 2005», Томск, 2005.
82. С.В.Татаринов, К.В.Марков. Понятие близости состояний поляризации и его связь с измеряемыми в эксперименте величинами. Труды Всероссийской конференции «Научная сессия ТУСУР - 2005», Томск, 2005.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА</b> .....	5
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	10
<b>ГЛАВА 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛНОСТЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b> .....	15
1.1 Понятие поляризации электромагнитных волн. Основные типы и состояния поляризации.....	15
1.2 Эллипс поляризации и параметры Стокса полностью поляризованной волны.....	23
1.3 Представление полностью поляризованной волны вектором Джонса.....	31
1.4 Понятие поляризационного базиса. Линейный, круговой и эллиптический базисы.....	41
1.4.1 Линейный поляризационный базис и декартово поляризационное отношение.....	42
1.4.2 Круговой поляризационный базис.....	44
1.4.3 Эллиптический поляризационный базис.....	51
1.5 Поляризационное отношение в линейном базисе и представление состояний поляризации на декартовой комплексной плоскости.....	59
1.6 Круговое поляризационное отношение и представление состояний поляризации на круговой комплексной плоскости.....	71

1.7	Стереографическая проекция и сферическое представление состояний поляризации.....	75
1.8	Представление поляризации электромагнитных волн на обобщенной комплексной плоскости. Связь между обобщенной комплексной плоскостью и поляризационной сферой.....	83
1.9	Разложение произвольного состояния поляризации в ортогональном базисе и понятие близости состояний поляризации при представлении на комплексной плоскости.....	87
1.10	Сферическая метрика в поляризационном пространстве и близость состояний поляризации.....	92
1.11	Групповые свойства поляризационного отношения.....	100
<b>ГЛАВА 2.</b>	<b>ЧАСТИЧНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....</b>	<b>105</b>
2.1	Комплексный аналитический сигнал.....	106
2.2	Физическое обоснование к введению понятия матрицы когерентности и степени поляризации частично поляризованной волны.....	112
2.3	Спектральная форма матрицы когерентности.....	119
2.4.	Общая форма (2x2) матрицы когерентности и её использование для разложения закона интерференции.....	124
2.5	Разложение матрицы когерентности с использованием системы матриц Паули.....	133
2.6	Трансформация матрицы когерентности и представления параметров Стокса при изменении поляризационного базиса.....	139
2.7	Особые базисы матрицы когерентности.....	146
	2.7.1 Первый особый базис.....	147
	2.7.2 Второй особый базис.....	149
2.8	Степень поляризации суммы некоррелированных потоков излучения.....	152
2.9	Параметрическое описание суммы коррелированных потоков излучения с использованием матриц Дирака.....	158
2.10	Степень поляризации суммы коррелированных потоков излучения	162
2.11	Произвольно ориентированная плоская частично поляризованная волна и (3x3) матрица когерентности. Общая форма (3x3) матрицы когерентности. Степень поляризации произвольно ориентированной волны.....	165
<b>ГЛАВА 3.</b>	<b>ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРОСТЫМИ ПРИБОРАМИ.....</b>	<b>173</b>
3.1	Простые приборы как элементы радиолокационного канала.....	173
3.2	Формализм матрицы Джонса.....	175
3.3	Представление преобразования вектора Джонса фазосдвигающим устройством.....	180
3.4	Трансформация матрицы Джонса при изменении системы базисных векторов.....	190
3.5	Идеальный поляризатор как предельный случай дихроичного прибора.....	195
3.6	Представление преобразований поляризации на комплексной плоскости.....	203
3.7	Представление преобразований поляризационной структуры на	216

	поляризационной сфере.....	
3.8	Фазосдвигающее устройство, реализующее операцию изменения эллиптичности.....	220
3.9	Изменение азимута эллипса поляризации.....	228
3.9.1	Фазосдвигающее устройство с круговыми собственными поляризациями.....	228
3.9.2	Полуволновое устройство с линейными собственными поляризациями.....	232
3.10	Четвертьволновое устройство. Комбинация полуволнового и четвертьволнового устройств.....	238
3.11	Соответствие матриц Паули матрицам Джонса простых приборов	247
3.12	Преобразование матрицы когерентности и вектора Стокса простыми приборами. Матрица Мюллера.....	249
3.13	Соответствие матриц Дирака матрицам Мюллера простых приборов.....	253
3.14	Преобразование вектора Стокса плоской волны антенной с ограниченной апертурой.....	254
3.15	Понятие Стоксова пространства в задаче преобразования поляризации плоских волн простыми приборами.....	258

**ГЛАВА 4. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СТАБИЛЬНЫХ ТОЧЕЧНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ.....** 262

4.1	Матрица рассеяния точечного стабильного радиолокационного объекта.....	263
4.1.1	Понятие простого «точечного» радиолокационного объекта в задачах радиолокации.....	263
4.1.2	Теорема взаимности. Связь понятий матрицы рассеяния и эффективной поверхности рассеяния.....	268
4.1.3	Преобразование элементов однопозиционной матрицы рассеяния при изменении поляризационного базиса.....	270
4.2	Матрицы рассеяния простейших радиолокационных объектов.....	273
4.2.1	Двухвибраторная модель радиолокационного объекта.....	274
4.2.2	Трехгранный уголкоый отражатель.....	278
4.2.3	Двугранный уголкоый отражатель.....	282
4.3	Собственные поляризации радиолокационного объекта.....	287
4.4	Матрица рассеяния мощности. Степень поляризационной анизотропии радиолокационного объекта по мощности.....	289
4.5	Поляризации нулевого сигнала радиолокационного объекта.....	294
4.6	Геометрическое представление поляризационных свойств радиолокационных объектов.....	298
4.6.1	Поляризационное отношение для собственных поляризаций и поляризаций нулевого сигнала радиолокационного объекта.....	298
4.6.2	Геометрическое представление собственных поляризаций и поляризаций нулевого сигнала.....	302
4.7	Представление поляризационной зависимости энергетических величин на сфере Пуанкаре.....	307
4.8	Поляризационная и амплитудная передаточные функции радиолокационного объекта.....	311

**ГЛАВА 5. ИНВАРИАНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОТОЧЕЧНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ**

<b>ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ.....</b>	<b>316</b>
5.1 Декомпозиция матрицы Грейвса с использованием поляризационных инвариантов.....	317
5.2 Комплексная степень поляризационной анизотропии точечного радиолокационного объекта.....	320
5.3 Геометрическое представление степени поляризационной анизотропии на комплексной плоскости радиолокационных объектов.....	324
5.4 Преобразование комплексной плоскости радиолокационных объектов в комплексную плоскость поляризационного отношения рассеянных волн.....	328
5.5 Представление поляризационной анизотропии радиолокационных объектов на поляризационной сфере.....	332
5.6 Близость состояний поляризации радиолокационных объектов на комплексной плоскости.....	336
5.7 Близость состояний поляризации радиолокационных объектов в трехмерном поляризационном пространстве.....	341
5.8 Упрощенное обоснование понятия близости состояний поляризации.....	348
5.8.1 Амплитудная передаточная функция простого прибора. Квадрат модуля амплитудной передаточной функции.....	350
5.8.2 Собственные поляризации простого прибора. Собственные значения передаточных функций комплексной амплитуды и интенсивности.....	354
5.8.3 Матрица Джонса идеального эллиптического поляризатора.....	356
5.8.4 Разложение эллиптически поляризованной волны в ортогональном базисе, образованном осями пропускания двух идеальных ортогональных эллиптических поляризаторов. Простейшее обоснование к введению понятия близости (удаленности) состояний поляризации....	358
5.9 Связь понятий близости состояний поляризации и степени поляризационной анизотропии радиолокационного объекта	367
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>370</b>